TESE DE DOUTORADO

Supersimetria e Sistemas Quânticos

Gilmar de Souza Dias

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 2003

["Dá instrução ao sábio e ele se fará mais sábio... "
"Os Judeus pedem sinal, e os gregos buscam sabedoria,...
...Cristo crucificado, escândalo para os judeus (não todos), loucura para os Gregos (ou gentios);... ....Cristo, poder de Deus e sabedoria de Deus... "
Provérbios 9a, I Coríntios 1:22, 1:23b e 1:24b (Bíblia Sagrada).
"Give instruction to a wise man, and he will be yet wiser,..."
"For the Jews require a sign, and the Greeks seek after wisdom,...
...Crist crucified, unto the Jews a stumblingblock, and unto de Greeks foolishness;...
...Crist, the power of God, and the wisdom of God..."
Proverbs 9a, I Corinthians 1:22, 1:23b e 1:24b (Holy Bible).]

Resumo

Nesta tese, estudam-se diferentes aplicações da Supersimetria à Mecânica Quântica. São abordados e discutidos problemas como a quebra espontânea da supersimetria, turbulência no regime de ínstantons, estabilidade de paredes de domínio e a dinâmica de partículas carregadas em campos eletromagnéticos estendidos. Para o tratamento de todas estas questões, idéias, conceitos e técnicas introduzidos pela supersimetria desempenham importante papel, reforçando a relevância da simetria férmion-bóson para o estudo de uma série de sistemas físicos.

Abstract

This thesis sets out to propose a number of possible applications of Supersymmetry in Quantum Mechanics. Issues like spontaneous supersymmetry breaking, turbulence in the instanton regime, domain wall stability and the dynamics of charged particles subject to an extended electromagnetic field are addressed to with the help of ideas, concepts and technical tools brought about by Supersymmetry. The latter appears to play a meaningful rôle for the description of a great deal of physical systems.

Agradecimentos

Agradeço Senhor!

Obrigado a minha esposa e filhos, as mulheres de minha vida, Lítza , Débora, Isabelle, tendo pois a Vitória, obrigado pela compreensão durante todo este trabalho.

Aos meus Pais que muito me ensinaram.

Agradeço a Deus por todo crescimento e obrigado ao professor J. A. Helayel-Neto (CBPF) a quem em meu coração chamo de irmão, por tudo em que se permitiu ser instrumento deste crescimento, revelado em suas palavras copiadas e coladas aqui, as quais me dizem: vc trabalhou e cresceu muito.

Para uma pessoa conhecidamente religiosa como o Prof. J. A Helayel -Neto, permita-me tão somente relembrar Professor que seu plantio não foi em vão, certamente colherás algumas vezes mais o que plantou até este atual crescimento e de tantos outros; esta é a lei da semeadura de Deus, intransponível para os homens como qualquer outra lei da natureza, certa para quem crê e infelizmente certa para quem não crê neste paradigma Bíblico de uma ordem única, absoluta.

Obrigado ao Professor Luca Moriconi (UFRJ) pelo grande apoio inicial que tive, fundamental para que esta tese hoje fosse concretizada, um grande abraço Luca.

Obrigado aos colegas da sala 314 B com os quais durante todo este tempo foi um relacionamento mutuamente maravilhoso, harmonioso, nossas conversas informais, nossas pizzas, e que deixará muitas saudades deste tempo, em particular ao Marcelo Sarandi pelas discursões físicas e filosóficas muito interessantes, a todos voces quero dizer tenham sucesso em suas escolhas.

Também obrigado aos demais colegas que diretamente e indiretamente conspiraram e foram cúmprices para a conclusão deste trabalho, um grande abraço a todos.

Obrigado ao povo Brasileiro que gentilmente financiou este trabalho através do CNPq.

A todos voces que declarei meu obrigado, quero dizer que só há um único caminho para a felicidade plena, busquem verdadeiramente o caminho a verdade e a vida. Fim.

Conteudo

Introdução

A Supersimetria apresenta-se, em teoria de campos, como a formulação mais viável e consistente para realizar o programa de unificação das interações fundamentais. Foi introduzida em 1971 por Gel'fand e Likhtman [1] , Ramond [2] e Neveu e Schwartz [3] e, posteriormente, reapresentada por vários grupos [4, 5, 6]. A álgebra da supersimetria fecha-se não somente através de relação de comutação, como nas álgebras de Lie, mas também por anticomutação, por isto, é chamada de álgebra de Lie graduada, (uma extensãn da álgebra de Lie). Sua aplicação inicial foi em modelos de cordas, na unificação de setores bosônicos e fermiônicos; posteriormente, Wess e Zumino [5] aplicaram-na para a construção de uma teoria de campos em (3+1) dimensões com características marcantes tais como divergência ultravioleta menos drásticas e com balanceamento entre graus de liberdades bosônicos e fermiônicos. Uma das importantes predições das teorias supersimétricas exatas é a existência de parceiros supersimétricos, como por exemplo parceiros dos quarks, léptons, escalares de Higgs e bósons de gauge, os quais possuem a mesma massa de seus parceiros, porém não sendo ainda experimentalmente vistos, indicando, portanto, que a supersimetria deva ser quebrada espontaneamente. Vários esquemas para quebra da supersimetria têm sido definidos, incluindo métodos não-perturbativos de quebra. E foi no contexto desta questão que, pela primeira vez, estudou-se Mecânica Quântica Supersimétrica, por Witten [33], seguido posteriormente por Cooper e Freedman [7]. Witten introduziu um índice chamado índice de Witten para estudar a quebra da supersimetria e posteriormente no trabalho de Bender et al. [8] um novo índice foi introduzido para se estudar a quebra da supersimetria em teorias regularizadas na rede. Isto pois marca inicialmente o uso da supersimetria como laboratório para se estudar métodos não perturbativos de quebra da supersimetria em teoria de campo.

Contudo, à medida que se estudaram os aspectos da Mecânica Quântica Supersimétrica, ficou claro que estas ideias tinham seus próprios méritos, não somente como laboratório para teorias de campo. Um destes é obviamente a fatoração de operadores como, por exemplo, a Hamiltoniana, através da chamada invariância de forma, pode-se criar categorias de problemas com potenciais solúveis analiticamente, algumas fatorações eram conhecidas, porém não sob a ótica da supersimentria. Feynman menciona [9] as circunstâncias sobre as quais a hamiltoniana de um elétron em um campo magnético pode ser escrita como um quadrado exato e de como estas estão associadas ao magneton de Bohr . Existindo também aplicações em métodos de quantização estocástica e na equação de Langevin, onde vemos na formulação de integrais a aplicação da Mecânica Quântica Supersimétrica [28].

O oscilador harmônico supersimétrico é o modelo mais simples na Mecânica Quântica Supersimétrica [99]. A sua energia é dada por $E_{n_B,n_F} = \omega\left[(n_B + \frac{1}{2}) + (n_F - \frac{1}{2})\right]$, onde cada nível é caracterizado pelos números de ocupação n_B e n_F. Vemos do mesmo que o estado fundamental possui energia zero. A energia de vibração de ponto zero do bóson é cancelada pela energia de vibração negativa de ponto zero do férmion. Este aspecto é o que produz o cancelamento do infinito na energia de ponto zero em teorias supersimétricas. Nas teorias de campos ordinárias, a energia de vácuo é forçada a zero por um princípio chamado ordenamento normal dos operadores de criação e destruição. Este princípio não parte de nenhum outro princípio básico da teoria quântica de campos, é pois colocado à mão, ou seja, não decorre de uma explicação plausível (dedutível) em teorias não supersimétricas. O ponto zero de vibração não pode ser fixado aleatoriamente, ele é completamente real (físico) no sentido que são responsáveis pela correção radioativa dos níveis de energia dos átomos (the Lamb shift).

Este cancelamento natural da energia de vácuo atraiu muito interesse pela Supersimetria. Esta propriedade não ocorre somente em teorias supersimétricas livres (sem interação) como no oscilador harmônico, pode ocorrer também para teorias com interação. Podemos também pensar no oposto deste procedimento, ou seja: se em uma teoria puramente bosônica a energia de ponto zero for não nula, poderemos tentar cancelar tal energia bosônica de vibração no ponto zero, introduzindo alguns graus de liberdade fictícios, de natureza fermiônica. A legitimidade para tal procedimento não é diferente da usada no ordenamento normal. A nova hamiltoniana efetiva teria pois supersimetria, ou seja uma simetria que relaciona bósons reais (físicos) com férmions fictícios (não físicos). Isto têm sido estudado em teoria quântica de campo.

A Hamiltoniana supersimétrica de Witten [33], $H = \frac{1}{2}[p^2 + W^2(x) + \sigma_3 W'(x)]$, apresenta interação tipo bóson/bóson e bóson/férmion; já para uma teoria livre, como no oscilador harmônico, estas interações são desativadas, ou seja $W = \kappa x$, a frequência de vibração é a mesma para férmions ou bósons. É óbvio que também para as duas interações referidas acima a constante de acoplamento é a mesma. É esta propriedade nas teorias supersimétricas que permite o cancelamento das divergências quando se usa teoria das perturbações. Os diagramas de Loops na teoria de perturbações para o bóson e para o férmion geram contribuições com sinais opostos, e como a constante nos vértices dos diagramas são iguais isto poderá levar ao cancelamento mútuo das contribuições infinitas provenientes dos loops do bóson e do férmion. Contudo, a supersimetria não é suficiente para eliminar a divergência completamente, mas fará com que haja uma redução no grau das divergências ultravioleta: as divergências que ainda persistirem são tornadas menos drásticas, (uma lei de potência vai a uma divergência logarítmica). Se a teoria supersimétrica possui simetrias adicionais, então poderíamos em tese eliminar as divergências restantes. Um primeiro exemplo que foi definido em teoria quântica de campos em D=3+1, livre de divergências foi a teoria supersimétrica de campos de gauge do tipo N=4. O cancelamento das divergências nas teorias supersimétricas é importante na obtenção de uma teoria quântica para a gravidade, onde o parceiro supersimétrico do gráviton com spin 2 é o gravitiono, uma partícula hipotética com spin 3/2.

Neste trabalho, estamos interessados em apresentar aplicações da Supersimetria à Mecânica Quântica; este é composto de cinco capítulos. No primeiro capítulo, tratamos da quebra espontânea da Supersimetria em Mecânica Quântica e centramos em certas ambiguidades no formalismo para quantização. No segundo capítulo, abordamos a supersimetria em processos estocásticos, com vistas à abordagem de um modelo com turbulência. No terceiro capítulo, analisamos a estabilidade de soluções solitônicas do tipo parede de domínio para determinadas classes de potenciais de interação para os campos. No quarto capítulo, analisamos um modelo supersimétrico onde uma partícula carregada está submetida a um campo eletromagnético estendido e analisamos a possibilidade de existência de carga central. E, finalmente, no quinto capítulo, reunimos as Conclusões Gerais e as Perspectivas de futuros projetos. Os Apêndices necessários ao entendimento dos capítulos, quando necessários, encontram-se ao final dos mesmos. Apêndices Gerais são também disponibilizados para assuntos comuns aos diferentes capítulos.

Chapter 1
Quebra Espontânea da Supersimetria em Mecânica Quântica

Neste capítulo, mostramos como a quebra espontânea da supersimetria pode ocorrer em Mecânica Quântica Supersimétrica na sua formulação em campos componentes, e discutimos como esta quebra se apresenta em termos de supercampos. Analisamos explicitamente o caso do modelo-sigma supersimétrico unidimensional. Estudamos, no âmbito deste modelo, certas ambigüidades geradas pelo formalismo de quantização canônica, e propomos um modo experimental através do qual poderemos resolver tal ambigüidade.

1.1 Introdução

A supersimetria leva, como se vê no Apêndice 1.A, a uma degenerescência dupla na energia, E, nos modos fermiônicos e bosônicos, não necessariamente para E=0; ou seja o férmion e seu parceiro bosônico possuem a mesma massa, experimentalmente isto não se verifica. Portanto se a supersimetria é realmente realizada na natureza, ela deve ser quebrada. A supersimetria tem características diferentes das demais simetrias internas, uma destas características é que ao contrário das simetrias internas, a supersimetria pode ser quebrada mesmo para teorias com graus de liberdades finitos, fermiônicos e bosônicos. Portanto podemos falar em quebra espontânea de supersimetria em mecânica quântica. O interesse em quebra de supersimetria em mecânica quântica fica óbvio quando verificamos que resultados obtidos em quebra espontânea de supersimetria para mecânica quântica supersimétrica são generalizados e levados para teoria de campo. Neste capítulo comentamos alguns destes resultados, e partindo de um modelo supersimétrico bastante genérico na abordagem de supercampos, restringimos o mesmo e então recaímos no modelo sigma não linear supersimétrico em mecânica quântica. A partir daí analisamos a quebra da supersimetria neste modelo na abordagem de supercampos, diferentemente da abordagem de Witten que é em coordenadas componentes. Verificamos condições para que aja quebra da supersimetria nesta abordagem de supercampos, analisando como a quebra da supersimetria se apresenta nesta abordagem. E comparamos como a condição necessária para que aja quebra neste mesmo modelo sigma não linear supersimétrico, agora na abordagem de campos componentes ou mais apropriadamente coordenadas componentes que não é propriamente a abordagem de campos componentes de Witten, a abordagem aqui empregada está ligada de forma clara à ambigüidade na definição de grandezas relacionadas quando da quantização do modelo e não somente na topologia do operador superpotencial.

A quebra da supersimetria na abordagem de supercampos é particularmente interessante, porque a partir dela espera-se poder calcular os superpropagadores para este modelo em um caminho algébrico sem qualquer aproximação: todos os resultados sendo exatos em todas as ordens no parâmetro de quebra da supersimetria, tal como feito em outro modelo na ref. [10].

1.2 Quebra da Supersimetria na Proposta de Campos Componentes

A Hamiltoniana de Witten

$$H = \frac{1}{2}[p^2 + W^2(x) + \sigma_3 W'(x)] \tag{1.1}$$

da mecânica quântica supersimétrica em campos componente ou melhor coordenadas componentes [?] possui em uma forma nítida, uma propriedade encontrada em todos os modelos supersimétricos, que é o fato de se ter a interação bóson bóson representado pelo termo $W^2(x)$, e bóson férmion representado por $\sigma_3 W'(x)$, ou seja são determinadas pela mesma função $W(x)$.

Como visto no apêndice C, $W(x)$ é proveniente do superpotencial $V(x)$ por $W(x) = V'(x)$, por um vício de linguagem chamamos $W(x)$ de superpotencial também.

No apêndice 1.A vemos que a degenerescência dupla que ocorre em todos os níveis de energia com $E > 0$, é devido exclusivamente à álgebra de supersimetria ou seja não depende de $W(x)$. Também vimos que a energia do estado fundamental é não negativa e novamente isto vem da álgebra supersimétrica e é independente da função $W(x)$.

Sabemos contudo que em qualquer simetria interna ordinária realizada em um dado modelo, se $[H, G_S] = 0$ onde G_S é o gerador da simetria S, e se o vácuo é aniquilado $G_S|0>= 0$ ou seja o estado fundamental é invariante pela simetria S, (e portanto temos um único vácuo), então nestas duas condições dizemos que tal simetria S não se quebra espontaneamente. No caso da supersimetria um exemplo de supersimetria exata é o oscilador harmônico supersimétrico onde $W = \omega x$.

1.2.1 Topologia do Superpotencial e Energia de Vácuo

Nos aspectos gerais citados acima, a função $W(x)$ não importava propriamente, já que a álgebra é quem definia tais resultados. Porém um outro aspecto que permanece em qualquer teoria supersimétrica, apresenta uma dependência curiosa de $W(x)$, que é como $W(x)$ influência na quebra da supersimetria. Isto foi estudado por Witten [?], que chegou a uma elegante propriedade. A presença ou não de um estado degenerado com Energia E=0 (estado fundamental), é determinado por propriedades topológicas de $W(x)$ e não depende de sua forma particular. A generalização desta observação leva a critérios de quebra da supersimetria em teorias de campo.

Mais propriamente se queremos estudar o estado fundamental da teoria em (1.1), consideremos a hamiltoniana definida por

$$H = \{Q_{+}, Q_{-}\} = \begin{pmatrix} H_{+} & \\ & H_{-} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

onde $H_{\pm} = A^{\mp}A^{\pm}$ e $A^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pm ip + W(x)]$, sendo que A^{-} é adjunta de A^{+} e vice-versa.

O problema para se obter os estados com energia $E = 0$, reduz as equações $H_{-}\psi = 0$ ou $H_{+}\psi = 0$, as quais são equivalentes as eq. $A^{-}\psi = 0$ ou $A^{+}\psi = 0$. Vamos definir as soluções das equações $A^{+}\psi = 0$ por $\psi^{\pm}$. Os sinais $\pm$ correspondem aos autovalores de σ_3.

Segundo a definicao de $A^{\pm}$ como acima, $A^{\pm}\psi = 0$ fica na forma

$$(\frac{d}{dx} \pm W)\psi_{\pm} \qquad (1.3)$$

a solução desta equação é dada por:

$$\psi_{\pm} = C\exp[\pm\int_0^x W(x')dx']. \qquad (1.4)$$

Contudo para que $\psi_\pm$ seja realmente autofuncao da hamiltoniana H, ela deve ser de quadrado integrável. Para que ψ em (1.4) seja de quadrado integrável exigimos

$$\int_0^x W(x')dx' \to \infty \text{ com } x \to \pm\infty, \tag{1.5}$$

e para ψ_+, exigimos

$$\int_0^x W(x')dx' \to -\infty \text{ com } x \to \pm\infty. \tag{1.6}$$

As condições de normalização acima são as que interessam para as argumentações que se seguirão, (não estamos considerando normalizações para $\psi_\pm$ oscilante em $x \to \pm\infty$).

As duas condições (1.5) e (1.6) são nitidamente incompatíveis, então apenas uma destas funções $\psi_\pm$ pode ser normalizada. Conseqüentemente, se existe estado com uma energia $E = 0$, então ele não será degenerado. Este estado dentre as funções $\psi_\pm$ é aquele cuja função for normalizável.

Se porém nenhuma das condições (1.5) e (1.6) ocorrer, então não há função normalizável com energia $E = 0$, neste caso a não negatividade do espectro da hamiltoniana supersimétrica implica que o estado fundamental tem energia $E > 0$.

Condições (1.5) e (1.6), são o que chamamos anteriormente de condições globais (topológicas) do superpotencial. Uma deformação suave do superpotencial $W(x)$ dentro de uma região finita não fará surgir ou desaparecer um estado com energia $E = 0$. Por isto se diz que tal estado com $E = 0$ tem uma invariância homotópica sobre deformações do superpotencial.

As condições acima tomam uma forma simples quando $W(x)$ tem o mesmo sinal para $x \to \pm\infty$. Quando os sinais de $W(x)$ são iguais nos limites $x \to \pm\infty$, então nenhuma das condições (1.5) e (1.6) ocorrerá implicando em $E > 0$, esta é a situação para $W(x) = x^2$.

Por outro lado se $W(x)$ têm sinais diferentes no limite $x \to \pm\infty$, então uma das condições acima se produzirá. Neste caso onde a forma particular de $W(x)$ não interessa, o estado fundamental tem energia $E = 0$. O exemplo mais simples é o oscilador harmônico o qual corresponde a um $W(x) = \omega x$.

1.2.2 Quebra Expontânea da Supersimetria

De modo similar a outros tipos de simetria, a supersimetria pode ser quebrada espontaneamente, porém aqui em supersimetria existem algumas características distintas na quebra comparada a outras simetrias. Lembramos que a quebra espontânea de simetria é o fato de se ter H invariante sobre certas simetrias S (transformações) ou seja $[H, G_s] = 0$, onde G_s é o gerador desta transformação, porém o estado fundamental $|0>$ ou vácuo da teoria não é invariante, $G_s|0> \neq 0$.

No caso de simetrias exatas, sem quebra espontânea , os geradores da transformação aniquilam o vácuo quando eles atuam sobre o mesmo $G_s|0>= 0$. Isto significa que o vácuo permanece invariante sobre transformações do tipo $\exp(i\alpha G_s)$, onde α é o parâmetro da transformação.

Os geradores da supersimetria são os operadores $Q\prime s$. Logo se a supersimetria é exata, $Q|0>= Q^2|0>= 0$, ou seja existe um estado com energia zero e o inverso também é verdade.

Se tivermos um estado com energia zero não existe quebra, a supersimetria é exata. Se a supersimetria é exata uma implicação direta é que as massas dos bósons e dos férmions são degeneradas, o que contradiz a realidade que medimos. A quebra da supersimetria é pois extremamente importante. Se a supersimetria é realmente realizada nas partículas elementares, então ela é necessariamente quebrada espontaneamente.

No exemplo visto de supersimetria em mecânica quântica, verificamos que sua quebra espontânea está relacionada com a topologia do superpotencial. Os sinais de $W(x)$ nos limites $x \to \pm\infty$, são características topológicas no sentido que tais limites não são alterados por deformações do superpotencial. Uma importante distinção entre a quebra espontânea de supersimetria e a quebra de uma simetria interna ordinária, é que, para a supersimetria a quebra é possível em um sistema com um número finito dc graus de liberdade, como por exemplo na mecânica quântica supersimétrica, isto é verdade até no caso de um único grau de liberdade bosônico e um grau de liberdade fermiônico, como vimos depende dos sinais de $W(x)$ para $x \to \pm\infty$.

1.2.3 Modo Zero em Supersimetria

Como já dissemos, a presença ou ausência de níveis com energia zero está relacionado a características globais do superpotencial, ou seja de suas características topológicas. Witten analisou em detalhes estas questões e fez uma formulação geral para a mesma.

Em teorias de campos, o papel de níveis com energia zero é desempenhado pelos chamados modos zeros. Estes modos, analisados em sistemas de Fermi por Jackiw e Relbi [12] levaram a um subseqüentemente e significante desenvolvimento da teoria de campos.

Como um exemplo simples considere a teoria de campos em duas dimensões (1+1) no espaço tempo com a lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - U(\varphi) + \overline{\psi}(i\gamma_\mu\partial_\mu - g\varphi)\psi \tag{1.7}$$

onde φ é um campo escalar real , ψ é um campo fermiônico , e g é a constante de acoplamento $bóson/férmion$.

Para determinarmos o espectro de partículas devemos primeiro determinar estado fundamental (vácuo), já que as excitações de uma partícula são os quanta de pequenas vibrações em torno do vácuo. O vácuo corresponde ao mínimo da energia potencial. Com o objetivo de determina-lo, resolvemos as equações clássicas do movimento para a parte bosônica da lagrangeana no limite $g \rightarrow 0$, e realizando pequenas flutuações em torno da solução clássica obtida e nos restringimos ao termos lineares. Escrevemos por $\varphi_c(x)$ a solução da equação de movimento clássica, correspondendo à energia mínima. Esta satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial U(\varphi)}{\partial\varphi}$$

Podemos perguntar: qual é o espectro das excitações fermiônicas dentro deste campo bosônico clássico $\varphi_c(x)$? Para tais excitações temos

$$(i\gamma_\mu\partial_\mu - m(x))\psi(x,t) = 0 \tag{1.8}$$

onde $m(x) = g\varphi_c(x)$. Já que $\varphi_c(x)$ é uma função de x . Podemos procurar uma solução em (1.8) com a forma $\psi(x,t) = \exp(-i\omega t)\psi(x)$ substituindo dentro da eq. (1.8) encontramos

$$H_D\psi(x) = \omega\psi(x).$$

Escolhendo $\gamma_0 = -\sigma_1$, $\gamma_1 = -i\sigma_3$, para matrizes gama bidimensionais, a Hamiltoniana H_D fica $H_D = \sigma_2 p - \sigma_1 m(x)$, ou seja,

$$H_{D\pm} = -(\mp ip + m(x)). \tag{1.9}$$

A forma desta hamiltoniana é similar a de $A\pm$ visto anteriormente onde $m(x)$ faz o papel de supercampo. Podemos usar critérios análogos aos anteriores usados em $A\pm$ no que se refere a existência naquele caso, de um nível com energia zero para então aqui determinarmos se existe solução da eq. de Dirac 1.8 com autovalor $\omega = 0$, ou seja com energia zero. Portanto vemos que similarmente temos a solução $\psi_\pm = C \exp[\pm \int_0^x m(x')dx']$ se for normalizável, ou seja se o sinal de $m(x)$ no limite $x \to \pm\infty$, são diferentes, ou seja se o campo de bóson $\varphi_c(x)$ tiver sinais diferentes no limite assintótico $x \to \pm\infty$. Observemos que como antes estas condições são necessárias mais não suficientes. A existência de estados fermiônicos com energia zero em teoria de campo foi um resultado que atraiu muito interesse. Estes modos zeros foram posteriormente descobertos experimentalmente em uma análise das propriedades de condutividade de um polímero linear o poliacetileno. A lagrangeana efetiva para este sistema é análoga à discutida acima. Soluções clássicas estáticas para um campo de bóson pode ter sinais assintóticos diferentes nos limites $x \to \pm\infty$, em modelos onde soluções solitônicas são possíveis. Soluções solitônicas existem no modelo descrito pela lagrangeana 1.7, porque o potencial $V(\varphi)$ é o poço duplo. Existe portanto uma relação entre a existência de modo zero fermiônico e a existência de sólitons no setor bosônico. Estas soluções solitônicas são estados fundamentais (vácuos) não triviais no que se refere à topologia.

A relação entre o modo zero e a topologia foi explorada por Witten [11] para encontrar critérios para a quebra espontânea da supersimetria. Ele introduziu a quantidade

$$\Delta w = \eta_b^0 - \eta_f^0, \tag{1.10}$$

onde η_b^0 e η_f^0 são os números de estados bosônicos e fermiônicos com energia zero. $\Delta w = 0$ é uma condição necessária (mais não suficiente) para a quebra espontâneas da supersimetria.

Se $\Delta w \neq 0$, então pelo menos um dos números η_b^0 ou η_f^0 não é zero isto é existe estado com energia zero, então a supersimetria é exata. A quantidade Δw é chamada de índice de Witten.

Partindo o espaço de estados, em dois subespaços, estados bosônicos e fermiônicos, um vetor de estado pode ser representado na forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

nesta representação, um gerador de supersimetria leva estados bosônicos em estados fermiônicos e vice-versa e é representado por

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

onde Q é hermitiano; logo M e M^* são adjuntas uma da outra. Estados com energia zero são aniquilados pelo operador Q já que $H = Q^2$. De acordo com (1.11) e (1.12), estados bosônicos e estados fermiônicos com energia zero satisfazem as eqs. $MB = 0$ e $M^*F = 0$, respectivamente. Estados bosônicos com energia zero formam o núcleo (Kernel) do operador M, enquanto estados fermiônicos formam o núcleo para M^*. A dimensionalidade do núcleo é precisamente igual ao número de estados com energia zero:

$$\eta_b^0 = \dim KerM, \ \eta_f^0 = \dim KerM^* \tag{1.13}$$

A quantidade

$$ind\ M = \dim KerM - \dim KerM^*$$

é chamada por definição de índice do operador M. Segue de (1.10) e (1.13) que o índice de Witten é o mesmo índice do operador M ou seja

$$indM = \Delta_w. \tag{1.14}$$

A relação acima tem se provado útil em ambos os lados. Como o operador índice é uma característica topológica de M, ele não muda quando o operador M sofre pequenas deformações, então (1.14), pode ser usado para determinar o índice de Witten e assim a possibilidade de uma quebra espontânea da supersimetria dentro de algum modelo em teoria de campo. Fazendo portanto uso da invariância do índice de Witten sobre variações de parâmetros da teoria (massa, constante de acoplamento, volume), podemos variar continuamente tal teoria nestes parâmetros até uma forma na qual o índice de Witten possa ser calculado explicitamente.

1.3 Quebra Espontânea de Supersimetria na Proposta de Supercampos

Consideremos o modelo semelhante ao visto no apêndice C, ou seja o modelo definido por

$$S = \int dtd^2\theta(\frac{1}{2}D^a\Phi D_a\Phi + iV(\Phi)) \tag{1.15}$$

onde

$$\Phi = \Phi(t,\theta_1,\theta_2) = x(t) + i\theta^a\psi_a(t) + i\theta_1\theta_2 F(t) \tag{1.16}$$

é o supercampo real e $V(\Phi)$ é uma função genérica do supercampo e $a \in \{1,2\}$.

Obtemos, realizando neste modelo uma transformação de translação global

$$\delta\theta^a = i\xi^a, \qquad \delta t = i\xi^a\theta_a \tag{1.17}$$

sobre o supercampo definido no superespaço E, parametrizado por (t, θ_1, θ_2), uma representação diferencial para as cargas supersimétricas e para as derivada covariantes.

$$Q_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\delta_{ab}\theta^b\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} + i\delta_{ab}\theta^b\frac{\partial}{\partial t},$$

a partir das quais, definimos a álgebra $[Q_a, Q_b]_+ = \delta_{ab}H$. E após integrarmos (1.15) em $d^2\theta$ e via transformação de Legendre, obtém-se a hamiltoniana correspondente

$$H = 1/2p^2 + \frac{1}{2}V'^2(x) + \frac{1}{2}V''(x)\sigma_3.$$

Usando o teorema de Noether para a translação acima (transformação de supersimetria), obtemos a seguinte representação para as cargas

$$Q_1 = \sigma_1 p + \sigma_2 V'(x) \qquad\qquad Q_2 = -\sigma_2 p + \sigma_1 V'(x),$$

onde σ_1, σ_2 e σ_3 são as matrizes de Pauli. Realizando então a quantização canônica e usando a álgebra das supercargas obtemos as relações de comutação para os campos componentes. A questão que se coloca, é que este modelo invariante acima não foi escrito na representação mais fundamental. É possível pois obter um modelo invariante ainda mais geral que o precedente, queremos dizer com isto que podemos escrever um modelo em uma representação da supersimetria que seja ainda mais fundamental, e passamos a isto agora escrevendo um modelo similar ao anterior porém na representação quiral. Para isto realizamos a seguinte transformação de reparametrização como no apêndice B

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2, \qquad \overline{\theta} = \theta_1 - i\theta_2. \tag{1.18}$$

Esta reparametização fará a passagem do superespaço parametrizado por (t, θ_1, θ_2) para o superespaço parametrizado por $(t, \theta, \overline{\theta})$, onde definiremos o que chamamos de representação quiral, a barra sobre um $\overline{objeto}$ representa o complexo conjugado deste $objeto$. Procedendo pois a reparametrização teremos:

$$\begin{array}{ll} \overline{Q} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} - \frac{i}{2}\theta\frac{\partial}{\partial t} & \qquad Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{2}\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \\ \overline{D} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} + \frac{i}{2}\theta\frac{\partial}{\partial t} & \qquad D = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{2}\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \end{array}$$

levando a seguinte álgebra $[Q, \overline{Q}]_+ = H$ e $Q^2 = \overline{Q}^2 = 0$. É importante também que reparemetrizemos o supercampo (1.16) definindo-o no superespaço $(t, \theta, \overline{\theta})$,portanto

$$\Phi = \Phi(t, \theta, \overline{\theta}) = x(t) + \theta\varphi(t) - \overline{\theta}\,\overline{\varphi}(t) - 2\overline{\theta}\theta F(t), \tag{1.19}$$

isto possibilitará a comparação com a representação mais fundamental do supercampo, ou seja a representação quiral.

Finalmente passamos a definir a representação quiral do supercampo no superespaço $(t, \theta, \overline{\theta})$,o mesmo pode ser obtido escrevendo a função mais genérica possível neste superespaço ou seja:

$$\Omega = X(t) + \theta\phi(t) + \overline{\theta}\zeta(t) + \overline{\theta}\theta Z(t),$$

onde $X(t)$ e $Z(t)$ são componentes complexas bosônicas e $\phi(t)$ e $\zeta(t)$ são componentes complexas fermiônicas. Impondo sobre Ω o vínculo que chamamos de vínculo quiral *left*

$$\overline{D}\Omega = 0$$

e resolvendo, obtemos o supercampo quiral que dizemos ter quiralidade *left*,

$$\Omega = \Psi(t, \overline{\theta}, \theta) = X(t) + \theta\phi(t) + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\dot{X}(t) \tag{1.20}$$

definindo $t = t_L - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta$ e substituindo no supercampo quiral (1.20) e expandindo

$$\Psi(t_L, \theta) = X(t_L) + \theta\phi(t_L). \tag{1.21}$$

Analogamente o supercampo quiral *right* pode ser definido por $D\overline{\Omega} = 0$

$$\overline{\Psi}(t, \overline{\theta}, \theta) = \overline{X}(t) - \overline{\theta}\,\overline{\phi}(t) - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\dot{\overline{X}}(t) \tag{1.22}$$

e agora definindo $t = t_R + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta$ e substituindo no supercampo quiral (1.22) e expandindo

$$\Psi(t_R, \overline{\theta}) = \overline{X}(t_R) - \overline{\theta}\,\overline{\phi}(t_R). \tag{1.23}$$

Portanto a representação inicial do supercampo (1.19) se divide em dois setores um left e um right, contudo a representação da (supersimetria) translação no superespaço (1.17) não é exatamente o produto de duas representações menores da transformação de supersimetria $\delta\theta = \xi$, $\delta t_L = i\overline{\xi}\theta$ e $\delta\overline{\theta} = \overline{\xi}$, $\delta t_R = i\xi\overline{\theta}$, porque como vemos o parâmetro da translação em cada setor não é o mesmo, logo não temos uma carga supersimétrica definida em cada setor. Podemos verificar que a representação do supercampo em (1.19) é obtida direto da soma dos supercampos de cada setor ou seja das duas representações não equivalentes (1.21) e (1.23).

$$\Phi(t, \theta, \overline{\theta}) = \Psi(t_L, \theta) + \Psi(t_R, \overline{\theta})$$

usando a definições $t = t_L - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta$ e $t = t_R + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta$ obtemos,

$$\Phi(t, \theta, \overline{\theta}) = X(t) + \theta\phi(t) + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\dot{X}(t) + \overline{X}(t) - \overline{\theta}\,\overline{\phi}(t) - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\dot{\overline{X}}(t)$$

logo

$$\Phi(t,\theta,\bar{\theta}) = 2\,\mathrm{Re}(X(t)) + \theta\phi(t) - \bar{\theta}\,\bar{\phi}(t) - \bar{\theta}\theta\,\mathrm{Im}(\dot{X}(t)). \tag{1.24}$$

Identificando a representação do supercampo acima (1.24) com a do supercampo (1.19), teremos o seguinte resultado,

$$\begin{gathered} 2\,\mathrm{Re}(X(t)) \equiv x(t) \\ \phi(t) \equiv \varphi(t), \qquad 2F(t) \equiv \mathrm{Im}(\dot{X}(t)) \end{gathered}$$

com estas identificações a representação inicial pode ser escrita a partir da representação quiral *left* e *right*.

1.3.1 Ação Definida com Supercampo na Representação Quiral

Generalizando pois o modelo (1.15), podemos escrever agora um modelo em termos de um único supercampo quiral, onde igualmente em (1.15) as derivadas da componente bosônica não são superiores a dois,

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta}[U(\Phi,\bar{\Phi})\bar{D}\,\bar{\Phi}D\Phi + V(\Phi,\bar{\Phi})], \tag{1.25}$$

onde $U(\Phi,\bar{\Phi})$ e $V(\Phi,\bar{\Phi})$ são funções reais do supercampo quiral.

Nosso objetivo é mostrar como a quebra da supersimetria na formulação de supercampos neste modelo (1.25) com supercampos quirais se apresenta. Antes porém vamos ver que tipo de sistema físico este modelo pode representar. Usando a álgebra apresentada no apêndice 1 B podemos integrar em $d\theta d\bar{\theta}$ e assim abrir em componentes a ação acima, obtendo

$$S = \int dt \left[U(x,\bar{x})(\dot{x}\,\dot{\bar{x}} - \frac{i}{2}\dot{\bar{\psi}}\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\dot{\psi}) + \frac{i}{2}\dot{x}\frac{\partial V(x,\bar{x})}{\partial x} - \frac{i}{2}\dot{\bar{x}}\overline{\frac{\partial V(x,\bar{x})}{\partial x}} + \right. \tag{1.26}$$

$$+\overline{\psi}\psi(\frac{i}{2}\dot{x}\frac{\partial U(x,\overline{x})}{\partial x} - \frac{i}{2}\dot{\overline{x}}\frac{\partial U(x,\overline{x})}{\partial \overline{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\frac{\partial V(x,\overline{x})}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\overline{\partial V(x,\overline{x})}}{\partial x})\Bigg]$$

Podemos restringir nosso modelo definindo:

$$U(\Phi,\overline{\Phi}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-g\Phi\overline{\Phi})^2} \;, \qquad V(\Phi,\overline{\Phi}) = 0,$$

e assim representando o modelo sigma supersimétrico em mecânica quântica com simetria O(3) ou O(2,1) [13] dependendo do sinal de g ser negativo ou positivo,

$$S = \int dt d\theta d\overline{\theta}\frac{1}{2}\frac{\overline{D}\,\overline{\Phi} D\Phi}{(1-g\Phi\overline{\Phi})^2}$$

em coordenadas componentes fica

$$S = \int dt\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(1-gx\overline{x})^2}(\dot{x}\,\dot{\overline{x}} - \frac{i}{2}\dot{\overline{\psi}}\psi + \frac{i}{2}\overline{\psi}\dot{\psi}) + \frac{i}{2}g\overline{\psi}\psi\left(\frac{\dot{x}\overline{x} - \dot{\overline{x}}x}{(1-gx\overline{x})^3}\right)\right].$$

Os momentos canônicos associados são:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{\overline{x}}}{(1-gx\overline{x})^2} + \frac{i}{2}g\overline{\psi}\psi\frac{\overline{x}}{(1-gx\overline{x})^3} \;, \qquad \overline{p_x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{x}}} = \frac{\dot{x}}{(1-gx\overline{x})^2} - \frac{i}{2}g\overline{\psi}\psi\frac{x}{(1-gx\overline{x})^3}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2}\frac{\overline{\psi}}{(1-gx\overline{x})^2} \;, \qquad p_{\overline{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\psi}}} = -\frac{i}{2}\frac{\psi}{(1-gx\overline{x})^2}$$

a hamiltoniana clássica deste modelo é

$$H_c = (1-gx\overline{x})^2 p_x\overline{p_x} + ig\overline{\varphi}\varphi(1-gx\overline{x})(p_x x - \overline{p_x}\,\overline{x}) \tag{1.27}$$

onde $\varphi = \frac{i\psi}{(1-gx\overline{x})}$.

Este modelo possui vínculos de segunda classe, calculando pois os parênteses de Dirac para as variáveis canônicas x, p_x e φ , encontramos as seguintes relações de comutação já pensando em uma quantização canônica,

$$[x,p_x] = [\overline{x},\overline{p_x}] = i, \qquad [\varphi,\overline{\varphi}]_+ = 1$$

Usando a transformação dos campos componentes e via teorema de Noether (vide apêndice C), obtemos os geradores da supersimetria.

$$Q = -i(1 - gx\overline{x})p_x\varphi \ , \qquad \overline{Q} = i(1 - gx\overline{x})\overline{p_x}\,\overline{\varphi} \tag{1.28}$$

Também via teorema de Noether obtemos os geradores das transformações dos grupos O(3) e O(2,1),

$$L_- = \frac{1}{\sqrt{g}}(\overline{p_x} - gp_x x^2 - igx\,\overline{\varphi}\varphi), \qquad L_+ = \frac{1}{\sqrt{g}}(p_x - g\overline{x}^2\overline{p_x} + ig\overline{x}\,\overline{\varphi}\varphi), \tag{1.29}$$

$$L_3 = ixp_x - i\overline{x}\overline{p_x} - \overline{\varphi}\varphi.$$

Salientamos contudo que durante o cálculo da hamiltoniana , dos geradores de supersimetria e dos geradores dos grupos O(3) e O(2,1), nãn nos preocupamos com o ordenamento das variáveis canônicas bosônicas, ou seja não estávamos ainda preocupados com a quantização do modelo, portanto podemos ter outros resultados para estas grandezas que difiram de alguns fatores. Isto realmente pode gerar uma certa ambigüidade real na definição destas grandezas. O que queremos dizer é que o formalismo usado nos leva a concluir que algumas características físicas do modelo poderão ser alteradas dependendo do ordenamento adotado para as variáveis canônicas, quando da quantização do mesmo. O que é estranho já que as características físicas do modelo não deveriam depender do formalismo, revelando pois uma falha no formalismo na transição do modelo clássico para o quântico.

1.3.2 Quebra da Supersimetria na Abordagem de Supercampos

Analisamos agora como a quebra de supersimetria se apresenta no modelo sigma não linear supersimétrico referido acima, porém vamos adicionar mais um termo na hamiltoniana

$$V(\overline{\Phi}, \Phi) = -\frac{e}{2g}\ln(1 - g\overline{\Phi}\Phi) \tag{1.30}$$

este termo é o potencial eletromagnético que permitirá incluir em nossa ação um campo eletromagnético, com a seguinte simetria de gauge,

$$V(\overline{\Phi}, \Phi) \to V(\overline{\Phi}, \Phi) + i\Omega(\overline{\Phi}, \Phi)$$

onde $\Omega(\overline{\Phi}, \Phi)$ é uma função real qualquer dos supecampos.

Portanto a ação que temos agora é

$$S = \int dtd\theta d\overline{\theta}\left(\frac{1}{2}\frac{\overline{D}\,\overline{\Phi}D\Phi}{(1 - g\Phi\overline{\Phi})^2} - \frac{e}{2g}\ln(1 - g\overline{\Phi}\Phi)\right) \tag{1.31}$$

A idéia é expandir o supercampo em torno do valor esperado do mesmo no vácuo, e escrever a nova ação em termos deste supercampo definido como sendo flutuações quânticas em torno do valor esperado do supercampo no vácuo. Desta forma a condição para que aja quebra da supersimetria surge de forma explicita na ação.

Para expandir o supercampo calculamos o valor esperado no vácuo dos campos componentes. No caso do campo componente fermiônico têm-se:

$$< \psi >= 0 \tag{1.32}$$

Isto pode ser visto através da regra de superseleção de Fonda e Guirard, também a simetria de rotação seria quebrada se fosse diferente. O valor esperado no vácuo para x pode ser calculado a partir das transformações de supersimetria dos campos componentes.

$$\delta\psi = -i\bar{\epsilon}\dot{x}, \quad \delta x = -\epsilon\psi, \qquad \delta\overline{\psi} = -i\epsilon\dot{\overline{x}}, \quad \delta\overline{x} = \bar{\epsilon}\,\overline{\psi}$$

portanto, $x' = x + \delta x \implies < x' >=< x > -\epsilon < \psi >$ o que nos fornece usando (1.32)

$$< x' >=< x >\equiv x_{cl},$$

ou seja o valor esperado no vácuo do campo x não muda por uma transformação de supersimetria. Também $\psi' = \psi + \delta\psi \implies < \psi' >=< \psi > -i\bar{\epsilon} < \dot{x} >$, e usando (1.32)

$$\dot{x}_{cl} \equiv< \dot{x} >= 0.$$

O supercampo Φ expandido em torno do valor esperado no vácuo terá a seguinte forma em campos componentes

$$\Phi = x_{cl} + x_q + \theta\psi_q + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_q)$$

que pode ser reescrito na forma:

$$\Phi = \Lambda + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\dot{x}_q$$

onde Λ é um supercampo definido por $\Lambda = x_q + x_{cl} + \theta\psi_q + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\dot{x}_q$. Notemos que se a supersimetria não é quebrada então o termo $\dot{x}_{cl}$ é nulo, contudo o estamos mantendo no supercampo exatamente para que a ação em termos dos supercampos, possa apresentar de modo explícito os termos de quebra da supersimetria.

Expandindo a ação (1.31) em termos de

$$\Phi = \Lambda + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\dot{x}_q \qquad \text{e} \qquad \overline{\Phi} = \overline{\Lambda} - \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\dot{\overline{x}}_q.$$

Com um pouco de cálculo e algumas considerações chegamos ao seguinte resultado para a ação em termos dos supercampos.

$$S = \int dt d\theta d\overline{\theta} \left(\frac{1}{2} \frac{\overline{D}\,\overline{\Lambda} D\Lambda}{(1 - g\Lambda\overline{\Lambda})^2} - \frac{e}{2g} \ln(1 - g\overline{\Lambda}, \Lambda) \right) +$$

$$-\frac{i}{4}\theta \frac{\overline{\dot{x}_{cl}}\, D\Lambda}{(1 - g\Lambda\overline{\Lambda})^2} - \frac{i}{4}\overline{\theta} \frac{\dot{x}_{cl}\, \overline{D}\,\overline{\Lambda}}{(1 - g\Lambda\overline{\Lambda})^2} +$$

$$+ \overline{\theta}\theta \left(\frac{ie}{4} \frac{\overline{\Lambda}\dot{x}_{cl} - \Lambda\dot{\overline{x}}_{cl}}{1 - g\Lambda\overline{\Lambda}} - \frac{i}{2} g \frac{\overline{\Lambda}\dot{x}_{cl} - \Lambda\dot{\overline{x}}_{cl}}{(1 - g\Lambda\overline{\Lambda})^3} \overline{D}\,\overline{\Lambda} D\Lambda - \frac{i}{8} \frac{\dot{\overline{x}}_{cl}\dot{x}_{cl}}{(1 - g\Lambda\overline{\Lambda})^2} \right). \tag{1.33}$$

Mostramos então como a quebra da supersimetria se apresenta neste modelo em termos de campos componentes se $\dot{x}_{cl} \neq 0$. Na secção seguinte mostramos que o valor esperado no vácuo $< \dot{x} >= \dot{x}_{cl}$ neste modelo quantizado pode não ser nulo, portanto a ação expandida em termos das flutuações quânticas têm a forma definida acima realmente. Este resultado têm uma segunda importância no que diz respeito ao cálculo dos superpropagadores deste modelo, a partir deste resultado espera-se obter os superpropagadores de modo algébrico sem qualquer aproximação, ou seja todos os resultados são exatos para todas as ordens no parâmetro de quebra $\dot{x}_{cl}$, bastando seguir o análogo feito em alguns modelos em teoria de campo na ref.[10].

1.3.3 Ambiguidade no Ordenamento dos Campos Componentes Quando da Quantização do Modelo Gerando Quebra de Supersimetria

Para concluir este capítulo, falamos rapidamente de como a ambigüidade no ordenamento dos campos componentes na hamiltoniana e em outros operadores, pode gerar a quebra da supersimetria neste modelo sigma não linear supersimétrico com o campo eletromagnético, definidos pela ação (1.31), ao se passar do modelo clássico para o modelo quântico como verificado por [14]. Portanto analogamente ao que foi feito para calcular os geradores da supersimetria (1.28) , os geradores das simetrias O (3) e O(2,1) (1.29) e a hamiltoniana (1.27), refazemos para o termo do campo eletromagnético (1.30), e então adicionamos aos termos do modelo sigma não linear supersimétrico obtidos antes, pois a ação completa é (1.31). E Após o processo da quantização canônica que nos fornece as seguintes relações de comutação

$$[x, p_x] = [\overline{x}, \overline{p_x}] = i \quad \text{e} \quad [\varphi, \overline{\varphi}]_+ = 1 \; ,$$

rescrevemos os geradores

$$Q = \varphi(-i(1 - g\overline{x}x)p_x + (\alpha g - e)\overline{x}) \; , \qquad \overline{Q} = (i\overline{p_x}(1 - g\overline{x}x) + (\alpha g - e)x)\overline{\varphi}$$

$$L_- = \frac{1}{\sqrt{g}}(\overline{p_x} - gp_x x^2 - igx\overline{\varphi}\varphi + \lambda x), \qquad L_+ = \frac{1}{\sqrt{g}}(p_x - g\overline{x}^2\overline{p_x} + ig\overline{x\varphi}\varphi + \lambda\overline{x}),$$

$$L_3 = ixp_x - i\overline{x}\,\overline{p_x} - \overline{\varphi}\varphi + \lambda_3,$$

onde α λ, $\overline{\lambda}$, λ_3 são parâmetros arbitrários proporcionais a constante de Planck $\hbar$. E foram introduzidos em vista das relações de comutação, com o objetivo de gerar todas os possíveis ordenamentos dos campos componentes que agora são campos componentes operadores. Onde consideramos as definições, $\overline{Q} \equiv Q^\dagger$ e $(L_-)^\dagger \equiv L_+$.

O objetivo é definir de modo necessário é se possível suficiente os ordenamentos corretos para a quantização do modelo; isto é feito obtendo a condição necessária para a quantização correta que implica na condição necessária para o ordenamento correto. O que estará norteando esta quantização correta ou seja o que chamamos de condição necessária para quantização correta, é a exigência de que as cargas ou grandezas conservadas que existiam antes da quantização, continuem a existir após; isto implica na exigência de que as simetrias existentes na teoria clássica, também existam após a quantização (na teoria quântica), ou em uma exigência menor que a álgebra dos geradores destas simetrias sejam a mesma antes e depois da quantização, portanto a álgebra das simetrias deve ser invariante neste sentido.

Os geradores das simetrias do modelo estão definidos em termos dos parâmetros de forma genérica no que diz respeito ao ordenamento dos campos operadores. Estes parâmetros receberão vínculos ao impormos a invariância da álgebra das simetrias deste modelo, gerando uma condição necessária porém como veremos não suficiente sobre tais parâmetros, de modo a definir o ordenamento correto. Portanto ainda existirão ambigüidades no ordenamento, que como veremos só serão eliminadas via um procedimento experimental. Isto dentro da conjectura que não exista mais cargas conservadas ou simetrias neste modelo, que possa definir de modo único todos estes parâmetros, isto representaria uma condição necessária e suficiente sobre o ordenamento dos operadores o que não temos aqui.

Passamos então a impor vínculos sobre os parâmetros α $\lambda, \overline{\lambda}, \lambda_3$ através das relações de comutação para os geradores, $[L_+, L_-] = 2\text{sinal(g)}L_3$, $[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$, $\{L_\pm, Q\} = [L_\pm, \overline{Q}] = [L_3, Q] = [L_3, \overline{Q}] = 0$ obtém-se $\lambda = -i(e + (1-\alpha)g)$ e $\lambda_3 = e/g + 2 - \alpha$. A hamiltoniana é obtida de:

$$H = [Q, \overline{Q}]_+ = (1 - gx\overline{x})p_x\overline{p_x}(1 - gx\overline{x}) + \frac{i}{2}(1 - gx\overline{x})(xp_x - \overline{x}\,\overline{p_x})(g' - g\sigma_3) +$$
$$-\frac{1}{2}(1 - gx\overline{x})(g - g'\sigma_3) + \frac{1}{4}(g'^2 - g^2)\overline{x}x,$$

onde $g' = g(1-\alpha) + 2e$.

Vemos que ainda permanece uma ambigüidade em sua definição representada pelo parâmetro α. Considerando as seguintes realizações [14, 15] $p_x = -i(1 - g\overline{x}x)\frac{\partial}{\partial x}(1 - g\overline{x}x)^{-1}$, $\overline{p_x} = -i(1 - g\overline{x}x)\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(1 - g\overline{x}x)^{-1}$, $\varphi = \sigma_+$, $\overline{\varphi} = \sigma_-$ e impondo as condições de quebra vista no início deste capítulo,

$$Q\Psi(x,\overline{x}) = \overline{Q}\Psi(x,\overline{x}) = 0$$

ou seja $(-i(1-g\overline{x}x)\frac{\partial}{\partial x} + (g-\alpha g+e)\overline{x})\sigma_+\Psi(x,\overline{x}) = 0$ e $(-i(1-g\overline{x}x)\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + (\alpha g - e)x)\sigma_-\Psi(x,\overline{x}) = 0$, ao resolver chega-se as soluções: $\Psi_1 = f_1(\overline{x})(1-g\overline{x}x)^{1-\alpha+e/g}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, normalizável no intervalo $\alpha > 1/2 + e/g$; e $\Psi_2 = f_1(\overline{x})(1-g\overline{x}x)^{\alpha-e/g}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, normalizável no intervalo $\alpha < 1/2 + e/g$. Normalização esta definida via produto escalar [13], $(\Psi_1,\Psi_2) = \frac{1}{2ig}Tr\int\frac{dxd\overline{x}}{(1-g\overline{x}x)^2}\Psi_1^\dagger\Psi_2$, integrando em todo o plano se $g<0$ e em $|x| < 1/g$ se $g>0$.

Para que a simetria não se quebre temos que ter pelo menos uma solução normalizável, o que significa que o modelo possui um único estado fundamental com energia zero se $\alpha \neq 1/2 + e/g$. Caso nenhuma seja normalizável $\alpha = 1/2 + e/g$ então a simetria se quebra, a quebra espontaneamente da supersimetria neste modelo deve ser igualmente vista na ação (1.33). Neste caso temos então que $\dot{x}_{cl}$ o valor esperado no vácuo de $\dot{x}$ é não nulo. E para o caso em que não existe quebra $\alpha \neq 1/2 + e/g$, o valor esperado no vácuo de $\dot{x}$ é nulo, pelo mesmo argumento anterior. Isto é estranho e será comentado na conclusão a seguir.

1.4 Conclusões

Neste capítulo analisamos como a quebra pode ocorrer em um modelo supersimétrico em mecânica quântica de modo geral. Após isto definimos um modelo com supercampos quirais e fomos capazes de restringi-lo ao caso do modelo sigma não linear supersimétrico contento um campo eletromagnético. Neste modelo analisamos como a quebra da supersimetria se apresenta dentro da proposta de supercampos, e já que neste modelo pode ou não existir quebra espontânea de supersimetria dependendo do ordenamento dos operadores, o valor esperado de $\dot{x}$ no vácuo será nulo ou não, dependendo unicamente deste ordenamento dos campos componentes operadores, quando da quantização do modelo. O que é muito estranho já que o valor esperado de $\dot{x}$ no vácuo a priori é algo mensurável através de algum experimento, e portanto será zero ou não, o que implicaria que um dado ordenamento dos operadores é correto ou não. O formalismo empregado pode então ser ajustado através deste caminho experimental.

1.A Apêndice - Positividade e Degenerescência da Energia:

Considere a álgebra $[Q_i, Q_k]_+ = 2\delta_{ik}$ para i e $k \in \{1, 2\}$, logo temos $[Q_i, Q_k]_+ = 0$ para $i \neq k$ e $Q^2_{(i)} = H$ para $i = k$; então $[Q_i, H] = 0$, e como H ou seja Q^2_i é hermitiano teremos que Q_i é hermitiano e portanto possui auto valor real.

Portanto se temos:

$$Q_i\phi_{(i)} = q\phi_{(i)} \Longrightarrow H\phi_{(i)} = q^2\phi_{(i)},$$

dos fatos, $[Q_i, H] = 0$ e o autovalor q de Q_i ser real já que Q_i é hermitiano, concluímos que a energia necessariamente é $q^2 \geq 0$ e que têm necessariamente uma dupla degenerescência para $q \neq 0$, para energia positiva definida, ou seja se $Q_j\phi_{(i)} = \phi_{(ji)}$ para $j \neq i \Longrightarrow H\phi_{(ji)} = HQ_j\phi_{(i)} = Q_jH\phi_{(i)} = q^2Q_j\phi_{(i)} = q^2\phi_{(ji)}$; e tambem $Q_{(i)}\phi_{(ji)} = Q_{(i)}Q_j\phi_{(i)} = -Q_jQ_{(i)}\phi_{(i)} = -qQ_j\phi_{(i)} = -q\phi_{(ji)}$. Completando nossa afirmação.

1.B Apêndice - Definições e Algebra:

Temos as seguintes definições para as derivadas covariantes:

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{2}\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \overline{D} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} + \frac{i}{2}\theta\frac{\partial}{\partial t}.$$

onde os campos quirais ($\overline{D}\Phi = .D\overline{\Phi} = 0$) possuem a seguinte forma:

$$\Phi = x + \theta\psi + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\dot{x}\,, \qquad \overline{\Phi} = \overline{x} - \overline{\theta}\,\overline{\psi} - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\dot{\overline{x}};$$

A algebra fica pois:

$$\begin{aligned}
\left[D,\overline{D}\right]_+ &= i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \overline{D}^2 = D^2 = 0, \quad \left[Q,\overline{Q}\right]_+ = -i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \overline{Q}^2 = Q^2 = 0 \\
\left[D,\overline{Q}\right]_+ &= \left[\bar{D},Q\right]_+ = \left[D,Q\right]_+ = \left[\overline{D},\overline{Q}\right]_+ = 0.
\end{aligned}$$

Aplicando a álgebra acima na integral de uma função genérica dentro do tipo $W(\Omega)$, onde Ω é um supercampo bosônico qualquer não necessariamente quiral:

$$\int d\theta W = DW|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \quad \int d\overline{\theta}W = -\overline{D}W|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \quad \int d\theta d\overline{\theta}W = \frac{1}{2}[\overline{D},D]W|_{\theta=\bar{\theta}=0} - \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial t}|_{\theta=\bar{\theta}=0}.$$

$$\overline{D}DW = \frac{\partial^2 W}{\partial\overline{\Phi}\partial\Phi}\overline{D}\,\overline{\Phi}D\Phi + \frac{\partial W}{\partial\Phi}\overline{D}D\Phi, \quad D\overline{D}W = \frac{\partial^2 W}{\partial\Phi\partial\overline{\Phi}}D\Phi\overline{D}\,\overline{\Phi} + \frac{\partial W}{\partial\Phi}D\overline{D}\,\overline{\Phi}.$$

Se porém W for uma função dos supercampos quirais então:

$$\overline{D}\,\Phi = D\overline{\Phi} = 0\,,\ D\Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \psi, \quad \overline{D}\,\overline{\Phi}|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \overline{\psi},$$

$$\overline{D}DW = \frac{\partial^2 W}{\partial\overline{\Phi}\partial\Phi}\overline{D}\,\overline{\Phi}D\Phi + \frac{\partial W}{\partial\Phi}i\dot{\Phi} \Longrightarrow \overline{D}DW|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial\overline{x}\partial x}\overline{\psi}\psi + \frac{\partial W}{\partial x}i\dot{x},$$

$$D\overline{D}W|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial\overline{x}}\psi\overline{\psi} + \frac{\partial W}{\partial\overline{x}}i\dot{\overline{x}}$$

Chapter 2
Redução do Espaço de Fase e a Transição para o Regime de Ínstanton em Turbulência em (1+1)

Neste capítulo, estudamos a turbulência em dimensão (1+1) no formalismo da teoria de campo, dentro de uma abordagem de Martin-Siggia-Rose que como veremos têm um aspecto similar a proposta da supersimetria em mecânica quântica de Witten. A análise está focalizada no comportamento assintótico do lado direito da função de distribuição de probabilidade (fdp) da diferença de velocidades no fluido linear, onde ondas de choque não contribuem.

Devido à falta de suavidade das configurações de velocidades relevantes, um esquema que preserva a simetria de BRS no espaço de fase reduzido é executado, conduzindo a uma teoria efetiva definida com poucos graus de liberdade. A soma sobre as flutuações ao redor da solução de ínstanton é escrita como valor da expectação do funcional de campos físicos dependentes do tempo, os quais evoluem em acordo com as equações de Langevin. Uma regularização do determinante das flutuações é feita a partir do fato que o ínstanton domina a ação por um intervalo de tempo finito. A transição do regime turbulento para o regime dominado pelo ínstanton é produzida através de correções logarítmicas na ação de ponto de sela, manifestadas em torno da mesma como uma correção para a diferença de velocidades (pdf) que vai como fator multiplicativo de lei de potência.

2.1 Introdução

Como comumente aceito através da enorme quantidade de investigações numéricas em turbulência, a intermitência, pode-se dizer rapidamente, é o desvio do comportamento gaussiano simples da fdp em sua parte assintótica direita ou esquerda, (cauda direita ou esquerda). Está intimamente ligada ao número de dimensões espaciais. O quadro físico fundamental que estimula esta observação é a longa vida de estruturas coerentes, as quais participam de modo aproximado, não rigoroso como reservatórios locais de quantidades conservadas, como energia; estas interagem mais intensamente em dimensões menores, perturbando de modo significativo o processo de cascata entre grandes e pequenos comprimentos de escalas. É, neste sentido claro, que o modelo de Burgers de turbulência com compressão em dimensão (1+1) [16] tem sido uma base rica para investigação teórica. Intermitência é ai associada lá à existência de ondas de choque, as quais são descritas no limite não-viscoso, $\nu \to 0$, por um grande e positivo gradiente de velocidade $\partial_x u \sim u_0^2/\nu$, com suporte em regiões pequenas de tamanho $\sim \nu/u_0$. A teoria de Kolmogorov de regiões inerciais [17], a qual leva as funções de estrutura $S_q(r) \equiv \langle |u(r) - u(0)|^q \rangle \sim r^{2q/3}$, há muito é conhecida por não levar ao mesmo comportamento em igual escala encontrado no modelo de Burgers, $S_q(r) \sim r$ [16, 18], obtido diretamente do fato que o fluido turbulento em uma dimensão pode ser tratado como um gás diluído de ondas de choques, interpolado por campos de velocidades suaves [18, 19].

Um considerável impulso, motivando o entendimento da turbulência em uma dimensão, vêm sendo alcançado nos últimos anos, com a ajuda de um número de propostas completamente diferentes, entre elas métodos em teoria de campo não perturbativa. Muitos esforços vêm sendo concentrados na determinação das diferenças de velocidades ou fdp das diferenças de velocidades. É, agora, claro que a cauda assintótica da fdp à direita e a esquerda merece tratamentos separados, sendo os resultados da cauda esquerda foco de algumas controvérsias.

Nosso objetivo neste capítulo é definir uma teoria efetiva para o cálculo da cauda direita da fdp, mantendo os graus de liberdades mais importantes dentro da análise. Tentativas iniciais neste problema foram feitas por Polyakov [21] e Gurarie e Migdal [22] que encontraram expressões na ordem mais importante. Nossa proposta está ligada a uma abordagem com ínstanton, o que foi empregado posteriormente. O cálculo das perturbações ao redor do ínstanton será realizado neste capítulo, onde, depois de um procedimento de regularização natural do determinante das flutuações, correções logarítmicas de menor ordem de importância para a ação de ponto de sela emergiram. No processo de se definir a teoria efetiva, calculamos o determinante oriundo da transformação envolvida, através da introdução de campos fermiônicos de modo análogo ao que se faz na supersimetria em processos estocásticos. A teoria efetiva é definida de tal forma que preserve a simetria de BRS na ação da teoria de campo obtida [27, 28], ligado a propriedades gerais como renormalização e existência de um estado estacionário estatístico (provado ocorrer dentro de uma classe de "equações de Langevin puramente dissipativas"). Como veremos, este estado estacionário estatístico dentro da classe das equações de Langevin puramente dissipativas está diretamente ligado ao fato de existir uma supersimetria inteira para estes processos estocásticos ou seja sem quebra espontânea da supersimetria.

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção II, comentamos alguns resultados da supersimetria em processos estocásticos e, após isto, introduzimos as equações básicas a serem estudadas e o formalismo de integral de caminho de Martin-Siggia-Rose. O esquema de redução do espaço de fase que preserva a simetria de BRS é realizado, e a configuração de ínstanton é definida. Consideramos as flutuações ao redor do ponto de sela com o objetivo de calcular correções de ordens menores. Na Seção III, usando as funções de correlação obtemos o funcional, Na Seção IV, mostramos que acima da primeira ordem, a viscosidade não modifica o resultado já obtido, em acordo com o limite de não viscosidade. Na Seção V, comentamos as nossas descobertas e discutimos possíveis caminhos de pesquisa.

2.2 Redução do Espaço de Fase Dentro do Formalismo de Martin-Siggia-Rose

Na formulação por integrais de caminho surgem determinantes funcionais (Jacobianos), provenientes de transformações dos campos. Estes determinantes podem ser expressos como integrais nas variáveis de Grassmann. Um exemplo simples é quando temos uma quantidade randômica γ com uma função de distribuição $P(\gamma)$ a qual satisfaz a condição de normalização $\int P(\gamma)d\gamma = 1$. Considerando agora outra quantidade randômica x, a qual está relacionada com a primeira pelo vínculo $W(x) = \gamma$, então é possivel se calcular o valor esperado de uma função de x qualquer ou seja: $< f(x) >= \int f(x(\gamma))P(\gamma)d\gamma$ onde $x(\gamma)$ é a inversa do vínculo $W(x) = \gamma$.

Contudo nem sempre o vínculo $W(x) = \gamma$ pode ser invertido, ou mesmo não é desejável invertê-lo, já que tal vínculo poderia ter alguma simetria que fosse interessante conservar explicitamente. Neste caso temos que transformar a medida de integração $d\gamma = \frac{\partial W(x)}{\partial x} dx$ e então integrar, gerando o Jacobiano $< f(x) >= \int f(x) P(W(x)) \frac{\partial W(x)}{\partial x} dx$.

Este determinante pode ser escrito com uma integral nas variáveis de Grassmann. E definindo $\ln(P) = \gamma^2$ o qual é chamado ruído branco, ficamos com:

$$< f(x) >= \int dx d\psi d\bar{\psi} f(x) \exp(W^2 + \bar{\psi} W' \psi)$$

$W^2 + \bar{\psi} W' \psi$ é exatamente o potencial supersimétrico como visto no apêndice 1.

Contudo o caso de supersimetria em modelos estocásticos que temos real interesse é o que envolve equações semelhantes ou próximas a de Langevin,

$$\frac{dx}{dt} = -W(x) + \nu(t) \tag{2.34}$$

onde $\nu(t)$ é uma força randômica com uma função de distribuição Gaussiana chamada ruído branco definido por:

$$P(\nu(t)) = [D\nu] \exp(-\frac{1}{2\alpha} \int dt \nu^2(t)) \ , \ < \nu >= 0 \ , \ < \nu(t), \nu(t') >= \alpha\delta(t-t'), \tag{2.35}$$

estamos usando os parênteses como convenção de produtórios.

A equação de transformação agora é uma equação diferencial (2.34). Reescrevendo a distribuição com o termo do Jacobiano têm-se substituindo (2.34).

$$P(x(t)) = [Dx] \left[\frac{\delta \nu}{\delta x}\right] \exp(-\frac{1}{2\alpha} \int dt (\frac{dx}{dt} + W(x))^2.$$

O Jacobiano pode ser escrito por: $\left[\frac{\delta\nu}{\delta x}\right] = \int\int [D\psi]\,[D\overline{\psi}]\,\exp\int dt\overline{\psi}[d_t + W'(x)]\,\psi$ substituindo acima teremos:

$$P(x(t)) = \int\int [D\psi]\,[D\overline{\psi}]\,[Dx]\left[\frac{\delta\nu}{\delta x}\right]\exp\int dt\left(-\frac{1}{2\alpha}(\frac{dx}{dt} + W(x))^2 + \overline{\psi}[d_t + W'(x)]\psi\right).$$

Se fizermos o parâmetro $\alpha = 1$, o qual determina a ordem de grandeza das flutuações em 2.35, e eliminando a derivada total $\frac{dx}{dt}W(x)$ da integração, obtemos

$$P(x(t)) = \int\int [D\psi]\,[D\overline{\psi}]\,[Dx]\exp\int dt\left(-\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}W(x) + \overline{\psi}[d_t + W'(x)]\psi\right).$$

Os objetos de interesse são as funções de correlação mais propriamente a de segunda ordem:

$$\begin{aligned}< x(t), x(t') >= \int\int\int [D\psi]\,[D\overline{\psi}]\,[Dx]\,x(t)x(t')\\ \exp\int dt\left(-\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}W(x) + \overline{\psi}[d_t + W'(x)]\psi\right)\end{aligned}$$

A lagrangeana que obtivemos é a continuação analítica no eixo imaginário da mesma lagrangeana supersimetria em mecânica quântica de Witten,

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}W(x) + \overline{\psi}[id_t + W'(x)]\psi. \tag{2.36}$$

Também é interessante saber se o processo randômico $x(t)$ possui ou não um regime de estado estacionário. A resposta a esta pergunta passa em saber se existe ou não uma solução probabilística estacionária da equação de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(W(x)P)}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

A solução conhecida é dada por: $P \sim \exp[-\frac{2}{\alpha}\int_{-\infty}^{x} dzW(z)]$.

Contudo, a mesma deve ser normalizável e, como vimos no capítulo anterior, esta condição é análoga a condição para que não haja quebra espontânea da supersimetria em

Mecânica Quântica. Portanto, se a supersimetria neste sistema estocástico definido por (2.36) é inteira, ou seja, não tem a supersimetria quebrada espontaneamente, então existe regime estacionário no processo randômico de x(t).

Dentro de nossa proposta, imaginemos que um fluido em uma dimensão é mantido em um estado de constante turbulência, através da ação de forças randômicas externas. Nosso ponto inicial de partida é então a versão estocástica do modelo de Burgers e não ainda Langevin (mais a frente recaimos em Langevin), definido pela equação de Navier-Stokes

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u + f \tag{2.37}$$

A força $f = f(x,t)$ é considerada ser uma variável gaussiana randômica, com valor médio zero e função de correlação de dois pontos

$$\langle f(x,t)f(x',t')\rangle = D(x-x')\delta(t-t') \tag{2.38}$$

onde

$$D(x-x') = D_0 \exp(-(x-x')^2/L^2). \tag{2.39}$$

Acima, L fixa a escala de comprimento macroscópico onde é assumido existir o escoamento da energia. Com $L \to \infty$ e sem viscosidade, surge uma região intermediária de número de ondas, chamada região inercial, onde o comportamento de escala entra em ação. Funções de correlação de $N-$pontos arbitrárias do campo de velocidade, pode a princípio ser calculada através do funcional de Martin-Siggia-Rose[27, 28],

$$Z = \int D\bar{u}DuD\bar{c}Dc\exp(iS) \tag{2.40}$$

onde

$$\begin{aligned} S &= \int dxdt\hat{u}(\partial_t u + u\partial_x u - \nu\partial_x^2 u) + \frac{i}{2}\int dxdx'dt\hat{u}(x,t)\hat{u}(x',t)D(x-x') \\ &+ \int dxdt\bar{c}(\partial_t c + c\partial_x u + u\partial_x c - \nu\partial_x^2 c) \end{aligned} \tag{2.41}$$

As funções $c(x,t)$ e $\bar{c}(x,t)$ são variáveis Grasmannianas. Estes campos entram no aparato matemático como uma maneira para se calcular o Jacobiano não-trivial definido na formulação de tempo contínuo [28, 29], e estão relacionados com a correta normalização das fdp's. A proposta de Martin-Siggia-Rose para teoria de campos deve ser usada para definir uma expansão perturbativa envolvendo potencias de termos de convecção, onde o papel do Jacobiano é justamente o de cancelar os diagramas de tadpole. Todavia, é importante notar que o procedimento perturbativo é essencialmente a expansão de Wyld [30], contaminado com a bem conhecida incontornável divergência infravermelho para $L \to \infty$ [31].

Estamos interessados em estudar aqui a estatística da diferença de velocidades $\Delta u \equiv u(\rho/2,0) - u(-\rho/2,0)$ de maneira não perturbativa A fdp para esta quantidade observável pode ser calculada com [21, 22]

$$P(\Delta u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda\Delta u)Z(\lambda) \tag{2.42}$$

onde

$$Z(\lambda) = \langle \exp\{-i\lambda[u(\rho/2,0) - u(-\rho/2,0)]\}\rangle = \int D\hat{u}DuD\bar{c}Dc \exp(iS_\lambda) \tag{2.43}$$

e

$$S_\lambda = S - \lambda[u(\rho/2,0) - u(-\rho/2,0)]. \tag{2.44}$$

Consideramos o mapa analítico $\lambda \to i\lambda$ nos próximos cálculos. Nossos resultados, obtidos no limite para λ grande, estará então associado com a cauda direita da fdp, onde as ondas de choque não contribuem. A ação S é invariante por BRS, dadas pelas seguintes variações:

$$\delta\hat{u} = 0 \ , \ \delta u = \epsilon c \ , \ \delta c = 0 \ , \ \delta\bar{c} = -\epsilon\hat{u} \tag{2.45}$$

Acima, ϵ é um parâmetro grasmanniano constante. É fundamental, dentro de alguns modelos estratégias computacionais, trabalhar dentro de um esquema que preserve a simetria de BRS, o qual assegura a interpretação da integral de caminho $Z(\lambda)$ em termos de alguns sistemas estocásticos dinâmico. A simetria de BRS é nosso principal guia no sentido de se obter a forma reduzida do funcional de Martin-Siggia-Rose. Isto , . Vamos definir as séries de potência

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p(t) x^p \ , \ \hat{\sigma}_p(t) = \int dx x^p \hat{u}(x,t) \\ c(x,t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \eta_p(t) x^p \ , \ \bar{\eta}_p(t) = \int dx x^p \bar{c}(x,t) \end{aligned} \tag{2.46}$$

Então, aplicando (2.45) nas relações acima, obtemos imediatamente as transformações de BRS reduzidas

$$\delta\hat{\sigma}_p = 0 \ , \ \delta\sigma_p = \epsilon\eta_p \ , \ \delta\eta_p = 0 \ , \ \delta\bar{\eta}_p = -\epsilon\hat{\sigma}_p \tag{2.47}$$

A motivação física implícita em (2.46) é que o campo de velocidades relevantes envolvidas dentro do cálculo da cauda direita das fdp's é suave. A redução do espaço de fase é definida truncando a expansão em séries acima para algumas ordens arbitrárias. Além do mais, se queremos analisar o papel explícito dos termos de viscosidade, será necessário truncar a série acima da primeira ordem. A escolha mais simples é tomar a expansão $u(x,t)$ até a ordem dois, o que nos dá

$$S_\lambda = \int dt\{\hat{\sigma}_0(\dot{\sigma}_0 + \sigma_0\sigma_1 - 2\nu\sigma_2) + \hat{\sigma}_1(\dot{\sigma}_1 + \sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2) + \hat{\sigma}_2(\dot{\sigma}_2 + 3\sigma_1\sigma_2)$$

$$+i\frac{D_0}{2}(\hat{\sigma}_0^2 - \frac{2}{L^2}\hat{\sigma}_0\hat{\sigma}_2 + \frac{2}{L^2}\hat{\sigma}_1^2 + \frac{3}{L^4}\hat{\sigma}_2^2) + \bar{\eta}_0(\dot{\eta}_0 + \eta_0\sigma_1 - 2\nu\eta_2 + \eta_1\sigma_0)$$
$$+\bar{\eta}_1(\dot{\eta}_1 + 2\eta_1\sigma_1 + 2\eta_2\sigma_0 + 2\eta_0\sigma_2) + \bar{\eta}_2(\dot{\eta}_2 + 3\eta_1\sigma_2 + 3\eta_2\sigma_1) - i\delta(t)\lambda\rho\sigma_1 \quad (2.48)$$

Para $\lambda = 0$ a ação acima, como pode ser prontamente checada, é invariante sobre as transformações de BRS reduzidas, com deveria ser. As equações de ponto de Sela, importantíssimas dentro do limite de λ grande, são

$$\dot{\sigma}_0 + \sigma_0\sigma_1 - 2\nu\sigma_2 + iD_0\hat{\sigma}_0 - i\frac{D_0}{L^2}\hat{\sigma}_2 = 0 \bullet \dot{\sigma}_1 + \sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2 + i\frac{2D_0}{L^2}\hat{\sigma}_1 = 0$$
$$\dot{\sigma}_2 + 3\sigma_1\sigma_2 - i\frac{D_0}{L^2}\hat{\sigma}_0 + i\frac{3D_0}{L^4}\hat{\sigma}_2 = 0 \bullet \dot{\hat{\sigma}}_0 - \hat{\sigma}_0\sigma_1 - 2\hat{\sigma}_1\sigma_2 - \bar{\eta}_0\eta_1 - 2\bar{\eta}_1\eta_2 = 0$$
$$\dot{\hat{\sigma}}_1 - \hat{\sigma}_0\sigma_0 - 2\hat{\sigma}_1\sigma_1 - 3\hat{\sigma}_2\sigma_2 - \bar{\eta}_0\eta_0 - 2\bar{\eta}_1\eta_1 - 3\bar{\eta}_2\eta_2 + i\lambda\rho\delta(t) = 0$$
$$\dot{\hat{\sigma}}_2 + 2\nu\hat{\sigma}_0 - 2\hat{\sigma}_1\sigma_0 - 3\hat{\sigma}_2\sigma_1 - 2\bar{\eta}_1\eta_0 - 3\bar{\eta}_2\eta_1 = 0 \bullet \dot{\eta}_0 + \eta_0\sigma_1 - 2\nu\eta_2 + \eta_1\sigma_0 = 0$$
$$\dot{\eta}_1 + 2\eta_1\sigma_1 + 2\eta_2\sigma_0 + 2\eta_0\sigma_2 = 0 \bullet \dot{\eta}_2 + 3\eta_1\sigma_2 + 3\eta_2\sigma_1 = 0$$
$$\dot{\bar{\eta}}_0 - \bar{\eta}_0\sigma_1 - 2\bar{\eta}_1\sigma_2 = 0 \bullet \dot{\bar{\eta}}_1 - \bar{\eta}_0\sigma_0 - 2\bar{\eta}_1\sigma_1 - 3\bar{\eta}_2\sigma_2 = 0$$
$$\dot{\bar{\eta}}_2 + 2\nu\bar{\eta}_0 - 2\bar{\eta}_1\sigma_0 - 3\bar{\eta}_2\sigma_1 = 0\,. \quad (2.49)$$

A equação exata de ponto de sela para $\hat{u}(x,t)$ mostra que a mesma evolui com "viscosidade negativa". Então, é necessário, no sentido de se resolver (2.49), impor a condição de fronteira $\hat{\sigma}_p(0^+) = 0$. O Ínstanton encontrado por Gurarie e Migdal [22] corresponde ter todas as variáveis $\hat{\sigma}_1$ e σ_1 iguais a zero (notemos que correções surgem em ordens grandes), o que resulta

$$\sigma_1^{(0)}(t) = \frac{d}{dt}\ln R(t)$$
$$\hat{\sigma}_1^{(0)}(t) = i\lambda\rho R(t)^2 \quad (2.50)$$

onde

$$
\begin{aligned}
R(t) &= (1 - t/\tau)^{-1} \\
\tau &= \left(\frac{L^2}{D_0 \lambda \rho}\right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Os campos da ação de Martin-Siggia-Rose podem ser definidos agora como perturbações partindo das soluções de ponto de sela, através das substituições

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &\to \sigma_1^{(0)} + \sigma_1 \\
\hat{\sigma}_1 &\to \hat{\sigma}_1^{(0)} + \hat{\sigma}_1
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

2.3 Funcional Gerador e Funções de Correlação

Substituindo estas expressões da seção anterior em (2.48), obtemos uma forma fatorável para $Z(\lambda)$, expressada como um produto da contribuição dominante do ponto de sela e um termo de correção, associado às flutuações ao redor do ínstanton:

$$
Z(\lambda) = \exp[iS_0(\lambda)] Z_1(\lambda) \tag{2.53}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
S_0(\lambda) &= -i \frac{2 D_0^{1/2}}{3L} (\lambda \rho)^{3/2} \\
Z_1(\lambda) &= \int \prod_{p=0}^{2} D\hat{\sigma}_p D\sigma_p D\bar{\eta}_p D\eta_p \exp[iS_1(\lambda)]
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

e

$$
\begin{aligned}
S_1(\lambda) \;=\; & \int_{-\infty}^{0} dt \{ \hat{\sigma}_0 (\dot{\sigma}_0 + \sigma_0 \sigma_1 + \sigma_0 \sigma_1^{(0)} - 2\nu \sigma_2) + \hat{\sigma}_1 (\dot{\sigma}_1 + \sigma_1^2 + 2\sigma_1^{(0)} \sigma_1 + 2\sigma_0 \sigma_2) \\
& + \hat{\sigma}_2 (\dot{\sigma}_2 + 3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_1^{(0)} \sigma_2) + i \frac{D_0}{2} (\hat{\sigma}_0^2 - \frac{2}{L^2} \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_2 + \frac{2}{L^2} \hat{\sigma}_1^2 + \frac{3}{L^4} \hat{\sigma}_2^2)
\end{aligned}
$$

$$+\bar{\eta}_0(\dot{\eta}_0 + \eta_0\sigma_1 + \eta_0\sigma_1^{(0)} - 2\nu\eta_2 + \eta_1\sigma_0) + \bar{\eta}_1(\dot{\eta}_1 + 2\eta_1\sigma_1 + 2\eta_1\sigma_1^{(0)} + 2\eta_2\sigma_0 + 2\eta_0\sigma_2$$

$$+\bar{\eta}_2(\dot{\eta}_2 + 3\eta_1\sigma_2 + 3\eta_2\sigma_1 + 3\eta_2\sigma_1^{(0)}) + \hat{\sigma}_1^{(0)}(\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2))\} \quad (2.55$$

A integral de caminho $Z_1(\lambda)$ tem uma simples e interessante interpretação. Podemos escrever

$$Z_1(\lambda) = \langle \exp[i\int_{-\infty}^{0} dt\hat{\sigma}_1^{(0)}(\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2)]\rangle \ , \quad (2.56)$$

onde a média acima é determinada pelas equações estocásticas (Langevin) abaixo,

$$\dot{\sigma}_0 + \sigma_0\sigma_1^{(0)} + \sigma_0\sigma_1 - 2\nu\sigma_2 = f_0(t)$$

$$\dot{\sigma}_1 + 2\sigma_1\sigma_1^{(0)} + \sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2 = f_1(t)$$

$$\dot{\sigma}_2 + 3\sigma_2\sigma_1^{(0)} + 3\sigma_1\sigma_2 = f_2(t) \ . \quad (2.57)$$

As forças randômicas dependentes do tempo estão correlacionadas com $\langle f_i(t)f_j(t')\rangle = \delta(t-t')\Omega_{ij}$, onde

$$\Omega = \frac{D_0}{L^2}\begin{bmatrix} L^2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3L^{-2} \end{bmatrix} \ . \quad (2.58)$$

Usando apenas os termos lineares nas equações de Langevin, em acordo com a teoria de flutuações quadráticas ao redor do ponto de sela, e considerando o limite de viscosidade nula, seremos capazes de obter as soluções exatas, com a condição inicial $\sigma_p(-T) = 0$ (onde fazemos $T \to \infty$)

$$\begin{aligned} \sigma_p(t) &= \exp[-(p+1)\int_0^t dt_1\sigma_1^{(0)}(t_1)]\int_{-T}^{t} dt_2 f_p(t_2)\exp[(p+1)\int_0^{t_2} dt_3\sigma_1^{(0)}(t_3)] \\ &= R(t)^{-(p+1)}\int_{-T}^{t} dt' f_p(t')R(t')^{(p+1)} \ . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Uma aplicação direta do teorema de Wick mostra que contrações internas do operador $\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2$ se anulam. Apenas contrações entre campos definidos em tempos distintos produzirão resultados não nulos. Teremos, então, ao expandir a exponencial em (2.56), a expressão com ordenação normal

$$Z_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-T}^{0} dt_p \hat{\sigma}_1^{(0)}(t_p) (\prod_{p=1}^{n} : [\sigma_1^2(t_p) + 2\sigma_0(t_p)\sigma_2(t_p)] :) \tag{2.60}$$

Existem divergências no cálculo de $Z_1(\lambda)$ quando $T/\tau \to \infty$. Tomando a expansão até a segunda ordem não é difícil mostrar que

$$Z_1(\lambda) \sim \ln(T/\tau) \tag{2.61}$$

O comportamento logarítmico da expressão acima claramente implica que Z_1 se expande em uma potência de T/τ. A regularização deste resultado divergente é um ponto sutil. Note que, para tempos $t \ll -\tau$, esperamos que as flutuações sejam governadas pela ação completa de Martin-Siggia-Rose descrevendo a turbulência de Burgers, já que o ínstanton torna-se essencialmente irrelevante neste intervalo do tempo. Então, é natural supor que o tempo seja quebrado em dois intervalos ou regiões. Definimos de fato um instante de tempo t_0 tal que para $t < t_0$ (região I) as flutuações de σ_p são descritas por uma turbulência de Burgers pura, e no intervalo $t_0 < t < 0$ (região II) é dominado pelo ínstanton, onde então é consistente aplicar a teoria das flutuações quadráticas. O campo de velocidades na região II é assumido ser suave, ou seja

$$\sigma_0 \gg \sigma_1 \rho \gg \sigma_2 \rho^2 \gg \dots . \tag{2.62}$$

Como veremos, esta condição é satisfeita pelas soluções das equações de Langevin, desde que $L \gg \rho$. Para encontrar t_0, basta tomar alguma das equações de Langevin, a equação para $\sigma_1(t)$, por exemplo. Olhando na eq. 2.57, estamos interessados em conhecer quando os termos quadráticos σ_1^2 tornam se mais relevantes do que $\sigma_1 \sigma_1^{(0)}$. Um caminho pragmático para comparar o papel destes termos é justamente substituir σ_1 por $\sqrt{\langle\sigma_1^2\rangle}$. Isto é, temos que calcular

$$g(t) \equiv \frac{\sigma_1^{(0)}}{\sqrt{\langle\sigma_1^2\rangle}} = \frac{R(t)}{\tau\sqrt{\langle\sigma_1^2\rangle}} \tag{2.63}$$

O tempo t_0 é definido pela condição $g(t_0) \sim 1$. Usando (2.59) obtemos, no limite $T/\tau \to \infty$,

$$\langle\sigma_1^2\rangle = \frac{2\tau D_0}{3L^2} R(t)^{-1} \tag{2.64}$$

Assumindo agora $|t_0/\tau| \gg 1$, o que é válido dentro do limite assintótico para λ grande, encontramos,

$$t_0 \sim -(L^2/D_0)^{\frac{1}{3}} \tag{2.65}$$

A conclusão básica, projetada a partir dos argumentos acima, é que trabalhamos para resolver (2.59) para um conjunto arbitrário de condições iniciais $t = t_0$. Dentro desta idéia $\bar{\sigma}_p \equiv \sigma_p(t_0)$ representa o valor inicial do campo físico na região II. Dentro do objetivo de ligar as regiões I e II, escrevemos

$$Z_1(\lambda) = \int_C d\bar{\sigma}_0 d\bar{\sigma}_1 d\bar{\sigma}_2 P(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)\langle \exp[i\int_{t_0}^0 dt\hat{\sigma}_1^{(0)}(\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2)]\rangle \,. \tag{2.66}$$

O sub-índice C denota a integração sobre configurações suaves do campo de velocidades, e $P(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ é a fdp para o conjunto de variáveis dinâmicas no tempo t_0, o qual envolve todas as informações sobre as flutuações que desenvolve na região I. Em acordo com a proposta de Burgers para turbulência como sendo um gás diluído de kinks do campo de velocidades [19], a imposição de suavidade da velocidade na integração é concretizado quando as coordenadas $x = \pm\rho/2$ definidas dentro da evolução da diferença de velocidades estão localizadas dentro da região entre choques. Assim, a interpretação física de (2.66) é considerar $|t_0|$ como o valor médio do tempo gasto em um ponto arbitrário até que o mesmo passe para um regime de ondas de choque dentro do fluido.

As soluções das equações de Langevin (2.57), as quais contêm agora uma dependência explícita sobre as condições iniciais, são dadas por

$$\sigma_p(t) = \xi_p(t) + \left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^{p+1} \bar{\sigma}_p \tag{2.67}$$

com

$$\xi_p(t) = R(t)^{-(p+1)} \int_{t_0}^{t} dt' f_p(t') R(t')^{(p+1)} \tag{2.68}$$

É importante checar, como discutido antes, as condições de suavidade (2.62) para as soluções acima. Obtemos então

$$\begin{aligned} \langle \sigma_p(t)^2 \rangle &= \langle \xi_p(t)^2 \rangle + \left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^{2(p+1)} \langle \bar{\sigma}_p^2 \rangle \\ &= \Omega_{pp} R(t)^{-2(p+1)} \int_{t_0}^{t} dt' R(t')^{2(p+1)} + \left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^{2(p+1)} \langle \bar{\sigma}_p^2 \rangle , \end{aligned} \tag{2.69}$$

onde $\langle \bar{\sigma}_p^2 \rangle$ é a média sobre as condições iniciais. E, proveniente da análise puramente dimensional, temos

$$\langle \bar{\sigma}_p^2 \rangle \sim (L^{(1-p)}/t_0)^2 \tag{2.70}$$

Agora, já que $dR(t)/dt > 0$, obtemos, para a integral em (2.69)

$$\int_{t_0}^{t} dt' R(t')^{2(p+1)} = \int_{t_0}^{t} dt' R(t')^{2(p+2)} R(t')^{-2} > R(t)^{-2} \int_{t_0}^{0} dt' R(t')^{2(p+2)} \tag{2.71}$$

Aplicando esta desigualdade atrás para (2.69) e considerando que

$$\frac{\Omega_{pp}}{\Omega_{p+1,p+1}} \sim \frac{\langle \bar{\sigma}_p^2 \rangle}{\langle \bar{\sigma}_{p+1}^2 \rangle} \sim L^2 \gg \rho^2 \tag{2.72}$$

e também

$$\left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^{2(p+2)} < \left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^{2(p+1)} , \tag{2.73}$$

obtemos

$$\langle \sigma_p(t)^2 \rangle \gg \langle \sigma_{p+1}(t)^2 \rangle \rho^2 \ , \tag{2.74}$$

o que é de fato a condição de suavidade (2.62) declarada em uma forma mais precisa.

O campo de flutuação $\xi_(t)$ é um funcional linear do campo de força, com a função de correlação

$$\begin{aligned} A_{ij}(t_1, t_2) &\equiv \langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = \\ &= \tau R(t_1)^{-(i+1)} R(t_2)^{-(j+1)} \frac{\Omega_{ij}}{(i+j+1)} [F_{i+j}(t_2)\Theta(t_1 - t_2) + F_{i+j}(t_1)\Theta(t_2 - t_1)] \end{aligned} \tag{2.75}$$

onde

$$F_p(t) = (p+1)\tau^{-1} \int_{t_0}^{t} dt' R(t')^{(p+2)} = R(t)^{(p+1)} - |\tau/t_0|^{(p+1)} \tag{2.76}$$

Notemos que $A_{ij}(t_1, t_2)$ é um operador positivo definido. A expressão para $Z_1(\lambda)$ torna-se o produto de dois fatores:

$$Z_1(\lambda) = Z_{1a}(\lambda) Z_{1b}(\lambda) \tag{2.77}$$

onde

$$\begin{aligned} Z_{1a}(\lambda) &= \langle \exp[i \int_{t_0}^{0} dt \hat{\sigma}_1^{(0)} (\xi_1^2 + 2\xi_0 \xi_2)] \rangle = \langle \exp[- \int_{t_0}^{0} dt \int_{t_0}^{0} dt' \xi_i(t) B_{ij}(t, t') \xi_j(t')] \rangle, \\ Z_{1b}(\lambda) &= \int_C d\bar{\sigma}_0 d\bar{\sigma}_1 d\bar{\sigma}_2 P(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \exp[\int_{t_0}^{0} dt \int_{t_0}^{0} dt' J_i(t) M_{ij}(t, t') J_k(t') - \frac{t_0^2}{3} (\bar{\sigma}_1^2 + 2\bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

com

$$\begin{aligned} B(t, t') &= \lambda \rho R(t)^2 \delta(t - t') \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ J &= 2\lambda\rho \begin{bmatrix} R(t)^{-1} R(t_0)^3 \bar{\sigma}_2 \\ R(t_0)^2 \bar{\sigma}_1 \\ R(t) R(t_0) \bar{\sigma}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

e

$$M_{ij}(t,t') = [(A^{-1} + 4B)^{-1}]_{ij}(t,t').$$

Estabelecemos, agora, argumentos com o objetivo de mostrar que Z_{1b} têm um limite finito para $\tau \to 0$. Dois casos têm que ser estabelecidos aqui, dependendo de B ser ou não um operador positivo definido. Truncando na ordem dois, vemos que B não é positivo definido. Neste caso, somos capazes apenas de criar uma análise perturbativa. Escrevemos então

$$M_{ij}(t,t') = \frac{1}{A^{-1} + 4B} = [1 - 4AB + (4AB)^2 + ...]A. \tag{2.80}$$

Considerando a expansão em primeira ordem para as séries acima, um cálculo auxiliado por computado (é necessário para examinar um enorme número de termos) mostra que ambos

$$\int_{t_0}^{0} dt_1 \int_{t_0}^{0} dt_2 J_i(t_1) A_{ij}(t_1,t_2) J_j(t_2) \tag{2.81}$$

e

$$\int_{t_0}^{0} dt_1 \int_{t_0}^{0} dt_2 \int_{t_0}^{0} dt_3 \int_{t_0}^{0} dt_4 J_i(t_1) A_{ij}(t_1,t_2) B_{jk}(t_2,t_3) A_{kl}(t_3,t_4) J_l(t_4) \tag{2.82}$$

são finitos quando $\tau \to 0$. Conjeturamos que o mesmo comportamento se mantém em qualquer ordem em teoria de perturbação. Por outro lado, se B é um operador positivo definido, como ocorre para o truncamento em 2.46 em primeira ordem, é possível endereçar uma prova da conjectura acima. De início, observemos que devido ao fato de A e B serem ambos reais, positivo definido e operadores simétricos, então o produto interno satisfaz

$$\langle \Psi, (A^{-1} + 4B)^{-1}\Psi \rangle < \langle \Psi, (A + \frac{1}{4}B^{-1})\Psi \rangle \tag{2.83}$$

Para provar isto, definimos $\Phi = (A^{-1} + 4B)^{-1}\Psi$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, (A + \frac{1}{4}B^{-1})\Psi \rangle &= \langle \Phi, (A^{-1} + 4B)(A + \frac{1}{4}B^{-1})(A^{-1} + 4B)\Phi \rangle \\
&= 3\langle \Phi, (A^{-1} + 4B)\Phi \rangle + \frac{1}{4}\langle \Phi, A^{-1}B^{-1}A\Phi \rangle + 16\langle \Phi, BAB\Phi \rangle \\
&= 3\langle \Psi, (A^{-1} + 4B)^{-1}\Psi \rangle + \frac{1}{4}\langle A^{-1}\Phi, B^{-1}A^{-1}\Phi \rangle + 16\langle B\Phi, AB\Phi \rangle \\
&> \langle \Psi, (A^{-1} + 4B)^{-1}\Psi \rangle
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Este teorema pode ser aplicado agora para o JMJ termo contido dentro da definição de Z_{1b}:

$$\int_{t_0}^{0} dt \int_{t_0}^{0} dt' J_i(t) M_{ij}(t,t') J_j(t') < \int_{t_0}^{0} dt \int_{t_0}^{0} dt' J_i(t) [A + \frac{1}{4}B^{-1}]_{ij}(t,t') J_j(t') \tag{2.85}$$

Obtivemos de fato um limite finito para para o lado direito da expressão acima, dentro do limite $\tau \to 0$. Temos, então, que concentrarmos nossa atenção sobre Z_{1a}. Já que apenas termos quadráticos estão envolvidos na definição de Z_{1a}, obtemos

$$Z_{1a} = \exp[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(1 + 4AB)] \tag{2.86}$$

Expandindo o logaritmo, por

$$\ln(1 + 4AB) = 4AB - 8(ABAB) + \ \dots\ , \tag{2.87}$$

e levando em consideração que $\mathrm{Tr}(AB) = 0$,a primeira contribuição não nula dentro do limite $\tau \to 0$ fornecerá depois de um prolongado cálculo computacional,

$$Z_{1a} = \exp[4\mathrm{Tr}(ABAB)] \sim \exp[c\ln(|t_0/\tau|)], \tag{2.88}$$

com $c = 224/45 \simeq 5$. Desde que $\tau \sim \lambda^{-1/2}$, a forma assintótica para a cauda direita da fdp será dada por

$$P(\Delta u) \sim u^c \exp(-\Delta u^3) \tag{2.89}$$

Este é nosso resultado central. Uma análise cuidadosa desta transição para o regime de ínstanton tem conduzido definitivamente para uma correção tipo lei de potencia mostrado na equação 2.89 para a forma assintótica da diferença de velocidades fdp na cauda direita.

2.4 Efeitos da Viscosidade

Com o objetivo de considerar os efeitos de viscosidade, tudo que devemos fazer, é seguir o que se faz a partir de 2.57, e realizarmos a seguinte substituição $f_0 \to f_0 + 2\nu\sigma_2$, logo,

$$f_0(t) \to f_0(t) + 2\nu R(t)^{-3} \int_{t_0}^{t} dt' f_2(t') R(t')^3 + 2\nu\bar{\sigma}_2. \tag{2.90}$$

Então, teremos agora,

$$\begin{aligned}
\langle f_0(t) f_0(t') \rangle &= \Omega_{00}\delta(t-t') + 2\nu\Omega_{02} R(t')^3 R(t)^{-3} + \mathcal{O}(\nu^2) \\
\langle f_0(t) f_2(t') \rangle &= \Omega_{02}\delta(t-t') + 2\nu\Omega_{22} R(t')^3 R(t)^{-3}\Theta(t-t')
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Usando os resultados acima podemos calcular correções para a função de correlação $A_{ij}(t,t')$. Obtemos, até a primeira ordem,

$$\mathrm{Tr}\ln(1+4AB) = 4\mathrm{Tr}(AB) \sim \frac{\nu t_0}{L^2} \tag{2.92}$$

Nos encontramos, então, que a viscosidade não conduz a correções logarítmicas, e que o limite $v \to 0$ é bem definido, no mínimo para a primeira ordem não trivial em teoria das perturbações.

2.5 Conclusões

Estudamos o problema da transição para o regime de ínstanton dentro da abordagem teórica da proposta de Burgers para turbulência. Com $t_0 \equiv -(L^2/D_0)^{\frac{1}{3}}$, esta transição é caracterizada pela mudança do sistema vindo de um regime de turbulência desenvolvida completamente, dentro do intervalo $t < t_0$, para um regime dominado por ínstanton, dentro do intervalo $t_0 < t < 0$, onde flutuações quadráticas podem ser integradas. O resultado essencial de nossas análises é que a cauda direita da fdp recebe uma correção multiplicativa tipo lei de potência ao resultado principal (expressão de ponto de sela). Tal fenômeno, que é de difícil detecção numérica, é semelhante ao que ocorre em outros sistemas intermitentes.

Notemos que algumas questões permanecem abertas, as quais requerem cálculos mais elaborados. Como prontamente observado, o operador B, introduzido na eq. (2.79), é positivo definido ou não, em acordância com a ordem de truncamento de (2.46). Já que o sinal do parâmetro c (definido na eq. (2.88)) é positivo se B for positivo definido, mais o inverso não é necessariamente verdade, fica claro que com ordens de truncamento maiores, esperamos que: i)B torne-se positivo definido ou não, com $c \to \bar{c} \geq 0$, ou ii)B torne-se não positivo, com $c \to \bar{c} < 0$. Todavia não temos informações suficientes para decidir qual delas é a escolha correta; sobre esta questão é necessário trabalho posterior. Também, é importante mencionar que as correções de lei de potência podem ser dependentes do modelo, como é sugerido fortemente pelo próprio resultado da ordem principal vindo do ponto de sela, sendo este relacionado com a forma específica da função de correlação força força.

A questão natural é se resultados análogos são produzidos para a cauda esquerda da fdp, onde o formalismo de Martin-Siggia-Rose pode ser bem empregado [24]. As técnicas empregadas aqui são adequadas para estudar este problema, um assunto de relevância para futuras investigações. A despeito do fato da proposta da integral de caminho ser direta e encantadora, ela está firmada sobre cálculos perturbativos pesados realizados sobre séries truncadas. Seria interessante, e talvez bastante útil, conhecer como as correções tipo lei de potência podem ser derivadas a partir de algumas análises alternativas da turbulência de Burgers randomicamente forçada.

Chapter 3
Supersimetria e A Estabilidade em Parede de Domínio com Potencial Escalar

A Mecânica Quântica supersimétrica-N=2, envolvendo uma representação de autofunções com duas componentes, é aplicada para escrever e resolver a equação de estabilidade associada a um potencial definido em termos de dois campos escalares reais acoplados. O problema de estabilidade é investigado introduzindo uma técnica de operadores para estados (BPS) Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield e não-BPS sobre duas paredes de domínio em um modelo com potencial escalar e com supersimetria mínima $N = 1$.

3.1 Introdução

A álgebra supersimétrica em mecânica quântica, como formulada por Witten [33] e Sukumar [34], podem ser elaborada a partir de modelo em duas dimensões com supersimetria mínima N=1. A generalização da mecânica quântica supersimétrica [35, 36] , operadores de abaixamento e levantamento em oscilador harmônico com potenciais invariante de forma [37], bem como as conexões existentes com os estados supercoerentes para sistemas de osciladores supersimétricos de Wigner [38] associado a osciladores isotônicos, são objeto de estudo [39].

A realização supersimétrica do oscilador de Wigner, tem sido aplicada em sistemas parabosônicos puros em [40].

A álgebra supersimétrica tem sido também aplicada em uma variedade de novas famílias de potenciais que são parceiros supersimétricos isoespectrais em teoria quântica de campos [41, 42, 43, 44, 45, 46]. Recentemente, investigou-se [47, 48] superpotênciais matriciais 2x2 associados com estabilidade clássica linear proveniente de soluções estáticas para um sistema com dois campos reais escalares acoplados, em dimensão (1+1) que apresenta potência com ordem acima de seis. Neste caso, a configuração de campo estático pode ser determinada pelo método de Rajaraman [49].

Em [52] é analisado um superpotencial matricial 2x2 para um nêutron interagindo com um campo magnético estático gerado por uma corrente em um fio reto, o qual é também descrito por uma função de onda com duas componentes. Em verdade, o formalismo de Witten para supersimetria foi aplicado neste sistema físico planar em ambas as representações de momentos [53] e coordenadas [52, 54]. Neste capítulo a álgebra em mecânica quântica supersimétrica é realizada, na representação de coordenadas, em um modelo com um potencial de dimensão dois, contendo potência de ordem quatro nos campos e com supersimetria $N = 1$. Mostramos que as duas componentes do autovalor do operador de flutuação podem ser de dois tipos; é claro, para o modo zero temos o correspondente $\Psi_0(z) = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}$.

Todavia , isto não é necessariamente verdade para um autovalor real arbitrário não trivial ω_n^2. Aqui, determinamos os modos e indicamos o número de estados ligados.

Também construímos o superpotencial matricial em mecânica quântica supersimétrica no caso da equação de estabilidade associada a um modelo de potencial em duas dimensões considerado por Shifman et al [55, 56, 57]. Primeiro, consideramos as configurações clássicas com soluções de parede de domínio, as quais são estruturas bidimensionais imersas em 3+1 dimensões. Elas são estáticas, não singulares, são soluções solitônicas (defeito) BPS, Bogomol'nyi [84] e Prasad-Sommerfield [58], estáveis classicamente. Elas são soluções das equações de campo que possuem energia finita localizada, associada à dois campos escalares reais. Também fazemos algumas análises no caso não BPS.

Parede de domínio tem sido recentemente explorada dentro de uma análise que satura a conexão com estados ligados BPS [60]. Algumas destas investigações são interessantes conexões com a Matéria Condensada [61], Cosmologia [62],teorias de campo acopladas com soluções solitônicas [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71], correções quânticas em um loop para energia solitônica e carga central em modelos de supersimetria em ϕ^4 e sine-Gordon em dimensão (1+1) [72, 73].

Neste capítulo, a conexão entre Mecânica Quântica Supersimétrica e a descrição de um dado sistema físico com equação de estabilidade, é expresso em termos de funções de onda com duas componentes. Isto conduz a uma Hamiltoniana supersimétrica e super-cargas matriciais 4x4, dos quais o setor bosônico possui um operador de flutuação (O_F) associado com autoestados com duas componentes em termos de estados BPS e não BPS.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na Seção II, investigamos as configurações de paredes de domínio para dois campos escalares acoplados; implementamos uma extensão para mecânica quântica supersimétrica não relativística com funções de onda de duas componentes. Na Seção III, estudamos a estabilidade de estados BPS e não BPS no contexto da mecânica quântica supersimétrica.

Nossas conclusões são apresentadas na Seção IV.

3.2 Paredes de Domínio Provenientes de Dois Campos Escalares Acoplados

Nesta seção, investigamos um modelo com potencial em termos de dois campos reais escalares em dimensão (1+1) que apresenta soluções clássicas conhecidas como paredes de domínio.

A densidade Lagrangeana para este sistema não linear, em unidades naturais ($c = \hbar = 1$), é escrito por

$$\mathcal{L}\left(\phi, \chi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \chi\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \chi\right)^2 - V(\phi, \chi), \tag{3.93}$$

onde $\eta^{\mu\nu} = dig(+,-)$ é o tensor métrico. Aqui, o potencial $V = V(\phi, \chi)$ é uma função semidefinida positiva dos campos ϕ e χ, o qual deve ter no mínimo dois zeros como exigência de se ter soluções tipo paredes de domínio. As configurações clássicas genéricas deste modelo obedecem às equações:

$$\Box\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}V = 0, \qquad \Box\chi + \frac{\partial}{\partial\chi}V = 0, \tag{3.94}$$

onde $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$.

Para soluções solitônicas estáticas, as equações de movimento tornam-se o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\phi'' = \frac{\partial}{\partial\phi}V, \quad \chi'' = \frac{\partial}{\partial\chi}V, \tag{3.95}$$

onde os traços representam a diferenciação na variável espacial.

Podemos também obter as soluções estáticas para certos potenciais, através do método chamado por: órbitas tentativas de Rajaraman. Este método produz algumas soluções para a Eq. (3.95) porem não se aplica a todas as classes de potenciais [49]. Recentemente, o método de órbitas tentativas tem sido aplicado em sistemas com dois campos escalares acoplados com ordem de potência nos campos acima de seis [71].

Consideremos um potencial positivo, $V(\phi,\chi)$, com a seguinte forma explicita:

$$V(\phi,\chi) = \frac{1}{2}\lambda^2\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\chi^2(\chi^2 + 4\phi^2) + \alpha\lambda\chi^2(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda^2}), \tag{3.96}$$

onde $\alpha, \lambda > 0$. Este potencial é interessante pois possui soluções do tipo BPS e não BPS; e também apresenta quatro mínimos supersimétricos. É fácil ver que este potencial possui a seguinte simetria discreta: $\phi \to -\phi$ e $\chi \to -\chi$, então aqui temos satisfeito a condição necessária (mais não suficiente) de se ter no mínimo dois zeros para que exista paredes de domínio.

Neste caso, a densidade de energia para uma configuração qualquer que consiste da soma de termos quadráticos e de termos de superfície apresenta a seguinte desigualdade da energia de Bogomol'nyi

$$E \geq \left| \int dz \frac{\partial}{\partial z} W[\phi(z), \chi(z)] \right|, \tag{3.97}$$

onde o superpotencial $W[\phi(z),\chi(z)]$ será discutido mais tarde. A equação para ϕ e χ do estado BPS é dada por [84]:

$$\begin{aligned} \phi' &= -\lambda\phi^2 - \alpha\chi^2 + \frac{m^2}{\lambda}, \\ \chi' &= -2\alpha\phi\chi, \end{aligned} \tag{3.98}$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \phi} &= \phi', \\ \frac{\partial W}{\partial \chi} &= \chi', \end{aligned} \tag{3.99}$$

O superpotencial $W(\Phi, \boldsymbol{\chi})$, em termos de supercampos, como proposto na ref [56], tem como componente bosônica, o potencial $V(\phi, \chi)$ da eq. (3.96):, ai escrito em campos componentes. O mesmo tem a forma:

$$W(\Phi, \boldsymbol{\chi}) = \frac{m^2}{\lambda}\Phi - \frac{\lambda}{3}\Phi^3 - \alpha\Phi\boldsymbol{\chi}^2, \tag{3.100}$$

Onde Φ e $\boldsymbol{\chi}$ são supercampos quirais, os quais em termos dos campos componentes bosônicos (ϕ, χ), fermiônicos (ψ, ξ) e campos auxiliares (F, G), são $\theta-$expandidos como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi + \bar{\theta}\psi + \frac{\theta\bar{\theta}}{2}F, \\ \boldsymbol{\chi} &= \chi + \theta\xi + \frac{\theta\bar{\theta}}{2}G, \end{aligned} \tag{3.101}$$

onde θ e $\bar{\theta} = \theta^*$ são variáveis Grasmannianas.

O superpotencial acima, com dois supercampos quirais interagindo, permite soluções descrevendo cordas do tipo domain ribbon que são defeitos dentro de paredes de domínio. É energeticamente favorável para férmions no interior da parede, popular a domain ribbons (faixa de domínio) [64]. O vácuo supersimétrico é determinado extremando o superpotencial, ou seja

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = 0 \tag{3.102}$$

e

$$\frac{\partial W}{\partial \chi} = 0 \tag{3.103}$$

produzindo aqui quatro estado de vácuo (ϕ, χ) cujos valores são listados abaixo:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(-\frac{m}{\lambda}, 0\right) \\ M_2 &= \left(\frac{m}{\lambda}, 0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \left(0, -\frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}}\right) \\ M_4 &= \left(0, \frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}}\right). \end{aligned} \tag{3.104}$$

Como as equações diferenciais eq. (3.98) são não lineares, podemos obter soluções topológicas não triviais tipo sóliton conectando vácuos distintos. Cada par de vácuo conectado por essas soluções constitui um setor topológico. A energia de Bogomol'nyi das soluções das equações diferenciais de primeira ordem depende apenas da diferença do superpotencial calculado nos valores assintóticos dessas soluções, ou seja, nos vácuos. Portanto, cada setor topológico possui sua própria energia dada pela energia de Bogomol'nyi. Assim para as configurações de vácuo acima existem os seguintes setores

$$\begin{array}{ll} S_{1/2} = \left(\pm\frac{m}{\lambda}, 0\right) & \text{um setor} \\ S_{12/34} = \left(\pm\frac{m}{\lambda}, \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}}\right) & \text{quatro setores} \\ S_{3/4} = \left(0, \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}}\right) & \text{um setor} \end{array} \tag{3.105}$$

As paredes M_{13}, M_{23}, M_{14}, M_{24} do setor topológico $S_{12/34}$ têm pois suas energias degeneradas. E evidentemente, as paredes M_{12} e M_{34} respectivamente dos setores topológicos $S_{1/2}$ e $S_{3/4}$ não são degeneradas na energia, como também podemos ver de 3.104. Somente no setor topológico $S_{3/4}$ não há configuração de sóliton tipo BPS conectando os vácuos, a energia de Bogomol'nyi neste setor é nula, porem uma solução não BPS pode ser obtida neste setor. Neste trabalho, o potencial presente possui uma simetria Z_2xZ_2, então algumas interações podem ser construídas entre as paredes.

Este sistema pode ser resolvido pelo método de órbitas tentativas de Rajaraman considerado em [49]. Contudo com o objetivo de simplificar, estaremos trabalhando daqui para frente somente no setor topológico $S_{1/2}$. Então uma possível solução solitônica ocorre ai, a qual gera a parede de domínio que chamamos aqui de M_{12}, associada ao sóliton do modelo ϕ^4:

$$\phi(z) = \frac{m}{\lambda}\tanh(mz) \tag{3.106}$$
$$\chi(z) = 0.$$

A energia mínima de Bogomol'nyi pode ser obtida usando o superpotencial escrito em componentes, e corresponde ao estado saturado BPS. Vemos então que classicamente em acordo com a equação 3.97 , temos [57]

$$E_B^{min} = \mid W[\phi(z), \chi(z)]_{z=+\infty} - W[\phi(z), \chi(z)]_{z=-\infty} \mid = \frac{4m^3}{3\lambda^2}. \tag{3.107}$$

Também a tensão da parede M_{12} é $T_{12} = \frac{4m^2}{3\lambda^2}$.

3.3 Estabilidade Linear em Mecânica Quântica Supersimétrica

Analisamos, agora, a estabilidade clássica da parede de domínios neste sistema [44, 45, 46, 63], o qual é feito considerando pequenas oscilações em torno desta solução solitônica $\phi(z)$ and $\chi(z)$ no setor topológico $S_{1/2}$:

$$\phi(z,t) = \phi(z) + \eta(z,t) \tag{3.108}$$

e

$$\chi(z,t) = \chi(z) + \xi(z,t). \tag{3.109}$$

Posteriormente expandimos as flutuações $\eta(z,t)$and $\xi(z,t)$ em termos dos modos normais:

$$\eta(z,t) = \sum_n \epsilon_n \eta_n(z) e^{i\omega_n t} \tag{3.110}$$

e

$$\xi(z,t) = \sum_n c_n \xi_n(z) e^{i\tilde{\omega}_n t}, \tag{3.111}$$

onde ϵ_n e c_n são definidos de modo a se ter $\eta_n(z)$ e $\chi_n(z)$ reais. Se $\tilde{\omega}_n = \omega_n$,então a equação de campo leva uma equação tipo Schrödinger para funções de onda com duas componentes, Ψ_n. Contudo, em geral obtemos

$$O_F \Psi_n = \tilde{\Psi}_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.112}$$

onde

$$O_F = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V & \frac{\partial^2}{\partial\chi\partial\phi}V \\ \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\chi}V & -\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\partial^2}{\partial\chi^2}V \end{pmatrix}_{|\phi=\phi(z),\chi=\chi(z)} \tag{3.113}$$

e os modos são inseridos na forma abaixo:

$$\tilde{\Psi}_n = \begin{pmatrix} \omega_n^2 \eta_n(z) \\ \tilde{\omega}_n^2 \xi_n(z) \end{pmatrix}. \tag{3.114}$$

Observemos que para o modelo de potencial considerado neste capítulo, de acordo eq. (3.96) , chega se as seguintes equações para soluções estacionárias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\chi\partial\phi}V &= \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\chi}V = 4\alpha(2\alpha+\lambda)\phi\chi, \\ \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V &= 6\lambda^2\phi^2 - 2m^2 + 2\alpha(2\alpha+\lambda)\chi^2, \\ \frac{\partial^2}{\partial\chi^2}V &= 6\alpha^2\chi^2 + 2\alpha(2\alpha+\lambda)\phi^2 - \frac{2\alpha m^2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Podemos obter as massas das partículas bosônicas, usando os resultados acima, a partir da derivada segunda do potencial:

$$\begin{aligned} m_\phi^2 &\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}|_{z\to\pm\infty} \\ m_\chi^2 &\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\chi^2}|_{z\to\pm\infty}. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Então neste setor topológico $S_{1/2}$ a massa $m_\phi^2 = 4m^2$, e a matriz do potencial de flutuação se torna

$$V_{BPS}(z) = m^2 \begin{pmatrix} 6tanh^2(mz) - 2 & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha}{\lambda^2}(2\alpha+\lambda)\tanh^2(mz) - \frac{2\alpha}{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3.117}$$

Podemos ver que V_{BPS} é uma matriz Hermitiana, então O_F é Hermitiano. Então, os autovalores ω_n^2 de $O_{F_{11}}$e $\tilde{\omega}_n^2$ de $O_{F_{22}}$ são todos reais. Pode se demonstrar que estes autovalores não são negativos, a prova disto nos leva as soluções do potencial de Pöschl-Teller [86].

Temos modos de dois tipos, já que as equações dos modos não são acopladas.

$$O_{F_{11}}\eta_n \equiv -\frac{d^2}{dz^2}\eta_n - m^2(6sech^2(mz) - 4)\eta_n = \omega_n^2\eta_n \tag{3.118}$$

e

$$O_{F_{22}}\xi_n \equiv -\frac{d^2}{dz^2}\xi_n - \frac{2m^2\alpha}{\lambda^2}(2\alpha+\lambda)sech^2(mz)\xi_n + m^2(\frac{2\alpha}{\lambda^2}(2\alpha+\lambda) - \frac{2\alpha}{\lambda})\xi_n = \tilde{\omega}_n^2\xi_n. \tag{3.119}$$

Observemos que em acordo com as eqs.(3.96) e (3.115), se $\alpha = 0$, o potencial se torna $V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda^2})^2$, então a equação de estabilidade é dada por (3.118) e assim mostramos a existência da parede M_{12} neste setor.

Vemos que ambos os tipos de sólitons existem somente para certos valores discretos de ω_n^2 ou $\tilde{\omega}_n^2$. Redefinindo $mz = y$, e por comparação com a equação (12.3.22) em [86], nos obtemos os seguintes autovalores.

$$\omega_n^2 = m^2\left\{4 - \left[\frac{5}{2} - (n+\frac{1}{2})\right]^2\right\}. \tag{3.120}$$

Neste caso, encontramos apenas dois estados ligados associados com os autovalores $\omega_0^2 = 0$ and $\omega_1^2 = 3m^2$. Expressando claramente a estabilidade da solução $\phi(z)$ em 3.106 .

Analogamente, para soluções do segundo tipo, encontramos a partir da eq. (3.119) e (12.3.22) na ref. [86], os seguintes autovalores:

$$\tilde{\omega}_n^2 = m^2 \left\{ \frac{2\alpha}{\lambda^2}(2\alpha+\lambda) - \frac{2\alpha}{\lambda} - \left[\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda^2}(2\alpha+\lambda)+\frac{1}{4}} - (n+\frac{1}{2}) \right]^2 \right\}. \tag{3.121}$$

Neste caso, o número de estados ligados é dado por

$$n = 0, 1, \cdots < \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda^2}(2\alpha+\lambda)+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2},$$

Como um exemplo, definindo $\alpha = 2\lambda$, obtemos

$$\tilde{\omega}_n^2 = m^2 \left\{ 16 - (4-n)^2 \right\}, n = 0, 1, 2, 3. \tag{3.122}$$

Vemos que, neste caso particular, temos quatro estado ligado associados com os autovalores $\tilde{\omega}_0^2 = 0$, $\tilde{\omega}_1^2 = 7m^2$, $\tilde{\omega}_2^2 = 12m^2$ e $\tilde{\omega}_3^2 = 15m^2$. Expressando claramente a estabilidade da solução $\chi(z)$ em 3.106, e tambem expressando a estabilidade deste estado BPS dentro destes parametros definidos.

No cálculo de estabilidade a obtenção do superpotencial no caso de único campo escalar real [42, 44, 45, 46], nos conduz a equação de Riccati para este superpotencial, a qual está associada ao potencial de flutuação $V_{BPS}(z)$. No nosso caso com dois campos escalares, esta equação assume a forma matricial 2x2 como abaixo:

$$\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}' = V_{BPS}(z), \tag{3.123}$$

No caso geral a solução ou seja o superpotencial que satisfaz esta equação é dado por:

$$\mathbf{W} = -2 \begin{pmatrix} \lambda\phi & \alpha\chi \\ \alpha\chi & \alpha\phi \end{pmatrix}_{|\phi=\phi(x),\chi=\chi(x)}. \tag{3.124}$$

Restringindo esta solução ao setor topologico $S_{1/2}$ teremos W diagonal como abaixo e daí segue o que vimos acima.

$$\mathbf{W} = -2 \begin{pmatrix} m\tanh(mz) & 0 \\ 0 & m\frac{\alpha}{\lambda}\tanh(mz) \end{pmatrix}_{|\phi=\phi(z),\chi=0}. \tag{3.125}$$

Desta forma, é direto mostrar que a estabilidade linear é satisfeita, ou seja, $\omega_n^2 = \langle O_F \rangle = \langle \mathcal{A}^- \mathcal{A}^- \rangle = (\mathcal{A}^- \Psi_n)^\dagger (\mathcal{A}^- \Psi_n) = | \mathcal{A}^- \Psi_n |^2 \geq 0$, como anteriormente já confirmávamos. Observemos que temos definido $O_F \equiv \mathcal{A}^+ \mathcal{A}^-$, onde estes operadores $\mathcal{A}^+$ e $\mathcal{A}^-$ da mecânica quântica supersimétrica serão definidos em termos da matriz do superpotencial, **W**.

Então de modo análogo ao modelo supersimétrico de Witten em mecânica quântica [33, 37], temos

$$\mathcal{A}^{\pm} = \pm \mathbf{I}\frac{d}{dz} + \mathbf{W}(z), \quad \Psi^{(n)}_{\text{SUSY}}(z) = \begin{pmatrix} \psi_+^{(n)}(z) \\ \psi_-^{(n)}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.126}$$

onde **I** é a uma matriz identidade 2x2.

O setor bosônico da Hamiltoniana H_{SUSY} é exatamente fornecido por O_F, o qual, como obtido da equação de estabilidade (3.112), possui exatamente o seguinte estado fundamental ou modo zero:

$$\mathcal{A}^- \Psi_+^{(0)}(z) = 0, \qquad \Psi_+^{(0)}(z) = \Psi_0 = \begin{pmatrix} \eta_0(z) \\ \xi_0(z) \end{pmatrix}, \tag{3.127}$$

como dito antes, $\tilde{\omega}_n = \omega_n$ não é necessariamente verdade para os modos excitados e de fato não o é para este modelo: Assim, as duas componentes do modo normal em (3.114) satisfazem ${\omega_n}^2 \geq 0$, assegurando a estabilidade da parede de domínio.

Como dissemos antes, no setor topológico $S_{3/4}$ existe uma parede não BPS, com $\phi = 0$, descrita pela seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2\chi}{dz^2} = -2\alpha\chi\left(\frac{m^2}{\lambda} - \alpha\chi^2\right), \tag{3.128}$$

cuja solução conectando (assintoticamente) aos vácuos M_3 e M_4 é dada por

$$\chi(z) = \frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}}\tanh(Mz), \quad M = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}m, \tag{3.129}$$

neste caso, o potencial de flutuação na equação de estabilidade da parede M_{34} é dado por

$$V_{NBPS}(z) = 2m^2\begin{pmatrix} \frac{2\alpha}{\lambda} + (1+\frac{2\alpha}{\lambda})sech^2(Mz) & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2\lambda} + \frac{3\alpha}{\lambda}sech^2(Mz) \end{pmatrix}. \tag{3.130}$$

Com $\alpha \neq \lambda$, a tensão de M_{34} é diferente da tensão da parede M_{12}. A álgebra de Lie graduada da supersimetria em mecânica quântica para os estados BPS e não BPS, são aqui prontamente realizadas por

$$H_{SUSY} = [Q_-, Q_+]_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+\mathcal{A}^- & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^-\mathcal{A}^+ \end{pmatrix}_{4X4} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_- \end{pmatrix}, \tag{3.131}$$

$$[H_{SUSY}, Q_\pm]_- = 0 = (Q_-)^2 = (Q_+)^2, \tag{3.132}$$

onde $Q_\pm$ são matrizes 4x4 que representam as supercargas do modelo supersimétrico $N = 2$ de Witten, ou seja

$$Q_- = \sigma_- \otimes \mathcal{A}^-, \quad Q_+ = Q_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+ \otimes \mathcal{A}^+, \tag{3.133}$$

com os operadores, $\mathcal{A}^\pm$, em termos do superpotencial matricial 2x2, dados pela eq. (3.126) e $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, onde σ_1 e σ_2 são as matrizes de pauli.

Obviamente, o setor bosônico da Hamiltoniana H_{SUSY}, é exatamente o operador de flutuação $\mathcal{H}_+ = O_F = -\frac{\mathbf{I}d^2}{dz^2} + \mathbf{V}$, onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade 2x2, $\mathbf{V} = V_{BPS}$, para os estados BPS e $\mathbf{V} = V_{NBPS}$, para os estados não BPS.

No caso acima, onde o operador de flutuação é diagonal, podemos construir duas representações de supersimetria me mecânica quântica. Na verdade, a partir de (3.125), definimos,

$$W_{ij} = \delta_{ij} W_{(i)}, \tag{3.134}$$

onde W_{ij} são os elementos da matriz $\mathbf{W}(z)$. Estaremos usando agora a convenção de soma para índices repedidos. Os parênteses suprimem esta convenção.

As componentes de $\mathcal{A}^{\pm}$ são obtidas a partir de (3.126),

$$\mathcal{A}_{ij}{}^{\pm} = \delta_{ij}(\pm\frac{d}{dz} + W_{(i)}(z)); \tag{3.135}$$

também, as componentes do operador de flutuação são escritos como abaixo:

$$O^{+}_{F_{ij}} = \mathcal{A}^{+}_{ij}\mathcal{A}^{-}_{jk} = \delta_{ik}(\frac{d}{dz} + W_{(k)}(z))(-\frac{d}{dz} + W_{(k)}(z)), \tag{3.136}$$

ao contrário do tratamento anterior, aqui fica explícito a priori que os modos em uma orden n qualquer, não estão necessariamente vinculados, podendo vibrar com freqüências distintas. Por esta razão, adicionamos outro índice (k), o qual conta à freqüência, distinguindo os modos,

$$O^{+}_{F_{ik}}\psi^{(n)}_{k} = \mathcal{A}^{+}_{ij}\mathcal{A}^{-}_{jk}\psi^{(n)}_{k} = \delta_{ik}\omega^{2}_{(k)(n)}\psi^{(n)}_{k}. \tag{3.137}$$

Isto nos leva a duas representações de supersimetria em mecânica quântica [35], ou seja,

$$\begin{aligned} O^{+}_{F_{11}}\psi^{(n)}_{1} &= \mathcal{A}^{+}_{11}\mathcal{A}^{-}_{11}\psi^{(n)}_{1} = \omega^{2}_{(1)(n)}\psi^{(n)}_{1}, \\ O^{+}_{F_{22}}\psi^{(n)}_{2} &= \mathcal{A}^{+}_{22}\mathcal{A}^{-}_{22}\psi^{(n)}_{2} = \omega^{2}_{(2)(n)}\psi^{(n)}_{2}. \end{aligned} \tag{3.138}$$

É possível agora construir os respectivos parceiros supersimétricos do potencial para cada representação supersimétrica, de modo similar feito em (**??**). Temos que W_1 e W_2 são provenientes de (3.124) e (3.134),

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -2m\tanh(mz), \\
W_2 &= -2m\frac{\alpha}{\lambda}\tanh(mz).
\end{aligned} \tag{3.139}
$$

com a ajuda de [34] (shape invariance), temos um procedimento para construir a hierarquia destes operadores de flutuação, obtendo assim autofunções e autovalores nestas duas representações.

Mostramos aqui apenas as autofunções ($\psi_i^{(0)} = c_{(i)}e^{\int dz W_i(z)}$) do estado fundamental dos operadores $O^+_{F_{11}}$ e $O^+_{F_{22}}$, os quais são dados respectivamente por:

$$
\begin{aligned}
\psi_1^{(0)} &= c_{(1)} sech^2(mz), \\
\psi_2^{(0)} &= c_{(2)} sech^{\frac{2\alpha}{\lambda}}(mz),
\end{aligned} \tag{3.140}
$$

onde $c_{(i)}$ são as constantes de normalização para o estados fundamentais correspondente. Os autovalores para estes estados fundamentais são $\omega^2_{(i)(0)} = 0$, devido à condição de aniquilação, ou seja $\mathcal{A}^-_{ii}\psi^{(0)}_{(i)} = 0$. O índice i identifica a que representação supersimétrica está se referindo. Notemos que se $\alpha = \lambda$, teremos duas representações supersimétricas equivalentes.

Devemos lembrar que os parametros do potencial 3.96, α e λ, foram escolhidos positivas definidos, logo $\frac{2\alpha}{\lambda} > 0$, o que nos garante que $\psi_2^{(0)}(z)$ é tambem uma configuração normalizável tal qual $\psi_1^{(0)}(z)$; Portanto os dois modos zeros são normalizáveis. A hierarquia de potenciais, dos demais autoestados e autovalores, são obtidos de forma análoga e diretamente pelo algoritmo dado em [34].

3.4 Conclusões

Neste capítulo, investigamos os estados BPS e não BPS em termos dos seus operadores de flutuação, em um modelo com supersimetria mínima $N = 1$, com um potencial de dimensão dois. A equação de estabilidade correspondente foi analisada com e sem supersimetria. Uma conexão entre os estados BPS e não BPS foi implementado via mecânica quântica supersimétrica com funções de onda de duas componentes, e foi investigado a equação de estabilidade associada com a solução solitônica de um modelo com dois campos escalares reais. Para ambos os casos com paredes de domínio de estados BPS e não BPS, o modo zero ou estado fundamental é uma autofunção de duas componentes, obtivemos a forma explicita dos diferentes autovalores para o caso particular.

A realização da álgebra de supersimetria-$N = 2$ em Mecânica Quântica do modelo de Witten, foi ligeiramente modificada para este sistema [36]. A razão essencial para esta necessária modificação foi que a equação de Riccati dada por (3.123) foi reduzida a um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem. Neste caso, o superpotencial não é diretamente definido por $W(z) = -\frac{1}{\psi_+^{(0)}}\frac{d}{dz}\psi_+^{(0)}(z)$, de modo análogo como para o caso do modelo [33, 37], descrito por uma função de onda com uma componente, modelo este com uma supersimetria- $N = 2$ no contexto da Mecânica Quântica Não-Relativística. Além do mais, como o modo zero está associado a uma autofunção de duas componentes, $\Psi_+^{(0)}(z)$, a equação de estabilidade para o superpotencial matricial assume a forma $\frac{d}{dz}\Psi_+^{(0)}(z) = \mathbf{W}\Psi_+^{(0)}(z)$ [36]. Todavia, podemos obter os autovalores do parceiro supersimétrico $\mathcal{H}_-$ a partir do outro parceiro $\mathcal{H}_+ \equiv O_F$, e a resolução espectral da hierarquia de Hamiltonianas matriciais pode ser obtida através de um caminho elegante, usando o método de Sukumar para mecânica quântica supersimétrica [34]. Neste caso, os operadores $\mathcal{A}^{+}(\mathcal{A}^{-})$ convertem uma autofunção de $\mathcal{H}_{-}(\mathcal{H}_{+})$ em uma autofunção de $\mathcal{H}_{+}(\mathcal{H}_{-})$ com a mesma energia e simultaneamente cria ou destrói modos do tipo $\Psi_{+}^{(n+1)}(z)$, $\Psi_{-}^{n}(z)$.

Chapter 4
Dinâmica Supersimétrica-N=2 de uma Partícula de Spin-1/2 em um Campo Externo Estendido

Consideramos a dinâmica quântica de uma partícula carregada de spin-$\frac{1}{2}$em um campo eletromagnético externo, proveniente da redução dimensional de uma teoria de gauge Abeliana em d=4+1 dimensões. No limite não relativístico em d=3+1, identificamos o sistema como um setor da dinâmica da Mecânica Quântica Supersimétrica-N=2. O modelo supersimétrico completo é estudado e analisamos a álgebra das cargas fermiônicas; a conclusão é que a carga central não surge. Discutimos uma possível interpretação dos campos externos extras, um escalar e um campo magnético.

4.1 Introdução

A teoria quântica de campo supersimétrica a baixas energias (limite não relativístico) , é especialmente interessante por um grande número de razões, [92], [95], [99], [103]. Se a Supersimetria é uma simetria da Natureza, o que vemos hoje em dia deve ser o remanescente desta a baixa energia, através de algum mecanismo de quebra de tal simetria [98], [100], [101]. Se além disto estamos interessados no regime de baixas velocidades, A teoria de campo fundamental deveria se aproximar de uma teoria de campo supersimétrica Galileu invariante, pela regra de superseleção de Bargmann [94], tal teoria de campo será equivalente a uma equação de Schrödinger supersimétrica em cada setor de número de partículas da teoria. Propomos um modelo de partícula baseado na equação de Dirac; esta está inserida em um modelo supersimétrico que consiste do modelo de Wess-Zumino estendido com 2 supercampos quirais de matéria. Analisando este modelo no limite de baixas energias, procedemos o limite não relativístico. Neste limite, excluimos os dois graus de liberdade do espinor que correspondem as componentes fracas. Então obtemos um modelo supersimétrico invariante por Galileu, baseado na equação de Schrödinger.

Neste capítulo, vamos considerar uma partícula carregada de spin-$\frac{1}{2}$e de massa m em um campo externo, [90], [96], [88],[89]. Vamos construir uma ação no superespaço para este modelo, obtendo as transformações das componentes coordenadas e assim obtendo os operadores de carga supersimétricos [87]. Analisaremos sua álgebra e procederemos à investigação sobre uma possível existência de uma carga central no sistema.

Iniciamos nossa discussão considerando tal sistema em 1+2 dimensões. A ação de Dirac em tal espaço-tempo pode ser escrita como:

$$L = \overline{\Psi}(i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m)\Psi,$$

onde $\eta = (1, -1, -1)$ e $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, $\gamma^3 = \sigma_1$, $\gamma_3 = i\gamma_0\gamma_1$, $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$. Da equação de movimento,

$$(i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m)\Psi = 0,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

e com a seguinte aproximação

$$E + m - e\phi \cong 2m,$$

$$\psi_2 \cong -\frac{(D_3 + iD_1)}{2m}\psi_1,$$

a Hamiltoniana de Pauli em d=1+2 [91] toma a seguinte forma abaixo:

$$H = \frac{1}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 - \frac{ie}{2m}\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A} - \frac{ie}{m}\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\nabla} - \frac{e^2}{2m}\left|\overrightarrow{A}\right|^2 - e\phi.$$

O acoplamento mínimo não gera aqui nenhum termo de acoplamento do tipo spin-campo magnético como é o caso para a Hamiltoniana de Pauli em d=1+3. Podemos mostrar também neste caso, que este acoplamento não pode aparecer de um acoplamento não mínimo do tipo:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu + ig\widetilde{F}_\mu,$$
$$\widetilde{F}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}.$$

Em (1+3)D, vemos que o grau de liberdade bosônico, $x^i(t)$ (posição), é igual ao grau de liberdade fermiônico, $S^i(t)$ (spin). Isto possibilita a construção de supercampos e de uma Lagrangeana manifestamente supersimétrica com uma supersimetria realizada linearmente [87]. Todavia, em (1+2)D, o mesmo não ocorre; o momento angular neste caso não é mais um vetor, o número de graus de liberdade de x^i é agora diferente do número de componente de spin e desta forma não podemos mais por este caminho construir supercampos ou a Lagrangeana supersimétrica no superespaço. Poderíamos tentar trabalhar em (1+3)D , partindo da equação de Dirac, tomando o limite não relativístico e fazendo uma redução dimensional para (1+2)D. Porem, isto não arrasta para (1+2)D o análogo de um acoplamento spin-campo magnético que existe em (1+3)D [91]. Nossa estratégia será então estudar este modelo em (1+3)D com supersimetria N=1 e N=2; com este propósito, partimos de (1+4)D [102], onde temos a priori o mesmo número de coordenadas espaciais e componentes de spin em 5D; procedendo a redução dimensional para 4D, obtemos um campo semelhante ao campo eletromagnético entendido. Desta maneira , a idéia de construir um modelo a partir de um espaço-tempo de 5 dimensões é uma estratégia para termos um modelo supersimétrico de partícula onde o número dc coordenadas do espaço e das componentes de spin são iguais. Os graus de liberdade da partícula estão acoplados com um campo eletromagnético estendido em 5D e, através da redução dimensional a partícula supersimétrica interage com um campo estendido externo proveniente do campo eletromagnético em 5D.

4.2 Redução Dimensional N=1-D=5 para N=1-D=4

Consideramos a seguinte ação em D=4+1,

$$L = \overline{\Psi}(i\Gamma^{\hat{\mu}} D_{\hat{\mu}} - m)\Psi; \tag{4.141}$$

onde definimos:

$$\hat{\mu} \in \{0,1,2,3,4\}, \quad \eta = (+,-,-,-,-), \tag{4.142}$$

$$x^{\hat{\mu}} = (t,x,y,z,w), \quad F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} A_{\hat{\mu}},$$

$$D_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}} + ieA_{\hat{\mu}}, \quad A_{\mu} = (A_i, \Lambda), \quad \left\{\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\nu}}\right\} = 2\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}},$$

$$\partial^i \Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla}, \quad \partial_0 \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad E^i \Longleftrightarrow \overrightarrow{E}, \quad B^i \Longleftrightarrow \overrightarrow{B},$$

$$F_{04} = \mathcal{E}, \quad F_{4i} = \mathcal{B}_i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k, \quad F_{0i} = E_i,$$

sendo $i,j,k \in \{1,2,3\}$. Observamos que o escalar, $\mathcal{E}$, e o vetor, $\overrightarrow{\mathcal{B}}$, de modo análogo aos vetores $\overrightarrow{E}$ and $\overrightarrow{B}$, serão identificados mais tarde como campos elétrico e magnético, respectivamente. Nossa representação cxplicita para as matrizes gama e dada no Apêndice A. Também definimos:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Psi} = \Psi^{\dagger}\Gamma^0.$$

Tomamos agora a equação de movimento para Ψ proveniente da equação de Euler-Lagrange (4.141). Supondo uma solução estacionária,

$$\Psi(x,t) = \exp(i\epsilon t)\chi(x);$$

Aqui, estamos considerando que o campo externo não depende de t, e $A_0 = 0$. Nossa proposição para redução é:

$$\partial_4(A_\mu) = 0,$$

teremos então:

$$\overrightarrow{E} \Longleftrightarrow F_{0i} \equiv \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = 0; \tag{4.143}$$

$$\mathcal{E} \equiv F_{04} \equiv \partial_0 A_4 - \partial_4 A_0 = 0;$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \equiv -\epsilon_{ijk} B_k;$$

$$F_{i4} = \partial_i A_4 - \partial_4 A_i \equiv \partial_i \Lambda \equiv -\mathcal{B}_i.$$

Então, considerando o limite não relativístico da teoria reduzida, obtemos as seguintes equações de movimento:

$$(\epsilon + m)I_2\chi_1 + (-i\sigma^i(\partial_i + ieA_i) + iI_2 eA_4)\chi_2 = 0. \tag{4.144}$$

$$(i\sigma^i(\partial_i + ieA_i) + iI_2 eA_4)\chi_1 + (-\epsilon + m)I_2)\chi_2 = 0.$$

desta forma , vemos que $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ perde dois graus de liberdade, descrito pelo espinor "fraco", χ_2. Então a Hamiltoniana semelhante a de Pauli fica na forma abaixo:

$$H = -\frac{1}{2m}\left[\left(\overrightarrow{\nabla} - ie\overrightarrow{A}\right)^2 + e\overrightarrow{\sigma}\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right)\right. \tag{4.145}$$

$$\left. - e\overrightarrow{\sigma}\,\overrightarrow{\nabla}(A_4) - e^2(A_4)^2\right],$$

onde estamos usando (4.142).

Se definirmos, $P^i = -i\overrightarrow{\nabla}^i$ ($\hbar = 1$), então a Hamiltoniana (4.145) será

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_i - ieA_i)^2 - eB_iS_i + e\mathcal{B}_iS_i - \frac{e^2}{2}\Lambda^2\right];$$

a Lagrangeana correspondente é dada por

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_i)^2 + \frac{i}{2}\psi_i\dot{\psi}_i + eA_i\dot{x}_i + \tag{4.146}$$

$$\frac{ie}{2}B_i\epsilon_{ijk}\psi_j\psi_k - \frac{ie}{2}\mathcal{B}_i\epsilon_{ijk}\psi_j\psi_k - \frac{e^2\Lambda^2}{2},$$

onde o ponto representa uma derivada com respeito à t. Podemos também escrever

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_i)^2 + \frac{i}{2}\psi_i\dot{\psi}_i + eA_i\dot{x}_i, \tag{4.147}$$

$$-eB_iS_i + e\mathcal{B}_iS_i - \frac{e^2\Lambda^2}{2},$$

onde identificamos o spin como no produto abaixo:

$$S_i = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\psi_j\psi_k.$$

O spin (momento angular) é construído a partir de férmions, porem sua natureza é bosônica. De fato, podemos verificar, com a ajuda das relações de comutação canônica para os férmions (Estas serão escritas mais adiante, em 4.150), que a álgebra $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k$ é satisfeita.

4.3 Ação Supersimétrica N=1

Para tornar mais sistemático nossa discussão, passará a ser fixado o supercampo. Nos orientaremos através da idéia de definir um modelo supersimétrico N=1, que seja de certa forma análoga ao modelo apresentado acima, eq.(4.147). Para isto o supercampo deverá carregar os graus de liberdade mínimos. Iniciamos definindo os supercampos na forma

$$\Phi_i(t,\theta) = x_i(t) + i\theta\psi_i(t) \quad \Sigma(t,\theta) = \xi(t) + \theta R(t), \tag{4.148}$$

$$\Lambda(x) = A_4(x) \quad \Lambda(\Phi_s) = \Lambda(x) + i(\partial_j\Lambda(x))\theta\psi_j.$$

O operador de supercarga , a derivada covariante e a hamiltoniana são dados por:

$$Q = \partial_\theta + i\theta\partial_t \quad D = \partial_\theta - i\theta\partial_t \quad H = i\partial_t. \tag{4.149}$$

Então, a Lagrangeana supersimétrica N=1, que gera a Lagrangeana (4.146) pode ser escrita em termos dos supercampos como:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\dot{\Phi}_i D\Phi_i + ie(D\Phi_i)A_i(\Phi) + \frac{1}{2}\Sigma D\Sigma +$$

$$-e\Sigma\Lambda(\Phi) + \frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}\partial_i\Lambda(\Phi)\Phi_j D\Phi_k,$$

onde fixamos $m = 1$.

Os comutadores e anticomutadores para as componentes do supercampo são

$$[\psi_i, \psi_j]_+ = \delta_{ij}, \quad [\xi,\xi]_+ = -2i, \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \tag{4.150}$$

$$[\psi_i, \xi]_+ = 0;$$

os demais comutadores se anulam.

A componente R do campo não possui dinâmica; desta forma, usando a equação de movimento removemos a mesma da Lagrangeana:

$$R = e\Lambda. \tag{4.151}$$

A ação supersimétrica é então:

$$S = \int dt d\theta \mathcal{L}$$

Temos usado a Lagrangeana supersimétrica em componentes, [87], na seguinte forma,

$$\mathcal{L} = K + \theta L$$

onde definimos K e L nas seguintes formas:

$$K = -\frac{1}{2}\dot{x}_i\psi_i - e\psi_i A^i + \frac{\xi R}{2} - e\xi\Lambda - \frac{e}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_i x_j \psi_k$$

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}\dot{x}_i\dot{x}_i - \frac{1}{2}i\dot{\psi}_i\psi_i + e\dot{x}_i A_i - \frac{ie}{2}F_{ij}\psi_i\psi_j + \\ &+\frac{i}{2}e\xi\dot{\xi} + \frac{R^2}{2} - eR\Lambda + ie\xi\psi_j\mathcal{B}_j + \\ &+\frac{e}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_i x_j\dot{x}_k - \frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_i\psi_j\psi_k - \frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}\psi_r\partial_i\mathcal{B}_r x_j\psi_k \end{aligned} \tag{4.152}$$

Tambem a partir de L em (4.152), nos podemos obter a seguinte Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2}(p^i - eA^i)^2 + \frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}B_k\psi_i\psi_j + \\ &-\frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_i\psi_j\psi_k - \frac{ie}{2}\epsilon_{rji}(\partial_r\mathcal{B}_k)x_j\psi_k\psi_i + ie\mathcal{B}_i\xi\psi_i + \\ &-\frac{e}{2}\epsilon_{jki}\mathcal{B}_j x_k(p_i - eA^i) + \frac{e^2}{8}\epsilon_{jki}\epsilon_{rni}\mathcal{B}_j\mathcal{B}_r x_k x_n + \frac{e^2\Lambda^2}{2}; \end{aligned} \tag{4.153}$$

na equação acima, eliminamos as componentes de campo que não tinham caráter dinâmico.

4.3.1 A Carga Supersimétrica

Atuando o operador de supercarga (4.149) sobre os supercampos (4.148), podemos obter as transformações supersimétricas das componentes de campo; as quais são:

$$\delta\psi^i = \epsilon\dot{x}^i, \quad \delta\xi = -\epsilon R, \quad \delta R = i\epsilon\dot{\xi}, \quad \delta x^i = -i\epsilon\psi^i. \tag{4.154}$$

Partindo das transformações supersimétricas e da Lagrangeana (4.152), podemos calcular a supercarga de forma analítica, usando o teorema de Noether. O operador de carga é pois

$$Q = \psi_i \dot{x}_i + \frac{1}{2}(1-i)\xi R - e\xi\Lambda. \tag{4.155}$$

A álgebra da supercarga é dada por

$$[Q, Q]_+ = 2H$$

onde H é a Hamiltoniana da eq. (4.153).

4.3.2 Equações de Movimento para o Eletromagnetismo Estendido em D=4+1

Iniciamos considerando as seguintes equações de movimento

$\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\beta}\hat{\gamma}}\partial_{\hat{\sigma}}F_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0$ e $\partial_{\hat{\sigma}}F^{\hat{\sigma}\hat{\gamma}} = \rho^{\hat{\gamma}}$; onde $F_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ é o *field strength* definido em (4.142), e $\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ é o tensor de Levi-Civita em 5 dimensões. Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathcal{B}} &= J^5, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathcal{B}} &= 0, \\
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} &= 0, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} &= \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + J^i, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}, \\
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} &= J^0, \\
\overrightarrow{\nabla} \mathcal{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{B}}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.156}$$

Calculamos a força de Lorentz usando o fato de que a Hamiltoniana definida em D=4+1, seja

$$H = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A}\right)^2 + eA^0, \tag{4.157}$$

a força de Lorentz fica pois, como esta escrita no lado direito das equações abaixo:

$$m\frac{\partial^2 x^5}{\partial t^2} = e\overrightarrow{\mathcal{B}}.\overrightarrow{v} + e\mathcal{E}, \tag{4.158}$$

$$m\frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial t^2} = e\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} + e\overrightarrow{\mathcal{B}}\dot{x}_5 + e\overrightarrow{E}.$$

Os campos extras $\mathcal{E}$ e $\overrightarrow{\mathcal{B}}$, que aparecem como produto do Eletromagnetismo em 5D, podem ser interpretados como campos externos extras em 4D. associados a um campo de Kalb-Ramond, por exemplo. De fato, um potencial de gauge 2-formas em 4D produz um escalar e um parceiro vetorial como componentes de seu correspondente *field strength*.

4.4 Modelo com supersimetria-N=2

Analisaremos agora o sistema anterior, porem o descreveremos através de uma supersimetria-N=2, evidentemente nosso objetivo será o de investigar a possibilidade de haver carga central neste modelo. Começamos redefinindo nosso superespaço. As coordenadas do superespaço são (t, θ_1, θ_2) com θ_1 e θ_2 reais, ou $(t, \theta, \bar{\theta})$ com $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ e $\bar{\theta}$ é seu complexo conjugado. $\theta, \bar{\theta}$ são variáveis Grasmannianas complexas.

As transformações de translação

$$\delta t = i\epsilon^*\theta^* + i\epsilon\theta, \quad \delta\theta^* = i\epsilon^* \quad \text{e} \quad \delta\theta = -i\epsilon,$$

define as transformações de supersimetria no superespaço, onde ϵ é um parâmetro Grasmanniano complexo. As representações diferenciais para os operadores de carga são dados abaixo:

$$Q_{\bar{\theta}} = \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t, \qquad Q_\theta = \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t, \tag{4.159}$$

e as derivadas covariante são

$$D_{\bar{\theta}} = \partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t, \qquad D_\theta = \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t. \tag{4.160}$$

Temos então a seguinte álgebra,

$$[Q_{\bar{\theta}}, Q_{\bar{\theta}}]_+ = 0, \qquad [Q_\theta, Q_\theta]_+ = 0, \tag{4.161}$$

$$[Q_\theta, Q_{\bar{\theta}}]_+ = 2i\frac{\partial}{\partial t} = 2H,$$

onde H será identificado com a Hamiltoniana.

Se puder definir uma ação invariante, S, por uma determinada translação no superespaço $(t, \theta, \bar{\theta})$ [90],[99], onde os parâmetros de transformações são parâmetros Grasmannianos, então esta ação S, é dita ter uma supersimetria N=2. Neste caso podemos definir supercampos N=2 como veremos na seqüência.

O supercampo quiral complexo ($\bar{D}\Phi_i = 0$) admite a seguinte expansão em θ

$$\Phi_i = x_i(t) + \theta\psi_i(t) + i\bar{\theta}\theta\dot{x}_i(t). \tag{4.162}$$

ψ_i é uma variável Grasmanniana e x_i é uma variável complexa comutante.

Temos também o supercampo real ($\Sigma = \Sigma^*$),

$$\Sigma = \xi(t) + i\theta\bar{\chi}(t) + i\bar{\theta}\chi(t) + \bar{\theta}\theta R(t), \tag{4.163}$$

onde ξ, R são componentes reais dos campos; χ and χ^* são componentes complexas dos campos; χ é uma variável Grasmanniana e R é uma variável comutativa. Partindo das transformações de supersimetria destes supercampos, as coordenadas componentes [87] podem ser transformadas da seguinte forma:

$$\delta x_i = -i\epsilon\psi_i \quad \delta\psi_i = 2\epsilon^*\dot{x}_i \quad \delta\xi = -\epsilon^*\chi + \epsilon\chi^* \tag{4.164}$$

$$\delta\dot{x}_i = -i\epsilon\dot{\psi}_i \quad \delta\chi^* = -\epsilon^*(R + i\dot{\xi}) \quad \delta\chi = \epsilon(-R + i\dot{\chi})$$

$$\delta R = i\epsilon^*\dot{\chi} + i\epsilon\dot{\chi}^*.$$

Com estes supercampos, podemos definir uma nova ação, similar a anterior pesquisada, porem agora com supersimetria N=2; a mesma tem a forma,

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta}\mathcal{L}, \tag{4.165}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{i}{8}\frac{d\Phi_i}{dt}\Phi_i^* + \frac{i}{8}\Phi_i\frac{d\Phi_i^*}{dt} + \frac{ie}{4}A_i(\Phi)\Phi_i^* - \frac{ie}{4}\Phi_i(A_i(\Phi))^* \\ &-\frac{1}{4}(D_\theta\Sigma)(D_\theta\Sigma)^* + \frac{e\sqrt{2}}{4}\Sigma\Lambda(\Phi_j) + \frac{e\sqrt{2}}{4}(\Lambda(\Phi))^*\Sigma^* \\ &+\frac{ie}{4}\epsilon_{ijk}\Lambda_i(\Phi)\Phi_j\Phi_k^* - \frac{ie}{4}\epsilon_{ijk}\Phi_k\Phi_j^*\Lambda_i(\Phi)^*,\end{aligned} \tag{4.166}$$

onde

$$A_i(\Phi) = A_i(x) + \theta\psi_j\partial_j A_i(x) + i\theta^*\theta\dot{x}_j\partial_j A_i(x),$$

$$\Lambda(\Phi) = \Lambda(x) + \theta\psi_j\partial_j\Lambda(x) + i\theta^*\theta\dot{x}_j\partial_j\Lambda(x),$$

$$\mathcal{B}_i \equiv \Lambda_i \equiv \frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_i} \qquad \Lambda_{ik} \equiv \frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial_k\partial x_i} \qquad A_{ji} \equiv \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_i}.$$

Para calcularmos a Lagrangeana supersimétrica em termos das componentes, começamos por definir:

$$\mathcal{L} = K + \theta V_{\bar{\theta}} + \bar{\theta}V_\theta + \bar{\theta}\theta\widetilde{L}.$$

Integrando a eq. (4.165) em $\bar{\theta}$ e θ, obtemos

$$S = \int dt L, \tag{4.167}$$

onde definimos

$$\widetilde{L} = L + \frac{dY}{dt}, \tag{4.168}$$

O termo Y é um termo de superfície, $\widetilde{L}$ é portanto a derivada total do termo de superfície somado à L, e

$$
\begin{aligned}
V_{\bar{\theta}} = & -\frac{i}{4}\dot{x}_i\psi_i^* - \frac{i}{4}eA_i\psi_i^* + \frac{i}{4}ex_i(\partial_j A_i)^*\psi_j^* + \frac{i}{4}(R\chi + i\dot{\xi}\chi) + \\
& \frac{i}{4}e\sqrt{2}\Lambda\chi - \frac{1}{4}e\sqrt{2}(\partial_i\Lambda)^*\xi\psi_i^* + \frac{i}{4}e\sqrt{2}\Lambda^*\chi - \frac{i}{4}e\epsilon_{ijk}\partial_i\Lambda x_j\psi_k^* \\
& + \frac{i}{4}e\epsilon_{ijk}x_k x_j^*(\partial_i\partial_p\Lambda)^*\psi_p^* + \frac{i}{4}e\epsilon_{ijk}x_k(\partial_i\Lambda)^*\psi_j^*
\end{aligned} \tag{4.169}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\theta} = & \frac{i}{4}x_i^*\dot{\psi}_i - \frac{i}{4}eA_i^*\psi_i + \frac{i}{4}ex_i^*\partial_j A_i\psi_j + \frac{i}{4}(R\chi^* - i\dot{\xi}\chi^*) \\
& + \frac{i}{4}e\sqrt{2}\Lambda^*\chi^* + \frac{i}{4}e\sqrt{2}\Lambda\chi^* - \frac{i}{4}e\epsilon_{ijk}(\partial_i\Lambda)^* x_j^*\psi_k + \\
& \frac{1}{4}e\sqrt{2}\partial_i\Lambda\xi\psi_i + \frac{i}{4}e\epsilon_{ijk}x_k^* x_j\partial_i\partial_p\Lambda\psi_p + \frac{i}{4}e\epsilon_{ijk}x_k^*\partial_i\Lambda\psi_j.
\end{aligned}
$$

A Lagrangeana em termos das coordenadas físicas, podem ser escritas como abaixo:

$$
\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}\dot{x}_i\dot{x}_i^* - \frac{i}{8}\dot{\psi}_i\psi_i^* + \frac{i}{8}\psi_i\dot{\psi}_i^* + \frac{1}{2}e\,A_i\dot{x}_i^* - \frac{i}{4}e\,\partial_j A_i\psi_j\psi_i^* \\
& \frac{1}{2}e\,\dot{x}_i A_i^* + \frac{1}{4}ie\,(\partial_i A_j)^*\psi_j\psi_i^* + \frac{1}{4}i\,\dot{\chi}\chi^* - \frac{1}{4}i\,\chi\dot{\chi}^* \\
& -\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{4}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}e\,\sqrt{2}\,(i\,\xi\dot{x}_i\mathcal{B}_i + i\,\mathcal{B}_i\psi_i\chi + R\Lambda) \\
& + \frac{1}{4}e\,\sqrt{2}\,(\Lambda^* R + i\,(\mathcal{B}_i)^*\psi_i^*\chi^* - i\,(\mathcal{B}_i)^*\dot{x}_i^*\xi) \\
& + \frac{1}{4}e\,\epsilon_{kji}\left(2\mathcal{B}_k x_j\dot{x}_i^* - i\,\mathcal{B}_k\psi_j\psi_i^* - i\,\partial_r\mathcal{B}_k x_j\psi_r\psi_i^*\right) \\
& + \frac{1}{4}e\,\epsilon_{kji}\left(2\dot{x}_i(\mathcal{B}_k)^* x_j^* + i\,(\mathcal{B}_k)^*\psi_i\psi_j^* + i\,(\partial_r\mathcal{B}_k)^* x_j^*\psi_i\psi_r^*\right);
\end{aligned} \tag{4.170}
$$

alem disso, os termos de superfície Y são dados por:

$$
\begin{aligned}
Y = & -\frac{1}{8}x_i\dot{x}_i^* - \frac{1}{8}\dot{x}_i x_i^* - \frac{e}{4}A_i x_i^* - \frac{e}{4}x_i A_i^* \\
& -\frac{e}{4}\Lambda_i x_j x_k^*\epsilon_{ijk} - \frac{e}{4}x_k x_j^*\Lambda^*\epsilon_{ijk}
\end{aligned} \tag{4.171}
$$

4.4.1 Carga Supersimétrica Proveniente da Lagrangeana

Escrevemos a Hamiltoniana na forma:

$$H = \dot{x}_i \Pi_{x^i} + \Pi_{x^i} \dot{x}_i^* + \dot{\psi}_i \Pi_{\psi_i} - \Pi_{\psi_i^*} \dot{\psi}_i^* +$$

$$+\dot{\chi}\Pi_\chi - \Pi_{\chi^*}\dot{\chi}^* + \dot{\xi}\Pi_\xi - L;$$

temos portanto,

$$\begin{aligned} H = &\left(\Pi_{x_i^*} - \frac{eA_i}{2}\right)\left(\Pi_{x_i} - \frac{eA_i^*}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{8} ie\left(\partial_j A_i - (\partial_i A_j)^*\right)\psi_j \psi_i^* + \\ &\frac{i}{4} e\epsilon_{kji}\mathcal{B}_k \psi_j \psi_i^* + \frac{i}{4} e\epsilon_{kji}(\partial_r \mathcal{B}_k)^* x_j^* \psi_r^* \psi_i + \frac{i}{4} e\epsilon_{kji}\mathcal{B}_i \chi \psi_i \\ &e\epsilon_{kji}\left(\Pi_{x_i^*} - \frac{eA_i}{2}\right)\mathcal{B}_k^* x_j^* + \frac{e^2}{4}\epsilon_{kji}\epsilon_{npi}\mathcal{B}_k \mathcal{B}_i^* x_j x_p^* \\ &\frac{i}{2}\sqrt{2}e\xi\mathcal{B}_i^*\left(\Pi_{x_i} - \frac{eA_i^*}{2}\right) + \frac{e^2}{8}\xi^2 \mathcal{B}_i^* \mathcal{B}_i - \frac{\Pi_\xi^2}{2} - \frac{R^2}{8} + C.C., \end{aligned} \tag{4.172}$$

onde obtemos a partir da Lagrangeana (4.170) o momento canônico Π_j.

Usando o teorema de Noether com as transformações supersimétricas, obtemos as cargas abaixo. Desconsideramos aqui os termos de superfície, já que neste ponto não estamos interessados em soluções topológicas. Os termos de superfície serão considerados mais tarde.

$$\begin{aligned} Q_{\bar\theta} = &(\frac{5}{4} i\Pi_{x_i^*} - \frac{3}{8} ieA_i - \frac{5}{16} e\sqrt{2}\xi\Lambda_i^* + \frac{1}{8} iex_j A_{ij} \\ &\frac{1}{8} ie\epsilon_{kij} x_j \Lambda_k^* + \frac{1}{8} ie\epsilon_{kri} x_j x_r \Lambda_{kj}^* + \frac{1}{8} ieA_{ji}^* x_j \\ &-\frac{1}{4} ie\epsilon_{jki} x_k \Lambda_j - \frac{1}{8} ie\epsilon_{jrk}\Lambda_{ji}^* x_r^* x_k + \frac{1}{4} ie\epsilon_{jrk}\Lambda_{ij}^* x_r^* x_k)\psi_i^* \\ &+(2\Pi_\xi + \frac{i}{2} e\sqrt{2}\Lambda^* + \frac{i}{2} e\sqrt{2}\Lambda - \frac{i}{8} e\sqrt{2} x_i \Lambda_i)\chi \end{aligned} \tag{4.173}$$

e

$$Q_\theta = (-\frac{5}{4} i\Pi_{x_i} + \frac{3}{8} ieA_i^* - \frac{5}{16} e\sqrt{2}\xi\Lambda_i - \frac{1}{8} iex_j^* A_{ij}^*$$

$$-\frac{1}{8}ie\epsilon_{kij}x_j^*\Lambda_k - \frac{1}{8}ie\epsilon_{kri}x_j^*x_r^*\Lambda_{kj} - \frac{1}{8}ieA_{ji}x_j^* +$$
$$\frac{1}{4}ie\epsilon_{jki}x_k\Lambda_j + \frac{1}{8}ie\epsilon_{jrk}\Lambda_{ji}x_rx_k^* - \frac{1}{4}ie\epsilon_{jrk}\Lambda_{ij}x_rx_k^*)\psi_i$$
$$+(2\Pi_\xi - \frac{i}{2}e\sqrt{2}\Lambda - \frac{i}{2}e\sqrt{2}\Lambda^* + \frac{i}{8}e\sqrt{2}x_i^*\Lambda_i^*)\chi^*.$$

Podemos verificar que

$$[Q_{\bar{\theta}}, Q_\theta]_+ = 2H_1 \tag{4.174}$$
$$[Q_\theta, Q_\theta]_+ = \frac{5}{32}iex_k^*A_{k[j,i]} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 e\sqrt{2}\xi\Lambda_{[i,j]}$$
$$-\frac{5}{16}ie\Lambda_{[i,k]}x_n^*\epsilon_{kjn} - \frac{5}{16}ie\Lambda_{[k,j]}x_n^*\epsilon_{kin}$$
$$-\frac{5}{32}iex_k^*x_r\epsilon_{nrk}(\Lambda_{nji} - 2\Lambda_{jni} - \Lambda_{nij} + 2\Lambda_{inj})\psi_i\psi_j$$
$$[Q_{\bar{\theta}}, Q_{\bar{\theta}}]_+ = (-\frac{5}{32}iex_kA^*_{k[i,j]} - (\frac{5}{8})^2e\sqrt{2}\xi\Lambda^*_{[j,i]}$$
$$+\frac{5}{16}ie\Lambda^*_{[j,k]}x_n\epsilon_{kin} + \frac{5}{16}ie\Lambda^*_{[k,i]}x_n\epsilon_{kjn} +$$
$$\frac{5}{32}iex_kx_r^*\epsilon_{nrk}(\Lambda^*_{nij} - 2\Lambda^*_{inj} - \Lambda^*_{nji} + 2\Lambda^*_{jni})\psi_j^*\psi_i^*,$$

onde o sub índice $[i,j]$ representa uma anti-sinterização sobre os índices i,j. Se impusermos a álgebra das cargas na forma dada em (4.161), teremos que ter

$$A_{k[j,i]} \equiv 0 \qquad \Lambda_{[i,j]} \equiv 0 \qquad \Lambda_{r[j,i]} \equiv 0 \tag{4.175}$$
$$A^*_{k[j,i]} \equiv 0 \qquad \Lambda^*_{[i,j]} \equiv 0 \qquad \Lambda^*_{r[j,i]} \equiv 0,$$

isto significa que as funções possuem derivadas segundas contínuas. Verificamos então que nesta álgebra de supersimetria N=2 a possibilidade de carga central poderá ocorrer somente se tivermos configurações do potencial com derivadas segundas não contínuas, de forma semelhante ao que ocorre em presença da linha de descontinuidades no monopolo de Dirac.

4.4.2 Cargas Supersimétrica Provenientes da Lagrangeana com Termos de Superfície

Se agora considerarmos o termo de superfície proveniente de Y, teremos a Lagrangeana

$$\widetilde{L} = L + \frac{dY}{dt}.$$

Poderemos agora avaliar as contribuições provenientes destes termos de superfície, soluções topológicas podem agora ser consideradas, as quais poderiam induzir o surgimento de carga central nesta álgebra de supersimetria N=2. A carga supersimétrica fica pois escrita agora na seguinte forma abaixo:

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{\theta}} = (&\frac{4}{3}i\Pi_{x_i^*} - \frac{1}{3}ieA_i - \frac{1}{3}e\sqrt{2}\xi\Lambda_i^* + \frac{1}{3}iex_jA_{ji}\\
&\frac{1}{3}ie\epsilon_{jik}x_k\Lambda_j^* + \frac{1}{3}ie\epsilon_{rjk}x_kx_j^*\Lambda_{ri}^* - \frac{1}{3}ie\epsilon_{jki}x_k\Lambda_j)\psi_i^*\\
&+ (2\Pi_\xi + \frac{i}{2}e\sqrt{2}\Lambda^* + \frac{i}{2}e\sqrt{2}\Lambda)\chi
\end{aligned} \tag{4.176}$$

e

$$\begin{aligned}
Q_\theta = (&-\frac{4}{3}i\Pi_{x_i} + \frac{1}{3}ieA_i^* - \frac{1}{3}e\sqrt{2}\xi\Lambda_i - \frac{1}{3}iex_j^*A_{ji}^*\\
&-\frac{1}{3}ie\epsilon_{jik}x_k^*\Lambda_j - \frac{1}{3}ie\epsilon_{rjk}x_k^*x_j\Lambda_{ri} + \frac{1}{3}ie\epsilon_{jki}x_k^*\Lambda_j^*)\psi_i\\
&(2\Pi_\xi - \frac{i}{2}e\sqrt{2}\Lambda - \frac{i}{2}e\sqrt{2}\Lambda^*)\chi^*
\end{aligned}$$

procedendo ao cálculo da álgebra para estas cargas obtemos:

$$\begin{aligned}
[Q_{\bar{\theta}}, Q_\theta]_+ &= 2\widetilde{H},\\
[Q_\theta, Q_\theta]_+ &= (\frac{4}{9}eix_k^*A_{k[j,i]} + \frac{4}{9}e\sqrt{2}\xi\Lambda_{[i,j]}\\
&+ \frac{4}{9}eix_nx_k^*\epsilon_{rnk}\Lambda_{r[j,i]})\psi_i\psi_j,\\
[Q_{\bar{\theta}}, Q_{\bar{\theta}}]_+ &= (-\frac{4}{9}eix_kA_{k[i,j]}^* + \frac{4}{9}e\sqrt{2}\xi\Lambda_{j,i]}^*\\
&-\frac{4}{9}eix_n^*x_k\epsilon_{rnk}\Lambda_{r'i,j]}^*)\psi_j^*\psi_i^*,
\end{aligned} \tag{4.177}$$

onde a Hamiltoniana $\widetilde{H}$ é a mesma obtida da lagrangeana $\widetilde{L}$ pela transformação de Legendre.

Se impusermos que a álgebra destas cargas seja a mesma considerada em (4.161), teremos que exigir o que se segue:

$$A_{k[j,i]} \equiv 0 \qquad \Lambda_{[i,j]} \equiv 0 \qquad \Lambda_{r[j,i]} \equiv 0 \tag{4.178}$$

$$A^*_{k[j,i]} \equiv 0 \qquad \Lambda^*_{[i,j]} \equiv 0 \qquad \Lambda^*_{r[j,i]} \equiv 0;$$

a álgebra ou melhor as relações de comutação para as coordenadas componentes são dadas por:

$$[x_i, \Pi_{x_k}]_- = i\delta_{ik} \quad [x_i^*, \Pi_{x_k^*}]_- = i\delta_{ik} \quad [\xi, \Pi_\xi]_- = i$$

$$[\psi_i, \psi_k^*]_+ = 8\delta_{ik} \qquad [\chi, \chi^*]_+ = -4, \tag{4.179}$$

$$[\psi_i, \Pi_{\psi_k}]_+ = -i \quad [\psi_i^*, \Pi_{\psi_k^*}]_+ = -i \quad [\chi, \Pi_\chi]_+ = -i$$

$$[\chi^*, \Pi_{\chi^*}]_+ = -i;$$

todas as demais relações se anulam. Esta mesma álgebra para os componentes do supercampo, pode ser obtida pelo procedimento de quantização canônica [97], onde o momento $\widetilde{\Pi}_j$, e proveniente agora da Lagrangeana $\widetilde{L}$.

4.5 Conclusões

Propusemos um sistema em mecânica quântica supersimétrica formado de uma partícula não relativística em um campo externo. Formulamos o problema em 5D, onde a partícula apresenta 4 graus de liberdade fermiônicos e 4 graus de liberdade busônicos. Em dimensões menores que 1+3, não se obtém graus de liberdade suficiente dentro do setor fermiônico. Desta forma não se pôde escrever o modelo em termos de supercampos.

Partindo de (1+4)D, acabamos por arrastar outros campos quando reduzimos para (1+3): $\mathcal{E}$ e $\overrightarrow{B}$ podendo ser tratados como campos (field-strengths) externos associados a um campo de gauge tipo Kalb-Ramond.

Notamos que, embora as cargas da supersimetria N=2 eram alteradas devido à inserção de termos de superfície na Lagrangeana, o mesmo não ocorria com a álgebra desta supersimetria. Em outras palavras, os termos de superfície não induzem uma carga central neste modelo, exceto no caso em que as derivadas não comutem quando aplicadas sobre A^μ e Λ, ou, em outras palavras, quando existir uma corda de descontinuidades semelhante à de Dirac.

Aqui, estabelecemos um modelo eletromagnético estendido para analisarmos como cargas centrais poderiam aparecer em um sistema formado por uma partícula de spin $\frac{1}{2}$sobre a ação de um campo eletromagnético. Posteriormente como um possível prosseguimento, tentaremos descrever um sistema turbulento em termos de uma supersimetria N=2-D=2. Este modelo [93], apresenta uma simetria BRS, e será apresentado no capítulo 3. A solução de ínstanton apresentada neste modelo pode induzir uma carga central na álgebra desta supersimetria N=2. Também, a realização de uma supersimetria N=2, deverá assegurar que as funções de correlação sejam bem definidas, a idéia é integrarmos os graus de liberdade fermiônicos no funcional aplicando posteriormente um mapa de Nicolay.

4.A Apêndice - Definição das Matrizes Γ

Apresentamos abaixo as matrizes Γ representando a álgebra de Clifford em (1+4)D:

$$\Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^4 = -i\Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Chapter 5
Conclusões Gerais e Perspectivas

Concluímos este trabalho dando uma síntese global dos resultados obtidos e indicamos perspectivas de futuros trabalhos. Para conclusões mais detalhadas, sugerimos ao leitor que proceda à leitura da respectiva conclusão parcial que se encontra ao final de cada capítulo desta tese.

No primeiro capítulo, usando um modelo com supercampos quirais, fomos capazes de apresentar a forma como a quebra de supersimetria se apresenta na ação escrita na proposta de supercampos, e restringindo este modelo ao caso do modelo-sigma não-linear supersimétrico; porém, agora, na presença de um campo eletromagnético, vimos que durante o processo de quantização, ambigüidades surgiam em determinados operadores devido ao ordenamento dos campos componentes, tais ambigüidades são parametrizadas por um único parâmetro, mostramos que tal parâmetro pode ser bem definido no caso em que existe quebra da supersimetria, através de uma medida experimental do valor esperado no vácuo de $\dot{x}$, com isto eliminamos a ambigüidade do formalismo ou melhor no procedimento da quantização deste modelo.

No segundo capítulo, usando idéias similares às da supersimetria em processos estocástico fomos capazes de calcular correções para a fdp. No terceiro capítulo, usando invariância de forma verificamos a estabilidade de soluções solitônicas. Finalmente no quarto e último capítulo verificamos que no sistema com uma partícula carregada e massa m em um campo eletromagnético externo pode ser escrito em termos de uma supersimetria N=2, sabe-se que neste caso produzimos o valor correto para μ ou seja $\mu = \mu_B$. Verificamos que a carga central pode surgir apenas quando tivermos uma espécie de string de Dirac, ou seja quando as derivadas primeiras das configurações dos campos não forem continuas.

Uma extensão natural desta tese é proveniente do Capítulo I, onde o resultado ali obtido, ou seja, representação explicita na ação da quebra da supersimetria na proposta de supercampos, pode ser usado para calcularmos de modo algébrico os superpropagadores naquele modelo. Outra continuação natural vem do modelo do capítulo II, por apresentar a possibilidade de uma interessante aplicação da Supersimetria em Mecânica Quântica, já que a supersimetrisação do Lagrangeano ai envolvido, assegurará que as funções de correlação sejam bem definidas, se no funcional realizarmos uma integração nos graus de liberdade fermiônicos e, então, encontrarmos um mapa de Nicolai.

Referências

Y. A. Gel'fand , E.P. Likhtman, JETP Lett. 13 (1971) 323.

P. Ramond, Phys. Rev. D 3 (1971) 2415.

A. Neveu and J. Schwarz, Nucl. Phys. B 31 (1971) 86.

D. Volkov and V. Akulov, Phys. Lett B 46 (1973) 109.

J. Wess and B. Zumino, Nucl.Phys. B 70 (1974) 39.

M. F. Sohnius, Phys. Rep. 128 (1985) 39.

F. Cooper and B. Freedman, Ann. Phys. 146 (1983) 262.

C. Bender, F. Cooper and A. Das, Phys. Rev. D 28 (1983) 1473.

R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, N.Y., 1965.

J. A. Helayël-Neto, Phys. Lett. 135B, 78 (1984); F. Feruglio, J. A. Helayël-Neto, F. Legovini, Nucl. Phys. B249, 533 (1985).

E. Witten, Nucl. Phys. B185 ,513 (1981); E. Witten, Nucl. Phys. B202, 253 (1982).

R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D13, 3398 (1976).

A. C. Davis, A. J. Macfarlane and J. W. Van Holten, Nucl. Phys. B216, 493 (1983).

V. P. Akulov and A. I. Pashnev, Teor. i Matem. Fiz. 65, 1, 84 (1985).

M. Omote and H. Sato, Prog. Theor. Phys. 47, 1367 (1972).

J. M. Burgers, Adv. Appl. Mech. 1, 171 (1948); The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems, Ridel, Dordrecht (1974).

A. N. Komogorov, C. R. Acad. Sci. URSS 30, 301 (1941); ib 32, 16 (1941).

P. G. Saffman, Stud. Appl. Math. 50, 277 (1971).

A. Chekhlov and V.Yakhot, Phys. Rev. E 52, 5681 (1995).

T. Gotoh and R. Kraichnan, Phys. Fluids 5, 445 (1993).

A.M. Polyakov, Phys. Rev. E 52, 6183 (1995).

V. Gurarie and A. Migdal, Phys. Rev. E 54, 4908 (1996).

J. Bouchad, M. Mèzard and G. Parisi, Phys. Rev. E 52,3656 (1995)

E. Balkovvsky, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. 78, 1452 (1997).

Weinan E, Konstantin Khanin, Alexandre Mazel, and Yakov Sinai, Phys. Rev. Lett. 78, 1904 (1997).

J. Bec and U. Frisch, Phus. Rev. E 61, 1395 (2000).

P.C. Martin, E. Siggia and H. Rose, Phys. Rev. A 8, 423 (1973).

J. Zinn-Justin, Field Theory and Critical Phenomena, Claredon Press Oxford (1989).

J. Cardy, Scaling and Renormalization in Statistical Physics, Cambridge Lecture Notes in Physics 5, Cambridge University Press (1996).

H. W. Wyld, Ann. Phys. 14, 143 (1961).

S. Orzsag, in Simulation and Modeling of Turbulent Flows, edited by Thomas B. Gatski and M. Yousuff Hussaini, Oxford University Press (1996).

R. Tribe and O. Zaboronski, Commun. Math. Phys., 212, 415 (2000).

E. Witten, Nucl. Phys. B185 ,513 (1981); E. Witten, Nucl. Phys. B202, 253 (1982); D. L. Pursey, Phys. Rev. D33, 2267 (1986).

C. Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen. 18, L57 (1985); C. Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen.18, 2917 (1985).

G. S. Dias and J. A. Helayel-Neto, "N=2-Supersymmetric Dynamics of a Spin-$\frac{1}{2}$ Particle in an Extended External Field," hep-th/0204220.

R. de Lima Rodrigues, "The Quantum Mechanics SUSY Algebra: an Introductory Review," hep-th/0205017.

L. E. Gendenshtein, JETP Lett.38, 356 (1983); L. E. Gendenshtcin and I. V. Krive, Sov. Phys. Usp.28

645 (1985); A. Lahiri, P. K. Roy, and B. Bagchi, Int. J. Mod. Phys. A5, 1383 (1990);

F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, 267 (1995).

J. Jayaraman and R. de Lima Rodrigues, J. Phys. A: Math. Gen. 23, 3123 (1990); J. Jayaraman and R. de Lima Rodrigues, Mod. Phys. Lett. A9, 1047 (1994).

J. Jayaraman and R. de Lima Rodrigues, J. Phys. A: Math. Gen. 32, 6643 (1999).

M. S. Plyuschay, Int. J. of Mod. Phys. A15, 3679 (2000).

Q. Wang, U. P. Sukhatme, and W.-Y. Keung, Mod. Phys. Lett. A5, 525 (1990); D. S. Kulshreshtha, J.-Q. Liang, and H. J. W. Müller-Kirsten, Ann. Phys. (N. Y.) 225, 191 (1993).

J. Casahorran and S. Nam, Int. J. Mod. Phys. A6, 5467 (1991); C. V. Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen. 19, 2297 (1986); J. Hruby, ibid. 22, 1807 (1989); L. J. Boya. and J. Casahorran, Ann. Phys. (N. Y.) 196, 361 (1989).

C. N. Kumar, J. Phys. A: Math. Gen. 20, 5397 (1989); W.-Y. Keung, U. P. Sukhatme, Q. Wang and T. D. Imbo, J. Phys. A: Math. Gen. 22, L987 (1989).

R. de Lima Rodrigues, Mod. Phys. Lett A10, 1309 (1995); G. Junker and P. Roy, Ann. Phys. (N. Y.) 256, 302 (1997).

P. Barbosa da Silva Filho, R. de Lima Rodrigues, and A. N. Vaidya, J. Phys. A: Math. Gen. 32, 2395-2402 (1999).

V. Gomes Lima, V. Silva Santos and R. de Lima Rodrigues, Phys. Lett. A298, 91-97 (2002), hep-th/0204175.

R. de Lima Rodrigues and A. N. Vaidya, "SUSY QM for the Two-Component Wave Functions", XVII Brazilian National Meeting on Particles and Fields, pp. 622 (1996).

R. de Lima Rodrigues, P. Barbosa da Silva Filho, and A. N. Vaidya, Phys. Rev. D58, 125023 (1998).

R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett., 42, 200 (1979); R. Rajaraman, Solitons and Instantons, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

J. A. Epichán Carrilo, A. Maia Jr. and V. M. Monstapanenko, Int J. Mod. Phys. A15, 2645 (2000).

J. A. Epichán Carrilo and A. Maia Jr., Int. Ther. Phys. 38, 2183 (1999), hep-th/9905158; J. A. Epichán Carrilo and A. Maia Jr., J. Phys. A33, 2081 (2000).

R. de Lima Rodrigues, V. B. Bezerra and A. N. Vaidya, Phys. Lett 287A, 45 (2001).

I. Voronin, Phys. Rev. A43, 29 (1991).

L. Vestergaard Hau, J. A. Golovchenko and Michael M. Burns, Phys. Rev. Lett. 74, 3138 (1995).

A. Losev, M. Shifman, and A. Vainshtein, Phys. Rev., B522, 327, (2001).

M. Shifman, Phys. Rev. D57, 1258 (1998).

M. Shifman, A. Vainshtein, M. Voloshin, Phys. Rev. D59, 045016 (1999), hep-th/9810068.

M. K. Prasad, C. H. Sommerfied, Phys. Rev. Lett. 35, 760 (1975).

A. Ritz, M. Shifman, and A. Vainshtein, Phys. Rev., D63, 065018 (2001).

C. A. G. Almeida, D. Bazeia and L. Losano, J. Phys. A: Math. Gen. 34, 3351 (2001), and references therein.

D. Walgraef, Spatio-Temporal Path Formalism (New York, Springer-1997).

A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cosmic string other topological deffects (Cambridge, Cambridge University Press-1990).

L. J. Boya and J. Casahorran, Phys. Rev. A39, 4298 (1989).

J. R. Morris, Phys. Rev. D51, 697 (1995); J. R. Morris, Int. J. of Mod. Phys. A13, 1115 (1998).

D. Bazeia and F. A. Brito, Phys. Rev. 62D, 101701 (R)(2000).

S. M. Carroll, S. Hellerman and M. Trodden, Phys. Rev. 61D, 065001 (2000).

D. Bazeia and F. Brito, Phys. Rev. Lett. 84, 1094 (2000).

P. M. Saffin, Phys. Rev. Lett. 83 4249 (1999).

D. Binosi and T. Veldhuis, Phys. Lett., B476, 124 (2000).

M. Shifman and T. ter Veldhuis, Phys. Rev. 62D, 065004 (2000).

E. L. Graça and R. de Lima Rodrigues, Non topological defect associated with two coupled real fields, Preprint CBPF-NF-013/02 (To appear in the Proceedings of the XXII Brazilian National Meeting on Particles and Fields, into the site www.sbf.if.usp.br.), hep-th/0205088.

N. Grahan and R. L. Jaffe, Nucl. Phys. B544, 432 (1999), hep-th/9808140.

H. Nastase, M. Stephanov, P. van Nieuwenhuizen and A. Rebhan, Nucl. Phys. B542, 471-514 (1999).

G. H. Flores and N. F. Svaiter, Phys. Rev. D66, 025031 (2002), hep-th/0107043; G. Flores-Hidalgo, "One Loop Renormalization of Soliton Quantum Mass Corrections in 1+1 Dimensional Scalar Field Theory Models," hep-th/0206047.

A. Rebhan and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B508, 449-467 (1997).

A. Litvintsev and P. van Nieuwenhuizen, "Once more on the BPS bound for the SUSY kink", hep-th/0010051.

A. S. Goldhaber, A. Litvintsev and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D64, 045013 (2001)

R. Wimmer, "Quantization of supersymmetric solitons", hep-th/0109119.

M. Bordag, A. S. Goldhaber, P. van Nieuwenhuizen and D. Vassilevich, "Heat kernels and zeta-function regularization for the mass of the SUSY kink", hep-th/0203066.

A. Rebhan, P. van Nieuwenhuizen and R. Wimmer, New Jour. Phys. 4, 31 (2002).

A. Rebhan, P. van Nieuwenhuizen and R. Wimmer, "The anomaly in the central charge of the supersymmetric kink from dimensional regularization and reduction," hep-th/0207051.

A. Alonso Izquierdo, W. Gárcia Fuertes, M. A. González León and J. Mateos Guilarte, Nucl. Phys. B635, 525 (2002).

A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam and A. Stern, Classical Topology and Quantum States, (World Scientific, Singapore, 1991).

E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 489 (1976).

E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).

P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, McGraw-Hill Book, New York, p. 1650 (1953).

J. A. de Azcárraga, J.M.Izquierdo and A. J. Macfarlane, Nucl.Phys. B604 (2001) 75.

F. de Jonghe, A. J. Macfarlane, K. Peeters, J.W.Van Holten, Phys. Lett. B 359 (1995) 114.

Michael Stone, Nucl. Phys. B 314 (1989) 557.

Mikhael S. Plyushchay, Phys.Lett. B485 (2000) 187; Sergey M. Klishevich and Mikhail S. Plyushchay, Nucl. Phys. B616 (2001) 403, and Conference on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Kiev, Ukraine, 9-15 Jul 2001.

Makoto Sakamoto Phys. Lett. 151 B (1985) 2.

Donald Spector, Phys.Lett. B474 (2000) 331.

L.Moriconi and G. S. Dias, Phys.Lett. A287 (2001) 356.

V.Bergmann, Ann. Math. 59 (1954) 1.

Lene Vestergaard Hau, J. A. Golovchenko, Michael M. Burns, Phys. Rev. Lett. 74 16 (1995) 3138.

Eric D'Hoker, Lue Vinet, Phys. Lett. 137 B 1 2 (1984) 72.

J.Barcelos-Neto, Ashok Das and W.Scherer, Acta Phys. Polonica B 18 4 (1987) 269.

Edward Witten, Nucl. Phys. B 202 (1982) 253.

Ashok Das, Field Theory a path integral approach, World Scientific Publishing - Vol 52 - Chapter 6.

P. Salomonson, J. W. Van Holten, Nucl. Phys. B 196 (1982) 509.

D. Lancaster, IL Nuoevo Cimento 79 A, 1 (1984) 28.

M. Sohnius and K. S. Stelle Nucl. Phys. B 173 (1980) 127.

C V Sukumar J. Phys. A Math Gen. 18 (1985) L57-L61; Ashok Das and Wen-Jui Huang, Phys. Rev. D 41, 10 (1990) 3241.

Appendix A
- Invariância de Forma

Considere o operador hermitiano não negativo dado por $H^+ = A^+A^-$, onde A^+é auto-adjunta de A^- e vice-versa. Se φ é autofunção de H^+ com energia E, então: $H^+\varphi = A^+A^-\varphi = E\varphi$.

Obviamente E é positivo definido pois multiplicando a equação acima por $\varphi^\dagger$ vemos que:

$$0 \leqslant \int \varphi^\dagger H^+\varphi = \int \varphi^\dagger A^- A^-\varphi = \int (A^-\varphi)^\dagger A^-\varphi = \int E\varphi^\dagger\varphi = E,$$

onde estamos supondo $\int \varphi^\dagger\varphi = 1$.

Consideremos agora os seguintes teoremas e resultados:

Multiplicando por A^- a equação $A^+A^-\varphi = E\varphi$ pelo lado esquerdo, têm-se,

$$A^-A^+(A^-\varphi) = E(A^-\varphi),$$

ou seja podemos definir um outro operador por $H^- = A^-A^+$, o qual possui o mesmo autovalor $E \geqslant 0$, e sua autofunção normalizada é dada por: $\phi = E^{-\frac{1}{2}}A^-\varphi$, e de modo análogo obtemos $\varphi = E^{-\frac{1}{2}}A^+\phi$, naturamente $E > 0$, para serem normalizáveis. Resumindo podemos enunciar um teorema cuja prova já está acima.

Teorema 1. Um autovalor de $H^+ = A^+A^-$ é também autovalor de $H^- = A^-A^+$, exceto quando $A^-\varphi = 0 \Longrightarrow H^+\varphi = 0 \Longrightarrow E = 0$. As autofunções normalizadas de $H^+ = A^+A^-$ e $H^- = A^-A^+$ são respectivamente:

$$\varphi = E^{-\frac{1}{2}}A^+\phi \quad \text{e} \quad \phi = E^{-\frac{1}{2}}A^-\varphi.$$

Diretamente do teorema 1 acima é fácil demonstrar o resultado C1 abaixo:

Resultado C1. Dado $A^{\pm}$ e $H^0 = A^+A^- + E_0^0$ com estado fundamental φ_0^0 e energia E_0^0, então podemos definir $H^1 = A \;\; A^+ + E_0^0$ que pode ser escrito em uma forma análogo à $H^1 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + V^1(x)$. H^1 terá o mesmo autovalor que H^0, exceto para o estado fundamental de H_0. Cujas as autofunções para $n > 0$ são:

$$\varphi_{n-1}^1 = (E_n^0 - E_0^0)^{\;\frac{1}{2}} A^- \varphi_n^0, \text{ energia } E_n^0 \, para \;\; H^1,$$

$$\varphi_n^0 = (E_n^0 - E_0^0)^{-\frac{1}{2}} A^+ \varphi_{n-1}^1, \text{ energia } E_n^0 \text{ para } \;\; H^0.$$

Teorema 2. Qualquer hamiltoniana da forma $H = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + V(x)$, que possui o estado fundamental e sua respectiva energia (Ψ_0, E_0), pode ser fatorada como $H = A^+A^- + E_0$ onde $A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pm\partial/\partial x + (1/\Psi_0)(\partial\Psi_0/\partial x)]$. O teorema 2 pode ser provado considerando a identificação

$$H = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + V(x) \equiv A^+A^- + \epsilon$$

definindo $A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pm\partial/\partial x + W(x)]$, onde $W(x)$ é o superpotencial da supersimetria na proposta de Witten. Substituindo esta definição em H acima, temos a seguinte identificação,

$$W^2 + \partial W/\partial x = 2(V - \epsilon),$$

uma solução desta equação é:

$$W = (1/\Psi_0)(\partial\Psi_0/\partial x), \quad \text{onde } \epsilon = E_0$$

onde Ψ_0 é o estado fundamental e sua respectiva energia é E_0.

A.0.1 Hierarquia de Hamiltonianas

Portanto dado qualquer H com a forma $H = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + V(x)$, pelo teorema 2 pode-se retirar a forma equivalente $H \equiv H^0 = A^+A^- + E_0^0$ e a definição de $A^\pm$,e usando o resultado $C1$ geramos $H^1 = A^-A^- + E_0^0$ o qual é isoespectral à $H \equiv H^0$ exceto para o estado fundamental de H^0 que têm energia E_0^0 . Fornecendo as seguintes autofunções: $\varphi_{n-1}^1 = (E_n^0 - E_0^0)^{-\frac{1}{2}} A^- \varphi_n^0$, energia E_n^0 para H^1 e $\varphi_n^0 = (E_n^0 - E_0^0)^{-\frac{1}{2}} A^+ \varphi_{n-1}^1$, energia E_n^0 para H^0, onde $n > 0$.

Como pelo resultado C1, H^1 pode ser escrito em uma forma análoga à $H^1 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + V^1(x)$, sendo assim reiniciamos o algorítmo obtendo uma nova hamiltoniana H^2 e assim por diante.

Vemos pois dos três resultados acima que associado a qualquer hamiltoniana na forma:

$$H^0 = -\frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + V^0(x) \tag{A.1}$$

com o estado fundamental φ_0^0 e energia definida por E_0^0 não necessariamente positiva. Existe uma hierarquia de hamiltonianas quase-isoespectrais, ou seja

$$\begin{array}{llllllll}
E_0^0 & & & & H^0, & & & \\
E_1^0 & = E_0^1 & & & H^0, & H^1, & & \\
E_2^0 & = E_1^1 & = E_0^2 & & H^0, & H^1, & H^2, & \\
E_3^0 & = E_2^1 & = E_1^2 & = E_0^3; & H^0, & H^1, & H^2, & H^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Appendix B
- Transformação Supersimétrica em D=(0+1)

A transformação supersimétrica nada mais é que uma transformação de translação global particular T, em um dado espaço E, chamado superespaço, parametrizado por (θ_i, t) no nosso caso de interesse que é em $D = 0 + 1$; onde θ_i são variáveis de grassmann reais (fermiônicas) e t é uma variável comutante real (bosônica).

O exemplo mais simples, é quando o superespaço é o mais simples; ou seja é parametrizado apenas por (θ, t). Neste caso consideremos uma função qualquer $F(\theta, t)$ definida neste superespaço E. Consideremos uma translação infinitesimal genérica definida neste superespaço, por:

$$\theta' = \theta + \delta\theta \quad \text{e} \quad t' = t + \delta t,$$

transformando $\varphi(\theta, t)$ ganhamos.

$$\delta F(\theta, t) = \delta t \frac{\partial F(\theta, t)}{\partial t} + \delta\theta \frac{\partial F(\theta, t)}{\partial \theta}$$

onde se pode desconsiderar os termos de $ordens \geqslant 2$.

Particularizando esta transformação para uma translação global; o modo mais simples é coloca-la na forma

$$\delta F = \epsilon Q F, \tag{B.1}$$

onde Q é o gerador desta translação e ϵ é o parâmetro global real da transformação, o mesmo é uma variável de grassmann. Obviamente uma definição simples para δt e $\delta\theta$ que permitiria escrever a transformação nesta forma (B.1), é dada por: $\delta\theta = \epsilon$,já para definirmos δt temos que lembrar que t é real e comutante, portanto sua transformação mais simples deverá ser proporcional ao produto de duas variáveis de grassmann, uma é ϵ necessariamente, a outra variável de grassmann disponível é θ, usamos pois o produto $\epsilon\theta$ que nos induz a definir $\delta t = i\epsilon\theta$. Já o número i vêm do fato de t ser real e $\epsilon\theta$ ser puramente complexo $(\epsilon\theta)^* = -\epsilon\theta$; embora ϵ e θ sejam puramente reais por definição. Isto nos conduz à:

$$\delta F(\theta, t) = i\epsilon\theta\frac{\partial F(\theta, t)}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial F(\theta, t)}{\partial\theta} = \epsilon(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t})F(\theta, t),$$

Uma função $F(\theta, t)$ que se transforme como acima é chamada de supercampo, um exemplo é: $F(\theta, t) = A(t) + i\theta\psi(t)$, onde $A(t)$ é real e comutante e $\psi(t)$ é real e anticomutante.

Portanto a transformação de translação global

$$\delta\theta = \epsilon \text{ e } \delta t = -i\epsilon\theta$$

é o que gera neste exemplo simples em D=0+1 o que chamamos de transformação de supersimetria. Que apresenta a forma (B.1): $\delta = \epsilon Q$ ou $T_p = e^{\epsilon Q}$, onde $Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}$ é a representação diferencial do gerador desta transformação de translação particular ou supersimetria e é chamado de carga supersimétrica. Podemos obter a derivada covariante para esta transformação tal qual para qualquer outra transformação R ; ou seja D é definida por: $RDR^{-1} = D'$, onde D' traduz que a forma de D é a mesma de D'. No caso da translação aqui definida,

$$D' = T_p D T_p^{-1} = D + \epsilon[D, Q]_+ \text{ impondo } [D, Q]_+ \equiv 0$$

e resolvendo esta segunda equação (realizando esta álgebra), chegamos à representação da derivada covariante, que têm a forma abaixo,

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta\frac{\partial}{\partial t}.$$

O subgrupo $G_p(1)$ das translações ou supersimetria cujos elementos são $T_p = e^{\epsilon Q}$, possui apenas um gerador, que é chamado de supercarga. Esta simetria é também chamada de supersimetria N=1 (por causa desta única carga). Contudo realizando o produto direto deste subgrupo por ele próprio $G_p(2) = G_p(1) \times G_p(1)$, pode-se obter um subgrupo $G_p(2)$ com dois geradores, obtendo assim uma supersimetria N=2; ou seja,

$$T_p^{(R_1)} = 1^{(R_1)} + \epsilon^{(R_1)} Q^{(R_1)} , \qquad T_p^{(R_2)} = 1^{(R_2)} + \epsilon^{(R_2)} Q^{(R_2)},$$

onde $T_p^{(R_i)}(1)$, $\epsilon^{(R_i)}$ é a representação R_i da transformação e seu respectivo parâmetro associado a esta representação R_i. A transformação da supersimetria N=2 é definida por:

$$T_p^{(R_1 \times R_2)} = T_p^{(R_1)} T_p^{(R_2)} = 1 + \epsilon_1 Q_1 + \epsilon_2 Q_2 = e^{\epsilon_1 Q_1 + \epsilon_2 Q_2}$$

Portanto a supersimetria N=2 têm duas cópias (Q_1, Q_2) da carga Q, ou seja,

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1} + i\theta_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_2} + i\theta_2 \frac{\partial}{\partial t},$$

analogamente temos duas cópias das derivadas covariante:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1} - i\theta_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_2} - i\theta_2 \frac{\partial}{\partial t}.$$

O superespaço onde $T_p^{(R_1 \times R_2)}$ está definido, é parametrizado por (θ_1, θ_2, t). Esta supersimetria N=2 é pois gerado pela translação $T_p^{(R_1 \times R_2)}$ definida neste superespaço, que também pode ser escrita por:

$$\theta_1' = \theta_1 + \delta\theta_1 \ , \ \theta_2' = \theta_2 + \delta\theta_2 \ \text{ e } \ t' = t + \delta t \ ,$$

onde

$$\delta\theta_1 = \epsilon_1 \ , \delta\theta_2 = \epsilon_2 \ \text{ e } \ \delta t = i\epsilon_1\theta_1 + i\epsilon_2\theta_2. \tag{B.2}$$

Aqui o supercampo pode assumir a forma: $\Gamma(\theta_1, \theta_2, t) = B_1(t) + i\theta_1\psi_1(t) + i\theta_2\psi_2(t) + i\theta_1\theta_2 P$ onde $A(t)$ e $P(t)$ são reais e comutantes e $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ são reais e anticomutantes.

Até o momento a translação aqui foi definida em um superespaço onde os parâmetros de grassmann eram reais $\theta^* = \theta$, (em N=1 ou em N=2). Trabalhando agora somente com N=2, vamos realizar uma transformação que nos levará a um superespaço onde os parâmetros de grassmann são complexos $\theta^* = \bar{\theta}$. Esta transformação T é definida por:

$$
\begin{aligned}
\theta &= a(\theta_1 + i\theta_2) \\
\bar{\theta} &= a(\theta_1 - i\theta_2)
\end{aligned} \tag{B.3}
$$

cuja inversa é

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{1}{2a}(\theta + \bar{\theta}) \\
\theta_2 &= \frac{1}{2ia}(\theta - \bar{\theta})
\end{aligned}
$$

onde a é uma constante a ser determinada. Transformando pois Q_1, Q_2, D_1, D_2, por $T : (\theta_1, \theta_2, t) \longrightarrow (\theta, \bar{\theta}, t)$,

$$
\begin{aligned}
Q = \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t, \quad \overline{Q} = \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t, \\
D = \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t, \quad \overline{D} = \partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t,
\end{aligned}
$$

para estas transformações acima usamos $a = 1/\sqrt{2}$. Também usando (B.2) em (B.3) obtemos:

$$
\delta\theta = \epsilon \, , \delta\bar{\theta} = \bar{\epsilon} \text{ e } \delta t = i\epsilon\bar{\theta} + i\bar{\epsilon}\theta \Longleftrightarrow \delta = \bar{\epsilon}(\partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t) + \epsilon(\partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t), \text{onde } \epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2). \tag{B.4}
$$

A álgebra satisfeita por estes objetos está definida no apêndice 1.B. Observemos somente que lá o parâmetro a da transformação $T : (\theta_1, \theta_2, t) \longrightarrow (\theta, \bar{\theta}, t)$ é outro por isto, as definições das derivadas covariantes, e das cargas diferem da definições aqui por um dado parâmetro.

Appendix C
- Cargas Supersimétricas

Consideremos o modelo definido no superespaço parametrizado por $(\theta, \bar{\theta}, t)$,

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left[\frac{1}{2} D\Phi \overline{D}\, \overline{\Phi} + V(\Phi) \right] = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left[\pounds(\Phi) \right] \qquad (C.1)$$

onde Φ é um supercampo definido por

$$\Phi = q(t) + i\theta\bar{\psi}_1(t) + i\bar{\theta}\psi_1(t) + \theta\bar{\theta}N(t) = q(t) + \theta\bar{\psi}(t) - \bar{\theta}\psi(t) + \theta\bar{\theta}N(t) \qquad (C.2)$$

onde $q(t)$ e $N(t)$ são reais e comutantes, e $\psi_1(t) = i\psi(t)$ são complexos e anticomutantes.

Vamos calcular a corrente usando o teorema de Noether, o que temos a fazer é simplesmente integrar $(C.1)$ em $d\theta d\bar{\theta}$ (usando a álgebra do apêndice 1.B) e então realizamos a transformação nos campos componentes, obtendo um primeiro resultado que pode ser escrito como uma derivada total no tempo; a seguir fazemos o processo inverso, realizamos a transformação de supersimetria em $(C.1)$, e depois integramos obtendo um segundo resultado que também pode ser escrito como uma derivada total no tempo, estes dois resultados obviamente são iguais diferindo somente por uma derivada total no tempo do objeto que é a carga.

Como $\pounds(\Phi)$ é uma função do supercampo, abrindo em componentes podemos escrever o mesmo na forma:

$$\pounds(\Phi) = K(q, \psi, \overline{\psi}, N) + i\theta\overline{\Psi}(q, \psi, \overline{\psi}, N) + i\bar{\theta}\Psi(q, \psi, \overline{\psi}, N) + \bar{\theta}\theta L(q, \psi, \overline{\psi}, N)$$

onde $K(q, \psi, \overline{\psi}, N)$, $\Psi(q, \psi, \overline{\psi}, N)$, $L(q, \psi, \overline{\psi}, N)$ são funções das componentes do supercampo Φ. Então integrando $\int dt d\theta d\bar{\theta} \left[\pounds(\Phi) \right] = \int dt L(q, \psi, \overline{\psi}, N)$. Procedendo a transformação teremos:

$$\delta_{susy}\int dtd\theta d\bar{\theta}\left[\pounds(\Phi)\right]=\int dt\delta_{susy}L(q,\psi,\overline{\psi},N)=$$

$$\int dt\frac{\partial}{\partial t}\left[\delta q\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}+\delta\psi\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}+\delta\overline{\psi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\psi}}}+\delta N\frac{\partial L}{\partial\dot{N}}\right], \tag{C.3}$$

onde usamos as equações de Euler-Lagrange para as componentes de Φ. A transformação das coordenadas componentes $q,\psi,\overline{\psi},N$ do supercampo Φ são obtidas de (B.4):

$$\delta_{susy}\Phi=[\bar{\epsilon}(\partial_{\overline{\theta}}+i\theta\partial_t)+\epsilon(\partial_\theta+i\overline{\theta}\partial_t)]\Phi.$$

Realizando agora uma transformação supersimetria em $(C.1)$ ficamos com:

$$\delta_{susy}S=\int dtd\theta d\overline{\theta}\left[\delta_{susy}\pounds(\Phi)\right] \tag{C.4}$$

Usando a algebra do apendice 1.B verificamos que $\delta_{susy}\pounds(\Phi)=[\bar{\epsilon}Q+\epsilon\overline{Q}]\pounds(\Phi)=\overline{\theta}\theta(\epsilon\dot{\overline{\Psi}}+\bar{\epsilon}\dot{\Psi})=\overline{\theta}\theta\frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon\overline{\Psi}+\bar{\epsilon}\Psi\right]$. Substituindo e integrando C.4 teremos:

$$\delta_{susy}S=\int dtd\theta d\overline{\theta}\left[\overline{\theta}\theta\frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon\overline{\Psi}+\bar{\epsilon}\Psi\right]\right]=\int dt\frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon\overline{\Psi}+\bar{\epsilon}\Psi\right] \tag{C.5}$$

Este resultado prova que uma lagrangeana escrita em termos dos supercampos é necessariamente invariante pela supersimetria equivalente já que a transformação levou a um termo de superfície dentro da integral. É obvio pelo processo como foram obtidos, que estes dois resultados (C.5) e (C.3) são iguais a menos de uma derivada total ou seja:

$$\int dt\frac{\partial}{\partial t}\left[\delta q\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}+\delta\psi\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}+\delta\overline{\psi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\psi}}}+\delta N\frac{\partial L}{\partial\dot{N}}-\epsilon\overline{\Psi}-\bar{\epsilon}\Psi\right]=\int dt\frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon\overline{Q}+\bar{\epsilon}Q\right],$$

portanto as duas cargas saem diretamente por:

$$\epsilon\overline{Q}+\bar{\epsilon}Q\equiv\delta q\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}+\delta\psi\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}+\delta\overline{\psi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\psi}}}+\delta N\frac{\partial L}{\partial\dot{N}}-\epsilon\overline{\Psi}-\bar{\epsilon}\Psi.$$

C.0.2 Expansão em Campos Componentes da Lagrangeana e Hamiltoniana de Witten.

Utilizando a álgebra do apendice 1.B em (C.1),

$$S = \int dt d\theta d\overline{\theta} \left[\frac{1}{2} D\Phi \overline{D}\, \overline{\Phi} + V(\Phi) \right]$$

onde $V(\Phi)$ é chamado de superpotencial. Podemos expandir S em termos do supercampo definido em (C.2), resolvendo a integral acima para $d\theta d\overline{\theta}$,

$$S = \lim_{\theta, \overline{\theta} \longrightarrow 0} \int dt D\overline{D} \left[\frac{1}{2} D\Phi \overline{D}\, \overline{\Phi} + V(\Phi) \right]$$

o que nos leva à $S = \int dt L(q, \psi, \overline{\psi}, N)$, após usarmos a algebra do apendice 1.B e proceder o limite chega-se à

$$L(q, \psi, \overline{\psi}, N) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{i}{2}(\dot{\psi}\overline{\psi} - \psi\dot{\overline{\psi}}) - \frac{V'^2(q)}{2} + V''(q)\overline{\psi}\psi.$$

A hamiltoniana pode ser obtida através da transformação de Legendre,

$$H = \frac{1}{2} \left(\dot{q}^2 + V'^2(q) - V''(q)([\overline{\psi}, \psi] + [\overline{\psi}, \psi]_+) \right),$$

a álgebra de grassmann pode ser realizada, usando a representação $\overline{\psi} = \sigma_-$ e $\psi = \sigma_+ \Longrightarrow$ $[\overline{\psi}, \psi]_+ = 0$ e $[\overline{\psi}, \psi] = -\sigma_3$ onde σ_3 é matriz de Pauli, logo

$$H = \frac{1}{2} \left(\dot{q}^2 + V'^2(q) + V''(q)\sigma_3 \right)$$

que é exatamente a hamiltoniana de Witten para mecânica quântica supersimétrica.

"Supersimetria e Sistemas Quânticos"

Gilmar de Souza Dias

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Luca Roberto Augusto Moriconi – Co-Orientador/UFRJ

Nelson Ricardo de Freitas Braga – UFRJ

Marco Aurélio do Rego Monteiro – CBPF

Sebastião Alves Dias – CBPF

Suplente: Sérgio José Barbosa Duarte – CBPF

Rio de Janeiro, 28 de março de 2003