

TESE DE
DOUTORADO

Os octonions
e suas aplicações em Física

HECTOR LENY CARRION SALAZAR

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, JUNHO 2003

Dedicatória

*En homenaje al pueblo Brasileño y a los míos, en especial a
las tres montañas donde viví y crecí.*

El hombre

Yo no quiero ser el hombre que se ahoga en su llanto...

de rodillas hechas llaga que se postra al tirano....

No quiero ser el verdugo que de sangre mancha el mundo..

ni arrancar corazones que buscaron la justicia!!.

ni arrancar corazones que amaron la libertad!!

Yo quiero ser como el viento que recorre continentes..

y arrasar tantos males y estrellarlos entre rocas.

Yo quiero ser el hermano que dá mano al caído..

y abrazados ferreamente, vencer mundos que oprimen.

y abrazados ferreamente. vencer mundos inimigos

canto popular de Ayacucho

*À Flávia, minha namorada querida, à minha família e a todas aquelas pessoas que me
deram apoio e força enquanto realizava este trabalho.*

Agradecimentos

Ao CNPQ pela bolsa concedida.

Ao meu orientador Francesco Toppan pelas discussões, ensinamentos, orientação e ajuda na conclusão desta tese.

Ao Professor Jose Helayël, pela valiosa cooperação, amizade, dedicação e ensinamento sem restrições a mim e todos os seus alunos do DCP.

Ao Professor Sebastião Alves Dias pela última revisão desta tese e pelas aulas impartidas com muita qualidade e dedicação no CCP-CBPF.

À minha melhor amiga Sarah, pela sua amizade e colaboração em tudo que permitiu tornar este trabalho mais fácil.

A Moises Rojas, pelas inumeráveis discussões, colaboração e ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

A Myriam Simões Coutinho, secretária da CFC, pela dedicação a seu trabalho e sua valiosa cooperação durante o período de 1997 até hoje.

A German Gomero, Cristine, Rodolfo Casana, Gabriel, Luis Pechc, a Marcelo, ao Prof. Marco Aurelio, a meus colegas e amigos do CBPF, especialmente a meus colegas do CCP.

Ao pessoal da Biblioteca do CBPF, pessoal da CFC, à secretária do DCP, senhora Rosângela, e, finalmente, à senhora Elizete.

Resumo

Introduzimos a afinização supersimétrica da álgebra dos octônions. Esta satisfaz à condição de super-Malcev e é supersimétrica $N = 8$. Sua construção de Sugawara recupera, num limite especial, a álgebra superconforme não associativa $N = 8$ (ASCNA $N = 8$) de Englert *et al.* Supersimetrizamos os resultados obtidos por Osipov no caso bosônico. A existência das transformações de Sugawara assegura que a álgebra superafinizada \hat{O} é compatível com a supersimetria global $N = 8$. A ASCNA $N = 8$ não satisfaz a propriedade de (super) Jacobi, permitindo superar o teorema que estabelece a impossibilidade da presença de cargas centrais nas álgebras (super) conformes com $N > 4$. A presença de cargas centrais nesta álgebra permite a construção das supersimetrias estendidas para $N > 4$ das equações de KdV. Mostramos o primeiro exemplo de uma extensão supersimétrica $N=8$ para SuperKdV.

Classificamos e construímos explicitamente os espinores e a realização quaterniônica e octoniônica das álgebras de Clifford, de uma forma iterativa. Apresentamos a dinâmica livre mais geral dos espinores, para uma assinatura arbitrária do espaço-tempo. Além disso, no caso octoniônico, apresentamos uma lista sistemática de resultados e tabelas como, por exemplo, as identidades satisfeitas pelos tensores octoniônicos antisimétricos de posto maior, e assim por diante.

Summary

A supersymmetric affinization of the octonion algebra is introduced. It satisfies a super-Malcev property and is $N = 8$ supersymmetric. Its Sugawara construction recovers, in a special limit, the non-associative superconformal algebra $N = 8$ (NASCA $N = 8$) of Englert *et al.* It extends to supersymmetry the results obtained by Osipov in the bosonic case. The existence of Sugawara transformations ensures that the superaffine algebra $\hat{\mathcal{O}}$ is compatible with the global $N=8$ supersymmetries. The NASCA $N = 8$ does not satisfy the (super) Jacobi property, what allows us to overcome the no-go theorem which states that central charges are not allowed for superconformal algebras with $N > 4$. The presence of central charges in this algebra permits the construction of the supersymmetric extensions for $N > 4$ KdV equations. The first example for an $N = 8$ supersymmetric extension of the superKdV equation is shown.

Quaternionic and octonionic realizations of Clifford algebras and spinors are classified and explicitly constructed in terms of recursive formulas. The most general free dynamics in arbitrary signature space-times for both quaternionic and octonionic spinors is presented. In the octonionic case we further provide a systematic list of results and tables expressing, e.g., the identities satisfied by the higher-rank antisymmetric octonionic tensors and so on.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Summary	iv
Índice	v
1 Álgebras Divisionais	6
1.1 Introdução	6
1.2 Definição de uma álgebra divisional sobre \mathbb{R}	7
1.3 Octônions e Álgebra de Malcev	10
1.4 Superálgebra e Álgebra de Super-Malcev	14
1.5 Álgebra de Virasoro e Super-Virasoro	16
1.6 Álgebra Afim e Álgebra de <i>Loops</i>	22
2 Álgebra de Malcev Superafinizada $N = 8$	25
2.1 Introdução	25
2.2 Superafinização da Álgebra dos Octônions	27
2.3 Transformações de Sugawara e ASCNA $N=8$	29
3 Espinores e Álgebras de Clifford em Dimensão Arbitrária, Baseados nas	

Álgebras Divisionais dos $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$	38
3.1 Introdução	38
3.2 Álgebras de Clifford	41
3.3 Classificação das Álgebras de Clifford para Qualquer Assinatura e Dimensão Espaço-Temporal	44
3.3.1 Álgebras de Clifford e Álgebras Divisionais	44
3.3.2 Classificação e Construção Explícita	45
3.4 Realização Quaterniônica e Octoniônica das Álgebras de Clifford	56
3.5 Dinâmica de Espinores Livres na Álgebra Divisional dos Quaternions \mathbb{H} e Octônions \mathbb{O}	60
3.5.1 Espinores Reais, Quaterniônicos e Octoniônicos	60
3.5.2 Revisão do Caso Real	68
3.5.3 Espinores Quaterniônicos e sua Dinâmica Livre	69
3.5.4 Espinores Octoniônicos e sua Dinâmica Livre	71
3.6 Identidades para Tensores Octoniônicos Antisimétricos de Posto Superior	72
3.7 Álgebra-M Octoniônica e Supersimetrias Generalizadas	81
A Trabalhos publicados	97

Introdução

As simetrias desempenham um papel importante na Física e, conseqüentemente, na formulação de leis físicas. A teoria dos grupos é, em essência, a estrutura matemática que estuda as simetrias, e os grupos estão intimamente relacionados com as álgebras. Podemos mencionar, de modo superficial, que por exponenciação dos elementos das álgebras de Lie podemos recuperar elementos do grupo de Lie [1].

O programa de unificação busca a descrição unificada de todas as interações fundamentais e, neste sentido, a teoria das cordas e supercordas é a candidata com maior prestígio e consistência para ser tal teoria unificadora, pois já se sabe que a supergravidade é uma teoria efetiva a baixas energias da teoria das supercordas. Um ingrediente matemático importante na construção das teorias fundamentais da natureza é a supersimetria. A teoria de supercordas e a supergravidade precisam da supersimetria por razões de consistência. Mesmo a teoria quântica de campos precisa dela, por exemplo, para solução de problemas como o das hierarquias de calibre.

Depois do trabalho inicial de M. Virasoro no final dos anos 60 a álgebra de Virasoro e super-Virasoro foram estudadas dentro do contexto da teoria das cordas e supercordas [2]. Em outro contexto, a álgebra de Virasoro aparece naturalmente na teoria de campos em 2D com simetria conforme (em duas dimensões o grupo conforme é infinito-dimensional) [3]. Este assunto vai ser detalhado um pouco mais no final do capítulo 1.

Desde os trabalhos de Jordan [4] houve tentativas de introduzir os octônions na Física.

Recentemente, em conexão com um programa específico de unificação que utiliza supersimetria, foi proposta uma descrição octonônica das supercordas [5, 6]. Já em [32] pode-se observar que existe uma conexão entre as álgebras divisionais e as supersimetrias estendidas, $N = 1, 2, 4, 8$. Neste mesmo artigo também são dados alguns resultados matemáticos relativos à relação entre os octônions e as álgebras de Lorentz e de Jordan. Porém um tratamento mais desenvolvido dá-se em [33]. Além disso, a caracterização da esfera S^7 através dos octônions foi considerada em [37, 38]. Dentro do contexto da supersimetria, na referência [19] introduz-se a supersimetrização da álgebra dos octônions, constrói-se uma álgebra superafinizada octonônica, usando-se as transformações de Sugawara e, considerando-se processos adequados de limite, recupera-se uma álgebra superconforme estendida e não-associativa $N = 8$ (ASCNA $N = 8$, introduzida pela primeira vez por Englert *et al* [23]). Desta forma, mostra-se também que existem duas formas de implementar a supersimetria global $N = 8$, seja através de uma representação matricial, ou utilizando os octônions [72, 73]. Com a ASCNA $N = 8$ constrói-se a extensão supersimétrica das equações tipo KdV, onde demonstra-se que existe uma única extensão $N = 8$ da equação de KdV, invariante sob uma supersimetria global $N = 8$ octonônica.

Na Matemática e na Física, as álgebras de Clifford têm sido muito estudadas (desde uma perspectiva puramente matemática, podemos citar [7, 31]). Na Física têm sido usadas, por exemplo, para o estudo e classificação das superálgebras e supersimetrias estendidas (ver [34, 42]). Uma relação clara entre as álgebras divisionais e as álgebras de Clifford pode ser observada também em [33]. Na referência [35], explorando a peculiaridade das representações irredutíveis “tipo Weyl” das álgebras de Clifford, estabelece-se uma correspondência um a um entre as supersimetrias estendidas em 1D e as álgebras de Clifford tipo Weyl reais, conseguindo-se desta forma a classificação das supersimetrias estendidas em 1D. Em particular, na referência [36] generalizam-se os resultados

da referência anterior para o caso onde as álgebras de Clifford tipo Weyl tomam valores octonionicos e as supersimetrias estendidas são construídas com espinores octonionicos.

Por outro lado, nos últimos tempos, está sendo relevante o estudo e classificação das supersimetrias generalizadas com presença de cargas centrais tensoriais. Em especial, a assim chamada superálgebra- M (construída com supercargas reais), subjacente à teoria- M (teoria que talvez tenha a maior relevância no contexto da grande unificação das interações fundamentais), tem sido motivo de muita atenção. Neste sentido, nas referências [42, 43] foi mostrado que a superálgebra- M admite uma representação octonionica consistente. Assim, na referência [71] estuda-se a classificação das álgebras de Clifford com valores na álgebra divisional, o que, por sua vez, permite o estudo e classificação da dinâmica livre mais geral de espinores que tomam valores na álgebra divisional. Finalmente, apresentam-se algumas identidades dos tensores octonionicos antissimétricos nas diversas dimensões que logo serão úteis no estudo das álgebras supersimétricas generalizadas (como, por exemplo, a álgebra- M em $11D$).

Dentro do contexto do estudo das simetrias na Física, colocado em destaque no início desta introdução, desenvolvemos, em nosso grupo de pesquisa, um outro trabalho [84], onde estudamos as simetrias residuais de uma teoria quântica de campos, com acoplamento a um campo eletromagnético externo de fundo. Neste artigo demonstramos que, devido à presença de cargas centrais na álgebra residual, esta não é mais subálgebra da álgebra associada à teoria inicial, sem o campo eletromagnético de fundo; no mesmo artigo também consideramos a versão supersimétrica do problema anterior.

Nesta tese, basicamente, vamos nos concentrar nas aplicações da álgebra divisional, em particular a dos octônions, na formulação de algumas supersimetrias estendidas e nas supersimetrias generalizadas (com cargas centrais tensoriais) que, atualmente, têm muito interesse na Física.

A tese está organizada da seguinte forma. Temos a introdução principal, três capítulos com suas respectivas introduções, as conclusões da tese, a bibliografia e, por último, um apêndice onde apresento os trabalhos publicados com minha participação durante minha permanência no CBPF.

No capítulo 1 basicamente apresentamos e discutimos alguns resultados matemáticos de nosso interesse, que serão úteis no contexto dos capítulos 2 e 3.

Neste sentido, fazemos um breve resumo sobre as álgebras divisionais, onde definimos as álgebras dos octônions e as álgebras de Malcev e Super-Malcev. Em seguida, apresentamos de forma simples a álgebra de Virasoro e a de super-Virasoro, com a finalidade principal de familiarizar o leitor a respeito destes assuntos.

No capítulo 2 mostramos a superafinização da álgebra dos octônions usando supercampos fermiônicos, de forma manifestamente supersimétrica. Construimos as transformações de Sugawara que mapeiam a álgebra superafinizada numa álgebra superconforme $N = 8$ não-associativa, obtida via um processo de renormalização dos colchetes de Poisson, para fechar a álgebra. O problema de achar a álgebra $N = 8$ superconforme não-associativa foi resolvido através de computação algébrica, usando um pacote de Mathematica desenvolvido para calcular a expansão de produtos de operadores (OPE) [24]. O fato de que a ASCNA $N = 8$ está construída com 8 campos fermiônicos e 8 bosônicos assegura que esta superálgebra afinizada $\hat{\mathcal{O}}$ é compatível com uma supersimetria global $N = 8$. Adicionalmente, construimos as 8 cargas supersimétricas globais. Na última parte deste capítulo, apresentamos os principais resultados de outro trabalho relativo à construção do primeiro exemplo da extensão supersimétrica $N = 8$ das equações de KdV, partindo de uma hamiltoniana mais geral com simetria ASCNA $N = 8$ e também fazendo uma revisão das equações $N = 2, 4$ SuperKdV na linguagem da álgebra divisional.

O capítulo 3 começa com a apresentação da álgebra de Clifford, mostrando alguns

exemplos para visualizar a conexão entre elas e as álgebras divisionais. Logo, construímos explicitamente as representações das álgebras de Clifford tomando valores reais nas diversas dimensões e assinaturas via um algoritmo proposto. Em seguida, realizamos a classificação das mesmas, construindo e classificando as álgebras de Clifford que tomam valores quaterniônicos e octoniônicos (não-associativas).

Na sequência, apresentamos os espinores que tomam valores na álgebra divisional e revisamos a classificação da dinâmica livre dos espinores que tomam valores reais nas diversas dimensões e assinaturas. Da mesma forma que no caso real, estudamos e classificamos a dinâmica livre de espinores quaterniônicos e octoniônicos. Para tal, usamos condições de existência e de realidade para analisar a presença ou não dos termos cinéticos (K) e massivos (M) na lagrangiana livre, nas diversas dimensões e assinaturas. Mostramos os resultados numa série de tabelas para os diversos casos (real, quaterniônico e octoniônico).

Na parte final deste capítulo, estudamos e apresentamos novas identidades dos tensores octoniônicos antissimétricos em diversas dimensões. Estas identidades serão úteis no estudo das álgebras supersimétricas generalizadas, especialmente as octoniônicas, nas diversas dimensões, tendo aplicações, em particular, à álgebra-M, definida em 11D.

Como indicador da originalidade e relevância desta tese, poderia ressaltar que, durante minha permanência no CBPF, como aluno do programa de doutoramento, a partir de 2000, publiquei 5 artigos em revistas internacionais e um na Revista Brasileira de Física, tendo outro em processo de redação (ver apêndice A). Devo também mencionar que os artigos [19, 73, 36, 71] foram desenvolvidos dentro de um grupo de pesquisas do qual sou integrante, liderado pelo professor Francesco Toppan (CBPF) e com a participação do aluno Moisés R. Leyva (CBPF).

Capítulo 1

Álgebras Divisionais

1.1 Introdução

As álgebras divisionais mais conhecidas são as dos reais \mathbb{R} , complexos \mathbb{C} , e quatérnions \mathbb{H} (por exemplo, a identidade e as três matrizes de Pauli formam a álgebra divisional dos quatérnions). Existe uma última álgebra divisional, menos conhecida, a dos *octônions*. Antes de entrar em detalhes em relação a esta peculiar álgebra divisional vamos comentar algumas idéias básicas sobre as álgebras divisionais em geral.

Podemos considerar uma *álgebra* A sobre os reais¹ como um espaço vetorial equipado com um mapeamento bilinear $\mathcal{M} : A \times A \rightarrow A$ chamado de “multiplicação” e o elemento “unidade” denotado por 1 tal que $1 \in A$ e $\mathcal{M}(1, a) = \mathcal{M}(a, 1) = a$. Como é usual, vamos abreviar $\mathcal{M}(a, b) = ab$.

¹uma álgebra se define sobre o chamado *campo*, este campo usualmente são os reais ou os complexos

1.2 Definição de uma álgebra divisional sobre \mathbb{R}

Uma álgebra divisional sobre \mathbb{R} (ou, uma álgebra divisional real) é por definição um espaço linear real A de dimensão finita com o produto bilinear [7]

$$\begin{aligned}\mathcal{M}: \quad A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow ab,\end{aligned}$$

tal que $\forall a, b \in A$,

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0. \quad (1.2.1)$$

Equivalentemente, A é uma álgebra divisional, se a operação de “multiplicação” pela direita e pela esquerda por qualquer elemento não-nulo da álgebra é inversível.

As álgebras divisionais admitem também uma operação de *anti-evolução* (conjugação), tal que

$$(a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^*a^*. \quad (1.2.2)$$

A operação de conjugação corresponde à transposição na representação matricial.

Uma álgebra divisional A é *normada* se existe a forma quadrática \mathcal{N} positivo-definida

$$\begin{aligned}\mathcal{N}: \quad A &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ a &\rightarrow \mathcal{N}(a) = a^*a,\end{aligned}$$

tal que $\forall a, b \in A$

$$\mathcal{N}(ab) = \mathcal{N}(a)\mathcal{N}(b). \quad (1.2.3)$$

Uma álgebra é **alternativa** se a subálgebra gerada por qualquer par de elementos é associativa. De acordo com o teorema de Emil Artin [10], se $\forall a, b \in A$ se satisfaz:

$$a(ab) = a^2b, \quad (ab)b = ab^2, \quad (1.2.4)$$

então a álgebra A é **alternativa**.

Se a subálgebra gerada por três elementos quaisquer é associativa, então a álgebra é associativa. Para verificar se uma álgebra não-associativa é ou não **alternativa** usamos o conceito de **associador**. O associador é um mapeamento trilinear

$$\begin{aligned} [\dots, \dots, \dots] : \quad A^3 &\rightarrow A \\ (a, b, c) &\rightarrow [a, b, c] = (ab)c - a(bc), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

que mede a falha da associatividade, assim como o comutador mede a falha da comutatividade.

Podemos mencionar alguns resultados importantes relacionados à álgebra divisional.

- Teorema de Frobenius (1878): qualquer álgebra divisional associativa sobre \mathbb{R} é isomorfa a \mathbb{R}, \mathbb{C} , ou \mathbb{H} .
- Teorema de Hurwitz: qualquer álgebra divisional normada sobre \mathbb{R} com elemento unidade é isomorfa a \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{O} [9, 10].
- Qualquer álgebra divisional alternativa sobre \mathbb{R} é isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, ou \mathbb{O} [10, 11].
- Qualquer álgebra divisional sobre \mathbb{R} tem dimensão 1, 2, 4 ou 8 [12].

De uma forma resumida e concreta, podemos afirmar que :

\mathbb{R} é álgebra divisional real, associativa e normada.

\mathbb{C} é álgebra divisional comutativa, associativa e normada.

\mathbb{H} é álgebra divisional não-comutativa, associativa e normada.

\mathbb{O} é álgebra divisional não-comutativa, alternativa e normada.

Em seguida, vamos apresentar a álgebra divisional dos quatérnions, a qual designaremos, daqui em diante, apenas por **quatérnions**. Os quatérnions \mathbb{H} são uma álgebra 4-dimensional, com base $\{\tau_0, \tau_i\}$ $i = 1, 2, 3$ e a seguinte tabela de multiplicação.

Tabela de multiplicação.

τ_0	τ_1	τ_2	τ_3
τ_1	$-\tau_0$	τ_3	$-\tau_2$
τ_2	$-\tau_3$	$-\tau_0$	τ_1
τ_3	τ_2	$-\tau_1$	$-\tau_0$

De acordo com a tabela :

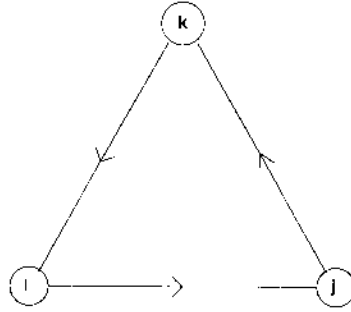
- τ_0 é o elemento identidade ($\tau_0 \equiv 1$).
- $\tau_i^2 = -1, \forall i = 1, 2, 3$. (τ_i são os chamados quatérnions imaginários)
- $\tau_i \tau_j = \tau_k, \tau_j \tau_i = -\tau_k$, onde $i, j, k = 1, 2, 3$. (para $i \neq j$)

A multiplicação dos quatérnions imaginários pode ser expressa através da seguinte forma compacta:

$$\tau_i \cdot \tau_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad (1.2.6)$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor totalmente antisimétrico, $\epsilon_{123} = 1$.

Uma forma fácil de lembrar a estrutura da tabela de multiplicação é usar a seguinte figura:



Quando multiplicamos dois elementos seguindo o sentido horário obtemos o próximo, por exemplo, $\tau_i \tau_j = \tau_k$. No entanto, quando multiplicamos dois elementos com sentido anti-horário, obtemos *menos* o próximo elemento, $\tau_j \tau_i = -\tau_k$.

1.3 Octônions e Álgebra de Malcev

A álgebra de **Cayley**, também chamada de **oitavas** ou **álgebra dos octônions** é denotada por \mathbb{O} , sendo uma álgebra divisional alternativa de dimensão 8 [8, 14, 15]. Um octônion \mathbf{x} é representado como $\mathbf{x} = x_a \tau_a$ ² onde $x_a \in \mathbf{R}$, τ_a denota a base dos octônions e $a = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$. Explicitamente

$$\mathbf{x} = x_0 + x_\alpha \tau_\alpha, \tag{1.3.7}$$

onde $\alpha = 1, \dots, 7$ e $x_0, x_\alpha \in \mathbf{R}$. τ_α são os chamados octônions imaginários, com a seguinte regra de multiplicação

$$\tau_\alpha \cdot \tau_\beta = -\delta_{\alpha\beta} \tau_0 + C_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma,$$

com $C_{\alpha\beta\gamma}$ completamente antisimétricos. Introduzimos também o tensor dual de $C_{\epsilon\zeta\eta}$ em 7 dimensões definido por $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

²Consideramos soma sobre os índices repetidos.

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta}C_{\epsilon\zeta\eta}$$

onde $\varepsilon_{1234567} = 1$ (tensor totalmente antisimétrico). Os únicos tensores diferentes de zero são os dados na tabela abaixo, o resto sendo identicamente zero.

Multiplicação dos octônions:

$$(\tau_a \cdot \tau_b) \cdot \tau_c \neq \tau_a \cdot (\tau_b \cdot \tau_c).$$

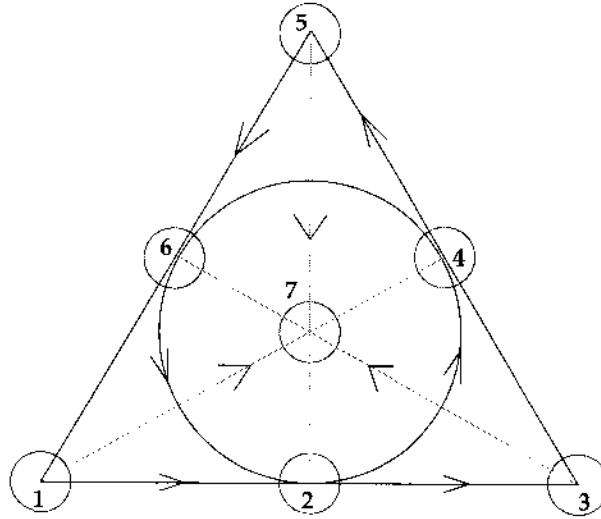
Para a, b, c gerais esta multiplicação não é associativa.

Comutador :

$$\begin{aligned} [\tau_a, \tau_b] &=_{def} \tau_a \cdot \tau_b - \tau_b \cdot \tau_a = f_{abc}\tau_c, \\ f_{abc} &= 2C_{abc}, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

onde f_{abc} são as chamadas constantes de estrutura.

$C_{\alpha\beta\gamma}$	$C_{\kappa\lambda\mu\nu}$
$C_{123} = 1$	$C_{4567} = 1$
$C_{354} = 1$	$C_{1276} = 1$
$C_{165} = 1$	$C_{2374} = 1$
$C_{147} = 1$	$C_{2356} = 1$
$C_{257} = 1$	$C_{1346} = 1$
$C_{367} = 1$	$C_{1245} = 1$
$C_{246} = 1$	$C_{1357} = 1$



Como dito anteriormente, a álgebra dos octônions satisfaz a relação (1.2.4) e portanto é uma álgebra alternativa. Podemos visualizar este fato, tomando dois elementos arbitrários dos octônions, como por exemplo $a = \tau_1$, $b = \tau_4$, e multiplicando-os de duas maneiras distintas:

$$\tau_1(\tau_1\tau_4) \equiv (\tau_1)^2\tau_4.$$

$$(\tau_1\tau_4)\tau_4 \equiv \tau_1(\tau_4)^2$$

É interessante mencionar que o grupo de automorfismos dos octônions é o grupo excepcional³ de Lie G_2 de dimensão 14 [8, 13, 16]. Estes automorfismos, acrescidos das transformações lineares de multiplicação pela direita e pela esquerda por octônions imaginários, geram o grupo $SO(8)$ de 28 geradores ($\frac{1}{2}(8 \cdot 7) = 14 + 7 + 7$). Podemos mostrar também, numa tabela, os automorfismos das 4 álgebras divisionais:

³Os 5 grupos excepcionais são G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 .

Álgebra	automorfismos
\mathbb{R}	Idntidade
\mathbb{C}	C_2
\mathbb{H}	$SU(2)$
\mathbb{O}	G_2

Além disso, de acordo as referências [17, 32] existe uma relação entre os grupos de Lorentz Minkowskianos (com assinatura tipo $(1, d - 1)$, onde d é a dimensão do espaço-tempo) e as álgebras divisionais. Especificamente, existe um isomorfismo entre os grupos de cobertura dos grupos de Lorentz Minkowskianos e os grupos $Sl(2)$ com valores nas álgebras divisionais, da seguinte forma:

$$\overline{SO(2, 1)} \sim Sl(2, \mathbb{R}).$$

$$\overline{SO(3, 1)} \sim Sl(2, \mathbb{C}).$$

$$\overline{SO(5, 1)} \sim Sl(2, \mathbb{H}).$$

$$\overline{SO(9, 1)} \sim Sl(2, \mathbb{O}).$$

(1.3.9)

Álgebra de Malcev :

É uma generalização do conceito de álgebra de Lie. Uma álgebra L , definida através do comutador $[\dots, \dots] : L \times L \rightarrow L$, é de Malcev se satisfaz às seguintes idntidades :

$$[X, X] = 0,$$

$$J(X, Y, [X, Z]) = [J(X, Y, Z), X], \quad (1.3.10)$$

para um dado triplete X, Y, Z de elementos da álgebra L . $J(X, Y, Z)$ é o Jacobiano, definido como :

$$J(X, Y, Z) = [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y].$$

(1.3.11)

Pode-se mostrar que a álgebra dos octônions é uma álgebra tipo Malcev [18]

1.4 Superálgebra e Álgebra de Super-Malcev

Um exemplo simples de estrutura graduada se apresenta na soma usual dos números inteiros,

$$\begin{aligned} \text{par} + \text{par} &= \text{par} \\ \text{par} + \text{ímpar} &= \text{ímpar} \\ \text{ímpar} + \text{ímpar} &= \text{par}. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Esta operação de *adição* pode ser re-interpretada como o *produto* (\star) do grupo aditivo dos inteiros, logo (1.4.12) podendo ser expressa como

$$\begin{aligned} \text{par} \star \text{par} &= \text{par} \\ \text{par} \star \text{ímpar} &= \text{ímpar} \\ \text{ímpar} \star \text{ímpar} &= \text{par}. \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Outro exemplo de estrutura *graduada* é o grupo cíclico de ordem 2, \mathbb{Z}_2 , com elementos $\{\mathbf{e}, \mathbf{a}\}$, operação de multiplicação (\star) e a seguinte tabela de multiplicação

\star	e	a
e	e	a
a	a	e

(1.4.14)

Observe-se que \mathbf{e} é o elemento identidade. Comparando (1.4.13) e (1.4.14) podemos dizer que \mathbf{e} é *par* e \mathbf{a} é *ímpar*. Devido a esta identificação sempre que aparecer a estrutura

(1.4.13) podemos confirmar a presença da álgebra graduada \mathbb{Z}_2 . É possível construir estruturas graduadas mais complexas. Porém, nesta tese, vamos sempre nos referir a \mathbb{Z}_2 .

Álgebra de Lie graduada com \mathbb{Z}_2

Definimos uma álgebra de Lie graduada G fornecendo um mapeamento bilinear, denotado por: $[\cdot, \cdot] : G \times G \longrightarrow G$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

i) É uma álgebra graduada

$$G = G_0 \oplus G_1, \quad (1.4.15)$$

onde :

$$\begin{aligned} [G_0, G_0] &\subset G_0 \\ [G_0, G_1] &\subset G_1 \\ [G_1, G_1] &\subset G_0 \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

ii) O supercomutador está definido como :

$$[X, Y] = X \cdot Y - (-1)^{\epsilon(X)\epsilon(Y)} Y \cdot X \quad (1.4.17)$$

onde,

$$\epsilon(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \in G_0 \text{ (} X \text{ é par).} \\ 1 & \text{se } X \in G_1 \text{ (} X \text{ é ímpar).} \end{cases}$$

iii) O super-Jacobiano $J(X, Y, Z)$ definido como

$$\begin{aligned} J(X, Y, Z) &= (-1)^{\epsilon_X \epsilon_Z} [X, [Y, Z]] + (-1)^{\epsilon_Y \epsilon_X} [Y, [Z, X]] \\ &\quad + (-1)^{\epsilon_Z \epsilon_Y} [Z, [X, Y]]. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Ele satisfaz :

$$J(X, Y, Z) \equiv 0 \quad (1.4.19)$$

Podemos fazer um comentário neste momento: a superálgebra de Lie definida anteriormente é muito familiar e usual na Física, em particular na supersimetria. Analisemos, então, o supercomutador ou supercolchete (1.4.17) :

a) Se $X, Y \in G_0$ então

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X, \quad (1.4.20)$$

obtemos a definição usual de *comutador*. Isto nos leva a identificar G_0 como a subálgebra **bosônica** da superálgebra G .

b) Se $X, Y \in G_1$ então o supercomutador passa a ser o *anticomutador*

$$\{X, Y\} = X \cdot Y + Y \cdot X, \quad (1.4.21)$$

o que identifica G_1 como a componente **fermiônica** da superálgebra G

Álgebra Super-Malcev

Uma álgebra de super-Malcev é dada pelo supercomutador $\{ \dots, \dots \}$, definido em (1.4.17), e satisfaz às duas propriedades seguintes:

$$\begin{aligned} [X, X] &= 0, \\ J(X, Y, [X, Z]) &= [J(X, Y, Z), X], \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

para um dado triplete X, Y, Z de elementos da superálgebra G , onde $J(X, Y, Z)$ é o Super-Jacobiano definido por (1.4.18). Observe que esta definição é basicamente a extensão graduada da álgebra de Malcev dada em (1.3.10) e (1.3.11).

1.5 Álgebra de Virasoro e Super-Virasoro

As teorias de campos conformes têm sido muito importantes na Física, em particular na Física Estatística e na Teoria das Cordas. Por exemplo, a ação de Polyakov, além de ser

invariante de Poincaré e por diffeomorfismos, também tem a seguinte invariância conforme ou de Weyl

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Omega(x)g_{\mu\nu}; \quad \Omega(x) \equiv e^{w(x)}, \quad (1.5.23)$$

ou, na versão infinitesimal,

$$\delta g_{\mu\nu} = w g_{\mu\nu}, \quad \text{onde } w(x) \text{ é arbitrário.} \quad (1.5.24)$$

A invariância por diffeomorfismos leva à conservação do tensor momentum-energia $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, e a invariância conforme leva à condição de traço nulo para o tensor momentum-energia $T^\mu{}_\mu = 0$.

Em geral, as transformações conformes num espaço-tempo plano de dimensão D ($D > 2$) formam o *grupo conforme* de dimensão finita. Basicamente o grupo conforme está constituído pelas *transformações de Poincaré*, *transformações de escala* e as *transformações conformes especiais*.

Em duas dimensões ($D = 2$) a situação da invariância conforme é especial e interessante. Consideremos o plano $2D$ e a transformação $(t, x) \rightarrow (z, \bar{z})$ da seguinte forma

$$z = x + it$$

$$\bar{z} = x - it, \quad \text{caso Euclidiano, (complexificado)}$$

ou

$$z = x + t$$

$$\bar{z} = x - t, \quad \text{caso Minkowskiano.}$$

O grupo conforme G em duas dimensões consiste em todas as transformações globais da forma

$$\Gamma : z \rightarrow \xi(z), \quad \bar{\Gamma} : \bar{z} \rightarrow \xi(\bar{z}), \quad (1.5.25)$$

onde Γ ($\bar{\Gamma}$) é o grupo da mais geral transformação de coordenadas em $1D$ ou equivalentemente é o grupo dos *diffeomorfismos* de uma dimensão. Logo G é dado pelo produto direto

$$G = \Gamma \otimes \bar{\Gamma}. \quad (1.5.26)$$

A álgebra associada ao grupo Γ é denominada *álgebra de De Witt*. Se denominamos \mathcal{G} a álgebra associada ao grupo G , então :

$$\mathcal{G} = Witt \oplus Witt \quad (1.5.27)$$

Na literatura especializada cada componente de (1.5.27) é chamado de componente quiral e antiquiral da álgebra conforme em duas dimensões, respectivamente. Consideremos as transformações infinitesimais do grupo Γ como: $z \rightarrow z + \varepsilon(z)$. Tomando $\varepsilon(z)$ como uma função infinitesimal analítica, ela pode ser representada como uma série infinita de Laurent

$$\varepsilon(z) = \sum \varepsilon_n z^{n+1}, n \in \mathbf{Z}. \quad (1.5.28)$$

Logo, as transformações infinitesimais

$$z \rightarrow z + \sum \varepsilon_n z^{n+1}, \quad (1.5.29)$$

são geradas pelo operador

$$l_n = z^{n+1} \frac{d}{dz}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5.30)$$

com as seguintes relações de comutação

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}. \quad (1.5.31)$$

Esta análise pode se repetir para o grupo $\bar{\Gamma}$, onde teremos também a álgebra

$$[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n - m)\bar{l}_{n+m}, \text{ com } \bar{l}_n = z^{n-1} \frac{d}{d\bar{z}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5.32)$$

O número de geradores da álgebra (1.5.31) é infinito, ou seja a *álgebra conforme em 2D* é *infinito-dimensional*, diferentemente da álgebra conforme em dimensões mais altas, que é finito-dimensional.

A álgebra de De Witt admite uma única extensão central [28] $w : Witt \times Witt \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $w = \frac{m^3 - m}{12} \delta_{n+m,0}$,

$$\mathcal{L}_Z = Witt \oplus \mathbb{C} \mathbf{c} \quad (\text{Álgebra de Virasoro}), \quad (1.5.33)$$

com as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [l_n, \mathbf{c}] &= 0, \\ [l_n, l_m] &= (n - m)l_{n+m} + \mathbf{c} \frac{m^3 - m}{12} \delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

onde o valor da carga central “ \mathbf{c} ” é o parâmetro da teoria. O fator numérico, que aparece ao lado da carga central, foi, na verdade, uma escolha apropriada para que os geradores l_{-1}, l_0, l_1 formem uma subálgebra $sl(2, \mathbf{R})$ tal que $sl(2, \mathbf{R}) \subset Witt$. Sem perder generalidade, poder-se-ia fazer uma redefinição dos geradores l_n tal que o fator numérico ao lado direito da carga central fosse m^3 .

No início desta seção tínhamos comentado as conseqüências da invariância por difeomorfismos e da invariância de Weyl para a ação de Polyakov, no contexto das teorias de cordas. Se considerarmos as mesmas simetrias para uma teoria de campo num espaço-tempo plano de duas dimensões, teremos $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, e $T^\mu{}_\mu = 0$. Como conseqüência destas duas condições, o tensor momentum-energia pode ser quebrado em uma parte holomórfica e outra anti-holomórfica. Logo, no plano complexo $\mathbb{C}^2 - \{z = 0\}$

$$T_{zz} = T(z), \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z}). \quad (1.5.35)$$

Assim, podemos fazer a expansão em série de Laurent

$$T(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}. \quad (1.5.36)$$

Os coeficientes de Laurent, conhecidos como geradores de Virasoro estão dados por

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+2} T(z), \quad (1.5.37)$$

(com uma expressão similar para \bar{L}_n). Na verdade, os L_n definidos pela equação (1.5.37) satisfazem à álgebra de Virasoro (1.5.34) o que faz com que $T(z)$ ($\bar{T}(z)$) também possam ser considerados como geradores das transformações infinitesimais do grupo Γ ($\bar{\Gamma}$).

Os valores esperados do *produto local de operadores* (ou *funções de correlação*) são objetos básicos de interesse na teoria quântica de campos e na teoria de cordas:

$$\langle A \rangle = \langle \mathcal{A}_1(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{A}_2(z_2, \bar{z}_2) \dots \mathcal{A}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle, \quad (1.5.38)$$

onde $\mathcal{A}_i(z_i, \bar{z}_i)$ forma parte de uma base de operadores locais. É importante entender o comportamento destes valores esperados no limite em que os argumentos de dois operadores aproximam-se um do outro. A ferramenta que dá uma descrição sistemática deste limite é a *expansão de produto de operadores* (usaremos a sigla “*OPE*” para design-la, devido à expressão em inglês *operator product expansion*). Ela determina que o produto local de operadores de argumentos muito próximos pode ser aproximado, com exatidão arbitrária, como uma soma local de operadores [3]:

$$\mathcal{A}_i(z) \mathcal{A}_j(w) \sim \sum_k C^k_{ij}(z-w) \mathcal{A}_k(w), \quad z, w \in \mathbb{C}^2. \quad (1.5.39)$$

Devido à transformação infinitesimal $z \rightarrow z' = z + \varepsilon(z)$, os campos locais $\mathcal{A}_i(z)$ transformam-se como

$$\delta_\varepsilon \mathcal{A}_i(z, \bar{z}) = \oint_{C_z} d\eta \varepsilon(\eta) T(\eta) \mathcal{A}_i(z, \bar{z}), \quad (1.5.40)$$

onde o contorno C_z cerca o ponto z . A mesma fórmula vale (com a substituição $T \rightarrow \bar{T}$) se a transformação infinitesimal for $\bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z})$. A variação $\delta_\varepsilon \mathcal{A}_i$ pode-se expressar também em termos de comutadores a tempo fixo

$$\delta_\varepsilon \mathcal{A}_i(\sigma, \tau) = [T_\varepsilon, \mathcal{A}_i(\sigma, \tau)], \quad (1.5.41)$$

onde o gerador T_ϵ está definido pela fórmula

$$T_\epsilon = \oint_{\log|z|=\tau} \epsilon(z)T(z)dz. \quad (1.5.42)$$

As variações $\delta_\epsilon T$ e $\delta_\epsilon \bar{T}$ devem ser expressas linearmente em termos dos mesmos campos T , \bar{T} e suas derivadas. Tomando em conta a dimensionalidade do campo $T(z)$ ($[T] = 2$) e razões de analiticidade, podemos escrever a expressão mais geral para as variações $\delta_\epsilon T$

$$\delta_\epsilon T(z) = \epsilon(z)T' + 2\epsilon'(z)T(z) + \frac{1}{12}\mathbf{c}\epsilon'''(z). \quad (1.5.43)$$

Observa-se que $\delta_\epsilon T(z) = 0$, pelo fato de T depender somente de z .

A seguinte relação,

$$T(z)T(w) = \frac{\mathbf{c}/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w), \quad (1.5.44)$$

é equivalente a (1.5.43), de tal forma que, utilizando a equação (1.5.40), podemos recuperar a expressão (1.5.43) (ver detalhes em [3, 27]). De forma similar a expressão

$$[T_\epsilon, T(z)], = \epsilon(z)T' + 2\epsilon'(z)T(z) + \frac{1}{12}\mathbf{c}\epsilon'''(z), \quad (1.5.45)$$

é equivalente a (1.5.43), o que pode ser verificado utilizando (1.5.41) (ver detalhes em [3, 27]).

Introduzindo (1.5.36) em (1.5.45) obtemos uma álgebra de comutadores para L_n que coincide justamente com a **álgebra de Virasoro** (1.5.34). De outra forma, se definirmos a álgebra de comutadores para L_n usando a expressão (1.5.37) e nela utilizarmos a equação (1.5.44), também obteremos a álgebra de Virasoro (1.5.34).

Uma conclusão importante é que a OPE das **correntes** $(z^{n+2}T(z), z^{n+2}\bar{T}(\bar{z}))$ determina a álgebra das **cargas** correspondentes (L_n, \bar{L}_n) (ver 1.5.37). Computando explicitamente, vemos que o comutador é dado pelo *resíduo* da OPE.

Por último, usando as identidades

$$\delta(z-w) \equiv \frac{1}{z-w}, \quad \partial_y^n \delta(z-w) \equiv \frac{n!}{(z-w)^{n+1}}, \quad \text{onde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5.46)$$

a expressão (1.5.44) pode ser apresentada da seguinte forma :

$$T(z)T(w) = \frac{c}{12}\partial_y^3\delta(z-w) + 2T(w)\partial_w\delta(z-w) + \partial T(w)\delta(z-w). \quad (1.5.47)$$

A equação (1.5.47) é conhecida também como a álgebra de Virasoro na sua versão bosônica, pelo fato de ser equivalente a (1.5.34).

A expressão mais simples de uma álgebra de super-Virasoro se apresenta da seguinte forma:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{d}{8}m(m^2-2a)\delta_{m-n,0} \quad (1.5.48)$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{m}{2} - r\right)G_{m+r}, \quad (1.5.49)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + d/2\left(r^2 - \frac{a}{2}\right)\delta_{r+s}, \quad n, r \in \mathbb{Z}, \quad (1.5.50)$$

onde L_n é o campo bosônico e G_n é, o campo fermiônico. Na verdade, os valores dos parâmetros d, a neste momento não têm relevância. Como podemos observar das equações anteriores, o comutador entre os campos bosônicos (1.5.48) (deixando de lado os parâmetros) tem a mesma estrutura que a álgebra de Virasoro (1.5.34). Por isto a superálgebra (1.5.48 - 1.5.50) é considerada como a extensão supersimétrica da álgebra de Virasoro (1.5.34) (para maiores detalhes da origem desta álgebra no contexto da teoria de supercordas ver [2]).

1.6 Álgebra Afim e Álgebra de *Loops*

Seja \mathcal{G} uma álgebra de Lie, com constantes de estrutura f_{abc} e com número finito de geradores T_a . As relações de comutação para esta álgebra serão

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c \quad (1.6.51)$$

Uma álgebra infinito-dimensional, ou seja uma álgebra de Lie com número infinito de geradores, pode ser obtida a partir da álgebra de Lie \mathcal{G} da maneira abaixo:

Definição da álgebra de laços $\tilde{\mathcal{G}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}} : \quad \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \times S^1 \\ T_a &\rightarrow T_a^n \equiv T_a \cdot e^{i\theta n},\end{aligned}\tag{1.6.52}$$

onde $e^{i\theta n}$ mora na esfera S^1 , $n \in \mathbb{Z}$. As relações de comutação para esta álgebra de laços serão

$$[T_a^n, T_b^m] = f_{ab}{}^c T_c^{n+m},\tag{1.6.53}$$

onde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Como exemplo vamos considerar $\mathcal{G} = su(2)$, com os 3 geradores $T_a = \frac{\sigma_a}{2i}$, $a = 1, 2, 3$, onde σ_a são as matrizes de Pauli. Podemos construir a álgebra de laços $\widetilde{su(2)}$ tendo como geradores $T_a^n = \frac{\sigma_a}{2i} e^{i\theta n}$. Para $a = 3$ teremos

$$T_3^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta n} & 0 \\ 0 & -e^{i\theta n} \end{pmatrix}\tag{1.6.54}$$

Observa-se que podemos estender estas idéias para as álgebras não-associativas, por exemplo, os octônions (1.3.8). Assim, podemos definir a álgebra de laços dos octônions com os geradores $\tau_a^n \equiv \tau_a e^{i\theta n}$ (τ_a satisfazendo a relação de comutação (1.3.8)), onde $a = 0, 1, 2, \dots, 7$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$[\tau_a^n, \tau_b^m] = f_{ab}{}^c \tau_c^{n+m},\tag{1.6.55}$$

onde $f_{abc} = 2C_{abc}$ (C_{abc} está definido na página 12 desta tese).

Uma álgebra de Lie **afim** $\hat{\mathcal{G}}$ é a extensão central de uma álgebra de laços $\tilde{\mathcal{G}}$. Por exemplo, para a álgebra de laços (1.6.53), podemos construir a seguinte extensão central [29]:

$$[T_a^n, T_b^m] = f_{ab}{}^c T_c^{n+m} + n\delta_{n,-m} k \operatorname{tr}(T_a T_b) \mathbf{c},\tag{1.6.56}$$

$$[T_a^n, Z] = 0,\tag{1.6.57}$$

onde o segundo termo do lado direito da equação (1.6.56) é a chamada extensão central, $\text{tr}(T_a T_b)$ é o traço numa dada representação e c é a carga central. As álgebras afins⁴ têm uma variedade de aplicações em Física, todas relevantes, por exemplo, no programa da classificação das teorias de campos conformes em 2D com valor arbitrário para a carga central c . Também desempenham um papel importante na teoria de cordas e supercordas, desde que esta teoria, na formulação de Polyakov, tem simetria conforme [26, 27].

Obviamente, existe a questão de estender o conceito da álgebra afin para as álgebras não-associativas, em particular a dos octônions. A resposta a esta questão e a possibilidade de construir uma álgebra superconforme não-associativa com superssimetrias estendidas serão desenvolvidas no capítulo 2.

⁴Na verdade, estamos nos referindo às álgebras afins tipo Kac-Moody, ver [26, 27, 29].

Capítulo 2

Álgebra de Malcev Superafinizada

$$N = 8$$

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o trabalho [19], onde realizamos a extensão supersimétrica dos resultados obtidos por Osipov [20, 21], relacionados à afinização da álgebra não-associativa octoniônica e à construção das transformações de Sugawara da mesma [20].

Especificamente, na referência [20] considera-se o caso bosônico da afinização da álgebra não-associativa (octoniônica), sendo a álgebra afinizada constituída por campos bosônicos reais. Nesse artigo também constróem-se as transformações de Sugawara, que vinculam a álgebra afinizada à álgebra de Virasoro. Os geradores da álgebra de Virasoro são combinações bilineares de correntes bosônicas, as mesmas correntes que formam a álgebra afinizada.

Em seguida, na referência [21] a superafinização foi considerada. Porém, a superafinização feita aqui [19] difere da feita em [21] pelo fato de ser a nossa formulação manifestamente supersimétrica. Também demonstramos explicitamente que a álgebra octoniônica afinizada

(2.2.4) é uma álgebra tipo super-Malcev, ou seja, satisfaz a versão graduada das identidades de Malcev.

Embora a álgebra octoniônica afinizada (2.2.4) esteja sendo expressa em termos de supercampos $N = 1$, na realidade ela é $(N = 8)$ -supersimétrica, o que podemos visualizar através das transformações de Sugawara supersimétricas, dadas pela equação (2.3.7). Esta realização de Sugawara é uma generalização da construção feita por Osipov [20] para o caso bosônico (que se recupera igualando a zero todos os campos fermiônicos em nosso resultado), como também da realização de Sugawara da álgebra superconforme (ASC) $N = 4$ [22] (que se recupera tomando a subálgebra quaterniônica da versão superafinizada em nosso resultado).

As transformações de Sugawara construídas neste trabalho não fecham uma superálgebra, em contraste com o caso puramente bosônico [20] e com o caso da ASC $N = 4$ [22]. Isto é devido à presença de termos extras (os quais dependem dos campos fermiônicos associados às constantes de estrutura octoniônicas). No entanto, depois de um processo de limite adequado recupera-se uma álgebra fechada, que é justamente a álgebra de Virasoro generalizada $N = 8$ (construída com 1 campo bosônico de spin 2, 8 campos fermiônicos de spin $3/2$ e 7 campos bosônicos de spin 1). Esta álgebra corresponde à chamada ASCNA $N = 8$, introduzida pela primeira vez por Englert et al [23]. Para obter nossos resultados usamos o pacote de K. Thielemans [24, 25], feito na linguagem *Mathematica*, para calcular as OPE's. Na verdade, usamos a versão clássica deste pacote (*classical OPE's*)¹ e desenvolvemos um pacote especial para trabalhar com os octônions.

Uma aplicação das idéias desenvolvidas neste capítulo e no trabalho [19] é a possibilidade de realizar a extensão supersimétrica das equações de KdV. Neste sentido, na última parte deste capítulo, fazemos um breve resumo do artigo [73] onde realizamos a

¹No caso quântico, ter-se-ia que prestar atenção, por exemplo ao *ordenamento normal*.

extensão supersimétrica das equações KdV até $N = 8$, partindo de uma hamiltoniana supersimétrica geral baseada na ASCNA $N = 8$.

2.2 Superafinização da Álgebra dos Octônions

Nesta seção vamos introduzir a superafinização da álgebra de comutadores dos octônions (1.3.8) que, daqui por diante, chamaremos de \hat{O} -álgebra. Posto que a álgebra de octônions (1.3.8) não é uma álgebra de Lie, a superafinização desta álgebra requer a generalização do conceito de superafinização de uma álgebra de Lie \mathcal{G} . É claro que a noção usual de superafinização deve ser recuperada quando particularizarmos as fórmulas para o caso da álgebra de Lie. Em nosso caso, a álgebra superafinizada dos quatérnions, que é equivalente à álgebra superafinizada $\widehat{sl(2) \oplus o(2)}$ [22], deve ser recuperada, e é isto que acontece.

Dada uma álgebra \mathcal{G} com geradores g_i e constantes de estrutura f_{ijk} , uma superálgebra afinizada $\hat{\mathcal{G}}$ é definida associando um campo bosônico $j_i(x)$ de spin 1 e um campo fermiônico $\psi_i(x)$ de spin 1/2 a cada gerador g_i da álgebra \mathcal{G} . Pode-se pensar que estes campos são componentes de um único supercampo fermiônico $N = 1$, $\Psi_i(X) = \psi_i(x) + \theta j_i(x)$, onde $X \equiv (x, \theta)$ denota as coordenadas do superspaço e θ é a variável de Grassman que satisfaz $\theta^2 = 0$.

A álgebra superafinizada $\hat{\mathcal{G}}$ é definida pelos parênteses

$$\{\Psi_i(X), \Psi_j(Y)\} = f_{ijk} \Psi_k(Y) \delta(X, Y) + k \cdot tr(g_i g_j) D_Y \delta(X, Y). \quad (2.2.1)$$

Na fórmula anterior $X \equiv x, \theta$ e $Y \equiv y, \eta$ são coordenadas do superspaço. $\delta(X, Y)$ é a função delta

$$\delta(X, Y) = \delta(x - y)(\theta - \eta) \quad (2.2.2)$$

e D_Y a derivada supersimétrica

$$D_Y = \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta \partial_y. \quad (2.2.3)$$

O segundo termo no lado direito da equação (2.2.1) corresponde à extensão central, onde k é chamada carga central, e $tr(g_i g_j)$ é o traço do produto de dois geradores arbitrários da álgebra \mathcal{G} numa dada representação (que poderia ser a representação adjunta, por exemplo). A equação (2.2.1) é manifestamente supersimétrica, desde que é construída com supercampos $N = 1$ e quantidades covariantes.

Na ausência do termo central, a equação (2.2.1) expressaria a extensão supersimétrica da álgebra de laços $\tilde{\mathcal{G}}$ (*superloop álgebra*) vinculada à álgebra \mathcal{G} , como já vimos na seção 1.6.

A superafinização da álgebra dos octônions é delicada, uma vez que ela é não-associativa, não aceitando representação matricial. Nossa proposta consiste em introduzir a superálgebra afinizada $\hat{\mathcal{O}}$ baseando-nos nos supercampos fermiônicos $\Psi_a(X)$, $a = 0, 1, 2, \dots, 7$, da seguinte forma:

$$\{\Psi_a(X), \Psi_b(Y)\} = f_{abc} \Psi_c(Y) \delta(X, Y) + k \cdot \Pi(\tau_a \cdot \tau_b) D_Y \delta(X, Y), \quad (2.2.4)$$

onde $\Pi(\tau_a \cdot \tau_b)$ denota a projeção sobre a identidade $\mathbf{1}$ da lei de composição dos octônions.

Da definição anterior para álgebra superafinizada podemos ver que as propriedades de (anti) simetria dos parênteses são satisfeitas. A álgebra é manifestamente supersimétrica e, quando particularizamos as fórmulas para o caso quaterniônico, recuperamos a superafinização usual das álgebras de Lie comentadas anteriormente. Por outro lado, a construção bosônica feita por Osipov [20] é reobtida quando anulamos identicamente os campos fermiônicos. Portanto, vamos considerar a equação (2.2.4) como a superafinização correta do comutador da álgebra dos octônions. Na verdade, a superafinização já havia sido proposta em [21] usando campos componentes. No entanto, a álgebra introduzida em [21] apresenta uma extensão central que não é manifestamente supersimétrica. Ao contrário, nossa equação (2.2.4) é manifestamente supersimétrica.

A álgebra superafinizada $\hat{\mathcal{O}}$ é super-Malcev (uma inspeção simples mostra que ela

satisfaz à condição (1.4.22) com a expressão do superjacobiano (1.4.18)). Observa-se que, na ausência do termo da carga central na álgebra (2.2.4), teríamos uma álgebra de laços para os octônions na sua versão supersimétrica (superálgebra- $\tilde{\mathcal{O}}$), uma generalização supersimétrica do caso bosônico (1.6.55).

Em termos das componentes do campo, a álgebra superafinizada $\hat{\mathcal{O}}$ pode ser escrita como segue :

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \psi_b(y)\} &= k\delta_{ab}\delta(x-y), \\ \{\psi_a(x), j_b(y)\} &= f_{abc}\psi_c(y)\delta(x-y), \\ \{j_a(x), j_b(y)\} &= k\delta_{ab}\partial_y\delta(x-y) + f_{abc}j_c(y)\delta(x-y), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

onde $j_a(x)$ e $\psi_a(x)$ são campos reais, k é a carga central da álgebra afinizada $\hat{\mathcal{O}}$, tomando valores nos números reais. Para verificar que a expressão (2.2.5) satisfaz à condição de super-Malcev (1.4.22) pode-se usar o pacote “classical OPEs”, construído em *Mathematica*.

2.3 Transformações de Sugawara e ASCNA N=8

As transformações de Sugawara ligam a superálgebra afinizada $\hat{\mathcal{G}}$ e uma estrutura algébrica fechada formada por campos reais na *envelope algebra* de $\hat{\mathcal{G}}$. Assim, nesta seção, pesquisamos a possibilidade de construir as transformações de Sugawara, usando os supercampos afinizados da álgebra $\hat{\mathcal{O}}$ (2.2.5). Já sabemos que a subálgebra puramente bosônica admite transformações de Sugawara (isto já foi discutido em [20]). Adicionalmente, as transformações de Sugawara associadas à subálgebra quaterniônica (obtida quando os coeficientes octonionônicos a, b são restritos aos valores 0, 1, 2, 3) correspondem àquelas de [22], que realizam a álgebra superconforme mínima² $N = 4$. Ambos os casos serão recuperados

²A álgebra construída com o menor número de elementos.

como limite especial das transformações de Sugawara construídas aqui.

Pesquisamos a possibilidade de construir uma estrutura algébrica fechada na *envelope algebra* de $\hat{\mathcal{O}}$, usando *campos reais* dotados com os parênteses definidos em (2.2.5), supondo que eles satisfazem a versão graduada da regra de Leibnitz

$$[\mathbf{XY}, \mathbf{Z}] = \mathbf{X}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + (-1)^{\epsilon(\mathbf{X})\epsilon(\mathbf{Y})} \mathbf{Y}[\mathbf{X}, \mathbf{Z}]. \quad (2.3.6)$$

Na realidade, procuramos pela extensão da álgebra de Virasoro $N = 8$, covariantemente construída com as constantes de estrutura imaginárias dos octônions (rotuladas por índices gregos). Para isto, precisamos de um campo bosônico T de spin 2, um campos fermiônico Q de spin 3/2, 7 campos fermiônicos Q_α de spin 3/2 e 7 correntes bosônicas de spin 1.

Este problema está bem definido e admite solução completa, que pode ser obtida usando computação algébrica. Conseguimos resolver o problema, reformulando-o na linguagem de “*classical OPEs*”. Obtivemos, assim, as seguintes transformações de Sugawara:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{k^2}(j_a j_a + \psi'_a \psi_a) + \frac{1}{k} j'_0 - \frac{2}{3k^3} C_{\alpha\beta\gamma} \psi_\alpha \psi_\beta j_\gamma - \frac{1}{k^4} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta, \\ Q &= \frac{1}{k^2} \psi_a j_a + \frac{1}{k} \psi'_0 - \frac{2}{k^3} C_{\alpha\beta\gamma} \psi_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma, \\ Q_\alpha &= \frac{1}{k^2} (\psi_0 j_\alpha - \psi_\alpha j_0 - C_{\alpha\beta\gamma} \psi_\beta j_\gamma) - \frac{1}{k} \psi'_\alpha - \frac{2}{k^3} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta, \\ J_\alpha &= \frac{1}{k^2} \psi_0 \psi_\alpha + \frac{1}{k} j_\alpha - \frac{1}{2k} C_{\alpha\beta\gamma} \psi_\beta \psi_\gamma \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Com os *campos reais* anteriores tentamos encontrar uma estrutura algébrica fechada e, como resultado, concluimos que, diferentemente do caso puramente bosônico e do caso da subálgebra quaterniônica ASC $N = 4$, não existe uma estrutura algébrica fechada para um valor finito de k (carga central introduzida na superálgebra afinizada (2.2.5)). A estrutura algébrica não fecha devido à presença de termos extras $(X\star)\dots$ (2.3.9), que dependem das constantes de estrutura de 4 índices $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e dos campos fermiônicos ψ_α . Todos estes termos se anulam automaticamente para os casos das subálgebras mencionadas anteriormente.

Entretanto, realizando um processo de renormalização clássica dos parênteses de Poisson em (2.2.5)

$$\{\dots\} \mapsto \{\dots\}_R = \frac{k}{2}\{\dots\}, \quad (2.3.8)$$

e tomando o limite $k \rightarrow \infty$, podemos encontrar uma estrutura algébrica fechada, que mostramos a seguir

$$\begin{aligned} \{T(x), T(y)\}_R &= -\frac{1}{2}\partial_y^3\delta(x-y) + 2T(y)\partial_y\delta(x-y) + T'(y)\delta(x-y). \\ \{T(x), Q(y)\}_R &= \frac{3}{2}Q(y)\partial_y\delta(x-y) + Q'(y)\delta(x-y) + (X1), \\ \{T(x), Q_\alpha(y)\}_R &= \frac{3}{2}Q_\alpha(y)\partial_y\delta(x-y) + Q'_\alpha(y)\delta(x-y) + (X2)_\alpha, \\ \{T(x), J_\alpha(y)\}_R &= J_\alpha(y)\partial_y\delta(x-y) + J'_\alpha(y)\delta(x-y) + (X3)_\alpha, \\ \{Q(x), Q(y)\}_R &= -\frac{1}{2}\partial_y^2\delta(x-y) + \frac{1}{2}T(y)\delta(x-y) + (X4), \\ \{Q(x), Q_\alpha(y)\}_R &= -J_\alpha(y)\partial_y\delta(x-y) - \frac{1}{2}J'_\alpha(y)\delta(x-y) + (X5)_\alpha, \\ \{Q(x), J_\alpha(y)\}_R &= -\frac{1}{2}Q_\alpha(y)\delta(x-y) + (X6)_\alpha, \\ \{Q_\alpha(x), Q_\beta(y)\}_R &= -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\partial_y^2\delta(x-y) + C_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma(y)\partial_y\delta(x-y) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}T(y) + C_{\alpha\beta\gamma}J'_\gamma(y))\delta(x-y) + (X7)_{\alpha\beta}, \\ \{Q_\alpha(x), J_\beta(y)\}_R &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}Q(y) - C_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma(y))\delta(x-y) + (X8)_{\alpha\beta}, \\ \{J_\alpha(x), J_\beta(y)\}_R &= \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\partial_y\delta(x-y) - C_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma(y)\delta(x-y) + (X9)_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

onde os termos extras $(X\star)\dots$, que se anulam no caso limite $k \rightarrow \infty$, são explicitamente dados por $(X\star)\dots \equiv (\widetilde{X\star})\dots(y)\delta(x-y)$, com

$$\begin{aligned} (\widetilde{X1}) &= -\frac{3}{2k^4}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta, \\ (\widetilde{X2})_\alpha &= \frac{12}{k^5}C_{\beta\gamma\delta}\psi_0\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta - \frac{2}{k^4}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_0\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta + \frac{12}{k^5}C_{\beta\gamma\delta\epsilon}\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta\psi_\epsilon + \\ &\quad + \frac{4}{k^4}C_{\beta\gamma\delta}\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta - \frac{6}{k^4}\delta_{\alpha\beta}j_\beta C_{\gamma\delta\epsilon}\psi_\gamma\psi_\delta\psi_\epsilon - \frac{6}{k^4}C_{\alpha\beta\gamma}\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta\psi_\delta, \\ (\widetilde{X3})_\alpha &= \frac{12}{k^4}C_{\beta\gamma\delta}\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta - \frac{2}{k^3}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{X4}) &= \frac{5}{2k^4} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta, \\
(\widetilde{X5})_\alpha &= \frac{2}{k^4} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_0 \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta - \frac{6}{k^4} C_{\beta\gamma\delta} \psi_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta - \frac{1}{3k^3} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\beta \psi_\gamma j_\delta, \\
(\widetilde{X6})_\alpha &= -\frac{7}{3k^3} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta, \\
(\widetilde{X7})_{\alpha\beta} &= -\frac{4}{k^4} \delta_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta\epsilon} \psi_0 \psi_\gamma \psi_\delta + \frac{6}{k^4} (C_{\alpha\gamma\delta} \psi_0 \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta + C_{\beta\gamma\delta} \psi_0 \psi_\alpha \psi_\gamma \psi_\delta) + \frac{2}{3} C_{\gamma\delta\epsilon} \psi_\gamma \psi_\delta j_\epsilon - \\
&\quad - \frac{1}{k^3} (C_{\alpha\gamma\delta} \psi_\beta \psi_\gamma j_\delta + C_{\beta\gamma\delta} \psi_\alpha \psi_\gamma j_\delta) - \frac{1}{k^3} (C_{\alpha\gamma\delta} \psi_\gamma \psi_\delta j_\beta + C_{\beta\gamma\delta} \psi_\gamma \psi_\delta j_\alpha) + \\
&\quad + \frac{11}{6k^4} \delta_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta\epsilon\zeta} \psi_\gamma \psi_\delta \psi_\epsilon \psi_\zeta - \frac{14}{3k^4} (C_{\alpha\gamma\delta\epsilon} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta \psi_\epsilon + C_{\beta\gamma\delta\epsilon} \psi_\alpha \psi_\gamma \psi_\delta \psi_\epsilon), \\
(\widetilde{X8})_{\alpha\beta} &= \frac{7}{3k^3} \delta_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta\epsilon} \psi_\gamma \psi_\delta \psi_\epsilon - 2C_{\beta\gamma\delta} \psi_\alpha \psi_\gamma \psi_\delta - 5C_{\alpha\gamma\delta} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_0 \psi_\gamma \psi_\delta + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\gamma j_\delta, \\
(\widetilde{X9})_{\alpha\beta} &= \frac{2}{k^2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\gamma \psi_\delta. \tag{2.3.10}
\end{aligned}$$

Finalmente, a ASCNA $N = 8$ é (extensão da superálgebra de Virasoro $N = 8$)

$$\begin{aligned}
\{T(x), T(y)\} &= -\frac{1}{2} \partial_y^3 \delta(x-y) + 2T(y) \partial_y \delta(x-y) + T'(y) \delta(x-y), \\
\{T(x), Q(y)\} &= \frac{3}{2} Q(y) \partial_y \delta(x-y) + Q'(y) \delta(x-y), \\
\{T(x), Q_\alpha(y)\} &= \frac{3}{2} Q_\alpha(y) \partial_y \delta(x-y) + Q'_\alpha(y) \delta(x-y), \\
\{T(x), J_\alpha(y)\} &= J_\alpha(y) \partial_y \delta(x-y) + J'_\alpha(y) \delta(x-y), \\
\{Q(x), Q(y)\} &= -\frac{1}{2} \partial_y^2 \delta(x-y) + \frac{1}{2} T(y) \delta(x-y), \\
\{Q(x), Q_\alpha(y)\} &= -J_\alpha(y) \partial_y \delta(x-y) - \frac{1}{2} J'_\alpha(y) \delta(x-y), \\
\{Q(x), J_\alpha(y)\} &= -\frac{1}{2} Q_\alpha(y) \delta(x-y), \\
\{Q_\alpha(x), Q_\beta(y)\} &= -\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \partial_y^2 \delta(x-y) + C_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma(y) \partial_y \delta(x-y) + \\
&\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} T(y) + C_{\alpha\beta\gamma} J'_\gamma(y)) \delta(x-y), \\
\{Q_\alpha(x), J_\beta(y)\} &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} Q(y) - C_{\alpha\beta\gamma} Q_\gamma(y)) \delta(x-y), \\
\{J_\alpha(x), J_\beta(y)\} &= \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \partial_y \delta(x-y) - C_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma(y) \delta(x-y). \tag{2.3.11}
\end{aligned}$$

Podemos fazer alguns comentários aqui. O limite $k \rightarrow \infty$ estará bem definido desde que os campos em (2.3.7) sejam de ordem $O(\varepsilon)$ em $\varepsilon = \frac{1}{k}$, pois os termos extras $(X\star)\dots$,

que aparecem no lado direito da expressão (2.3.9), são de ordem superior em ε . Eles são, de fato, da ordem $O(\varepsilon^2)$ ou superior. Poderíamos ter normalizado os campos em (2.3.7) em $O(1)$ em ε mas, neste caso, o valor da carga central \mathbf{c} da álgebra superconforme teria sido ∞ . A única possibilidade de se recuperar o valor finito da carga central \mathbf{c} da álgebra superconforme consiste em estabelecer a “renormalização clássica” descrita anteriormente. O valor da carga central superconforme \mathbf{c} não está relacionado com o valor da carga central k da álgebra afinizada. A fórmula (2.3.9) apresenta o valor de $\mathbf{c} = -6$ (\mathbf{c} é obtido como a carga central de Virasoro da primeira equação em (2.3.9) e corresponde a doze vezes o coeficiente do termo δ''' (ver seção 1.5, para maiores detalhes ver a referência [3, 27]). Entretanto, este valor pode ser normalizado à vontade (desde que estejamos tratando com parênteses de Poisson clássicos que satisfaçam, por construção, a versão graduada da propriedade de Leibnitz) fazendo simultaneamente o *reescalonamento finito* dos campos (coletivamente denotados por ϕ_i) $\phi_i \mapsto z\phi_i$ em (2.2.5) e dos parênteses de Poisson (2.2.5) ($\{.,.\} \mapsto \frac{1}{z}\{.,.\}$). Isto permite fazer $\mathbf{c} \mapsto z\mathbf{c}$ e, em particular, escolher $\mathbf{c} = 1$, sempre que $\mathbf{c} \neq 0$.

A álgebra superconforme (2.3.11) recuperada para $(X\star)\dots \equiv 0$, coincide com a chamada *álgebra não-associativa superconforme* $N = 8$, introduzida pela primeira vez na referência [23]. O termo “não-associativa” refere-se ao fato de que esta superálgebra não satisfaz exatamente às propriedades de (super) Jacobi, e também não é uma boa álgebra de (super) Malcev. Este ponto pode ser compreendido observando-se que, na lei de composição $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$, a propriedade de (super) Jacobi é garantida para o triplete $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$, sempre que for satisfeita separadamente para os tripletes $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ and $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$

$$J(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = J(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0 \Rightarrow J(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0. \quad (2.3.12)$$

Contrariamente, a condição de (super) Malcev (1.3.10) não é automaticamente fechada sob tal lei de composição. Portanto, a propriedade de super-Malcev satisfeita pela álgebra

afinizada $\widehat{\mathcal{O}}$ não garante a condição de super-Malcev para a álgebra superconforme extraída através das transformações de Sugawara. Pode-se dar um contra-exemplo explícito em que (1.3.10) não é verificado. É suficiente escolher $\mathbf{X} \equiv J_1(x)$, $\mathbf{Y} \equiv Q_4(y)$, $\mathbf{Z} \equiv J_2(z)$.

Por outro, lado a subálgebra bosônica, restrita somente aos campos $T(x)$ e $J_\alpha(x)$, é uma álgebra de Malcev.

A existência das transformações de Sugawara (2.3.7) assegura que a álgebra superafinizada $\widehat{\mathcal{O}}$ é compatível com a supersimetria global $N = 8$. Este resultado não é surpreendente, pois a álgebra é obtida em termos das constantes de estrutura octoniônicas. Em qualquer caso, a existência das transformações de Sugawara (2.3.7) nos permite computar explicitamente as transformações globais supersimétricas $N = 8$ carregadas pelos campos de entrada $j_a(x)$ e $\psi_a(x)$ de (2.2.5). Consideremos as cargas globais \mathbf{Q}_a supersimétricas $N = 8$, definidas através de

$$\mathbf{Q}_a = \oint dx Q_a(x), \quad (2.3.13)$$

onde $a = 0, 1, 2, \dots, 7$ e $Q_0(x) \equiv Q(x)$. As transformações supersimétricas dos campos $j_a(x)$ e $\psi_a(x)$ são determinadas usando (2.2.5) e (2.3.7), depois de tomar o limite $k \rightarrow \infty$. Assim, obtemos explicitamente

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon_0 \mathbf{Q}_0} \psi_0 &= \epsilon_0 \frac{j_0}{2}, \\ \delta_{\epsilon_0 \mathbf{Q}_0} j_0 &= \epsilon_0 \frac{\psi'_0}{2}, \\ \delta_{\epsilon_0 \mathbf{Q}_0} \psi_\alpha &= \epsilon_0 \frac{j_\alpha}{2}, \\ \delta_{\epsilon_0 \mathbf{Q}_0} j_\alpha &= \epsilon_0 \left(\frac{\psi'_\alpha}{2} - \frac{2}{k^2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\delta \right), \\ \delta_{\epsilon_\alpha \mathbf{Q}_\alpha} \psi_0 &= \epsilon_\alpha \frac{j_\alpha}{2}, \\ \delta_{\epsilon_\alpha \mathbf{Q}_\alpha} j_0 &= -\epsilon_\alpha \frac{\psi'_\alpha}{2}, \\ \delta_{\epsilon_\alpha \mathbf{Q}_\alpha} \psi_\beta &= \epsilon_\alpha \left(-\delta_{\alpha\beta} \frac{j_0}{2} - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma - \frac{1}{k} (\psi_\alpha \psi_\beta + C_{\alpha\beta\gamma} \psi_0 \psi_\gamma) \right), \\ \delta_{\epsilon_\alpha \mathbf{Q}_\alpha} j_\beta &= \epsilon_\alpha \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\psi'_0}{2} + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \psi'_\gamma + \frac{1}{k} (C_{\alpha\beta\gamma} \psi_\gamma j_0 - C_{\alpha\beta\gamma} \psi_0 \psi_\gamma + \psi_\alpha j_\beta - \psi_\beta j_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\gamma \psi_\delta) \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{k^2}(\delta_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta\epsilon}\psi_\gamma\psi_\delta\psi_\epsilon - C_{\beta\gamma\delta}\psi_\alpha\gamma\delta - 2C_{\alpha\gamma\delta}\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\delta)). \quad (2.3.14)$$

As transformações globais supersimétricas, dependentes do parâmetro infinitesimal fermiônico ϵ_a , são recuperadas das fórmulas anteriores depois de tomar o limite $k \rightarrow \infty$. Observamos que não há soma no índice relativo a α . Os principais resultados contidos neste capítulo foram publicados em Physics Letters A [19].

O resultado anterior mostra também que existem duas formas inequivalentes de implementar a supersimetria global $N = 8$, em termos de uma representação matricial ou de uma realização octoniónica.

Este último ponto motiva o estudo da possibilidade da extensão supersimétrica das equações não-lineares em $(1+1)D$ denominadas equações de KdV. Generalizações supersimétricas das equações de KdV até $N = 4$ já foram feitas nos trabalhos de Delduc, Ivanov *et al* [75]. Na referência [73], realizamos uma descrição detalhada destas equações no contexto da supersimetria. Em particular, construímos o primeiro exemplo da extensão supersimétrica global $N = 8$ das equações de KdV. Este resultado só pode ser obtido devido ao fato de que, no artigo anterior [19], conseguimos construir uma realização não-associativa da supersimetria global $N = 8$ (na última parte deste capítulo vamos voltar a este assunto). Partimos de uma hamiltoniana geral construída com os 8 campos bosônicos T, J_α e 8 campos fermiônicos Q, Q_α , onde $\alpha = 1, \dots, 7$. Usando condições de consistência dimensional e considerando que esta hamiltoniana tem como parêntese de Poisson generalizado a ASCNA $N = 8$ (ver 2.3.11), encontramos as equações de movimento para a hamiltoniana, que identificamos como as equações de KdV estendidas, $N = 8$.

Demonstramos que existe uma única hamiltoniana (salvo fator de normalização) invariante $N = 8$. Ela não contém parâmetros livres e é quadrática nos campos, como mostramos a seguir

$$H = 2T^2 + 2Q'Q + 2Q'_\alpha Q_\alpha - 2J''_\alpha J_\alpha, \quad (2.3.15)$$

(onde $\alpha = 1, 2, \dots, 7$ e entendemos que índices repetidos denotam soma). A hamiltoniana (2.3.15) é invariante em relação às 7 cargas globais $\int dx \cdot J_\alpha(x)$, isto é

$$\left\{ \int dx \cdot J_\alpha(x), H \right\} = 0. \quad (2.3.16)$$

As 7 cargas $\int dx \cdot J_\alpha(x)$ geram uma simetria que estende $SU(2)^3$ e que não corresponde a um grupo, devido ao caráter não-associativo dos octônions.

As equações de movimento para KdV, $N = 8$ são obtidas através de

$$\dot{\Phi}_i = \{ \Phi_i, H \}, \quad (2.3.17)$$

onde Φ_i denota coletivamente os campos (2.3.11). Obtemos, explicitamente,

$$\begin{aligned} \dot{T} &= -T''' - 12T'T - 6Q_a''Q_a + 4J_\alpha'''J_\alpha, \\ \dot{Q} &= -Q''' - 6T'Q - 6TQ' - 4Q_\alpha''J_\alpha + 2Q_\alpha J_\alpha'' - 2Q_\alpha'J_\alpha', \\ \dot{Q}_\alpha &= -Q_\alpha''' - 2QJ_\alpha'' - 6TQ_\alpha' - 6T'Q_\alpha + 2Q'J_\alpha' + 4Q''J_\alpha - \\ &\quad 2C_{\alpha\beta\gamma}(Q_\beta J_\gamma'' - Q_\beta'J_\gamma' - 2Q_\beta''J_\gamma), \\ \dot{J}_\alpha &= -J_\alpha''' - 4T'J_\alpha - 4TJ_\alpha' + 2QQ_\alpha' + 2Q'Q_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma}(4J_\beta J_\gamma'' + 2Q_\beta Q_\gamma'). \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

onde $a = 0, 1, \dots, 7$.

É importante discutir alguns pontos deste resultado. O fato que a ASCNA $N = 8$ não satisfaz a identidade de super-Jacobi, permite superar o teorema que estabelece que não é possível construir álgebras superconformes com cargas centrais para $N > 4$ [76, 77]. Tal teorema é válido para (super) álgebras de Lie que, evidentemente, satisfazem as identidades de (super) Jacobi. Ou seja, conseguimos contruir uma álgebra superconforme com carga central $N = 8$, por termos relaxado a associatividade em nossa (super) álgebra. Por outro lado, a presença da carga central é necessária, se quisermos que a álgebra seja

³A hamiltoniana tipo KdV $N = 4$ admite invariância global $SU(2)$.

interpretada como os parênteses de Poisson de uma hamiltoniana relacionada às equações tipo KdV. Ou seja, como é a carga central de Virasoro δ''' (2.3.11) que produz o termo T''' na equação KdV (2.3.18), fica evidente que, com a estrutura da ASCNA $N = 8$, podemos construir equações de KdV com supersimetrias estendidas com $N > 4$, assim como as hamiltonianas que geram estas equações [73].

Finalmente, restringindo o índice grego α ao valor de 1 ou 1, 2, 3 na equação (2.3.11), recuperamos as álgebras superconformes $N = 2$ e $N = 4$, respectivamente. Elas podem ser consideradas como os parênteses de Poisson das equações de KdV com $N = 2$ e $N = 4$ [73, 74, 75].

Capítulo 3

Espinores e Álgebras de Clifford em Dimensão Arbitrária, Baseados nas Álgebras Divisionais dos $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$

3.1 Introdução

O desenvolvimento das teorias de supergravidade e supercordas, onde se enfatizam aspectos de dualidade e compactificações tipo Kaluza-Klein para baixas dimensões, motiva a pesquisa das propriedades de espinores (e supersimetrias) em dimensões arbitrárias do espaço-tempo. Neste sentido, existem alguns trabalhos analisando espinores em espaços-tempos de dimensão e assinatura arbitrárias [32, 34], dentre os quais podemos ressaltar vários devotados à pesquisa das simetrias e do papel das superálgebras no programa de unificação de todas as interações conhecidas [56, 57]. Entretanto, exceto por alguns trabalhos específicos, a grande maioria ainda está dedicada ao caso de assinatura usual do espaço-tempo. Embora a interpretação física de coordenadas temporais adicionais seja um problema aberto, teorias de cordas consistentes podem ser implementadas em assi-

naturas diferentes do caso usual (veja, por exemplo a conjectura da teoria- F [58, 59]). Além disso, alguns trabalhos importantes [51, 52, 60] assinalam a existência de relações de dualidade entre as teorias de supercordas formuladas em espaços-tempos com assinaturas diferentes.

Na perspectiva matemática, as álgebras de Clifford têm sido muito estudadas, desde o trabalho original de Clifford [30] até agora. Poderíamos mencionar a classificação desta álgebra feita nos anos 60 por Atiyah *et al* [31]. Nos trabalhos de S. Okubo [33] estuda-se a classificação das representações irredutíveis das álgebras de Clifford baseadas nas álgebras divisionais dos reais \mathbb{R} , complexos \mathbb{C} , e quatérnions \mathbb{H} , estabelecendo também uma relação entre um tipo particular da álgebra dos octônions \mathbb{O} e a álgebra de Clifford $C(8,0)$.

Numa abordagem feita para físicos, nos trabalhos originais de P. Townsend e de T. Kugo [32] mostra-se que existe uma relação entre os espinores em dimensão e assinatura arbitrárias com as álgebras divisionais. O mesmo trabalho sugere que exista uma relação entre as supersimetrias estendidas e álgebra divisional $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. Adicionalmente, na referência [36] estabelece-se uma relação entre as álgebras divisionais e as supersimetrias estendidas em 1D e, em particular, faz-se a classificação das realizações octoniônicas das supersimetrias estendidas.

Este capítulo está dedicado exclusivamente à investigação sistemática das propriedades dos quatérnions e octônions e à realização das álgebras de Clifford. Os octônions são não-associativos e não podem ser representados através de matrizes com o produto de matrizes usual. A realização octoniônica das álgebras de Clifford tem propriedades peculiares. Uma das mais notáveis talvez seja a de que eles não são mais geradores do grupo de Lorentz correspondente, mas sim do grupo quociente entre o grupo de Lorentz e o grupo excepcional G_2 (G_2 é o grupo de automorfismos dos octônions [37, 39]).

Na primeira parte fornecemos um algoritmo para construir explicitamente as realizações

octoniônicas das álgebras de Clifford e classificamos tais realizações. Introduzimos as noções de realizações tipo Weyl e não-Weyl nas diversas dimensões. Pesquisamos as condições de existência para os espinores tomando valores na álgebra divisional e realizamos a classificação geral dos espinores livres nas diversas dimensões e assinaturas, analisando a existência ou não dos termos massivo e cinético na lagrangeana do espinor livre nas diversas dimensões e assinaturas. Estes resultados podem ser considerados como extensão da classificação dos espinores reais e sua dinâmica livre [40]. Obviamente, no caso octoniônico, os resultados são bem peculiares, devido à sua não-associatividade. Na última parte apresentamos tabelas expressando propriedades dos tensores octoniônicos antisimétricos. Uma das aplicações destas propriedades se dá no contexto das álgebras supersimétricas generalizadas e, em particular, na álgebra- M .

Na seção 3.2 fazemos uma revisão das álgebras de Clifford. Em seguida, na seção 3.3. desenvolvemos a classificação destas álgebras para o caso real, nas diversas dimensões e assinaturas. No início da seção apresentamos alguns resultados conhecidos na literatura e logo mostramos uma maneira simples de construir explicitamente as representações irredutíveis das álgebras de Clifford.

Na seção 3.4 desenvolvemos a construção explícita da realização associativa quaterniônica e a realização não-associativa octoniônica das álgebras de Clifford.

Na seção 3.5 realizamos a classificação mais geral da dinâmica livre dos espinores que tomam valores na álgebra divisional em assinatura e dimensão arbitrárias. Para começar a seção introduzimos definições necessárias e condições de existência para os espinores tomando valores na álgebra divisional, nas diversas dimensões e assinaturas. Em seguida, revisamos os resultados da classificação mais geral da dinâmica livre dos espinores reais em assinatura e dimensão arbitrária. Finalmente mostramos os novos resultados da classificação mais geral da dinâmica livre dos espinores tomando valores

quaterniônicos e octoniônicos, também em assinatura e dimensão arbitrária.

Na seção 3.6 apresentamos algumas identidades interessantes para manipular tensores que tomam valores octoniônicos nas diversas dimensões.

Finalmente, na seção 3.7, mostramos resultados interessantes em relação às álgebras supersimétricas generalizadas nas diversas dimensões e, em particular, na álgebra- M , que se desenvolve em 11 dimensões. O estudo da álgebra- M em conexão com as álgebras divisionais e a possibilidade da classificação das álgebras supersimétricas generalizadas pode ser visto no trabalho de J. Lukierski e F. Toppan [42].

Os principais resultados deste capítulo foram desenvolvidos conjuntamente com o Professor F. Toppan e o aluno Moises Rojas e estão resumidos no trabalho [71].

3.2 Álgebras de Clifford

William Clifford inventou esta álgebra em 1876 com a intenção de generalizar os quatérnios para dimensões mais altas, e publicou o trabalho dois anos mais tarde [7, 8, 30]. A teoria das álgebras de Clifford tem sido estudada desde então, tanto na literatura matemática quanto na física. A seguir vamos apresentar uma das possíveis definições das álgebras de Clifford. Dado um espaço vetorial $V_{(p,q)}$ de dimensão $n = p + q$, sobre o campo dos números reais, com produto interno $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$, e bases γ_i tais que

$$\begin{aligned}(\gamma_i|\gamma_j) &= 0 \quad i \neq j \\(\gamma_i|\gamma_i) &= +1 \quad i = 1, 2, \dots, p \\(\gamma_i|\gamma_i) &= -1 \quad i = p + 1, \dots, p + q.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Introduzimos o produto \mathbf{vw} de vetores em $V_{(p,q)}$ que é associativo e distributivo com respeito à adição, satisfazendo à condição

$$\mathbf{vw} + \mathbf{wv} = 2(\mathbf{v}|\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_{(p,q)}. \quad (3.2.2)$$

Então o conjunto de todas as possíveis somas e produtos dos vetores de $V_{(p,q)}$ é chamado de álgebra de Clifford $C(V_{(p,q)})$ [46]. Observa-se que em particular :

$$\begin{aligned} \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i &= 2\eta_{ij} \\ (\gamma_i)^2 &= +1 \quad i = 1, 2, \dots, p \\ (\gamma_i)^2 &= -1 \quad i = p + 1, \dots, p + q. \\ \gamma_i \gamma_j &= -\gamma_j \gamma_i, \quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

A álgebra de Clifford, por construção, é um espaço linear de dimensão $\sum_p^n \binom{n}{p} = 2^n$ com base

$$(1, \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2, \dots, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n), \quad (3.2.4)$$

onde os subíndices estão ordenados da forma $I_j < I_{j+1}$.

Vamos apresentar alguns exemplos das álgebras de Clifford

- a) Trivialmente $C(V_{(0,0)}) \equiv \mathbb{R}$
- b) Consideremos $V_{(0,1)}$ com base $\{\gamma\}$ tal que $(\gamma)^2 = -1$. Então qualquer elemento de $C(V_{(0,1)})$ é da forma $\mathbf{v} = a + b\gamma$, $a, b \in \mathbb{R}$. Observamos que a base para esta álgebra de Clifford é $\{1, \gamma\}$ o que nos permite identificar $C(V_{(0,1)}) \equiv \mathbb{C}$.
- c) Seja $V_{(0,2)}$ com base $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ o que implica em $(\gamma_i|\gamma_j) = \eta_{ij}$ com $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$. Então qualquer elemento de $C(V_{(0,2)})$ é da forma $\mathbf{v} = a + b\gamma_1 + c\gamma_2 + d\gamma_1\gamma_2$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A base para esta álgebra de Clifford é $\{1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2\}$. Podemos fazer a seguinte identificação:

$$i = \gamma_1, \quad j = \gamma_2, \quad k = \gamma_1\gamma_2, \quad (3.2.5)$$

lembrando que os quatérnions $\mathbb{H} = \{i, j, k\}$ têm a seguinte estrutura :

$$\begin{aligned}
 ij &= -ji = k \\
 jk &= -kj = i \\
 ki &= -ik = j \\
 i^2 &= j^2 = k^2 = -1.
 \end{aligned}$$

Logo, $C(V_{(0,2)}) \cong \mathbb{H}$.

Álgebra de Clifford	Álgebra Divisional
$C(V_{(0,0)})$	\mathbb{R}
$C(V_{(0,1)})$	\mathbb{C}
$C(V_{(0,2)})$	\mathbb{H}

Os 3 exemplos mostram que, na verdade, existe uma interessante relação entre as álgebras de Clifford e as álgebras divisionais, como podemos ver nas referências [33] e no restante desta tese.

No contexto da Física e na sequência desta tese, vamos centrar nossa atenção nas representações matriciais das álgebras de Clifford.

Podemos dar uma definição das álgebras de Clifford associando estas com o espaço-tempo Minkowskiano. Seja $\eta_{\mu\nu}$ a métrica associada ao espaço-tempo Minkowskiano generalizado $M^{t,s}$ com t direções temporais e s direções espaciais, sendo $D = t + s$ a dimensão deste espaço-tempo, onde

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diagonal}(\underbrace{+, +, \dots, +}_{t \text{ - vezes}}, \underbrace{-, -, \dots, -}_{s \text{ - vezes}}), \quad \mu, \nu = 0, \dots, D - 1. \tag{3.2.6}$$

As matrizes Γ associadas ao espaço-tempo $M^{t,s}$ são representações matriciais dos geradores da álgebra de Clifford $\Gamma^\mu (\mu = 0, \dots, D - 1)$, que satisfazem a seguinte relação de anti-

comutação da álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_\Gamma. \quad (3.2.7)$$

A representação desta álgebra é realizada por matrizes do tipo $2^{[D/2]} \times 2^{[D/2]}$ (a identidade $\mathbf{1}_\Gamma$ é também da forma $2^{[D/2]} \times 2^{[D/2]}$)¹.

Sem perda de generalidade, às matrizes- Γ que satisfazem à condição $(\Gamma^\mu)^2 = +1$ podemos associar as direções temporais e àquelas que satisfazem $(\Gamma^\mu)^2 = -1$ associamos as direções espaciais.

3.3 Classificação das Álgebras de Clifford para Qualquer Assinatura e Dimensão Espaço-Temporal

3.3.1 Álgebras de Clifford e Álgebras Divisionais

Na seção anterior vimos, num exemplo explícito, a íntima relação entre as álgebras de Clifford e as álgebras divisionais associativas. Nesta seção, vamos mostrar alguns resultados já conhecidos da classificação das álgebras de Clifford, associados com as álgebras divisionais associativas $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, seguindo o artigo de de Okubo [33].

A representação matricial *real* irredutível mais geral da álgebra de Clifford (3.2.7) pode ser classificada de acordo com as propriedades da matriz S mais geral que comuta com todos os Γ^μ ($[S, \Gamma^\mu] = 0, \forall \mu$). Diremos que estamos tratando do caso normal (caso \mathbb{R}) quando S é um múltiplo da identidade. Caso S possa ser expressa como a soma de duas matrizes, a primeira sendo múltipla da identidade e a segunda, múltipla de uma matriz cujo quadrado é menos a identidade, diremos ser este o caso quase complexo. Finalmente, temos o caso onde a matriz S é uma combinação de quatro matrizes que fecham a álgebra

¹ $[D/2]$ denota a parte inteira de $D/2$

dos quatérnions (caso \mathbb{H}). De acordo com [33] as representações irredutíveis *reais* tem uma estrutura subjacente do tipo $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, como podemos ver na seguinte tabela, cujas entradas representam valores de $t - s \bmod 8$.

R	C	H
0, 2		4, 6
1	3, 7	5

A representação real e irredutível é sempre única a menos que $t - s \bmod 8 = 1, 5$. Nestas assinaturas existem duas representações reais inequivalentes. Uma delas é recuperada fazendo uma troca no sinal de todas as Γ ($\Gamma^\mu \rightarrow -\Gamma^\mu$).

3.3.2 Classificação e Construção Explícita

Para nosso propósito de classificar as álgebras de Clifford tomando valores quaterniônicos e octoniônicos (na próxima seção) é conveniente fazer uma revisão da classificação das representações irredutíveis das álgebras de Clifford no caso real, seguindo a proposta [71].

Para começar, vamos apresentar um algoritmo simples que permite construir explicitamente as representações irredutíveis das matrizes gama numa assinatura arbitrária. Como dissemos na subseção anterior, as classes de representações irredutíveis das álgebras de Clifford são únicas, excetuado o caso especial em que $t - s \bmod 8 = 1, 5$, onde temos duas representações irredutíveis inequivalentes.

Consideremos uma matriz γ_i qualquer, de dimensão d , em uma álgebra de Clifford $C(t, s)$, associada ao espaço-tempo de dimensão $D = t + s$ com assinatura (t, s) . Para construir matrizes gama (denotadas por Γ_j) de dimensão $2d$ em uma álgebra de Clifford associada ao espaço-tempo $(D + 2)$ -dimensional vamos usar o seguinte algoritmo:

$$\Gamma_j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$$

$$(t, s) \mapsto (t + 1, s + 1), \quad (3.3.8)$$

ou

$$\Gamma_j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$$

$$(t, s) \mapsto (t + 2, s). \quad (3.3.9)$$

Mostramos, a seguir, um primeiro exemplo que permite visualizar a praticidade deste algoritmo. As matrizes de Pauli τ_A, τ_1, τ_2 de dimensão 2 com valores nos reais e que realizam a álgebra de Clifford $C(2, 1)$, podem ser obtidas aplicando-se o algoritmo (3.3.8) ou (3.3.9) ao número 1, que é a realização 1-dimensional da álgebra de Clifford $C(1, 0)$. Em termos explícitos,

$$\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.10)$$

Todas as álgebras de Clifford são obtidas recursivamente aplicando-se o algoritmo (3.3.8) e (3.3.9) à álgebra de Clifford $C(1, 0)$ ($\equiv 1$) e à série de álgebras de Clifford $C(0, 3 + 4m)$ (onde m é um número inteiro não-negativo), que devem ser previamente conhecidas. Em conseqüência, na tabela seguinte, podemos mostrar todas as álgebras de Clifford obtidas via este algoritmo.

Tabela 1 : álgebras de Clifford maximais (até $d = 256$).

1	*	2	∨	4	*	8	*	16	*	32	*	64	*	128	*	256	*
<u>(1,0)</u>	⇒	(2,1)	⇒	(3,2)	⇒	(4,3)	⇒	(5,4)	⇒	(6,5)	⇒	(7,6)	⇒	(8,7)	⇒	(9,8)	⇒
						(1,4)	→	(2,5)	→	(3,6)	→	(4,7)	→	(5,8)	→	(6,9)	→
			<u>(0,3)</u>														
						(5,0)	→	(6,1)	→	(7,2)	→	(8,3)	→	(9,4)	→	(10,5)	→
								(1,8)	→	(2,9)	→	(3,10)	→	(4,11)	→	(5,12)	→
					<u>(0,7)</u>												
						(9,0)	→	(10,1)	→	(11,2)	→	(12,3)	→	(13,4)	→		
												(1,12)	→	(2,13)	→		
												<u>(0,11)</u>					
												(13,0)	→	(14,1)	→		
															(1,16)	→	
														<u>(0,15)</u>			
																(17,0)	→

(3.3.11)

Chamamos à atenção os seguintes pontos, na tabela anterior:

1 - Rotulamos as colunas pela dimensão \mathbf{d} das matrizes que formam as álgebras de Clifford $C(t, s)$, às quais chamamos de *álgebras de Clifford maximais*.

2 - Às álgebras de Clifford sublinhadas na tabela chamamos *maximais e primitivas*. O restante será chamado de *álgebras de Clifford maximais e descendentes*. Elas são obtidas

a partir das álgebras de Clifford maximais e primitivas usando iterativamente o algoritmo (3.3.8) e (3.3.9).

3 - Uma álgebra de Clifford não-maximal é obtida de uma dada álgebra de Clifford maximal excluindo certo número de matrizes gama. Pode-se observar que as álgebras de Clifford em dimensão par são sempre não-maximais.

4 - Observando a tabela fica claro que as álgebras de Clifford maximais são encontradas se e somente se:

$$t - s = 1, 5 \text{ mod } 8 \quad (3.3.12)$$

Como exemplo concreto vamos apresentar as diversas álgebras de Clifford maximais e não-maximais para $D = t + s = 11$ (a dimensionalidade da teoria- M). Mostramos o resultado na forma de tabela:

Tabela 2

(p, q)	type	d
(11,0)	$\subset (11,2)$	64
(10,1)	M	32
(9,2)	$\subset (11,2)$	64
(8,3)	M	64
(7,4)	$\subset (7,6)$	64
(6,5)	M	32
(5,6)	$\subset (7,6)$	64
(4,7)	M	64
(3,8)	$\subset (3,10)$	64
(2,9)	M	32
(1,10)	$\subset (3,10)$	64
(0,11)	M	32

Na tabela anterior, as álgebras de Clifford maximais para $D = 11$ estão rotuladas pela letra M. As álgebras de Clifford não-maximais podem ser obtidas a partir de uma maximal localizada na segunda coluna excluindo certo número de matrizes gama. A dimensão da representação matricial é dada pelo número (d) localizado no lado direito.

Vamos dividir em duas séries as *álgebras de Clifford maximais e primitivas* $C(0, 4m)$. A série $C(0, 3 + 8n)$ e a série $C(0, 7 + 8n)$. Isto deve-se, como vamos ver em breve, à relação que existe entre estas séries e as álgebras divisionais \mathbb{H} e \mathbb{O} , respectivamente. Para a construção das representações matriciais das álgebras de Clifford destas duas séries vamos usar as 3 matrizes de Pauli (3.3.17). Em seguida, vamos mostrar as realizações explícitas da álgebra de Clifford $C(0, 3)$, através de 3 matrizes 4×4 , e também de $C(0, 7)$,

usando 7 matrizes 8×8 , respectivamente.

$$\begin{aligned}
 & \tau_A \otimes \tau_1, \\
 C(0, 3) \equiv & \tau_A \otimes \tau_2, \\
 & \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A.
 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

c

$$\begin{aligned}
 & \tau_A \otimes \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\
 & \tau_A \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\
 & \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_1, \\
 C(0, 7) \equiv & \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_2, \\
 & \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\
 & \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\
 & \tau_A \otimes \tau_A \otimes \tau_A.
 \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Vamos denotar as três matrizes de $C(0, 3)$ por $\bar{\tau}_i, i = 1, 2, 3$ e as sete matrizes de $C(0, 7)$ por $\tilde{\tau}_i, i = 1, 2, \dots, 7$. Estamos agora em condições de construir explicitamente as duas séries das álgebras de Clifford maximais e primitivas $C(0, 3 + 8n)$ e $C(0, 7 + 8n)$ através das fórmulas

$$\begin{aligned}
 & \bar{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \gamma_9, \\
 & \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
 C(0, 3 + 8n) \equiv & \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
 & \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
 & \dots & \dots & \dots, \\
 & \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j,
 \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

e

$$\begin{aligned}
 C(0, 7 + 8n) \equiv & \begin{array}{ll} \tilde{\gamma}_i \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots \dots \otimes \gamma_9, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j, \end{array} \quad (3.3.16)
 \end{aligned}$$

Observe que o produto tensorial 16-dimensional de matrizes é tomado n vezes. A dimensão final da representação matricial (3.3.15) é 4×16^n , enquanto a dimensão final da representação matricial (3.3.16) é 8×16^n .

Para construir o restante das álgebras de Clifford da série $C(0, 7)$ necessitamos aplicar o algoritmo (3.3.8) a $C(0, 7)$ e repetir o processo. Por exemplo, para obter a representação da álgebra de Clifford $C(1, 8)$, temos que aplicar o algoritmo (3.3.8) a $C(0, 7)$, pois desta forma obtemos 9 matrizes 16×16 que realizam $C(1, 8)$ (uma matriz tem assinatura positiva e será denotada por γ_9 , de modo que $\gamma_9^2 = \mathbf{1}$, enquanto chamamos de γ_j , $j = 1, 2, \dots, 8$ as matrizes com assinatura negativa, com $\gamma_j^2 = -\mathbf{1}$).

As fórmulas dadas acima fornecem uma forma prática e eficiente de construir todas as representações irredutíveis das álgebras de Clifford. Também pode-se observar que todas as matrizes de Clifford são de dimensão par (potência de 2).

Uma importante subclasse de matrizes gama de Clifford é constituída por aquelas que têm a forma de blocos de 2×2 , onde os únicos elementos não-nulos são os blocos anti-diagonais $\begin{pmatrix} 0 & \square_{d \times d} \\ \square_{d \times d} & 0 \end{pmatrix}$. Elas recebem o nome de matrizes tipo Weyl (generalizadas). Também são chamadas de matrizes supersimétricas, desde que elas possam ser promovidas a matrizes fermiônicas associadas com a representação das supersimetrias estendidas, ver

[36].

Claramente vemos que nem todas as matrizes de Clifford primitivas por construção são tipo Weyl. Portanto, todas as álgebras de Clifford derivadas destas matrizes primitivas usando os algoritmos (3.3.8) e (3.3.9) também não são tipo Weyl. Logo, podemos dizer que as matrizes tipo Weyl (generalizadas) somente são encontradas em algumas assinaturas do espaço-tempo. Entretanto, todas as álgebras de Clifford maximais podem ser transformadas em tipo Weyl se excluirmos pelo menos a matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$, produzindo-se desta maneira uma álgebra de Clifford não-maximal e tipo Weyl (todas as matrizes que ficam são da forma anti-diagonal por blocos).

A seguir vamos dar um exemplo concreto. Temos a álgebra de Clifford maximal $C(2, 1)$ com as seguintes matrizes de Clifford

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.17)$$

sendo que as duas primeiras são da forma anti-diagonal e a última, da forma diagonal. Também podemos ver que $(\Gamma_1)^2 = -1$, $(\Gamma_2)^2 = (\Gamma_3)^2 = +1$. Assim, Γ_1 é tipo espaço e as duas últimas, Γ_2 e Γ_3 , são tipo tempo. Se excluirmos Γ_3 obtemos a álgebra de Clifford $C(1, 1)$ que evidentemente é tipo Weyl e, além disso, deixa de ser maximal. No caso em que excluirmos a matriz Γ_1 obtemos a álgebra de Clifford $C(2, 0)$, que não é tipo Weyl e também deixa de ser maximal. Entretanto, para obter a álgebra de Clifford $C(1, 1)$ poderíamos ter excluído a matriz Γ_2 por ser esta também tipo tempo. Porém $C(1, 1)$ deixaria de ser tipo Weyl. Logo, se queremos uma álgebra de Clifford tipo Weyl é preciso excluir pelo menos a última gama, Γ_3 .

Em geral álgebras de Clifford não-maximais são produzidas a partir das correspondentes álgebras de Clifford maximais excluindo as matrizes gama tipo-tempo ou tipo-espaço. Como já dissemos anteriormente, dependendo se excluirmos ou não a última ma-

matriz gama do tipo $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$ obtemos uma representação tipo Weyl (W) ou não-Weyl (NW) como mostramos na tabela seguinte.

W	NW	
$(0 \text{ mod } 8) \subset (1 \text{ mod } 8)$	$(2 \text{ mod } 8) \subset (1 \text{ mod } 8)$	
$(t, s) \Leftarrow (t+1, s)$	$(t, s) \Leftarrow (t, s+1)$	
$(4 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$	$(3 \text{ mod } 8) \subset (1 \text{ mod } 8)$	
$(t, s) \Leftarrow (t+1, s)$	$(t, s) \Leftarrow (t, s+2)$	(3.3.18)
$(6 \text{ mod } 8) \subset (1 \text{ mod } 8)$		
$(t, s) \Leftarrow (t+3, s)$		
$(7 \text{ mod } 8) \subset (1 \text{ mod } 8)$		
$(t, s) \Leftarrow (t+2, s)$		

Segundo a tabela acima, as matrizes gama tipo Weyl (W) apresentam-se no caso em que $t - s \text{ mod } 8 = 0, 4, 6, 7$. As matrizes tipo não-Weyl (NW) aparecem no caso $t - s \text{ mod } 8 = 1, 2, 3, 5, 7$.

A importância da realização tipo Weyl das álgebras de Clifford está relacionada com a possibilidade de introduzir a projeção de Weyl para espinores de Dirac. Os comutadores entre matrizes gama $\Sigma_{\mu\nu} = [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$, podem ser considerados como geradores da álgebra de Lorentz correspondente ao espaço-tempo de mesma assinatura que a da álgebra de Clifford. Como as matrizes gama tipo Weyl são da forma anti-diagonal em blocos de 2×2 , a matriz produto delas ($\Sigma_{\mu\nu}$) também se apresenta em blocos de 2×2 , com os únicos elementos não nulos na diagonal principal. Desde que ambos, tanto as matrizes gama como os geradores de Lorentz $\Sigma_{\mu\nu}$, agem sobre espinores, e pelo fato de que eles são diagonais por blocos, podemos consistentemente igualar a zero metade das componentes

do vetor coluna do espinor (a metade superior ou a inferior), originando desta forma o chamado *espinor de Weyl* ou *espinor quiral*. Assim o espinor de Weyl admite metade dos graus de liberdade esperados para o espinor original de Dirac. Este processo de redução à metade das componentes do espinor de Dirac pode ser realizado matematicamente usando os projetores P_{\pm} ($P_+ P_- = P_- P_+ = 0$ e $P_+^2 = P_+$, $P_-^2 = P_-$) definidos da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{2d} \pm \bar{\Gamma}), \\ \bar{\Gamma} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Os espinores quirais (antiquirais) podem ser definidos como

$$\Psi_{\pm} = P_{\pm} \Psi. \quad (3.3.20)$$

De acordo com nosso algoritmo $\bar{\Gamma}$ sempre está presente na álgebra de Clifford maximal (D ímpar). Para espaços-tempo de dimensão par a matriz $\bar{\Gamma}$ é sempre definida como o produto de todas as matrizes gama da álgebra de Clifford (tipo Weyl) associada a este espaço-tempo e não forma parte da álgebra de Clifford. No caso do espaço-tempo 4-dimensional esta matriz corresponderia à conhecida Γ_5

Em resumo, segundo nossa construção para as assinaturas $t - s \text{ mod } 8 = 0, 4, 6, 7$, podemos introduzir os espinores de Weyl ou espinores quirais com número de componentes que é metade da dimensionalidade das correspondentes matrizes gama. Levando em conta estes resultados, podemos montar uma tabela onde visualizamos a relação que existe entre a dimensionalidade das matrizes gama e o número de componentes do espinor associado, para cada dimensão espaço-temporal e para cada assinatura.

$(p - q) \bmod 8$	d_Γ	d_Ψ	$(p - q) \bmod 8$	d_Γ	d_Ψ
1	$2d$	$2d$	0	$2d$	d
3	$2d$	$2d$	2	$2d$	$2d$
5	$2d$	$2d$	4	$2d$	d
7	$2d$	d	6	$2d$	d

(3.3.21)

O estudo dos espinores, das superálgebras e das representações associativas ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) das álgebras de Clifford, no contexto das supersimetrias estendidas no espaço-tempo com assinatura arbitrária, foi feito por Ferrara *et al* (ver a referência [34]), entre outros.

Para ilustrar nossa discussão é útil apresentar uma tabela com a álgebra divisional característica e o número de componentes reais, tanto para a álgebra de Clifford (Γ) como para o espinor fundamental (Ψ), ao menos no caso específico de espaços-tempos Minkowskianos até 11 dimensões.

(p, q)	Γ	Ψ	(p, q)	Γ	Ψ
(1, 0)	$\mathbf{R}, 1$	$\mathbf{R}, 1$	(0, 1)	$\mathbf{C}, 2$	$\mathbf{R}, 1$
(1, 1)	$\mathbf{R}, 2$	$\mathbf{R}, 1$	(1, 1)	$\mathbf{R}, 2$	$\mathbf{R}, 1$
(1, 2)	$\mathbf{C}, 4$	$\mathbf{R}, 2$	(2, 1)	$\mathbf{R}, 2$	$\mathbf{R}, 2$
(1, 3)	$\mathbf{H}, 8$	$\mathbf{C}, 4$	(3, 1)	$\mathbf{R}, 4$	$\mathbf{C}, 4$
(1, 4)	$\mathbf{H}, 8$	$\mathbf{H}, 8$	(4, 1)	$\mathbf{C}, 8$	$\mathbf{H}, 8$
(1, 5)	$\mathbf{H}, 16$	$\mathbf{H}, 8$	(5, 1)	$\mathbf{H}, 16$	$\mathbf{H}, 8$
(1, 6)	$\mathbf{C}, 16$	$\mathbf{H}, 16$	(6, 1)	$\mathbf{H}, 16$	$\mathbf{H}, 16$
(1, 7)	$\mathbf{R}, 16$	$\mathbf{C}, 16$	(7, 1)	$\mathbf{H}, 32$	$\mathbf{C}, 16$
(1, 8)	$\mathbf{R}, 16$	$\mathbf{R}, 16$	(8, 1)	$\mathbf{C}, 32$	$\mathbf{R}, 16$
(1, 9)	$\mathbf{R}, 32$	$\mathbf{R}, 16$	(9, 1)	$\mathbf{R}, 32$	$\mathbf{R}, 16$
(1, 10)	$\mathbf{C}, 64$	$\mathbf{R}, 32$	(10, 1)	$\mathbf{R}, 32$	$\mathbf{R}, 32$

Da tabela anterior, pode-se observar que as álgebras de Clifford não são simétricas pela mudança $(p, q) \leftrightarrow (q, p)$. No entanto, no que se refere aos espinores, podemos ver que eles são invariantes (em algumas assinaturas é preciso usar a projeção Weyl).

3.4 Realização Quaterniônica e Octoniônica das Álgebras de Clifford

Nesta seção discutimos a relação entre as álgebras de Clifford e as álgebras divisionais (quatérnions e octônions) de forma ligeiramente diferente da feita na subseção (3.3.1). Esta relação pode ser desenvolvida do seguinte modo: primeiramente, observamos que as três matrizes gama que realizam $C(0, 3)$ podem ser identificadas com os quatérnions imaginários τ_i que satisfazem à expressão (1.2.6). Assim, $\forall \Gamma_i$ da álgebra de Clifford $C(0, 3)$, $\Gamma_i \equiv \tau_i$.

Com isto, podemos contruir a realização das álgebras de Clifford $C(1, 4)$ e $C(5, 0)$ usando entradas quaterniônicas para as matrizes gama nos algoritmos (3.3.8) e (3.3.9), apresentados anteriormente na seção (3.3.2). Mostramos estas realizações a seguir:

$$C(1, 4) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{array} \right) \right\},$$

$$C(5, 0) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{array} \right) \right\}. \quad (3.4.23)$$

Logo, a partir da realização de $C(0, 3)$ com valores quaterniônicos podemos obter a realização das séries $C(n, 3 + n)$ e $C(4 + n, n - 1)$ com valores quaterniônicos, com n

tomando valores inteiros e positivos ($n = 1, 2, \dots$). A dimensionalidade $D_{\Gamma_{\mathbb{H}}}$ das correspondentes matrizes gama com entradas quaterniônicas é $2^n \times 2^n$, como podemos visualizar na seguinte tabela:

$D_{\Gamma_{\mathbb{H}}} :$	1×1	*	2×2	*	4×4	*	8×8	..	$2^n \times 2^n$	(3.4.24)	
		$(1,4)$	→	$(2,5)$	→	$(3,6)$..	$C(n, 3 + n)$			
$(0,3)$		↗									
		↘									
		$(5,0)$	→	$(6,1)$	→	$(7,2)$..	$C(4 + n, n - 1)$			

Como consequência, todo o conjunto das *álgebras de Clifford primitivas e maximais* $C(0, 3 + 8n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) e suas *descendentes* pode ser representado com matrizes com entradas quaterniônicas agindo em espinores que agora vamos interpretar como vetores coluna com entradas quaterniônicas.

É útil assinalar, por exemplo, que em todas as álgebras de Clifford da série que começa em $C(0, 3)$ teremos três matrizes gama com entradas quaterniônicas e o restante das matrizes gama com entradas reais. Por exemplo, na álgebra de Clifford $C(1, 4)$ temos 3 gamas com entradas quaterniônicas (tipo espaço) e 2 gamas reais. Similarmente, na álgebra de Clifford $C(5, 0)$, temos 3 gamas com entradas quaterniônicas (tipo tempo) e 2 gamas reais.

Existe uma realização alternativa da álgebra de Clifford $C(0, 7)$ obtida identificando os 7 geradores desta álgebra com os 7 octônions imaginários τ_i , ou seja, $\forall \Gamma_i$ da álgebra de Clifford $C(0, 7)$, $\Gamma_i = \tau_i$. τ_i satisfaz a relação (1.3), que reescrevemos aqui,

$$\tau_i \cdot \tau_j = -\delta_{ij} \tau_0 + C_{ijk} \tau_k, \text{ para } i, j, k = 1, \dots, 7 \quad (3.4.25)$$

onde C_{ijk} são os tensores totalmente antisimétricos que representam as constantes de

estrutura octoniônicas, definidos como

$$C_{123} = C_{147} = C_{165} = C_{246} = C_{257} = C_{354} = C_{367} = 1 \quad . \quad (3.4.26)$$

Esta realização octoniônica da álgebra de Clifford euclideana 7-dimensional será denotada por $C_{\mathbf{O}}(0, 7)$. Devido à não-associatividade de (3.4.25) (que já foi discutida no capítulo 1), a realização octoniônica não pode ser representada como um produto ordinário de matrizes e é, conseqüentemente, uma realização diferente e inequivalente desta álgebra de Clifford euclideana, em comparação com a representação feita em (3.3.14).

De forma similar ao caso quaterniônico, usando a realização octoniônica de $C_{\mathbf{O}}(0, 7)$ e os algoritmos (3.3.8) e (3.3.9) podemos construir a realização matricial de $C_{\mathbf{O}}(1, 8)$ e $C_{\mathbf{O}}(9, 0)$ com entradas octoniônicas (logo, as 9 matrizes gama de $C(1, 8)$ têm a mesma forma que (3.4.23); a diferença é que, desta vez, temos 7 matrizes vinculadas aos octônions imaginários). O processo pode ser estendido a todos os descendentes desta série, obtendo a realização matricial (com entradas octoniônicas) para as álgebras de Clifford *maximais* das séries $C_{\mathbf{O}}(n, 7 + n)$ e $C_{\mathbf{O}}(8 + n, n - 1)$, onde n toma valores inteiros e positivos ($n = 1, 2, \dots$). A dimensionalidade das matrizes gama correspondentes $D_{1_{\mathbf{O}}}$ com entradas octoniônicas é $2^n \times 2^n$, como podemos visualizar na seguinte tabela:

$D_{\Gamma_{\mathbf{O}}} :$	1×1	*	2×2	*	4×4	*	8×8	..	$2^n \times 2^n$	(3.4.27)
			$(1,8)$	→	$(2,9)$	→	$(3,10)$..	$C_{\mathbf{O}}(n, 7 + n)$	
	$(0,7)$	↗								
		↘	$(9,0)$	→	$(10,1)$	→	$(11,2)$..	$C_{\mathbf{O}}(8 + n, n - 1)$	

Devemos mencionar que a construção (3.3.16), que realiza as álgebras de Clifford *maximais e primitivas* $C(0, 7 + 8n)$, pode ser feita com a realização com entradas octoniônicas da matriz gama γ_9 . Com conseqüência, construímos a realização de $C_{\mathbf{O}}(0, 7 + 8n)$ e

seus descendentes com entradas que são produtos tensoriais de octônions, agindo sobre espiniores com entradas octoniônicas.

No restante desta tese vamos focalizar nosso interesse nas realizações $C_{\mathbf{O}}(n, 7+n)$ e $C_{\mathbf{O}}(9+n, n)$ (onde $n = 0, 1, 2, \dots$), que são relevantes no contexto da teoria- M .

Pelo fato de que, no caso octoniônico, as realizações das álgebras de Clifford são não-associativas, podemos concluir que $\Sigma_{\mu\nu} = [\Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu}]$ não são mais geradores do grupo de Lorentz. Eles são promovidos, agora, a geradores do quociente $SO(p, q)/G_2$, sendo G_2 a álgebra de Lie excepcional dos automorfismos dos octônions de dimensão 14. A título de exemplo, no caso euclidiano 7-dimensional, $SO(0, 7)$ tem $\frac{1}{2}D(D-1) = 21$ geradores ($D = 0 + 7$). Assim, $\Sigma_{\mu\nu}$ tem $21 - 14 = 7$ geradores isomorfos aos octônions imaginários. É bom lembrar que a álgebra de comutadores 7-dimensional

$$[\tau_i, \tau_j] = 2C_{ijk}\tau_k, \quad i, j, k = 1, \dots, 7, \quad (3.4.28)$$

satisfeita pelos octônions imaginários, não é mais uma álgebra de Lie, sendo na verdade uma álgebra de Malcev, como vimos na seção 1.3 do capítulo 1.

Esta álgebra admite uma interessante interpretação geométrica [37, 38]. Se introduzimos a definição usual da operação de *conjugação* dos octônions

$$\mathbf{x}^\dagger = x_0 - x_i\tau_i, \quad (3.4.29)$$

podemos definir facilmente a 7-esfera S^7 como segue

$$S^7 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{O}; \mathbf{x} = x_0 - x_i\tau_i, \mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = 1\}. \quad (3.4.30)$$

Logo, os octônions de *norma* unitária descrevem a esfera S^7 . Insistimos em que, devido à não associatividade da multiplicação dos octônions, S^7 não é mais uma variedade-grupo.

Na esfera S^7 , transformações infinitesimais homogêneas, que fazem o papel de transformações de Lorentz, podem ser introduzidas através de

$$\delta X = a \cdot X, \quad (3.4.31)$$

com a um octônio infinitesimal constante. O requerimento de preservação da condição $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{x} = 1$ (norma unitária) implica em $a_0 = 0$, logo $a = a_i \tau_i$. Portanto, a álgebra (3.4.28), gerada por 7 τ_i , pode ser interpretada como a álgebra das transformações “quase” Lorentz agindo na esfera S^7 [70]. Pelo menos neste exemplo específico descobrimos um interessante cenário geométrico enfatizando o uso da realização octoniônica da álgebra de Clifford $C_{\mathbb{O}}(0, 7)$. Ao mesmo tempo que a representação associativa (3.3.14) da álgebra de Clifford 7-dimensional é requerida para descrever o espaço plano 7-dimensional, a realização não-associativa descreve a geometria de S^7 .

3.5 Dinâmica de Espinores Livres na Álgebra

Divisional dos Quatérnions \mathbb{H} e Octônions \mathbb{O}

3.5.1 Espinores Reais, Quaterniônicos e Octoniônicos

Para montar lagrangeanas, precisamos construir termos escalares sob transformações de Lorentz. Como eles envolvem produtos bilineares de espinores, necessitamos da noção de espinor adjunto ou espinor barrado $\bar{\Psi}$ definido por $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger A$, onde “ \dagger ” denota uma combinação de transposição matricial e conjugação principal na álgebra divisional (ver (3.4.29)). A é uma matriz unitária definida pelo produto de todas as matrizes gama temporais, isto é uma generalização da matriz Γ_0 Minkowskiana 4-dimensional.

Nesta seção vamos introduzir os ingredientes e convenções necessários para definir a dinâmica dos espinores livres (seguindo o trabalho [32], onde é considerado o caso de espinores reais, complexos). Vamos nos concentrar no caso real, quaterniônico e octoniônico.

Em [32] são apresentadas 3 matrizes A, B, C unitárias (somente duas delas são independentes) associadas às três conjugações (hermitiana, complexa e transposta) agindo em matrizes gama. No caso restrito, onde as matrizes gama são reais, precisamos apenas da

matriz A [40].

Em geral pode-se mostrar indutivamente que A , em conjunto com as matrizes gama, satisfazem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} A\Gamma^\mu A^T &= \xi\Gamma^{\mu T}, \\ A^T &= \alpha A, \end{aligned} \tag{3.5.32}$$

com

$$\begin{aligned} \xi &= (-1)^{t-1}, \\ \alpha &= (-1)^{t(t-1)/2}. \end{aligned} \tag{3.5.33}$$

Nos casos quaterniônico e octoniônico as matrizes A e C satisfazem às seguintes relações

$$\begin{aligned} A\Gamma_\mu A^\dagger &= \xi\Gamma_\mu^\dagger, \\ C\Gamma_\mu C^\dagger &= \delta\Gamma_\mu^T, \\ C^T &= \rho C, \\ A^\dagger &= \alpha A, \\ A^T &= \sigma CAC^\dagger. \end{aligned} \tag{3.5.34}$$

Os parâmetros α , ξ , δ , ρ , σ serão especificados depois.

A matriz A sempre é definida pelo produto de todas as matrizes gama temporais, sem importar a ordem da multiplicação. Podemos, então, escolher $A = \prod_{i=1}^{i=p} (\Gamma_{t_i})$. A matriz C pode ser definida pelo produto de todas as matrizes gama simétricas (do mesmo modo sem importar a ordem) $C_S = \prod (\Gamma_{S_i})$ ou de todas as matrizes antisimétricas $C_A = \prod (\Gamma_{A_i})$. Nos espaços-tempos de dimensão ímpar C_A e C_S colapsam num único valor C .

Para todas as álgebras de Clifford $C(t, s)$ construídas a partir da tabela (3.3.11), o

sinal dos parâmetros está dado por

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (-1)^{t(t-1)/2}, \\
 \xi &= (-1)^{t-1}, \\
 \delta &= (-1)^t \\
 \rho &= (-1)^{t(t+1)/2}, \\
 \sigma &= \sin\left(\frac{|t-s|\pi}{2}\right)(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+1},
 \end{aligned} \tag{3.5.35}$$

o que pode ser demonstrado interativamente.

Da tabela 3.3.11 podemos ver que as álgebras de Clifford maximais quaterniônicas satisfazem à seguinte condição

$$t - s = 5 \text{ mod } 8, \tag{3.5.36}$$

enquanto as octoniônicas satisfazem

$$t - s = 1 \text{ mod } 8, \tag{3.5.37}$$

como já tínhamos dito (ver 3.3.12).

Da mesma forma que no caso real, no caso quaterniônico e octoniônico as álgebras de Clifford não-maximais são obtidas depois de se excluir um certo número de matrizes gama. Podemos mostrar, então, uma tabela equivalente a (3.3.18) para o caso quaterniônico, mostrando algumas das possíveis reduções de nosso interesse, feitas a partir de uma álgebra de Clifford maximal:

W	NW
$(4 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+1, q)$	$(6 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p, q+1)$
$(3 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+2, q)$	$(7 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p, q+2)$
$(2 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+3, q)$	$(0 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p, q+3)$
$(1 \text{ mod } 8) \subset (5 \text{ mod } 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+4, q)$	

(3.5.38)

É bom lembrar que, no caso quaterniônico, temos 3 matrizes gama proporcionais à parte imaginária dos quatérnions, sendo o restante das matrizes gama real. Por escolha nossa, as matrizes gama excluídas são todas reais.

A partir de tabela (3.3.11) (onde podemos visualizar as dimensões das matrizes gama para cada assinatura e dimensão do espaço-tempo) e da tabela anterior podemos construir outra tabela onde mostramos a relação entre a dimensionalidade da matriz gama d_Γ e a dimensionalidade do espinor fundamental d_Ψ (com entradas quaterniônicas), para cada assinatura e dimensão do espaço-tempo:

$(p-q) \text{ mod } 8$	d_Γ	d_Ψ	$(p-q) \text{ mod } 8$	d_Γ	d_Ψ
1	$2d$	d	0	$2d$	$2d$
3	$2d$	d	2	$2d$	d
5	$2d$	$2d$	4	$2d$	d
7	$2d$	$2d$	6	$2d$	$2d$

(3.5.39)

No caso octoniônico, também mostramos uma tabela com as possíveis reduções feitas a partir de uma álgebra de Clifford maximal para construir uma álgebra de Clifford não-

maximal, tanto no caso W quanto NW :

W	NW
$(0 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+1, q)$	$(2 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p, q+1)$
$(7 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+2, q)$	$(3 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p, q+2)$
$(6 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+3, q)$	$(4 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p, q+3)$
$(5 \bmod 8) \subset (1 \bmod 8)$ $(p, q) \Leftarrow (p+4, q)$	

(3.5.40)

Lembramos aqui também que, na realização octonionica das álgebras de Clifford maximais estão presentes sempre 7 matrizes gama vinculadas a octônions imaginários, sendo o restante das matrizes gama real. As matrizes gama excluídas são sempre reais.

De forma similar aos casos real e quaterniônico, no caso octonionico podemos construir outra tabela onde visualizamos a relação que existe entre a dimensionalidade da matriz gama " d_Γ " e a dimensionalidade do espinor fundamental " d_Ψ " (com entradas octonionicas) para cada assinatura e dimensão do espaço-tempo.

$(p-q) \bmod 8$	d_Γ	d_Ψ	$(p-q) \bmod 8$	d_Γ	d_Ψ
1	$2d$	$2d$	0	$2d$	d
3	$2d$	$2d$	2	$2d$	$2d$
5	$2d$	d	4	$2d$	$2d$
7	$2d$	d	6	$2d$	d

(3.5.41)

Vamos mostrar os sinais corretos para os parâmetros $\alpha, \xi, \delta, \rho, \sigma$ na expressão (3.5.34). nos casos quaterniônico e octonionico, para as álgebras de Clifford não-maximais obtidas excluindo somente uma matriz gama real. Observando as tabelas (3.5.38) e (3.5.40), vemos

que temos quatro casos com estas características. Destes, existem 2 casos inequivalentes para a matriz C designados por (C_S ou C_A). Enquanto os sinais de α e ξ estão dados por (3.5.33), nos quatros casos temos:

$$\begin{aligned}\delta_S &= (-1)^t, \\ \delta_A &= (-1)^{t+1}.\end{aligned}\tag{3.5.42}$$

O restante dos sinais está dado por

i) no caso quaterniônico 4 mod 8 (W) ,

$$\begin{aligned}\rho_S &= (-1)^{t(t+1)/2}, \\ \rho_A &= -(-1)^{t(t-1)/2}, \\ \sigma_S &= \sin\left((t-s)\frac{3\pi}{8}\right)(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}, \\ \sigma_A &= \sin\left((t-s)\frac{3\pi}{8}\right)(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}},\end{aligned}$$

ii) no caso quaterniônico 6 mod 8 (NW) ,

$$\begin{aligned}\rho_S &= (-1)^{t(t+1)/2}, \\ \rho_A &= (-1)^{t(t-1)/2}, \\ \sigma_S &= \sin(|t-s|3\pi/4)(-1)^{t(t+1)/2+1}, \\ \sigma_A &= \sin(|t-s|3\pi/4)(-1)^{t(t-1)/2+1},\end{aligned}$$

iii) no caso octoniônico 0 mod 8 (W) ,

$$\begin{aligned}\rho_S &= (-1)^{t(t+1)/2}, \\ \rho_A &= -(-1)^{t(t-1)/2}, \\ \sigma_S &= \sin\left((t-s)\frac{3\pi}{16}\right)(-1)^{t(t+1)/2}, \\ \sigma_A &= \sin\left((t-s)\frac{3\pi}{16}\right)(-1)^{t(t-1)/2},\end{aligned}$$

iv) e, finalmente no caso octoniônico 2 mod 8 (NW) ,

$$\begin{aligned}\rho_S &= (-1)^{t(t+1)/2}, \\ \rho_A &= (-1)^{t(t-1)/2}, \\ \sigma_S &= \sin(|t-s|\frac{\pi}{4})(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+1}, \\ \sigma_A &= \sin(|t-s|\frac{\pi}{4})(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}+1}.\end{aligned}$$

Agora estamos em condições de estudar a existência ou não do termo de massa (M) e do termo cinético (K) num lagrangeno livre construído com termos bilineares envolvendo espinores com entradas quaterniônicas ou octoniônicas. Vamos fazer esta análise para dimensões arbitrárias do espaço-tempo e para qualquer assinatura. Apresentaremos uma lista de todos os termos massivos possíveis no caso octoniônico. Trivialmente, iremos empregar os mesmos símbolos para os casos quaterniônico e real.

Em geral, diferentes termos massivos podem ser encontrados no caso Weyl(W)².

$$\begin{aligned}M_{//} &= tr(\Psi_+^\dagger A \Psi_+), \\ M_{\perp} &= tr(\Psi_+^\dagger A \Psi_- + \Psi_-^\dagger A \Psi_+), \\ M_{//T,S} &= tr(\Psi_+^\dagger A \Gamma_{T,S} \Psi_+), \\ M_{\perp T,S} &= tr(\Psi_+^\dagger A \Gamma_{T,S} \Psi_- + \Psi_-^\dagger A \Gamma_{T,S} \Psi_+), \\ M_{//J} &= tr(\Psi_+^\dagger A J \Psi_+), \\ M_{\perp J} &= tr(\Psi_+^\dagger A J \Psi_- + \Psi_-^\dagger A J \Psi_+), \\ M_{//F} &= tr(\Psi_+^\dagger A F \Psi_+), \\ M_{\perp F} &= tr(\Psi_+^\dagger A F \Psi_- + \Psi_-^\dagger A F \Psi_+),\end{aligned}\tag{3.5.43}$$

onde Γ_T, Γ_S denotam (no caso da álgebra de Clifford não-maximal) a presença de matrizes gama externas tipo tempo ou tipo espaço, respectivamente. Esta matriz gama externa

²Aqui “tr” denota a projecção onto da identidade octoniônica, $tr(x_0 + x_i \tau_i) = x_0$. Ele coincide com o traço usual quando nos restringimos ao subcaso quaterniônico.

é justamente aquela que foi apagada do conjunto de gamas maximais. Similarmente, J denota o produto de duas matrizes gama externas (ambas tipo tempo ou ambas tipo espaço), enquanto F denota o produto de três gama externas (todas tipo tempo ou todas tipo espaço). Observe que, para definir as diversas possibilidades para o termo de massa, estamos usando espinores quirais (antiquirais) introduzidos em (3.3.19). No caso não-Weyl (NW) as expressões para os termos de massa têm a mesma estrutura. Precisamos somente excluir “//” e “ \perp ” no lado esquerdo das equações (3.5.43) e substituir os espinores quirais (antiquirais) pelo espinor de Dirac no lado direito.

Podemos também definir os termos cinéticos (K) no caso Weyl (W) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
K_{//} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu)\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi_+)], \\
K_\perp &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu)\partial_\mu\Psi_-] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi_-)] + \\
&\quad \frac{1}{2}tr[(\Psi_-^\dagger A\Gamma^\mu)\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_-^\dagger(A\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi_+)], \\
K_{//T,S} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu\Gamma_{T,S})\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu\Gamma_{T,S}\partial_\mu\Psi_+)], \\
K_{\perp T,S} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu\Gamma_{T,S})\partial_\mu\Psi_-] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu\Gamma_{T,S}\partial_\mu\Psi_-)] + \\
&\quad \frac{1}{2}tr[(\Psi_-^\dagger A\Gamma^\mu\Gamma_{T,S})\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_-^\dagger(A\Gamma^\mu\Gamma_{T,S}\partial_\mu\Psi_+)] \\
K_{//J} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu J)\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu J\partial_\mu\Psi_+)], \\
K_{\perp J} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu J)\partial_\mu\Psi_-] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu J\partial_\mu\Psi_-)] + \\
&\quad \frac{1}{2}tr[(\Psi_-^\dagger A\Gamma^\mu J)\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_-^\dagger(A\Gamma^\mu J\partial_\mu\Psi_-)], \\
K_{//F} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu F)\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu F\partial_\mu\Psi_+)], \\
K_{\perp F} &= \frac{1}{2}tr[(\Psi_+^\dagger A\Gamma^\mu F)\partial_\mu\Psi_-] + \frac{1}{2}tr[\Psi_+^\dagger(A\Gamma^\mu F\partial_\mu\Psi_-)] + \\
&\quad \frac{1}{2}tr[(\Psi_-^\dagger A\Gamma^\mu F)\partial_\mu\Psi_+] + \frac{1}{2}tr[\Psi_-^\dagger(A\Gamma^\mu F\partial_\mu\Psi_+)]. \tag{3.5.44}
\end{aligned}$$

Como antes, para ter as expressões dos termos cinéticos (K) no caso não-Weyl (NW) é preciso excluir “//” e “ \perp ” no lado esquerdo das equações (3.5.44) e substituir os espinores quirais (antiquirais) pelos espinores de Dirac no lado direito. Observe que, devido à não-

associatividade dos octônions, temos que respeitar a ordem das operações nos termos cinéticos. Nos termos massivos não temos esse problema, desde que as matrizes Γ_T , Γ_S , J e F sejam todas reais por construção. Portanto em (3.5.43) a não-associatividade não desempenha nenhum papel.

3.5.2 Revisão do Caso Real

Na referência [40] a condição de Majorana para espinores complexos foi analisada e foi apresentada uma lista das diferentes assinaturas do espaço-tempo que permitem a existência, no lagrangeano, dos termos cinético, pseudo-cinético, massivo e/ou pseudo-massivo definidos em termos dos espinores livres de Majorana. Vamos mostrar uma generalização desses resultados nesta seção, baseados na classificação dos espinores reais que apresentamos nas seções anteriores. Observe que os espinores com os quais estamos trabalhando são reais por construção e que não impusemos a condição de Majorana pois, para isso, o espinor teria que ter previamente uma estrutura complexa.

Usando resultados da subseção anterior (3.5.1), vamos apresentar um conjunto de tabelas onde visualizaremos a existência ou não dos termos cinéticos e massivos na lagrangeana livre dos espinores, para cada assinatura do espaço-tempo.

Em todas as tabelas as *colunas* são etiquetadas por $t \bmod 4$, enquanto as *linhas* são etiquetadas por $t - s \bmod 8$. A presença dos símbolos M (termos massivos) e/ou K (termos cinéticos) em cada compartimento significa que os mesmos estão definidos para o espaço-tempo correspondente ao compartimento. Os compartimentos vazios significam, evidentemente, que, para os correspondentes espaços-tempos, os termos massivo e cinético não estão permitidos.

A primeira tabela que apresentamos é para o caso real e não-Weyl (NW):

	0	1	2	3
1		K	K,M	M
2	M_S	K	K, K_S , M	K_S , M, M_S
3	M_{S1}, M_{S2}, M_J, K_J	K, M_J	K, K_{S1}, K_{S2}, M	$K_{S1}, K_{S2}, K_J, M, M_{S1}, M_{S2}$
5		K	K,M	M

(3.5.45)

A segunda tabela é para o caso real e Weyl (W).

	0	1	2	3
0		$K_{//}$	$M_{//}, K_{\perp}$	M_{\perp}
4		$K_{//}$	$M_{//}, K_{\perp}$	M_{\perp}
6	$K_{//T1}, K_{//T2}, M_{//J},$ $K_{\perp J}$	$K_{//}, M_{//T1}, M_{//T2},$ $K_{\perp T1}, K_{\perp T2}, M_{\perp J}$	$M_{//}, K_{\perp}, M_{\perp T1},$ $M_{\perp T2}$	$K_{//J}, M_{\perp}$
7	$K_{//T}$	$K_{//}, M_{//T}, K_{\perp T}$	$M_{//}, K_{\perp}, M_{\perp T}$	M_{\perp}

(3.5.46)

3.5.3 Espinores Quaterniônicos e sua Dinâmica Livre

Nesta subseção, apresentamos a tabela onde são mostrados os termos cinéticos e massivos permitidos para cada assinatura do espaço-tempo, no caso em que os espinores e a álgebra de Clifford tem entradas quaterniônicas. Como na subseção prévia as colunas são rotuladas por $t \bmod 4$ e as filas por $t - s \bmod 8$, enquanto o significado dos símbolos é explicado na subseção anterior (3.5.1).

Caso não-Weyl (NW)

	0	1	2	3
0	$K_{J_j}, K_F, M_{S_j}, M_{J_j}$	K, K_F, M_{J_j}	K, K_{S_j}, M, M_F	$K_{S_j}, K_{J_j}, M, M_{S_j}, M_F$
5		K	K, M	M
6	M_S	K	K, K_S, M	K_S, M, M_S
7	K_J, M_{S_i}, M_J	K, M_J	K, K_{S_i}, M	K_{S_i}, K_J, M, M_{S_i}

(3.5.47)

Caso Weyl (W)

	0	1	2	3
1	$K_{//T_j}, K_{\perp J_j},$ $M_{//J_j}$	$K_{//}, K_{\perp T_j},$ $M_{//F}, M_{//J_j}, M_{\perp J_j}$	$K_{//F}, K_{\perp},$ $M_{//}, M_{jF}, M_{\perp T_j}$	$K_{\perp F}, K_{//J_j},$ M_{\perp}
2	$K_{//T_i}, K_{\perp J},$ $M_{//J}$	$K_{//}, K_{\perp T_i},$ $M_{//T_i}, M_{\perp J}$	$K_{\perp},$ $M_{//}, M_{\perp T_i}$	$K_{//J},$ M_{\perp}
3	$K_{//T}$	$K_{//}, K_{\perp T},$ $M_{//T}$	$K_{\perp},$ $M_{//}, M_{\perp T}$	M_{\perp}
4		$K_{//}$	$K_{\perp},$ $M_{//}$	M_{\perp}

(3.5.48)

Observa-se que nas duas tabelas anteriores o sufixo “j” denota a existência de três escolhas inequivalentes das matrizes correspondentes (por exemplo, três matrizes distintas tipo espaço S_j), enquanto o sufixo “i” denota a existência de duas escolhas inequivalentes. Como já foi dito, a existência ou não dos termos M e K depende da assinatura do espaço-tempo. Observando a tabela podemos dizer então, a título de exemplo, que, para

espaços-tempos onde $t - s = 0 \pmod 8$, $t = 2 \pmod 4$, tanto K quanto os três termos cinéticos inequivalentes K_{J_j} associados às três matrizes gama tipo espaço S_j ($j = 1, 2, 3$) existem.

3.5.4 Espinores Octoniônicos e sua Dinâmica Livre

Apresentamos abaixo os termos cinéticos e massivos permitidos para o caso octoniônico. Como nas duas subseções anteriores, as colunas são rotuladas por $t \pmod 4$ e as filas por $t - s \pmod 8$, enquanto o significado dos símbolos é o mesmo dos casos anteriores.

Caso não-Weyl (*NW*)

	0	1	2	3
1		K	K, M	M
2	M_S	K	K, K_S, M	K_S, M, M_S
3	K_J, M_{S_i}, M_J	K, M_J	K, K_{S_i}, M	K_{S_i}, K_J, M, M_{S_i}
4	$K_{J_j}, K_F, M_{S_j}, M_{J_j}$	K, K_F, M_{J_j}, M_F	K, K_{S_j}, M, M_F	$K_{S_j}, K_{J_j}, M, M_{S_j}$

(3.5.49)

Caso Weyl (W)

	0	1	2	3
0		$K_{//}$	$K_{\perp},$ $M_{//}$	M_{\perp}
5	$K_{//T_j}, K_{\perp J_j},$ $M_{//J_j}, M_{\perp F}$	$K_{//}, K_{\perp T_j},$ $M_{//T_j}, M_{\perp J_j}$	$K_{\perp}, K_{//F},$ $M_{//}, M_{\perp T_j}$	$K_{//J_j}, K_{\perp F},$ $M_{\perp}, M_{//F}$
6	$K_{//T_i}, K_{\perp J},$ $M_{//J},$	$K_{//}, K_{\perp T_i},$ $M_{//T_i}, M_{\perp J}$	$K_{\perp},$ $M_{//}, M_{\perp T_i}$	$K_{//J},$ M_{\perp}
7	$K_{//T}$	$K_{//}, K_{\perp T},$ $M_{//T}$	$K_{\perp},$ $M_{//}, M_{\perp T}$	M_{\perp}

(3.5.50)

Como nas subseções anteriores, os sufixos “ i ” e “ j ” tomam dois e três valores distintos, respectivamente. Com estas tabelas apresentamos uma classificação completa dos lagrangeanos permitidos para os espinores (com entradas quaterniônicas e octoniônicas) nos diferentes espaços-tempos.

3.6 Identidades para Tensores Octoniônicos

Antisimétricos de Posto Superior

Como vimos nas seções anteriores, espinores octoniônicos estão associados com álgebras de Clifford octoniônicas. Lembramos que as álgebras de Clifford maximais são especificadas por dois conjuntos de realizações octoniônicas, para as seguintes assinaturas

$$C_{\mathbf{O}}(n, 7 + 8m + n) \quad . \quad C_{\mathbf{O}}(9 + 8m + n, n), \quad (3.6.51)$$

com $n, m \geq 0$. Também temos as realizações octoniónicas das álgebras de Clifford não-maximais, obtidas de (3.6.51) pela exclusão de certo número de matrizes gama reais (denominadas matrizes externas). O fato das matrizes externas serem reais restringe as assinaturas do espaço-tempo nas quais é possível uma descrição octoniónica. É útil apresentar, em forma de tabela, uma lista das álgebras de Clifford recuperadas das álgebras de Clifford maximais para as diversas dimensões $D = t + s$ até $D + 13$. As colunas da tabela estão rotuladas por D , a dimensionalidade do espaço-tempo. As álgebras de Clifford maximais estão sublinhadas. Cada álgebra de Clifford está acompanhada pela dimensionalidade \mathbf{d}_Ψ do espinor fundamental. Para cada dimensão e assinatura do espaço-tempo mostramos a dimensionalidade mínima do espinor octoniónico, todos denotados por “*”.

7	8	9	10	11	12	13
<u>(0, 7)*, 1</u>						
(7, 0)*, 1	(8, 0)*, 1	<u>(9, 0)*, 2</u>				
	(0, 8)*, 1	<u>(1, 8)*, 2</u>				
			(10, 0), 4	<u>(10, 1)*, 4</u>		
	(7, 1), 2	(8, 1)*, 2	(9, 1)*, 2			
		(0, 9)*, 2	(1, 9)*, 2	<u>(2, 9)*, 4</u>		
		(2, 7), 4	(2, 8), 4			
				(11, 0), 8	(11, 1), 8	<u>(11, 2)*, 8</u>
		(7, 2), 4	(8, 2), 4	(9, 2)*, 4	(10, 2)*, 4	
			(0, 10), 4	(1, 10)*, 4	(2, 10)*, 4	<u>(3, 10)*, 8</u>
			(3, 7), 8	(3, 8), 8	(3, 9), 8	

(3.6.52)

Na tabela anterior podemos observar que, em cada dimensão espaço-temporal D , pode-

se construir álgebras de Clifford associadas com espinores octoniônicos de dimensionalidade mínima. Então, para visualizar melhor estas álgebras de Clifford e pela relevância delas em Física, vamos apresentá-las separadamente, na tabela abaixo:

$D = 7$	$(0, 7), (7, 0)$	
$D = 8$	$(0, 8), (8, 0)$	
$D = 9$	$(0, 9), (9, 0), (1, 8), (8, 1)$	
$D = 10$	$(1, 9), (9, 1)$	(3.6.53)
$D = 11$	$(1, 10), (10, 1), (2, 9), (9, 2)$	
$D = 12$	$(2, 10), (10, 2)$	
$D = 13$	$(3, 10), (10, 3), (2, 11), (11, 2)..$	

É necessário mencionar que, na tabela anterior, as álgebras de Clifford não-maximais $(3,10)$ e $(2,11)$ foram obtidas a partir das maximais em $D = 15$. Notemos que, nas dimensões pares $D = 8, 10, 12$, temos espinores fundamentais octoniônicos tipo Weyl.

A pergunta seguinte e sua resposta serão cruciais para os resultados da seção 3.7: qual é o número de componentes independentes de uma matriz genérica com elementos octoniônicos, correspondente a um espinor fundamental octoniônico Ψ , supondo um espaço-tempo plano de dimensão D , tal que esta matriz seja hermitiana (\mathcal{H}) ou antihermitiana (\mathcal{A})? Para cada dimensão espaço-temporal e nas assinaturas permitidas para a realização octoniônica é possível determinar o número destas componentes, tanto para as matrizes hermitianas (\mathcal{H}) quanto para as antihermitianas (\mathcal{A}). O resultado é mostrado na tabela seguinte ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$):

D	d_ψ	\mathcal{H}	\mathcal{A}
7, 8	1	1	7
9, 10	2	10	22
11, 12	4	52	76
13, 14	8	232	280
..
$7 + 2n, 8 + 2n$	2^n	$2^n(4 \times 2^n - 3)$	$2^n(4 \times 2^n + 3)$

(3.6.54)

A tabela anterior, construída para octônions, pode ser repetida para os reais, complexos e quatérnions. Definindo $k = 1, 2, 4, 8$ para os reais \mathbb{R} , complexos \mathbb{C} , quatérnions \mathbb{H} e octônions \mathbb{O} , respectivamente, podemos apresentar o número de componentes independentes de uma matriz hermitiana ou antihermitiana (para cada caso da álgebra divisional) numa dimensão arbitrária do espaço-tempo:

D	d_ψ	\mathcal{H}	\mathcal{A}
$\frac{2(n + \lceil \frac{k-1}{2} \rceil + \frac{1}{2})}{2(n + \lceil \frac{k-1}{2} \rceil + \frac{1}{2}) + 1}$	2^n	$2^n + \frac{2^n}{2}(2^n - 1)k$	$2^n(k - 1) + \frac{2^n}{2}(2^n - 1)k$

(3.6.55)

Na tabela anterior $\lceil \dots \rceil$ é a função máximo inteiro e $n = 0, 1, 2, \dots$. De acordo com esta tabela, para um valor dado de n e dimensão k da álgebra divisional podemos informar a dimensão do espinor fundamental, as dimensões do espaço-tempo onde está definido este espinor, o número de componentes independentes da matriz hermitiana correspondente ao espinor fundamental e, finalmente, o número de componentes independentes se a matriz for antihermitiana. Na última parte desta seção e na próxima vamos voltar a este assunto.

A seguir vamos estudar o modo como deve ser feito o produto de matrizes gama octoniônicas. Uma das motivações é a aplicação destes resultados no estudo e classificação da chamada *álgebra-M*. Os detalhes desta aplicação serão tratados na próxima seção.

O produto antisimétrico de $k > 2$ matrizes gama octoniônicas deve ser consistentemente especificado levando-se em conta a não-associatividade dos octônions. O produto antisimetrizado de k matrizes octoniônicas Γ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) está dado por

$$\Gamma_{[12\dots k]} \equiv \frac{1}{k!} \sum_{perm.} (-1)^{\epsilon_{i_1\dots i_k}} (\Gamma_{i_1} \cdot \Gamma_{i_2} \dots \cdot \Gamma_{i_k}), \quad (3.6.56)$$

onde $(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \dots \cdot \Gamma_k)$ denota o produto simétrico

$$(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \dots \cdot \Gamma_k) \equiv \frac{1}{2}((\Gamma_1 \Gamma_2) \Gamma_3 \dots \Gamma_k) + \frac{1}{2}(\Gamma_1 (\Gamma_2 (\dots \Gamma_k))). \quad (3.6.57)$$

A utilidade desta prescrição deve-se ao fato de que o produto

$$A\Gamma_{[12\dots k]}, \quad (3.6.58)$$

com a matriz A introduzida na seção (3.5) (matriz definida como o produto das matrizes gama tipo tempo) tem uma propriedade de (anti)hermiticidade definida. Os diferentes tensores (3.6.58), sob diferentes escolhas de matrizes gama, são todos hermitianos \mathcal{H} ou antihermitianos \mathcal{A} , o que depende unicamente do valor de k (e não da gama em si), fato importante que vamos demonstrar a seguir.

Na presença dos espinores de Weyl, os tensores de (3.6.58) podem ser “sanduichados” entre operadores P_+ (ver (3.3.19)), para fornecer

$$P_+ A \Gamma_{[12\dots k]} P_+. \quad (3.6.59)$$

Levando em conta o fato de que, na tabela (3.3.11) as álgebras de Clifford octoniônicas estão construídas de modo que, dentre as D matrizes gama, 7 são proporcionais aos octônions imaginários e $D - 7$ são reais, existe uma forma de controlar o número de componentes octoniônicas independentes para ambos, tanto para (3.6.58) (em espaços tempos NW) quanto para (3.6.59) (em espaços-tempos tipo Weyl W).

Como exemplo vamos demonstrar explicitamente a contagem do número de componentes independentes dos tensores totalmente antisimétricos octoniônicos em 11-dimensões.

Em $D = 11$ podemos definir os seguinte tensores octoniônicos

$$M1_\mu \equiv A\Gamma_\mu, \quad M2_{[\mu\nu]} \equiv A\Gamma_{[\mu\nu]}, \quad M3_{[\mu\nu\alpha]} \equiv A\Gamma_{[\mu\nu\alpha]}, \quad M4_{\{\mu\nu\alpha\beta\}} \equiv M4_{[\mu\nu\alpha\beta]},$$

$$M5_{[\mu\nu\alpha\beta\delta]} \equiv M5_{[\mu\nu\alpha\beta\delta]}, \dots, \quad M11_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_{11}]} \equiv A\Gamma_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_{11}]},$$

onde os 11 índices vetoriais μ, ν são separados em 4 índices reais rotulados por a, b, c, \dots , e 7 índices octoniônicos rotulados por i, j, k, l, \dots

$$M0 = \quad A \quad 1 \quad \mathcal{A} \text{ (antihermitiano)}, \quad (3.6.60)$$

$$M1_\mu = \begin{cases} M1_a & 4 & \mathcal{H} \\ M1_i & 7 & \mathcal{H} \\ & & 11 \end{cases}, \quad (3.6.61)$$

$$M2_{[\mu\nu]} = \begin{cases} M2_{ab} & 6 & \mathcal{H} \\ M2_{ai} & 4 \times 7 & \mathcal{H} \\ M2_{ij} & 7 & \mathcal{H} \\ & & 41 \end{cases}, \quad (3.6.62)$$

$$M3_{[\mu\nu\alpha]} = \begin{cases} M3_{abc} & 4 & \mathcal{A} \\ M3_{abi} & 6 \times 7 & \mathcal{A} \\ M3_{aij} & 4 \times 7 & \mathcal{A} \\ M3_{ijk} & 1 & \mathcal{A} \\ & & 75 \end{cases}, \quad (3.6.63)$$

$$M4_{\{\mu\nu\alpha\beta\}} = \begin{cases} M4_{abcd} & 4 & \mathcal{A} \\ M4_{abc i} & 4 \times 7 & \mathcal{A} \\ M4_{abij} & 6 \times 7 & \mathcal{A} \\ M4_{aijk} & 4 \times 1 & \mathcal{A} \\ M4_{ijkl} & 1 & \mathcal{A} \end{cases}, \quad (3.6.64)$$

$$M5_{[\mu\nu\alpha\beta\delta]} = \begin{cases} 76 \\ M5_{abcdi} & 1 \times 7 & \mathcal{H} \\ M5_{abcij} & 4 \times 7 & \mathcal{H} \\ M5_{abijk} & 6 \times 1 & \mathcal{H} \\ M5_{aijkl} & 4 \times 1 & \mathcal{H} \\ M5_{ijklm} & 1 & \mathcal{H} \\ 52 \end{cases} , \quad (3.6.65)$$

Assim, podemos continuar até o último tensor $M11_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_{11}]}$. Como resultado temos,

Tensores antihermitianos \mathcal{A} :

$M0$	1	
$M3_{[\mu\nu\alpha]}$	75	
$M4_{[\mu\nu\alpha\beta]}$	76	
$M7_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_7]}$	76	
$M8_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_8]}$	75	
$M11_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_{11}]}$	1	

(3.6.66)

Tensores hermitianos \mathcal{H} :

$M1_\mu$	11	
$M2_{[\mu\nu]}$	41	
$M5_{[\mu\nu\alpha\beta\delta]}$	52	
$M6_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_6]}$	52	
$M9_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_9]}$	41	
$M10_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_{10}]}$	1	

(3.6.67)

Esta análise, feita para $D = 11$ pode ser repetida em todas as dimensões. O resultado final, para espaços-tempos de dimensão D ímpar, é mostrado na tabela a seguir, com as colunas rotuladas pelo tensor antisimétrico de posto k .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$D = 7$	<u>1</u>	7	7	<u>1</u>	<u>1</u>	7	7	<u>1</u>						
$D = 9$	<u>1</u>	<u>9</u>	22	22	<u>10</u>	<u>10</u>	22	22	<u>9</u>	<u>1</u>				
$D = 11$	1	<u>11</u>	<u>41</u>	75	76	<u>52</u>	<u>52</u>	76	75	<u>41</u>	<u>11</u>	1		
$D = 13$	1	13	<u>64</u>	<u>168</u>	267	279	<u>232</u>	<u>232</u>	279	267	<u>168</u>	<u>64</u>	13	1

(3.6.68)

As componentes hermitianas (\mathcal{H}) são aquelas que estão sublinhadas e as demais são antihermitianas (\mathcal{A}).

De modo similar, podemos encontrar o número de tensores hermitianos e antihermitianos para espaços-tempos de dimensão par. No caso Weyl usamos (3.6.59):

D=par, Caso Weyl.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$D = 8$	<u>1</u>	0	7	0	<u>1 + 1</u>	0	7	0	<u>1</u>				
$D = 10$	0	<u>10</u>	0	22	0	<u>10 + 10</u>	0	22	0	<u>10</u>	0		
$D = 12$	1	0	<u>52</u>	0	76	0	<u>52 + 52</u>	0	76	0	<u>52</u>	0	1

(3.6.69)

Uma análise mais detalhada das expressões (3.6.61), (3.6.62) e (3.6.65) revela que os 52 tensores octonionicos M_5 podem se identificar com 11 tensores M_1 + 41 tensores M_2 . o que significa que, em 11 dimensões, existem somente 52 tensores octonionicos independentes. Este resultado em particular será crucial na próxima seção, onde estudaremos as

supersimetrias generalizadas na versão octoniônica. Adicionalmente, vamos mostrar as equivalências permitidas entre os tensores octoniônicos antisimétricos de diferentes postos, para espaços-tempos de dimensão ímpar.

$D = 7$	$M_0 \equiv M_3$	
$D = 9$	$M_0 + M_1 \equiv M_4$	
$D = 11$	$M_1 + M_2 \equiv M_5$	(3.6.70)
$D = 13$	$M_2 + M_3 \equiv M_6$	
$D = 15$	$M_3 + M_4 \equiv M_0 + M_7$	

Finalmente, tendo contado os tensores octoniônicos independentes para algumas dimensões do espaço-tempo e determinado a hermiticidade ou antihermiticidade dos mesmos (ver 3.6.68, 3.6.69), e levando em conta as relações de equivalência (ver tabela (3.6.70)), podemos obter o número final de tensores octoniônicos independentes e suas propriedades de hermiticidade ou antihermiticidade para as dimensões em consideração.

D	\mathcal{H}	\mathcal{A}	
7,8	1	7	
9,10	10	22	(3.6.71)
11,12	52	76	
13	232	280	

É interessante ver que esta tabela tem a mesma estrutura que (3.6.54), que foi elaborada seguindo outra linha de raciocínio. Isto ficará mais claro quando estudarmos as supersimetrias octoniônicas generalizadas, na próxima subseção.

3.7 Álgebra-M Octoniônica e Supersimetrias Generalizadas

A teoria das cordas nasceu em 1968 [48], como candidata a descrever propriedades duais dos hadrons. Substituída pela *QCD*, surgiu novamente em 1976 [49], como possibilidade de descrição unificada da gravitação e das demais interações fundamentais. Em 1984 conseguiu o primeiro grande impulso com os trabalhos de Green e Schwartz [50]. A teoria das cordas postula que os objetos fundamentais são cordas (objetos estendidos), e não os objetos pontuais, propostos usualmente no contexto da teoria quântica de campos. Vamos mencionar, resumidamente, algumas características desta teoria:

1 - A teoria de cordas fechadas prediz a gravidade (aparece naturalmente um campo de spin 2 = graviton).

2 - Ela fornece uma teoria da gravidade quântica perturbativa consistente e finita.

3 - Ela é formulada num espaço-tempo com $D = 1 + 25$ de modo a não haver quebra da invariância de Lorentz.

4 - Com a introdução da supersimetria, Green e Schwarz [50] conseguiram construir uma teoria de supercordas consistente em $D = 1 + 9$ (primeira revolução das cordas). Podemos mencionar que existem 5 teorias de cordas supersimétricas consistentes em $D = 1 + 9$, que são : tipo IIA, tipo IIB, Tipo I, Heterótica $E_8 \times E_8$ e Heterótica $SO(32)$. No ano de 1995, aconteceu o que foi chamado de segunda revolução das cordas. Num trabalho excepcional E. Witten apresentou a conjectura da dualidade entre as diversas teorias de supercordas. Esta dualidade significava a equivalência entre teorias de supercordas aparentemente diferentes [51, 52].

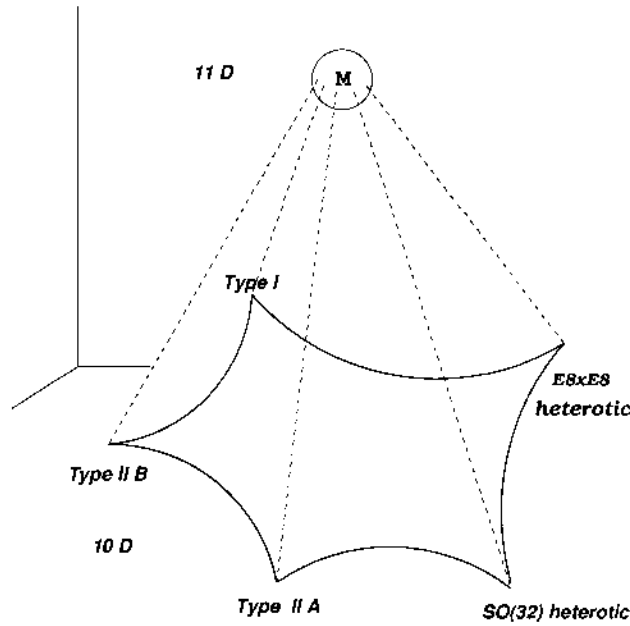


Fig 3.7

Atualmente [53]-[55] acredita-se que exista uma teoria fundamental em $D = 11$ denominada *teoria-M*, tal que as 5 teorias de supercordas sejam compactificações desta teoria fundamental (ver figura 3.7). De outro modo, podemos dizer que a teoria- M unifica as 5 teorias de supercordas e a supergravidade em $D = 11$. Esta última seria uma teoria efetiva em baixas energias da teoria- M . Para uma revisão histórica e pedagógica das teorias das supercordas e da teoria- M veja as referências [61]-[63].

Vamos discutir os possíveis vínculos gerados pela álgebra divisional sobre as supersimetrias generalizadas. Para iniciar nossa discussão, vamos considerar um espinor fundamental com 32 componentes reais, definido em $D = 11$ (ver tabela 3.3.11). Tais espinores aparecem naturalmente na formulação da supergravidade ou da teoria- M 11-dimensional. Suponhamos que eles admitam uma estrutura real, complexa, quaterniônica ou octoniônica. Então, os geradores supersimétricos Q_α (espinores) podem ser representados, respectivamente, como um vetor coluna de 32 componentes reais, 16 componentes com-

plexas, 8 componentes quaterniônicas ou 4 componentes octoniônicas. Seja

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = Z_{ab}, \quad (3.7.72)$$

a álgebra supersimétrica generalizada, onde Q_b^\dagger denota a conjugação principal na álgebra divisional. Esta álgebra admite, no lado direito, uma matriz hermitiana Z_{ab} ($Z_{ab} = Z_{ba}^\dagger$), de 32×32 componentes reais, 16×16 componentes complexas, 8×8 componentes quaterniônicas ou 4×4 componentes octoniônicas. Devido à condição de hermiticidade nos diferentes casos das álgebras divisionais (ver tabelas (3.6.54), (3.6.55)), o número de componentes independentes (\sharp) de Z_{ab} está dado na seguinte tabela:

Ψ	\sharp	exemplos
R (32)	528	(6,5), (10,1)*,(3,6),(3,7)...
C (16)	256	(0,5), (4,5)..
H (8)	120	(3,7), (3,6),(7,2)
O (4)	52	(10,1)*,(2,9),(0,10),(2,10)...

(3.7.73)

Na tabela, mostramos algumas assinaturas como exemplos nos quais o espinor fundamental de 32 componentes reais³ equivalentemente também aceita componentes a valores na álgebra divisional. Observa-se que a questão de determinar o número de componentes independentes da matriz hermitiana Z_{ab} já foi discutido e resolvido na seção anterior, com resultados apresentados na tabela (3.6.55).

As supersimetrias generalizadas são aquelas que vão além do esquema padrão de HLS [41]. Isto implica em que o setor bosônico da superálgebra de Poincaré ou conforme não pode ser mais expresso como uma estrutura de produto tensorial $B_{geom} \oplus B_{int}$, onde B_{geom}

³Vemos, da tabela, que o espinor real é fundamental na assinatura Minkowskiana (10,1), assim como o espinor octoniônico.

descreve a álgebra de Poincaré ou a álgebra conforme e o resto de geradores são escalares de Lorentz.

Apresentamos a expressão formal da superálgebra generalizada num espaço-tempo arbitrário de dimensão D

$$Z_{ab} \equiv \{Q_a, Q_b\} = (A\Gamma_\mu)_{ab}P^\mu + \sum_{k=2} (A\Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_k]})_{ab} Z^{[\mu_1 \dots \mu_k]}, \quad (3.7.74)$$

contendo os geradores da supertranslação P_μ , onde $\mu = 1, \dots, D$, $Z^{[\mu_1 \dots \mu_k]}$ são cargas centrais tensoriais de posto k e $\Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_k]}$ é o produto totalmente antisimétrico de k matrizes gama correspondente ao espaço-tempo onde estamos definindo a superálgebra generalizada. Observa-se que, na superálgebra (3.7.74), temos que saturar o número total de componentes independentes do lado esquerdo⁴ com o número total de componentes independentes no lado direito. No lado direito temos os D geradores da supertranslação e os geradores extras $Z^{[\mu_1 \dots \mu_k]}$. O número destes últimos está dado pelo binômio de Newton $\binom{D}{k}$.

Em particular, para $D = 11$, tomando espinores reais de 32 componentes, esperamos obter, para o anticomutador de (3.7.74), uma matriz simétrica em geral com 528 componentes independentes, como podemos ver na tabela (3.7.73). Para saturar 528, do lado direito tomamos 11 componentes do Γ_μ associado à supertranslação e completamos com os termos $k = 2, k = 5$, ou seja $528 = 11 + 55 + 462$. Logo, a álgebra supersimétrica mais geral em $D = 11$ pode se apresentar como

$$\{Q_a, Q_b\} = (A\Gamma_\mu)_{ab}P^\mu + (A\Gamma_{[\mu\nu]})_{ab}Z^{[\mu\nu]} + (A\Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_5]})_{ab}Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]}. \quad (3.7.75)$$

Por outro lado, dos trabalhos [54],[64]-[67], podemos ver que, na verdade, a superálgebra maximal (3.7.75) é a álgebra fundamental da teoria- M ou da supergravidade

⁴O número delas já foi calculado, ver tabela (3.7.73).

em $D = 11$. Os três tipos de cargas que aparecem no lado direito desta superálgebra estão associados ao supergráviton, à supermembrana (*2-brane*) e à supercincobrana (*5-brane*) que são os ingredientes básicos da teoria- M . É, portanto, natural chamá-la de superálgebra da teoria- M ⁵ ou simplesmente *álgebra- M* . Obviamente, quando fixamos $Z^{[\mu\nu]} \equiv Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]} \equiv 0$ recuperamos a superálgebra ordinária.

Por outro lado, no mesmo espaço-tempo Minkowskiano com $D = 11$, podemos impor uma estrutura octoniónica, com espiniores fundamentais de 4 componentes com entradas octoniónicas (ver tabela 3.7.73). Neste caso, a álgebra supersimétrica generalizada (3.7.72) admite, no lado direito, uma matriz com entradas octoniónicas de 52 componentes independentes. Logo, observando a superálgebra generalizada específica para $D = 11$ e os resultados da seção 3.6 (ver a tabela 3.6.70), vemos que o lado direito da álgebra (3.7.75) não tem 3 termos independentes, como no caso real. Na verdade, eles podem ser expressos como 11 + 41 geradores bosônicos da forma

$$\mathcal{Z}_{ab} = P^\mu (A\Gamma_\mu)_{ab} + Z_{\mathbf{O}}^{\mu\nu} (A\Gamma_{\mu\nu})_{ab}, \quad (3.7.76)$$

ou como 52 geradores bosônicos da forma

$$\mathcal{Z}_{ab} = Z_{\mathbf{O}}^{[\mu_1 \dots \mu_5]} (A\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5})_{ab}. \quad (3.7.77)$$

Assim, diferentemente do caso das representações reais para os espiniores e matrizes gama, os setores especificados por (3.7.76) e (3.7.77) não são independentes. Ou seja, a carga central octoniónica de posto 2 e a carga central octoniónica de posto 5 não são independentes. Este resultado, ao mesmo tempo não usual e interessante, foi apresentado pela primeira vez nos trabalhos [42, 43].

⁵Na verdade, a álgebra 3.7.75 é usualmente apresentada com a matriz C em vez de A , de acordo com nossa construção das álgebras de Clifford. No caso real $A = C$. No entanto, para o caso octoniónico $A \neq C$ e A tem propriedade de hermiticidade bem definida. Daí vem a nossa proposta de usar A (ver (3.6.58)).

Num contexto diferente, as cargas centrais vinculadas à 2-superbrana e 5-superbrana não são independentes, como podemos ver nas referências [61], [68]-[69] onde se argumenta que, em geral, uma p -brana num espaço-tempo de dimensão D teria como seu *dual* a uma $D - p - 4$ -brana. Logo, em 11 dimensões, a 2-brana e a 5-brana seriam objetos estendidos *duais*, com a primeira estando associada a uma suposta “carga elétrica” e a segunda, a uma suposta “carga magnética”. Estes dois resultados independentes podem estar relacionados ou não, o que é uma questão em aberto, que precisa ser estudada.

Mais detalhes sobre aplicações dos espinores octoniônicos na supersimetria generalizada, em conexão com a álgebra- M octoniônica e a álgebra generalizada superconforme, podem ser vistos nas referências [42, 43]. Os resultados mencionados nesta seção mostram a necessidade de procurar a classificação das supersimetrias octoniônicas generalizadas, que ainda não foi feita. No que se refere às supersimetrias octoniônicas em $D = 1$, aplicadas à mecânica quântica octoniônica, já existem resultados [36].

Conclusões

A ênfase desta tese recai, principalmente, nos resultados de dois trabalhos. O primeiro, publicado em *Physics Letters A* [36], encontra-se detalhado no capítulo 2, enquanto o segundo publicado *JHEP* [71], está exposto no capítulo 3. Assim, separaremos as conclusões desta tese em duas partes. Na parte final do capítulo 2 também enunciamos alguns resultados interessantes de outro trabalho [73].

No segundo capítulo, apresentamos a generalização supersimétrica de alguns resultados obtidos no trabalho de Osipov [20], relativos à afinização da álgebra de comutadores dos octônions no caso bosônico e sua transformação de Sugawara. Introduzimos a álgebra de Malcev superafinizada \mathcal{O} , realizada por 8 campos bosônicos de spin 1 e 8 campos fermiônicos de spin 1/2, sendo esta álgebra manifestamente supersimétrica. Conseguimos construir as transformações de Sugawara, que mapeiam a álgebra superafinizada \mathcal{O} em outra, denominada *álgebra superconforme não-associativa* $N = 8$, de Englert *et al* (ASCNA $N = 8$, da referência [23]). O fato de que a álgebra superafinizada \mathcal{O} seja tipo super-Malcev não garante que a ASCNA $N = 8$, construída através das transformações de Sugawara, também seja super-Malcev. Construímos 8 cargas globais associadas à ASCNA.

A ASCNA $N = 8$ não satisfaz à identidade de super-Jacobi, o que permite superar o teorema que estabelece que não é possível construir álgebras superconformes com cargas centrais para $N > 4$ [76, 77]. Este teorema é válido para (super-) álgebras de Lie que,

evidentemente, satisfazem as identidades de (super-) Jacobi. Ou seja, relaxando a associatividade, conseguimos contruir uma álgebra superconforme $N = 8$ com extensão central. Com esta álgebra (ASCNA $N = 8$) e seus comutadores interpretados como parênteses de Poisson de uma hamiltoniana relacionada às equações tipo KdV, podemos construir a extensão supersimétrica das equações tipo KdV para $N > 4$. Concretamente, na referência [73] construímos o primeiro exemplo da SuperKdV $N = 8$.

Mencionamos, a seguir, as principais conclusões em relação ao tópico desenvolvido no capítulo 3: fizemos uma pesquisa sistemática das álgebras de Clifford e espinores com entradas reais, quaterniônicas e octoniônicas. Apresentamos sua classificação e procedimentos para achar explicitamente suas representações, nas diversas dimensões e assinaturas.

No caso das representações reais das álgebras de Clifford (\mathbb{R}) (mesmo tendo estrutura real, quaterniônica ou octoniônica) precisamos introduzir somente uma matriz, A , o que difere do caso das representações complexas da mesma álgebra, onde precisamos definir 3 matrizes A, B, C (associadas com conjugações hermitiana e complexa e transposição) para definir espinores e álgebras de Clifford num espaço-tempo plano com assinatura arbitrária. No caso da representação quaterniônica (\mathbb{H}) e octoniônica (\mathbb{O}), na prática, precisamos somente de duas matrizes, a matriz A definida como o produto de todas as matrizes gama tipo tempo, e a matriz C definida como o produto de todas as matrizes simétricas ou antisimétricas. Como já dissemos, no caso real, particularmente, $A = C$.

Mostramos, em tabelas, as assinaturas e dimensões do espaço-tempo onde existem os termos massivos M e cinéticos K para a lagrangeana livre mais geral construída com base em espinores com entradas pertencentes à álgebra divisional.

No que diz respeito aos tensores octoniônicos, levando em conta a peculiaridade da sua não-associatividade, construímos e derivamos uma série de tabelas que expressam identidades dos tensores octoniônicos antisimétricos nas diversas dimensões. A motivação

desta linha de pesquisa é a procura de uma classificação das supersimetrias octoniónicas generalizadas (com cargas centrais tensoriais), que ainda não está feita. Apresentamos um exemplo, a chamada *álgebra- M* octoniónica, com suas características peculiares obtidas através do uso das identidades obedecidas pelos tensores octoniónicos. Mostramos que, neste caso, a carga central de posto 2, juntamente com a supertranslação, estão vinculadas à carga central de posto 5. Somos otimistas quanto à relevância deste fato para a Física.

No que se refere aos espinores quaterniônicos, observamos que eles também podem ser interessantes nas supersimetrias generalizadas. Pelo fato de que espinores com entradas quaterniônicas são permitidos no espaço-tempo Euclídeano em 11 dimensões, eles podem ser úteis na construção da versão Euclídeana da *álgebra- M* .

Voltando ao caso octoniónico, na seção (3.4) do capítulo 3 mencionamos que a realização octoniónica da álgebra de Clifford Euclídeana 7-dimensional está relacionada com a geometria da esfera S^7 , quando levantamos uma questão que precisa ser pesquisada: estará a descrição octoniónica da superálgebra- M relacionada, de alguma forma, com a particular compactificação da teoria- M 11-dimensional em $AdS_4 \times S^7$? Esta compactificação corresponde à solução natural da supergravidade 11-dimensional [78]. Seria interessante verificar se as identidades tensoriais encontradas para os octônions têm sua contrapartida também na geometria compactificada $AdS_4 \times S^7$. Por outro lado, ainda temos que entender bem, numa visão algébrica, as implicações na Física da superálgebra- M octoniónica. Em $D = 11$ esta superálgebra é expressa por uma matriz octoniónica 4×4 , fora do esquema de Jordan [79]. Também é válida a questão da construção de uma mecânica quântica octoniónica consistente [80]. O caso da mecânica quântica quaterniônica foi discutido por Adler e outros [81]

Outra questão importante, que ressaltamos como perspectiva de trabalho futuro e que ultimamente tem sido muito considerada, é o papel das estruturas excepcionais (as

álgebras excepcionais de Lie são G_2, F_4, E_6, E_7, E_8) e das álgebras de Jordan na Física fundamental. Existe a conjectura de que talvez as teorias da unificação sejam baseadas nas álgebras excepcionais e não nas álgebras de Lie usuais. Observa-se que a teoria de supercordas heterótica usa a álgebra $E_8 \times E_8$, como já dissemos antes; a supergravidade em $D = 11$ tem uma compactificação natural $AdS_4 \times S^7$ (onde S^7 é a esfera construída pelos octônions imaginários); e a álgebra E_6 contém o $SU(5)$ da GUT , o qual, por sua vez, contém a estrutura algébrica do modelo padrão.

É importante ressaltar, também, que todas as álgebras excepcionais podem, de alguma forma, ser estudadas com base nos octônions [8]. Por exemplo, a álgebra G_2 é o grupo de automorfismos dos octônions. Logo, é evidente a importância do estudo dos octônions como estrutura base das álgebras excepcionais. A importância desta área de pesquisa em Física é medida pelo fato de que, nos últimos tempos, vários trabalhos interessantes têm aparecido independentemente [82, 83]. Existe, atualmente, uma atividade crescente no sentido de explorar a relevância destas estruturas excepcionais na Física.

Bibliografia

- [1] François Gieres, “About symmetries in Physics”, hep-th/9712154.
- [2] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory” (2 Volumes), Cambr. Univ. Press (1987).
- [3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov e A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B 241** (1984) 333.
- [4] P. Jordan, Nachr. Ges. Wiss. Gött. Math. Phys. 569 (1932), *ibid.* 209 (1933); Zeits. Phys. **80**, 285 (1933); P. Jordan, J. von Neumann and E.P. Wigner, Ann. Math. **35**, 29 (1934).
- [5] D.B. Fairlie and A.C. Manogue, Phys. Rev. **D 34**, 1832 (1986).
- [6] K.W. Chung and A. Sudbery, Phys. Lett. **B 198**, 161 (1987).
- [7] I. Porteous, “Topological Geometry”, van Nostand Rh., London, 1969.
- [8] John C. Baez, “The octonions”, arXiv:math.RA/0105155 v 3, 2001.
- [9] A. Hurwitz, Nachr. Ges. Wiss Göttingen (1898)309.
- [10] R. D. Schafer, “An introduction to nonassociative algebras”, New York (1964).

- [11] M. Zorn, "Theorie der alternativen Ringe", Abh. Math. Sem. Univ. Hamgurg **8** (1930) 123.
- [12] R. Bott e J. Milnor, Bull. Am. Math.Soc **64** (1958) 87.
- [13] M. Günaydin e F. Gürsey, J. Math. Phys. vol. **14** No 11 (1973) 1651.
- [14] M. Günaydin e S.V. Ketov, Nucl. Phys. **B 467** (1996) 215.
- [15] J. Daboul e R. Delbourgo, J. Math. Phys. **40** (1999) 4134.
- [16] É Cartan, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31** (1914) 255.
- [17] A. Sudbery, J. Phys. A. **17** (1984) 939.
- [18] Malcev, A. I. "Analytic loops", Mat. Sb. (N. S.) 36(78):3 (1995), 569-575.
- [19] Carrion, M. Rojas e F. Toppan, Phys. Lett. **A** (2001) 95
- [20] E.P. Osipov, Phys. Lett. **B 214** (1988) 371; Lett. Math. Phys. **18** (1989) 35.
- [21] E.P. Osipov, Phys. Lett. **B 274** (1992) 341.
- [22] E. Ivanov, S. Krivonos e F. Toppan, Phys. Lett. **B 405** (1997) 85.
- [23] F. Englert, A. Sevrin, W. Troost, A. van Proeyen and P. Spindel, J. Math. Phys. **29** (1988) 281.
- [24] K. Thielemans, Int. J. Mod. Phys. **C** vol 2, N 3 (1991) 787.
- [25] K. Krivonos e K. Thielemans, Class. Quantum Grav. **13** (1996) 2899.
- [26] P. Goddard e D. Olive, Int. J. Mod. Phys. **A** vol 1, N 2 (1986) 303.
- [27] S. Ketov, "conformal field Theory", World Scientific, singapore 1995.

- [28] M. Schottenloher, "A Mathematical introduction to conformal Field Theory", Lecture Notes in Physics, Springer No 43 (1991).
- [29] L. Dolan, Phys. Rep. **109**, N 1 (1984) 1.
- [30] William K. Clifford, Amer. Journ. Math. **1** (1878) 350.
- [31] M.F. Atiyah, R. Bott e A. Shapiro, Topology (Suppl. 1) **3**, 3 (1964).
- [32] T. Kugo, P. Townsend, Nucl. Phys. **B 221** (1983) 357.
- [33] S. Okubo, Real representations of finite Clifford álgebras. I. Classification, J. Math. Phys. **32**, (1991)1657; II. Explicit construction and pseudo-octonion, *ibid.*, 1669.
- [34] R. D'Auria, S. Ferrara, M. A. Lledó e V. S. Varadarajan, "Spinor algebras" . J. Geom. Phys. **40** (2001) 101; R. D'Auria, S. Ferrara e M. A. Lledó, Lett. Math. Phys. **57** (2001) 123; S. Ferrara e M. A. Lledó, Rev. Mod. Phys. **14** (2002) 519.
- [35] A. Pashnev e F. Toppan, J.Math.Phys.42: (2001) 5257.
- [36] H.L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, Mod. Phys. Lett. A vol 18, N 11 (2003) 787.
- [37] Z. Hasiewicz e J. Lukierski, Phys. Rev. **145 B**, (1984) 65.
- [38] M. Cederwall e C. Preitschopf, Comm. Math. Phys. **167** (1995) 373.
- [39] M. Günaydin e F. Gürsey, J. Math. Phys. vol 14, N 11, (1973) 1651.
- [40] M.A. De Andrade e F. Toppan, Mod. Phys. Lett. **A 14**, 1797 (1999).
- [41] R. Haag, J. Lopuszański and M. Sohnius, Nucl.Phys. **B 88**, (1975) 257.
- [42] J. Lukierski e F. Toppan, Phys. Lett. **B 539**, (2002) 266.

- [43] J. Lukierski e F. Toppan, “Octonionic M -theory and $D = 11$ Generalized Conformal and Superconformal Algebras”, hep-th/0212201.
- [44] J. Scherk, “Recent Developments in Gravitation”, eds M \grave{c} L \acute{e} vy e S. Deser (Plenum Press, 1979).
- [45] M. F. Sohnius, Phys. Rep. **128**, (1985) 39.
- [46] “Analysis, Manifolds and Physics”, Ivonne Choquet- Bruhat, Cécile De Witt-Morette e Margaret Dillard-Bleick, edições North-Holland (1982).
- [47] A. Pashnev, F. Toppan, J. Math. Phys. **42**, 5257 (2001).
- [48] G. Veneziano, Nuovo Cimento, **57 A**, (1968) 190.
- [49] J. Scherk e J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B 81**, (1974) 118.
- [50] M. B. Green e J. H. Schwarz, Phys. Lett. **149 B**, (1984) 117.
- [51] E. Witten, Nucl. Phys. **B 443**, (1995) 85.
- [52] J. Polchinski e E. Witten, Nucl. Phys. **B 460**, (1996) 525.
- [53] P. Townsend, Phys. Lett. **350 B**, (1995) 184.
- [54] P. Townsend, hep-th/9507048; hep-th/9612121, hep-th/9712004.
- [55] P. Horava e E. Witten, Nucl. Phys. **B 460**, (1996) 506.
- [56] E. Bergshoeff e A. Van Proeyen, Class. Quant. Grav. **17**, (2000) 3277.
- [57] E. Bergshoeff e A. Van Proeyen, Class. Quant. Grav. **18**, (2001) 3083.
- [58] C. Vafa, Nucl. Phys. **B 469** (1996) 403.

- [59] H. Nishino, Nucl. Phys. **B 542** (1999) 217.
- [60] C. M. Hull, JHEP **11** (1999) 017.
- [61] E. Kiritsis, hep-th/9709062; hep-th/9911525,
- [62] A. Sen, hep-th/9810356.
- [63] G. Gibbons, gr-qc/9803065.
- [64] J. A. de Azcárraga, J. P. Gauntlett, J. M. Izquierdo e P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2443.
- [65] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. Townsend, Ann. Phys. **18**, 330 (1987).
- [66] M.J. Duff. R.R. Khuri, J.X. Lu, Phys. Rep. **259**, 213 (1995).
- [67] E. Sezgin, Phys. Lett **B** (1997) 323.
- [68] T. Eguchi e A. Taormina, Phys. Lett **B 200** (1988) 315.
- [69] R. Nepomechie, Phys. Rev. **D 31** (1985) 1921; C. Teitelboim, Phys. Lett **B 167** (1986) 69.
- [70] F. Toppan, JHEP PRHEP unesp/039-2002.
- [71] H.L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, JHEP 04 (2003) 040.
- [72] F. Toppan, Nucl.Phys.Proc.Suppl.102 (2001) 270.
- [73] H.L. Carrion, M. Rojas e F. Toppan, J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 3809.
- [74] P. Mathieu, *Phys. Lett.* **203** (1988) 287; C.A. Laberge and P. Mathieu, *Phys. Lett.* **B 215** (1988) 718; P. Labelle and P. Mathieu, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 923.

- [75] F. Delduc e E. Ivanov, *Phys. Lett. B* **309** (1993) 312; F. Delduc, E. Ivanov e S. Krivonos, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 1356.
- [76] Elena Poletaeva, hep-th/0103201.
- [77] Pavel Groznan, Dimitry Leites e Irina Shchepochkina, hep-th/9702120.
- [78] M.J. Duff e C.N. Pope, “Kaluza-Klein supergravity and the seven-sphere” in *Supersymmetry and Supergravity 82*, Trieste proceedings; M.J. Duff, B.E.W. Nilsson e C.N. Pope, *Phys. Rep.* **130**, 1 (1986).
- [79] M. Günaydin, C. Piron e H. Rucgg, *Comm. Math. Phys.* **61**, 69 (1978).
- [80] Stefano De Lco, Khaled Abdel-Khalek, *Prog.Theor.Phys.* 96 (1996) 823.
- [81] “Qauternionic quantum mechanic”, Adler ().
- [82] E. Witten, “quest for Unification”, hep-th/0207124; P. Ramond, “Algebraic Dreams”, hep-th/0112261, “Exceptional groups and Physic”, hep-th/0301050; “The exceptional Jordan algebras and the matrix string, hep-th/0104050.
- [83] Y. Ohwashi, *Prog. Theor. Phys.* **108**, 755 (2002).
- [84] H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, *Mod. Phys. Lett. A* Vol 18, No 9 (2003) 629.
- [85] “Conformal quantum mechanics in the Wigner-Heisenberg picture, H. L. Carrion, Rodrigues R. L. XXIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2002.guas de Lindia.
- [86] ”A Representation of the Virasoro Algebra via Wigner-Heisenberg Algebraic Technique to Bosonic Systems”, E. L. da Graa, H. L. Carrion, R. de Lima Rodrigues. *Revista Brasileira de Física* 2003. processo de redao.

Apêndice A

Trabalhos publicados

Durante o período do Mestrado.

- "Godel-type Space-Time in Induced Matter Gravity Theory", H. L. Carrion, M. J. Rebouas, A. F. F. Teixeira, J. Math. Phys, vol 40, No 8, (1999) 4011.

Durante o período do doutorado.

- 1- "An $N=8$ Superaffine Malcev Algebra and Its $N=8$ Sugawara", H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, Physics Letters A, v 291, N 2 (2001) 95.
- 2- "Division Algebras and Extended $N= 1,2,4,8$ KdVs", H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, J. Phys. A: Math. Gen. v 36, (2003) 3809.
- 3- "Residual Symmetries in the Presence of an EM Background", H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, Mod. Phys. Lett. A, v 18, N 9 (2003) 629.
- 4- "Octonionic Realization of 1D Extended Supersymmetries. A Classification", H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, Mod. Phys. Lett. A, v 18, N 11 (2003) 787.
- 5- "Quaternionic and Octonionic Spinors: A Classification", H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, JHEP, v 04 (2003) 040.
- 6- "A Representation of the Virasoro algebra via Wigner-Heisenberg algebra technique to bosonic systems", H. L. Carrion, Rafael de L. Rodrigues, por aparecer na Revista

Brasileira de Física (2003).

Trabalho em andamento

- "Superconformal Quantum Mechanics in the Wigner-Heisenberg Picture", H. L. Carrion.

Rafael de L. Rodrigues.

“Os Octonions e suas aplicações na Física”

Hector Leny Carrion Salazar

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Francesco Toppan – Presidente/CBPF

José Francisco Gomes – UNICAMP

Sílvio Paolo Sorella – UERJ

Itzhak Roditi – CBPF

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Suplente: Sebastião Alves Dias - CBPF