

Tese de  
Doutorado

**Correções Quânticas Para a Massa  
de Sólitons Bi-dimensionais e  
a Abordagem de Liouville-von Neumann  
Para o Processo de Termalização**

**Gabriel Flores Hidalgo**

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

**Rio de Janeiro, Janeiro 2003.**

## Resumo

Nesta tese construímos modelos escalares bi-dimensionais que possuem soluções solitônicas a partir das flutuações de modo zero. Também calculamos as primeiras correções quânticas para a massa dos sólitons nos modelos construídos, usando o método de regularização por "cut-off" no momento energia. Logo consideramos o acoplamento do campo escalar a um campo fermiônico de Majorana e mostramos que a introdução do campo fermiônico permite a existência de sólitons a nível quântico em modelos onde eles não tem sentido se somente fosse considerado o campo bosônico. Finalmente estudamos o processo de termalização em modelos mecânico quânticos mediante a abordagem de Liouville-von Neumann.

## Abstract

We construct bidimensional scalar field theoretical models that possesses solitonic solutions starting from the zero mode fluctuations. Also, we compute the first quantum corrections for the mass of the solitons in the constructed models, by using the sharp energy momentum cut off regularization method. Afterwards we consider the coupling of the scalar field to a Majorana fermionic field and shown that the introduction of the fermionic field allows the existence of solitons at the quantum level in models where they don't make sense if only the bosonic field were considered. Finally, we study the termaliation process in some quantum mechanical models by using the Liouville-von Neumann approach.

*Aos meu país*

## Agradecimentos

- Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao CBPF pela infraestrutura e ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador Nami F. Svaiter pela confiança e independência científica concedida e ao meu co-orientador Rudnei O. Ramos com quem desenvolvi a segunda parte desta tese.
- Ao professor Adolfo Malbouisson.
- Ao Robson Brito Rodrigues pela leitura da tese assim como pelas discussões e referências.
- Também gostaria de agradecer ao Rodolfo Casana pelas inúmeras discussões que tivemos ao longo destes anos sobre diversos tópicos de física teórica.
- À minha família pelo apoio incondicional e finalmete
- Aos amigos Luis Peche, Fernando Vizcarra, Jorge Molina, Raphael de Paola, Moises Rojas, Onofre Rojas e a todos os amigos do CBPF.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos escalares em (1+1) dimensões</b>	<b>4</b>
2.1	Soluções estáticas de energia finita . . . . .	4
2.2	Quantização ao redor das soluções clássicas . . . . .	13
2.3	O significado quântico das soluções clássicas: o método de Kerman-Klein . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Reconstruindo modelos escalares bi-dimensionais a partir das flutuações de modo zero</b>	<b>26</b>
3.1	Introdução . . . . .	26
3.2	O potencial de Rosen-Morse hiperbólico II . . . . .	28
3.2.1	Modelos estáveis . . . . .	31
3.2.2	Modelos instáveis . . . . .	34
3.2.3	O limite $A \rightarrow \infty$ . . . . .	35
3.3	O potencial de Morse: O modelo $\Phi^2 \ln^2(\Phi^2)$ . . . . .	37
3.4	O potencial hiperbólico de Scarf II: O modelo $U(\Phi) = \Phi^2 \cos^2 \ln(\Phi^2)$ . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Renormalização a um loop para as correções quânticas à energia de configurações clássicas</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução . . . . .	45
4.2	Regularização e renormalização de $\Delta S$ . . . . .	48
4.3	Renormalização a um loop para a massa de sólitons em modelos escalares bi-dimensionais . . . . .	52
4.3.1	O caso dos potenciais não reflexivos: $R_L = R_R = 0$ . . . . .	57
4.3.2	O caso dos potenciais reflexivos: $R_{L,R} \neq 0$ . . . . .	62
4.4	O modelo $\Phi^2 \cos^2 \ln(\Phi^2)$ . . . . .	66
<b>5</b>	<b>A não existência de sólitons a nível quântico</b>	<b>70</b>
5.1	Modelos onde $U''[\Phi_c(x)]$ é finito . . . . .	70
5.2	Modelos onde $U''[\Phi_c(x)]$ é infinito . . . . .	78
5.3	Acoplamento com um campo fermiônico . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Termalização</b>	<b>88</b>
6.1	Introdução . . . . .	88
6.2	O oscilador harmônico dependente do tempo . . . . .	91
6.2.1	O oscilador harmônico independente do tempo . . . . .	94
6.2.2	Um oscilador harmônico dependente do tempo exatamente solúvel . . . . .	95

6.3	Não linearidades a nível Gaussiano . . . . .	98
6.4	Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo . . . . .	102
6.4.1	Solução para o caso de interação repentina . . . . .	105
6.4.2	Um "quench" suave exatamente solúvel . . . . .	107
6.5	Um oscilador em interação com $N \rightarrow \infty$ osciladores . . . . .	110
6.6	Campos quânticos em interação linear . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>124</b>
<b>A</b>		<b>127</b>
<b>B</b>		<b>129</b>
<b>C</b>		<b>131</b>
C.1	. . . . .	131
C.2	. . . . .	133

# Lista de Figuras

2.1	(a) $U(\Phi)$ com dois mínimos (vácuos) degenerados e (b) com um mínimo relativo (ou vácuo falso). . . . .	5
3.1	O potencial de Rosen-Morse II hiperbólico. . . . .	28
3.2	O potencial de Morse. . . . .	38
3.3	O potencial $U(\Phi)$ dado pela Eq. (3.62). . . . .	39
3.4	O potencial de Scarf II hiperbólico. . . . .	41
3.5	O potencial $U(\Phi)$ dado pela Eq. (3.78). . . . .	43
4.1	$\frac{\Delta M}{m}$ em função de $B$ . . . . .	69
6.1	A evolução temporal do número de ocupação para $\omega_0\beta = 1$ e para tempos de decaimento (em unidades de $1/\omega_0$ ) $\tau = 1.0, 1.5$ e $2.0$ . . . . .	122
6.2	A evolução temporal do números de ocupação $\bar{n}_1(t)$ (curva tracejada) e $\bar{n}_2(t)$ (curva contínua) para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , $\omega\beta_1 = 1/2$ , $\omega\beta_2 = 1$ e $\lambda = \omega^2/2$ . . . . .	122
6.3	A relação $T/T_f$ em função da temperatura (escalada) $T$ para diferentes valores da constante de acoplamento $g$ . . . . .	123



# Capítulo 1

## Introdução

Os sólitons são soluções das equações clássicas não lineares de movimento, com as seguintes propriedades fundamentais: seus perfis são estáveis, as suas energias associadas são finitas e também tais soluções se comportam como partículas no sentido que as soluções multi-solitônicas se comportam assintoticamente (no tempo) como soluções solitônicas (um sólito)[1]. Também existe uma classe menos restrita de soluções para as equações não lineares que possuem as mesmas propriedades que as soluções solitônicas, exceto a propriedade de manter os seus perfis iniciais após de uma colisão. Neste caso estas soluções são chamadas de ondas solitárias. Em geral os sólitons podem existir em qualquer número de dimensões. No caso dos campos escalares estas soluções só podem existir em (1+1) dimensões [2] e são chamados de "kinks". Estas soluções ligam dois vácuos degenerados da teoria. Uma propriedade importante destas soluções é que eles permanecem estáveis quando as correções quânticas são incorporadas. De outro lado existem soluções que se tornam instáveis quando as correções quânticas são incorporadas. Estas soluções são chamadas de "lumps" ou "bounces" [3].

Em (1+1) dimensões qualquer modelo escalar é renormalizável. Para tornar finito a teoria basta usar uma prescrição de ordenamento normal para os campos. Mas como é bem

conhecido, um dos maiores interesses em modelos de teoria de campo em (1+1) dimensões é a possibilidade de entender os seus aspectos não perturbativos. E esta é a razão pela qual não deve-se considerar modelos arbitrários, dado que nem sempre será possível fazer uma análise não perturbativa. Em particular, o setor solitônico de uma teoria é não perturbativo, isto quer dizer que simplesmente se somando infinitos gráficos de Feynman não será possível se chegar ao conceito de sóliton (estado quântico solitônico). No setor solitônico, existem alguns modelos ( os chamados modelos integráveis) que podem ser resolvidos exatamente, tanto no nível clássico quanto no nível quântico. O exemplo mais conhecido é o modelo de sine-Gordon [4]. De outro lado, o modelo  $\Phi^4$  em (1+1) dimensões admite soluções tipo "kink" no nível clássico e também as primeiras correções quânticas, podem ser calculadas analiticamente. Isto é podemos calcular as correções quânticas a ordem  $\hbar$ . Na primeira parte desta tese vamos estar interessado em modelos deste tipo. No capítulo 2 fazemos uma revisão dos aspectos clássicos e quânticos dos modelos escalares que possuem soluções tipo "kink", seguindo as Refs. [1] e [2]. Em particular para estudar o significado quântico das soluções solitônicas generalizamos o método de Kerman-Klein para modelos bem gerais seguindo as linhas das Refs. [2, 5, 6]. Como veremos no capítulo 2, o modelo  $\Phi^4$  (e também o modelo de sine-Gordon) admite um tratamento semi-clássico devido ao fato de que as flutuações quânticas ao redor dos solitons<sup>1</sup> são descritas por uma equação de Schrödinger unidimensional exatamente solúvel. Usando este fato, no capítulo 3 construímos modelos escalares bi-dimensionais que possuem soluções solitônicas e cujas flutuações quânticas são descritas por equações de Schrödinger exatamente solúveis [7]. Originalmente esta idéia foi proposta nas Refs. [5] e [8] e mais recentemente, usando-se

---

<sup>1</sup>No que segue usamos invariavelmente os termos "kink" e sóliton, como é feito usualmente na comunidade da física de partículas.

a mecânica quântica supersimétrica, nas Refs. [9] e [10] a idéia foi levada adiante. Para outras referencias interessantes ver a Ref. [11].

No capítulo 4 calculamos as primeiras correções quânticas para a massa dos sólitons nos modelos construídos no capítulo 3. O problema do calculo das correções quânticas à massa dos solitons tem sido recentemente reaberto [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], em particular na Ref. [18] os autores concluíram que a regularização pelo método do "cut-off" no momento energia dá resultados incorretos quando aplicado ao calculo das correções quânticas à massa dos solitons. Na Ref. [19] mostramos que isto não é assim. No capítulo 4, apresentamos um estudo mais detalhado que na Ref. [19].

No capítulo 5 estudamos sobre a questão da existencia dos sólitons no nível quântico e mostramos que não todos os modelos contruídos no capítulo 3 fazem sentido no nível quântico. Também mostramos que mediante a introdução de campos fermiônicos acoplados aos campos escalares de uma maneira convenientemente escolhida os sólitons ainda fazem sentido no nível quântico.

Na parte final da tese estudamos o processo de termalização usando o formalismo de Liouville-von Newmann. Esta parte da tese esta baseada na Ref. [20]. Embora a situação física do assunto seja distante à da primeira parte, alguns aspectos tecnicos são comuns a ambos. Nesta tese usamos unidades  $\hbar = c = K_B = 1$

# Capítulo 2

## Modelos escalares em (1+1) dimensões

### 2.1 Soluções estáticas de energia finita

A densidade Lagrangeana associada a um campo escalar  $\Phi(x, t)$  pode ser escrita como <sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi) , \quad (2.1)$$

onde vamos supor que  $U(\Phi)$  tem pelo menos dois mínimos absolutos degenerados, como mostrado na Fig. 2.1-a, ou um mínimo relativo, Fig. 2.1-b. Por simplicidade vamos supor que nestes mínimos  $U(\Phi)$  é zero <sup>2</sup>.

A equação de movimento para o campo  $\Phi$  obtida a partir da Eq. (2.1) é dada por

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U'(\Phi) \right] \Phi(x, t) = 0 , \quad (2.2)$$

onde  $U'(\Phi) = dU(\Phi)/d\Phi$ . Em primeiro lugar vamos analisar as soluções estáticas da Eq. (2.2) que possuem energia finita. Nas seções seguintes estudaremos o significado quântico destas soluções.

---

<sup>1</sup>Como foi dito na seção anterior nesta tese só vamos considerar modelos escalares em (1+1) dimensões espaço-temporais.

<sup>2</sup>Quando esta condição não for satisfeita pode-se simplesmente transladar  $U(\Phi)$  de tal forma a satisfazer tal condição.

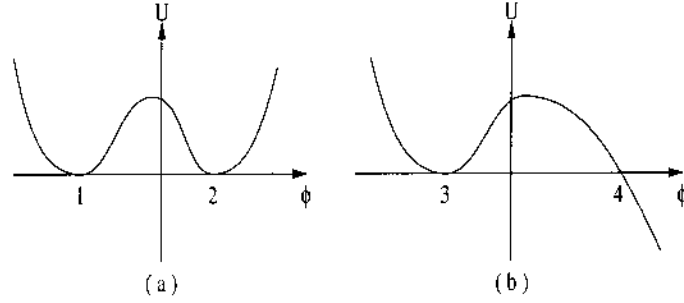


Figura 2.1: (a)  $U(\Phi)$  com dois mínimos (vácuos) degenerados e (b) com um mínimo relativo (ou vácuo falso).

No caso de configurações estáticas a Eq. (2.2) se reduz a

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = U'(\Phi). \quad (2.3)$$

Neste caso a energia é dada simplesmente por

$$H[\Phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + U(\Phi) \right]. \quad (2.4)$$

Estamos interessados em soluções da Eq. (2.3) que possuam energia finita. A Eq. (2.3) pode ser facilmente integrada. Já que estamos interessados em soluções de energia finita, vamos fazer uso da seguinte analogia para encontrarmos tais soluções. Se  $\Phi$  for interpretado como uma variável de posição e  $x$  como uma variável temporal, é fácil concluir que a Eq. (2.3) é a equação de movimento de uma partícula de massa unitária num potencial conservativo  $-U(\Phi)$ . Desta forma, para estudarmos as soluções da Eq. (2.3) basta analisarmos as possíveis trajetórias fazendo uma analogia com a descrição mecânico-clássica do movimento de uma partícula pontual. Para obtermos a energia da configuração estática devemos integrar a variável espacial  $x$  desde  $-\infty$  até  $\infty$ . Desta forma para que a solução possua energia finita ela deve se manter finita para todo  $x$ . Na analogia anteriormente citada temos que a trajetória deve se manter confinada entre dois valores finitos da posição  $\Phi$ . No caso da densidade de potencial mostrada na Fig. 2.1-a as trajetórias que

satisfazem esta condição são aquelas que se encontram confinadas no poço entre os pontos 1 e 2 [lembre que falamos do poço já que devemos pensar no potencial invertido  $-U(\Phi)$ ]. No caso da densidade de potencial mostrada na Fig. 2.1-b esta condição se cumpre para aquelas trajetórias que ficam confinadas no poço entre os pontos 3 e 4. Em geral estas trajetórias oscilam entre dois valores finitos de  $\Phi$ . Mas como o sistema é conservativo as trajetórias oscilam com a mesma amplitude indefinidamente no "tempo" (representado aqui por  $x$ ). Desta forma ao integrarmos estas soluções em todo  $x$  obteremos uma quantidade infinita. Entretanto existe uma solução que não oscila. Esta solução é aquela que descreve o movimento exatamente entre os pontos 1 e 2 no caso da Fig. 2.1-a ou entre os pontos 3 e 4 no caso da Fig. 2.1-b, isto é, a trajetória de energia zero na analogia da mecânica de uma partícula. No caso da densidade de potencial mostrada na Fig. 2.1-a por exemplo, a solução toma o seu valor no ponto 1 (ou 2) em  $x = -\infty$  e o seu valor no ponto 2 (ou 1) em  $x = \infty$  onde fica em repouso. No caso da densidade de potencial mostrada na Fig. 2.1-b, a solução de energia finita toma o seu valor no ponto 3 em  $x = -\infty$  depois se desloca até atingir o ponto 4 onde anula a sua velocidade e depois volta em direção do ponto 3 onde chega no "tempo"  $x = \infty$  e fica em repouso. Para provarmos que estas soluções são de energia finita só temos que provar que as trajetórias de energia zero não oscilam. Desta forma é preciso provar que todas as derivadas de  $\Phi$  com respeito a  $x$  (ou seja a velocidade, a aceleração, etc) se anulam nos pontos 1 e 2 ou 3 nas Figs. 2.1-a-b. Já que estas trajetórias (soluções) são de energia zero, da Eq. (2.3) obtemos

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dx} \Phi(x) \right]^2 = U(\Phi), \quad (2.5)$$

uma equação que é conhecida como a condição de Bogomol'nyi [21]. Já que nos pontos 1, 2, e 3 a densidade de potencial é zero, da Eq. (2.5), concluímos que nesses pontos

$\Phi' = 0$ . Nesses pontos também temos que  $U'(\Phi) = 0$  e da Eq. (2.3) concluímos que  $\Phi'' = 0$ . Derivando a Eq. (2.3) com relação a  $x$  obtemos,

$$\Phi'''(x) = U''(\Phi)\Phi'(x) , \quad (2.6)$$

de onde concluímos que  $\Phi''' = 0$  nos pontos 1, 2 e 3 já que nestes pontos  $\Phi' = 0$ . Derivando a Eq. (2.6) com relação a  $x$  obtemos

$$\Phi''''(x) = U'''(\Phi)[\Phi'(x)]^2 + U''(\Phi)\Phi''(x) , \quad (2.7)$$

de onde concluímos que  $\Phi'''' = 0$  nos pontos 1, 2 e 3 já que nestes pontos  $\Phi' = \Phi'' = 0$ . Derivando a Eq. (2.7) com relação a  $x$  provaremos que a quinta derivada de  $\Phi$  se anula nos pontos 1, 2 e 3, derivando a equação resultante provaremos que a sexta derivada se anula nesses pontos e assim sucessivamente provaremos que todas as derivadas de  $\Phi$  se anulam nos pontos 1, 2 e 3.

Integrando a Eq. (2.5) obtemos as soluções de energia finita  $\Phi_c$ ,

$$x - x_0 = \int^{\Phi_c} \frac{d\Phi}{\sqrt{2U(\Phi)}} , \quad (2.8)$$

onde  $x_0$  é uma constante de integração.

Agora vamos estudar a estabilidade clássica das soluções que acabamos de discutir. Para estudarmos a estabilidade das soluções introduzimos uma pequena perturbação dependente do tempo sobre as soluções que acabamos de considerar e depois estudamos a evolução temporal destas perturbações. Podemos escrever por exemplo

$$\Phi(x, t) = \Phi_c(x) + \eta(x, t) , \quad (2.9)$$

onde supomos que inicialmente num determinado instante  $t$  a perturbação  $\eta$  é pequena. Se a solução  $\Phi_c$  for estável esta perturbação inicial se manterá pequena em tempos posteriores, mas se a solução for instável a perturbação inicial, por menor que seja crescerá

indefinidamente no tempo. Vamos expandir  $\eta$  utilizando uma base completa  $\{\phi_n(x)\}$ .

Desta forma temos

$$\eta(x, t) = \sum_n \phi_n(x) e^{i\omega_n t}. \quad (2.10)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.2) linearizando em  $\eta$  e usando as Eqs. (2.3) e (2.10), obtemos

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\Phi_c(x)] \right] \phi_n(x) = \omega_n^2 \phi_n(x). \quad (2.11)$$

Segundo a nossa definição de estabilidade, teremos estabilidade quando todos os  $\omega_n$  forem reais, ou seja devemos ter  $\omega_n^2 \leq 0$ . Desta forma pequenas perturbações ao redor de  $\Phi_c$  só oscilarão no tempo, caso contrário eles crescerão exponencialmente no tempo.

Para estudarmos a estabilidade das soluções devemos estudar as soluções da equação de Schrödinger (2.11). No caso de modelos de teoria de campo com densidade de potencial que possuem pelo menos dois vácuos degenerados triviais, como mostrado na Fig. 2.1-a, é fácil mostrar que as soluções estáticas que unem os mínimos degenerados (vácuos triviais) são estáveis. Por outro lado, para modelos que possuem um mínimo relativo (vácuo falso) as soluções são instáveis. Para provar estas afirmações note que fazendo  $\Phi = \Phi_c$ , a Eq. (2.6) pode ser escrita como

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\Phi_c(x)] \right] \Phi_c'(x) = 0, \quad (2.12)$$

o qual prova que  $\Phi_c'$  é auto-função da Eq. (2.11) com autovalor  $\omega^2 = 0$ ,

$$\phi(x) = \frac{d}{dx} \Phi_c(x). \quad (2.13)$$

A auto-função  $\phi(x)$  de autovalor zero, dada pela Eq. (2.13), é de norma finita toda vez que a energia é finita<sup>3</sup>. Agora vamos ver em que casos este autovalor é o menor autovalor.

<sup>3</sup>Substituindo a Eq. (2.5) na Eq. (2.4) obtemos  $H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{d}{dx} \Phi_c(x) \right]^2$



Na analogia de partícula mecânica, que usamos para estudar as soluções de energia finita da Eq. (2.3),  $\Phi'_c$  é a velocidade da partícula. No caso do modelo mostrado na Fig. 2.1-a  $\Phi'_c$ , a velocidade, é zero somente nos pontos 1 e 2. Mas estes pontos são atingidos somente em  $x = \pm\infty$ , isto é, a auto-função  $\Phi'_c$  não tem nodos e isto prova que  $\omega^2 = 0$  é o menor autovalor. Neste caso todos os  $\omega_n$  são reais e portanto as soluções estáticas de energia finita são estáveis. Por outro lado no modelo mostrado na Fig. 2.1-b, a velocidade é zero no ponto 3 (o qual é atingido pela "partícula" em  $x = \pm\infty$ ) e no ponto 4 (o qual é atingido num "tempo"  $x$  finito). Isto quer dizer que a auto-função  $\Phi'_c$  tem um nodo e então  $\omega^2 = 0$  não é o menor autovalor. Existe uma outra solução sem nodos e com autovalor  $\omega^2 < 0$ . Neste caso as soluções de energia finita são instáveis.

A estabilidade ou instabilidade clássica das soluções de energia finita se traduz ao nível quântico no que diz respeito à estabilidade dos estados quânticos correspondentes a estas soluções clássicas. No caso de modelos como o mostrado na Fig. 2.1-b pode-se ver que o vácuo trivial localizado no ponto 3 é estável ao nível clássico, mas ele torna-se instável ao nível quântico. Um estado quântico inicialmente preparado ao redor do ponto 3 torna-se instável, decaindo por tunelamento através da barreira da densidade de potencial de forma semelhante ao que acontece na mecânica quântica [22] [23]. É por este motivo que o ponto 3 é chamado de vácuo falso.

Uma outra forma de entender o aparecimento da solução de modo zero é através da invariância translacional. Da Eq. (2.8) pode-se ver que se  $\Phi_c(x)$  é uma solução então  $\Phi_c(x+x_0)$  também é uma outra solução de energia finita. Para  $x_0$  suficientemente pequeno podemos fazer a seguinte expansão,

$$\Phi_c(x+x_0) = \Phi_c(x) + x_0\Phi'_c(x) , \quad (2.14)$$

e das Eqs. (2.9)-(2.10) podemos concluir que  $\Phi'_c$  é uma pequena perturbação (flutuação) de frequência zero.

Estes resultados são válidos em (1+1) dimensões. No caso de dimensões maiores é fácil provar que modelos de teoria de campo que contêm somente campos escalares não possuem soluções estáticas estáveis de energia finita. Em dimensões maiores (denotemos por  $d = (D - 1)$  o número de dimensões espaciais) a equação de estabilidade é uma equação de Schrödinger em  $d$  dimensões. Neste caso existem agora  $d$  auto-funções  $\partial_i \Phi(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , com autovalor  $\omega^2 = 0$ . Quer dizer, a solução  $\omega^2 = 0$  é  $d$  vezes degenerado e portanto não é o menor autovalor. Neste caso existe pelo menos um autovalor  $\omega^2 < 0$ . Então as soluções estáticas de energia finita em dimensões maiores são instáveis.

Antes de passarmos a analisar as propriedades quânticas das soluções consideradas nesta seção vamos mostrar as soluções assim como as equações de estabilidade em dois modelos que tem sido considerados amplamente na literatura. Estes modelos são os modelos de sine-Gordon, com densidade de potencial dado por

$$U(\Phi) = \frac{m^4}{\alpha^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\alpha}{m} \Phi \right) \right], \quad (2.15)$$

e o modelo  $\Phi^4$  com densidade de potencial

$$U(\Phi) = \frac{m^4}{32\alpha^2} \left[ 1 - \frac{4\alpha^2}{m^2} \Phi^2 \right]^2. \quad (2.16)$$

Estes modelos possuem as seguintes simetrias discretas:

$$\text{sine - Gordon} : \Phi \rightarrow \pm \Phi + 2\pi n(m/\alpha); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

$$\Phi^4 : \Phi \rightarrow -\Phi. \quad (2.18)$$

Os mínimos destas densidades de potencial  $U'(\Phi_0) = 0$  [note que estes pontos são soluções

constantes da Eq. (2.3)] são

$$\text{sine - Gordon} : \Phi_0 = 2\pi n(m/\alpha), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.19)$$

$$\Phi^4 : \Phi_0 = \frac{m}{2\alpha}, \quad (2.20)$$

os quais mostram que as simetrias descritas pelas Eqs. (2.17)-(2.18) são espontaneamente quebradas pelo estado do vácuo perturbativo. Sendo assim temos que o valor esperado no vácuo do operador de campo  $\hat{\Phi}$  é dado por

$$\text{sine - Gordon} : \langle 0|\hat{\Phi}|0\rangle = 0, \quad (2.21)$$

$$\Phi^4 : \langle 0|\hat{\Phi}|0\rangle = \frac{m}{2\alpha}. \quad (2.22)$$

Fazendo uma expansão de Taylor ao redor dos mínimos (ou vácuos triviais ou perturbativos) na densidade de potencial pode-se ver facilmente que a massa (ao quadrado) das partículas em ambos modelos é igual a  $m^2$ . Substituindo as Eqs. (2.15)-(2.16) na Eq. (2.8) se obtém facilmente para as soluções de energia finita as seguintes expressões:

$$\text{sine - Gordon} : \Phi_c(x) = \pm \frac{4m}{\alpha} \tan^{-1} \exp[\pm m(x - x_0)], \quad (2.23)$$

$$\Phi^4 : \Phi_c(x) = \pm \frac{m}{2\alpha} \tanh \left[ \frac{m}{2} (x - x_0) \right]. \quad (2.24)$$

Substituindo estas equações na Eq. (2.4) obtemos para a energia destas configurações estáticas,

$$\text{sine - Gordon} : H[\Phi_c] = \frac{8m^3}{\alpha^2}, \quad (2.25)$$

$$\Phi^4 : H[\Phi_c] = \frac{m^3}{6\alpha^2}. \quad (2.26)$$

Usando as equações anteriores na Eq. (2.11) obtemos a seguintes equações de estabilidade

$$\text{sine - Gordon} : \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 - \frac{2m^2}{\cosh^2(mx)} \right] \phi_n(x) = \omega_n^2 \phi_n(x), \quad (2.27)$$

$$\Phi^4 : \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 - \frac{3m^2}{2 \cosh^2(mx/2)} \right] \phi_n(x) = \omega_n^2 \phi_n(x). \quad (2.28)$$

Estas equações podem ser resolvidas exatamente. No capítulo seguinte vamos discutir as soluções deste tipo de equações. É importante salientar que estas equações possuem um número finito de soluções discretas e um número infinito de soluções contínuas. No caso do modelo de sine-Gordon, somente existe uma solução discreta, a solução de modo zero  $\Phi'_c$ . No modelo  $\Phi^4$  existem duas soluções discretas. Em ambos casos o espectro contínuo (que denotamos por  $\omega_k^2$ ) começa em  $\omega_k^2 = m^2$ . As soluções contínuas se comportam assintoticamente como soluções livres,  $e^{ikx}$ , sendo que  $\omega_k^2 = m^2 + k^2$ . Então já que as soluções são positivas então as soluções de energia finita dadas pelas Eqs. (2.23)-(2.24) são estáveis. Note que estas soluções são da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ , da mesma forma que as soluções constantes, Eqs. (2.19)-(2.20). Isto quer dizer que estas soluções não poderiam ser obtidos perturbativamente. Também pode-se notar que a densidade de energia destas soluções é localizada ao redor do ponto  $x_0$ . Soluções com densidade de energia localizada são usualmente chamadas de sólitons.

O sólito, ainda que sendo solução de uma equação clássica de campo, se assemelha muito a uma partícula. Tem densidade de energia localizada em torno de um ponto, a sua energia é finita e é estável. Também pelo fato da Eq. (2.2) ser invariante por transformações de Lorentz, ao obtermos a solução estática, podemos obter a solução dependente do tempo simplesmente fazendo um "boost", isto é, se  $\Phi_c(x)$  é uma solução estática de energia finita, então a solução de energia finita dependente do tempo é  $\Phi_c(x - vt/\sqrt{1-v^2})$ , onde  $v$  é tal que  $|v| < 1$ . Então o sólito pode-se deslocar no espaço. Neste caso é fácil mostrar que a energia satisfaz a seguinte relação

$$H[\Phi_c(x, t)] = \frac{H[\Phi_c(x)]}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (2.29)$$

a qual sugere interpretar a energia da configuração estática como sendo a massa do sólito.

## 2.2 Quantização ao redor das soluções clássicas

Nesta seção vamos quantizar os modelos escalares com densidade Lagrangeana descrita pela Eq. (2.1) ao redor das soluções clássicas de energia finita. O método que descreveremos só é válido a ordem  $\hbar$ . Em ordens mais altas aparecem complicações devido a simetria translacional que possuem as soluções clássicas [1]. Este método é o mais simples mas, temos que salientar que a interpretação física dos resultados é obscura. Na seguinte seção usaremos um outro método, o método de Kerman-Klein, relativamente mais complicado mas que nos permitirá uma interpretação física direta dos resultados. Para uma expansão tipo *WKB*, usando-se integrais de trajetória, pode-se consultar as Ref. [24, 25] e para uma expansão canônica em ordens mais altas mediante o uso de coordenadas colectivas pode-se consultar as Refs. [8, 26, 27].

Como na seção anterior, o nosso ponto de partida é a densidade Lagrangiana:

$$L = \int dx \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi) \right]. \quad (2.30)$$

Expandindo  $\Phi$  ao redor da solução clássica  $\Phi_c$  podemos escrever,

$$\Phi(x) = \Phi_c(x) + \eta(x, t), \quad (2.31)$$

e substituindo esta expressão na Eq. (2.30), mantendo termos somente até ordem quadrática em  $\eta$  e fazendo uma integração por partes obtemos,

$$L = L[\Phi_c] + \int dx \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 - \frac{\eta}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\Phi_c] \right) \eta \right]. \quad (2.32)$$

Podemos agora expandir  $\eta$  numa base completa  $\{\phi_n\}$ , com coeficientes  $q_n$  dependentes do tempo,

$$\eta(x, t) = \sum_n q_n(t) \phi_n(x). \quad (2.33)$$

Escolhendo a base completa  $\{\phi_n\}$  como sendo as auto-funções do operador Hermitiano,

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\Phi_c(x)] \right], \quad (2.34)$$

substituindo a Eq. (2.33) na Eq. (2.32) e usando a propriedade de ortonormalidade dos elementos da base  $\{\phi_n\}$  obtemos,

$$L = L[\Phi_c] + \frac{1}{2} \sum_n (\dot{q}_n^2 - \omega_n^2 q_n^2), \quad (2.35)$$

onde  $\omega_n^2$  são os autovalores do operador dado pela Eq. (2.34). Desta forma os elementos da base  $\{\phi_n\}$  são soluções da equação de estabilidade clássica, representadas pela Eq. (2.11). Note que o nosso problema tem se reduzido a um sistema de osciladores harmônicos desacoplados.

Para quantizarmos precisamos do operador momento conjugado do campo  $\Pi$ . Dado que  $U(\Phi)$  não contém derivadas em  $\Phi$ , então o operador momento conjugado do campo é  $\Pi = \dot{\Phi}$ . Desde que  $\Phi_c$  não depende do tempo, da Eq. (2.31) obtemos

$$\Pi(x, t) = \dot{\eta}(x, t). \quad (2.36)$$

Promovendo os campos a operadores de campo, a regra de quantização exige que

$$[\hat{\Phi}(x, t), \hat{\Pi}(y, t)] = i\delta(x - y). \quad (2.37)$$

$$[\hat{\Phi}(x, t), \hat{\Phi}(y, t)] = [\hat{\Pi}(x, t), \hat{\Pi}(y, t)] = 0. \quad (2.38)$$

Ao promover os campos a operadores de campo, das Eqs. (2.31) e (2.36) vemos que os coeficientes dependentes do tempo  $q_n$ , tem que ser promovidos a operadores já que os elementos da base  $\{\phi_n\}$  são quantidades clássicas (ou "c-numbers"). Agora resta saber qual é a álgebra entre os operadores associados a  $q_n$  e  $\dot{q}_n$  compatíveis com as regras de

quantização dadas pelas Eqs. (2.37)-(2.38). Em termos de  $q_n, \dot{q}_n$  a estrutura da Lagrangiana dada pela Eq. (2.35) permite introduzir o momento conjugado  $p_n = \dot{q}_n$ . É imediato provar que a álgebra entre os operadores  $\hat{q}_n$  e  $\hat{p}_n$  compatíveis com as regras de quantização dadas pelas Eqs. (2.37)-(2.38) são,

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = i\delta_{nm} , \quad (2.39)$$

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = [\hat{p}_n, \hat{p}_m] = 0 . \quad (2.40)$$

Na Eq. (2.39)  $\delta_{nm}$  tem que ser substituído por uma distribuição delta de Dirac quando os modos associados aos índices  $n, m$  forem contínuos. Vemos então que o problema é equivalente a um sistema quântico de osciladores harmônicos desacoplados. Mas devemos lembrar que existe um modo zero associado à simetria translacional do sistema. Introduzindo operadores de criação e aniquilação  $\hat{a}_n^\dagger$  e  $\hat{a}_n$  para os modos diferentes de zero, podemos escrever então para o operador Hamiltoniano a seguinte expressão:

$$\hat{H} = H[\Phi_c] + \frac{\hat{p}_0^2}{2} + \sum_n ' \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right) \omega_n , \quad (2.41)$$

onde  $\hat{p}_0$  é o operador de momento associado à  $q_0$  e o apóstrofo no somatório significa que estamos levando em consideração no somatório somente os modos diferentes de zero. A energia do estado fundamental é por exemplo,

$$H = H[\Phi_c] + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n . \quad (2.42)$$

No caso dos modelos cujas soluções clássicas são estáveis, esta quantidade é real e após subtrairmos a energia do ponto zero ela é interpretada como a massa ("bare") do estado quântico correspondente à solução clássica. Como veremos na seção seguinte, este estado quântico tem propriedades de partícula, ele é chamado de estado quântico solitônico. De

outro lado, no caso de modelos cujas soluções estáticas são instáveis, a energia dada pela Eq. (2.42) não é real, já que existe um modo imaginário. Neste caso a Eq. (2.42) não tem uma interpretação física direta mas a parte imaginária sinaliza que o estado quântico correspondente é instável. Este estado quântico é o vácuo falso do qual falamos previamente.

### 2.3 O significado quântico das soluções clássicas: o método de Kerman-Klein

Para analisar as propriedades quânticas das soluções solitônicas, usamos o método de Kerman-Klein [5], [2]. Para tal finalidade vamos postular que:

*i)* Além dos estados perturbativos (que nós chamaremos de estados mesônicos) existem outros estados de partícula, os estados quânticos solitônicos (na literatura estes estados são chamados de estados bariônicos). O estado de um sólton, que denotaremos por  $|E\rangle$  é UM autovalor da energia e do momento,

$$\begin{aligned}\hat{H}|E\rangle &= E|E\rangle, \\ \hat{P}|E\rangle &= P|E\rangle,\end{aligned}\tag{2.43}$$

onde  $E = \sqrt{P^2 + M^2}$  e  $M$  é a massa do estado quântico solitônico.

*ii)* No caso da constante de acoplamento  $\alpha$  ser pequena, o estado quântico solitônico é muito pesado, *i.e.*,  $M$  é da ordem

$$M \approx \mathcal{O}(\alpha^{-2}).\tag{2.44}$$

*iii)* Existem estados compostos por um sólton e vários mésons que denotaremos por,  $|P, k_1, k_2, \dots\rangle$  onde  $P$  é o momento total e  $k_i$  é o momento assintótico do  $i$ -ésimo méson.



iv) O estado quântico solitônico é estável, isto é, elementos de matriz tais como

$$\langle \text{mesons, estado solitônico} | \hat{\Phi} \hat{\Phi} \dots | \text{mesons} \rangle = 0 \quad (2.45)$$

são nulos.

Este setor do espaço de Hilbert é chamado setor solitônico. Vejamos agora sobre a diversidade de estados quânticos solitônicos que podem existir associados às soluções clássicas. Sempre existe uma diversidade correspondente a uma simetria do problema. Por exemplo, temos uma diversidade indexada por  $x_0$  que vem como consequência da invariância translacional. Também podemos ter uma outra diversidade indexada pelo sinal da solução correspondente à simetria de reflexão do campo. No caso do modelo de sine-Gordon temos uma diversidade dos múltiplos ramos do tangente inverso associado à simetria de translação do campo. Estas soluções relacionadas por uma simetria são inconsequentes para distinguir diferentes tipos de estados quânticos solitônicos. Porém, se houverem outras diversidades nas soluções clássicas, então postularemos que existem igual número de estados quânticos solitônicos quantas diversidades de soluções estáticas existirem. Finalmente postulamos que

v) os setores do espaço de Hilbert associados a diferentes estados quânticos solitônicos são independentes. No que se segue vamos nos concentrar num desses estados quânticos solitônicos.

O conjunto de postulados que temos enunciado são suficientes para mostrar auto-consistentemente que

$$\langle P'; k'_1, \dots, k'_n | \hat{\Phi} | P; k_1, \dots, k_m \rangle_C \approx \mathcal{O}(\alpha^{n+m-1}), \quad (2.46)$$

onde o sub-índice "C" denota a parte conectada e  $\hat{\Phi}$  é um operador de campo. Para esta

finalidade usamos a equação de movimento para o operador de campo  $\hat{\Phi}$ ,

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} = -U'(\hat{\Phi}). \quad (2.47)$$

Em primeiro lugar vamos calcular  $f(P', P) = \langle P' | \hat{\Phi} | P \rangle$  a ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ . Em todos os modelos que consideraremos sempre é possível fazer uma expansão de Taylor para  $U(\hat{\Phi})$  ao redor de um dos vácuos triviais obtendo

$$U(\hat{\Phi}) = \sum_{l=2}^{\infty} a_l \alpha^{l-2} (\hat{\Phi} - \Phi_0)^l. \quad (2.48)$$

Na Eq. (2.48)  $\Phi_0$  denota um dos vácuos triviais e os coeficientes  $a_l$  não dependem de  $\alpha$ .

Usando a Eq. (2.48) na Eq. (2.47) temos

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} = - \sum_{l=2}^{\infty} l a_l \alpha^{l-2} (\hat{\Phi} - \Phi_0)^{l-1}. \quad (2.49)$$

Usando as equações de Heisenberg

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} &= i[\hat{H}, \hat{\Phi}] \\ \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} &= -i[\hat{P}, \hat{\Phi}] \end{aligned} \quad (2.50)$$

duas vezes na Eq. (2.49) obtemos

$$\left[ (P - P')^2 - (E - E')^2 \right] f(P', P) = - \sum_{l=2}^{\infty} l a_l \alpha^{l-2} \langle P' | (\hat{\Phi} - \Phi_0)^{l-1} | P \rangle. \quad (2.51)$$

Cada elemento  $f^{l-1}(P', P) = \langle P' | (\hat{\Phi} - \Phi_0)^{l-1} | P \rangle$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} f^{l-1}(P', P) &= \sum_{m_i} \langle P' | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | m_1 \rangle \langle m_1 | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | m_2 \rangle \langle m_2 | \dots \\ &\quad \dots | m_{l-2} \rangle \langle m_{l-2} | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P \rangle, \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde a soma é sobre toda a base completa  $|m_i\rangle$ , isto é, sobre o estado solitônico, o estado sóliton + um meson, o estado sóliton + dois mesons, etc. Na Eq. (2.51) o lado esquerdo

é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ . Por consistência temos que tomar o lado direito da mesma ordem. Para que isto seja possível temos que tomar cada termo  $f^{l-1}(P', P)$  da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-(l-1)})$ . Então na Eq. (2.52) temos que manter só a soma sobre o estado solitônico. Então temos para  $f^{l-1}(P', P)$ :

$$f^{l-1}(P', P) = \int \frac{dP_1}{2\pi} \frac{dP_2}{2\pi} \dots \frac{dP_{l-2}}{2\pi} [f(P', P_1) - 2\pi\Phi_0\delta(P' - P_1)] \\ \times [f(P_1, P_2) - 2\pi\Phi_0\delta(P_1 - P_2)] \dots [f(P_{l-2}, P) - 2\pi\Phi_0\delta(P_{l-2} - P)]. \quad (2.53)$$

Substituindo a Eq. (2.53) na Eq. (2.51) obtemos uma equação integral para  $f(P', P)$ ,

$$[(P - P')^2 - (E - E')^2] f(P', P) = - \sum_{l=2}^{\infty} l a_l \alpha^{l-2} \int \frac{dP_1}{2\pi} \dots \frac{dP_{l-2}}{2\pi} \\ [f(P', P_1) - 2\pi\Phi_0\delta(P' - P_1)] \dots [f(P_{l-2}, P) - 2\pi\Phi_0\delta(P_{l-2} - P)]. \quad (2.54)$$

Para solucionar a Eq. (2.54) notemos que a esta ordem  $(E - E') \approx 0$ . Isto pode ser mostrado usando  $E = \sqrt{P^2 + M^2} \approx M + \frac{P^2}{2M}$  e notando que o segundo termo é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , isto é, a energia é independente do momentum. Isto é compatível com o postulado de que o estado quântico solitônico é muito pesado. Agora observemos que a função  $f(P', P)$  depende sómente da diferença  $(P' - P)$  na ordem mais baixa em  $\alpha$ . Para mostrar isto lembremos que a invariância de Lorentz assegura que  $f$  pode ser sómente uma função dos invariantes de Lorentz  $(P'_\mu - P_\mu)^2$  e  $\epsilon^{\mu\nu} P_\mu P_\nu$ . Na ordem mais baixa  $(P'_\mu - P_\mu)^2 = [E(P') - E(P)]^2 - [P' - P]^2 \approx -[P' - P]^2$ . Também  $\epsilon^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = E(P)P' - E(P')P \approx M[P' - P]$ . Então, na ordem mais baixa  $f(P', P) \approx f(P - P)$ . Usando este fato, a Eq. (2.54) pode ser reduzida a

$$(P - P')^2 f(P', P) = - \sum_{l=2}^{\infty} l a_l \alpha^{l-2} \int \frac{dP_1}{2\pi} \dots \frac{dP_{l-2}}{2\pi} [f(P' - P_1) - 2\pi\Phi_0\delta(P' - P_1)] \dots \\ \dots [f(P_{l-2} - P) - 2\pi\Phi_0\delta(P_{l-2} - P)]. \quad (2.55)$$

Podemos solucionar a Eq. (2.55) usando uma função  $\Phi(x)$ , que tem como transformada de Fourier,

$$f(P' - P) = \int dx \exp[i(P' - P)x] \Phi(x). \quad (2.56)$$

Em termos de  $\Phi(x)$  a Eq. (2.55) é

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) &= \sum_{l=2}^{\infty} l a_l \alpha^{l-2} (\Phi(x) - \Phi_0)^{l-1} \\ &= U'(\Phi). \end{aligned} \quad (2.57)$$

A Eq. (2.57) é a equação clássica de movimento para  $\Phi_c$ . Então a ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ , obtemos que o elemento de matriz do operador de campo entre estados quânticos solitônicos vem dado por

$$\langle P' | \hat{\Phi} | P \rangle = \int dx \exp[i(P' - P)x] \Phi_c(x), \quad (2.58)$$

Como foi visto [Eqs. (2.23) e (2.24)] a solução clássica  $\Phi_c$  é proporcional a  $1/\alpha$  e então verifica-se facilmente que  $\langle P' | \hat{\Phi} | P \rangle$  é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ . Podemos calcular na ordem mais baixa diferente de zero a massa do estado quântico solitônico usando o fato que na ordem mais baixa  $\hat{H} | P \rangle = \sqrt{P^2 + M^2} | P \rangle \approx M | P \rangle$ . O operador de energia é

$$\hat{H} = \int dx \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\Phi} \partial_\mu \hat{\Phi} + U(\hat{\Phi}) \right). \quad (2.59)$$

Substituindo a Eq. (2.48) na Eq. (2.59) obtemos

$$\begin{aligned} \langle P | \hat{H} | P \rangle &= \int dx \left( \frac{1}{2} \langle P | \partial_\mu \hat{\Phi} \partial_\mu \hat{\Phi} | P \rangle + \sum_{l=2}^{\infty} a_l \alpha^{l-2} \langle P | (\hat{\Phi} - \Phi_0)^l | P \rangle \right) \\ &= \int dx \left( \frac{1}{2} \sum_{m_1} \langle P | \partial_\mu \hat{\Phi} | m_1 \rangle \langle m_1 | \partial_\mu \hat{\Phi} | P \rangle + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m_i} a_l \alpha^{l-2} \right. \\ &\quad \left. \langle P | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | m_1 \rangle \langle m_1 | \dots | m_{l-1} \rangle \langle m_{l-1} | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

e sendo que o lado esquerdo da Eq. (2.60) é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-2})$  podemos ver que na soma sobre  $m_i$  temos que manter somente a soma sobre os estados de um sóliton e usando a

Eq. (2.50) no primeiro termo do lado direito da Eq. (2.60) obtemos

$$\begin{aligned} \langle P|\hat{H}|P\rangle &\approx 2\pi\delta(P-P)M \\ &= 2\pi\delta(0)\int dx \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi_c}{dx}\right)^2 + U(\Phi_c) \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Então temos para a massa do estado quântico solitônico, em ordem mais baixa,

$$M = \int dx \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi_c}{dx}\right)^2 + U(\Phi_c) \right], \quad (2.62)$$

isto é, na ordem mais baixa a massa do soliton é igual à energia da configuração clássica estática. Como já foi dito a solução estática  $\Phi_c$  é proporcional a  $1/\alpha$ . Então é fácil ver da Eq. (2.62) que  $M$  é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{-2})$  confirmando o nosso postulado inicial. Para calcularmos  $f(P', P)$  na seguinte ordem de aproximação temos que reter na Eq. (2.52) a soma sobre os estados compostos de um sólon + um meson  $|P, k\rangle$ , então obtemos o próximo termo para  $f^{l-1}(P', P)$ :

$$\begin{aligned} &\int \frac{dP_1}{2\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dP_2}{2\pi} \dots \frac{dP_i}{2\pi} \dots \frac{dP_{l-2}}{2\pi} \langle P' | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P_1; k_1 \rangle \langle P_1; k_1 | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P_2 \rangle \langle P_2 | \dots \\ &\quad | P_i \rangle \langle P_i | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P_{i+1} \rangle \langle P_{i+1} | \dots | P_{l-2} \rangle \langle P_{l-2} | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P \rangle + \dots \\ &\dots + \int \frac{dP_1}{2\pi} \frac{dP_2}{2\pi} \dots \frac{dP_i}{2\pi} \frac{dk_i}{2\pi} \dots \frac{dP_{l-2}}{2\pi} \langle P' | \langle \hat{\Phi} - \Phi_0 | P_1 \rangle \langle P_1 | \langle \hat{\Phi} - \Phi_0 | P_2 \rangle \langle P_2 | \dots \\ &\quad | P_i; k_i \rangle \langle P_i; k_i | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P_{i+1} \rangle \langle P_{i+1} | \dots | P_{l-2} \rangle \langle P_{l-2} | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P \rangle + \dots \\ &\dots + \int \frac{dP_1}{2\pi} \frac{dP_2}{2\pi} \frac{dP_i}{2\pi} \dots \frac{dP_{l-2}}{2\pi} \frac{dk_{l-2}}{2\pi} \langle P' | \langle \hat{\Phi} - \Phi_0 | P_1 \rangle \langle P_1 | \langle \hat{\Phi} - \Phi_0 | P_2 \rangle \langle P_2 | \dots \\ &\quad | P_i \rangle \langle P_i | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P_{i+1} \rangle \langle P_{i+1} | \dots | P_{l-2}; k_{l-2} \rangle \langle P_{l-2}; k_{l-2} | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P \rangle. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Sendo que  $f_k(P_1, P_2) = \langle P_1 | \hat{\Phi} | P_2, k \rangle$  é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^0)$ , então a contribuição para  $f^{l-1}(P', P)$  dada pela Eq. (2.63) é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{3-l})$  e da Eq. (2.51) podemos ver que a expressão (2.63) é uma contribuição para  $f(P', P)$  da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^1)$ . Podemos ver que para calcularmos  $f(P', P)$  na ordem seguinte de aproximação vai ser necessário conhecer

$f_k(P_1, P_2)$  na ordem mais baixa. Então a nossa próxima tarefa vai ser calcular  $f_k(P_1, P_2)$  na ordem mais baixa diferente de zero. Usando as equações (2.49) e (2.50) obtemos

$$\left( (P_2 - P_1)^2 - (E_2 + \omega(k) - E_1)^2 \right) f_k(P_1, P_2) = - \sum_{l=2}^{\infty} l a_l \alpha^{l-2} \langle P_1 | (\hat{\Phi} - \Phi_0)^{l-1} | P_2; k \rangle . \quad (2.64)$$

Podemos escrever  $f_k^{l-1}(P_1, P_2) = \langle P_1 | (\hat{\Phi} - \Phi_0)^{l-1} | P_2; k \rangle$  na mesma forma que na Eq. (2.52),

$$f_k^{l-1}(P_1, P_2) = \sum_{m_i} \langle P_1 | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | m_1 \rangle \langle m_1 | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | m_2 \rangle \langle m_2 | \dots \\ \dots | m_{l-2} \rangle \langle m_{l-2} | (\hat{\Phi} - \Phi_0) | P_2; k \rangle . \quad (2.65)$$

O lado esquerdo da Eq. (2.64) é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^0)$  então  $f_k^{l-1}(P_1, P_2)$  precisa ser da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{2-l})$ . Se retermos na Eq. (2.65) a soma sobre os estados solitônicos pode ser visto que  $f_k^{l-1}(P_1, P_2)$  é da ordem requerida  $\mathcal{O}(\alpha^{2-l})$ . Mas se mantermos na soma sobre  $m_{l-2}$  os estados compostos de um sóliton + um méson (nos outros  $m_i$ 's somamos somente sobre os estados solitônicos) usando

$$\langle P_{l-2}; k_{l-2} | \hat{\Phi} | P_2; k \rangle = 2\pi\delta(k_{l-2} - k) \langle P_{l-2} | \hat{\Phi} | P_2 \rangle + \langle P_{l-2}; k_{l-2} | \hat{\Phi} | P_2; k \rangle_c \quad (2.66)$$

e mantendo somente os termos desconectados podemos ver que também esse termo e da ordem requerida  $\mathcal{O}(\alpha^{2-l})$ . Também podemos manter na soma sobre  $m_{l-2}$  e  $m_{l-3}$  estados compostos de um sóliton + um méson e mantendo como no caso anterior somente os termos desconectados pode-se mostrar que também este termo é da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{2-l})$ . Depois podemos reter na soma sobre  $m_{l-2}$ ,  $m_{l-3}$  e  $m_{l-4}$  estados compostos de um sóliton + um méson, depois na soma sobre  $m_{l-2}$ ,  $m_{l-3}$ ,  $m_{l-4}$  e  $m_{l-5}$  e assim sucessivamente. Todos estes termos são da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{2-l})$ . Vemos que existe um termo com origem na soma sobre estados solitônicos e  $(l-2)$  termos da soma sobre estados compostos de um sóliton + um méson, isto é, temos  $(l-1)$  termos da ordem  $\mathcal{O}(\alpha^{2-l})$ . Nesta ordem de aproximação

ainda  $E = M$ . Introduzindo uma função  $\Phi_k(x)$  através da transformada de Fourier

$$f_k(P_2, P_1) = \int dx \exp[i(P_2 - P_1)x] \Phi_k(x), \quad (2.67)$$

podemos mostrar que os  $(l-1)$  termos contribuem da mesma forma na Eq. (2.64). Então, obteremos a seguinte equação para  $\Phi_k(x)$

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2(k) \right] \Phi_k(x) &= -\sum_{l=2}^{\infty} l(l-1) a_l \alpha^{l-2} [\Phi_c(x) - \Phi_0]^{l-2} \Phi_k(x) \\ &= -U''[\Phi_c(x)] \Phi_k(x), \end{aligned} \quad (2.68)$$

isto é, obtemos uma equação de Schrödinger para  $\Phi_k(x)$

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\Phi_c(x)] \right] \Phi_k(x) = \omega^2(k) \Phi_k(x). \quad (2.69)$$

Em geral a Eq. (2.69) tem autovalores  $\omega^2(k)$ , discretos e contínuos. Os autovalores discretos podem ser interpretados como os estados excitados do estado quântico solitônico. Os autovalores contínuos são dados por  $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$  (onde  $m$  é a massa do meson) e as auto-funções se comportam assintoticamente como  $e^{ikx}$ , isto é, como ondas planas. Isto quer dizer que na ordem de aproximação utilizada o espalhamento dos mésons pelos estados quânticos solitônicos são descritos pelo problema de espalhamento unidimensional dado pela Eq. (2.69). Como sabemos  $d\Phi_c/dx$  é auto-função de (2.69) com autovalor zero. Na Ref. [5] foi mostrado que esta auto-função pode ser desconsiderada da base completa  $\Phi_k(x)$  em uma forma consistente com a invariância de Poincaré e as relações de comutação entre os operadores do campo. A solução de autovalor zero da Eq. (2.69) não tem significado físico, ele da conta (numa ordem de aproximação mais alta) das primeiras correções ao movimento do soliton. Para mostrar estes fatos é necessário escrever  $\Phi_k(x)$  em termos de auto-funções normalizadas  $\phi_k(x)$ , como  $\Phi_k(x) = \phi_k(x)/\sqrt{2\omega(k)}$  e então

teremos para  $f_k(P_2, P_1)$

$$f_k(P_2, P_1) = \int dx \exp[i(P_2 - P_1)x] \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{2\omega(k)}} \quad (2.70)$$

onde agora é excluído o modo zero. Usando a Eq. (2.70) na expressão (2.63) é fácil provar que  $f(P', P)$  é ainda dado pela Eq. (2.56) mas agora com  $\Phi(x)$  dado por

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = U'(\Phi) + \frac{1}{2} G(x, x) U'''(\Phi), \quad (2.71)$$

onde

$$G(x, y) = \sum' \frac{\phi_k^*(x) \phi_k(y)}{2\omega(k)}, \quad (2.72)$$

onde apóstrofo no somatório indica que o modo zero é excluído. Também podemos calcular a massa do estado solitônico na seguinte ordem de aproximação mantendo na Eq. (2.60) a contribuição dos estados compostos por um sólito + um méson, obtendo

$$M = H[\Phi_c] + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n, \quad (2.73)$$

Onde temos trocado a notação  $\omega(k)$  por  $\omega_n$  para evitar confusões posteriores, isto é, reservamos o índice  $k$  para denotar os autovalores contínuos.

Podemos continuar com o processo e incluir correções de ordens mais altas. Assim por exemplo, obteríamos para a massa na seguinte ordem de aproximação [28]

$$\begin{aligned} M = & H[\Phi_c] + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n + \frac{1}{8} \int dx U''''[\Phi_c(x)] G(x, x) G(x, x) \\ & - \frac{1}{2} \int dx dy U''''[\Phi_c(x)] G(x, x) G^2(x, y) G(y, y) U'''[\Phi_c(y)] \\ & - \frac{1}{48} \sum_{lmn} \frac{b_{lmn}[\Phi_c, \phi]}{\omega_l + \omega_m + \omega_n} + \frac{1}{8H[\Phi_c]^2} \int dx \left[ \frac{d^2}{dx^2} \Phi_c(x) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde

$$b_{lmn}[\Phi_c, \phi] = \frac{1}{\omega_l \omega_m \omega_n} \left( \int dx U''''[\Phi_c(x)] \phi_l(x) \phi_m(x) \phi_n(x) \right)^2. \quad (2.75)$$



As correções quânticas para a massa dos sóliton, na ordem dada pela Eq. (2.73) ou na ordem dada pela Eq. (2.74) são divergentes. Assim, a primeira correção quântica à energia dada pelo segundo termo da Eq. (2.73) é geralmente quadraticamente divergente. Mas, como toda medida é feita tomando como zero da energia, a energia do vácuo trivial, devemos definir a massa do sóliton subtraindo a energia de ponto zero do vácuo na ausencia do sóliton. Então redefinimos a massa do sóliton ( a um loop) como sendo

$$M = H[\phi_c] + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0, \quad (2.76)$$

onde  $\omega_k^0$  são as auto-frequências na ausencia do sóliton e que são obtidas a partir da equação de autovalores

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right] \phi_k^0(x) = (\omega_k^0)^2 \phi_k^0(x), \quad (2.77)$$

onde  $m^2 = U''[\Phi_c(-\infty)]$  se  $U''[\Phi_c(-\infty)] \leq U''[\Phi_c(\infty)]$  ou  $m^2 = U''[\Phi_c(\infty)]$  se  $U''[\Phi_c(-\infty)] \geq U''[\Phi_c(\infty)]$ .

# Capítulo 3

## Reconstruindo modelos escalares bi-dimensionais a partir das flutuações de modo zero

### 3.1 Introdução

A equação que descreve a solução estática em (1+1) dimensões é dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi = U'(\Phi). \quad (3.1)$$

Sempre pode ser escolhido o zero da densidade de energia potencial  $U(\Phi)$  tal que as soluções de energia finita podem ser obtidas a partir da integração da Eq. (3.1) com constante de integração igual a zero. Então, integrando a Eq. (3.1) teremos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = U(\Phi), \quad (3.2)$$

uma equação que é conhecida como a condição de Bogomol'nyi [21]. A solução de modo zero das flutuações quânticas ao redor do soliton é proporcional a derivada espacial da solução solitônica,

$$\phi_0(x) \propto \frac{d\Phi_c}{dx}. \quad (3.3)$$

Mostraremos agora que conhecendo-se a solução de modo zero podemos em princípio reconstruir o modelo escalar bi-dimensional. Integrando a Eq. (3.4) obtemos

$$\Phi_c(x) \propto \int^x dy \phi_0(y), \quad (3.4)$$

Se for possível inverter a Eq. (3.4) teremos  $x = x(\Phi_c)$  e substituindo na Eq. (3.2) obteremos

$$U(\Phi_c) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi_c}{dx} \right)^2 \propto \frac{1}{2} \{ \phi_0 [x(\Phi_c)] \}^2, \quad (3.5)$$

e ignorando o sub-índice "c" obtemos novamente o modelo escalar bi-dimensional original. Agora, para reobtermos o modelo escalar bi-dimensional precisamos somente conhecer a solução de modo zero. Note que estamos interessados em reobter modelos escalares a partir de equações de Schrödinger exatamente solúveis pois desta forma garantimos que é possível calcular as correções quânticas. Nas seções seguintes vamos reconstruir modelos escalares bi-dimensionais partindo de equações de Schrödinger com os seguintes potenciais exatamente solúveis [29]:

i) o potencial de Rosen-Morse II hiperbólico,

$$V(x) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{A(A+1)}{\cosh^2(x)} + 2B \tanh(x), \quad B < A^2, \quad (3.6)$$

ii) o potencial de Morse,

$$V(x) = A^2 + B^2 \exp(-2x) - 2B(A + 1/2) \exp(-x) \quad (3.7)$$

iii) e finalmente o potencial de Scarf II hiperbólico,

$$V(x) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 - A)}{\cosh^2(x)} + B(2A + 1) \frac{\tanh(x)}{\cosh(x)}. \quad (3.8)$$

Antes de construirmos os modelos escalares (1+1)-dimensionais vamos apresentar a relação exata que existe entre  $V(x)$  e  $U''[\Phi_c(x)]$  que aparece na Eq. (2.34). Para todos

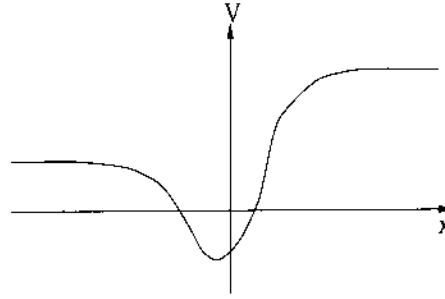


Figura 3.1: O potencial de Rosen-Morse II hiperbólico.

os potenciais acima mencionados o estado fundamental possui autovalor igual a zero [29]. Então, no caso de modelos estáveis teremos  $U''[\Phi_c(x)] = m^2V(mx)$  enquanto que no caso dos modelos instáveis teremos  $U''[\Phi_c(x)] = m^2[V(mx) - \lambda^2]$ , onde  $\lambda^2$  é o autovalor associado ao primeiro estado excitado do potencial  $V(x)$  e  $m$  é um fator de escala. A relação anterior entre  $V(x)$  e  $U''[\Phi_c(x)]$  no caso de modelos instáveis é necessária para que seja satisfeita a condição de que o autovalor do primeiro estado excitado associado a  $U''[\Phi_c(x)]$  seja igual a zero.

## 3.2 O potencial de Rosen-Morse hiperbólico II

O potencial de Rosen-Morse Hiperbólico II é dado por

$$V(x) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{A(A+1)}{\cosh^2(x)} + 2B \tanh(x), \quad |B| < A^2, \quad (3.9)$$

cuja forma é mostrada na Fig. 3.1 para  $B > 0$ . Este potencial admite auto-funções discretas e contínuas. As auto-funções discretas são dadas por [29]

$$\phi_n(x) = (1-y)^{a/2}(1+y)^{b/2} P_n^{(a,b)}(y), \quad (3.10)$$

com autovalores

$$\lambda_n^2 = A^2 - (A-n)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{(A-n)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots < A. \quad (3.11)$$

Na Eq. (3.10) temos  $a = A - n + B/(A - n)$ ,  $b = A - n - B/(A - n)$ ,  $y = \tanh(x)$  e  $P_n^{(a,b)}(y)$  são os polinômios de Jacobi [30]. As auto-funções contínuas, que podem ser obtidas a partir das soluções discretas mediante uma extensão analítica, se comportam assintoticamente como (supondo  $B > 0$ )

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \begin{cases} \left[ \begin{array}{ll} e^{iqx} + R'_L e^{-iqx} & x \rightarrow -\infty \\ T'_L e^{-\kappa x} & x \rightarrow \infty \end{array} \right. & A^2 - 2B < \lambda_q^2 < A^2 + 2B \\ \left[ \begin{array}{ll} e^{iqx} + R_L e^{-iqx} & x \rightarrow -\infty \\ T_L e^{iq+x} & x \rightarrow \infty \end{array} \right. & A^2 + 2B < \lambda_q^2 < \infty \end{cases} \end{cases}, \quad (3.12)$$

onde os autovalores contínuos  $\lambda_q^2$ , são expressos em termos de  $q$ ,  $q_+$  e  $\kappa$  respectivamente por

$$\lambda_q^2 = q^2 + (A^2 - 2B), \quad (3.13)$$

$$\lambda_q^2 = q_+^2 + (A^2 + 2B), \quad (3.14)$$

e

$$\lambda_q^2 = -\kappa^2 + (A^2 + 2B). \quad (3.15)$$

Os coeficientes  $R'_L$ ,  $T'_L$ ,  $R_L$  e  $T_L$  que aparecem na Eq. (3.12) podem ser calculados em forma exata [31]. Em particular os coeficientes de reflexão e transmissão  $R'_L$ ,  $R_L$  e  $T_L$  são dadas por:

$$\underline{B = 0}$$

Neste caso o potencial dado pela Eq. (3.9) é simétrico em  $x$ . Somente o segundo conjunto de soluções na Eq. (3.12) fazem sentido,  $q = q_+$  e  $R_L$  e  $T_L$  são dados por

$$R_L = T_L \frac{i \sin(\pi A)}{\sinh(\pi q)} \quad (3.16)$$

e

$$T_L = \frac{\Gamma(-A - iq)\Gamma(A + 1 - iq)}{\Gamma(-iq)\Gamma(1 - iq)}. \quad (3.17)$$

Note que para valores inteiros de  $A$ , da Eq. (3.16), temos que  $R_L = 0$ . Neste caso o potencial correspondente é chamado de irreflexivo.

$B \neq 0$

Neste caso temos

$$R'_L = \frac{\Gamma(iq)\Gamma(-A + \frac{q_{\pm}}{2} - i\frac{q}{2})\Gamma(A + 1 + \frac{q_{\pm}}{2} - i\frac{q}{2})}{\Gamma(-iq)\Gamma(-A + \frac{q_{\pm}}{2} + i\frac{q}{2})\Gamma(A + 1 + \frac{q_{\pm}}{2} + i\frac{q}{2})}, \quad (3.18)$$

$$R_L = T_L \frac{\Gamma(iq)\Gamma(1 - iq_+)}{\Gamma(-A + i\frac{q}{2} - i\frac{q_{\pm}}{2})\Gamma(A + 1 + i\frac{q}{2} - i\frac{q_{\pm}}{2})} \quad (3.19)$$

e

$$T_L = \frac{\Gamma(-A - i\frac{q}{2} - i\frac{q_{\pm}}{2})\Gamma(A + 1 - i\frac{q}{2} - i\frac{q_{\pm}}{2})}{\Gamma(-iq)\Gamma(1 - iq_+)}. \quad (3.20)$$

Note que as soluções dadas pela Eq. (3.12) são aquelas correspondentes ao espalhamento de ondas planas provenientes desde  $x \rightarrow -\infty$ . Também existem soluções correspondentes ao espalhamento de ondas planas provenientes desde  $x \rightarrow \infty$ , com coeficientes de reflexão e transmissão correspondentes e os quais podem ser obtidos a partir dos coeficientes de reflexão e transmissão dados pelas Eqs. (3.16)-(3.20) usando a propriedade de o Wronskiano ser constante em  $x$ .

Para construir modelos escalares que admitam soluções tipo "kink", isto é, soluções estáveis, a partir do potencial dado pela Eq. (3.9), temos que considerar o estado fundamental, a auto-função sem nodos  $\phi_0(x)$ . De outro lado para construir os modelos de teoria de campo que admitem soluções tipo "lump" temos que considerar a auto-função com um nodo  $\phi_1(x)$ .

### 3.2.1 Modelos estáveis

Para obtermos o kink devemos integrar a auto-função correspondente ao estado fundamental  $\phi_0(x)$ , a qual pode ser obtida da Eq. (3.10) fazendo  $n = 0$ ,

$$\phi_0(x) = (1 - y)^{a/2}(1 + y)^{b/2}. \quad (3.21)$$

Substituindo a Eq. (3.21) na Eq. (3.4) obtemos

$$\Phi_c(x) = \int^{\tanh(x)} \frac{(1 - y)^{a/2}(1 + y)^{b/2}}{1 - y^2} dy, \quad (3.22)$$

e da Eq. (3.5) obtemos para  $U(\Phi_c)$

$$U(\Phi_c) = (1 - y)^a(1 + y)^b. \quad (3.23)$$

Em geral, a integral na Eq. (3.22) não pode ser efetuada analiticamente. Consequentemente, vamos nos restringir aos seguintes casos:

#### $B = 0$

Neste caso  $a = b = A$ , e as Eqs. (3.22)-(3.23) ficam, respectivamente, como

$$\Phi_c(x) = \int^{\tanh(x)} (1 - y^2)^{(A-2)/2} dy, \quad (3.24)$$

$$U(\Phi_c) = (1 - y^2)^A. \quad (3.25)$$

A integral na Eq. (3.24) pode ser resolvida em termos de funções elementares somente para valores inteiros de  $A$ . Para  $A = 1$  obtemos

$$\Phi_c(x) = \sin^{-1}(y). \quad (3.26)$$

Resolvendo a equação anterior para  $y$  em termos de  $\Phi$  e substituindo na Eq. (3.25) obtemos

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\Phi)] \quad (3.27)$$

Desta forma recuperamos o modelo de sine-Gordon. Para  $A = 2$ , obtemos da Eq. (3.24)

$y = \Phi_c(x)$  e usando este resultado na Eq. (3.25) obtemos

$$U(\Phi) = (\Phi^2 - 1)^2, \quad (3.28)$$

recuperando o modelo  $\Phi^4$ . Como mencionamos, a integral dada pela Eq. (3.24) pode ser efetuada para qualquer valor inteiro de  $A$ . Porém, para  $A > 2$  a expressão resultante não vai poder ser invertida, e então não será possível recuperar o modelo de teoria de campo nestes casos. Note que nos modelos de sine-Gordon e  $\Phi^4$ , o potencial que descreve as flutuações quânticas é irreflexivo. No capítulo seguinte ao calcularmos as correções quânticas à massa dos sólitons nestes modelos vamos ver que esta propriedade simplifica enormemente os calculos.

### $B \neq 0$

Neste caso  $a \neq b$ . Podemos re-escrever a Eq. (3.22) como

$$\Phi_c(x) = \int^{\tanh(x)} (1-y)^{(a-2)/2} (1+y)^{(b-2)/2} dy. \quad (3.29)$$

Fazendo  $(a-2)/2 = r$  e  $(b-2)/2 = s$ , temos

$$\Phi_c(x) = \int^{\tanh(x)} (1-y)^r (1+y)^s dy. \quad (3.30)$$

Consideremos o caso no qual  $r = 0$ . Então, da Eq. (3.30) obtemos

$$\Phi_c(x) = [1 + \tanh(x)]^{s+1}, \quad (3.31)$$

o qual pode ser resolvido para  $y = \tanh(x)$ . Substituindo esta solução na Eq. (3.23)

obtemos

$$U(\Phi) = \Phi^2 \left( 2 - \Phi^{1/(s+1)} \right)^2. \quad (3.32)$$



Podemos ver que para valores de  $s$  onde  $1/(s+1)$  é fracionário, teremos em alguns casos (por exemplo quando  $1/(s+1) = 1/2$ ) valores complexos para  $U(\Phi)$ . Para tais valores de  $s$ , poderíamos redefinir  $\Phi^{1/(s+1)}$  como  $(\Phi^2)^{1/2(s+1)}$  e fazer com que  $U(\Phi)$  seja uma função real. Porém, desta forma produziríamos descontinuidades nas derivadas de  $U(\Phi)$ . Se tomarmos  $s$  tal que  $1/(s+1) = 2l$ , com  $l$  inteiro, encontramos

$$U(\Phi) = \Phi^2 (2 - \Phi^{2l})^2, \quad (3.33)$$

*i.e.*, obtemos modelos de teoria de campos polinomiais com três vácuos degenerados. O caso  $l = 1$  é o modelo  $\Phi^6$  com três vácuos degenerados. Este modelo foi considerado na Ref. [32], aonde o autor obteve uma expressão para a massa renormalizada do sóliton. Também gostaríamos de chamar atenção ao fato de que na Ref. [23], os autores obtiveram as mesmas soluções tipo kink associados ao modelo  $\Phi^6$ , estudando a taxa de decaimento do vácuo falso no modelo massivo  $\Phi_{3D}^6$ , na aproximação chamada de *parece fina*. Tomando  $1/(s+1) = (2l+1)$  com  $l$  inteiro encontramos

$$U(\Phi) = \Phi^2 (2 - \Phi^{2l+1})^2, \quad (3.34)$$

*i.e.*, obtemos modelos de teoria de campos polinomiais com dois vácuos degenerados. O caso  $l = 1$  é o modelo  $\Phi^8$  com dois vácuos degenerados, que foi considerado também na Ref. [10].

Se considerarmos o caso no qual  $s = 0$ , obteremos as mesmas configurações que no caso  $r = 0$ . Por outro lado se considerarmos o caso no qual  $r$  e  $s$  são inteiros, poderíamos ainda integrar a Eq. (3.30), porém neste caso não seria possível inverter a expressão resultante.

### 3.2.2 Modelos instáveis

Neste caso as soluções do tipo "bounce" são obtidas integrando o caso  $n = 1$  na Eq.

(3.10),

$$\phi_1(x) = (1 - y)^{a/2}(1 + y)^{b/2} [(a + b + 2)y + a - b] , \quad (3.35)$$

integrando a expressão anterior obtemos

$$\Phi_c(x) = \int^{\tanh(x)} \frac{(1 - y)^{a/2}(1 + y)^{b/2} [(a + b + 2)y + a - b]}{1 - y^2} dy . \quad (3.36)$$

Os modelos instáveis de teoria de campos relativos ao "bounce" dado pela Eq. (3.36) são

dados por

$$U(\Phi) = (1 - y)^a(1 + y)^b [(a + b + 2)y + a - b]^2 . \quad (3.37)$$

Podemos resolver a integral definida pela Eq. (3.36) nos seguintes casos:

$B = 0$

Neste caso  $a = b = A - 1$ . Conseqüentemente da Eq. (3.35) obtemos fazendo  $n = 1$ ,

$$\phi_1(x) = 2A \frac{\sinh(x)}{\cosh^A(x)} , \quad (3.38)$$

e portanto a integral na Eq. (3.36) pode ser facilmente resolvida, obtendo-se

$$\Phi_c(x) = \frac{1}{\cosh^{A+1}(x)} . \quad (3.39)$$

Resolvendo a equação anterior para  $y = \tanh(x)$  e substituindo na Eq. (3.37) obtemos os

modelos de teoria de campos dados pela classe de densidades de potencial

$$U(\Phi) = \Phi^2(1 - \Phi^{2/(A-1)}) . \quad (3.40)$$

Para  $A = 2$  temos o modelo instável  $\Phi^4$ . Este modelo foi considerado na Ref. [33] como

um modelo de teoria de campo para o estudo da cinemática das transições de fase de

primeira ordem. Para  $A = 3$  obtemos o modelo instável  $\Phi^3$ . Este modelo tem sido usado como um laboratório para o cálculo da taxa de decaimento de um sistema que inicialmente se encontra num estado de falso vácuo[34]. Também, recentemente o modelo  $\Phi^3$  tem sido usado como um modelo de campo, para a condensação do "tachyon" em teoria de campos de cordas, exatamente solúvel [35]. Notemos que a solução dada pela Eq. (3.38) só faz sentido quando  $A > 1$ , pois só nesse caso a a função de onda  $\phi_1$  é quadrado integravel. Na Ref. [10], os autores consideraram o caso  $A = 1$  e obtiveram o modelo de Liouville [36]. Mas neste caso é facil mostrar que as soluções clássicas que assintoticamente tendem ao único vácuo assintótico<sup>1</sup> possuem energia infinita, consequentemente tais soluções não são "lumps".

### $B \neq 0$

Neste caso  $a \neq b$  e a integral dada pela Eq. (3.36) pode ser escrita como

$$\Phi_c(x) = (b+a+2) \int^{\tanh(x)} \frac{y(1-y)^{a/2}(1+y)^{b/2}}{1-y^2} dy + (a-b) \int^{\tanh(x)} \frac{(1-y)^{a/2}(1+y)^{b/2}}{1-y^2} dy . \quad (3.41)$$

A integral dada pela Eq. (3.41) pode ser integrada para alguns casos particulares de  $a$  e  $b$ , entretanto a expressão resultante é não inversível e portanto, neste caso não é possível recuperar os modelos instáveis de teoria de campo.

### 3.2.3 O limite $A \rightarrow \infty$

A equação de Schrödinger dada pela equação

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + A + \frac{B^2}{A^3} - \frac{(A+1)}{\cosh^2(x/\sqrt{A})} + \frac{2B}{A} \tanh(x/\sqrt{A}) \right] \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x) , \quad (3.42)$$

<sup>1</sup>O modelo de Liouville é descrito pela densidade de potencial  $e^{-\Phi}$ , a qual toma o seu valor minimo em  $\Phi \rightarrow \infty$ . Então  $\Phi \rightarrow \infty$ , pode ser considerado como o vácuo trivial da teoria

pode ser colocada na forma dada pela Eq. (3.9) fazendo-se a mudança de variável  $x = \sqrt{Az}$ . Neste caso os autovalores  $\lambda_n^2$  são dados por

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{A} \left[ A^2 - (A - n)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{(A - n)^2} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots < A. \quad (3.43)$$

Devemos notar que quando  $A \rightarrow \infty$  o número de autovalores também vai para o infinito.

Mantendo  $B$  fixo e tomando o limite  $A \rightarrow \infty$  nas equações anteriores obtemos

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} - 1 + 2x^2 \right] \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x) \quad (3.44)$$

e

$$\lambda_n^2 = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \quad (3.45)$$

*i.e.*, obtemos a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico. Para obter o modelo de teoria de campo estável devemos considerar a auto-função do estado fundamental, dado por

$$\phi_0(x) = e^{-x^2/2}, \quad (3.46)$$

o qual permite obter a solução tipo kink

$$\begin{aligned} \Phi_c(x) &= \int^x dy e^{-y^2/2} \\ &= \text{erf}(x/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dado que a função erro [30] não pode ser invertida, não é possível obtermos o modelo de teoria de campos associado. Observemos que, embora a Eq. (3.47) não possa ser invertida, é possível obter o modelo de teoria de campo implicitamente em termos de outro campo. Este tratamento foi desenvolvido na Ref. [37], onde o campo é escrito em termos do chamado campo do "tachyon". Devemos notar que  $V(\pm\infty) = \infty$ . Este fato não nos permite concluir que a massa das partículas, associadas às flutuações ao redor

do vácuo trivial, é infinita. Neste caso não é possível falar de partículas dado que neste caso não existem soluções contínuas, isto é, não existem soluções que assintoticamente se comportem como ondas planas.

Para obter os modelos instáveis, consideramos a auto-função do primeiro estado excitado, dado por

$$\phi_1(x) = xe^{-x^2/2}, \quad (3.48)$$

o qual implica que o modelo de teoria de campo instável é dado pela densidade de potencial

$$\begin{aligned} U(\Phi_c) &= \frac{1}{2} \{\phi_1[x(\Phi_c)]\}^2 \\ &= [x(\Phi_c)]^2 e^{-[x(\Phi_c)]^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Neste caso a solução do tipo "bounce" é obtida facilmente,

$$\begin{aligned} \Phi_c(x) &= \int^x ye^{-y^2} dy \\ &= e^{-x^2/2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Resolvendo a equação anterior para  $x$  e substituindo na Eq. (3.49), obtemos

$$U(\Phi) = -\Phi^2 \ln \Phi^2. \quad (3.51)$$

Este modelo acima descrito, de teoria de campo instável foi recentemente considerado na Ref. [38] onde os autores estudam a condensação do "tachyon" em teoria de campos de supercordas.

### 3.3 O potencial de Morse: O modelo $\Phi^2 \ln^2(\Phi^2)$

O potencial de Morse é dado por

$$V(x) = A^2 + B^2 \exp(2x) - B(2A + 1) \exp(x). \quad (3.52)$$

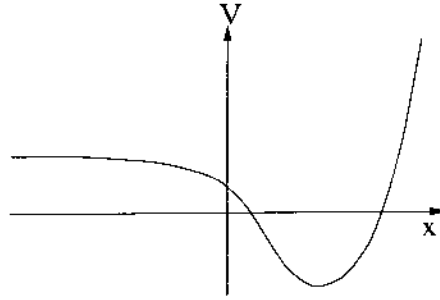


Figura 3.2: O potencial de Morse.

Este potencial é mostrado na Fig. 3.2. Neste caso a equação de Schrödinger possui soluções discretas e contínuas. As auto-funções discretas são dadas por

$$\phi_n(x) = y^{A-n} e^{-y/2} L_n^{2A-2n}(y), \quad y = 2Be^x, \quad (3.53)$$

com os respectivos autovalores

$$\lambda_n^2 = A^2 - (A - n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots < A. \quad (3.54)$$

Por outro lado as soluções contínuas tem comportamento assintótico dado por

$$\phi_q(x) = \begin{cases} e^{iqx} + R_q e^{-iqx} & x \rightarrow -\infty \\ 0 & x \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (3.55)$$

onde os autovalores contínuos  $\lambda_q^2$  são expressos em termos de  $q$  por

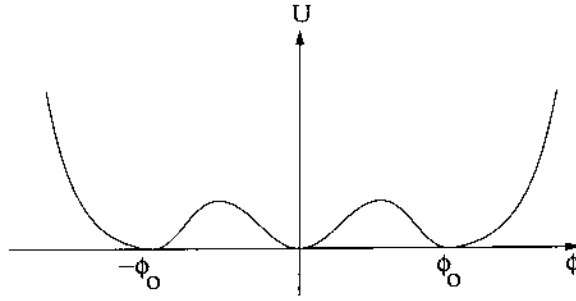
$$\lambda_q^2 = q^2 + A^2. \quad (3.56)$$

Também neste caso o coeficiente de reflexão  $R_q$  podem ser calculado exatamente [31] (ver apêndice **B**);

$$R_q = \frac{(2B)^{-2iq} \Gamma(-A - iq) \Gamma(2iq)}{\Gamma(-A + iq) \Gamma(-2iq)}. \quad (3.57)$$

Para os modelos de teoria de campo estáveis consideraremos a auto-função do estado fundamental  $\phi_0$ , a qual pode ser obtida da Eq.(3.53) tomando  $n = 0$ ,

$$\phi_0(x) = y^A e^{-y/2}. \quad (3.58)$$


 Figura 3.3: O potencial  $U(\Phi)$  dado pela Eq. (3.62).

Integrando a expressão anterior obtemos a solução para o kink,

$$\Phi_c(x) = \int^{2Be^x} y^{A-1} e^{-y/2} dy. \quad (3.59)$$

Os modelos de teoria de campos estáveis são dados por

$$U(\Phi) = y^{2A} e^{-y}. \quad (3.60)$$

A integral na Eq. (3.59) pode ser resolvida somente para  $A$  inteiro. Para  $A = 1$  obtemos

$$\Phi_c(x) = \exp(-Be^x), \quad (3.61)$$

a partir da qual, resolvendo para  $y = 2Be^x$  e substituindo na Eq. (3.60) obtemos,

$$U(\Phi) = \Phi^2 \ln^2(\Phi^2). \quad (3.62)$$

A densidade de potencial dada pela Eq. (3.62) é mostrada na Fig. 3.3, onde vemos que existem três mínimos. Um dos quais está localizado no ponto  $\Phi = 0$ , isto é, temos que  $U'(0) = 0$ . Neste ponto  $U''(0) = \infty$  e também todas as derivadas de ordem mais altas são infinitas.

Embora a integral na Eq. (3.59) possa ser resolvida para  $A = 2, 3, \dots$ , não vai ser possível inverter a expressão resultante e portanto, não vai ser possível obter os modelos de teoria de campos nestes casos. Também, neste caso não é possível construir os modelos instáveis.

A densidade de potencial dada pela Eq. (3.62) pode ser redefinida de tal forma que apareçam constantes de acoplamento no modelo. Nós temos construído o modelo de teoria de campo a partir de uma equação de Schrödinger que possui somente um parâmetro livre ( $A = 1$  e  $B$  arbitrário) e, já que em geral podemos fazer um escalamento no campo e nas coordenadas na Lagrangiana (eliminando assim duas constantes de acoplamento), concluímos que a densidade de potencial dada pela Eq. (3.62) pode ser redefinida com não mais que três parâmetros livres. Reservando um parâmetro para a massa podemos ver que o modelo dado pela Eq. (3.62) pode ser redefinido introduzindo-se duas constantes de acoplamento. Redefinindo a Eq. (3.62) com uma constante de acoplamento  $\alpha$ , temos

$$U(\Phi) = \frac{m^2}{8} \Phi^2 \ln^2 \left( \frac{\alpha^2 \Phi^2}{9m^4} \right), \quad (3.63)$$

Onde escolhemos os fatores numéricos de forma adequada. De  $U'(\Phi) = 0$  obtemos que os três mínimos estão localizados nos pontos  $\Phi = 0$  e  $\Phi = \pm\Phi_0$ , onde

$$\Phi_0 = \frac{3m^2}{\alpha}. \quad (3.64)$$

Usando a Eq. (3.63) na Eq. (2.8) obtemos

$$\Phi_c(x) = \pm \frac{3m^2}{\alpha} \exp(-e^{\pm m(x-x_0)}). \quad (3.65)$$

Temos dois pares de soluções tipo kink e anti-kinks que conectam  $\Phi = -\Phi_0$  e  $\Phi = 0$  ou  $\Phi = 0$  e  $\Phi = \Phi_0$ . Pode se ver facilmente que  $U''(\pm\Phi_0) = m^2$ , isto é,  $m^2$  é a massa ao quadrado das partículas associadas com as flutuações quânticas ao redor do vácuo trivial  $\pm\Phi_0$ .

Usando a Eq. (3.63) podemos ver que as massas das soluções tipo kink e anti-kink dadas pela Eq. (3.65) são as mesmas e dadas (classicamente) por

$$H[\Phi_c] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi_c}{dx} \right)^2 + \frac{m^2}{8} \Phi_c^2 \left[ \ln \left( \frac{\alpha^2 \Phi_c^2}{9m^4} \right) \right]^2 \right)$$



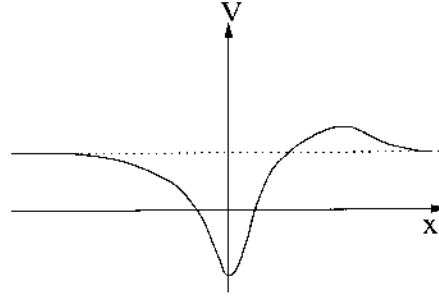


Figura 3.4: O potencial de Scarf II hiperbólico.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9m^6}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm mx} \exp(-2e^{\pm mx}) \\
 &= \frac{9m^5}{4\alpha^2} .
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

### 3.4 O potencial hiperbólico de Scarf II: O modelo $U(\Phi) = \Phi^2 \cos^2 \ln(\Phi^2)$

O potencial de Scarf hiperbólico II é dado por

$$V(x) = A^2 + \frac{(B^2 - A^2 - A)}{\cosh^2(x)} + B(2A + 1) \frac{\tanh(x)}{\cosh(x)} . \tag{3.67}$$

Este potencial é mostrado na Fig. 3.4. Neste caso as auto-funções discretas são dadas por

$$\phi_n(x) = (i)^n (1 + y^2)^{-A/2} e^{-B \tan^{-1}(y)} P_n^{(iB-A-1/2, -iB-A-1/2)}(y), \quad y = \sinh(x), \tag{3.68}$$

com autovalores

$$\lambda_n^2 = A^2 - (A - n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots < A . \tag{3.69}$$

As soluções contínuas se comportam assintoticamente como

$$\phi_q(x) = \begin{cases} e^{iqx} + R_L e^{-iqx} & x \rightarrow -\infty \\ T_L e^{iqx} & x \rightarrow \infty \end{cases}, \tag{3.70}$$

onde os autovalores contínuos são dados por

$$\lambda_q^2 = q^2 + A^2 . \tag{3.71}$$

Como nos casos anteriores os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser obtidas exatamente [31],

$$R_L = T_L \left[ \frac{\cos(\pi A) \sinh(\pi B)}{\cosh(\pi q)} + i \frac{\sin(\pi A) \cosh(\pi B)}{\sinh(\pi q)} \right], \quad (3.72)$$

$$T_L = \frac{\Gamma(-A - iq)\Gamma(A + 1 - iq)\Gamma(\frac{1}{2} + iB - iq)\Gamma(\frac{1}{2} - iB - iq)}{\Gamma(-iq)\Gamma(1 - iq)\Gamma^2(\frac{1}{2} - iq)}. \quad (3.73)$$

Para obter os modelos estáveis de teoria de campos vamos considerar a auto-função com ausência de nodos, obtida da Eq. (3.68) tomando  $n = 0$ ,

$$\phi_0(x) = (1 + y^2)^{-A/2} e^{-B \tan^{-1}(y)}, \quad (3.74)$$

Então, os modelos de teoria de campos são dados por

$$U(\Phi) = (1 + y^2)^{-A} e^{-2B \tan^{-1}(y)}. \quad (3.75)$$

Integrando a Eq. (3.74) obtemos para  $\Phi_c$

$$\Phi_c(x) = \int^{\sinh(x)} (1 + y^2)^{-(A+1)/2} e^{-B \tan^{-1}(y)} dy. \quad (3.76)$$

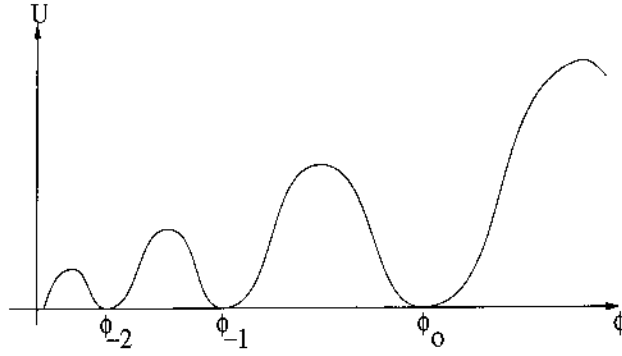
A integral anterior pode ser resolvida analiticamente somente quando  $A = 1$ . Neste obtemos

$$\Phi_c(x) = e^{-B \tan^{-1} \sinh(x)}, \quad (3.77)$$

resolvendo para  $y = \sinh(x)$  e substituindo na Eq. (3.75) obtemos

$$U(\Phi) = \Phi^2 \cos^2 \left( \frac{1}{2B} \ln \Phi^2 \right). \quad (3.78)$$

Na Fig. 3.5 mostramos a densidade de potencial dado pela Eq. (3.78) para  $\Phi > 0$  e supondo  $B > 0$ . Como no caso do potencial de Morse, neste caso não é possível construir modelos instáveis. Para o modelo com densidade de potencial dado pela Eq. (3.78) temos


 Figura 3.5: O potencial  $U(\Phi)$  dado pela Eq. (3.78).

a seguinte imagem sobre o espalhamento das partículas pelo estado quântico solitônico: da Eq. (3.70) podemos ver que as partículas são espalhadas pelo estado quântico solitônico em partículas refletidas e transmitidas de mesma massa,  $V(-\infty) = V(\infty)$ . A Eq. (3.70) somente descreve o espalhamento de partículas provenientes de  $x \rightarrow -\infty$ . Para partículas provenientes de  $x \rightarrow +\infty$  a imagem qualitativa de espalhamento é a mesma. Mas, pelo fato do potencial não ser simétrico em  $x$ , o espalhamento é quantitativamente diferente [39].

Redefinido a densidade de potencial dada pela Eq. (3.78) com parâmetros adequados temos

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 B^2 \Phi^2 \cos^2 \left[ \frac{1}{2B} \ln \left( \frac{\alpha^2 \Phi^2}{9m^4} \right) \right]. \quad (3.79)$$

Este modelo possui vácuos triviais infinitamente degenerados nos pontos  $\Phi = \pm \Phi_n$ , com  $\Phi_n$  dado por

$$\Phi_n = \frac{3m^2}{\alpha} \exp \left( \frac{2n+1}{2} \pi B \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.80)$$

As soluções tipo kinks e anti-kinks são obtidas usando a Eq. (2.57),

$$\Phi_c(x) = \pm \frac{3m^2}{\alpha} \exp \left[ n\pi B \pm B \tan^{-1} \sinh(mx) \right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.81)$$

onde as soluções com os sinais ( $\pm$ ) nos expoentes correspondem às soluções tipo kinks e

anti-kinks respectivamente, para cada valor de  $n$  e para cada sinal que aparece no fator pre-exponencial. Temos um número infinito de kinks e anti-kinks que conectam um número infinito de pares de vácuos triviais vizinhos. Este fato nos lembra em certo sentido o modelo sine-Gordon. Porém, contrario ao modelo de sine-Gordon, onde todos os setores solitônicos <sup>2</sup> são equivalentes, no modelo dado pela Eq. (3.79) isso não acontece. Por exemplo, se calcularmos as massas (a nível clássico) dos kinks (ou anti-kinks) obteremos

$$\begin{aligned}
 H[\Phi_c] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi_c}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 B^2 \Phi^2 \cos^2 \left[ \ln \left( \frac{\alpha^2 \Phi^2}{9m^4} \right) \right] \right) \\
 &= \frac{9m^6 B^2 e^{2Bn\pi}}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp[\pm 2B \tan^{-1} \sinh(mx)]}{\cosh^2(mx)} \\
 &= \frac{9m^5 B^2 e^{2Bn\pi}}{\alpha^2} I(B), \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

onde  $I(B)$  é dado por

$$I(B) = \int_{-1}^1 ds e^{2B \sin^{-1}(s)}. \tag{3.83}$$

Da Eq. (3.82) vemos claramente que para valores diferentes de  $n$  obtemos massas diferentes.

Antes de passar para o próximo capítulo gostaríamos de fazer a seguinte observação: expandindo a densidade do potencial dada pela Eq. (3.79) (por simplicidade escolhemos  $B = 1/2$ ) ao redor de um dos vácuos triviais obtemos,

$$U(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 \pm \frac{\alpha}{6} e^{-\frac{1}{4}(2n+1)\pi} \varphi^3 - \frac{1}{4!} \frac{\alpha^2}{m^2} e^{-\frac{1}{2}(2n+1)\pi} \varphi^4 + \frac{(256)}{(81)6!} \frac{\alpha^4}{m^6} e^{-(2n+1)\pi} \varphi^6 + \mathcal{O}(e^{-4(2n+1)\pi}), \tag{3.84}$$

onde  $\varphi = (\Phi \pm \Phi_n)$ . Da Eq. (3.84) podemos ver que para  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2$ , isto é, no setor perturbativo (para  $n \rightarrow \infty$ ) o modelo é praticamente livre.

---

<sup>2</sup>Isto é, os setores com um sólon

# Capítulo 4

## Renormalização a um loop para as correções quânticas à energia de configurações clássicas

### 4.1 Introdução

Em várias situações de interesse físico é preciso calcular a seguinte quantidade

$$\Delta S = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{\mathcal{V}(x)}{-\square_E + m^2} \right\}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{V}(x)$  é uma configuração clássica não homogênea,  $m^2$  é uma constante com dimensão de massa ao quadrado e  $\square_E = \partial^2 / \partial \tau^2 + \vec{\nabla}^2$ , sendo que  $\tau = ix_0 = it$  é o tempo imaginário (Euclidiano).

Uma situação física onde aparece uma expressão da forma dada pela Eq. (4.1) é no tunelamento em teoria quântica de campos. Neste caso a densidade Lagrangiana que descreve o sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi), \quad (4.2)$$

onde  $\mu = 0, 1, \dots, d = (D - 1)$  e  $U(\Phi)$ , a densidade do potencial, é uma função de  $\Phi$  que possui um mínimo relativo (o chamado vácuo falso, mencionado anteriormente) o

qual é estável do ponto de vista clássico, mas que a nível quântico torna-se instável devido a possibilidade de tunelamento pela barreira da densidade do potencial. A taxa de decaimento  $\Gamma$  por unidade de volume  $V_d$  do chamado vácuo falso, na aproximação semi-clássica, é dada por [22, 23]

$$\frac{\Gamma}{V_d} = \left[ \frac{S_E(\Phi_c)}{2\pi} \right]^{D/2} \left| \frac{\det'(-\square_E + U''[\Phi_c(x)])}{\det(-\square_E + U''(\Phi_0))} \right|^{-1/2} e^{-S_E[\Phi_c]}. \quad (4.3)$$

Na expressão anterior  $\Phi_c(x)$  (chamado de "bounce" ou "lump") é uma solução da equação clássica de movimento obtida a partir da ação Euclidiana  $S_E[\Phi]$ , enquanto que  $\Phi_0$  é um mínimo relativo (o vácuo falso) de  $U(\Phi)$ . O apóstrofo que aparece no determinante da Eq. (4.3) significa que o modo do operador  $\{-\square_E + U''[\Phi_c(x)]\}$  com autovalor zero deve ser excluída da expressão. A equação que descreve  $\Phi_c(x)$  é

$$\square_E \Phi_c = U'[\Phi_c]. \quad (4.4)$$

De fato, como foi mostrado na Ref. [40] a solução da Eq. (4.4) que dá a máxima contribuição à expressão dada pela Eq. (4.3) é aquela solução que possui simetria esférica  $D$ -dimensional. Fazendo  $r = \sqrt{\tau^2 + \vec{x}^2}$ , a Eq. (4.4) se reduz neste caso a

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r} \frac{d}{dr} \right) \Phi_c = U'[\Phi_c]. \quad (4.5)$$

A equação anterior tem que ser resolvida com as seguintes condições de fronteira,  $\Phi_c|_{r \rightarrow \infty} = \Phi_0$  e  $\frac{d}{dr} \Phi_c|_{r=0} = 0$ . Usando a identidade  $\text{Det}(A) = \exp(\text{Tr} \ln A)$  podemos escrever a Eq. (4.3) como

$$\frac{\Gamma}{V_d} = \left[ \frac{S_E(\Phi_c)}{2\pi} \right]^{D/2} |\exp(-S_E[\Phi_c] - \Delta S[\Phi_c])|. \quad (4.6)$$

onde  $\Delta S[\Phi_c]$  é dado pela Eq. (4.1) identificando  $U''(\Phi_0) = m^2$  e  $\mathcal{V}(x) = U''[\Phi_c(x)] - U''(\Phi_0)$ .

Outra situação onde aparece a expressão dada pela Eq. (4.1) é no cálculo da energia de ponto zero (energia de Casimir) de um modelo de teoria de campo escalar sem auto-interação num campo de fundo  $\mathcal{V}(\vec{x})$  independente do tempo, o qual é descrito pela seguinte densidade Langrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{1}{2} \mathcal{V}(\vec{x}) \Phi^2 . \quad (4.7)$$

De forma similar ao mostrado no capítulo 2, podemos mostrar que a energia do estado fundamental do sistema descrito pela densidade Lagrangiana dada pela Eq. (4.7) é igual a

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0 , \quad (4.8)$$

onde, os  $\omega_n$ 's e os  $\omega_k^0$  são obtidos, respectivamente, à partir das equações de autovalores

$$\left[ -\vec{\nabla}^2 + m^2 + \mathcal{V}(\vec{x}) \right] \phi_n(\vec{x}) = \omega_n^2 \phi_n(\vec{x}) \quad (4.9)$$

e

$$\left[ -\vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi_k^0(\vec{x}) = (\omega_k^0)^2 \phi_k^0(\vec{x}) . \quad (4.10)$$

De fato estamos supondo que o campo de fundo  $\mathcal{V}(\vec{x})$  se anula quando  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ . Como mostramos no apêndice **A**, a equação (4.8) é equivalente à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta S}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{\mathcal{V}(\vec{x})}{-\square_E + m^2} \right\} , \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $T$  é o intervalo de integração no tempo imaginário  $\tau$ .

No caso dos modelos escalares bi-dimensionais que possuem soluções solitônicas, a massa do estado quântico solitônico a um loop, como foi mostrado no capítulo 2 é dada

por

$$M = E[\Phi_c] + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0, \quad (4.12)$$

onde  $\Phi_c(x)$  é uma solução de energia finita da equação não-linear de movimento,  $E[\Phi_c]$  é a energia clássica,  $\omega_n$  é obtido à partir de uma equação similar à Eq. (4.9),

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\Phi_c(x)] \right] \phi_n(x) = \omega_n^2 \phi_n(x) \quad (4.13)$$

e  $\omega_k^0$  é obtido à partir de uma equação análoga à Eq. (4.10)

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right] \phi_k^0(x) = (\omega_k^0)^2 \phi_k(x). \quad (4.14)$$

De forma semelhante ao caso da energia do estado fundamental na presença do campo de fundo  $\mathcal{V}(x)$ , podemos escrever para a massa do estado quântico solitônico a um loop, a seguinte expressão

$$M = E[\Phi_c] + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{U''[\Phi_c(x)] - m^2}{-\square_E + m^2} \right\}, \quad (4.15)$$

onde  $\square_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

Estas são algumas situações de interesse físico, onde aparece uma expressão da forma dada pela Eq. (4.1). Esta expressão contém infinitos que precisam ser regularizados e renormalizados. À seguir vamos regularizar e renormalizar estes infinitos, isto é, vamos escrever expressões finitas fisicamente consistentes e de carácter preditivo, seja para a taxa de decaimento de um vácuo falso ou para a massa do sóliton a um loop.

## 4.2 Regularização e renormalização de $\Delta S$

Para regularizarmos  $\Delta S$  dado pela Eq. (4.1) vamos usar a seguinte idéia. Podemos formalmente fazer uma expansão do logaritmo na Eq. (4.1) e calcular os traços dos



termos da expansão de uma forma simples. O resultado desta expansão é

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[ \frac{\mathcal{V}(x)}{-\square_E + m^2} \right]^n \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^D x \mathcal{V}(x) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} G(p) - \frac{1}{4} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} G(p_1) \tilde{\mathcal{V}}(p_1 - p_2) G(p_2) \tilde{\mathcal{V}}(p_2 - p_1) \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} G(p_1) \tilde{\mathcal{V}}(p_1 - p_3) G(p_2) \tilde{\mathcal{V}}(p_2 - p_1) G(p_3) \tilde{\mathcal{V}}(p_3 - p_2) \\
 &\quad + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \dots \frac{d^D p_n}{(2\pi)^D} \prod_{m=1}^n G(p_m) \tilde{\mathcal{V}}(p_m - p_{m-1}) + \dots, \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\mathcal{V}}(p - q) = \int d^D x e^{i(p-q)x} \mathcal{V}(x) \quad (4.17)$$

e

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (4.18)$$

No produtório do último termo da Eq. (4.16) deve-se fazer a identificação  $p_0 = p_n$ . A expressão dada pela Eq. (4.16) também pode ser expressa de outra forma equivalente no espaço de configurações,

$$\Delta S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int d^D x_1 d^D x_2 \dots d^D x_n \prod_{m=1}^n \mathcal{V}(x_m) \tilde{G}(x_n - x_{n-1}), \quad (4.19)$$

onde

$$\tilde{G}(x - y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2}. \quad (4.20)$$

De fato ambas as expressões para  $\Delta S$ , dadas pelas Eqs. (4.16) ou (4.19) podem ser representadas mediante gráficos de Feynman,

$$\Delta S = \text{---} \bigcirc + \bigcirc \text{---} + \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad (4.21)$$

O gráfico do "tadpole", corresponde ao primeiro termo da Eq. (4.16), ou (4.19), o gráfico com duas patas externas corresponde ao segundo termo da Eq. (4.16) ou (4.19), e assim

sucessivamente. Da expansão em gráficos de Feynman ou da Eq. (4.16) podemos notar que somente os primeiros termos da expansão são divergentes no limite ultravioleta <sup>1</sup>. O número exato de termos ou gráficos com divergências ultravioletas depende exclusivamente da dimensionalidade do espaço-tempo  $D$ . Assim, quando  $D = 1$  nenhum termo é divergente, quando  $D = 2$  ou  $3$  somente o primeiro termo, correspondente ao gráfico de tadpole, é divergente no ultravioleta, quando  $D = 4$  os termos divergentes são os gráficos do "tadpole" e aquele com duas patas externas. Vamos chamar de  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , estes gráficos divergentes, sendo que  $n$  denota o número de linhas internas do gráfico correspondente. Se  $D$  for par teremos que o número de gráficos divergentes é  $n = D/2$  enquanto que se  $D$  for ímpar  $n = d/2$ . Então o primeiro passo para regularizarmos de forma simples a expressão para  $\Delta S$  é somar e subtrair os  $n$  termos divergentes ultravioletas  $S_i$ . Somando e subtraindo  $\sum_{i=1}^n S_i$  da Eq. (4.1) temos,

$$\Delta S = \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ 1 + \frac{\mathcal{V}(x)}{-\square_E + m^2} \right] - \sum_{i=1}^n S_i \right\} + \sum_{i=1}^n S_i. \quad (4.22)$$

O primeiro termo da Eq. (4.22) é finito, a parte ultravioleta divergente de  $\Delta S$  se encontra no segundo termo. Vemos então que o processo de regularização e renormalização de  $\Delta S$  de forma exata passa pela regularização e renormalização dos primeiros termos da sua expansão perturbativa em potências de  $\mathcal{V}(x)$ . Já que o primeiro termo da Eq. (4.22) é finito podemos por exemplo implementar um cálculo numérico e determinar o seu valor. A parte divergente pode ser regularizada e renormalizada de forma convencional, como é feito perturbativamente.

A modo de exemplo vamos renormalizar a expressão para a taxa de decaimento do vácuo falso dado pela Eq. (4.6). Lembremos que tal expressão é válida a um loop, ou seja

<sup>1</sup>De fato, em alguns casos, dependendo da forma funcional de  $\mathcal{V}(x)$  poderiam aparecer divergências infravermelhas

a ordem  $\hbar$ . Os parâmetros que aparecem na Eq. (4.6) são parâmetros "bare". Isto quer dizer que tanto  $S_E[\Phi_c]$  quanto  $\Delta S[\Phi_c]$  são funções dos parâmetros "bare". Expressando os parâmetros "bare" em termos dos parâmetros renormalizados a ordem  $\hbar$  substituindo em  $S_E[\Phi_c]$  e fazendo uma expansão a ordem  $\hbar$  para a expressão resultante obteremos uma expressão da forma  $S_E[\Phi_c] - \hbar\delta S_E[\Phi_c]$ , onde agora os parâmetros que aparecem são os parâmetros renormalizados. Da mesma forma obteremos que  $\Delta S[\Phi_c] \rightarrow \Delta S[\Phi_c] + \hbar\delta\Delta S[\Phi_c]$ . Logo no expoente da Eq. (4.6), em unidade  $\hbar \neq 1$ , podemos escrever  $S_E[\Phi_c] + \hbar\delta\Delta S[\Phi_c] \rightarrow S_E[\Phi_c] - \hbar\delta S_E[\Phi_c] + \hbar\Delta S[\Phi_c] + \hbar^2\delta\Delta S[\Phi_c]$ . Então, podemos escrever a taxa de decaimento por unidade de volume dado pela Eq. (4.6), em termos dos parâmetros renormalizados

$$\frac{\Gamma}{V_d} = \left[ \frac{S_E(\Phi_c)}{2\pi} \right]^{D/2} \left| \exp(-S_E[\Phi_c] + \delta S_E[\Phi_c] - \Delta S[\Phi_c]) \right| + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (4.23)$$

onde voltamos às unidades  $\hbar = 1$ . Na Eq. (4.23) os parâmetros que aparecem são os parâmetros renormalizados. Somando e subtraindo do expoente da Eq. (4.23) os  $n$  gráficos divergentes no ultravioleta da expansão para  $\Delta S[\Phi_c]$  obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{V_d} = & \left[ \frac{S_E(\Phi_c)}{2\pi} \right]^{D/2} \left| \exp \left[ -S_E[\Phi_c] - \left( \Delta S[\Phi_c] - \sum_{i=1}^n S_i[\Phi_c] \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \delta S_E[\Phi_c] - \sum_{i=1}^N S_i[\Phi_c] \right) \right] \right| + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde agora todos os termos são finitos. Como foi explicado o segundo termo do expoente da Eq. (4.24) é finito e dado que  $\delta S_E[\Phi_c]$  contém infinitos, então a diferença dada pelo último termo do expoente da Eq. (4.24) também é finito. É claro que este último termo é ambíguo, sendo que para eliminar esta ambiguidade devemos fixar os parâmetros físicos da teoria seguindo algum esquema de renormalização.

Para finalizar esta seção vamos considerar o caso em que  $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(\vec{x})$  é independente

do tempo. Neste caso, à partir da Eq. (4.17) obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}(p-q) &= 2\pi\delta(p_0-q_0)\int d^d\vec{x}e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}}\mathcal{V}(\vec{x}) \\ &= 2\pi\delta(p_0-q_0)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}-\vec{q}),\end{aligned}\quad (4.25)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}-\vec{q}) = \int d^d\vec{x}e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}}\mathcal{V}(\vec{x}). \quad (4.26)$$

Substituindo a Eq. (4.25) na Eq. (4.16) obtemos

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{T}{2}\int d^d\vec{x}\mathcal{V}(\vec{x})\int d^D p G(p) - \frac{T}{4}\int \frac{d^d\vec{p}_1}{(2\pi)^d}\frac{d^D p_2}{(2\pi)^D}G(p_2^0,\vec{p}_1)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)G(p_2)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_2-\vec{p}_1) \\ &+ \frac{T}{6}\int \frac{d^d\vec{p}_1}{(2\pi)^d}\frac{d^d\vec{p}_2}{(2\pi)^d}\frac{d^D p_3}{(2\pi)^D}G(p_3^0,\vec{p}_1)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_1-\vec{p}_3)G(p_3^0,\vec{p}_2)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_2-\vec{p}_1)G(p_3)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_3-\vec{p}_2) \\ &+ \dots + \frac{T(-1)^{n+1}}{2n}\int \prod_{l=1}^{n-1}\frac{d^d\vec{p}_l}{(2\pi)^d}\frac{d^D p_n}{(2\pi)^D}\left[\prod_{l=1}^{n-1}G(p_n^0,\vec{p}_l)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_l-\vec{p}_{l-1})\right]G(p_n)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_n-\vec{p}_{n-1}) \\ &+ \dots\end{aligned}\quad (4.27)$$

Substituindo a equação anterior na Eq. (4.11) obtemos

$$\Delta E = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\int \prod_{l=1}^{n-1}\frac{d^d\vec{p}_l}{(2\pi)^d}\frac{d^D p_n}{(2\pi)^D}\left[\prod_{l=1}^{n-1}G(p_n^0,\vec{p}_l)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_l-\vec{p}_{l-1})\right]G(p_n)\tilde{\mathcal{V}}(\vec{p}_n-\vec{p}_{n-1}). \quad (4.28)$$

No caso em que  $D = 2$ , a equação anterior é a expressão para o segundo membro da Eq. (4.15).

### 4.3 Renormalização a um loop para a massa de sólitons em modelos escalares bi-dimensionais

Em termos de parâmetros "bare", a massa do sóliton a um loop em modelos escalares bi-dimensionais é dada pela Eq. (4.12) ou a Eq. (4.15). Em termos de parâmetros renormalizados, a Eq. (4.12) pode ser escrita como,

$$M = E[\Phi_c] + \frac{1}{2}\sum_n\omega_n - \frac{1}{2}\sum_k\omega_k^0 - \delta M. \quad (4.29)$$

A equação anterior é obtida de forma similar à Eq. (4.23). Isto é, na Eq. (4.12) escrevemos os parâmetros "bare" em termos dos parâmetros renormalizados a ordem  $\hbar$ , o que equivale a fazer a substituição  $E[\Phi_c] \rightarrow E[\Phi_c] - \delta M$ . A ordem  $\hbar$  a expressão para os somatorios em termos dos parâmetros "bare" e renormalizados é o mesmo. Os somatorios da Eq. (4.29) são equivalentes formalmente a Eq. (4.28) com  $D = 2$ , e como foi comentado acima, o único termo divergente da expansão é dado pela contribuição do gráfico de "tadpole", ou seja pelo primeiro termo da expansão dada pela Eq. (4.28) com  $D = 2$ . Da Eq. (4.28) este termo, o qual denotaremos por  $M_1$ , é igual a

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{S_1}{T} \\ &= \langle \mathcal{V} \rangle \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{V}(x). \quad (4.31)$$

Subtraindo e somando  $M_1$  à Eq. (4.29) obtemos

$$M = E[\Phi_c] + \left( \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0 - M_1 \right) - (\delta M - M_1). \quad (4.32)$$

Como mencionamos anteriormente, todos os termos da Eq. (4.32) são finitos. O último termo da Eq. (4.32) é finito mas ambíguo; para levantar a ambiguidade temos que usar algum esquema de renormalização. Vamos usar o esquema mais simples de renormalização, isto é, de que o gráfico de tadpole,  $M_1$ , se anula identicamente com o contratermo  $\delta M$ . Esta prescrição é equivalente a ordenar normalmente os operadores de campo [41], o qual, como é amplamente conhecido, é suficiente para tornar finito qualquer modelo escalar em  $(1+1)$  dimensões. Então, a massa renormalizada a um loop para o sóliton é,

$$M = E[\Phi_c] + \left( \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0 - M_1 \right). \quad (4.33)$$

À seguir vamos escrever uma expressão fechada para a Eq. (4.33). O segundo termo da Eq. (4.33) é finito, mas os somatórios e  $M_1$  são logicamente divergentes, logo, ao escrevermos expressões para  $M_1$  a os somatórios devemos ter cuidado, pois elas fazem sentido somente quando adotarmos algum esquema de regularização. Nós vamos regularizar as expressões para os somatórios e  $M_1$  usando um corte no momento,  $k \leq \Lambda$  ("sharp cut-off"). Integrando na energia  $p_0$  na Eq. (4.30) e colocando o corte  $\Lambda$  no momento obtemos,

$$M_1 = \frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (4.34)$$

Como foi mencionado no capítulo anterior, as auto-freqüências na presença do sóliton  $\omega_n$ , são discretas e contínuas. O número de auto-freqüências discretas, as quais denotaremos por  $\omega_i$ , são finitas. As auto-freqüências contínuas, as quais denotaremos por  $\omega_q$ , tomam os mesmos valores que as auto-freqüências na ausência do sóliton,  $\omega_k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}$ , ou seja são dadas por

$$\omega_q = \sqrt{q^2 + m^2}. \quad (4.35)$$

Então, podemos escrever para a primeira correção quântica à massa do sóliton  $\Delta M$ , a seguinte expressão

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \frac{1}{2} \sum_q \sqrt{q^2 + m^2} - \frac{1}{2} \sum_k \sqrt{k^2 + m^2} - M_1. \quad (4.36)$$

Embora  $\omega_q$  e  $\omega_k^0$  tomem os mesmos valores, não podemos simplesmente concluir que os somatórios contínuos na Eq. (4.36) se cancelam já que estes somatórios somente fazem sentido quando expressos em forma integral. Ao expressarmos as somas sobre  $q$  e  $k$  em forma integral vão aparecer densidades de estados para os  $q$  e para os  $k$  e os quais são em geral diferentes. Já que  $\omega_{-q} = \omega_q$  e  $\omega_{-k}^0 = \omega_k^0$ , podemos escrever para a Eq. (4.36) a

seguinte expressão

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \sum_{q=0}^{\Lambda} \sqrt{q^2 + m^2} - \sum_{k=0}^{\Lambda} \sqrt{k^2 + m^2} - M_1, \quad (4.37)$$

onde colocamos o mesmo corte  $\Lambda$ , tanto na soma sobre  $q$ , quanto na soma sobre  $k$ . Para escrevermos os somatorios na Eq. (4.37) em forma integral vamos em primeiro lugar discretizar os modos contínuos confinando o sistema numa caixa de comprimento  $L$ , tomar condições periódicas de contorno nas auto-funções das Eqs. (4.13) e (4.14) e voltar ao contínuo tomando  $L \rightarrow \infty$ . A equação para as auto-frequências livres  $\omega_k^0$ , Eq. (4.14) tem como soluções, ondas planas  $\phi_k^0 \sim \exp(ikx)$ . Impondo condições periódicas de contorno nas fronteiras da caixa unidimensional  $[-L/2, L/2]$  obtemos  $\exp(-iLk/2) = \exp(ikL/2)$  de onde obtemos o seguinte espectro para  $k$ ,

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.38)$$

Da equação anterior obtemos a seguinte densidade de estados para  $k$ ,

$$\rho^0(k) = \frac{1}{k_{n+1} - k_n} = \frac{L}{2\pi}. \quad (4.39)$$

Para determinar a densidade de estados associado com  $\omega_q$  devemos considerar as soluções contínuas da Eq. (4.13). Já que estamos supondo que a integral dada pela Eq. (4.31) é finita exigimos como condição necessaria que  $U''[\Phi_c(x \rightarrow -\infty)] = U''[\Phi_c(x \rightarrow \infty)]$ . Sendo assim, as soluções contínuas da Eq. (4.13) vem dadas por

$$\phi_L(x \rightarrow -\infty) = e^{iqx} + R_L e^{-iqx}, \quad \phi_L(x \rightarrow \infty) = T_L e^{iqx}, \quad (4.40)$$

ou

$$\phi_R(x \rightarrow -\infty) = T_R e^{-iqx}, \quad \phi_R(x \rightarrow \infty) = e^{-iqx} + R_R e^{iqx}, \quad (4.41)$$

sendo que a Eq. (4.40) descreve o espalhamento de ondas planas incidentes pela esquerda enquanto que a Eq. (4.41) descreve o espalhamento de ondas planas incidentes pela direita. Nas equações anteriores os  $T$ 's e os  $R$ 's não são independentes. Para encontrar as diversas relações entres estes coeficientes vamos usar o fato de o Wronskiano  $W(a, b) = a'b - ba'$ , com  $a, b$  sendo diferentes soluções da eq.(4.13) com o mesmo  $q$ , ser independente de  $x$ . Considerando  $W(\phi_L, \phi_R)$  e igualando os seus valores em  $x \rightarrow \pm\infty$  encontramos que

$$T_L = T_R = T . \quad (4.42)$$

Dado que  $U''[\Phi_c(x)]$  é real, então  $\phi_R^*$  é também solução da eq.(4.13), e considerando  $W[\phi_L, \phi_R^*]$  obtém-se que

$$\frac{R_L}{R_R^*} = -\frac{T}{T^*} . \quad (4.43)$$

A unitariedade, ou a conservação do fluxo exige que

$$|T|^2 + |R_L|^2 = |T|^2 + |R_R|^2 = 1 . \quad (4.44)$$

Agora se  $U''[\Phi_c(x)]$  for simétrico em  $x$  então  $\phi_R(-x)$  é também uma solução de (6.151) e considerando  $W[\phi_L(x), \phi_R(-x)]$  obteríamos

$$R_L = R_R \quad (\text{sempre que } U''[\Phi_c(x)] = U''[\Phi_c(-x)]) . \quad (4.45)$$

Em vez de calcularmos a densidade de estados para as auto-frequências na presença do sóliton, é melhor escrever o espectro de  $q$  em termos do espectro  $k$ , dado pela Eq. (4.38), e depois passar ao limite contínuo usando a densidade de estados na ausência do sóliton, dado pela Eq. (4.39). Por simplicidade vamos considerar em primeiro lugar o caso em que  $R_L = R_R = 0$ , isto é o caso em que o potencial que descreve as flutuações quânticas ao redor do sóliton clássico é irreflexivo. Logo generalizaremos o resultado para os casos em que esta restrição não se cumpre.



### 4.3.1 O caso dos potenciais não reflexivos: $R_L = R_R = 0$

No caso em que  $R_L = R_R = 0$  da Eq. (4.44) obtém-se que,

$$|T|^2 = 1, \quad (4.46)$$

isto é,  $T$  pode ser escrito simplesmente como  $T = e^{i\delta(k)}$ . Substituindo a Eq. (4.46) nas Eqs. (4.40) e (4.41) obtemos

$$\phi_L(x \rightarrow -\infty) = e^{iqx}, \quad \phi_L(x \rightarrow \infty) = e^{iqx+i\delta(q)}, \quad (4.47)$$

$$\phi_R(x \rightarrow -\infty) = e^{-iqx+i\delta(q)}, \quad \phi_R(x \rightarrow \infty) = e^{-iqx}. \quad (4.48)$$

Confinando  $x$ , no intervalo  $[-L/2, L/2]$  e impondo condições periódicas de fronteira em  $\pm L/2$  obtemos da equação (4.47) ou (4.48)

$$q_n = 2\pi \frac{n}{L} - \frac{\delta(q_n)}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.49)$$

Agora, em termos dos índices discretos a Eq. (4.37) pode ser escrita como

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \sum_{n=n_0}^{\mathcal{N}'} \sqrt{q^2 + m^2} - \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \sqrt{k^2 + m^2} - M_1. \quad (4.50)$$

Na equação anterior escrevemos diferentes limites nos somatórios dado que o que se exige segundo a Eq. (4.37) é a igualdade nos limites das somas sobre os momentos  $q$  e  $k$ . Da Eq. (4.38) obtemos para  $\Lambda$  em termos de  $N$ ,

$$\Lambda = \frac{2\pi N}{L}. \quad (4.51)$$

O índice  $n_0$  na Eq. (4.50) corresponde a  $q = 0$ . Então da Eq. (4.49) obtemos

$$n_0 = \frac{\delta(0)}{2\pi}. \quad (4.52)$$

De outro lado o índice  $N'$  corresponde a  $q = \Lambda$ . Neste caso, da Eq. (4.49), obtemos

$$\Lambda = 2\pi \frac{N'}{L} - \frac{\delta(\Lambda)}{L}. \quad (4.53)$$

Das Eqs. (4.51) e (4.53) obtemos

$$N' = N + \frac{\delta(\Lambda)}{2\pi}. \quad (4.54)$$

Antes de prosseguirmos com a nossa dedução vamos enunciar um importante teorema a respeito do "phase shift"  $\delta(k)$ .

*Teorema de Levinson unidimensional* No caso em que  $U''[\phi_c(-\infty)] = U''[\phi_c(\infty)]$  e a defasagem for escolhida de tal forma que  $\delta(\infty) = 0$  temos que [39]

$$\delta(0) = \mathcal{N}\pi, \quad (4.55)$$

onde  $\mathcal{N}$  é o número de autovalores discretos da Eq. (4.13)<sup>2</sup>.

Note que o teorema não exige que  $R_L = R_R = 0$ . A defasagem nos casos em que  $R_{L,R} \neq 0$  será definida na seguinte subseção.

Usando o teorema de Levinson obtemos da Eq. (4.52)

$$n_0 = \frac{\mathcal{N}}{2} \quad (4.56)$$

e da Eq. (4.54)

$$N' = N + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}). \quad (4.57)$$

Agora devemos lembrar que segundo a Eq. (4.49)  $n_0$  e  $N'$  devem ser inteiros. Dado que  $\Lambda$  é muito grande, na Eq. (4.57) podemos tomar  $N' = N$ . Na Eq. (4.56) devemos ter um

---

<sup>2</sup>Devemos observar que quando  $\delta(\infty) = 0$  a defasagem é descontínua na origem, rigorosamente, na Eq. (4.55) deve-se entender  $\delta(0^+)$ .

pouco mais de cuidado dependendo se  $\mathcal{N}$  for par ou ímpar. Quando  $\mathcal{N}$  for par, podemos escrever  $\mathcal{N} = 2\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} = 1, 2, \dots$  e assim  $n_0 = \mathcal{M}$ , logo teremos para a Eq. (4.50)

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \sum_{n=\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} \sqrt{q_n^2 + m^2} - \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \sqrt{k_n^2 + m^2} - M_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i - \sum_{n=0}^{\mathcal{M}-1} \sqrt{k_n^2 + m^2} + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \left( \sqrt{q_n^2 + m^2} - \sqrt{k_n^2 + m^2} \right) - M_1, \end{aligned} \quad (4.58)$$

Substituindo a Eq.(4.38) na Eq. (4.49) obtemos

$$q_n = k_n - \frac{\delta(k_n)}{L} + \mathcal{O}(L^{-2}) \quad (4.59)$$

e usando esta expressão obtemos que

$$\sqrt{q_n^2 + m^2} = \sqrt{k_n^2 + m^2} - \frac{\delta(k_n)}{L\sqrt{k_n^2 + m^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}). \quad (4.60)$$

Usando a Eq. (4.60) na Eq. (4.58), usando a densidade de estados para  $k$  dado pela Eq. (4.39) e tomando o limite  $L \rightarrow \infty$  obtemos

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i - \mathcal{M}m - \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{2\pi} \delta(k) \Big|_0^\Lambda + \int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - M_1. \quad (4.61)$$

Para  $k \rightarrow \infty$ , podemos escrever para  $\delta(k)^3$ ,

$$\delta(k) \approx -\frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{k} + \mathcal{O}(k^{-2}). \quad (4.62)$$

Usando o teorema de Levinson unidimensional e a Eq. (4.62) na Eq. (4.61) obtemos

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{2\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - M_1 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}). \quad (4.63)$$

Substituindo o valor de  $M_1$  dado pela Eq. (4.34) na Eq. (4.63), obtemos no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{2\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[ \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - \frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{\omega(k)} \right], \quad (4.64)$$

<sup>3</sup>Este resultado é obtido fazendo uma expansão de Born unidimensional

onde agora estamos usando  $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ . Consideremos agora o caso em que  $\mathcal{N}$  é ímpar. Neste caso podemos escrever  $\mathcal{N} = 2\mathcal{M} + 1$ ,  $\mathcal{M} = 1, 2, \dots$ . Da Eq. (4.56) podemos notar que neste caso obtemos um valor semi-inteiro para  $n_0 = \mathcal{M} + 1/2$ , valor que não está presente no espectro dado pela Eq. (4.49). Logo esse valor deve ser excluído da soma da Eq. (4.50), a soma deve começar no próximo inteiro maior que  $\mathcal{M} + 1/2$ , isto é em  $\mathcal{M} + 1$ . Também no última somatório da Eq. (4.50) a contribuição de momento zero  $n = 0$  deve ser multiplicado pelo fator  $1/2$ , dado que na soma original dada pela Eq. (4.36) o termo correspondente é contado somente uma vez. Sendo assim, podemos escrever para a Eq. (4.50)

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \sum_{n=\mathcal{M}+1}^{\mathcal{N}} \sqrt{k_n^2 + m^2} - \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \sqrt{q_n^2 + m^2} - \frac{m}{2} - M_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i - \sum_{n=1}^{\mathcal{M}} \sqrt{k_n^2 + m^2} - \frac{m}{2} + \sum_{n=1}^{\mathcal{M}} \left( \sqrt{k_n^2 + m^2} - \sqrt{q_n^2 + m^2} \right) - M_1. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Usando agora a Eq. (4.60) na Eq. (4.65) e tomando o limite  $L \rightarrow \infty$  obtemos

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i - \left( \mathcal{M} + \frac{1}{2} \right) m - \frac{\omega(k)}{2\pi} \delta_D(k) \Big|_0^\Lambda + \int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - M_1. \quad (4.66)$$

Usando o teorema de Levinson e a Eq. (4.62) e tomando o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  obtemos novamente a Eq. (4.64).

Antes de generalizarmos o resultado dado pela Eq. (4.64) para os casos  $R_{L,R} \neq 0$  vamos calcular as correções quânticas para a massa dos sóliton nos modelos de sine-Gordon e  $\Phi^4$ , onde sabemos do capítulo anterior que nesses casos  $R_L = R_R = 0$  e portanto podemos fazer uso da Eq. (4.64). Também a primeira correção quântica para massa dos sólitons nestes modelos está firmemente estabelecida. Isto vai nos permitir saber se a nossa formulada dada pela Eq. (4.64) é correta.

### O modelo de sine-Gordon

Este modelo é descrito pela densidade do potencial dada por

$$U(\Phi) = \frac{m^4}{\alpha^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\alpha}{m} \Phi \right) \right] \quad (4.67)$$

e  $U''[\Phi_c(x)]$  é dado por

$$U''[\Phi_c(x)] = -\frac{2m^2}{\cosh^2(mx)} + m^2. \quad (4.68)$$

Fazendo-se uma mudança de variável  $z = mx$  é fácil mostrar que o potencial dado pela Eq. (4.68) se transforma no potencial dado pela Eq. (3.9) com  $A = 1$ . Neste caso, da Eq. (3.11) podemos ver que sómente existe um autovalor discreto,  $\omega_0^2 = 0$ . Neste caso  $R_L = R_R = 0$  e a defasagem é dada por  $\delta(k) = 2 \tan^{-1}(m/k)$ . Também da Eq. (4.31) obtemos  $\langle \mathcal{V} \rangle = -8m$ . Substituindo estas expressões na Eq. (4.64) obtemos,

$$\Delta M = -\frac{m}{\pi} \quad (4.69)$$

### O modelo $\Phi^4$

Este modelo é descrito pela densidade de potencial

$$U(\Phi) = \frac{m^4}{32\alpha^2} \left[ 1 - \frac{4\alpha^2}{m^2} \Phi^2 \right]^2. \quad (4.70)$$

Neste caso  $U''[\Phi_c(x)]$  é obtido como sendo

$$\mathcal{V}(x) = -\frac{3m^2}{2 \cosh^2(mx/2)} + m^2. \quad (4.71)$$

O potencial anterior é o caso  $A = 2$  (fazendo um escalamento  $z = mx$ ) do potencial dado pela Eq. (3.9). Neste caso temos duas auto-frequências discretas,  $\omega_0 = 0$  e  $\omega_1 = \frac{m\sqrt{3}}{2}$ .

Neste caso o potencial dado pela Eq. (4.71) também é irreflexivo e a defasagem é dada por

$\delta(k) = -2 \tan^{-1}[3mk/(m^2 - 2k^2)]$ . Da Eq. (4.31) obtemos  $\langle \mathcal{V} \rangle = -12m$ . Substituindo estes valores na Eq. (4.64) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{m\sqrt{3}}{4} - \frac{3m}{2\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[ \frac{6m(2k^2 + m^2)}{(4k^2 + m^2)\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{3m}{2\sqrt{k^2 + m^2}} \right] \\ &= \frac{m\sqrt{3}}{4} - \frac{3m}{2\pi} - \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{m^3}{(4k^2 + m^2)\sqrt{k^2 + m^2}} \\ &= -m \left( \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Os resultados dados pelas Eqs. (4.69) e (4.72) são idênticos aos obtidos mediante outros métodos. Esses resultados foram estabelecidos pela primeira vez na Ref. [25]. Note que tanto no modelo de sine-Gordon quanto no modelo  $\Phi^4$  as flutuações quânticas são descritas por equações de Schrödinger com potenciais não reflexivos. Este fato torna fácil o cálculo das primeiras correções quânticas à massa dos sólitons. Na seção seguinte vamos calcular a massa do sóliton num modelo onde as flutuações quânticas são descritas por uma equação de Schrödinger com potencial tal que  $R_{L,R} \neq 0$ . Antes de fazer isto vamos generalizar a Eq. (4.64) para estes casos.

### 4.3.2 O caso dos potenciais reflexivos: $R_{L,R} \neq 0$

Vamos generalizar o resultado da seção prévia para potenciais  $U''[\phi_c(x)]$  [ou equivalentemente  $\mathcal{V}(x)$ ] mais gerais, onde não necessariamente  $R_L = R_R = 0$ . Para tal fim vamos construir, a partir dos coeficientes  $T$  e  $R_{L,R}$ , a matriz unitária de espalhamento  $S(k)$ , com elementos

$$S(k) = \begin{pmatrix} T & R_R \\ R_L & T \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

No caso de potenciais com  $R_L = R_R = 0$  esta matriz é diagonal

$$S(k) = \begin{pmatrix} e^{i\delta(k)} & 0 \\ 0 & e^{i\delta(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

Neste caso podemos escrever  $\delta(k)$  como

$$\delta(k) = \frac{1}{2i} \ln \det S(k) . \quad (4.75)$$

No caso geral, graças à unitariedade,  $S(k)$  pode ser diagonalizada mediante uma transformação de similaridade  $U(k)$  e colocada na forma

$$U^{-1}(k)S(k)U(k) = \begin{pmatrix} e^{i\delta_1(k)} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2(k)} \end{pmatrix} . \quad (4.76)$$

Logo podemos notar que existe uma base na qual o processo de espalhamento ainda é não reflexivo. A diferença é que agora o espalhamento de ondas planas na nova base é diferente quando espalhado pela direita ou pela esquerda, sendo que temos em geral diferentes defasagens, denotados por  $\delta_1(k)$  e  $\delta_2(k)$ . Se usarmos a Eq. (4.76) na Eq. (4.75) obtemos que

$$\delta(k) = \frac{1}{2} [\delta_1(k) + \delta_2(k)] , \quad (4.77)$$

o qual é uma generalização razoável para a diferença de fase. Então, a expressão dada pela Eq. (4.64) pode ser usada também nos casos em que  $\mathcal{V}(x)$  não é irreflexivo. Calculando o determinante da matriz  $S(k)$  dada pela Eq. (4.73) obtemos usando as Eq. (4.43) e (4.44)

$$\delta(k) = \frac{1}{2i} \ln \left[ \frac{T}{T^*} \right] , \quad (4.78)$$

e substituindo esta expressão na Eq. (4.64) obtemos

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{2\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \frac{\omega(k)}{2i} \frac{d}{dk} \ln \left[ \frac{T}{T^*} \right] - \frac{\langle \mathcal{V} \rangle}{\omega(k)} \right\} . \quad (4.79)$$

Embora a Eq. (4.79) seja uma generalização razoável para a Eq. (4.64) devemos estar seguros de não termos introduzido termos finitos ambiguos na Eq. (4.79), pois como já dissemos as quantidades originalmente divergentes devem ser tratadas cuidadosamente.

Sendo assim vamos deduzir a Eq. (4.79) em forma similar a como foi feito no caso em que  $R_{L,R} = 0$ . Isto é vamos confinar o sistema numa caixa de comprimento  $L$  e vamos aplicar condições periódicas de fronteira nas soluções dadas pelas Eqs. (4.40)-(4.50). Já que neste caso  $R_{L,R} \neq 0$ , não basta impor condições periódicas de fronteira na solução dada pela Eq. (4.40) ou (4.50). O que devemos fazer é considerar a solução completa, isto é, uma combinação linear de  $\phi_L(x)$  e  $\phi_R(x)$ , e aplicar condições periódicas de fronteira na solução completa e na sua primeira derivada. Denotando por  $\phi_q(x)$  a solução completa devemos então considerar

$$\phi_q(x) = \phi_L(x) + h\phi_R(x) , \quad (4.80)$$

onde  $h$  é uma constante. Impondo  $\phi_q(-L/2) = \phi_q(L/2)$  e usando as Eqs. (4.40)-(4.41) obtemos

$$e^{-iqL/2} + R_L e^{iqL/2} - T e^{iqL/2} = h \left( e^{-iqL/2} R_R e^{qL/2} - T e^{iqL/2} \right) . \quad (4.81)$$

Impondo  $\frac{d}{dx}\phi_q(x)|_{x=-L/2} = \frac{d}{dx}\phi_q(x)|_{x=L/2}$  obtemos

$$q \left( R_L e^{iqL/2} - e^{-iqL/2} \right) + q_+ T e^{iqL/2} = h \left[ q \left( e^{-iqL/2} + R_R e^{iqL/2} \right) - q T e^{iqL/2} \right] . \quad (4.82)$$

Eliminando  $h$  das Eqs. (4.81) e (4.82) obtemos

$$(R_L R_R - T^2) e^{2iqL} + 2T e^{iqL} - 1 = 0 . \quad (4.83)$$

A partir da Eq. (4.43) obtemos  $R_L = -R_R^* T / T^*$ , substituindo na Eq. (4.83) e usando  $|R_R|^2 + |T|^2 = 1$ , obtemos

$$e^{2i(qL+\delta)} - 2|T| e^{i(qL+\delta)} - 1 = 0 , \quad (4.84)$$

onde  $\delta(k)$  é definido segundo a Eq. (4.78). Resolvendo a Eq. (4.84) obtemos

$$e^{i(qL+\delta)} = |T| \pm i\sqrt{1 - |T|^2} , \quad (4.85)$$



de onde obtemos as soluções

$$q_n^\pm = \frac{2\pi n}{L} - \frac{\delta(q_n) \pm \cos^{-1} |T|}{L}. \quad (4.86)$$

Já que temos dois conjuntos de soluções e nada nos diz apriori qual das duas devemos considerar, na primeira soma continua da Eq. (4.37) devemos considerar estes dois conjuntos. Mas, devemos multiplicar pelo fato  $1/2$ , para não contar duas vezes o mesmo valor de  $q$ . Agora vejamos quais valores de  $n_0$  e  $N'$ , definidos na Eq. (4.50), correspondem aos valores de  $q^\pm = 0$  e  $q^\pm = \Lambda$ . Fazendo  $q^\pm = 0$  na Eq. (4.86) e usando o teorema de Levinson  $\delta(0) = \mathcal{N}\pi$ , obtemos

$$n_0 = \frac{\mathcal{N}}{2} \pm \frac{\cos^{-1} |T(0)|}{2\pi}. \quad (4.87)$$

Como no caso dos potenciais não reflexivos obtemos  $N' = N$ , já que  $\delta(\Lambda) \rightarrow 0$  e  $|T(\Lambda)| \rightarrow 1$ . Agora, dado que  $0 \leq |T| \leq 1$  e dado que em geral  $|T|$  é uma função crescente de  $q$ , concluímos que  $|T(0)|$  é o seu valor mínimo, isto é  $|T(0)| \approx 0$ <sup>4</sup>. Logo podemos escrever para a Eq. (4.39),

$$n_0 = \frac{\mathcal{N}}{2} \pm \frac{1}{4}. \quad (4.88)$$

Para continuarmos a nossa análise vamos supor que  $\mathcal{N} = 2\mathcal{M}$  é par. Então temos

$$n_0 = \mathcal{M} \pm \frac{1}{4}, \quad (4.89)$$

onde vemos que  $n_0$  não se encontra no espectro, ele não é inteiro. Então no caso  $+$  a primeira soma continua na Eq. (4.50) deve começar em  $\mathcal{M} + 1$  enquanto que no caso  $-$  a soma deve começar em  $\mathcal{M}$ . Também devemos multiplicar pelo fator  $1/2$  a contribuição do termo  $n = 0$  na segunda soma continua já que o momento correspondente  $k = 0$  é

---

<sup>4</sup>Estrictamente  $|T(0)|$  não é zero, ele é muito pequeno mas não zero. Lembre-se por exemplo que  $T(0)$  possui uma fase dada pelo teorema de Levinson.

contada somente uma vez na expressão original, Eq. (4.36). Então podemos escrever para a Eq. (4.50) a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \Delta M &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=\mathcal{M}+1}^{\mathcal{N}} \sqrt{(q_n^+)^2 + m^2} + \sum_{n=\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} \sqrt{(q_n^-)^2 + m^2} \right) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \sqrt{k_n^2 + m^2} - \frac{m}{2} - M_1 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i - \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\mathcal{M}} \sqrt{(q_n^+)^2 + m^2} + \sum_{n=1}^{\mathcal{M}-1} \sqrt{(q_n^-)^2 + m^2} + m \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \left( \sqrt{(q_n^+)^2 + m^2} + \sqrt{(q_n^-)^2 + m^2} - 2\sqrt{k_n^2 + m^2} \right) - M_1. \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

Usando a Eq. (4.86) obtemos

$$\sqrt{(q_n^\pm)^2 + m^2} = \sqrt{k_n^2 + m^2} - \frac{k_n (\delta(k_n) \pm \cos^{-1} |T(k_n)|)}{L\sqrt{k_n^2 + m^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}). \quad (4.91)$$

Usando a Eq. (4.91) na Eq. (4.90), e tomando o limite contínuo  $L \rightarrow \infty$  obtemos,

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} -\mathcal{M}m - \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{2\pi} \delta(k) \Big|_0^\Lambda + \int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi} \omega(k) \frac{d}{dk} \delta(k) - M_1, \quad (4.92)$$

expressão que é idêntica à expressão dada pela Eq. (4.61). Usando o teorema de Levinson, as Eqs. (4.62) e (4.30), e tomando limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  recuperamos a formula dada pela Eq. (4.79). O caso  $\mathcal{N}$  ímpar segue os mesmos passos obtendose a mesma Eq. (4.79).

Na seguinte seção vamos usar a formula dada pela Eq. (4.79) para calcular a primeira correção quântica para a massa dos sólitons no modelo  $\phi^2 \cos^2 \ln(\phi^2)$ , modelo no qual, as flutuações quânticas são descritas pela equação de Schrödinger num potencial reflexivo.

## 4.4 O modelo $\Phi^2 \cos^2 \ln(\Phi^2)$

No capítulo anterior introduzimos o modelo com densidade de potencial dado por

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 B^2 \Phi^2 \cos^2 \left[ \frac{1}{2B} \ln \left( \frac{\alpha^2 \Phi^2}{9m^4} \right) \right]. \quad (4.93)$$

Como foi visto no capítulo anterior, o modelo descrito pela densidade de potencial dada pela Eq. (4.93) admite soluções estáticas de energia finita dadas por

$$\Phi_c(x) = \pm \frac{3m^2}{\alpha} \exp \left[ n\pi B \pm B \tan^{-1} \sinh(mx) \right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.94)$$

A energia associada às configurações dadas pela Eq. (4.94) é dada por

$$E[\Phi_c] = \frac{9m^5 B^2 e^{2Bn\pi}}{\alpha^2} I(B), \quad (4.95)$$

onde  $I(B)$  é dado por

$$I(B) = \int_{-1}^1 ds e^{2B \sin^{-1}(s)}. \quad (4.96)$$

As flutuações quânticas ao redor das configurações clássicas dadas pela Eq. (4.94) são descritas pela Eq. (4.13) com  $U''[\Phi_c(x)]$  obtido a partir da Eq. (4.93). O resultado para  $U''[\Phi_c(x)]$  é

$$U''[\Phi_c(x)] = m^2 \left[ 1 + \frac{(B^2 - 2)}{\cosh^2(mx)} \pm 3B \frac{\tanh(mx)}{\cosh(mx)} \right]. \quad (4.97)$$

De onde usando  $\mathcal{V}(x) = U''[\Phi_c(x)] - m^2$  obtemos da Eq. (4.31)

$$\langle \mathcal{V} \rangle = 2(B^2 - 2). \quad (4.98)$$

O potencial dado pela Eq. (4.97) é o caso (fazendo um escalamento  $z = mx$ )  $A = 1$  do potencial descrito pela Eq. (3.67). A equação possui um autovalor discreto igual a zero.

O coeficiente de transmissão é obtido a partir da Eq. (3.73) fazendo-se o escalamento  $k = q/m$ ,

$$T(k) = \frac{\Gamma(-1 - ik/m)\Gamma(2 - ik/m)\Gamma(1/2 \mp iB - ik/m)\Gamma(1/2 \pm iB - ik/m)}{\Gamma(-ik/m)\Gamma(1 - ik/m)\Gamma^2(1/2 - ik/m)}. \quad (4.99)$$

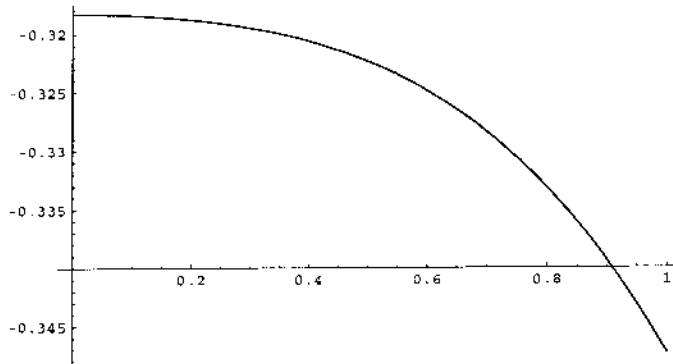
Substituindo as Eqs. (4.98) e (4.99) na Eq. (4.79) e depois de algumas manipulações algébricas obtemos

$$\frac{\Delta M}{m} = -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2i} \ln \left[ \frac{\Gamma(1/2 - iB - iq)\Gamma(1/2 + iB - iq)\Gamma^2(1/2 + iq)}{\Gamma(1/2 + iB + iq)\Gamma(1/2 - iB + iq)\Gamma^2(1/2 - iq)} \right] + \frac{B^2}{q} \right\} \quad (4.100)$$

onde fizemos a mudança na variável de integração  $k/m \rightarrow q$ . A integral na Eq. (4.100) não pode ser efetuada analiticamente, mas para  $B = 0$  essa integral se anula e neste caso obtemos  $\Delta M = -m/\pi$ , como esperado, igual à correção quântica à massa do soliton no modelo de sine-Gordon. Isto é facilmente compreensível, pois para  $B = 0$  o potencial  $U''[\Phi_c(x)]$  dado pela Eq. (4.97) se reduz ao dado pela Eq. (4.68). Para valores de  $B \neq 0$  podemos integrar numericamente a integral da Eq. (4.100). O resultado obtido é mostrado na Fig. 4.1, de onde podemos notar que a correção quântica à massa do soliton é negativa e decresce mais e mais a medida que  $B$  cresce. Embora não tenhamos calculado  $\Delta M$  analiticamente, devemos chamar atenção ao fato de que todos os passos foram feitos analiticamente e sómente o passo final foi feito numericamente. Então, o nosso cálculo, embora não seja exato, é preciso. Frequentemente os modelos de sine-Gordon e  $\Phi^4$  são usados para testar métodos aproximados ou numéricos, desenvolvidos para calcular correções quânticas ao redor de configurações clássicas (ver por exemplo a Ref. [42]). Aqui apresentamos outro modelo que pode ser usado para este fim. Acreditamos que este modelo é mais adequado para testar métodos numéricos ou aproximados dado que os modelos de sine-Gordon e  $\Phi^4$  são muito especiais: as flutuações quânticas ao redor das soluções clássicas são descritas por equações de Schrödinger em potenciais irreflexivos.

Neste capítulo foi considerado a renormalização à correção quântica a um loop para a energia de configurações clássicas. Restringimo-nos ao caso em que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{V}(x) \rightarrow 0$ . Em especial no caso dos sólitons em modelos escalares em (1+1) dimensões foi dado uma expressão renormalizada para a primeira correção quântica à massa do soliton em modelos tais que  $U''[\Phi_c(\pm\infty)] = m^2$ . Mas no capítulo anterior construímos modelos nas

Figura 4.1:  $\frac{\Delta M}{m}$  em função de  $B$ .

quais está última exigência não se cumpria. Assim, por exemplo no modelo  $\Phi^6$  triplamente degenerado, o potencial, na equação de Schrödinger que descreve as flutuações quânticas, tem limites assintóticos diferentes. No capítulo seguinte vamos considerar este último caso.

## Capítulo 5

# A não existência de sólitons a nível quântico

Como foi mencionado na parte final do capítulo anterior, neste capítulo vamos considerar o caso de modelos de teoria de campos em (1+1) dimensões, no caso em que  $U''[\Phi_c(-\infty)] \neq U''[\Phi_c(x)]$ . Vamos mostrar que em geral estes modelos não possuem estados quânticos solitônicos, isto é, estes modelos admitem sólitons somente a nível clássico, mas não a nível quântico. Também vamos ver que, acoplando o campo escalar a um campo fermiônico, novamente aparece um estado quântico solitônico, ou seja a inclusão do campo fermiônico permite a existencia do sóliton ainda a nível quântico. Este fenômeno não é novo, na Ref. [43] os autores mostraram mediante um cálculo explícito, tal ocorrência no modelo  $\Phi^6$  triplamente degenerado. Nós vamos mostrar tal fenômeno em forma geral. Vamos considerar em primeiro lugar o caso em que  $U[\Phi_c(x)]$  é finito e depois o caso em que é infinito.

### 5.1 Modelos onde $U''[\Phi_c(x)]$ é finito

Vamos considerar um modelo escalar em (1+1) dimensões com densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi), \quad (5.1)$$

onde  $U(\Phi)$  possui pelo menos dois mínimos absolutos. Nesse caso, do capítulo 1 sabemos que existem soluções solitônicas para a equação de movimento. Denotando por  $\Phi_-$  e  $\Phi_+$  dois mínimos vizinhos de  $U(\Phi)$ , sabemos que tais soluções solitônicas ligam esses dois mínimos vizinhos assintoticamente, ou seja temos que  $\Phi_c(x \rightarrow \pm\infty) = \pm\Phi_{\pm}$ . Então, nos casos em que  $U''(\Phi_-) \neq U''(\Phi_+)$  teremos que  $U''[\Phi_c(-\infty)] \neq U''[\Phi_c(\infty)]$ . Consideremos em primeiro lugar, modelos onde  $U''[\Phi_c(x)]$  é finito para todo  $x$ . Exemplos de modelos com esta característica são os modelos descritos pela densidade de potencial dado pela Eq. (3.32). Dentro destes modelos temos os modelos polinomiais triplemente degenerados (por exemplo o modelo  $\Phi^6$ ) descritos pela Eq. (3.33) e os modelos com dois vacuos degenerados (por exemplo, o modelo  $\Phi^8$ ) descritos pela Eq. (3.34). As flutuações quânticas ao redor das soluções clássicas nestes modelos são governadas pela equação de Schrodinger no potencial de Rosen-Morse hiperbólico II no caso em que  $B \neq 0$  e dado pela Eq. (3.9). As soluções deste potencial são discretas e contínuas e vem dadas respetivamente pelas Eqs. (3.10) e (3.12). Denotando  $U''(\Phi_-) = m_-^2$  e  $U''(\Phi_+) = m_+^2$  podemos escrever, para qualquer modelo com as características acima descritas, o comportamento assintótico de  $U''[\Phi_c(x)]$  da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U''[\Phi_c(x)] = m_{\pm}^2 . \quad (5.2)$$

Supondo  $m_-^2 < m_+^2$ , o comportamento assintótico das soluções contínuas da equação de Schrodinger no potencial  $U''[\Phi_c(x)]$ , são dadas por

$$\phi_L(x \rightarrow -\infty) = e^{iqx} + R_L e^{-iqx} , \quad \phi_L(x \rightarrow \infty) = T_L e^{iq+x} , \quad (5.3)$$

ou

$$\phi_R(x \rightarrow -\infty) = T_R e^{-iqx} , \quad \phi_R(x \rightarrow \infty) = e^{-iq+x} + R_R e^{iq+x} , \quad (5.4)$$

onde  $\phi_L(x)$  e  $\phi_R(x)$  descrevem as soluções de espalhamento pela esquerda e direita respetivamente. Os autovalores continuos correspondentes são dados por  $\omega_q^2 = q^2 + m_-^2 = q_+^2 + m_+^2$ . Já que o espectro de  $\omega_q$  vai desde  $m_-$  ate infinito, então vemos que para  $m_- < \omega_q < m_+$ ,  $q_+ = \sqrt{q^2 + m_-^2 - m_+^2} = i\sqrt{m_+^2 - m_-^2 - q^2}$ , é imaginario. Neste caso nas soluções dadas pelas Eqs. (5.3) e (5.4) devemos fazer a substituição  $q_+ = i\kappa$ , sendo que  $\kappa = \sqrt{m_+^2 - m_-^2 - q^2}$ . De outro lado para  $m_+ < \omega_q < \infty$  temos que  $q_+$  é real. A correção quântica à massa do soliton a um loop vem dada por

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \sum_{q \geq 0} \omega_q - \sum_{k \geq 0} \omega_k^0, \quad (5.5)$$

onde  $\omega_k^0$  são as auto-frequencias na ausencia do sóliton e dados por  $\omega_k^0 = \sqrt{k^2 + m_-^2}$ . Devemos chamar atenção ao fato de subtrairmos, na Eq. (5.5), a energia do ponto zero das flutuações quânticas ao redor da configuração trivial  $\Phi_-$  e não a energia das flutuações quânticas ao redor de  $\Phi_+$ . Isto se explica pelo fato de  $U''[\Phi_-] = m_-^2$  ser menor que  $U''[\Phi_+] = m_+^2$ , ou seja a energia do ponto zero ao redor das flutuações quânticas ao redor de  $\Phi_-$  é menor ao correspondente em  $\Phi_+$ <sup>1</sup>. Como sabemos, confinando o sistema numa caixa de comprimento  $L$ , e impondo condições periódicas de contorno obtemos o espectro  $k_n = 2\pi n/L$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  de onde se obtem a densidade estados igual a  $L/(2\pi)$ . Para discretizar o espectro contínuo  $\omega_q$  devemos impor condições periódicas de contorno nas soluções dadas pelas Eqs. (5.3)-(5.4). Já que a soma das soluções dadas pelas Eqs. (5.3) e (5.4) é também uma solução da equação de Schrödinger correspondente, devemos considerar uma combinação linear dessas soluções e impor as condições periódicas de fronteira. Isto é, aplicamos condições periódicas de contorno em  $\phi_q(x) = \phi_L(x) + h\phi_R(x)$ ,

<sup>1</sup>Note-se que sendo a energia do ponto zero em ambos casos infinito, esta conclusão só tem sentido quando pensarmos nestas energias propriamente regularizadas, por exemplo, impondo um limite ou corte nos valores da energia momento.



onde  $h$  é uma constante. As condições de contorno que impomos são  $\phi_q(-L/2) = \phi_q(L/2)$  e  $\frac{d}{dx}\phi_q|_{x=-L/2} = \frac{d}{dx}\phi|_{x=L/2}$ . Substituindo  $\phi_L(x)$  e  $\phi_R(x)$  dadas pelas Eqs. (5.3) e (5.4) em  $\phi_q(x)$  impondo  $\phi_q(-L/2) = \phi_q(L/2)$  obtemos,

$$e^{-iqL/2} + R_L e^{iqL/2} - T_L e^{iq+L/2} = h \left( e^{-iq+L/2} R_R e^{q+L/2} - T_R e^{iqL/2} \right) \quad (5.6)$$

e impondo  $\frac{d}{dx}\phi_q|_{x=-L/2} = \frac{d}{dx}\phi|_{x=L/2}$  obtemos

$$q \left( R_L e^{iqL/2} - e^{-iqL/2} \right) + q_+ T_L e^{iq+L/2} = h \left[ q_+ \left( e^{-iq+L/2} + R_R e^{iq+L/2} \right) - q T_R e^{iqL/2} \right]. \quad (5.7)$$

Eliminando  $h$  das Eqs. (5.6) e (5.7) obtemos

$$1 = \frac{q - q_+}{q + q_+} \left( R_L e^{iqL} - R_R e^{iq+L} \right) + (R_L R_R - T_L T_R) e^{i(q+q_+)L} + 4 \frac{q_+ T_L}{q + q_+} e^{i(q+q_+)L/2}. \quad (5.8)$$

Para obter os possíveis valores de  $q$ , devemos resolver a Eq. (5.8) nos seguintes casos:

$$\underline{m_- < \omega_q < m_+}$$

Neste caso temos que  $q_+ = i\kappa$ , logo podemos desprezar os três últimos termos do lado direito da Eq. (5.8) por conterem termos da forma  $e^{iq+L} = e^{-\kappa L}$ , o qual se anula rapidamente quando  $L \rightarrow \infty$ . Logo temos que

$$1 = \left( \frac{q - i\kappa}{q + i\kappa} \right) R_L e^{iqL}. \quad (5.9)$$

Usando o fato de que o Wronskiano é constante e considerando  $W[\phi_L(-\infty), \phi_L^*(\infty)]$  podemos mostrar facilmente que  $|R_L| = 1$ . Escrevendo então  $R_L = e^{-i(i \ln R_L)}$  e a Eq. (5.9) pode ser escrita como

$$1 = \exp[i(qL + \theta - i \ln R_L)], \quad (5.10)$$

onde  $\theta$  é definido tal que

$$e^{i\theta} = \frac{q - i\kappa}{q + i\kappa}. \quad (5.11)$$

Da Eq. (5.10) obtemos

$$q_n = \frac{2\pi n}{L} - \frac{(\theta - i \ln R_L)}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (5.12)$$

$$\underline{m_+ < \omega_q < \infty}$$

Neste caso considerando os Wronskianos  $W[\phi_L(x), \phi_L^*(x)]$ , e  $W[\phi_R(x), \phi_R^*(x)]$  obtemos respetivamente,

$$q_+ |T_L|^2 = q (1 - |R_L|^2), \quad (5.13)$$

e

$$q |T_R|^2 = q_+ (1 - |R_R|^2). \quad (5.14)$$

Considerando os Wronskianos  $W[\phi_L(x), \phi_R(x)]$   $W[\phi_L(x)^*, \phi_R(x)]$  obtemos respetivamente,

$$q T_R = q_+ T_L \quad (5.15)$$

e

$$q R_L^* T_R = -q_+ R_R T_L^*. \quad (5.16)$$

Substituindo a Eq. (5.15) na Eq. (5.16) obtemos

$$R_L^* T_L = -R_R T_L^*. \quad (5.17)$$

Escrevendo

$$T_L = |T_L| e^{i\delta} \quad (5.18)$$

e substituindo na Eq. (5.17) obtemos,

$$R_R = -R_L^* e^{2i\delta}. \quad (5.19)$$

Usando as Eqs. (5.15), (5.19) e (5.13) obtemos para  $(R_L R_R - T_L T_R)$

$$\begin{aligned} (R_L R_R - T_L T_R) &= -|R_L|^2 e^{2i\delta} - \frac{q_+}{q} |T_L|^2 e^{2i\delta} \\ &= -e^{2i\delta} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Substituindo a Eq. (5.20) na Eq. (5.8) obtemos

$$1 = -e^{2i\Delta} \left\{ 1 - 2e^{-i\Delta} \left[ 2\frac{q_+}{q+q_+}|T_L| + \frac{1}{2} \left( \frac{q-q_+}{q+q_+} \right) (R_L e^{i(qL-\Delta)} + R_L^* e^{-i(qL-\Delta)}) \right] \right\}, \quad (5.21)$$

onde

$$\Delta = \delta + (q+q_+) \frac{L}{2}. \quad (5.22)$$

Vamos provar que o termo

$$Y = 2\frac{q_+}{q+q_+}|T_L| + \frac{1}{2} \left( \frac{q-q_+}{q+q_+} \right) (R_L e^{i(qL-\Delta)} + R_L^* e^{-i(qL-\Delta)}) \quad (5.23)$$

é tal que

$$|Y| \leq 1. \quad (5.24)$$

Escrevendo  $R_L = |R_L|e^{i\delta_R}$  e substituindo na Eq. (5.23) obtemos

$$Y = 2\frac{q_+}{q+q_+}|T_L| + \left( \frac{q-q_+}{q+q_+} \right) |R_L| \cos(qL + \delta_R - \Delta). \quad (5.25)$$

Já que  $q^2 + m_-^2 = q_+^2 + m_+^2$ , temos que  $q^2 > q_+^2$ , dado que  $m_+^2 > m_-^2$ . Supondo para simplificar que  $q$  e  $q_+$  são ambos positivos temos  $q > q_+$ . Elevando ao quadrado a Eq.

(5.25) temos que

$$\begin{aligned} Y^2 &= \left[ 2\frac{q_+}{q+q_+}|T_L| + \left( \frac{q-q_+}{q+q_+} \right) |R_L| \cos(qL + \delta_R - \Delta) \right]^2 \\ &\leq \left[ 2\frac{q_+}{q+q_+}|T_L| + \left( \frac{q-q_+}{q+q_+} \right) |R_L| \right]^2 \\ &\leq 1, \end{aligned} \quad (5.26)$$

dado que  $|T_L| \leq 1$  e  $R_L \leq 1$ . Usando a Eq. (5.23) na Eq. (5.21) obtemos

$$e^{2i\Delta} - 2Ye^{i\Delta} + 1 = 0, \quad (5.27)$$

da qual obtemos

$$e^{i\Delta} = Y \pm i\sqrt{1 - Y^2}. \quad (5.28)$$

Pelo fato de  $|Y| \leq 1$ , podemos concluir da Eq. (5.28) que

$$\cos(\Delta) = Y, \quad \sin(\Delta) = \pm\sqrt{1 - Y^2}, \quad (5.29)$$

Quer dizer temos dois conjuntos de soluções para  $\Delta$ . Estas soluções vem dadas por

$$\Delta = 2\pi n \pm \cos^{-1} Y, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.30)$$

Substituindo a Eq. (5.30) na Eq. (5.22) obtemos para o espectro de  $q$ ,

$$\frac{q_n + q_+}{2} = \frac{2\pi n}{L} - \frac{\delta \pm \cos^{-1} Y}{L}. \quad (5.31)$$

Descompondo a soma sobre  $q$  na Eq. (5.5) temos,

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i + \sum_{q=0}^{\Delta m} \sqrt{m_-^2 + q^2} + \sum_{q=\Delta m}^{\Lambda} \sqrt{m_-^2 + q^2} - \sum_{k=0}^{\Lambda} \sqrt{m_-^2 + k^2}, \quad (5.32)$$

onde  $\Delta m = \sqrt{m_+^2 - m_-^2}$  e  $\Lambda$  denota o corte tanto na soma sobre  $q$  quanto na soma sobre  $k$  para darmos sentido as somas divergentes. O segundo termo na Eq. (5.32) corresponde a soma sobre as auto-frequencias tais que  $m_- < \omega_q < m_+$ , enquanto que o terceiro termo representa a soma sobre as auto-frequencias tais que  $m_+ < \omega_q < \infty$ . Usando a Eq. (5.12) obtemos

$$\sqrt{q_n^2 + m_-^2} = \sqrt{k_n^2 + m_-^2} - \frac{k_n(\theta - i \ln R_L)}{L\sqrt{k_n^2 + m_-^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}). \quad (5.33)$$

De outro lado a partir da Eq. (5.31) obtemos

$$\sqrt{q_n^2 + m_-^2} = \sqrt{\left(k_n + \frac{\Delta m^2}{k_n}\right)^2 + m_-^2} + \frac{(\delta \pm \cos^{-1} Y)(\Delta m^2 - k_n^2)}{L\sqrt{(k_n^2 + \Delta m^2)^2 + m_-^2 k_n^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}). \quad (5.34)$$

Escrevendo a versão discreta da Eq. (5.32), substituindo as Eqs. (5.33) e (5.34), e tomando o limite  $L \rightarrow \infty$  obtemos<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 \Delta M &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i - \int_0^{\Delta m} \frac{dk}{2\pi} \frac{k(\theta - i \ln R_L)}{\sqrt{k^2 + m_-^2}} + L \int_0^{\Delta m} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{k^2 + m_-^2} \\
 &\quad + L \int_{\Delta m}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\left(k + \frac{\Delta m}{k}\right)^2 + m_-^2} - L \int_0^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{k^2 + m_-^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Delta m}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{(\delta + \cos^{-1} Y)(\Delta m^2 - k^2)}{\sqrt{(k^2 + \Delta m^2)^2 + m_-^2 k^2}} + \int_{\Delta m}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{(\delta - \cos^{-1} Y)(\Delta m^2 - k^2)}{\sqrt{(k^2 + \Delta m^2)^2 + m_-^2 k^2}} \right\} \\
 &= L \left[ \int_0^{\Delta m} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{k^2 + m_-^2} + \int_{\Delta m}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\left(k + \frac{\Delta m}{k}\right)^2 + m_-^2} - \int_0^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{k^2 + m_-^2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i - \int_0^{\Delta m} \frac{dk}{2\pi} \frac{k(\theta - i \ln R_L)}{\sqrt{k^2 + m_-^2}} + \int_{\Delta m}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{\delta(\Delta m^2 - k^2)}{\sqrt{(k^2 + \Delta m^2)^2 + m_-^2 k^2}}. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Note a dependencia da Eq. (5.35) em  $L \rightarrow \infty$ , isto é, aparece um infinito que não pode ser eliminado pelos contratermos usuais da teoria da renormalização. Isto é, as correções quânticas em modelos destes tipos são expressões não renormalizáveis. Note também que somente quando  $\Delta m = 0$  o termo dependente em  $L$  se anula identicamente na Eq. (5.35), isto é a correção quântica à massa do soliton é livre deste tipo de divergência (infravermelha) somente em modelos tais que  $U''[\Phi_c(-\infty)] = U''[\Phi_c(\infty)]$ . Em conclusão podemos dizer que o soliton, embora ela exista a nível clássico, ele não faz sentido no nível quântico. Poderia se pensar que a divergencia dependente em  $L$  na Eq. (5.35) aparece como consequencia de confinar o sistema numa caixa de comprimento  $L$ . Para nos convencer de que este não é o caso, consideremos a definição equivalente para a correção quântica à massa do soliton e dado pela Eq. (4.28) com  $D = 2$ . O primeiro termo da expansão vem dado pela Eq. (4.30), o qual é proporcional a  $\langle \mathcal{V} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(x)$ . Note que quando  $U''[\Phi_c(-\infty)] \neq U''[\Phi_c(\infty)]$ ,  $\langle \mathcal{V} \rangle$  é infinito. Este infinito é proporcional ao intervalo

<sup>2</sup>Note que não estamos nos preocupando em obter os índices adequados  $n_0$  e  $N'$  correspondentes aos momentos  $q = 0$  e  $q = \Lambda$ , como no capítulo anterior. De fato estamos considerando  $n_0 = 0$  e  $N' = \Lambda$  e portanto o resultado que vamos obter difere do correto por uma quantidade finita. Porém, a maior conclusão desta seção não depende deste fato.

de integração sobre  $x$ . Logo vemos que a natureza do infinito é da mesma natureza que na Eq. (5.35).

## 5.2 Modelos onde $U''[\Phi_c(x)]$ é infinito

Nesta seção vamos considerar o caso no qual  $U''[\phi(-\infty)]$  ou  $U''[\phi(\infty)]$  é infinito. Este é o caso do modelo construído na seção 3.3, onde as flutuações quânticas são descritas pelo potencial de Morse. Vamos supor sem perda de generalidade que  $U''[\Phi_c(-\infty)] = m^2$  é finito e que  $U''[\Phi_c(\infty)]$  é infinito. Neste caso o potencial que descreve as flutuações quânticas é do tipo potencial de Morse e mostrado na Fig. (3.2). As soluções tem o comportamento assintótico dado pela Eq. (3.55),

$$\phi_q(x) = \begin{cases} e^{iqx} + R_q e^{-iqx} & x \rightarrow -\infty \\ 0 & x \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (5.36)$$

onde agora não existem mais soluções de espalhamento pela direita. Confinando o sistema numa caixa de comprimento  $L$ , e aplicando condições periódicas de contorno  $\phi_{-L/2} = \phi(L/2)$ , obtemos

$$1 = e^{i(qL-\pi)} R_q \quad (5.37)$$

e dado que não existe coeficiente de transmissão, o modulo do coeficiente de reflexão  $|R_q| = 1$ . Escrevendo  $R_q = e^{i\delta}$  obtemos da Eq. (5.37)

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{2\pi n}{L} - \frac{\delta + \pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &= k_n - \frac{\delta + \pi}{L}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Da Eq. (5.38) obtemos

$$\sqrt{q_n^2 + m^2} = \sqrt{k_n^2 + m^2} - \frac{k_n(\delta + \pi)}{L\sqrt{k_n^2 + m^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}). \quad (5.39)$$

Substituindo a Eq. (5.39) na Eq. (5.5) e tomando o limite  $L \rightarrow \infty$  obtemos

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \omega_i - \int_0^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{k(\delta + \pi)}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (5.40)$$

Note-se que a Eq. (5.40) é o limite da Eq. (5.35) no limite  $\Delta m \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$ . Embora a Eq. (5.40) não dependa de  $L$ , não podemos concluir que a correção quântica à massa faça sentido. Para mostrar que a Eq. (5.40) possui divergências ainda mais graves que no caso  $U''[\Phi_c(x)]$  finito, vamos nos restringir ao modelo  $\phi^2(\ln \phi^2)^2$ . Nesse caso  $U''[\Phi_c(x)]$  é dado pelo potencial de Morse. No apêndice B temos resolvido para o coeficiente de reflexão  $R_k$ , a partir do qual obtivemos  $\delta$ , dado pela Eq. (B.12),

$$\delta(k) = \text{Arg} \left( 2^{-2ik/m} \frac{\Gamma(-1 - ik/m)\Gamma(2ik/m)}{\Gamma(-1 + ik/m)\Gamma(-2ik/m)} \right). \quad (5.41)$$

Podemos ver que para  $k \rightarrow 0$ ,  $\delta(k)$  está bem definido e é finito, então neste caso não temos divergências infravermelhas. Mas se analisarmos o comportamento de  $\delta(k)$  para  $k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$  obtemos usando as propriedades assintóticas da função Gamma

$$\delta(k \rightarrow \Lambda) = \frac{\Lambda}{m} \ln \frac{\Lambda}{m} - \frac{\Lambda}{m} + \pi + \frac{m}{\Lambda} (1 + B_2/2), \quad (5.42)$$

onde  $B_2$  é o número de Bernoulli. Na Eq. (5.42) podemos notar que além da divergência usual em (1+1) dimensões, dado pelo último termo da Eq. (5.42) existem outras divergências mais complicadas. Em particular a divergência dada pelo primeiro termo da Eq. (5.42) não poderá ser eliminado via a introdução de contratermos usuais. Concluímos então que como no caso de  $U''[\Phi_c]$  finito, os sólitons no modelo  $\phi^2 \ln^2(\phi^2)$ , só fazem sentido a nível clássico. Embora tenhamos feito a prova com o modelo específico descrito pelo potencial de Morse, podemos concluir o mesmo olhando a estrutura de  $\langle \mathcal{V} \rangle$ ,

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(x), \quad (5.43)$$

onde  $\mathcal{V}(x) = U''[\Phi_c(x)] - m^2$ . Já que  $U''[\Phi_c(-\infty)] = m^2$ , então  $\mathcal{V}(-\infty) = 0$ , mas já que  $\mathcal{V}(\infty) \rightarrow \infty$ , podemos escrever para a integral na Eq. (5.43)

$$\langle \mathcal{V} \rangle \sim \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{2} \mathcal{V}(L/2), \quad (5.44)$$

onde podemos notar que a estrutura da divergência é mais complicada já que neste caso  $\mathcal{V}(L/2)$  é infinito.

Concluimos então que, em quaisquer modelo escalar bi-dimensional, tal que as flutuações quânticas são descritas por potências que possuem limites assintóticos diferentes, não existem estados quânticos solitônicos. Eles só fazem sentido a nível clássico.

### 5.3 Acoplamento com um campo fermiônico

Vamos acoplar o campo escalar  $\Phi$  a um campo fermiônico  $\Psi$  de Majorana, da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi) + \frac{1}{2} \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - G(\Phi)] \Psi, \quad (5.45)$$

onde  $G(\Phi)$  em principio é uma função qualquer de  $\Phi$ . Vamos quantizar o sistema descrito pela densidade Lagrangeana dada pela Eq. (5.45) ao redor das soluções clássicas  $\Phi_c(x)$ .

O Hamiltoniano correspondete à densidade Lagrangeana da pela Eq. (5.45) é

$$H = \frac{1}{2} \int dx \left\{ \Pi^2 + (\partial_x \Phi)^2 + U(\Phi) + \bar{\Psi} [-i\gamma^1 \partial_x + G(\Phi)] \Psi \right\}, \quad (5.46)$$

onde  $\Pi = \dot{\Phi}$  é o momento conjugado associado ao campo  $\Phi$ . Para o campo  $\Psi$  o momento conjugado é  $\Pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\bar{\Psi}\gamma^0$ . As equações de movimento para os campos  $\Phi$  e  $\Psi$  são governadas pelas equações de Heisenberg,

$$\dot{\Phi} = i[\Phi, H], \quad \dot{\Psi} = i[\Psi, H]. \quad (5.47)$$



Usando-se as regras de quantização para os campos bosônico e fermiônico

$$[\Phi(x, t), \Pi(x', t)] = i\delta(x - y), \quad [\Phi(x, t), \Phi(x', t)] = [\Pi(x, t), \Pi(x', t)] = 0 \quad (5.48)$$

e

$$\{\Psi(x, t), \Pi_\Psi(x', t)\} = i\delta(x - y), \quad \{\Psi(x, t), \Psi(x', t)\} = \{\Pi_\Psi(x, t), \Pi_\Psi(x', t)\} = 0 \quad (5.49)$$

nas equações de Heisenberg (5.47) obtemos

$$\square\Phi + U'[\Phi] + G'(\Phi)\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad (5.50)$$

e

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - G(\Phi)]\Psi = 0. \quad (5.51)$$

Expandindo agora o operador de campo  $\Phi$  em torno das soluções estaticas dadas  $\Phi_c$ ,  $\Phi = \Phi_c + \eta$  e usando a equação de movimento satisfeita por  $\Phi_c$ , Eq. (2.3), obtemos para as Eqs. (5.50) e (5.51) respetivamente,

$$\{\square + U''[\phi_c(x)]\}\eta(x, t) = 0 \quad (5.52)$$

e

$$\{i\gamma^\mu\partial_\mu - G[\Phi_c(x)]\}\Psi(x, t) = 0, \quad (5.53)$$

onde temos desprezados as não linearidades nos operadores de campo  $\eta$  e  $\Psi$ . A solução mais geral para  $\eta(x, t)$  pode ser escrita como

$$\eta(x, t) = \sum_n \left( \hat{a}_n \phi_n(x) e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_n^\dagger \phi_n^*(x) e^{i\omega_n t} \right). \quad (5.54)$$

Substituindo a Eq. (5.54) na Eq. (5.52) obtemos

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U''[\phi_c(x)] \right] \phi_n(x) = \omega_n^2 \phi_n(x). \quad (5.55)$$

Da mesma forma podemos escrever a solução mais geral para  $\Psi$ . Escrevendo  $\Psi$  em componentes<sup>3</sup>,

$$\Psi(x, t) = \sum_n \left\{ \left( \hat{b}_n u_n(x) e^{-i\bar{\omega}_n t} + \hat{b}_n^\dagger u_n^*(x) e^{i\bar{\omega}_n t} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \hat{b}_n v_n(x) e^{-i\bar{\omega}_n t} + \hat{b}_n^\dagger v_n^*(x) e^{i\bar{\omega}_n t} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.56)$$

substituindo na Eq. (5.53) e usando a seguinte representação para as matrizes  $\gamma^\mu$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad (5.57)$$

obtemos

$$\left\{ \frac{d}{dx} + G[\Phi_c(x)] \right\} u_n(x) = i\bar{\omega}_n v_n(x), \quad (5.58)$$

$$\left\{ \frac{d}{dx} - G[\Phi_c(x)] \right\} v_n(x) = i\bar{\omega}_n u_n(x). \quad (5.59)$$

Das Eqs. (5.58) e (5.59) obtemos,

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + G^2[\Phi_c(x)] - \frac{d}{dx} G[\Phi_c(x)] \right] u_n(x) = \bar{\omega}_n^2 u_n(x) \quad (5.60)$$

e

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + G^2[\Phi_c(x)] + \frac{d}{dx} G[\Phi_c(x)] \right] v_n(x) = \bar{\omega}_n^2 v_n(x) \quad (5.61)$$

Substituindo as Eqs. (5.54) e (5.56) na Eq. (5.48), com  $\Phi(x, t) = \Phi_c(x) + \eta(x, t)$  e usando as propriedades de ortogonalidade das bases  $\{\phi_n\}$ ,  $\{u_n\}$  e  $\{v_n\}$ , obtemos

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad \{\hat{b}_n, \hat{b}_m^\dagger\} = \delta_{nm}, \quad (5.62)$$

com todos os outros comutadores ou anticonmutadores iguais a zero. Expandindo o campo  $\Phi$  ao redor de  $\Phi_c(x)$  no Hamiltoniano dado pela Eq. (5.46), mantendo somente os termos lineares nos operadores de campo  $\eta$  e  $\Psi$ , substituindo as Eqs. (5.54) e (5.56) na

<sup>3</sup>Estamos usando a representação de Majorana, onde os férmions de Majorana tem componentes reais

expressão resultante e usando a ortogonalidade das bases de funções  $\{\phi_n\}$ ,  $\{u_n\}$  e  $\{v_n\}$  obtemos,

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger) \omega_n + \frac{1}{2} \sum_n (\hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n + \hat{b}_n \hat{b}_n^\dagger) \bar{\omega}_n. \quad (5.63)$$

Das Eqs. (5.62) e (5.63) obtemos

$$H = \sum_n \left( \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right) \omega_n + \sum_n \left( \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n - \frac{1}{2} \right) \bar{\omega}_n. \quad (5.64)$$

Logo para a energia do estado fundamental teremos,

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_n \bar{\omega}_n. \quad (5.65)$$

Subtraindo a energia dos vácuos triviais tanto nos setores bosônicos como fermiônicos obtemos

$$\Delta M_{\text{BF}} = \frac{1}{2} \left( \sum_n \omega_n - \sum_k \omega_k^0 \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_n \bar{\omega}_n - \sum_k \bar{\omega}_k^0 \right). \quad (5.66)$$

Da Eq. (5.66) podemos ver que existe uma chance de que os infinitos não renormalizáveis (como nos modelos descritos nas seções anteriores) do setor bosônico se anulem, sempre e quando o setor fermiônico também tenha os mesmos tipos de infinitos. A forma mais simples de realizar isto é acoplar o campo bosônico ao campo fermiônico através de  $G(\Phi)$  tal que as auto-frequências bosônicas e fermiônicas sejam iguais. Isto é devemos escolher  $G(\Phi)$  tal que

$$G^2[\Phi_c(x)] - \frac{d}{dx} G[\Phi_c(x)] = U''[\phi_c(x)] \quad (5.67)$$

ou

$$G^2[\Phi_c(x)] + \frac{d}{dx} G[\Phi_c(x)] = U''[\phi_c(x)]. \quad (5.68)$$

Se fizermos a escolha dada pela Eq. (5.67) então temos que a Eq. (5.60) para  $u_n(x)$  é idêntica à Eq. (5.55), então temos que  $u_n(x) = \phi_n(x)$  e  $\omega_n = \bar{\omega}_n$  e podemos determinar

$v_n(x)$  a partir da Eq. (5.58) exceto quando  $\omega_n = 0$ . Fazendo  $\omega_n = 0$  na Eq. (5.59) e integrando obtemos

$$v_0(x) \propto \exp \left\{ \int^x dx' G[\Phi_c(x)] \right\}. \quad (5.69)$$

De outro lado integrando a Eq. (5.58) com  $\omega_n = 0$  obtemos

$$u_0(x) \propto \exp \left\{ - \int^x dx' G[\Phi_c(x)] \right\}. \quad (5.70)$$

Já que  $u_0(x) = \phi_0(x) \propto \frac{d}{dx} \Phi_c(x)$ , e uma auto-função de norma finita, então podemos concluir comparando as Eqs. (5.69) e (5.70) que  $v_0(x)$  não é quadrado integravel. Consequentemente, podemos concluir que não existe solução para  $v_n(x)$  com auto-freqüencia igual a zero. Se fizermos a escolha dada pela Eq. (5.68) simplesmente os papeis de  $u_n(x)$  e  $v_n(x)$  ficam trocados. Para fixar  $G(\Phi)$ , devemos fazer uso da equação de movimento para  $\Phi_c(x)$ ,  $\frac{d}{dx} \Phi_c(x) = \pm \sqrt{2U[\Phi_c(x)]}$ . Logo podemos escrever para as Eqs. (5.67)-(5.68)

$$\begin{aligned} U''[\Phi_c(x)] &= G^2[\Phi_c(x)] \pm \frac{d}{dx} \Phi_c(x) G'[\Phi_c(x)] \\ &= G^2[\Phi_c(x)] \pm \sqrt{2U[\Phi_c(x)]} G'[\phi_c(x)]. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Então, para determinar  $G[\Phi]$  devemos resolver a seguinte equação

$$\sqrt{2U(\Phi)} \frac{d}{d\Phi} G(\Phi) \pm G^2(\Phi) \mp U''(\Phi) = 0. \quad (5.72)$$

A equação anterior deve ser resolvida com a condição  $G(\Phi_-) = \pm \sqrt{U''(\Phi_-)} = \pm m_-$ , sendo  $\phi_-$  o minimo de  $U(\phi)$  tal que, por exemplo,  $\Phi_c(x \rightarrow -\infty) = \Phi_-$ . Esta condição é deduzida a partir da Eq. (5.71) tomando o limite  $x \rightarrow -\infty$  e notando que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{dx} \Phi_c(x) = 0$ . Outra condição é obtida tomando o limite  $x \rightarrow \infty$ , nesse caso obtemos  $G(\phi_+) = \sqrt{U''(\phi_+)} = m_+$ . A Eq. (5.72) é de primeira ordem, mas pelo fato de ela ser não linear, uma condição inicial não determina em forma única a solução. Dado que a equação é

quadrática em  $G(\Phi)$ , para quaisquer condição inicial ela possui duas soluções. As duas soluções independentes da Eq. (5.72) com as condições de fronteira especificadas são<sup>4</sup>,

$$G(\Phi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\Phi} \sqrt{U(\Phi)}. \quad (5.73)$$

Dado que as auto-frequencias bosônicas e fermiônicas são iguais, poderia se pensar que a diferença dada pela Eq. (5.66) é nula. Na verdade isto não é assim. Da Eq. (5.56) podemos notar que a metade da contribuição fermiônica vem dada pelas auto-frequencias associadas a  $u_n(x)$  e a outra metade pelas auto-frequencias associadas a  $v_n(x)$ . Para  $G(\phi)$  dado pela Eq. (5.73) ambas auto-frequencias possuem o mesmo espectro (descontando a auto-frequencia nula, que não contribui). O fato é que, embora ambos espectros sejam iguais as auto-fuções são diferentes e pelo tanto as densidades de estados associado aos modos continuos não serão iguais, somente a contribuição das auto-freqüências discretas se anula. Já que metade das auto-frequencias bosônicas tem a mesma densidade de estados que as auto-frequencias bosônicas, podemos escrever para a Eq. (5.66)

$$\begin{aligned} \Delta M_{\text{BF}} &= \frac{1}{4} \left( \sum_q \omega_q - \sum_k \omega_k^0 \right) - \frac{1}{4} \left( \sum_q \bar{\omega}_q - \sum_k \omega_k^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{q \geq 0} \omega_q - \sum_{k \geq 0} \omega_k^0 \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{q \geq 0} \bar{\omega}_q - \sum_{k \geq 0} \omega_k^0 \right), \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde temos escrito  $\bar{\omega}_q$  em lugar de  $\omega_k$  para chamar atenção ao fato de que as auto-fuções associadas aos modos bosônicos  $\phi_q$  e fermiônicos  $v_q$  são diferentes. O primeiro termo da Eq. (5.74) é duas vezes igual à Eq. (5.35), no caso em que  $U''[\phi_c(x)]$  é infinito, o qual possui um termo infinito, não renormalizavel. No caso em que  $U''[\Phi_c(x)]$  é infinito temos divergencias ainda mais graves. Vamos provar separadamente que a expressão dada pela Eq. (5.74) esta livre de infinitos não renormalizaveis. Supondo que as flutuaçõa quânticas

<sup>4</sup>Neste caso pode-se provar que a o sistema descrito pela Eq. (5.45) é supersimétrico com  $N = 1$  [44]

bosônicas  $\Phi_n$  são governadas pela Eq. (5.60) que também descreve a metade das flutuações quânticas fermiônicas  $u_n(x)$ , então a outra metade das flutuações quânticas fermiônicas  $v_n(x)$  é governada pela Eq. (5.61). Dado que os potenciais nas Eqs. (5.60) e (5.61) são qualitativamente iguais<sup>5</sup> então a contribuição fermiônica à Eq. (5.74) vem dada pela mesma expressão [temos que substituir os coeficientes  $R_L$  e  $T_L$  correspondentes ao potencial que aparece na Eq. (5.61)] que no caso bosônico. Assim por exemplo no caso em que  $U''[\phi_c(x)]$  é finito a contribuição fermiônica vem dada pela (metade da parte continua da) Eq. (5.35), somente devemos trocar os coeficientes  $R_L$  e  $T_L$  pelos correspondentes ao potencial que aparece na Eq. (5.61). Notando que na Eq. (5.35) o termo dependente de  $L$  não depende de  $R_L$  nem de  $T_L$ , então concluímos que o mesmo termo vai aparecer na contribuição fermiônica, logo vai existir um cancelamento dessa divergência não renormalizável. No caso em que  $U''[\phi_c(x)]$  é infinito, a contribuição bosônica vem dada pela Eq. (5.40). A contribuição fermiônica associada a  $v_n(x)$  vem dada por uma expressão similar (dividido por dois), somente temos que trocar o  $\delta$ , pelo delta correspondente às soluções  $v_q(x)$ . Escrevendo uma expressão similar à Eq. (5.36) para  $v_q(x)$  com  $R_q = e^{i\delta}$  substituído por  $R'_q = e^{i\delta'}$  e substituindo nas Eqs. (5.58) e (5.59) obtemos

$$iq \left( e^{-iqL/2} - R_q e^{iqL/2} \right) + G(\Phi_-) \left( e^{-iqL/2} + R_q e^{iqL/2} \right) = i\hbar\omega_q \left( e^{-iqL/2} + R'_q e^{iqL/2} \right) \quad (5.75)$$

e

$$h \left[ iq \left( e^{-iqL/2} - R'_q e^{iqL/2} \right) - G(\Phi_-) \left( e^{-iqL/2} + R'_q e^{iqL/2} \right) \right] = i\omega_q \left( e^{-iqL/2} + R_q e^{iqL/2} \right), \quad (5.76)$$

onde temos multiplicado  $u_q(x)$  por uma constante  $h$  de forma que as Eqs. (5.58) e (5.59)

---

<sup>5</sup>Na linguagem da mecânica quântica supersimétrica se diz que estes potenciais são parceiros supersimétricos. Eles também são conhecidos como potenciais invariantes de forma ("shape invariant potentials")[29].

se cumpram simultaneamente. Eliminando  $h$  das Eqs. (5.75)-(5.76) e usando as relações

$$G(\Phi_-) = \sqrt{U''(\Phi_-)} = m \text{ e } \omega_q = \sqrt{q^2 + m^2}, \text{ obtemos}$$

$$R'_q = -\frac{iq - m}{iq + m} R_q, \quad (5.77)$$

de onde obtemos

$$\delta' = \delta + \pi - 2 \tan^{-1} \frac{m}{q}, \quad (5.78)$$

Onde vemos que existe uma diferença finita entre  $\delta'$  e  $\delta$ . O primeiro termo da Eq. (5.74) vem dado pela metade da parte continua da Eq. (5.40), o segundo termo vem dado pela mesma expressão, trocando  $\delta$  por  $\delta'$  dado pela Eq. (5.78). Então temos para  $\Delta M_{\text{BF}}$ ,

$$\Delta M_{\text{BF}} = -2 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{k \tan^{-1}(m/k)}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (5.79)$$

A expressão anterior diverge logaritmicamente para  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Esta divergencia pode ser removida mediante a introdução de contratermos usuais da teoria de perturbações, tal como foi feito nos modelos escalares considerados no capítulo anterior. Temos provado então, que a introdução de fermions de Majorana acoplados com o campo bosônico da forma dada pela Eq. (5.45) com  $G(\Phi)$  dado pela Eq. (5.73). Como dissemos neste capítulo, não estamos preocupados em calcular o valor exato das massas dos sólitons (supersimétricos), somente em provar a existencia dos estados quânticos solitônicos quando acoplados a um campo fermiônico de Majorana.

# Capítulo 6

## Termalização

### 6.1 Introdução

A dinâmica de não equilíbrio de sistemas quânticos é um assunto importante de se estudar, com aplicações que variam desde sistemas de matéria condensada à cosmologia. Neste contexto, entre os problemas típicos que temos em mente estudar estão aqueles problemas relacionados com a dinâmica de fora do equilíbrio térmico associada com as transições de fase em diferentes sistemas físicos, tal como a aplicação atual ao estudo da formação de condensados de Bose-Einstein depois de um "quech" de temperatura [45], ou no estudo da dinâmica de campos acoplados e inicialmente deslocados do seus estados fundamentais determinados pelas suas densidades de energias livres [46].

Nestas situações usualmente estamos interessados em entender a maneira como o sistema alcança o equilíbrio térmico (termalização) e nas relevantes escalas de tempo envolvidas, junto com um entendimento da geração de entropia [47] e produção de partículas para sistemas dissipativos em não equilíbrio que interagem com um ambiente [48]. Isto é particularmente importante no contexto de estudos recentes que envolvem a natureza dissipativa intrínseca de campos em interação [49, 50, 51] e também suas aplicações aos problemas atuais na fase de re-aquecimento após a inflação [52].



Tipicamente naqueles cenários que envolvem transições de fase, temos que tratar com situações caracterizadas por estados misturados envolvendo operadores densidade bem gerais e onde um formalismo de equilíbrio ou quase-equilíbrio não pode ser aplicado. As ferramentas comuns usadas para se estudar tais situações de não equilíbrio em sistemas quânticos são o formalismo funcional de tempo fechado de Schwinger e os métodos canônicos de quantização [53]. Nesta parte da tese nós vamos estar interessados na compreensão de cenários "quenched" simples e exatamente solúveis. A ferramenta que vamos usar para este fim é o formalismo canônico quântico de Liouville-von Neumann (LvN) [54]. Para outras abordagens interessantes e recentes relacionadas ao problema da termalização pode-se consultar as referências [55, 56, 57, 58]

A evolução temporal para o operador densidade  $\hat{\rho}$  de um sistema descrito pelo operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  é dado pela equação de LvN:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = i[\hat{\rho}(t), \hat{H}], \quad (6.1)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano. A idéia básica que poderia ser usada para se resolver a Eq. (6.1) é a seguinte: Suponha que existem dois operadores  $\hat{O}_1(t)$  and  $\hat{O}_2(t)$  que satisfazem a equação de LvN,

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_j(t) = i[\hat{O}_j(t), \hat{H}], \quad (6.2)$$

então podemos provar facilmente que qualquer operador  $f(\hat{O}_1, \hat{O}_2)$ , também satisfaz a Eq. (6.2) contanto que  $f$  dependa do tempo somente através da sua dependência nos operadores  $\hat{O}_1$  and  $\hat{O}_2$ . Para provar isto, em primeiro lugar devemos provar que a soma e o produto de  $\hat{O}_1$  and  $\hat{O}_2$  satisfazem a equação de LvN. Daí segue-se imediatamente que qualquer produto da forma  $(\hat{O}_1)^n (\hat{O}_2)^m$  também satisfaz a equação de LvN. Expandindo

$f$  em série de potências de  $\hat{O}_1$  e  $\hat{O}_2$  e já que os coeficientes da expansão não dependem do tempo, então concluímos, usando os resultados anteriores, que  $f$  também satisfaz a equação de LvN. Este fato vai nos permitir construir uma solução exata para a Eq. (6.1) para o operador de densidade em termos de operadores que satisfazem a equação de LvN. A abordagem de LvN tem sido recentemente usada nas Refs. [59, 60] para tratar diferentes problemas em teoria quântica de campos e cosmologia e também para enfatizar as vantagens do método, quando comparado com outras abordagens da dinâmica de não equilíbrio em sistemas quânticos.

Nas seções seguintes vamos fazer uso da abordagem de LvN para resolver sistemas de osciladores acoplados exatamente solúveis. Com o estudo destes sistemas esperamos aprofundar nossa visão para estendermos então esta análise a sistemas mais complexos, isto é, para os casos não triviais, os quais envolvem interações não-lineares, onde usualmente devemos empregar métodos não perturbativos, como por exemplo nos campos quânticos em interação e na descrição da evolução de sistemas quando a interação com um ambiente térmico é incluído. Na seção seguinte damos uma ilustração simples do uso da abordagem de LvN resolvendo para o oscilador harmônico dependente do tempo (através da frequência). Na Sec. 6.3 discutimos um resultado geral a respeito da adição de interações não-lineares, para um modelo que possui interação de potência à quarta, no contexto do oscilador anarmônico. Então na Sec. 6.4 estudaremos dois exemplos de sistemas quânticos em interação composto de dois osciladores harmônicos, inicialmente em diferentes estados térmicos, que são acoplados linearmente num tempo determinado. O caso de um "quençh" suave é explicitamente resolvido. Na Sec. 6.5 estudamos o caso de um oscilador harmônico linearmente acoplado a um conjunto infinito de osciladores harmônicos, tal como nos mod-

elos de Cladeira-Leggett, obtendo explicitamente a distribuição final de equilíbrio, no caso de um "quench" repentino. Finalmente na Sec. 6 consideramos brevemente o caso de dois campos em interação linear onde encontramos que o problema se reduz ao caso de dois osciladores harmônicos acoplados linearmente.

## 6.2 O oscilador harmônico dependente do tempo

Começaremos mostrando como o método de LvN se aplica ao problema do oscilador harmônico dependente do tempo, descrito pelo hamiltoniano dependente do tempo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)\hat{q}^2, \quad (6.3)$$

com frequência dependente do tempo  $\omega(t)$ . Consideramos que inicialmente o sistema se encontra em equilíbrio térmico à temperatura  $T = 1/\beta$ . Em seguida, introduzimos operadores de criação e aniquilação dependentes do tempo,  $\hat{a}(t)$  e  $\hat{a}^\dagger(t)$  dados por

$$\hat{a}(t) = A(t)\hat{q} + B(t)\hat{p} \quad (6.4)$$

e

$$\hat{a}^\dagger(t) = A^*(t)\hat{q} + B^*(t)\hat{p}, \quad (6.5)$$

onde a dependência no tempo é dada somente através dos coeficientes  $A(t)$  e  $B(t)$ . Da relação

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1, \quad (6.6)$$

obtemos que

$$A(t)B^*(t) - B(t)A^*(t) = -i. \quad (6.7)$$

Usando a Eq. (6.4) na Eq. (6.2), obtemos

$$\dot{A}(t)\hat{q} + \dot{B}(t)\hat{p} = -A(t)\hat{p} + \omega^2(t)B(t)\hat{q}, \quad (6.8)$$

Eq. (6.8) obtemos então que

$$\ddot{B}(t) + \omega^2(t)B(t) = 0 \quad (6.9)$$

e  $A(t)$  é dado em função de  $B(t)$  pela relação

$$A(t) = -\dot{B}(t). \quad (6.10)$$

Usando a equação anterior podemos reescrever as Eqs. (6.4), (6.5) e (6.7) e expressá-las como

$$\hat{a}(t) = B(t)\hat{p} - \dot{B}(t)\hat{q}, \quad (6.11)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = B^*(t)\hat{p} - \dot{B}^*(t)\hat{q}, \quad (6.12)$$

e

$$\dot{B}(t)B^*(t) - B(t)\dot{B}^*(t) = i. \quad (6.13)$$

É fácil ver que a Eq. (6.13) é o Wronskiano da Eq. (6.9), isto é, fica garantido que os operadores  $\hat{a}(t)$  e  $\hat{a}^\dagger(t)$  são operadores de aniquilação e criação para todo  $t$ . Já que estes operadores satisfazem a equação de LvN, qualquer função deles também satisfaz tal equação. Em particular podemos construir uma solução exata para  $\hat{\rho}(t)$ . Dado que a condição inicial é de equilíbrio térmico podemos, portanto, escrever

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{Z_\beta} \exp \left\{ -\beta\omega_0 \left[ \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (6.14)$$

onde

$$Z_\beta = \text{Tr} \exp \left\{ -\beta\omega_0 \left[ \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (6.15)$$

e  $\omega_0 = \omega(t \rightarrow -\infty)$ , isto é, estamos supondo que o sistema se encontra em  $t \rightarrow -\infty$  em equilíbrio térmico à temperatura  $1/\beta$ . Segundo a relação (6.6), podemos definir o operador dependente do tempo  $\hat{N}(t) = \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$ , o qual possui autovetores dependentes

do tempo  $|n(t)\rangle$ . Entretanto, já que Eq. (6.6) é independente do tempo, os autovalores número  $n$  são independentes do tempo, isto é,

$$\hat{N}(t)|n(t)\rangle = n|n(t)\rangle . \quad (6.16)$$

Usando a Eq. (6.16) é fácil mostrar que o traço do operador  $\hat{\rho}(t)$  é igual à função de partição  $Z_\beta$  correspondente ao estado de equilíbrio térmico inicial,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\hat{\rho}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n(t)| \exp \left\{ -\beta\omega_0 \left[ \hat{N}(t) + \frac{1}{2} \right] \right\} |n(t)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\beta\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2 \sinh \left( \frac{\beta\omega_0}{2} \right)} . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Note que  $\hat{\rho}(t)$ , dado pela Eq. (6.14), é uma solução exata para a dinâmica de fora do equilíbrio do sistema com a condição inicial de equilíbrio térmico. Para calcular os valores esperados térmicos dos operadores fisicamente relevantes é conveniente reescrever as Eqs. (6.11) e (6.12) em termos dos operadores de aniquilação e criação iniciais, os quais denotaremos por  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Para fazer isto primeiro resolvemos para  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  em termos dos valores iniciais de  $B(t)$  e  $\dot{B}(t)$  os quais denotamos por  $B$  e  $\dot{B}$ , respectivamente. Encontramos então que

$$\hat{q} = i(B^* \hat{a} - B \hat{a}^\dagger) , \quad (6.18)$$

$$\hat{p} = i(\dot{B}^* \hat{a} - \dot{B} \hat{a}^\dagger) . \quad (6.19)$$

Usando as Eqs. (6.18) e (6.19) nas Eqs. (6.11) e (6.12), obtemos a chamada transformação de Bogoliubov:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \beta^*(t) & \alpha^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} , \quad (6.20)$$

onde  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ , os coeficientes de Bogoliubov, são dados por

$$\alpha(t) = i \left( \dot{B}^* B(t) - B^* \dot{B}(t) \right) , \quad (6.21)$$

$$\beta(t) = i \left( B\dot{B}(t) - \dot{B}B(t) \right) . \quad (6.22)$$

Em termos de  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  a Eq. (6.13) nos fornece a seguinte relação

$$|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 = 1 . \quad (6.23)$$

A utilidade da Eq. (6.20) fica evidenciada quando calculamos o valor esperado térmico do operador número de ocupação  $\hat{N}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \\ &= \frac{1}{Z_\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n(t) | \exp \left\{ -\beta\omega_0 \left[ \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) + \frac{1}{2} \right] \right\} \hat{a}^\dagger \hat{a} | n(t) \rangle . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Resolvendo a Eq. (6.20) para  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  em termos de  $\hat{a}(t)$  e  $\hat{a}^\dagger(t)$ , substituindo na Eq. (6.24) e usando a Eq. (6.16), é fácil mostrar que

$$\bar{n}(t) = \left[ |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 \right] \bar{n} + |\beta(t)|^2 , \quad (6.25)$$

onde

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1} \quad (6.26)$$

é o valor esperado térmico inicial do operador número de ocupação.

### 6.2.1 O oscilador harmônico independente do tempo

Como aplicação simples consideremos o caso trivial do oscilador harmônico independente do tempo com  $\omega(t) = \omega_0$ . Neste caso a solução para a Eq. (6.9) é

$$B(t) = ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t} . \quad (6.27)$$

Substituindo a expressão anterior na Eq. (6.13) obtemos

$$|a|^2 - |b|^2 = \frac{1}{2\omega_0} . \quad (6.28)$$

Neste caso podemos obter o operador número, independente do tempo, fazendo a escolha  $b = 0$  e  $|a| = 1/\sqrt{2\omega_0}$ . A outra possível escolha  $a = 0$  e  $|b| \neq 0$  não faz sentido, pois ela implicaria que  $|b|^2 < 0$ . Escolhendo uma fase nula para  $a$ , obtemos então as soluções

$$\hat{a}(t) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2\omega_0}} (\hat{p} - i\omega_0 \hat{q}) \quad (6.29)$$

e

$$\hat{a}^\dagger(t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2\omega_0}} (\hat{p} + i\omega_0 \hat{q}) . \quad (6.30)$$

Embora  $\hat{a}(t)$  e  $\hat{a}^\dagger(t)$  dependam do tempo, o operador número  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$  é independente do tempo, como esperado neste exemplo trivial.

### 6.2.2 Um oscilador harmônico dependente do tempo exatamente solúvel

Consideremos agora o caso de um oscilador harmônico com frequência dependente do tempo:

$$\omega^2(t) = \frac{\omega^2}{\cosh^2(t/\tau)} + \omega_0^2 . \quad (6.31)$$

Neste caso, da Eq. (6.9), a equação satisfeita por  $B(t)$  é

$$\ddot{B}(t) + \left[ \frac{\omega^2}{\cosh^2(t/\tau)} + \omega_0^2 \right] B(t) = 0 . \quad (6.32)$$

A Eq. (6.32) pode ser resolvida com a condição de que em  $t \rightarrow -\infty$  o sistema se encontre em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ . Do resultado da subseção precedente temos então que resolver a Eq. (6.32) com a condição assintótica

$$B(t \rightarrow -\infty) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2\omega_0}} . \quad (6.33)$$

O problema anterior é formalmente idêntico ao problema de espalhamento quântico unidimensional. A solução da Eq. (6.32), sob condição assintótica dada pela Eq. (6.33) é

[61]

$$B(t) = \frac{2^{-i\tau\omega_0}}{\sqrt{2\omega_0}} [\operatorname{sech}(t/\tau)]^{i\tau\omega_0} F\left[\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(t/\tau)\right], \quad (6.34)$$

onde  $F(x, y, z, w)$  é a função de Gauss hipergeométrica [62] e os coeficientes  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  e  $\tilde{c}$  são dados por

$$\tilde{a} = \frac{1}{2} + i\omega_0\tau + \sqrt{\omega^2\tau^2 + \frac{1}{4}}, \quad (6.35)$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{2} + i\omega_0\tau - \sqrt{\omega^2\tau^2 + \frac{1}{4}} \quad (6.36)$$

e

$$\tilde{c} = 1 + i\omega_0\tau. \quad (6.37)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , intuitivamente espera-se que o sistema alcance um estado de equilíbrio térmico final. Tomando o limite  $t \rightarrow \infty$  na Eq. (6.34) obtemos o resultado

$$B(t) = \frac{\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c})}{\Gamma(\tilde{a})\Gamma(\tilde{b})} \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2\omega_0}} + \frac{\Gamma(\tilde{c})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a} - \tilde{b})}{\Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} - \tilde{b})} \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2\omega_0}}. \quad (6.38)$$

Substituindo a Eq. (6.38) nas Eqs. (6.21) and (6.22) podemos obter uma expressão para  $\bar{n}(t)$ , dado pela Eq. (6.25), expressão que, em geral possui um comportamento oscilatório no tempo. Para estes casos, claramente o sistema nunca atinge um estado de equilíbrio térmico final. Mais se analisarmos com cuidado as argumentos das funções gama na Eq. (6.38), veremos que para valores de  $\tau$  tais que  $\tau^2\omega^2 = N(N + 1)$ , com  $N$  inteiro, o segundo termo do lado direito da Eq. (6.38) desaparecerá. Neste caso o sistema alcançará um estado de equilíbrio térmico final, com temperatura igual à temperatura inicial. Este resultado foi também obtido independentemente na Ref. [63], onde os autores estudaram este problema resolvendo a equação de LvN obtido a partir de um princípio variacional. Podemos também mostrar que o estado de equilíbrio térmico final somente dependerá dos parâmetros que caracterizam o estado de equilíbrio térmico inicial ( $\omega_0$  e  $\beta$ ). Todos



os fatores que aparecem multiplicando o fator exponencial no primeiro termo da Eq. (6.38) contribuem com um fator de fase independente do tempo. Isto é equivalente ao que acontece no problema de espalhamento unidimensional, como consequência da conservação de probabilidade, num potencial não reflexivo [61]. Ao calcular quantidades físicas o fator de fase se cancela e então, podemos concluir que quando o sistema alcança o novo estado de equilíbrio térmico final perde-se toda a informação a respeito de como esse estado foi alcançado. Implicitamente temos aqui uma manifestação da decoerência já no nível deste problema simples, como consequência de um cenário de "quench" particular.

Como exemplo de um resultado concreto, consideremos o caso  $N = 1$ , isto é, quando  $\tau^2\omega^2 = 2$ . Neste caso a expressão para  $B(t)$  é

$$B(t) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}\omega_0(1 + i\omega_0\tau)} [i\omega_0\tau - \tanh(t/\tau)] . \quad (6.39)$$

Substituindo a Eq. (6.39) nas Eqs. (6.21) e (6.22) obtemos

$$|\alpha(t)|^2 = 1 + \frac{[1 - \tanh^2(t/\tau)]^2}{4\omega_0^2\tau^2(1 + \omega_0^2\tau^2)} \quad (6.40)$$

e

$$|\beta(t)|^2 = \frac{[1 - \tanh^2(t/\tau)]^2}{4\omega_0^2\tau^2(1 + \omega_0^2\tau^2)} . \quad (6.41)$$

Usando estas expressões para  $|\alpha(t)|^2$  e  $|\beta(t)|^2$  Na Eq. (6.25) obtemos para  $\bar{n}(t)$  o resultado:

$$\bar{n}(t) = \left( 1 + \frac{[1 - \tanh^2(t/\tau)]^2}{2\omega_0^2\tau^2(1 + \omega_0^2\tau^2)} \right) \bar{n} + \frac{[1 - \tanh^2(t/\tau)]^2}{4\omega_0^2\tau^2(1 + \omega_0^2\tau^2)} . \quad (6.42)$$

Resultados para  $\bar{n}(t)$  para  $\omega_0\beta = 1$  e para diferentes valores do "tempo de decaimento"  $\tau$  são mostrados na Fig. 6.1. Note-se que o máximo valor de  $\bar{n}(t)$  em  $t = 0$  representa justamente o instante de máxima variação da frequência dependente do tempo  $\omega(t)$ , Eq. (6.31), e esse máximo é maior quanto menor é o tempo de decaimento  $\tau$ , em concordância

com o fato de que, da Eq. (6.41), quanto menor é  $\tau$  a produção de estados excitados (partículas, no contexto da teoria de campos), representado por  $|\beta(t)|^2$ , é maior.

### 6.3 Não linearidades a nível Gaussiano

Nesta seção consideraremos o efeito das não linearidades na aproximação Gaussiana. O modelo que consideramos é descrito pelo seguinte Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2(t)}{2}\hat{q}^2 + \frac{\lambda(t)}{4!}\hat{q}^4. \quad (6.43)$$

Como foi feito na Sec 6.2 introduzimos operadores de aniquilação e criação dependentes do tempo

$$\hat{a}(t) = A(t)\hat{q} + B(t)\hat{p}, \quad (6.44)$$

e

$$\hat{a}^\dagger(t) = A(t)^*(t)\hat{q} + B^*(t)\hat{p}, \quad (6.45)$$

das quais usando a Eq. (6.7) podemos resolver para  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  em termos de  $\hat{a}(t)$  de  $\hat{a}^\dagger(t)$ , obtendo

$$\hat{q} = i \left[ B^*(t)\hat{a}(t) - B(t)\hat{a}^\dagger(t) \right] \quad (6.46)$$

e

$$\hat{p} = i \left[ \dot{B}^*(t)\hat{a}(t) - \dot{B}(t)\hat{a}^\dagger(t) \right]. \quad (6.47)$$

Substituindo as Eqs. (6.46) e (6.47) na Eq. (6.43), ordenando normalmente os operadores de aniquilação e criação dependentes do tempo e mantendo somente termos de até ordem quadrática nesses operadores obtemos

$$\hat{H}_G = \left( |A(t)|^2 + \omega^2(t)|B(t)|^2 + \frac{\lambda(t)}{2}|B(t)|^4 \right) \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( A^2(t) + \omega^2(t)B^2(t) + \frac{\lambda(t)}{2}B^*(t)B^3(t) \right) \frac{[\hat{a}^\dagger(t)]^2}{2} \\
 & - \left( [A^*(t)]^2 + \omega^2(t)[B^*(t)]^2 + \frac{\lambda(t)}{2}B(t)[B^*(t)]^3 \right) \frac{[\hat{a}(t)]^2}{2}. \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

Substituindo  $\hat{a}(t)$  na equação de LvN e usando para  $\hat{H}$  a aproximação Gaussiana, dada pela Eq. (6.48), obtemos as seguintes equações para  $A(t)$  e  $B(t)$ ,

$$A(t) = -\dot{B}(t) \quad (6.49)$$

e

$$\ddot{B}(t) + \omega^2(t)B(t) + \frac{\lambda(t)}{2}|B(t)|^2B(t) = 0. \quad (6.50)$$

Note que agora  $B(t)$  é descrito por uma equação não linear, isto mostra como ao nível da aproximação Gaussiana já é possível incluir as não linearidades do modelo. Como na Sec. 6.2 os valores esperados térmicos para o operador número de ocupação são dados pela Eq. (6.25), com os coeficientes de Bogoliubov dados pelas mesmas relações da Sec. 6.2, a única diferença é que agora  $B(t)$  é descrito pela equação não linear (6.50). Em geral a Eq. (6.50) não pode ser resolvida exatamente, Mas podemos extrair algumas conclusões qualitativas no caso em que a frequência é independente do tempo e quando  $\lambda(t)$  evolui segundo

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \lambda, & t > 0 \end{cases}. \quad (6.51)$$

Neste caso temos que

$$B(t \leq 0) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \quad (6.52)$$

e para  $t \geq 0$ ,  $B(t)$  é descrito por

$$\ddot{B}(t) + \omega^2B(t) + \frac{\lambda}{2}|B(t)|^2B(t) = 0. \quad (6.53)$$

Temos que resolver a equação não linear (6.53)) com as condições iniciais em  $t = 0$ , obtidas a partir da Eq. (6.52),

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}, \quad \dot{B} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}. \quad (6.54)$$

Para resolver a Eq. (6.53) escrevemos  $B(t)$  na forma polar

$$B(t) = \psi(t)e^{i\phi(t)}, \quad (6.55)$$

onde  $\psi(t)$  e  $\phi(t)$  são funções reais. Substituindo a Eq. (6.55) na Eq. (6.54) e identificando as partes reais e imaginárias da equação resultante obtemos as seguintes equações:

$$\ddot{\psi}(t) + (\omega^2 - [\dot{\phi}(t)]^2) \psi(t) + \frac{\lambda}{2} \psi^3(t) = 0, \quad (6.56)$$

e

$$2\dot{\psi}(t)\dot{\phi}(t) + \psi(t)\ddot{\phi}(t) = 0. \quad (6.57)$$

Da Eq. (6.57) obtemos

$$\dot{\phi}(t) = c\psi^{-2}(t). \quad (6.58)$$

Para fixar a constante  $c$  usamos as condições iniciais. Comparando a Eq. (6.52) com a Eq. (6.55), concluímos que para  $t = 0$ ,  $\psi = 1/\sqrt{2\omega}$ ,  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\dot{\phi} = \omega$ . Usando estes valores na Eq. (6.58) obtemos  $c = 1/2$ . Integrando a Eq. (6.58) com a condição inicial  $\phi = 0$  obtemos,

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \int_0^t dt' \psi^{-2}(t'). \quad (6.59)$$

Para resolver para  $\psi(t)$  substituímos a Eq. (6.58) (com  $c = 1/2$ ) na Eq. (6.56) obtendo

$$\ddot{\psi}(t) + \omega^2 \psi(t) - \frac{1}{4} \psi^{-3}(t) + \frac{\lambda}{2} \psi^3(t) = 0. \quad (6.60)$$

Note que a equação anterior é singular para  $\psi = 0$ , mas como mostraremos posteriormente, esta singularidade jamais será alcançada por  $\psi(t)$  na sua evolução temporal. Usando as

Eqs. (6.21) e (6.22) na Eq. (6.25) e usando  $B(t)$  dado pela Eq. (6.55), obtemos para o valor esperador térmico do operador número de ocupação, a seguinte expressão:

$$\bar{n}(t) = \left( \dot{\psi}^2(t) + \omega^2 \psi^2(t) + \frac{1}{4} \psi^{-2}(t) \right) \frac{\bar{n}}{\omega} + \frac{1}{2\omega} \left( \dot{\psi}^2(t) + \omega^2 \psi^2(t) + \frac{1}{4} \psi^{-2}(t) \right) - \frac{1}{2}. \quad (6.61)$$

Então, para determinar a evolução temporal de  $\bar{n}(t)$  precisaremos somente conhecer a evolução temporal de  $\psi(t)$ . Da Eq. (6.60) e usando as condições iniciais para  $\psi(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  obtemos

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2(t) + \frac{\omega^2}{2} \psi^2(t) + \frac{1}{8} \psi^{-2}(t) + \frac{\lambda}{8} \psi^4(t) = \frac{\omega}{2} + \frac{\lambda}{32\omega^2}. \quad (6.62)$$

de onde

$$t = \pm \int_{1/2\omega}^{\psi^2(t)} \frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{4} + \left( \omega + \frac{\lambda}{16\omega^2} \right) x - \omega^2 x^2 - \frac{\lambda}{4} x^3}}, \quad (6.63)$$

A integral anterior não pode ser resolvida analiticamente, e então não poderemos resolver para  $\psi(t)$ . Mas nós podemos obter conclusões qualitativas sobre o comportamento temporal de  $\psi(t)$ . Isto vai nos permitir entender qual é o efeito da não linearidade no sistema que estamos estudando. Reescrevendo a Eq. (6.61) mediante o uso da Eq. (6.62), obtemos

$$\bar{n}(t) = \left( 1 + \frac{\lambda}{16\omega^3} - \frac{\lambda}{4\omega} \psi^4(t) \right) \bar{n} - \frac{\lambda}{8\omega} \psi^4(t) + \frac{\lambda}{32\omega^3}. \quad (6.64)$$

Então, se conhecermos o comportamento qualitativo de  $\psi(t)$  podemos igualmente conhecer o comportamento de  $\bar{n}(t)$ . Se na Eq. (6.62) pensarmos em  $\psi(t)$  como sendo a coordenada de uma partícula mecânica, então a Eq. (6.62) expressa a lei de conservação da energia de uma partícula de massa unitária que se move no potencial conservativo  $U(\psi)$  dado por

$$U(\psi) = \frac{\omega^2}{2} \psi^2 + \frac{1}{8} \psi^{-2} + \frac{\lambda}{8} \psi^4. \quad (6.65)$$

Fica claro observando a forma do potencial  $U(\psi)$ , para todo valor finito da energia, que  $\psi(t)$  evolui no tempo em forma oscilatória, jamais alcançando um valor fixo, e consequentemente o sistema, nesta ordem de aproximação, nunca alcança um estado final de

equilíbrio térmico. Note também que  $\psi(t)$  alcançará a singularidade  $\psi = 0$ , somente se a energia, na analogia da dinâmica de uma partícula, for infinita. Já que esta energia, dado pelo lado direito da Eq. (6.62), é finita, concluímos que tal singularidade nunca será alcançada.

## 6.4 Osciladores harmônicos acoplados dependentes do tempo

Aqui consideraremos um sistema de dois osciladores harmônicos dependentes do tempo, linearmente acoplados através de uma constante de acoplamento  $\lambda(t)$ , com Hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 [\hat{p}_j^2 + \omega_j^2(t) \hat{q}_j^2] + \lambda(t) \hat{q}_1 \hat{q}_2 . \quad (6.66)$$

Os operadores de aniquilação e criação podem agora ser escritos como ( $i = 1, 2$ )

$$\hat{a}_i(t) = \sum_{j=1}^2 [B_{ij}(t) \hat{p}_j - \dot{B}_{ij}(t) \hat{q}_j] \quad (6.67)$$

e

$$\hat{a}_i^\dagger(t) = \sum_{j=1}^2 [B_{ij}^*(t) \hat{p}_j - \dot{B}_{ij}^*(t) \hat{q}_j] , \quad (6.68)$$

Exigindo que  $\hat{a}_i(t)$  e  $\hat{a}_i^\dagger(t)$  satisfaçam a equação de LvN, Eq. (6.2), obtemos as seguintes equações para os coeficientes  $B_{ij}(t)$ :

$$\ddot{B}_{i1}(t) + \omega_1^2(t) B_{i1}(t) + \lambda(t) B_{i2}(t) = 0 \quad (6.69)$$

e

$$\ddot{B}_{i2}(t) + \omega_2^2(t) B_{i2}(t) + \lambda(t) B_{i1}(t) = 0. \quad (6.70)$$

Da condição

$$[\hat{a}_i(t), \hat{a}_j^\dagger(t)] = \delta_{ij} , \quad (6.71)$$

obtemos agora a

$$\sum_{k=1}^2 [\dot{B}_{ik}(t)B_{jk}^*(t) - B_{ik}(t)\dot{B}_{jk}^*(t)] = i\delta_{ij} \quad (6.72)$$

e de

$$[\hat{a}_i(t), \hat{a}_j(t)] = [\hat{a}_i^\dagger(t), \hat{a}_j^\dagger(t)] = 0 \quad (6.73)$$

obtemos, respectivamente, as seguintes restrições adicionais para  $B_{ij}(t)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 [B_{ik}(t)\dot{B}_{jk}(t) - \dot{B}_{ik}(t)B_{jk}(t)] &= 0, \\ \sum_{k=1}^2 [B_{ik}^*(t)\dot{B}_{jk}^*(t) - \dot{B}_{ik}^*(t)B_{jk}^*(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Usando as Eqs. (6.69) e (6.70), pode ser mostrado que as Eqs. (6.72), (6.73) e (6.74) são independentes do tempo. Como no caso do oscilador hamônico simples podemos escrever os operadores de aniquilação e criação dependentes do tempo em função dos seus valores iniciais (os quais denotamos por  $\hat{a}_i$  e  $\hat{a}_i^\dagger$ , respectivamente, sem o argumento temporal, notação que indica que eles devem ser avaliados no tempo inicial). Isto poderá ser realizado no caso em que inicialmente os osciladores se encontram desacoplados com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , cada um dos quais se encontra em equilíbrio térmico às temperaturas  $1/\beta_1$  e  $1/\beta_2$ , respectivamente. Neste caso a matriz  $\{B\}$ , no instante inicial, possui elementos  $B_{ij}$  dados por

$$B_{ij} = \delta_{ij} \frac{e^{i\omega_i t}}{\sqrt{2\omega_i}}. \quad (6.75)$$

Podemos agora mostrar que a transformação de Bogoliubov neste caso é dado por

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_i(t) \\ \hat{a}_i^\dagger(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} \alpha_{ij}(t) & \beta_{ij}(t) \\ \beta_{ij}^*(t) & \alpha_{ij}^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{a}_j^\dagger \end{pmatrix}, \quad (6.76)$$

onde

$$\alpha_{ij}(t) = i \left( \dot{B}_{jj}^* B_{ij}(t) - B_{jj}^* \dot{B}_{ij}(t) \right) \quad (6.77)$$

e

$$\beta_{ij}(t) = i \left( B_{jj} \dot{B}_{ij}(t) - \dot{B}_{jj} B_{ij}(t) \right). \quad (6.78)$$

Em termos dos coeficientes de Bogoliubov as condições (6.72) e (6.74) são dadas, respectivamente, por

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \alpha_{ik}(t) \alpha_{jk}^*(t) - \beta_{ik}(t) \beta_{jk}^*(t) \right] = \delta_{ij} \quad (6.79)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[ \alpha_{ik}(t) \beta_{jk}(t) - \beta_{ik}(t) \alpha_{jk}(t) \right] &= 0, \\ \sum_{k=1}^2 \left[ \alpha_{ik}^*(t) \beta_{jk}^*(t) - \beta_{ik}^*(t) \alpha_{jk}^*(t) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Já que  $\hat{a}_i(t)$  e  $\hat{a}_i^\dagger(t)$  são soluções da equação de LvN, a solução exata para o operador densidade dependente do tempo, com a condição inicial de equilíbrio térmico é

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{Z_{\beta_1} Z_{\beta_2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^2 \beta_i \omega_i \left[ \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_i(t) + \frac{1}{2} \right] \right\}, \quad (6.81)$$

onde  $Z_{\beta_i}$ ,  $i = 1, 2$ , são as funções de partição para cada oscilador, e dadas pela Eq. (6.17).

Podemos calcular como no caso do oscilador harmônico simples, os valores esperados térmicos dos operadores número de ocupação,  $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ ,

$$\begin{aligned} \bar{n}_i(t) &= \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right] \\ &= \frac{1}{Z_{\beta_1} Z_{\beta_2}} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \langle n_1(t), n_2(t) | \exp \left\{ - \sum_{j=1}^2 \beta_j \omega_j \left[ \hat{a}_j^\dagger(t) \hat{a}_j(t) + \frac{1}{2} \right] \right\} \\ &\quad \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | n_1(t), n_2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Para avaliar as expressões anteriores temos que resolver a Eq. (6.76) para  $\hat{a}_i$  e  $\hat{a}_j^\dagger$  em termos de  $\hat{a}_i(t)$ ,  $\hat{a}_j^\dagger(t)$ . Isto pode ser feito facilmente usando as Eqs. (6.79) e (6.80),

obtendo

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{a}_i^\dagger \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} \alpha_{ij}^*(t) & -\beta_{ji}(t) \\ -\beta_{ji}^*(t) & \alpha_{ij}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_j(t) \\ \hat{a}_j^\dagger(t) \end{pmatrix}. \quad (6.83)$$



Usando a Eq. (6.83) na Eq. (6.82) obtemos

$$\bar{n}_i(t) = \sum_{j=1}^2 \left[ (|\alpha_{ij}(t)|^2 + |\beta_{ji}(t)|^2) \bar{n}_j + |\beta_{ji}(t)|^2 \right], \quad (6.84)$$

onde  $\bar{n}_j$  é a distribuição inicial de equilíbrio térmico,

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{\beta_j \omega_j} - 1}. \quad (6.85)$$

### 6.4.1 Solução para o caso de interação repentina

Como primeira aplicação das equações anteriores, consideremos o exemplo de dois osciladores acoplados com frequências independentes do tempo e com acoplamento  $\lambda(t)$  dado por

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \lambda, & t > 0 \end{cases}. \quad (6.86)$$

Neste caso temos que para  $t \leq 0$

$$B_{ij}(t \leq 0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\omega_1 t}}{\sqrt{2\omega_1}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{i\omega_2 t}}{\sqrt{2\omega_2}} \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

e para  $t > 0$  podemos resolver as Eqs. (6.69) e (6.70) em termos de coordenadas normais  $Q_{ij}(t)$ , definidos em termos de  $B_{ij}(t)$  por

$$B_{ij}(t) = \sum_{k=1}^2 \eta_{jk} Q_{ik}(t), \quad (6.88)$$

onde a matriz de transformação  $\eta_{ij}$  é independente do tempo. Substituindo a expressão anterior nas Eqs. (6.69) e (6.70) obtemos (para detalhes ver o apêndice C1)

$$\ddot{Q}_{ik}(t) + \Omega_k^2 Q_{ik}(t) = 0, \quad (6.89)$$

sobre a condição de que  $\eta_{ij}$ , uma matriz ortogonal, possua os seguintes elementos

$$\eta_{ij} = \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{(\omega_2^2 - \Omega_j^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.90)$$

$$\eta_{2j} = \frac{\lambda}{\Omega_j^2 - \omega_2^2} \eta_{1j} , \quad (6.91)$$

As frequências normais  $\Omega_j$  são dadas pelas soluções da equação

$$(\omega_1^2 - \Omega_j^2)(\omega_2^2 - \Omega_j^2) = \lambda^2 , \quad (6.92)$$

da qual obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left[ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2} \right] , \\ \Omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left[ \omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2} \right] . \end{aligned} \quad (6.93)$$

Resolvendo a Eq. (6.89) e substituindo na Eq. (6.88), obtemos para  $B_{ij}(t)$ ,

$$B_{ij}(t) = \sum_{k=1}^2 \eta_{jk} \left( a_{ik} e^{i\Omega_k t} + b_{ik} e^{-i\Omega_k t} \right) , \quad (6.94)$$

onde  $a_{ik}$  e  $b_{ik}$  são constantes de integração a serem determinados pelas condições iniciais.

Já que para  $t = 0$ ,  $B_{ij}(t)$  e  $\dot{B}_{ij}(t)$  são contínuos, então das Eqs. (6.87) e (6.94), obtemos que os coeficientes  $a_{ik}$  e  $b_{ik}$ , que aparecem na Eq. (6.94), são dados por

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{\eta_{ik}}{\sqrt{8\omega_i}} \left( 1 + \frac{\omega_i}{\Omega_k} \right) , \\ b_{ik} &= \frac{\eta_{ik}}{\sqrt{8\omega_i}} \left( 1 - \frac{\omega_i}{\Omega_k} \right) . \end{aligned} \quad (6.95)$$

Substituindo a Eq. (6.95) na Eq. (6.94), obtemos o resultado

$$B_{ij}(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_{ik}\eta_{jk}}{\sqrt{2\omega_i}} \left[ \cos(\Omega_k t) + \frac{i\omega_i}{\Omega_k} \sin(\Omega_k t) \right] . \quad (6.96)$$

Usando a Eq. (6.87) para  $B_{ij}$  na Eq. (6.77) obtemos para os coeficientes de Bogoliubov as expressões

$$\alpha_{ij}(t) = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} B_{ij}(t) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_j}} \dot{B}_{ij}(t) \quad (6.97)$$

e

$$\beta_{ij}(t) = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} B_{ij}(t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_j}} \dot{B}_{ij}(t). \quad (6.98)$$

As Eqs. (6.96) - (6.98) junto com as Eqs. (6.90) - (6.93) resolvem completamente a evolução temporal de fora de equilíbrio do sistema em consideração. Neste caso o sistema nunca alcançará um estado de equilíbrio térmico final já que os coeficientes de Bogoliubov obtidos usando os valores de  $B_{ij}(t)$ , dados pela Eq. (6.96), têm um comportamento oscilatório para todo  $t$ . As soluções para  $\bar{n}_1(t)$  e  $\bar{n}_2(t)$  são mostradas Na Fig. 6.2 para o caso  $\omega_1 = \omega_2$ . Os resultados serão discutidos na subseção seguinte .

### 6.4.2 Um "quench" suave exatamente solúvel

Como exemplo de um "quench" não instantaneo exatamente solúvel, consideramos a seguir o caso de um "quench" suave

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{2} [1 + \tanh(t/\tau)] , \quad (6.99)$$

e onde as frequências são independente do tempo e tais que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . As equações para  $B_{ij}(t)$  são agora dadas por

$$\ddot{B}_{i1}(t) + \omega^2 B_{i1}(t) + \frac{\lambda}{2} [1 + \tanh(t/\tau)] B_{i2}(t) = 0 \quad (6.100)$$

e

$$\ddot{B}_{i2}(t) + \omega^2 B_{i2}(t) + \frac{\lambda}{2} [1 + \tanh(t/\tau)] B_{i1}(t) = 0 . \quad (6.101)$$

As Eqs. (6.100) e (6.101) são facilmente resolvidas introduzindo duas funções  $R_i(t)$  e  $G_i(t)$

$$\begin{aligned} R_i(t) &= B_{i1}(t) - B_{i2}(t) \\ G_i(t) &= B_{i1}(t) + B_{i2}(t) . \end{aligned} \quad (6.102)$$

Subtraindo e somando as Eqs. (6.100) e (6.101) obtemos as seguintes equações de-sacopladas para  $R_i(t)$  e  $G_i(t)$ ,

$$\ddot{R}_i(t) + \left\{ \omega^2 - \frac{\lambda}{2} [1 + \tanh(t/\tau)] \right\} R_i(t) = 0 \quad (6.103)$$

e

$$\ddot{G}_i(t) + \left\{ \omega^2 + \frac{\lambda}{2} [1 + \tanh(t/\tau)] \right\} G_i(t) = 0. \quad (6.104)$$

As soluções das Eqs. (6.103) e (6.104) são dadas por

$$R_i(t) = A_i e^{-i\omega t} F[-a_1, -b_1, c^*, -e^{2t/\tau}] + B_i e^{i\omega t} F[b_1, a_1, c, -e^{2t/\tau}] \quad (6.105)$$

e

$$G_i(t) = C_i e^{-i\omega t} F[-a_2, -b_2, c^*, -e^{2t/\tau}] + D_i e^{i\omega t} F[b_2, a_2, c, -e^{2t/\tau}], \quad (6.106)$$

onde

$$a_1 = \frac{i\tau}{2} (\omega - \Omega_2),$$

$$a_2 = \frac{i\tau}{2} (\omega - \Omega_1),$$

$$b_1 = \frac{i\tau}{2} (\omega + \Omega_2),$$

$$b_2 = \frac{i\tau}{2} (\omega + \Omega_1),$$

$$c = 1 + i\omega\tau,$$

(6.107)

e  $\Omega_{1(2)} = \sqrt{\omega^2 \pm |\lambda|}$ . Da Eq. (6.102) obtemos que

$$B_{i1} = \frac{1}{2} \left\{ C_i e^{-i\omega t} F[-a_2, -b_2, c^*, -e^{2t/\tau}] + D_i e^{i\omega t} F[b_2, a_2, c, -e^{2t/\tau}] \right. \\ \left. + A_i e^{-i\omega t} F[-a_1, -b_1, c^*, -e^{2t/\tau}] + B_i e^{i\omega t} F[b_1, a_1, c, -e^{2t/\tau}] \right\}, \quad (6.108)$$

e

$$B_{i2} = \frac{1}{2} \left\{ C_i e^{-i\omega t} F[-a_2, -b_2, c^*, -e^{2t/\tau}] + D_i e^{i\omega t} F[b_2, a_2, c, -e^{2t/\tau}] \right. \\ \left. - A_i e^{-i\omega t} F[-a_1, -b_1, c^*, -e^{2t/\tau}] - B_i e^{i\omega t} F[b_1, a_1, c, -e^{2t/\tau}] \right\}, \quad (6.109)$$

Usando as condições iniciais (em  $t \rightarrow -\infty$ ),

$$B_{11} = B_{22} = \frac{\exp(i\omega t)}{\sqrt{2\omega}} \\ B_{12} = B_{21} = 0, \quad (6.110)$$

obtemos as constantes  $A_i, B_i, C_i$  e  $D_i$  como sendo dadas por:  $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 0$  e  $B_1 = -B_2 = D_1 = D_2 = 1/\sqrt{2\omega}$ . Então, finalmente, encontramos as soluções para  $B_{ij}(t)$ ,

$$B_{11}(t) = B_{22}(t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\sqrt{2\omega}} \left\{ F[b_1, a_1, c, -e^{2t/\tau}] + F[b_2, a_2, c, -e^{2t/\tau}] \right\}, \\ B_{12}(t) = B_{21}(t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\sqrt{2\omega}} \left\{ F[b_1, a_1, c, -e^{2t/\tau}] - F[b_2, a_2, c, -e^{2t/\tau}] \right\}. \quad (6.111)$$

O comportamento assintótico ( $t \gg \tau$ ) para as funções  $B_{ij}(t)$  segue do comportamento assintótico das funções hipergeométricas [30], as quais nos fornecem os seguintes resultados

$$B_{11}(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{8\omega_0}} \left[ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c - b_1)} e^{i\Omega_2 t} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(b_1 - a_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c - a_1)} e^{-i\Omega_2 t} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 - b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(c - b_2)} e^{i\Omega_1 t} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(b_2 - a_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c - a_2)} e^{-i\Omega_1 t} \right] \quad (6.112)$$

e

$$B_{12}(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{8\omega_0}} \left[ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c - b_1)} e^{i\Omega_2 t} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(b_1 - a_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c - a_1)} e^{-i\Omega_2 t} \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 - b_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(c - b_2)} e^{i\Omega_1 t} - \frac{\Gamma(c)\Gamma(b_2 - a_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c - a_2)} e^{-i\Omega_1 t} \right]. \quad (6.113)$$

Note-se que as Eqs. (6.112) e (6.113) são similares à Eq. (6.94) para o caso de um "quench" instantâneo com  $\omega_1 = \omega_2$ . Consequentemente esperamos que ambos casos conduzam a

resultados qualitativamente similares no limite assintótico, onde ambos osciladores não alcançam um estado final de equilíbrio térmico comum a ambos. Esta é uma consequência do caráter reversível dos dois modelos considerados, a energia é transferida em forma reversível de um oscilador ao outro (como pôde ser concluído da Fig. 6.2), com o sistema total jamais se equilibrando ou termalizando. Esta situação é mudada consideravelmente quando o sistema é acoplado a um ambiente, modelado por exemplo por um conjunto infinito de osciladores harmônicos, tal como é feito nos modelos de Caldeira-Legget. [64]. Sobre esta condição a energia poderá ser transferida irreversivelmente desde o sistema de osciladores para o ambiente e eventualmente conduzir à equilibração e termalização do sistema. Isto será estudado explicitamente na seção seguinte no contexto da abordagem de LvN.

## 6.5 Um oscilador em interação com $N \rightarrow \infty$ osciladores

Nesta seção consideramos o sistema composto por um oscilador interagindo com  $N \rightarrow \infty$  osciladores (aqui considerado como o ambiente). O Hamiltoniano correspondente a este sistema é

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\hat{q}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\hat{p}_k^2 + \omega_k^2 \hat{q}_k^2 + 2\lambda_k(t)\hat{q}_0\hat{q}_k] , \quad (6.114)$$

onde  $\lambda_k(t)$  é dependente do tempo. Em geral as frequências também podem ser dependentes do tempo, mas este caso não será explicitamente considerado aqui.

Consideremos que inicialmente o oscilador e o banho estão separadamente em estados de equilíbrio térmico com inversas da temperatura  $\beta_0$  e  $\beta$ , respectivamente (aqui não vamos discutir sobre como um estado inicial deste tipo pode ser realizado fisicamente). Isto é, consideramos que inicialmente  $\lambda_k(t) = 0$ . Então o operador densidade inicial  $\hat{\rho}_0$  do

sistema total será dado por

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{\beta_0} \otimes \hat{\rho}_{\beta}, \quad (6.115)$$

onde  $\hat{\rho}_{\beta_0}$  e  $\hat{\rho}_{\beta}$  são os operadores densidade que descrevem separadamente os estados de equilíbrio térmico inicial para o oscilador e o banho respectivamente. Desejamos investigar como o estado inicial de equilíbrio térmico correspondente ao oscilador evolui no tempo quando é acoplado ao ambiente. Isto é, desejamos estudar o processo de termalização e em particular gostaríamos conhecer a distribuição final de equilíbrio. A fim de resolver exatamente para o operador densidade procedemos em forma idêntica a como foi feito nas seções anteriores. É claro que expressões análogas aquelas obtidas na seção anterior serão obtidas também aqui. Por exemplo, o valor esperado térmico do operador número de ocupação em termos dos coeficientes de Bogoliubov é obtido como sendo

$$\bar{n}_{\mu}(t) = \sum_{\nu=0}^N \left[ (|\alpha_{\mu\nu}(t)|^2 + |\beta_{\nu\mu}(t)|^2) \bar{n}_{\nu} + |\beta_{\nu\mu}(t)|^2 \right], \quad (6.116)$$

onde  $\mu = (0, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  e  $\bar{n}_0, \bar{n}_k$  são as distribuições de equilíbrio térmico inicial para o oscilador e o ambiente, respectivamente, dados por

$$\bar{n}_0 = \frac{1}{e^{\beta_0 \tilde{\omega}} - 1}, \quad (6.117)$$

e

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta \omega_k} - 1}. \quad (6.118)$$

Note-se que na Eq. (6.117) temos usado  $\tilde{\omega}$  em lugar de  $\omega_0$ . Como ficará claro na dedução linhas abaixo,  $\omega_0$  representa uma frequência "bare", enquanto que as correções de ponto zero provenientes do acoplamento com o banho de osciladores conduzem à definição (renormalizada) de uma frequência física, que aqui denotamos por  $\tilde{\omega}$ . Os coeficientes de Bogoli-

ubov são dados por Eqs. análogas às Eqs. (6.77)-(6.78)

$$\alpha_{\mu\nu}(t) = i \left( \dot{B}_{\nu\nu}^* B_{\mu\nu}(t) - B_{\nu\nu}^* \dot{B}_{\mu\nu}(t) \right) , \quad (6.119)$$

$$\beta_{\mu\nu}(t) = i \left( B_{\nu\nu} \dot{B}_{\mu\nu}(t) - \dot{B}_{\nu\nu} B_{\mu\nu}(t) \right) , \quad (6.120)$$

onde  $B_{\nu\nu}$  são os valores iniciais de  $B_{\mu\nu}(t)$ ,

$$B_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \frac{e^{i\tilde{\omega}_\mu t}}{\sqrt{2\tilde{\omega}_\mu}} , \quad (6.121)$$

onde  $\tilde{\omega}_\mu = (\tilde{\omega}, \omega_k)$ . Os coeficientes de Bogoliubov também seguem relações idênticas às dadas pelas Eqs. (6.79)-(6.80). Os fatores  $B_{\mu\nu}(t)$  obedecem equações similares às Eqs. (6.69)-(6.70),

$$\ddot{B}_{\mu 0}(t) + \omega_0^2 B_{\mu 0}(t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k(t) B_{\mu k}(t) = 0 , \quad (6.122)$$

$$\ddot{B}_{\mu k}(t) + \omega_k^2 B_{\mu k}(t) + \lambda_k(t) B_{\mu 0}(t) = 0 . \quad (6.123)$$

Em geral as Eqs. (6.122)-(6.123) não podem ser resolvidas analiticamente para  $\lambda_k(t)$  arbitrário. Existe uma situação na qual estas equações podem ser resolvidas exatamente, e este é o caso quando  $\lambda_k(t)$  é dado por

$$\lambda_k(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \omega_k \sqrt{g\Delta\omega}, & t > 0 \end{cases} . \quad (6.124)$$

onde  $g$  é uma constante introduzida por conveniência e  $\Delta\omega$  será definido a seguir. Com o propósito de simplificar os cálculos começaremos considerando  $\omega_k$  como sendo dado por

$$\omega_k = \frac{k\pi}{L} , \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.125)$$

e então passaremos ao limite contínuo no final fazendo  $L \rightarrow \infty$ . Na Eq. (6.124) definimos  $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$  como sendo o intervalo entre duas frequências vizinhas  $\omega_k$ . Para  $t < 0$  a solução para o sistema de Eqs. (6.122)-(6.123) é dado pela Eq. (6.121). Para  $t > 0$



a solução é determinada introduzindo-se, como na seção anterior coordenadas normais agora definidas por  $Q_{\mu\nu}(t)$

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \eta_{\nu\rho} Q_{\mu\rho}(t) , \quad (6.126)$$

onde  $Q_{\mu\rho}(t)$  satisfaz

$$\ddot{Q}_{\mu\rho}(t) + \Omega_\rho^2 Q_{\mu\rho}(t) = 0 , \quad (6.127)$$

e  $\eta_{\mu\nu}$  é uma matriz ortogonal com elementos ( para detalhes ver Apêndice C1) dados por

$$\eta_{k\mu} = \frac{\omega_k \sqrt{g\Delta\omega}}{\Omega_\mu^2 - \omega_k^2} \eta_{0\mu} , \quad (6.128)$$

$$\eta_{0\mu} = \left[ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{g\omega_k^2 \Delta\omega}{(\omega_k^2 - \Omega_\mu^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} , \quad (6.129)$$

e onde as frequências normais  $\Omega_\mu$  são obtidas como soluções de

$$\omega_0^2 - \Omega_\mu^2 = \sum_{k=1}^N \frac{g\omega_k^2 \Delta\omega}{\omega_k^2 - \Omega_\mu^2} . \quad (6.130)$$

A Eq. (6.130) pode ser reescrita como

$$\omega_0^2 - gN\Delta\omega - \Omega_\mu^2 = \sum_{k=1}^N \frac{g\Omega_\mu^2 \Delta\omega}{\omega_k^2 - \Omega_\mu^2} . \quad (6.131)$$

Tomando o limite  $N \rightarrow \infty$  na Eq. (6.131) vemos que a equação anterior não faz sentido, dado que em tal caso o lado esquerdo da equação é infinito enquanto que o lado direito não é. A fim de superar este problema introduzimos a frequência renormalizada  $\tilde{\omega}$  definido como

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - gN\Delta\omega} . \quad (6.132)$$

Para que  $\tilde{\omega}$  seja finito vemos que  $\omega_0^2$  tem que ser infinito. Então concluímos que  $\omega_0$  não é a frequência física do oscilador, mas uma frequência "bare" (não renormalizada). A frequência física é a frequência finita renormalizada  $\tilde{\omega}$ . A introdução da frequência

renormalizada também garante que todas as soluções  $\Omega^2$  da Eq. (6.131) sejam positivas, evitando-se desta forma possíveis soluções que desestabilizem incontroladamente o sistema [65].

Usando a Eq. (6.125) e tomando o limite  $N, L \rightarrow \infty$  nas Eqs. (6.128)-(6.130) obtemos

$$\eta_{0\mu} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\Omega_\mu \sqrt{g\Delta\omega}}{\sqrt{4(\Omega_\mu^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_\mu^2}}, \quad (6.133)$$

$$\eta_{k\mu} = \frac{2g\omega_k \Delta\omega}{(\Omega_\mu^2 - \omega_k^2)} \frac{\Omega_\mu}{\sqrt{4(\Omega_\mu^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_\mu^2}}, \quad (6.134)$$

e

$$\cot(L\Omega) = \frac{2\Omega}{\pi g} + \frac{\Delta\omega}{\pi\Omega} \left(1 - \frac{2\tilde{\omega}^2}{g\Delta\omega}\right). \quad (6.135)$$

Na Eq. (6.135) retiramos o índice  $\mu$  por simplicidade. Deve-se entender que  $\Omega_\mu$  são as raízes da Eq. (6.135). Substituindo as soluções da Eq. (6.127) na Eq. (6.126) encontramos as seguintes expressões para  $B_{\mu\nu}(t)$ ,

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \eta_{\nu\rho} \left( a_{\mu\rho} e^{i\Omega_\rho t} + b_{\mu\rho} e^{-i\Omega_\rho t} \right). \quad (6.136)$$

Da continuidade de  $B_{\mu\nu}(t)$  e da sua primeira derivada em  $t = 0$  podemos obter  $a_{\mu\rho}$  e  $b_{\mu\rho}$  (ver o Apêndice C1). Substituindo as expressões obtidas para estes coeficientes na Eq. (6.136) obtemos

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \frac{\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\rho}}{\sqrt{8\tilde{\omega}_\mu}} \left[ \left(1 + \frac{\tilde{\omega}_\mu}{\Omega_\rho}\right) e^{i\Omega_\rho t} + \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_\mu}{\Omega_\rho}\right) e^{-i\Omega_\rho t} \right], \quad (6.137)$$

a partir do qual encontramos as seguintes expressões para os coeficientes de Bogoliubov

$$\alpha_{\mu\nu}(t) = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_\nu}{2}} B_{\mu\nu}(t) - \frac{i}{\sqrt{2\tilde{\omega}_\nu}} \dot{B}_{\mu\nu}(t) \quad (6.138)$$

e

$$\beta_{\mu\nu}(t) = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_\nu}{2}} B_{\mu\nu}(t) + \frac{i}{\sqrt{2\tilde{\omega}_\nu}} \dot{B}_{\mu\nu}(t). \quad (6.139)$$

Fazendo  $\mu = 0$  na Eq. (6.116), obtemos o valor esperado térmico do operador número de ocupação correspondente ao oscilador  $q_0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{n}_0(t) = & \left( |\alpha_{00}(t)|^2 + |\beta_{00}(t)|^2 \right) \bar{n}_0 + |\beta_{00}(t)|^2 \\ & + \sum_k \left[ \left( |\alpha_{0k}(t)|^2 + |\beta_{k0}(t)|^2 \right) \bar{n}_k + |\beta_{k0}(t)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Da eq. anterior podemos ver que para obter  $\bar{n}_0(t)$  temos primeiro que calcular os coeficientes de Bogoliubov  $\alpha_{00}(t)$ ,  $\beta_{00}(t)$ ,  $\alpha_{0k}(t)$  e  $\beta_{k0}(t)$ . Estes coeficientes são obtidos no apêndice C2, com valores dados pelas Eqs. (C.25), (C.26), (C.33) and (C.34). Das Eqs. (C.25)-(C.26) podemos ver que

$$\alpha_{00}(t \rightarrow \infty) = \beta_{00}(t \rightarrow \infty) = 0. \quad (6.141)$$

De outro lado das Eqs. (C.33)-(C.34) obtemos

$$\alpha_{0k}(t \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_k}{\tilde{\omega}}} \frac{(\tilde{\omega} + \omega_k)(2\omega_k^2 - 2\tilde{\omega}^2 + i\pi g\omega_k)}{[4(\omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2]} \sqrt{g\Delta\omega} e^{i\omega_k t}, \quad (6.142)$$

$$\beta_{k0}(t \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_k}{\tilde{\omega}}} \frac{(\tilde{\omega} - \omega_k)(2\omega_k^2 - 2\tilde{\omega}^2 + i\pi g\omega_k)}{[4(\omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2]} \sqrt{g\Delta\omega} e^{i\omega_k t}. \quad (6.143)$$

Agora substituindo as equações anteriores na Eq. (6.140) e tomando o limite contínuo  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , obtemos para  $\bar{n}_0(t \rightarrow \infty)$  o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \bar{n}_0(t \rightarrow \infty) = & \frac{2g}{\tilde{\omega}} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)}{[4(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2]} \frac{1}{(e^{\beta\omega} - 1)} \\ & + \frac{g}{\tilde{\omega}} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega(\omega - \tilde{\omega})^2}{4(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (6.144)$$

Observe que, como consequência da Eq. (6.141), o resultado assintótico para o número de ocupação correspondente ao oscilador  $q_0$ , não depende da sua temperatura inicial, somente depende do ensemble (contínuo) inicial à temperatura  $T = 1/\beta$ . Notemos também que o primeiro termo do lado direito da Eq. (6.144) é convergente, enquanto que o segundo

termo diverge logaritmicamente para  $\omega \rightarrow \infty$ . É fácil provar que este termo divergente é igual ao valor assintótico de  $\langle 0 | \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(t) | 0 \rangle$ , onde  $|0\rangle$  denota o estado fundamental inicial do sistema, isto é, o estado no qual todos os osciladores estão nos seus estados fundamentais. Então podemos interpretar o termo divergente na Eq. (6.144) como as partículas, de frequência  $\tilde{\omega}$ , produzidas pela modificação do estado fundamental (vácuo) inicial<sup>1</sup>. Claramente esse termo não têm origem térmica. Tal termo é uma resposta do estado fundamental à interação. Ao calcular a temperatura final de equilíbrio temos que usar somente a parte de  $\bar{n}_0(t \rightarrow \infty)$  que tem origem térmica e este termo corresponde ao primeiro termo (finito) da Eq. (6.144). Alternativamente devemos chamar atenção para o fato de que o termo divergente da Eq. (6.144) pode ser eliminado fazendo um ordenamento normal dos operadores de criação e aniquilação.

Para obter a temperatura final de equilíbrio do oscilador podemos supor que a parte da expressão assintótica para  $\bar{n}_0(t \rightarrow \infty)$  que possui origem térmica é igual a uma distribuição tipo Bose-Einstein. Então denotando por  $\bar{n}_{\text{eq}}$ , o primeiro termo da Eq. (6.144) podemos escrever

$$\bar{n}_{\text{eq}} = \frac{1}{e^{\beta_f \tilde{\omega}} - 1}, \quad (6.145)$$

onde  $\beta_f = 1/T_f$ . Da equação anterior obtemos,

$$\frac{1}{T_f} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \ln \left[ 1 + \frac{1}{\bar{n}_{\text{eq}}} \right]. \quad (6.146)$$

Introduzindo parâmetros adimensionais,  $\tilde{g} = \frac{g}{\tilde{\omega}}$  e  $\tilde{\beta} = \tilde{\omega} \beta$  podemos escrever para o

---

<sup>1</sup>Claramente neste caso o vácuo é instável. Se usarmos a condição física de estabilidade do vácuo seria necessário introduzir novas coordenadas para descrever as coordenadas físicas do sistema. Neste caso as coordenadas, da mesma forma que a frequência  $\omega_0$ , seriam coordenadas "bare". Introduzindo as novas coordenadas físicas o infinito não apareceria mais dado que agora o vácuo seria estável[66, 67, 68, 69]

primeiro termo da Eq. (6.144) a seguinte expressão

$$\bar{n}_{\text{eq}} = 2\tilde{g} \int_0^\infty dx \frac{x(x^2 + 1)}{[4(x^2 - 1)^2 + \pi^2 \tilde{g}^2 x^2] (e^{\tilde{\beta}x} - 1)}. \quad (6.147)$$

Das Eqs. (6.146) e (6.147) a temperatura final  $\tilde{\beta}_f^{-1}$  (em unidades de  $\tilde{\omega}$ ) de equilíbrio é obtida. Embora a integral na Eq. (6.147) não possa ser resolvida analiticamente, podemos considerar como um exemplos simples, o comportamento da Eq. (6.147) no limite de altas temperaturas. Neste caso podemos tomar  $(e^{\tilde{\beta}x} - 1) \approx \tilde{\beta}x$  e a integral na Eq. (6.147) é calculada exatamente. O resultado obtido é

$$\bar{n}_{\text{eq}} \approx \frac{1}{\tilde{\beta}}. \quad (6.148)$$

Usando a expressão anterior na Eq. (6.146) obtemos  $T_f \approx T$ , isto é, no limite de altas temperaturas (comparadas à frequência do oscilador) a temperatura final de equilíbrio é aproximadamente idêntica à temperatura inicial do banho, em geral um resultado esperado. Para temperaturas iniciais arbitrárias, assim como para constantes de acoplamento arbitrárias podemos integrar numericamente a Eq. (6.147). Os resultados obtidos para a relação  $T/T_f$ , em função da temperatura (normalizada) inicial do banho térmico, são mostrados na Fig. 6.3.

## 6.6 Campos quânticos em interação linear

Nesta seção consideramos brevemente a extensão da abordagem de LvN ao estudo de sistemas de campos quânticos. Vamos considerar o modelo mais simples de dois campos acoplados linearmente. Então definimos o seguinte modelo de um campo escalar  $\hat{\Phi}_1$  em interação com outro campo escalar  $\hat{\Phi}_2$  através de um acoplamento linear, com Hamiltoniano

dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left( \hat{\Pi}_1^2 + (\nabla \hat{\Phi}_1)^2 + m_1^2 \hat{\Phi}_1^2 + \hat{\Pi}_2^2 + (\nabla \hat{\Phi}_2)^2 + m_2^2 \hat{\Phi}_2^2 + 2\lambda(t) \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 \right), \quad (6.149)$$

onde  $\hat{\Pi}_1$  e  $\hat{\Pi}_2$  são, respetivamente, os momentos conjugados de  $\hat{\Phi}_1$  e  $\hat{\Phi}_2$ .

Como nas seções anteriores vamos supor a existência de dois conjuntos de operadores de aniquilação e criação bosônicos  $\hat{a}_i(\mathbf{k}, t)$  e  $\hat{a}_j^\dagger(\mathbf{q}, t)$ , que satisfazem a álgebra

$$[\hat{a}_i(\mathbf{k}, t), \hat{a}_j^\dagger(\mathbf{q}, t)] = \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad [\hat{a}_i(\mathbf{k}, t), \hat{a}_j(\mathbf{q}, t)] = [\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t), \hat{a}_j^\dagger(\mathbf{q}, t)] = 0, \quad (6.150)$$

e que evoluem no tempo segundo a equação de LvN

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) = i[\hat{a}_i(\mathbf{k}, t), \hat{H}], \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t) = i[\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t), \hat{H}]. \quad (6.151)$$

Fazendo a expansão

$$\begin{aligned} \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \left( B_{ij}^k(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}_j(\mathbf{x}) - \dot{B}_{ij}^k(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}_j(\mathbf{x}) \right), \\ \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \int d^3\mathbf{x} \left( B_{ij}^{k*}(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}_j(\mathbf{x}) - \dot{B}_{ij}^{k*}(\mathbf{x}, t) \hat{\Phi}_j(\mathbf{x}) \right), \end{aligned} \quad (6.152)$$

onde  $B_{ij}^k(\mathbf{x}, t)$  são campos clássicos e  $\hat{\Phi}_i(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\Pi}_j(\mathbf{x})$  são operadores independentes do tempo.

Substituindo a Eq. (6.152) na Eq. (6.151) e desconsiderando termos de superfície obtemos as seguintes equações de movimento  $B_{ij}^k(\mathbf{x}, t)$ ,

$$(\square + m_1^2) B_{i1}^k(\mathbf{x}, t) + \lambda(t) B_{i2}^k(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (6.153)$$

e

$$(\square + m_2^2) B_{i2}^k(\mathbf{x}, t) + \lambda(t) B_{i1}^k(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (6.154)$$

Podemos resolver as equações anteriores fazendo

$$B_{ij}^k(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} B_{ij}^k(t), \quad (6.155)$$

e então das Eqs. (6.153) e (6.154) obtemos

$$\ddot{B}_{i1}^k(t) + \omega_1^2(\mathbf{k})B_{i1}^k(t) + \lambda(t)B_{i2}^k(t) = 0 \quad (6.156)$$

e

$$\ddot{B}_{i2}^k(t) + \omega_2^2(\mathbf{k})B_{i2}^k(t) + \lambda(t)B_{i1}^k(t) = 0, \quad (6.157)$$

onde  $\omega_i^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + m_i^2$ . Agora usando a Eq. (6.155) nas Eqs. (6.152) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left( B_{ij}^k(t) \hat{\Pi}_j(\mathbf{x}) - \dot{B}_{ij}^k(t) \hat{\Phi}_j(\mathbf{x}) \right), \\ \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left( B_{ij}^{k*}(t) \hat{\Pi}_j(\mathbf{x}) - \dot{B}_{ij}^{k*}(t) \hat{\Phi}_j(\mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (6.158)$$

Usando a Eq. (6.158) na Eq. (6.150) obtemos;

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \left[ \dot{B}_{il}^k(t) B_{jl}^{k*}(t) - B_{il}^k(t) \dot{B}_{jl}^{k*}(t) \right] &= i\delta_{ij}, \\ \sum_{l=1}^2 \left[ \dot{B}_{il}^k(t) B_{jl}^k(t) - \dot{B}_{il}^k(t) B_{jl}^k(t) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (6.159)$$

relação que garante a independência do tempo das relações dadas pela Eq. (6.150).

Para escrever os operadores de aniquilação e criação dependentes do tempo, em termos dos seus valores num instante inicial  $t = t_0$ , vamos supor, como no caso dos osciladores acoplados, que inicialmente os campos estão desacoplados, cada qual encontrando-se independentemente em equilíbrio térmico às temperaturas  $\beta_1^{-1}$  e  $\beta_2^{-1}$ , respectivamente. Neste contexto é fácil provar a partir das Eqs. (6.156), (6.157) e (6.159) que os valores iniciais para  $B_{ij}^k(t)$  (que denotamos por  $B_{ij}^k$ ) são

$$B_{ij}^k = \frac{e^{i\omega_j(\mathbf{k})t}}{\sqrt{2\omega_j(\mathbf{k})}} \delta_{ij}. \quad (6.160)$$

Agora podemos escrever os operadores de campo e os seus momentos conjugados  $\hat{\Phi}_i(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\Pi}_j(\mathbf{x})$  em termos dos valores iniciais  $B_{ij}^k$  e em termos dos operadores de aniquilação

e criação (que denotamos como  $\hat{a}_i(\mathbf{k})$ ,  $\hat{a}_j^\dagger(\mathbf{k})$ ). Usando a Eq. (6.160) na Eq. (6.158) obtemos que

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_i(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i}{\sqrt{2\omega_i(\mathbf{k})}} \left( e^{-ik_i x} \hat{a}_i(\mathbf{k}) - e^{ik_i x} \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) \right), \\ \hat{\Pi}_i(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_i(\mathbf{k})}{2}} \left( e^{-ik_i x} \hat{a}_i(\mathbf{k}) + e^{ik_i x} \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) \right),\end{aligned}\quad (6.161)$$

onde  $k_j x = \omega_j(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ . As relações anteriores entre os operadores de campo e os operadores de aniquilação e criação diferem das relações que aparecem nos livros texto já que estamos usando a equação de LvN em lugar das equações de Heisenberg. Agora usando as Eqs. (6.161) nas Eqs. (6.158) é fácil obter as seguintes relações,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) \\ \hat{a}_i^\dagger(-\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} \alpha_{ij}^k(t) & \beta_{ij}^k(t) \\ \beta_{ij}^{k*}(t) & \alpha_{ij}^{k*}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_j(\mathbf{k}) \\ \hat{a}_j^\dagger(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (6.162)$$

onde os coeficientes de Bogoliubov são dados por

$$\alpha_{ij}^k(t) = i \left( \dot{B}_{jj}^{k*} B_{ij}^k(t) - B_{jj}^{k*} \dot{B}_{ij}^k(t) \right) \quad (6.163)$$

e

$$\beta_{ij}^k(t) = i \left( B_{jj}^k \dot{B}_{ij}^k(t) - \dot{B}_{jj}^k B_{ij}^k(t) \right), \quad (6.164)$$

com  $B_{jj}^k$  dado pela Eq. (6.160). As Eqs. (6.159) podem ser reescritas em termos dos coeficientes de Bogoliubov como

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^2 \left[ \alpha_{il}^k(t) \alpha_{jl}^{k*}(t) - \beta_{il}^k(t) \beta_{jl}^{k*}(t) \right] &= \delta_{ij}, \\ \sum_{l=1}^2 \left[ \alpha_{il}^k(t) \beta_{jl}^k(t) - \beta_{il}^k(t) \alpha_{jl}^k(t) \right] &= 0.\end{aligned}\quad (6.165)$$

Usando as relações anteriores podemos inverter a Eq.(6.162) e obter

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_i(\mathbf{k}) \\ \hat{a}_i^\dagger(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} \alpha_{ij}^{k*}(t) & -\beta_{ji}^k(t) \\ -\beta_{ji}^{k*}(t) & \alpha_{ij}^k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_j(\mathbf{k}, t) \\ \hat{a}_j^\dagger(-\mathbf{k}, t) \end{pmatrix}. \quad (6.166)$$



Agora podemos escrever o operador de densidade dependente do tempo exato  $\hat{\rho}(t)$  (com Hamiltoniano normalmente ordenado) como

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{Z_{\beta_1} Z_{\beta_2}} \exp \left[ - \sum_{j=1}^2 \beta_j \int d^3\mathbf{k} \omega_j(\mathbf{k}) \hat{a}_j^\dagger(\mathbf{k}, t) \hat{a}_j(\mathbf{k}, t) \right]. \quad (6.167)$$

De forma idêntica às seções anteriores podemos obter os valores esperados térmicos dependentes do tempo para os operadores número de ocupação,  $\hat{N}_i(\mathbf{k}) = \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_i(\mathbf{k})$ ,

$$\begin{aligned} \bar{n}_i(\mathbf{k}, t) &= \text{Tr} \left( \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_i(\mathbf{k}) \hat{\rho}(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[ (|\alpha_{ij}^k(t)|^2 + |\beta_{ij}^k(t)|^2) \bar{n}_j^0(\mathbf{k}) + |\beta_{ij}^k(t)|^2 \right], \end{aligned} \quad (6.168)$$

onde  $\bar{n}_j^0(\mathbf{k})$  são as distribuições iniciais de equilíbrio térmico para os operadores número de ocupação e dadas pela distribuição de Bose-Einstein,

$$\bar{n}_j^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\beta_j \omega_j(\mathbf{k})} + 1}. \quad (6.169)$$

Note que os nossos resultados são idênticos ao caso de dois osciladores acoplados. Então, as conclusões da Sec. 6.4 são também válidas para o caso de dois campos em interação linear, isto é, dois campos em interação linear jamais alcançam um estado final de equilíbrio térmico.

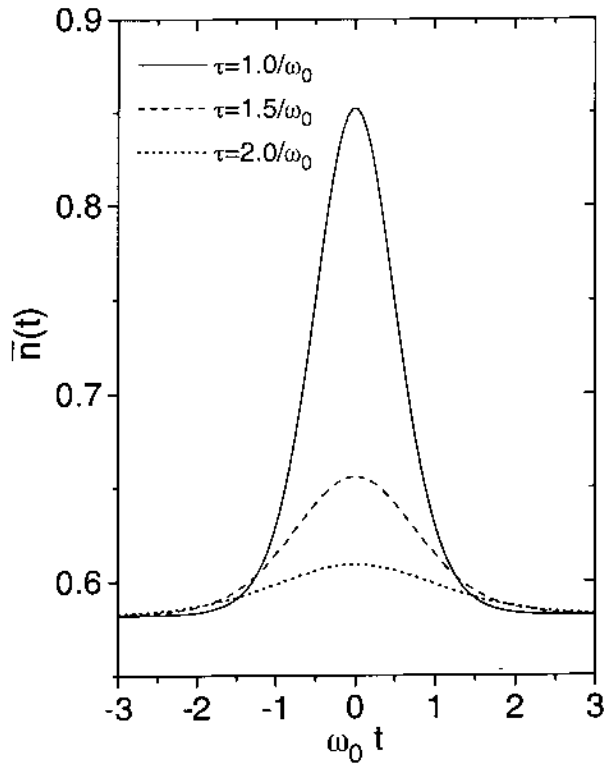


Figura 6.1: A evolução temporal do número de ocupação para  $\omega_0\beta = 1$  e para tempos de decaimento (em unidades de  $1/\omega_0$ )  $\tau = 1.0, 1.5$  e  $2.0$ .

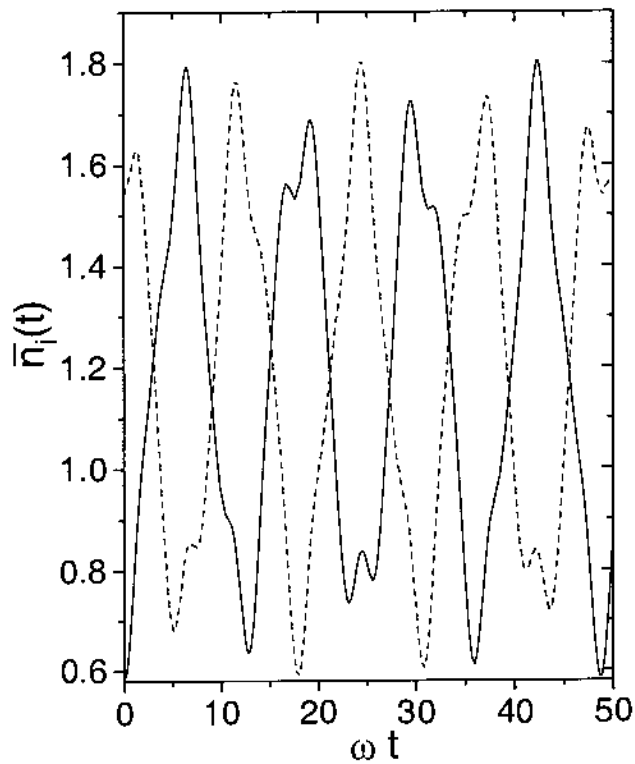


Figura 6.2: A evolução temporal dos números de ocupação  $\bar{n}_1(t)$  (curva tracejada) e  $\bar{n}_2(t)$  (curva contínua) para  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\omega\beta_1 = 1/2$ ,  $\omega\beta_2 = 1$  e  $\lambda = \omega^2/2$ .

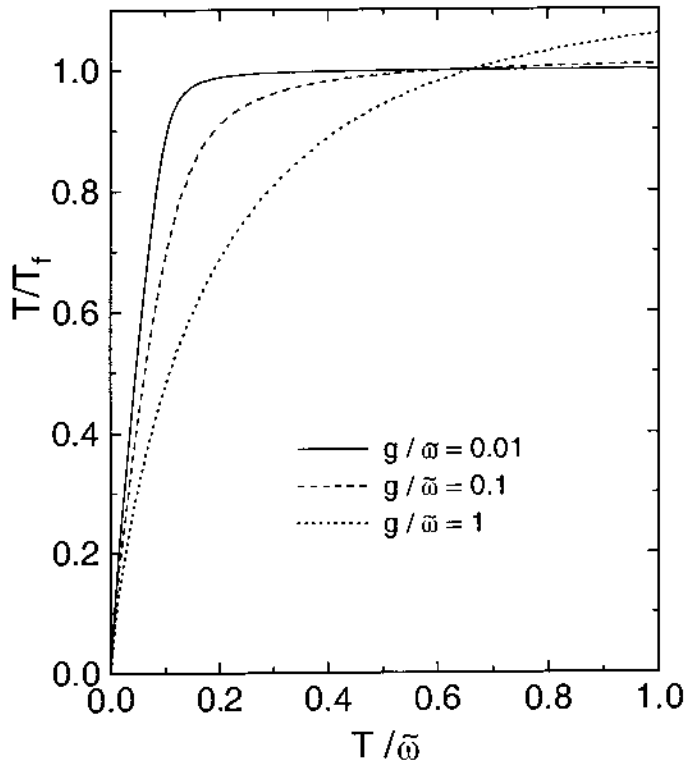


Figura 6.3: A relação  $T/T_f$  em função da temperatura (escalada)  $T$  para diferentes valores da constante de acoplamento  $g$ .

# Capítulo 7

## Conclusões

Nesta tese temos considerado a construção de modelos escalares bi-dimensionais a partir das flutuações de modo zero. Em particular temos encontrado dois novos modelos que possuem soluções solitônicas: os modelos  $\Phi^2 \ln^2(\Phi^2)$  e  $\Phi^2 \cos^2 \ln(\Phi^2)$ .

Usando a regularização pelo método do "cut-off" no momento energia temos dado uma formula geral para o cálculo das correções quânticas à massa dos sólitons em (1+1) dimensões. A formula é bem geral e só se exige o conhecimento do coeficiente de transmissão do problema de espalhamento unidimensional. Em particular temos calculado a massa do sóliton no modelo proposto  $\Phi^2 \cos^2 \ln(\Phi^2)$ . Como mencionamos na introdução, na Ref. [18] os autores concluíram que o método de regularização por "cut-off" no momento energia dá resultados incorretos quando aplicado ao cálculo das correções quânticas à massa do sóliton. Nós temos mostrado o contrario, que o método de regularização por cut-off dá resultados corretos quando aplicado ao cálculo das correções quânticas à massa dos sólitons. Isto ficou evidenciado quando usamos a nossa formula, Eq. (4.64) ao cálculo da massa dos sólitons nos modelos de sine-Gordon e  $\Phi^4$ . Também devemos chamar atenção ao seguinte fato. Das Eqs. (4.58) ou (4.65) podemos notar que a soma discretizada das auto-freqüências contínuas na presença do sóliton contem  $\mathcal{N}$  termos a menos que a

soma sobre as auto-frequências na ausência do sóliton, sendo que  $\mathcal{N}$  é o número de auto-frequências discretas na presença do sóliton. Este fato, é exatamente o ponto de partida (quer dizer uma suposição a priori) usado no esquema de regularização conhecido como "mode number" e o qual foi introduzida na Ref. [18]. Nos provamos que esse fato é uma consequência da regularização pelo método do "cut-off" no momento energia.

Também mostramos que em modelos tais que o potencial, que descreve as flutuações quântica ao redor dos sólitons, tem diferentes valores assintóticos os sólitons não fazem sentido a nível quântico. A nossa prova foi bem geral. Finalizamos a primeira parte da tese mostrando que mediante o acoplamento do campo escalar a um campo fermiônico de Majorana os sólitons novamente fazem sentido ao nível quântico.

Na parte final da tese estudamos alguns modelos simples para entender o processo de termalização em sistemas fora do equilíbrio térmico. Em particular mostramos que em modelos onde o número de graus de liberdade é igual (dois osciladores, dois campos) não existe termalização, isto é, os subsistemas permanecem indefinida e reversivelmente trocando energia e nunca atingindo um estado final de equilíbrio térmico. Da Sec. 6.3 podemos concluir que o papel fundamental da não linearidade é a de estabilizar o sistema. Isto pode-se ver facilmente a partir da Eq. (6.65) onde se fazemos  $\lambda = 0$  e  $\omega^2(t \geq 0) = -\omega^2$ , então  $U(\psi) = -\omega^2\psi^2/2 + \psi^{-2}/8$  e então teremos que a solução para  $\psi$  crescerá exponencialmente no decorrer do tempo. Por outro lado para  $\lambda \neq 0$  temos  $U(\psi) = -\omega^2\psi^2/2 + \psi^{-2}/8 + \lambda\psi^8/8$  e agora a solução para  $\psi$  é oscilante no tempo, isto é, ele se mantém finito para todo  $t$ .

No caso de um oscilador interagindo com um ambiente mostramos que o oscilador termaliza. Neste caso demos uma expressão para o número de ocupação a partir do qual

calculamos numericamente a temperatura final de equilíbrio térmico. Também a partir deste simple modelo podemos concluir que o tempo medio necessario para que o sistema termalize é da ordem [ver Eqs. (C.25), (C.26), (C.33) e (C.34)]  $\tau \sim 1/g$ , sendo  $g^{1/2}$  [ver Eq. (6.124)] é uma constante de acoplamento entre o sistema e o banho.

Podemos então concluir que: para que um sistema fora do equilibrio térmico termalize é necessario que o sistema seja dissipativo, isto é, perca energia irreversivelmente e alem disso é necessario a existencia de não linearidades para desta forma garantirmos a estabilidade do sistema no decorrer do tempo.

# Apêndice A

Neste apêndice vamos mostrar que

$$\begin{aligned}\Delta E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta S}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \text{Tr} \ln \left\{ \mathbf{1} + \frac{\mathcal{V}(\vec{x})}{-\square_E + m^2} \right\},\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

onde  $\square_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \vec{\nabla}^2$  e  $T$  é tal que  $-T/2 \leq \tau \leq T/2$ . Usando a identidade  $\det(A) = \exp(\text{Tr}A)$  podemos escrever

$$\begin{aligned}\text{Tr} \ln \left\{ \mathbf{1} + \frac{\mathcal{V}(\vec{x})}{-\square_E + m^2} \right\} &= \ln \left\{ \frac{\det[-\square_E + \mathcal{V}(\vec{x}) + m^2]}{\det[-\square_E + m^2]} \right\} \\ &= \ln \left\{ \frac{\prod_\epsilon \epsilon}{\prod_{\epsilon_0} \epsilon_0} \right\},\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

onde  $\epsilon$  e  $\epsilon_0$  são, respectivamente os autovalores dos operadores  $[-\square_E + \mathcal{V}(\vec{x}) + m^2]$  e  $[-\square_E + m^2]$ , isto é, eles satisfazem as seguintes equações:

$$[-\square_E + \mathcal{V}(\vec{x}) + m^2]\phi_\epsilon(x) = \epsilon\phi_\epsilon(x), \quad (\text{A.3})$$

$$[-\square_E + m^2]\phi_{\epsilon_0}(x) = \epsilon_0\phi_{\epsilon_0}(x). \quad (\text{A.4})$$

Já que  $\mathcal{V}(\vec{x})$  não depende de  $\tau$  podemos escrever

$$\phi_\epsilon(\tau, \vec{x}) = e^{i\alpha_1 \tau} \phi_n(\vec{x}), \quad \phi_{\epsilon_0}(\tau, \vec{x}) = e^{i\alpha_1 \tau} \phi_k^0(\vec{x}), \quad (\text{A.5})$$

onde  $\alpha_l$  é obtido impondo condições periódicas de contorno  $\phi_{\epsilon, \epsilon_0}(-\frac{T}{2}, \vec{x}) = \phi_{\epsilon, \epsilon_0}(\frac{T}{2}, \vec{x})$ , de onde obtemos

$$\alpha_l = \frac{2\pi l}{T}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.6})$$

Substituindo as expressões (A.5) nas Eqs. (A.3) e (A.4) obtemos

$$[-\vec{\nabla}^2 + \mathcal{V}(\vec{x}) + m^2]\phi_n(\vec{x}) = \omega_n^2 \phi_n(\vec{x}) \quad (\text{A.7})$$

e

$$[-\vec{\nabla}^2 + m^2]\phi_k^0(\vec{x}) = (\omega_k^0)^2 \phi_k^0(\vec{x}), \quad (\text{A.8})$$

onde  $\omega_n^2 = (\epsilon - \alpha_l^2)$  e  $(\omega_k^0)^2 = (\epsilon_0 - \alpha_l^2)$ . Substituindo os valores de  $\epsilon$  e  $\epsilon_0$  na Eq. (A.2) obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{\mathcal{V}(\vec{x})}{-\square_E + m^2} \right\} &= \ln \left\{ \frac{\prod_n \prod_{l=-\infty}^{\infty} [\omega_n^2 + \alpha_l^2]}{\prod_k \prod_{l=-\infty}^{\infty} [(\omega_k^0)^2 + \alpha_l^2]} \right\} \\ &= 2 \ln \left\{ \left( \frac{\prod_n \omega_n}{\prod_k \omega_k^0} \right) \frac{\prod_n \prod_{l=1}^{\infty} [\omega_n^2 + \alpha_l^2]}{\prod_k \prod_{l=1}^{\infty} [\omega_k^2 + \alpha_l^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a Eq. (A.6) na Eq. (A.9) e usando a identidade

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{z^2}{n^2} \right] = \frac{\sinh(\pi z)}{\pi z} \quad (\text{A.10})$$

encontramos que

$$\text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{\mathcal{V}(\vec{x})}{-\square_E + m^2} \right\} = 2 \ln \left[ \frac{\prod_n \sinh(\omega_n T/2)}{\prod_k \sinh(\omega_k T/2)} \right]. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo a Eq. (A.11) na Eq. (A.1) e usando  $\sinh(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow e^z/2$  obtemos finalmente

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^0. \quad (\text{A.12})$$



# Apêndice B

Neste apêndice vamos calcular o coeficiente de reflexão  $R_q = e^{i\delta(q)}$  correspondente ao potencial de Morse, o qual descreve as flutuações quânticas ao redor das soluções clássica do modelo  $\Phi^2 \ln^2(\Phi^2)$ . Substituindo a Eq. (3.65) em  $U''[\Phi]$  obtido a partir da Eq. (3.63) encontramos que a equação de Schrödinger que devemos resolver é

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2(e^{\pm 2mx} - 3e^{\pm mx} + 1) \right] \phi_q(x) = \omega_q^2 \phi_q(x). \quad (\text{B.1})$$

Vamos nos restringir ao caso  $+$ . Neste caso para encontrar  $\delta(q)$  temos que resolver a Eq. (B.1) com as seguintes condições de fronteira

$$\phi_q(x \rightarrow -\infty) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx} \quad (\text{B.2})$$

e

$$\phi_q(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Para calcularmos o valor de  $R_q$  temos que calcular a relação entre  $A$  e  $B$  na Eq. (B.2).

Para este fim fazemos a seguinte troca de variáveis

$$\xi = 2e^{mx}, \quad \phi_q(x) = e^{-\xi/2} \xi^{iq/m} \chi(\xi). \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a Eq. (B.4) na Eq. (B.1) obtemos a seguinte equação para  $\chi(\xi)$

$$\xi \chi''(\xi) + (2iq/m + 1 - \xi) \chi'(\xi) + (1 - iq/m) \chi(\xi) = 0, \quad (\text{B.5})$$

uma equação hipergeométrica confluyente a qual pode ser resolvido em termos de funções hipergeométricas [71]

$$\chi(\xi) = c_1 F(iq/m - 1, 2iq/m + 1, \xi) + c_2 \xi^{-2iq/m} F(-iq/m - 1, 1 - 2iq/m, \xi). \quad (\text{B.6})$$

Usando a Eq. (B.6) na Eq. (B.4) obtemos para  $\psi_k(x)$

$$\phi_q(x) = e^{-\xi/2} \left[ c_1 \xi^{iq/m} F(iq/m - 1, 2iq/m + 1, \xi) + c_2 \xi^{-iq/m} F(-iq/m - 1, 1 - 2iq/m, \xi) \right], \quad (\text{B.7})$$

onde podemos ver que para  $\xi \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) esta solução se comporta segundo a Eq. (B.2). Usando os valores assintóticos de  $F(\alpha, \gamma, \xi)$  [30]

$$F(\alpha, \gamma, \xi \rightarrow \infty) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^\xi \xi^{\alpha-\gamma}, \quad (\text{B.8})$$

é fácil mostrar que a solução dada pela Eq. (B.7) se comporta segundo a Eq. (B.3) somente se

$$c_1 = \frac{\Gamma(iq/m - 1)\Gamma(-2iq/m)}{\Gamma(-1 - iq/m)\Gamma(2iq/m)} c_2. \quad (\text{B.9})$$

Agora usando a Eq. (B.9) na Eq. (B.7) e tomando o limite  $x \rightarrow -\infty$  obtemos

$$\phi_q(x \rightarrow -\infty) = c_2 \left[ \frac{\Gamma(iq/m - 1)\Gamma(-2iq/m)}{\Gamma(-1 - iq/m)\Gamma(2iq/m)} 2^{iq/m} e^{iqx} + 2^{-iq/m} e^{-iqx} \right] \quad (\text{B.10})$$

A partir do qual obtemos para a amplitude de reflexão:

$$R_q = B/A = 2^{-2iq/m} \frac{\Gamma(-1 - iq/m)\Gamma(2iq/m)}{\Gamma(-1 + iq/m)\Gamma(-2iq/m)} \quad (\text{B.11})$$

e  $\delta(q)$  é obtido tomando o argumento da expressão anterior,

$$\delta(q) = \text{Arg} \left( 2^{-2iq/m} \frac{\Gamma(-1 - iq/m)\Gamma(2iq/m)}{\Gamma(-1 + iq/m)\Gamma(-2iq/m)} \right). \quad (\text{B.12})$$

Note que como esperado  $|R_q| = 1$ . O caso  $(-)$  na Eq. (B.1) segue-se idênticamente ao caso anterior.

# Apêndice C

## C.1

Neste apêndice vamos resolver o sistema de equações

$$\ddot{B}_{\mu 0}(t) + \omega_0^2 B_{\mu 0}(t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k B_{\mu k}(t) = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\ddot{B}_{\mu k}(t) + \omega_k^2 B_{\mu k}(t) + \lambda_k B_{\mu 0}(t) = 0, \quad (\text{C.2})$$

com a condição inicial em  $t = 0$  dado por

$$B_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{2\omega_\mu}, \quad \dot{B}_{\mu\nu} = i\delta_{\mu\nu}\sqrt{\frac{\omega_\mu}{2}}. \quad (\text{C.3})$$

Quando  $N = 2$ ,  $k = 1$  e escrevendo  $\lambda_k = \lambda$  as equações anteriores são as Eqs. (6.69)-(6.70) com constante de acoplamento dependente do tempo (trocando os coeficientes 0, 1 por 1, 2). De outro lado, quando  $\lambda_k = \omega_k \sqrt{g\Delta\bar{\omega}}$  recuperamos as Eqs. (6.122)-(6.123) com constante de acoplamento independente do tempo e dada pela Eq. (6.124). Também, neste caso, nas condições iniciais dadas pela Eq. (C.3) temos que substituir as frequências nuas  $\omega_\mu$  pelas renormalizadas  $\tilde{\omega}_\mu = (\tilde{\omega}, \omega_k)$  [ver Eq. (6.121)]. Para resolver as Eqs. (C.1)-(C.2) introduzimos coordenadas normais  $Q_{\mu\nu}(t)$  através de

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \eta_{\nu\rho} Q_{\mu\rho}(t), \quad (\text{C.4})$$

onde somente o segundo índice de  $B_{\mu\nu}(t)$  aparece na matriz de transformação  $\{\eta\}$  já que os primeiros índices estão desacoplados nas Eqs. (C.1)-(C.2). Substituindo a Eq. (C.4)

nas Eqs. (C.1)-(C.2) obtemos

$$\sum_{\rho=0}^N \left[ \eta_{0\rho} \ddot{Q}_{\mu\rho}(t) + \omega_0^2 \eta_{0\rho} Q_{\mu\rho}(t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \eta_{k\rho} Q_{\mu\rho}(t) \right] = 0, \quad (C.5)$$

$$\sum_{\rho=0}^N \left[ \eta_{k\rho} \ddot{Q}_{\mu\rho}(t) + \omega_k^2 \eta_{k\rho} Q_{\mu\rho}(t) + \lambda_k \eta_{0\rho} Q_{\mu\rho}(t) \right] = 0. \quad (C.6)$$

Multiplicando a Eq. (C.5) por  $\eta_{0\sigma}$  e a Eq. (C.6) por  $\eta_{k\sigma}$  e somando as equações resultantes

obtemos

$$\sum_{\rho=0}^N \left\{ \left[ \sum_{\nu=0}^N \omega_\nu^2 \eta_{\nu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \sum_{k=1}^N \lambda_k (\eta_{k\rho} \eta_{0\sigma} + \eta_{0\rho} \eta_{k\sigma}) \right] Q_{\mu\rho}(t) \sum_{\nu=0}^N \eta_{\nu\rho} \eta_{\nu\sigma} \ddot{Q}_{\mu\rho}(t) \right\} = 0, \quad (C.7)$$

e impondo que,

$$\sum_{\nu=0}^N \eta_{\nu\rho} \eta_{\nu\sigma} = \delta_{\rho\sigma}, \quad (C.8)$$

$$\sum_{\nu=0}^N \omega_\nu^2 \eta_{\nu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \sum_{k=1}^N \lambda_k (\eta_{k\rho} \eta_{0\sigma} + \eta_{0\rho} \eta_{k\sigma}) = \delta_{\rho\sigma} \Omega_\sigma^2, \quad (C.9)$$

obtemos

$$\ddot{Q}_{\mu\sigma}(t) + \Omega_\sigma^2 Q_{\mu\sigma}(t) = 0. \quad (C.10)$$

A Eq. (C.9) pode também ser escrita como

$$\sum_{\nu=0}^N \left[ \omega_\nu^2 \eta_{\nu\rho} + \sum_{k=1}^N \lambda_k (\eta_{k\rho} \delta_{0\nu} + \eta_{0\rho} \delta_{k\nu}) \right] \eta_{\nu\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \Omega_\sigma^2. \quad (C.11)$$

Das Eqs. (C.8) e (C.11) obtemos que

$$\omega_\nu^2 \eta_{\nu\rho} + \sum_{k=1}^N \lambda_k (\eta_{k\rho} \delta_{0\nu} + \eta_{0\rho} \delta_{k\nu}) = \eta_{\nu\rho} \Omega_\rho^2. \quad (C.12)$$

Tomando  $\nu = 0$  na equação anterior obtemos que

$$\omega_0^2 \eta_{0\rho} + \sum_{k=1}^N \lambda_k \eta_{k\rho} = \eta_{0\rho} \Omega_\rho^2, \quad (C.13)$$

enquanto que para  $\nu \neq 0$  obtemos para  $\eta_{k\rho}$  o resultado

$$\eta_{k\rho} = \frac{\lambda_k}{\Omega_\rho^2 - \omega_k^2} \eta_{0\rho}. \quad (C.14)$$

Tomando  $\rho = \sigma$  na Eq. (C.8) e usando a Eq. (C.14) podemos resolver para  $\eta_{0\rho}$  obtendo a expressão

$$\eta_{0\rho} = \left[ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_\rho)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (C.15)$$

Usando a Eq. (C.14) na Eq. (C.13) obtemos

$$\omega_0^2 - \Omega_\rho^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_\rho^2}. \quad (C.16)$$

Agora, da Eq. (C.10) podemos escrever para  $B_{\mu\nu}(t)$  a seguinte expressão

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \eta_{\nu\rho} \left( a_{\mu\rho} e^{i\Omega_\rho t} + b_{\mu\rho} e^{-i\Omega_\rho t} \right), \quad (C.17)$$

e usando as condições iniciais dadas pela Eq. (C.3) obtemos para  $a_{\mu\rho}$  e  $b_{\mu\rho}$ , respectivamente, as equações

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{\sqrt{8\omega_\mu}} \left( 1 + \frac{\omega_\mu}{\Omega_\nu} \right) \\ b_{\mu\nu} &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{\sqrt{8\omega_\mu}} \left( 1 - \frac{\omega_\mu}{\Omega_\nu} \right). \end{aligned} \quad (C.18)$$

Substituindo a Eq. (C.18) na Eq. (C.17) obtemos finalmente o resultado

$$B_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\rho}}{\sqrt{8\omega_\mu}} \left[ \left( 1 + \frac{\omega_\mu}{\Omega_\rho} \right) e^{i\Omega_\rho t} + \left( 1 - \frac{\omega_\mu}{\Omega_\rho} \right) e^{-i\Omega_\rho t} \right]. \quad (C.19)$$

## C.2

Vamos calcular os coeficientes de Bogoliubov  $\alpha_{00}(t)$ ,  $\beta_{00}(t)$ ,  $\alpha_{0k}(t)$ , e  $\beta_{k0}(t)$ . Usando a Eq. (6.137) nas Eqs. (6.138)-(6.139) obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu}(t) &= \sum_{\rho=0}^N \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_\nu}{\tilde{\omega}_\mu}} \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\rho}}{4\Omega_\rho} \left[ (\Omega_\rho + \tilde{\omega}_\mu) e^{i\Omega_\rho t} + (\Omega_\rho - \tilde{\omega}_\mu) e^{-i\Omega_\rho t} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\rho}}{4\sqrt{\tilde{\omega}_\mu\tilde{\omega}_\nu}} \left[ (\tilde{\omega}_\mu + \Omega_\rho) e^{i\Omega_\rho t} + (\tilde{\omega}_\mu - \Omega_\rho) e^{-i\Omega_\rho t} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (C.20)$$

$$\beta_{\mu\nu}(t) = \sum_{\rho=0}^N \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_\nu}{\tilde{\omega}_\mu}} \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\rho}}{4\Omega_\rho} [(\Omega_\rho + \tilde{\omega}_\mu) e^{i\Omega_\rho t} + (\Omega_\rho - \tilde{\omega}_\mu) e^{-i\Omega_\rho t}] - \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\rho}}{4\sqrt{\tilde{\omega}_\mu\tilde{\omega}_\nu}} [(\tilde{\omega}_\mu + \Omega_\rho) e^{i\Omega_\rho t} + (\tilde{\omega}_\mu - \Omega_\rho) e^{-i\Omega_\rho t}] \right\}. \quad (C.21)$$

Tomando  $\mu, \nu = 0$  nas equações anteriores obtemos

$$\alpha_{00} = \sum_{\rho=0}^N \frac{(\eta_{0\rho})^2}{4} \left[ \left( 2 + \frac{\tilde{\omega}}{\Omega_\rho} + \frac{\Omega_\rho}{\tilde{\omega}} \right) e^{i\Omega_\rho t} + \left( 2 - \frac{\tilde{\omega}}{\Omega_\rho} - \frac{\Omega_\rho}{\tilde{\omega}} \right) e^{-i\Omega_\rho t} \right], \quad (C.22)$$

$$\beta_{00} = \sum_{\rho=0}^N \frac{(\eta_{0\rho})^2}{4} \left[ \left( \frac{\tilde{\omega}}{\Omega_\rho} - \frac{\Omega_\rho}{\tilde{\omega}} \right) e^{i\Omega_\rho t} + \left( \frac{\Omega_\rho}{\tilde{\omega}} - \frac{\tilde{\omega}}{\Omega_\rho} \right) e^{-i\Omega_\rho t} \right]. \quad (C.23)$$

Substituindo a Eq. (6.133) nas equações anteriores e tomando o limite contínuo obtemos para  $\alpha_{00}(t)$ , a expressão

$$\begin{aligned} \alpha_{00}(t) &= \frac{g}{\tilde{\omega}} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega [(\tilde{\omega} + \Omega)^2 e^{i\Omega t} - (\tilde{\omega} - \Omega)^2 e^{-i\Omega t}]}{4(\Omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} \\ &= \frac{g}{2\tilde{\omega}} \int_{-\infty}^\infty d\Omega \frac{\Omega [(\tilde{\omega} + \Omega)^2 e^{i\Omega t} - (\tilde{\omega} - \Omega)^2 e^{-i\Omega t}]}{4(\Omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} \\ &= \frac{g}{\tilde{\omega}} \int_{-\infty}^\infty d\Omega \frac{\Omega(\tilde{\omega} + \Omega)^2}{4(\Omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} e^{i\Omega t}. \end{aligned} \quad (C.24)$$

a integral na Eq. (C.24) pode ser facilmente avaliada usando o teorema de Cauchy escolhendo como contorno de integração o semi-plano superior complexo. Os pólos localizados no semi-plano superior são  $\pm\tilde{\omega} + \frac{i\pi g}{4}$ , onde  $\tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \frac{\pi^2 g^2}{16}}$ . Supondo  $\tilde{\omega} > \frac{\pi g}{4}$  o resultado é

$$\alpha_{00}(t) = \frac{e^{-\pi g t/4}}{64\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \left[ (4\tilde{\omega} + 4\tilde{\omega} + i\pi g)^2 e^{i\tilde{\omega}t} - (4\tilde{\omega} - 4\tilde{\omega} + i\pi g)^2 e^{-i\tilde{\omega}t} \right]. \quad (C.25)$$

Da mesma forma obtemos da Eq. (C.23) a expressão para  $\beta_{00}(t)$  (supondo de novo  $\tilde{\omega} > \frac{\pi g}{4}$ ),

$$\beta_{00}(t) = \frac{\pi g e^{-\pi g t/4}}{16\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \left[ (2\pi g - i\tilde{\omega}) e^{i\tilde{\omega}t} - (2\pi g + i\tilde{\omega}) e^{-i\tilde{\omega}t} \right]. \quad (C.26)$$

Fazendo  $\mu = 0$ ,  $\nu = k$  na Eq. (C.20) obtemos,

$$\alpha_{0k}(t) = \frac{\omega_k g \sqrt{g \Delta \omega}}{\sqrt{\tilde{\omega} \omega_k}} \sum_{\rho} \frac{\Delta \omega \Omega}{\Omega_{\rho}^2 - \omega_k^2} \left[ \frac{(\omega_k + \Omega_{\rho})(\Omega_{\rho} + \tilde{\omega}) e^{i\Omega_{\rho} t}}{4(\Omega_{\rho}^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_{\rho}^2} + \frac{(\omega_k - \Omega_{\rho})(\Omega_{\rho} - \tilde{\omega}) e^{-i\Omega_{\rho} t}}{4(\Omega_{\rho}^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_{\rho}^2} \right]. \quad (\text{C.27})$$

Quando tomarmos o limite contínuo devemos ter cuidado, dado que nesse caso aparece uma singularidade quando  $\Omega = \omega_k$ . Na verdade esta singularidade é fictícia e pode ser eliminada da Eq. (C.27) usando a Eq. (6.131). Em termos da frequência renormalizada  $\tilde{\omega}$  a Eq. (6.131) pode ser escrita como (fazendo  $\mu = k$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2 - \Omega_k^2 &= \sum_{q \neq k} \frac{g \Omega_k^2}{\omega_q^2 - \Omega_k^2} + \frac{g \Omega_k^2 \Delta \omega}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} \\ &= g \int_0^{\infty} d' \omega \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2} + \frac{g \Omega_k^2 \Delta \omega}{\omega_k^2 - \Omega_k^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

onde isolamos o pólo em  $\omega_k = \Omega_k$  e o apóstrofo na integral significa que o ponto  $\omega = \Omega_k$  é excluído da integração. É fácil mostrar que tal integração é nula. Com este fim escrevemos a integração como

$$I = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d' \omega \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \quad (\text{C.29})$$

onde agora entende-se que omitimos os pontos  $\pm \Omega_k = \omega_k$  na integração sobre a frequência.

Usando o teorema de Cauchy obtemos,

$$I = \frac{g \Omega_k^2}{2} \left( \frac{i\pi}{2\Omega_k} + \frac{i\pi}{-2\Omega_k} \right) = 0. \quad (\text{C.30})$$

Então, da Eq. (C.28) obtemos

$$\tilde{\omega}^2 - \Omega_k^2 = \frac{g \Omega_k^2 \Delta \omega}{\omega_k^2 - \Omega_k^2}, \quad (\text{C.31})$$

onde fica entendido que  $\Omega_k = \omega_k$  e pelo fato de estarmos considerando o limite contínuo, caso no qual  $\Delta \omega \rightarrow 0$ , então o lado direito da Eq. (C.31) é bem definido. Agora, podemos

usar a Eq. (C.31) na Eq. (C.27) para eliminar a singularidade após isolar tal singularidade.

Isolando a singularidade na Eq. (C.27) e tomando o limite contínuo obtemos

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0k}(t) &= \frac{\omega_k g \sqrt{g \Delta \omega}}{\sqrt{\tilde{\omega} \omega_k}} \int_0^\infty d' \Omega \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_k^2} \left[ \frac{(\omega_k + \Omega)(\Omega + \tilde{\omega}) e^{i \Omega t}}{4(\Omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\omega_k - \Omega)(\Omega - \tilde{\omega}) e^{-i \Omega t}}{4(\Omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} \right] + \frac{\omega_k g \sqrt{g \Delta \omega}}{\sqrt{\tilde{\omega} \omega_k}} \frac{\Delta \omega \Omega_k}{\Omega_k^2 - \omega_k^2} \\
 &\quad \times \left[ \frac{(\omega_k + \Omega_k)(\Omega_k + \tilde{\omega}) e^{i \Omega_k t}}{4(\Omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_k^2} + \frac{(\omega_k - \Omega_k)(\Omega_k - \tilde{\omega}) e^{-i \Omega_k t}}{4(\Omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_k^2} \right] \\
 &= g \sqrt{\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}} \sqrt{g \Delta \omega} \int_{-\infty}^\infty d' \Omega \frac{\Omega(\Omega + \tilde{\omega}) e^{i \Omega t}}{(\Omega - \omega_k) [4(\Omega^2 - \omega_k^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2]} \\
 &\quad - 2 \frac{\sqrt{g \Delta \omega} \omega_k (\omega_k + \tilde{\omega}) (\tilde{\omega}^2 - \omega_k^2) e^{i \omega_k t}}{\sqrt{\tilde{\omega} \omega_k} [4(\omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2]}, \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

onde ao passar à segunda igualdade usamos a simetria par do integrando, fatoramos o termo  $(\omega_k + \Omega)$ , também usamos a Eq. (C.31) para eliminar a singularidade  $(\Omega_k^2 - \omega_k^2)^{-1}$  e finalmente fazemos  $\Omega_k = \omega_k$ . Já que estamos evitando os pólos em  $\pm \omega_k$  na integral dada pela Eq. (C.32), ao usarmos o teorema de Cauchy temos que multiplicar os resíduos destes pólos pelo fato  $i\pi$  em lugar de  $2i\pi$ . Então após o uso do teorema de Cauchy obtemos,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0k}(t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}} \frac{(\tilde{\omega} + \omega_k)(2\omega_k^2 - 2\tilde{\omega}^2 + i\pi g \omega_k)}{[4(\omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2]} \sqrt{g \Delta \omega} e^{i \omega_k t} + \sqrt{\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}} \frac{\sqrt{g \Delta \omega}}{4\tilde{\omega}} \\
 &\quad \times \left[ \frac{(4\tilde{\omega} + 4\tilde{\omega} + i\pi g)}{(4\tilde{\omega} - 4\omega_k + i\pi g)} e^{i\tilde{\omega} t} + \frac{(4\tilde{\omega} - 4\tilde{\omega} + i\pi g)}{(4\tilde{\omega} + 4\omega_k - i\pi g)} e^{-i\tilde{\omega} t} \right] e^{-\pi g t/4}. \tag{C.33}
 \end{aligned}$$

fazendo  $\mu = k$ ,  $\nu = 0$  na Eq. (C.21) obtemos a expressão para  $\beta_{k0}(t)$  a qual contem a mesma singularidade que no caso de  $\alpha_{0k}(t)$ . então, procedendo da mesma forma que no caso anterior obtemos

$$\begin{aligned}
 \beta_{k0}(t) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}} \frac{(\tilde{\omega} - \omega_k)(2\omega_k^2 - 2\tilde{\omega}^2 + i\pi g \omega_k)}{[4(\omega_k^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2]} \sqrt{g \Delta \omega} e^{i \omega_k t} + \sqrt{\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}} \frac{\sqrt{g \Delta \omega}}{4\tilde{\omega}} \\
 &\quad \times \left[ \frac{(4\tilde{\omega} - 4\tilde{\omega} - i\pi g)}{(4\tilde{\omega} - 4\omega_k + i\pi g)} e^{i\tilde{\omega} t} + \frac{(4\tilde{\omega} + 4\tilde{\omega} - i\pi g)}{(4\tilde{\omega} + 4\omega_k - i\pi g)} e^{-i\tilde{\omega} t} \right] e^{-\pi g t/4}. \tag{C.34}
 \end{aligned}$$



# Referências

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-holland Physics Publishing, Amsterdam, 1982).
- [2] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 681 (1977).
- [3] S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985).
- [4] C. Rebbi and G. Soliani, *Solitons and Particles* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984).
- [5] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D13**, 3398 (1976).
- [6] G. Flores-Hidalgo and N. F. Svaiter, "*Quantum Properties of Solitons in  $U(\phi) = \phi^2 \ln^2(\phi^2)$  and  $U(\phi) = \phi^2 \cos^2(\phi^2)$  Models*", hep-th/0111108.
- [7] G. Flores-Hidalgo and N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D66**, 025031 (2002).
- [8] N.H. Christ and T.D. Lee, *Phys. Rev.* **D12**, 1606 (1975).
- [9] J. Casahorran and S. Nam, *Int. J. Mod. Phys.* **A30**, 5467 (1991).
- [10] L. J. Boya and J. Casahorran, *Ann. Phys* **196**, 361 (1989).

- [11] R. L. Rodrigues, Mod. Phys. Lett **A10**, 1309 (1995);  
P. B. da Silva Filho, R. L. Rodrigues and A. N. Vaidya, J. Phys. **A32**, 2395 (1999).
- [12] N. Graham and R. L. Jaffe, Phys. Lett. **B435**, 145 (1998); hep-th/9805150.
- [13] G. Dunne, Phys. Lett. **B467**, 238 (1999); hep-th/9907208.
- [14] A. S. Goldhaber, A. Litvintsev, P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D64**, 045013 (2001); hep-th/0011258.
- [15] M. Bordag, A. S. Goldhaber and P. Van Nieuwenhuizen and D. Vassilevich, hep-th/0203066.
- [16] C. A. A. de Carvalho, Phys. Rev. **D60**, 065021 (2002).
- [17] A. Rebhan, P. van Nieuwenhuizen and R. Wimmer, hep-th/0203137.
- [18] A. Rebhan and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. **B508**, 449 (1997); hep-th/9707163.
- [19] G. Flores-Hidalgo, Phys. Lett. **B 542**, 282 (2002)  
G. Flores-Hidalgo, *Reply to "Comment on One loop renormalization of soliton quantum mass corrections in (1+1)-dimensional scalar field theory models"*; submetido no Phys. Lett. **B**, hep-th/0212073.
- [20] G. Flores-Hidalgo and Rudnei. O Ramos, *"Nonequilibrium Dynamics of Coupled Quantum Systems"*, submetido no Physica **A**, hep-th/0206022.
- [21] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl.Phys. **24** 449 (1976).

- [22] S. Coleman, Phys. Rev. **D15**, 2929 (1977); C. Callan and S. Coleman, Phys. Rev. **D16**, 1762 (1977).
- [23] Gabriel Flores, Rudnei O. Ramos and N. F. Svaiter Int. J. Mod. Phys. **A14**, 3715 (1999).
- [24] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 4114 (1974).
- [25] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 4130 (1974).
- [26] J.-L. Gervais, A. Jevicki and B. Sakita, Phys. Rev. **D12**, 1038 (1975).
- [27] J.-L. Gervais, A. Jevicki and B. Sakita, Phys. Rept. **23**, 281 (1976).
- [28] L. Jacobs, Phys. Rev. **D13**, 2278 (1976).
- [29] F. Cooper, A. Khare e U. Sukhatme, Phys. Rep. **251** 267 (1995).
- [30] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* ( Dover Publications, Inc. New York, 1964).
- [31] A. Khare and U. Sukhatme, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, L501, (1988).
- [32] M. A. Lohe, Phys.Rev.**D20**, 3120 (1979).
- [33] J. S. Langer, Ann. Phys. (N.Y) **41**, 108 (1967).
- [34] H. J. Muller-Kirsten, Z. Jian-Zu and D. H. Tchrakian, Int. J. Mod. Phys.**A5**, 1319 (1990).
- [35] B. Zwiebach, JHEP, 0009:028 (2000).

- [36] J. D. Brown, *Lower Dimensional Gravity* (World Scientific Publishing Co, Singapore, 1988).
- [37] J. A. Minahan and B. Zwiebach, JHEP, 0103:038, (2001).
- [38] J. A. Minahan and B. Zwiebach, JHEP, 0009:029 (2000).
- [39] G. Barton, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 479 (1985).
- [40] S. Coleman, V. Glaser and A. Martin, Commun. Math. Phys. **58**, 211 (1978).
- [41] K. Cahill, A. Comtet and R. Glauber, Phys. Lett. **B64**, 283 (1976).
- [42] C. Barnes and N. Turok, hep-th/9711071;  
T. Weidig, hep-th/9912005.
- [43] R. K. Kaul and R. Rajaraman, Pramana **24**, 837 (1985).
- [44] P. Di Vecchia and S. Ferrara, Nucl. Phys. **B130**, 93 (1977).  
J. Hruby, Nucl. Phys. **B131**, 275 (1977).
- [45] D. G. Barci, E. S. Fraga and R. O. Ramos, Phys. Rev. Lett. **85**, 479 (2000);  
D. G. Barci, E. S. Fraga and R. O. Ramos, Laser Phys. **12**, 43 (2002).
- [46] R. O. Ramos and F. A. R. Navarro, Phys. Rev. **D62**, 085016 (2000).
- [47] H.-T. Elze, Nucl. Phys. **B436**, 213 (1995).
- [48] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, D. S. Lee and A. Singh, Phys. Rev. **D51**,  
4419 (1995).
- [49] M. Gleiser and R. O. Ramos, Phys. Rev. **D50**, 2441 (1994).

- [50] A. Berera, M. Gleiser and R. O. Ramos, *Phys. Rev.* **D58**, 123508 (1998).
- [51] A. Berera and R. O. Ramos, *Phys. Rev.* **D63**, 103509 (2001).
- [52] L. Kofman, A. Linde and A. A. Starobinskii, *Phys. Rev.* **D56**, 3258 (1997)
- [53] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, *Phys. Rep.* **118**, 1 (1985);  
N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, *Phys. Rep.* **145**, 141 (1987).
- [54] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [55] G. Aarts, G. F. Bonini and C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B587**, 403 (2000).
- [56] J. Berges and J. Cox, *Phys. Lett.* **B517**, 369 (2001).
- [57] D. T. Son, *Phys. Rev.* **D54**, 3745 (1996).
- [58] P. F. Bedaque, *Phys. Lett.* **B344**, 23 (1995).
- [59] S. P. Kim and C. H. Lee, *Phys. Rev.* **D62**, 125020 (2000).
- [60] S. P. Kim, S. Sengupta and F. C. Khanna, *Phys. Rev.* **D64**, 105026 (2001).
- [61] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993).
- [62] I. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik, *Table of Integrals Series and Products* (Academic Press, Inc., New York, 1980).
- [63] O. Éboli, R. Jackiw and S.-Y. Pi, *Phys. Rev.* **D37**, 3557 (1988).
- [64] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Physica* **121A**, 587 (1983).

- [65] N. Andion, A. P. C. Malbouisson and A. Mattos Neto, *J. Phys.* **A34**, 3735 (2001).
- [66] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson and Y. W. Milla, *Phys. Rev.* **A65**, 063414 (2002).
- [67] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, *Phys. Rev.* **A66**, 042118 (2002).
- [68] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, "*Anharmonic oscillator radiation process in a large cavity*", submetido no *Phys. Lett. A*, physics/0211123.
- [69] G. Flores-Hidalgo and A. P. C. Malbouisson, "*The thermalization process from dressed coordinate point of view*", trabalho em andamento.
- [70] S. P. Kim and C. H. Lee, *Phys. Rev.* **D65**, 045013 (2002).
- [71] L. Landau et E. Lifchitz (*Mécanique Quantique*, Éditions MIR, Moscou, 1966).

# “Correlações Quânticas para a massa de Sólitons Bio-dimensionais e a abordagem da Louville-Von Neumann para o Processo de Termalização”

Gabriel Flores Hidalgo

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Nami Fux Svaiter – Presidente/CBPF

Rudnei de Oliveira Ramos – Coorientador/UERJ

Carlos Farina de Souza – UFRJ

Luiz Agostinho Ferreira – IFT/UNESP

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Nelson Pinto Neto – CBPF

Suplente: Sérgio José Barbosa Duarte - CBPF