

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Carlos Eduardo Campos Lima

**FLUXOS DE LEPTONS E AS
RAZÕES LEPTON-ANTILEPTON
AO NÍVEL DO MAR**

TESE DE DOUTORADO

Rio de Janeiro

Janeiro de 2003

Agradecimentos

Ao Professor Helio Manael Portella, pela orientação neste trabalho e pelos muitos anos de amizade.

Ao Professor Luiz Carlos Santos de Oliveira, pela inestimável ajuda prestada e por importantes sugestões.

À Professora Neusa Amata e a Terezinha, pelo incentivo que sempre me deram.

À Professora Regina Helena Cezar Maldonado, por me ter introduzida no estudo da Física de Altas Energias.

Ao Dr. Herman Julio Mosquera Cuesta, pelas valiosas discussões.

À Myriam, pela paciência que sempre teve comigo.

Aos meus pais e avós pelo carinho e educação que me deram.

E a todos os demais amigos, em especial a minha querida Cristine.

Resumo

As equações integro-diferenciais que descrevem a difusão dos hadrons na atmosfera terrestre são resolvidas analiticamente usando a Teoria dos Semi-Grupos. A solução obtida foi colocada em termos de uma expansional, usando-se então o método da decomposição desenvolvido por R.P. Feynman, para ordenar os operadores exponenciais não-comutativos que aparecem na solução. Este método permite obter soluções válidas para quaisquer formas de espectro primário, usados como condições de contorno ao problema, sendo, portanto, um método muito mais eficaz que os demais, que só utilizam formas de potência. Os fluxos de leptons (muons e neutrinos) gerados a partir desses chuviros hadrônicos são obtidos para ângulos zenitais variando de 0^0 a 87^0 e numa grande faixa de energia, de GeV a TeV. É feita, então, uma comparação com os fluxos zenitais de leptons ao nível do mar obtidos experimentalmente e também com outros calculados analiticamente. O acordo entre eles é excelente (cerca de 90%). As razões lepton-antilepton, para $\theta = 0^0$ e 87^0 , são obtidas e comparadas com dados experimentais e com cálculos feitos por P. Lipari. O acordo entre nossos cálculos e os dados é em média de aproximadamente 90% enquanto que com os de P. Lipari é em torno de 95%. Cálculos da distribuição zenital de $\frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ e dos fluxos de muons induzidos por neutrinos também são feitos, sugerindo que as oscilações de neutrinos são, até o presente momento, necessárias para explicar os dados obtidos na região de multi-GeV dos detectores.

Abstract

The hadron diffusion equations in the atmosphere are solved using an alternative analytical method based on ordered exponential operators, similar to those used by R.P. Feynman. With this method, these equations are solvable for any form of the primary spectrum, which is a good improvement compared with other methods. The lepton (muon and neutrino) fluxes generated by these hadronic showers are obtained for zenith angles covering 0° to 87° . A comparison of our calculations for the zenithal lepton fluxes at sea level with the experimental data and with other authors is made, revealing a good agreement between each other ($\approx 90\%$). A calculation of the lepton-antilepton ratios is made, showing again good agreement with the experimental data and results by other authors. An evaluation of $\frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$, as well as the upward going muon fluxes induced by neutrinos, observed by many underground neutrino detectors, is also made. It is shown that the inclusion of the neutrino oscillations in our calculations is needed to explain the various experimental data obtained in the multi-GeV region of the detectors.

Índice

1	Introdução	1
2	A Componente Hadrônica da Radiação Cósmica	10
2.1	Difusão dos Nucleons na Atmosfera	11
2.2	Difusão dos Mesons na Atmosfera	15
2.2.1	Difusão dos Pions na Atmosfera	16
2.2.2	Difusão dos Kaons na Atmosfera	24
3	A Componente Muônica	33
3.1	Difusão dos Muons na Atmosfera	35
3.2	Comparação com Dados Experimentais	38
4	Neutrinos Atmosféricos	68
4.1	Neutrinos Vindos dos Mesons	70
4.2	Neutrinos Vindos do Decaimento dos Muons	71
4.3	Oscilação de Neutrinos	71
4.4	Resultados Numéricos	77

5	Discussões e Conclusões	95
A	A Teoria de Semi-Grupos	105
A.1	Aplicação da teoria de Semi-Grupos na Resolução das Equações dos Nucleons na Atmosfera	106
A.2	O Operador Expansional	108
A.3	O Método da Ordenação dos Operadores Expansionais	110
A.4	O Operador Exponencial	113
A.5	Atmosfera Isotérmica Plana	115
B	Polarização dos Muons	117
C	Cinemática dos Decaimentos	121
C.1	Decaimento dos Mesons	121
C.2	Decaimento do Muon	123
D	Modelo para a Atmosfera Terrestre	125

Lista de Tabelas

3.1	Fatores Z para interações hadrônicas ($\gamma = 1,70$). As colunas representam as partículas incidentes e as linhas as originadas da colisão destas com os núcleos-alvo*	40
3.2	Fluxo diferencial de muons em ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{GeV}^{-1}$) ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	50
3.3	Razão μ^+/μ^- ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	63
4.1	Fluxo diferencial de neutrinos muônicos em ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{GeV}^{-1}$) ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	80
4.2	Fluxo diferencial de neutrinos eletrônicos em ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{GeV}^{-1}$) ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	81
4.3	Razão $R = \frac{\nu_\mu}{\bar{\nu}_\mu}$ ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	86
4.4	Razão $R = \frac{\nu_\mu}{\bar{\nu}_e}$ ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	87
4.5	Razão $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.	91

Lista de Figuras

2.1	Esquema representando a difusão de nucleons em um elemento infinitesimal da atmosfera.	11
2.2	Esquema representando a difusão de mesons em um elemento infinitesimal da atmosfera.	15
3.1	Principais processos de perda de energia dos muons na atmosfera terrestre. A linha pontilhada corresponde a cálculos feitos por J.L. Osborne, S.S. Said e A.W. Wolfendale [50]. As demais são cálculos realizados por K. Maeda [49].	42
3.2	Relação geométrica entre o ângulo zenital θ na profundidade t_0 e o ângulo zenital $\theta^*(t)$ na profundidade t . R_T é o raio da Terra e $h(t)$ é a altura da profundidade atmosférica t ao nível de detecção t_0	43
3.3	Fluxo vertical de muons ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos e os quadrados representam esse fluxo calculado nas referências [31] e [34], respectivamente.	52
3.4	Fluxo horizontal de muons ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos representam esse fluxo calculado na referência [31].	53

3.5	Fluxo vertical de muons ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos usando o espectro primário da referência [31] e a linha tracejada os mesmos cálculos, para o espectro primário usado na referência [37]. Os dados experimentais foram obtidos de S. Tsuji <i>et al.</i> [54] (círculos cheios), O.C. Allkofer <i>et al.</i> [55] (círculos vazios) e M. Aglieta <i>et al.</i> (LVD Collaboration) [56] (cruzes).	54
3.6	Idem da figura (3.5) para o fluxo horizontal de muons ao nível do mar. Os dados experimentais foram obtidos de S. Matsuno <i>et al.</i> (MUTRON) [57] (círculos).	55
3.7	Influência dos efeitos da ionização e do decaimento dos muons sobre o fluxo vertical de muons, ao nível do mar. A linha cheia representa esses fluxos, incluindo os efeitos acima mencionados e a linha tracejada, sem a inclusão dos mesmos. Os dados experimentais foram obtidos de S. Tsuji <i>et al.</i> [54] (círculos cheios), O.C. Allkofer <i>et al.</i> [55] (círculos vazios) e M. Aglieta <i>et al.</i> (LVD Collaboration) [56] (cruzes).	56
3.8	Idem da figura (3.7), para o fluxo horizontal de muons, ao nível do mar. Os dados experimentais foram obtidos de S. Matsuno <i>et al.</i> (MUTRON) [57] (círculos).	57
3.9	Razão, R , entre as probabilidades de sobrevivência dos muons, ao nível do mar, calculadas sem e com o efeito de curvatura da Terra. A linha cheia representa os cálculos para $\theta = 60^0$ e a linha tracejada para $\theta = 87^0$	58

3.10	Influência da curvatura da Terra sobre o fluxo diferencial de muons ao nível do mar, para o ângulo zenital $\theta = 60^\circ$. A linha cheia representa os cálculos considerando este efeito e a tracejada sem considerá-lo.	59
3.11	Idem da figura (3.10), para o fluxo horizontal de muons, ao nível do mar. . .	60
3.12	Razão, R , entre a probabilidade de sobrevivência dos muons ao nível do mar, calculada com o ajuste de K. Maeda [49], para atmosfera <i>U.S. standard</i> e a mesma probabilidade, calculada para uma atmosfera isotérmica). A linha cheia representa a razão para $\theta = 0^\circ$ e a linha tracejada para $\theta = 87^\circ$. . .	61
3.13	Comparação entre os fluxos verticais de muons ao nível do mar. A linha cheia representa estes fluxos considerando o ajuste de K. Maeda [49] e a linha tracejada representa os mesmos fluxos para uma atmosfera isotérmica.	62
3.14	Idem a figura (3.13), para o fluxo horizontal de muons ao nível do mar. . . .	63
3.15	Razão, $R = \mu^+/\mu^-$ ao nível do mar, para $\theta = 0^\circ$. A linha cheia representa a razão por nós calculada com o espectro primário da referência [31], a linha tracejada a mesma razão com o espectro primário usado na referência [37], a linha pontilhada representa a razão obtida por P. Lipari [31] e a linha ponto-tracejada representa os nossos cálculos com quebra do <i>Scaling</i> de Feynman. Os pontos experimentais são obtidos em: CAPRICE-94 [58] (círculos claros), CAPRICE-97 [59] (triângulos invertidos), MASS-89 [60] (estrelas), MARS [61] (círculos escuros), O.C. Alkofer <i>et al.</i> [62] (quadrados), J.M. Baxendale <i>et al.</i> [63] (triângulos) e G.K. Ashley II <i>et al.</i> [64] (losangos).	65

3.16	Razão, $R = \mu^+/\mu^-$ ao nível do mar, para $75^0 \leq \theta \leq 87^0$. A região compreendida entre as linhas cheias representa a razão por nós calculada com o espectro primário da referência [31] e a linha tracejada representa os nossos cálculos com quebra do <i>Scaling</i> de Feynman. Os dados experimentais são de MUTRON [57] (círculos escuros, para $86^0 \leq \theta \leq 89^0$), DEIS [65] (círculos claros, para $80^0 \leq \theta \leq 88^0$) e Kiel-DESY [66] (triângulos, para $\theta = 75^0$).	66
3.17	Razão entre as contribuições dos decaimentos do K^\pm e do π^\pm , para o fluxo vertical de muons ao nível do mar. Os círculos cheios representam a razão por nós calculada, os círculos vazios e os quadrados representam a mesma razão obtida por P. Lipari [31] e L.V. Volkova [35], respectivamente.	67
4.1	Razão, $R = \frac{(\mu/e)_{data}}{(\mu/e)_{MC}}$ para alguns Experimentos, onde μ e e significam eventos do tipo muônico e eletrônico, originados das interações $\nu_l(\bar{\nu}_l)N \longrightarrow l^\pm N'$, onde $l = \mu$ ou e . Adaptado da ref.[67].	72
4.2	Fluxo vertical de neutrinos muônicos ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos escuros, os triângulos escuros e os quadrados, referem-se aos calculados nas referências [31], [37] e [34], respectivamente.	83
4.3	Fluxo horizontal de neutrinos muônicos ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos escuros, os triângulos escuros e os quadrados, referem-se aos calculados nas referências [31], [37] e [35], respectivamente.	84

4.4	Idem da figura (4.2), para o fluxo vertical de neutrinos eletrônicos ao nível do mar.	85
4.5	Idem da figura (4.3), para o fluxo horizontal de neutrinos eletrônicos ao nível do mar.	86
4.6	Razão, $R = \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ para $\theta = 0^0$ e 87^0 . A linha cheia representa nossos cálculos e a linha tracejada os cálculos feitos por P. Lipari [31].	87
4.7	Idem da figura (4.6) para a razão, $R = \nu_e/\bar{\nu}_e$	88
4.8	Contribuição fracional dos pions (a), kaons (b) e muons (c) para o fluxo de neutrinos muônicos ao nível do mar.	89
4.9	Contribuição fracional dos muons (a), kaons neutros (b) e kaons carregados (c) para o fluxo de neutrinos eletrônicos ao nível do mar.	90
4.10	Razão, $R = \frac{(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{(\nu_e + \bar{\nu}_e)}$ ao nível do mar, em função da energia, para três diferentes valores de ângulos zenitais. A linha cheia representa esta razão considerando a polarização dos muons, a linha tracejada sem considerar a polarização dos muons e a linha pontilhada, considerando além da polarização dos muons, a oscilação dos neutrinos.	91

4.11	Distribuições zenitais da razão $R = \frac{(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{(\nu_e + \bar{\nu}_e)}$. A linha cheia representa a razão calculada considerando polarização dos muons, a linha tracejada representa a mesma razão sem considerar polarização dos muons. A linha pontilhada corresponde a razão calculada considerando polarização dos muons e oscilação de neutrinos. Na figura também são mostrados os dados para os eventos Multi-GeV de Kamiokande [37] e Super-Kamiokande [69], onde os triângulos representam a razão para os <i>upward going</i> neutrinos enquanto que os triângulos invertidos para os <i>downward going</i> neutrinos.	93
4.12	Comparação entre os fluxos de <i>upward going muons</i> medidos experimentalmente e os cálculos teóricos. A linha cheia representa os fluxos calculados sem oscilação de neutrinos e a linha tracejada considerando a oscilação. Os dados experimentais foram obtidos na referência [72].	94
B.1	Polarizações médias dos μ^\pm ao nível do mar, para $\theta = 0^0$ (linhas cheias) e $\theta = 60^0$ (linhas tracejadas), em função da energia.	119

Capítulo 1

Introdução

A Radiação Cósmica foi descoberta por volta de 1900, por C.T.R. Wilson [1], J. Elster e H. Geitel [2], como uma radiação extremamente penetrante, cuja origem foi localizada como sendo fora da superfície terrestre por Victor Hess [3], entre os anos 1912 e 1913. Esses resultados foram posteriormente confirmados por W. Kolhörster [4] e mais tarde por G. Pfozter [5]. Essa radiação, denominada de Radiação Cósmica, deu origem a um novo ramo da Física, que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Física das Partículas Elementares e da Física de Altas Energias.

Em 1933 [6], fotografias feitas com Câmaras de Wilson mostraram um grupo de partículas que pareciam penetrar simultaneamente na câmara, originadas de um ponto comum fora delas. Esse fenômeno ficou conhecido como “Chuveiros de Raios Cósmicos”. O estudo desses chuveiros de partículas tem sido feito desde aquela época. Hoje em dia se sabe que esses fenômenos multiplicativos surgem da interação entre núcleos (ou nucleons) dos Raios Cósmicos Primários com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera terrestre.

É possível obter o número médio de partículas secundárias que surge em uma cascata

em diferentes profundidades atmosféricas, dentro de uma faixa de energia e com diferentes ângulos zenitais como solução de uma equação aproximada de difusão. Ela é obtida com o seguinte raciocínio:

- Suponhamos que se conheça, na profundidade t , o número de partículas e suas distribuições de energia e de ângulo zenital. Consideremos um elemento infinitesimal dt , suficientemente pequeno de modo que a partícula ao atravessá-lo não sofra interação ou que colida uma única vez.

- Com isso, podemos obter o número médio de partículas e as distribuições de energia e de ângulo zenital, na profundidade $(t + dt)$. A relação entre o número de partículas em t e $t + dt$ é expressa matematicamente por uma equação de difusão.

O objetivo deste trabalho é resolver analiticamente as equações de difusão dos hadrons, e a partir delas derivar o fluxo de leptons em diferentes profundidades atmosféricas.

Um núcleo da Radiação Cósmica Primária (RCP) interage com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera terrestre produzindo um número muito grande de partículas secundárias (Produção Múltipla de Partículas). Na região de energia de 100 GeV a 150 TeV, no sistema de laboratório, os pions são a maioria [7]. À medida que a energia aumenta, kaons, lambdas, hyperons, partículas charmosas, etc., também vão contribuindo para o fluxo de hadrons e de leptons na atmosfera.

As partículas neutras, em sua maioria, desintegram-se em fótons, que vão produzir a cascata eletromagnética (Componente Mole da Radiação Cósmica), enquanto que, as partículas carregadas interagem sucessivamente, perdendo energia que é usada na produção de novos hadrons. Quando estes ficam com energia da ordem de sua constante de decaimento no ar, eles decaem em leptons, e por interagirem fracamente com a matéria, vão constituir a grande

maioria das partículas ao nível do mar (Componente Dura da Radiação Cósmica).

A cascata eletromagnética foi muito bem estudada, desde a década de 30, devido principalmente ao desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica. Em 1937, J.F. Carlson e J.R. Oppenheimer [8] e H.J. Babha e W. Heitler [9], obtiveram soluções aproximadas das equações integro-diferenciais que descrevem a difusão dos elétrons e fótons no ar, enquanto que, em 1938, L. Landau e G. Rumer [10], usando pela primeira vez a Transformada de Mellin, obtiveram soluções exatas para essas equações, desprezando os termos que envolviam as perdas de energia dos elétrons por ionização (Aproximação A).

A partir desse trabalho, a Transformada de Mellin tornou-se a ferramenta matemática usual na obtenção dos fluxos das diferentes componentes da radiação cósmica secundária.

O método da Transformada de Mellin, entretanto, fornece soluções reais representadas por uma integral de contorno no plano complexo e que só pode ser avaliada exatamente em alguns casos particulares. Em casos mais gerais deve-se usar alguns métodos de aproximação para estimar tal integral, como por exemplo, o Método do Ponto de Sela.

Os primeiros trabalhos teóricos sobre a componente hadrônica da Radiação Cósmica, surgiram em finais da década de 40, após a descoberta dos pions e kaons [11]. Esses trabalhos resolveram as equações de difusão dos hadrons no ar usando a Transformada de Mellin. Eles conseguiram obter soluções exatas para o problema considerando as seguintes aproximações:

- Espectro da RCP na forma de potência;
- Livre percursos médios dos hadrons no ar constantes;
- Distribuições de energia das partículas secundárias como funções homogêneas das energias das partículas incidentes e secundária da interação.

Na década de 70, F.M.O. Castro [12] resolveu as equações da difusão dos hadrons na

atmosfera usando o método das aproximações sucessivas e obtendo as mesmas soluções encontradas pelos autores citados anteriormente. A vantagem do método matemático por ele empregado é que as soluções são colocadas na forma de uma série podendo-se verificar facilmente, na maioria dos casos, a convergência e unicidade das soluções. Ele ainda conseguiu generalizar os resultados anteriores, considerando um espectro primário na forma de uma função contínua, positiva e limitada, $G(E)$.

H.M. Portella *et al.* [13], posteriormente, obtiveram soluções exatas para o fluxo de hadrons levando-se em conta a variação da seção de choque hadron-núcleo com a energia, mostrando ainda que a lei que governa a interação dos nucleons na atmosfera é binomial, e não Poissônica, como era considerada até então.

J. Bellandi Filho *et al.* [14], também conseguiram obter soluções alternativas usando o Método das Expansionais de Feynman [15].

O objetivo de nosso trabalho é mostrar que a Teoria dos Semi-Grupos [16] (ver Apêndice A) pode, também, ser usada para resolver as equações integrais que descrevem a difusão dos hadrons no ar, obtendo-se soluções formais que em alguns casos particulares fornecem as soluções encontradas por outros autores. Este método também permite obter soluções compactas para qualquer tipo de espectro primário, em um amplo intervalo de energia e de ângulos zenitais. Além disso, ele possibilita obter fluxos de hadrons para os casos em que as seções de choque (hadron-núcleo) e as distribuições de energia dos mesons secundários variam com a energia. O processo de decomposição das expansionais desenvolvido por R.P. Feynman [15] foi também empregado em nossos cálculos, com o objetivo de encontrar soluções particulares do problema.

Atualmente, a maioria dos resultados teóricos obtidos na solução de problemas envol-

vendo a difusão dos Raios C3smicos na atmosfera terrestre s3o baseados em M3todos de Monte Carlo (MC). Esse m3todo pode ser usado para descrever uma grande variedade de fen3menos f3sicos envolvendo o desenvolvimento dos chuveiros no ar para quaisquer n3o uniformidades no meio. Os m3todos anal3ticos, entretanto, s3o ainda muito usados, pois, permitem obter rela33es entre as diferentes componentes da Radia33o C3smica e tamb3m um estudo sistem3tico da influ3ncia dos diferentes par3metros e distribu33es sobre esses fluxos. Essas quest3es s3o de grande utilidade atualmente, devido principalmente ao interesse nos fluxos dos neutrinos atmosf3ricos estimulados pela observa33o de uma discrep3ncia na raz3o $R = \left(\frac{\nu_e + \bar{\nu}_e}{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu} \right)$ verificada nos detectores Cerenkov de grande volume de 3gua.

Assim sendo, um c3lculo anal3tico rigoroso 3 de grande utilidade na obten33o do fluxo dos leptons (muons e neutrinos) ao n3vel do mar. Este c3lculo permitir3 o estudo detalhado das rela33es entre os fluxos de muons e neutrinos e a conseq3ente an3lise dos dados experimentais dispon3veis sobre os neutrinos.

Os neutrinos atmosf3ricos, oriundos do decaimento das part3culas secund3rias produzidas pelas intera33es dos raios c3smicos prim3rios na atmosfera, s3o as part3culas mais abundantes ao n3vel do mar. Por n3o possuirem carga el3trica e apresentarem uma se33o de choque muito pequena, eles s3o extremamente dif3ceis de serem detectados. Um c3lculo aproximado [17] estima em cerca de 100 intera33es dos neutrinos /kT/ano para energia entre 200 MeV e 3 GeV. Assim sendo, detectores com v3rias toneladas de l3quido sens3vel (3gua, 3gua pesada, etc.) s3o necess3rios para se estudar as intera33es dos neutrinos. Nessa faixa de energia as principais fontes de neutrinos s3o: π^\pm , K^\pm , K_L^0 e μ^\pm .

Os experimentos que tinham por objetivo detectar neutrinos atmosf3ricos come3aram a ser planejados em finais dos anos 60. Um deles, come3ou a operar em Kolar Gold Fields [18],

no sul da Índia, e um outro na *East Rand Proprietary Mine* [19], na África do Sul. Nesses experimentos os eventos ocorriam nas rochas que circundavam os detectores e atravessavam-no quase horizontalmente, com energia limiar de aproximadamente 60 GeV. Eles foram instalados em grandes profundidades (aproximadamente 8000m de equivalente em água (mwe)). Por essa época surgiu também um detector no estado americano de Utah [20]. Os eventos dos três experimentos eram registrados usando técnicas de tempo de voo das partículas secundárias e contadores direcionais de Cerenkov. A estatística de todos esses experimentos era de algumas dezenas de eventos.

Em 1978, começou a funcionar o detector de Baksan [21]. Para diferenciar partículas vindas de cima (*downward*) daquelas que chegavam por baixo do detector (*upward*), usava-se a técnica do tempo de voo. O ângulo zenital no qual o detector trabalha, está no intervalo de 90^0 a 180^0 , e a energia limiar de detecção é de 1 GeV.

O período “moderno” da Física dos Neutrinos Atmosféricos começou em finais dos anos 80. Nessa época, as Teorias da Grande Unificação (GUT) apareceram no rastro do sucesso da Teoria de Weinberg-Salam-Glashow das Interações Eletro-Fracas. As GUT’s prevêem a não conservação do número bariônico, que permite o decaimento do próton. Assim várias instalações foram montadas com a finalidade de se estudar o decaimento do próton. Os neutrinos atmosféricos passaram novamente a ter uma atenção especial dos físicos, pois eles eram os principais sub-produtos do decaimento do próton. O limiar de energia dos neutrinos para esses experimentos, baixou de alguns GeV’s nos antigos detectores para 100 MeV. Esses Experimentos observaram um número muito grande de neutrinos atmosféricos e foram os primeiros que detectaram os chamados “Eventos Contidos” (os neutrinos interagiu no interior do detector e as partículas secundárias das interações permaneciam no mesmo). Assim

os neutrinos atmosféricos podem ser observados diretamente nos detectores subterrâneos de duas maneiras diferentes; através dos eventos contidos ou, com energias maiores, através da detecção indireta dos muons produzidos pelos neutrinos fora do detector. Somente muons originados da parte de baixo do detector (*upward going muons*) podem ser usados para essas medidas, pois os fluxos de muons induzidos por neutrinos que chegam na parte de cima do detector (*downward going muons*) são muitas ordens de grandeza menores que os fluxos dos muons atmosféricos. Muitos grupos experimentais tem apresentado dados sobre fluxos de neutrinos, tanto para Eventos Contidos, como para *upward going muons*. Um resultado importante sobre os Eventos Contidos é que $R = \frac{(\nu_\mu/\nu_e)_{\text{dados}}}{(\nu_\mu/\nu_e)_{MC}}$ é de aproximadamente 0,6 para detectores como IMB [22] e Kamiokande [23, 24]. Uma amostra menor de eventos foi coletada também por experimentos que são constituídos por calorímetros de ferro (Frejus [25], Nusex [26]) e em ambos a razão estimada foi, respectivamente, 0,87 e 0,99. Atualmente um outro calorímetro de ferro (Soudan)[27] está coletando dados e a razão obtida é de 0,69.

Essa anomalia (ν_μ/ν_e) que aparece nos Eventos Contidos é objeto de estudos sistemáticos e até o presente momento a única explicação plausível para a mesma é a possibilidade dos neutrinos de diferentes sabores poderem oscilar entre si com valores típicos para os parâmetros de oscilação [28].

Esses parâmetros de oscilação usados em algumas simulações de Monte Carlo explicam os dados de alguns Experimentos sobre *upward going muons* (Kolar Gold Fields, Baksan, IMB e Kamiokande) [18, 21, 22, 23, 24].

Dessa maneira um cálculo analítico rigoroso da difusão dos neutrinos na atmosfera e no interior da Terra é de suma importância para se estudar com detalhes a influência dos vários parâmetros e distribuições sobre os fluxos leptônicos ao nível do mar.

Um cálculo dos fluxos dos neutrinos atmosféricos requer um conhecimento preciso de alguns fatores, tais como:

- a) Espectro de energia e composição química da RCP: Considerando $E_\nu < 1$ GeV esses raios cósmicos primários são fortemente diminuídos pelo efeito dos campos geomagnéticos e pela modulação solar.
- b) Propriedades da produção múltipla de partículas oriundas das interações (p-ar) e (núcleo-ar) incluindo os valores das seções de choque inelásticas dos hadrons no ar.
- c) Propriedades dos decaimentos dos mesons em leptons e um modelo para atmosfera terrestre. Este item tem um controle melhor dos parâmetros envolvidos.

Os fluxos de neutrinos atmosféricos tem sido calculados através de métodos analíticos ou de simulação, por vários autores [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

Os resultados diferem entre si em aproximadamente 30%, entretanto, nos cálculos da $R = (\nu_\mu/\nu_e)$ a diferença cai para 5 a 6%. As grandes diferenças entre os vários fluxos de neutrinos atmosféricos calculados estão na escolha da forma exata do espectro primário, nas razões π^+/π^- , nas interações próton-ar, neutron-ar (que afeta fortemente as razões $\nu_e/\bar{\nu}_e$), na composição química dos raios cósmicos primários (que também afeta $\nu_e/\bar{\nu}_e$, pois prótons produzem mais π^+ que π^- em oposição aos neutrons que produzem mais π^- que π^+). Para uma revisão e comparação entre os diferentes cálculos sobre os neutrinos atmosféricos, ver por exemplo M. Honda *et al.* [36].

O presente trabalho é dividido em três partes principais: o Capítulo 2 é totalmente dedicado à obtenção do fluxo de hadrons no ar, principalmente dos neutrons e prótons e dos diferentes mesons que entram no cálculo dos leptons ao nível do mar. No cálculo dos fluxos mesônicos foram incluídos as regenerações de kaons, inclusive com a produção de kaons via

interação $(\pi\text{-ar}) \rightarrow K$.

No Capítulo 3 foi feita uma análise sistemática sobre o fluxo de muons, onde nossos cálculos são comparados aos cálculos analíticos de outros autores. Uma comparação com resultados experimentais também foi realizada. Estimou-se a razão entre μ^+ e μ^- para varios ângulos zenitais e foi feita uma comparação com resultados experimentais obtidos ao nível do mar.

Estimou-se ainda as influências da perda de energia dos muons ao atravessar a atmosfera terrestre, do modelo de atmosfera, e também, de dois diferentes tipos de primários sobre o fluxo diferencial de muons.

No capítulo 4 foi calculado analiticamente o fluxo de neutrinos eletrônicos e muônicos em diferentes profundidades atmosféricas, formando um ângulo θ com a vertical, para diferentes intervalos de energia.

As fontes desses neutrinos, usadas neste capítulo, foram os π^\pm , K^\pm , K_L^0 e μ^\pm .

Os fluxos e as razões $\frac{\nu_\mu}{\bar{\nu}_\mu}$, $\frac{\nu_e}{\bar{\nu}_e}$ e $\frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ também foram calculadas e comparadas com as obtidas por outros autores [31, 34, 35] e com resultados na região de multi-GeV de Kamiokande [24].

Fez-se uma estimativa da razão entre $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)$ e $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ usando três diferentes cálculos.

- a) Considerando a polarização dos muons;
- b) Sem a polarização dos muons;
- c) Considerando a polarização dos muons e formas aproximadas para a oscilação entre ν_μ e ν_e .

Capítulo 2

A Componente Hadrônica da Radiação Cósmica

Com a finalidade de obter os fluxos de leptons em diferentes profundidades atmosféricas é necessário estudar a evolução da cascata hadrônica na atmosfera. Esse chuva de hadrons é formado pela interação dos nucleons (ou núcleos) da RCP com núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera terrestre (N , O , etc.). Dessa interação é produzida uma quantidade muito grande de hadrons (nucleons, antinucleons, pions, kaons, partículas charmosas, etc.), das quais os pions e kaons constituem a maior parte [7]. Os mesons formados nessa produção múltipla de partículas, antes de decaírem em muons e neutrinos, interagem novamente, produzindo novos hadrons, constituindo a cascata hadrônica, enquanto, os pions neutros e kaons neutros (em maior percentagem) decaem instantaneamente em fótons formando a cascata eletromagnética.

As equações integro-diferenciais que descrevem a difusão dos hadrons na atmosfera serão integradas usando a Teoria dos Semigrupos, já utilizada anteriormente por F.M.O. Castro

[12] e H.M. Portella *et al.* [16].

Neste capítulo serão estudados com detalhes a evolução dos prótons, dos neutrons, dos pions (π^\pm) e dos kaons (K^\pm, K_L^0) na atmosfera.

2.1 Difusão dos Nucleons na Atmosfera

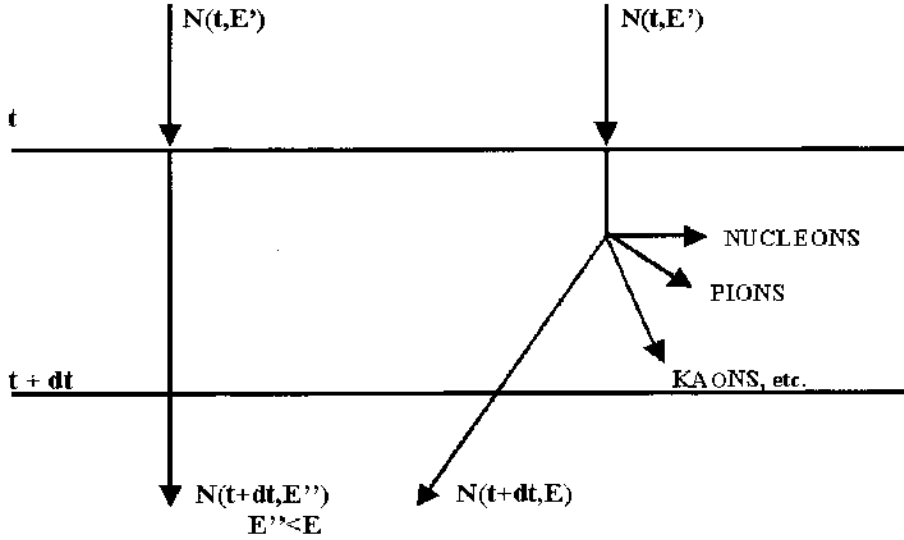


Figura 2.1: Esquema representando a difusão de nucleons em um elemento infinitesimal da atmosfera.

As equações integro-diferenciais que descrevem a difusão dos prótons e neutrons na atmosfera são:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, E) = -\frac{p(t, E)}{\lambda_p(E)} + \int_E^\infty \frac{p(t, E')}{\lambda_p(E')} f_{pp}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \int_E^\infty \frac{n(t, E')}{\lambda_n(E')} f_{np}(E, E') \frac{dE'}{E'} \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t, E) = -\frac{n(t, E)}{\lambda_n(E)} + \int_E^\infty \frac{n(t, E')}{\lambda_n(E')} f_{nn}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \int_E^\infty \frac{p(t, E')}{\lambda_p(E')} f_{pn}(E, E') \frac{dE'}{E'} \quad (2.2)$$

Nas equações (2.1) e (2.2), $p(t, E)dE$ e $n(t, E)dE$ representam os fluxos diferenciais de prótons e neutrons na profundidade atmosférica $t(g/cm^2)$, com energia entre E e $E + dE$, respectivamente. λ_p e λ_n são os livres percursos médios de interação dos prótons e neutrons na atmosfera e $f_{ij}(E, E')$ são os espectros de energia das j -partículas, originadas da interação do i -nucleon com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera e $j = p$ ou n . O termo negativo nas equações representa o nucleon que após interagir, em um elemento infinitesimal dt da atmosfera, com um núcleo do ar, sai com energia menor que a energia final E , não sendo então contado (termo de sumidouro) e os termos nas integrais representam as fontes de nucleon vindas da interação nucleon-núcleo do ar.

Em um trabalho anterior, Portella *et al.* [38] demonstraram que o fluxo de leptons ao nível do mar é pouco influenciado (cerca de 5%) pelas variações com a energia dos livre percursos médios dos hadrons na atmosfera. Assim sendo, as equações acima são simplificadas considerando λ_n e λ_p constantes, $\lambda_n = \lambda_p = \lambda_N$ e também a validade da simetria de isospin que acarreta em $f_{pp}(E, E')dE' = f_{nn}(E, E')dE'$ e $f_{np}(E, E')dE' = f_{pn}(E, E')dE'$ [31]. Usando o conceito de elasticidade média dos nucleons no ar, $\eta = E/E'$, as equações (2.1) e (2.2), podem ser somadas e subtraídas tomando as formas [38]:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t, E) = -\frac{N(t, E)}{\lambda_N} + \int_0^1 \frac{N(t, E/\eta)}{\lambda_N} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (2.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(t, E) = -\frac{\Delta(t, E)}{\lambda_N} + \int_0^1 \frac{\Delta(t, E/\eta)}{\lambda_N} f_{N\Delta}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (2.4)$$

As soluções de (2.3) e (2.4) estão sujeitas às condições de contorno:

$$N(0, E) = p(0, E) + n(0, E) \quad (2.5)$$

e

$$\Delta(0, E) = p(0, E) - n(0, E) \quad (2.6)$$

que representam os fluxos diferenciais de nucleons e da diferença entre prótons e neutrons no topo da atmosfera.

As funções $f_{NN}(\eta)$ e $f_{N\Delta}(\eta)$ que aparecem nas equações (2.3) e (2.4) são definidas como:

$$f_{NN}(\eta)d\eta = (f_{pp}(\eta) + f_{pn}(\eta))d\eta \quad (2.7)$$

e

$$f_{N\Delta}(\eta)d\eta = (f_{pp}(\eta) - f_{pn}(\eta))d\eta \quad (2.8)$$

Introduzindo os operadores

$$\hat{A}_N N(t, E) = \left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta)d\eta\hat{\sigma}\right) \frac{N(t, E)}{\lambda_N} \quad (2.9)$$

e

$$\hat{A}_\Delta \Delta(t, E) = \left(1 - \int_0^1 f_{N\Delta}(\eta)d\eta\hat{\sigma}\right) \frac{\Delta(t, E)}{\lambda_N} \quad (2.10)$$

onde $\hat{\sigma}$ é o operador que atua na energia, e que foi introduzido por F.M.O. Castro [12] na resolução das equações de difusão dos nucleons na atmosfera e definido como:

$$\hat{\sigma}F(t, E) = \frac{F(t, E/\eta)}{\eta} \quad (2.11)$$

com $\eta \geq \eta_{min} > 0$, e dessa forma as equações (2.3) e (2.4) se transformam nas equações de operadores,

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t, E) = -\hat{A}_N N(t, E) \quad (2.12)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(t, E) = -\hat{A}_\Delta \Delta(t, E) \quad , \quad (2.13)$$

cujas soluções são:

$$N(t, E) = e^{-t\hat{A}_N} N(0, E) \quad (2.14)$$

e

$$\Delta(t, E) = e^{-t\hat{A}_\Delta} \Delta(0, E) \quad . \quad (2.15)$$

Admitindo para $N(0, E)$ e $\Delta(0, E)$ as formas

$$N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.16)$$

$$\Delta(0, E) = \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.17)$$

com $N_0 = p_0 + n_0$ e $\Delta_0 = p_0 - n_0$, definidos nas equações (2.5) e (2.6), e usando os procedimentos da ref.[16], as soluções (2.14) e (2.15) tomam as formas simplificadas,

$$N(t, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-t/L_N} \quad (2.18)$$

e

$$\Delta(t, E) = \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-t/L_\Delta} \quad , \quad (2.19)$$

onde os livres percursos médios de absorção L_N e L_Δ são dados por:

$$L_{N,\Delta} = \frac{\lambda_N}{1 - Z_{pp} \mp Z_{pn}} \quad , \quad (2.20)$$

com

$$Z_{ij} = \int_0^1 f_{ij}(\eta) \eta^\gamma d\eta \quad . \quad (2.21)$$

2.2 Difusão dos Mesons na Atmosfera

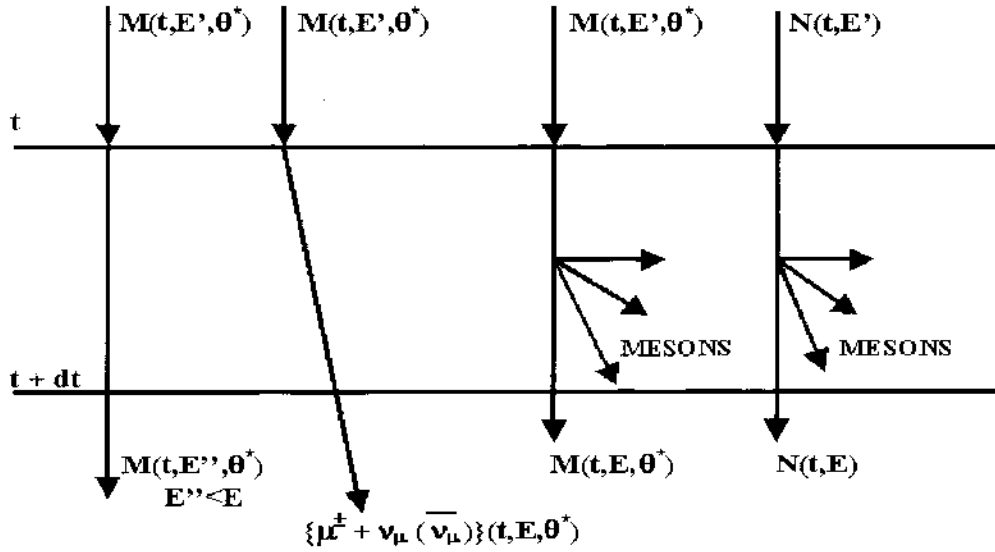


Figura 2.2: Esquema representando a difusão de mesons em um elemento infinitesimal da atmosfera.

A equação integro-diferencial que descreve a difusão dos mesons na atmosfera é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M(t, E, \theta^*) = & -\frac{M(t, E, \theta^*)}{\lambda_M(E)} - \frac{M(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^M(E)} + \int_E^\infty \frac{M(t, E', \theta^*)}{\lambda_M(E')} f_{MM}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \\ & + \int_E^\infty \frac{N(t, E')}{\lambda_N(E')} f_{NM}(E, E') \frac{dE'}{E'} \end{aligned} \quad (2.22)$$

com a condição de contorno

$$M(0, E, \theta^*) = 0 \quad . \quad (2.23)$$

O primeiro termo do segundo membro representa a atenuação dos mesons no ar, o segundo, o decaimento dos mesons em leptons e os demais termos são as fontes de mesons vindos das interações entre mesons e nucleons com núcleos de ar, respectivamente.

Na equação (2.22), $M(t, E, \theta^*)dE$ representa o fluxo diferencial de mesons na profundidade atmosférica t , inclinada ao longo da direção do meson, formando um ângulo θ^* com

a vertical e com energias entre E e $E + dE$. As funções $f_{ij}(E, E')$ ($i = N$ ou M e $j = M$) são as distribuições de energia dos mesons originados das interações nucleon-núcleo e meson-núcleo e $\lambda_{decay}^M(E)$ é o comprimento de decaimento dos mesons na atmosfera em unidades de (g/cm^2) e é dado por:

$$\lambda_{decay}^M = c\beta\tau_M \frac{E}{m_M} \rho(t, \theta^*) \quad , \quad (2.24)$$

onde τ_M e m_M são a vida média e a massa do meson M , e $\rho(t, \theta^*)$ é a densidade do ar no ponto considerado.

2.2.1 Difusão dos Pions na Atmosfera

As equações que descrevem a evolução dos pions carregados na atmosfera são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \pi^\pm(t, E, \theta^*) = & -\frac{\pi^\pm(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi(E)} - \frac{\pi^\pm(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^\pi(E)} + \int_E^\infty \frac{\pi^\pm(t, E', \theta^*)}{\lambda_\pi(E')} f_{\pi^\pm \pi^\pm}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \\ & + \int_E^\infty \frac{\pi^\mp(t, E', \theta^*)}{\lambda_\pi(E')} f_{\pi^\mp \pi^\pm}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \int_E^\infty \frac{p(t, E')}{\lambda_N(E')} f_{p\pi^\pm}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \\ & + \int_E^\infty \frac{n(t, E')}{\lambda_N(E')} f_{n\pi^\pm}(E, E') \frac{dE'}{E'} \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Considerando válida a Lei do *Scaling* de Feynman [39] ($f_{ij}(E, E') = f_{ij}(x_f)$, onde x_f é a variável de Feynman que para altas energias pode ser colocada na forma $x_f \approx E/E'$, sendo E e E' as energias das partículas secundárias e incidentes na colisão) e usando as relações de simetria de isospin [31] $f_{p\pi^+} = f_{n\pi^-}$, $f_{p\pi^-} = f_{n\pi^+}$, $f_{\pi^+\pi^+} = f_{\pi^-\pi^-}$ e $f_{\pi^+\pi^-} = f_{\pi^-\pi^+}$, e supondo que $\lambda_{\pi^+} = \lambda_{\pi^-} = \lambda_\pi$, podemos somar e subtrair os termos da equação (2.25), obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, E, \theta^*) = & -\frac{\Pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} - \frac{\Pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^\pi} + \int_0^1 \frac{\Pi(t, E/x_f, \theta^*)}{\lambda_\pi} f_{\pi 1}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} + \\ & + \int_0^1 \frac{N(t, E/x_f)}{\lambda_N} f_{N\pi}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} \end{aligned} \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) &= -\frac{\Delta_\pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} - \frac{\Delta_\pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^\pi} + \int_0^1 \frac{\Delta_\pi(t, E/x_f, \theta^*)}{\lambda_\pi} f_{\pi 2}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} + \\ &+ \int_0^1 \frac{\Delta(t, E/x_f)}{\lambda_N} f_{N\Delta\pi}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $f_{\pi 1}(x_f) = f_{\pi^+\pi^+} + f_{\pi^+\pi^-}$, $f_{\pi 2}(x_f) = f_{\pi^+\pi^+} - f_{\pi^+\pi^-}$, $f_{N\pi}(x_f) = f_{p\pi^+} + f_{p\pi^-}$ e $f_{N\Delta\pi}(x_f) = f_{p\pi^+} - f_{p\pi^-}$.

Introduzindo de maneira análoga ao caso dos nucleons, os operadores

$$\hat{B}_{N_1} N(t, E) = \left(\int_0^1 f_{N\pi}(x_f) dx_f \hat{\sigma}_{N_1} \right) \frac{N(t, E)}{\lambda_N} , \quad (2.28)$$

$$\hat{B}_{\pi_1} \Pi(t, E, \theta^*) = - \left(1 - \int_0^1 f_{\pi 1}(x_f) dx_f \hat{\sigma}_{\pi_1} \right) \frac{\Pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} , \quad (2.29)$$

$$\hat{B}_{N_2} \Delta(t, E) = \left(\int_0^1 f_{N\Delta\pi}(x_f) dx_f \hat{\sigma}_{N_2} \right) \frac{\Delta(t, E)}{\lambda_N} , \quad (2.30)$$

$$\hat{B}_{\pi_2} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) = - \left(1 - \int_0^1 f_{\pi 2}(x_f) dx_f \hat{\sigma}_{\pi_2} \right) \frac{\Delta_\pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} , \quad (2.31)$$

$$\hat{G}_\pi \Pi(t, E, \theta^*) = -\frac{1}{\lambda_{decay}^\pi} \Pi(t, E, \theta^*) . \quad (2.32)$$

As equações (2.26) e (2.27) se transformam em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(t, E, \theta^*) = \hat{G}_\pi \Pi(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{\pi_1} \Pi(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{N_1} N(t, E) \quad (2.33)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \hat{G}_\pi \Delta_\pi(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{\pi_2} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{N_2} \Delta(t, E) . \quad (2.34)$$

As soluções destas equações estão sujeitas às condições de contorno

$$N(0, E) = N(E) , \quad (2.35)$$

$$\Delta(0, E) = \Delta(E) . \quad (2.36)$$

$$\Pi(0, E, \theta^*) = 0 \quad \text{c} \quad (2.37)$$

$$\Delta_\pi(0, E, \theta^*) = 0 \quad , \quad (2.38)$$

onde $N(E)dE$ é o espectro diferencial de energia dos nucleons no topo da atmosfera e $\Delta(E)$ representa a diferença entre os fluxos de prótons e neutrons no topo da atmosfera. Consideram-se estas funções contínuas, positivas e limitadas no intervalo $0 < E_{min} \leq E < \infty$.

As soluções das equações inhomogêneas de operadores acima, sujeitas as condições de contorno (2.35) a (2.38) são:

$$\Pi(t, E, \theta^*) = \Pi_{(hom)}(t, E, \theta^*) + \Pi_{(part)}(t, E, \theta^*) \quad (2.39)$$

e

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \Delta_{\pi(hom)}(t, E, \theta^*) + \Delta_{\pi(part)}(t, E, \theta^*) \quad , \quad (2.40)$$

onde a parte homogênea das equações acima se anula, devido às condições de contorno (2.35) a (2.38), e a solução geral é dada pela própria solução particular

$$\Pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left[\int_z^t (\hat{G}_\pi(z') + \hat{B}_{\pi_1}) dz' \right] \hat{B}_{N_1} N(z, E) dz \quad (2.41)$$

e

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left[\int_z^t (\hat{G}_\pi(z') + \hat{B}_{\pi_2}) dz' \right] \hat{B}_{N_2} \Delta(z, E) dz \quad . \quad (2.42)$$

Considerando os espectros primários nas formas de potências:

$$N(E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.43)$$

e

$$\Delta(E) = \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \quad , \quad (2.44)$$

então a atuação dos operadores \hat{B}_{N_1} e \hat{B}_{N_2} sobre $N(z, E)$ e $\Delta(z, E)$, respectivamente, produzem:

$$\hat{B}_{N_1} N(z, E) = \frac{(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} N(z, E) \quad (2.45)$$

e

$$\hat{B}_{N_2} \Delta(z, E) = \frac{(Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} \Delta(z, E) \quad (2.46)$$

Usando a propriedade de decomposição das expansionais, derivada por Feynman,

$$\begin{aligned} \text{Exp} \left[\int_z^t (\hat{G}_\pi(z') + \hat{B}_{\pi_j}) dz' \right] &= \text{Exp} \left[\int_z^t dz' \text{Exp} \left(\int_{z'}^t dz'' \hat{B}_{\pi_j} \right) \cdot \hat{G}_\pi(z') \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \text{Exp} \left(\int_t^{z'} dz'' \hat{B}_{\pi_j} \right) \right] \cdot \text{Exp} \left[\int_z^t dz' \hat{B}_{\pi_j} \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

e como os \hat{B}_{π_j} ($j = 1$ ou 2) são operadores que atuam somente na energia, independentemente da profundidade atmosférica, então, sua expansional se torna uma exponencial,

$$\text{Exp} \left[\int_{z'}^t dz'' \hat{B}_{\pi_j} \right] = e^{(t-z') \hat{B}_{\pi_j}} \quad (2.48)$$

Assim as expressões (2.41) e (2.42) ficam:

$$\begin{aligned} \Pi(t, E, \theta^*) &= \int_0^t \text{Exp} \left[\int_z^t \left(e^{(t-z') \hat{B}_{\pi_1}} \hat{G}_\pi(z') e^{-(t-z') \hat{B}_{\pi_1}} \right) dz' \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}}{\lambda_N} \right) e^{-(t-z)/L_{\pi_1}(\gamma)} e^{-z/L_N(\gamma)} N_0 E^{-(\gamma+1)} dz \end{aligned} \quad (2.49)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) &= \int_0^t \text{Exp} \left[\int_z^t \left(e^{(t-z') \hat{B}_{\pi_2}} \hat{G}_\pi(z') e^{-(t-z') \hat{B}_{\pi_2}} \right) dz' \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}}{\lambda_N} \right) e^{-(t-z)/L_{\pi_2}(\gamma)} e^{-z/L_\Delta(\gamma)} \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} dz \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para fatorizarmos os termos na expansional, usamos as propriedades (A.45) e (A.46) mostradas no Apêndice A, ficando com:

$$\begin{aligned} \Pi(t, E, \theta^*) &= \int_0^t dz e^{-(t-z)/L_{\pi_1}(\gamma)} e^{-z/L_N(\gamma)} \frac{(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} \\ &Exp \left[\int_z^t dz' \hat{G}_\pi(z') e^{(t-z')(\hat{B}_{\pi_1}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_1}(\gamma+1))} \right] N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (2.51)$$

e analogamente para $\Delta_\pi(t, E, \theta^*)$ substituimos L_{π_1} por L_{π_2} , \hat{B}_{π_1} por \hat{B}_{π_2} e N_0 por Δ_0 , onde $\hat{B}_{\pi_j}(\gamma)$ e $\hat{B}_{\pi_j}(\gamma+1)$ ($j = 1$ ou 2) são operadores com autovalores $-1/L_{\pi_j}(\gamma)$ e $-1/L_{\pi_j}(\gamma+1)$.

Expandindo a exponencial na expressão acima em uma série de potências e considerando somente os dois primeiros termos, obtemos:

$$\begin{aligned} &Exp \left[\int_z^t dz' \hat{G}_\pi(z') e^{(t-z')(\hat{B}_{\pi_j}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_j}(\gamma+1))} \right] = \\ &Exp \left[\int_z^t dz' \left(\hat{G}_\pi(z') + \hat{G}_\pi(z')(t-z')(\hat{B}_{\pi_j}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_j}(\gamma+1)) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Usando, novamente, a propriedade da decomposição das expansionais e chamando

$$\hat{T}_\pi(t, z) = Exp \left[\int_z^t dz' \hat{G}_\pi(z') \right] \quad (2.53)$$

obtem-se para a expressão de $\Pi(t, E, \theta^*)$ e sua análoga de $\Delta_\pi(t, E, \theta^*)$

$$\begin{aligned} \Pi(t, E, \theta^*) &= \int_0^t dz \frac{(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} e^{-(t-z)/L_{\pi_1}(\gamma)} e^{-z/L_N(\gamma)} \hat{T}_\pi(t, z) \cdot \\ &Exp \left[\int_z^t dz' \hat{T}_\pi(z, z') \hat{G}_\pi(z') (t-z')(\hat{B}_{\pi_1}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_1}(\gamma+1)) \hat{T}_\pi^{-1}(z, z') \right] N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

e

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{(Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} e^{-(t-z)/L_{\pi_2}(\gamma)} e^{-z/L_\Delta(\gamma)} \hat{T}_\pi(t, z).$$

$$\cdot \text{Exp} \left[\int_z^t dz' \hat{T}_\pi(z, z') \hat{G}_\pi(z') (t - z') (\hat{B}_{\pi_2}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_2}(\gamma + 1)) \hat{T}_\pi^{-1}(z, z') \right] \Delta_0 E^{-(\gamma-1)} \quad (2.55)$$

Usando a definição da expansional (expressão (A.13) do apêndice A) e considerando somente os dois primeiros termos (os demais são desprezíveis), obtemos:

$$\Pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} e^{-(t-z)/L_{\pi_1}(\gamma)} e^{-z/L_N(\gamma)} \left[\hat{T}_\pi(t, z) + \right.$$

$$\left. + \int_z^t dz' \hat{T}_\pi(t, z') \hat{G}_\pi(z') (t - z') (\hat{B}_{\pi_1}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_1}(\gamma + 1)) \hat{T}_\pi^{-1}(z, z') \right] N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.56)$$

c

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{(Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} e^{-(t-z)/L_{\pi_2}(\gamma)} e^{-z/L_\Delta(\gamma)} \left[\hat{T}_\pi(t, z) + \right.$$

$$\left. + \int_z^t dz' \hat{T}_\pi(t, z') \hat{G}_\pi(z') (t - z') (\hat{B}_{\pi_2}(\gamma) - \hat{B}_{\pi_2}(\gamma + 1)) \hat{T}_\pi^{-1}(z, z') \right] \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.57)$$

Nas expressões acima o 1^o termo é aproximadamente 10 vezes maior que o 2^o termo. assim para efeito do cálculo dos fluxos leptônicos vamos considerar somente o 1^o termo, ficando com:

$$\Pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} e^{-(t-z)/L_{\pi_1}(\gamma)} e^{-z/L_N(\gamma)} \hat{T}_\pi(t, z) N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.58)$$

e

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{(Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-})}{\lambda_N} e^{-(t-z)/L_{\pi_2}(\gamma)} e^{-z/L_\Delta(\gamma)} \hat{T}_\pi(t, z) \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.59)$$

onde

$$Z_{p\pi^\pm}(\gamma) = \int_0^1 x_f^\gamma f_{p\pi^\pm}(x_f) dx_f \quad (2.60)$$

e $\frac{-1}{L_{\pi_1}(\gamma)}$, $\frac{-1}{L_{\pi_2}(\gamma)}$, $\frac{-1}{L_N(\gamma)}$ e $\frac{-1}{L_\Delta(\gamma)}$, são os autovalores dos operadores \hat{B}_{π_1} , \hat{B}_{π_2} , \hat{B}_{N_1} e \hat{B}_{N_2} , atuando nas autofunções $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ e $\Delta_0 E^{-(\gamma+1)}$, respectivamente.

A expansional $\hat{T}_\pi(t, z)$ é definida no Apêndice A.

$$\hat{T}_\pi(t, z) = 1 + \int_z^t dz' \hat{G}_\pi(z') + \int_z^t dz' \hat{G}_\pi(z') \int_z^{z'} dz'' \hat{G}_\pi(z'') + \dots \quad (2.61)$$

O autovalor do operador $\hat{G}_\pi(t)$ atuando em $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ ou em $\Delta_0 E^{-(\gamma+1)}$ depende da densidade da atmosfera $\rho(t, \theta^*)$ e do fator $\frac{1}{E}$. Como o ângulo θ^* também é função de t , somente em alguns casos especiais a expansional poderá ser transformada em uma exponencial simples. Se a atmosfera for considerada isotérmica e linear (ver seção 5 do apêndice A), a expansional se reduz a uma exponencial, e as expressões (2.58) e (2.59) se reduzem às soluções conhecidas dos pions na atmosfera

$$\Pi(t, E, \theta^*) = \frac{N_0(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})E^{-(\gamma+1)}e^{-\frac{t}{L_{\pi_1}}}}{\lambda_N} \int_0^t dz e^{z(\frac{1}{L_{\pi_1}} - \frac{1}{L_N})} e^{-\int_z^t \frac{dz'}{\rho(z', \theta^*)E}} \quad (2.62)$$

e

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \frac{\Delta_0(Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-})E^{-(\gamma+1)}e^{-\frac{t}{L_{\pi_2}}}}{\lambda_N} \int_0^t dz e^{z(\frac{1}{L_{\pi_2}} - \frac{1}{L_\Delta})} e^{-\int_z^t \frac{dz'}{\rho(z', \theta^*)E}} \quad (2.63)$$

onde

$$\hat{T}_\pi(t, z)E^{-(\gamma+1)} = e^{-\int_z^t \frac{dz'}{\rho(z', \theta^*)E}} E^{-(\gamma+1)} \quad (2.64)$$

As expressões para $\pi^\pm(t, E, \theta^*)$ são obtidas somando-se e subtraindo-se as duas expressões

acima

$$\begin{aligned} \pi^\pm(t, E, \theta^*) = & \frac{N_0(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-})E^{-(\gamma+1)}}{2\lambda_N} \left[e^{-\frac{t}{L_{\pi_1}}} \int_0^t dz e^{z(\frac{1}{L_{\pi_1}} - \frac{1}{L_N})} e^{-\int_z^t \frac{dz'}{\rho(z', \theta^*)E}} \pm \right. \\ & \left. \pm \delta_N \delta_\pi e^{-\frac{t}{L_{\pi_2}}} \int_0^t dz e^{z(\frac{1}{L_{\pi_2}} - \frac{1}{L_\Delta})} e^{-\int_z^t \frac{dz'}{\rho(z', \theta^*)E}} \right] \quad (2.65) \end{aligned}$$

onde:

$$\delta_N = \frac{p_0 - n_0}{p_0 + n_0}$$

e

$$\delta_\pi = \frac{Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}}{Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}}$$

2.2.2 Difusão dos Kaons na Atmosfera

A equação integro-diferencial que descreve a difusão dos kaons na atmosfera é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K^j(t, E, \theta^*) = & -\frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_K(E)} - \frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^{K^j}} + \int_E^\infty \frac{K^j(t, E', \theta^*)}{\lambda_K(E')} f_{K^j K^j}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \\ & + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \int_E^\infty \frac{K^i(t, E', \theta^*)}{\lambda_K(E')} f_{K^i K^j}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow K^j) \end{aligned} \quad (2.66)$$

com a condição de contorno

$$K^j(0, E, \theta^*) = 0 \quad . \quad (2.67)$$

Na equação (2.66), $K^j(t, E, \theta^*)dE$ é o fluxo diferencial de kaons na profundidade atmosférica t , ao longo da trajetória formando um ângulo θ^* com a vertical, com energias entre E e $E + dE$. O índice j representa os três tipos de kaons considerados no cálculo (K^+ , K^- , K_L^0), nessa ordem. O primeiro termo do lado direito da equação (2.66) representa a atenuação dos kaons na atmosfera, o segundo o decaimento desses kaons em leptons, e o terceiro e quarto referem-se às produções de K^j vindos de K^j e K^i ($i \neq j$), respectivamente. O último termo do lado direito representa as fontes de kaons vindas da interação dos hadrons no ar. O índice m representa os quatro hadrons usados em nossos cálculos (p, n, π^+, π^-), nessa ordem.

Considerando válida a Lei do *Scaling* de Feynman nas interações dos hadrons com núcleos de ar e usando a aproximação $\lambda(E) \approx \lambda$, válida na região de energia ($1 \text{ GeV} \leq E \leq 100 \text{ TeV}$), a equação (2.66) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K^j(t, E, \theta^*) = & -\frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_K} - \frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^{K^j}} + \int_0^1 \frac{K^j(t, E/x_f, \theta^*)}{\lambda_K} f_{K^j K^j}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} + \\ & + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \int_0^1 \frac{K^i(t, E/x_f, \theta^*)}{\lambda_K} f_{K^i K^j}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow K^j) \quad . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ao se considerar os termos de regeneração dos kaons ($K^j \leftrightarrow K^i$), tem de se considerar o fato complicador de que há três diferentes partículas (K^+ , K^- e K_L^0), e além disso, não se pode usar, agora, as relações de simetria usadas para os pions e os nucleons. Em síntese, não se tem $Z_{pK^\pm} = Z_{nK^\mp}$.

Introduzindo os operadores

$$\hat{A}_{jj}K^j(t, E, \theta^*) = - \left(1 - \int_0^1 dx_f f_{K^j K^j}(x_f) \hat{\sigma} \right) \frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_K} \quad , \quad (2.69)$$

$$\hat{B}_{ij}K^i(t, E, \theta^*) = \left(\int_0^1 dx_f f_{K^i K^j}(x_f) \hat{\sigma} \right) \frac{K^i(t, E, \theta^*)}{\lambda_K} \quad , \quad i \neq j \quad (2.70)$$

e

$$\hat{G}_{K^j}K^j(t, E, \theta^*) = - \frac{1}{\lambda_{decay}^{K^j}} K^j(t, E, \theta^*) \quad , \quad (2.71)$$

onde $\lambda_{decay}^{K^+} = \lambda_{decay}^{K^-} \neq \lambda_{decay}^{K_L^0}$, a equação (2.68) se transformará na equação de operadores

$$\frac{\partial}{\partial t} K^j(t, E, \theta^*) = (\hat{A}_{jj} + \hat{G}_{K^j})K^j(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{ij}K^i(t, E, \theta^*) + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow K^j) \quad . \quad (2.72)$$

Na forma matricial a equação (2.72) se torna

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{A}_{++} + \hat{G}_K) & \hat{B}_{-+} & \hat{B}_{L+} \\ \hat{B}_{+-} & (\hat{A}_{--} + \hat{G}_K) & \hat{B}_{L-} \\ \hat{B}_{+L} & \hat{B}_{-L} & (\hat{A}_{LL} + \hat{G}_{K_L^0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \\ F_L^0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

onde $\hat{G}_{K^+} = \hat{G}_{K^-} \equiv \hat{G}_K$ e

$$F^j(h_m \rightarrow K^j) = F(p \rightarrow K^j) + F(n \rightarrow K^j) + F(\pi^+ \rightarrow K^j) + F(\pi^- \rightarrow K^j) \quad . \quad (2.74)$$

Desprezando as contribuições devidas à troca de estranheza ($K^\pm \rightarrow K^\mp$) e admitindo a validade das relações $(K^\pm \rightarrow K_L^0) = (K_L^0 \rightarrow K^\pm)$ que podem ser obtidas com considerações

extremamente simples sobre o conteúdo de quarks de valência dos diferentes kaons, a equação (2.73) é, então, expressa por:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K^- \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{A} + \hat{G}_K) & 0 & \hat{B}_{L+} \\ 0 & (\hat{A} + \hat{G}_K) & \hat{B}_{L-} \\ \hat{B}_{+L} & \hat{B}_{-L} & (\hat{A} + \hat{G}_{K_L^0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \\ F_L^0 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

onde as operações dos \hat{B}_{ij} sobre as funções $K^i(t, E, \theta^*)$ são:

$$\hat{B}_{L\pm} K_L^0(t, E, \theta^*) \equiv \hat{B}_{\pm L} K^\pm(t, E, \theta^*) \quad , \quad (2.76)$$

e os operadores $B_{L\pm}$ atuam nas funções $K_L^0(t, E, \theta^*)$, enquanto que os $B_{\pm L}$ atuam nas funções $K^\pm(t, E, \theta^*)$.

Os autovalores da matriz que aparece em (2.75) são:

$$\lambda_1 = A_{jj} + G_K \quad , \quad (2.77)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left[2A_{jj} + (G_K + G_{K_L^0}) \pm \sqrt{(G_{K_L^0} - G_K)^2 + 4(B_{L+}B_{+L} + B_{L-}B_{-L})} \right] \quad . \quad (2.78)$$

Os autoestados normalizados correspondentes a esses autovalores são:

$$\xi_1(t, E, \theta^*) = K^-(t, E, \theta^*) - K^+(t, E, \theta^*) \quad , \quad (2.79)$$

$$\xi_{2,3}(t, E, \theta^*) = \left[\frac{2\hat{B}_{\pm L}}{(\hat{G}_{K_L^0} - \hat{G}_K) \pm \sqrt{(\hat{G}_{K_L^0} - \hat{G}_K)^2 + 4(B_{L+}B_{+L} + B_{L-}B_{-L})}} \right] \cdot [K^+(t, E, \theta^*) + K^-(t, E, \theta^*)] + K_L^0(t, E, \theta^*) \quad . \quad (2.80)$$

Essas combinações lineares dos três diferentes estados físicos (K^+ , K^- , K_L^0) desempenham os mesmos papéis que as funções ($\pi^+ \pm \pi^-$) desempenharam para o caso dos pions em suas difusões na atmosfera, simplificando as equações integro-diferenciais (2.66) que assumem as

formas,

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_1(t, E, \theta^*) = \hat{A}_{jj} \xi_1(t, E, \theta^*) + \hat{G}_K \xi_1(t, E, \theta^*) + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow \xi_1) \quad , \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi_{2,3}(t, E, \theta^*) &= \left[\hat{A}_{jj} + \frac{(\hat{G}_K + \hat{G}_{K_L^0})}{2} \right] \xi_{2,3}(t, E, \theta^*) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(\hat{G}_{K_L^0} - \hat{G}_K)^2 + 4(\hat{B}_{+L} \hat{B}_{L+} - \hat{B}_{-L} \hat{B}_{L-})} \xi_{2,3} + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow \xi_{2,3}) \quad . \end{aligned} \quad (2.82)$$

As soluções dessas equações estão sujeitas à condição de contorno

$$\xi_j(0, E, \theta^*) = 0 \quad , \quad (2.83)$$

e podem ser colocadas na forma:

$$\xi_1(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left\{ \int_z^t (\hat{A}_{jj} + \hat{G}_K) dz' \right\} \left[\sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow \xi_1) \right] dz \quad (2.84)$$

e

$$\begin{aligned} \xi_{2,3}(t, E, \theta^*) &= \int_0^t \text{Exp} \left\{ \int_z^t \left[\frac{2\hat{A}_{jj} + \hat{G}_K + \hat{G}_{K_L^0}}{2} \pm \right. \right. \\ &\left. \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\hat{G}_{K_L^0} - \hat{G}_K)^2 + 4(\hat{B}_{+L} \hat{B}_{L+} - \hat{B}_{-L} \hat{B}_{L-})} \right] dz' \right\} \cdot \left[\sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow \xi_{2,3}) \right] dz \quad . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Os fluxos de kaons (K^\pm, K_L^0) podem, então, ser obtidos algebricamente a partir de ξ_1, ξ_2 e ξ_3 . Essas funções, entretanto, assumem formas extremamente complicadas devido a atuação dos operadores dentro da raiz quadrada sobre ξ_2 e ξ_3 .

CASO PARTICULAR

Na região de energia suficientemente baixa $E \leq b_{K^j}$ (constante de decaimento dos mesons K^j no ar) as únicas fontes de kaons são os prótons e neutrons. Os kaons e pions decaem antes de interagir novamente com os núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera, produzindo leptons diretamente.

As equações (2.68) assumem, então, a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K^j(t, E, \theta^*) = & -\frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_K} - \frac{K^j(t, E, \theta^*)}{\lambda_{decay}^{K^j}} + \int_0^1 \frac{p(t, E/x_f)}{\lambda_N} f_{pK^j}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} + \\ & + \int_0^1 \frac{n(t, E/x_f)}{\lambda_N} f_{nK^j}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} . \end{aligned} \quad (2.86)$$

As soluções desse conjunto de equações, sujeitas à condição de contorno $K^j(0, E, \theta^*) = 0$, podem ser colocadas na forma [31],

$$K_{low}^j(t, E, \theta^*) \approx \left[\int_0^1 \frac{p(t, E/x_f)}{\lambda_N} f_{pK^j}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} + \int_0^1 \frac{n(t, E/x_f)}{\lambda_N} f_{nK^j}(x_f) \frac{dx_f}{x_f} \right] \lambda_{decay}^{K^j} . \quad (2.87)$$

Na região de energia $E_{K^j} \gg b_{K^j}$, os decaimentos dos três tipos de kaons podem ser tratados como uma perturbação, e as equações (2.72) assumem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} K^j(t, E, \theta^*) = \hat{A}_{jj} K^j(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{ij} K^i(t, E, \theta^*) + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow K^j) . \quad (2.88)$$

Com as condições de contorno $K^j(0, E, \theta^*) = 0$, na forma matricial, a equação (2.88) se torna:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{++} & \hat{B}_{-+} & \hat{B}_{L+} \\ \hat{B}_{+-} & \hat{A}_{--} & \hat{B}_{L-} \\ \hat{B}_{+L} & \hat{B}_{-L} & \hat{A}_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \\ F_L^0 \end{pmatrix} . \quad (2.89)$$

Essas equações podem ser simplificadas como já visto anteriormente, se desprezarmos as trocas de estranheza e a validade das relações $(K^\pm \rightarrow K_L^0) = (K_L^0 \rightarrow K^\pm)$, tomando a forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & \hat{B}_{L+} \\ 0 & \hat{A} & \hat{B}_L \\ \hat{B}_{+L} & \hat{B}_{-L} & \hat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \\ K_L^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \\ F_L^0 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

onde usamos

$$\hat{A}_{ji} K^j(t, E, \theta^*) = \hat{A} K^j(t, E, \theta^*) \quad (2.91)$$

e também

$$\hat{B}_{Li}K^L(t, E, \theta^*) = \hat{B}_{iL}K^i(t, E, \theta^*) = \hat{B}K^j(t, E, \theta^*) \quad , \quad i \neq j \quad . \quad (2.92)$$

Os autovalores da matriz (2.90) são

$$\lambda_1 = A \quad (2.93)$$

e

$$\lambda_{2,3} = A \pm B\sqrt{2} \quad (2.94)$$

cujos autoestados normalizados são respectivamente,

$$\xi_1(t, E, \theta^*) = K^-(t, E, \theta^*) - K^+(t, E, \theta^*) \quad (2.95)$$

e

$$\xi_{2,3}(t, E, \theta^*) = \pm \frac{(K^+(t, E, \theta^*) + K^-(t, E, \theta^*))}{\sqrt{2}} + K_L^0(t, E, \theta^*) \quad . \quad (2.96)$$

Assim, os autovetores ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 tem um desenvolvimento muito simples na atmosfera, e são os correspondentes às combinações $(\pi^+ \pm \pi^-)$ no caso dos pions.

Esses autoestados são semelhantes aos encontrados por P. Lipari [31], bastando multiplicar a equação (2.95) por $-\sqrt{2}/2$ e (2.96) por $\pm\sqrt{2}/2$.

As equações (2.81) e (2.82) se transformam nas equações para as funções ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_1(t, E, \theta^*) = \hat{A} \xi_1 + \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow \xi_1) \quad , \quad (2.97)$$

onde $F(h_m \rightarrow \xi_1)$ são as fontes de hadrons dando ξ_1 , com

$$F(h_m \rightarrow \xi_1) = \hat{C}_m h_m(t, E, \theta^*) = \int_0^1 \frac{h_m(t, E/x_f, \theta^*)}{\lambda_m} \left(\frac{f_{h_m K^+}(x_f) - f_{h_m K^-}(x_f)}{\sqrt{2}} \right) \frac{dx_f}{x_f} \quad . \quad (2.98)$$

Os operadores \hat{C}_m atuam nas funções que representam os fluxos dos hadrons (p, n, π^\pm) .

Analogamente, para ξ_2 e ξ_3 tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_{2,3} = (\hat{A} \pm \sqrt{2}\hat{B})\xi_{2,3} \mp \sum_{m=1}^4 F(h_m \rightarrow \xi_{2,3}) \quad (2.99)$$

com

$$F(h_m \rightarrow \xi_{2,3}) = \hat{D}_{m2,3}h_m(t, E, \theta^*) = \int_0^1 \frac{h_m(t, E/x_f, \theta^*)}{\lambda_m} \left(\frac{f_{mK^+} + f_{mK^-} \pm \sqrt{2}f_{mK^0}}{2} \right) \frac{dx_f}{x_f} \quad (2.100)$$

Analogamente, os operadores $\hat{D}_{m2,3}$ atuam nas autofunções dos hadrons “ m ” (p, n, π^\pm) que são, agora, as fontes de ξ_2 e ξ_3 .

As soluções das equações (2.97) e (2.99) são respectivamente,

$$\xi_1(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left[\int_z^t \hat{A} dz' \right] \sum_{m=1}^4 \hat{C}_m h_m(z, E, \theta^*) dz \quad (2.101)$$

e

$$\xi_{2,3}(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left[\int_z^t \hat{A}_{2,3} dz' \right] \sum_{m=1}^4 \hat{D}_{m2,3} h_m(z, E, \theta^*) dz \quad (2.102)$$

onde $\hat{A}_{2,3} = \hat{A} \pm \sqrt{2}\hat{B}$.

Considerando que os espectros diferenciais de nucleons tenham uma dependência com a energia na forma de potência,

$$N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.103)$$

e

$$\Delta(0, E) = \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \quad , \quad (2.104)$$

as expressões de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , com as aproximações usadas na ref.[40], se reduzem a

$$\xi_1(t, E, \theta^*) = \int_0^t e^{-(t-z)/L_{K_1}} \sum_{m=1}^4 \hat{C}_m h_m(z, E, \theta^*) dz \quad (2.105)$$

e

$$\xi_{2,3}(t, E, \theta^*) = \int_0^t e^{-(t-z)/L_{K_{2,3}}} \sum_{m=1}^4 \hat{D}_{m_{2,3}} h_m(z, E, \theta^*) dz \quad (2.106)$$

onde $-1/L_{K_1}$ e $-1/L_{K_{2,3}}$ são os autovalores dos operadores \hat{A} e $\hat{A}_{2,3}$ e são dados por

$$-\frac{1}{L_{K_1}} = -\frac{(1 - Z_{K^j K^j})}{\lambda_K} \quad (2.107)$$

e

$$-\frac{1}{L_{K_{2,3}}} = -\frac{(1 - Z_{K^j K^j} \mp \sqrt{2} Z_{K_L^0 K^j})}{\lambda_K}, \text{ com } j = + \text{ ou } - \quad (2.108)$$

onde

$$Z_{K^j K^j} = \int_0^1 x_f^\gamma f_{K^j K^j}(x_f) dx_f \quad (2.109)$$

e

$$Z_{K_L^0 K^j} = Z_{K^j K_L^0} = \int_0^1 x_f^\gamma f_{K_L^0 K^j}(x_f) dx_f \quad (2.110)$$

As expressões (2.109) e (2.110) representam os espectros de energia dos K^j produzidos nas reações ($K^j \rightarrow$ núcleo), e os espectros de energia dos K_L^0 produzidos nas reações ($K^i \rightarrow$ núcleo), respectivamente.

A partir das expressões (2.105) e (2.106) podemos obter facilmente, as expressões dos fluxos de K^\pm e K_L^0 ,

$$K_{high}^{\pm}(t, E, \theta^*) = \xi_2 + \xi_3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_1 \quad (2.111)$$

e

$$K_{Lhigh}^0(t, E, \theta^*) = \frac{\xi_2 - \xi_3}{\sqrt{2}} \quad (2.112)$$

Como os fluxos de kaons obtidos são soluções assintóticas a energias muito baixas, quando a probabilidade das interações hadrônicas é desprezível (eq.(2.87)), e a energias muito altas, quando se desprezam os termos do decaimento dos kaons em leptons (eqs.(2.111) e (2.112)), as soluções válidas em todo o espectro de energia são obtidas através da função de interpolação [31]

$$K^j(t, E, \theta^*) = \frac{K_{low}^j(t, E, \theta^*)}{1 + \frac{K_{low}^j(t, E, \theta^*)}{K_{high}^j(t, E, \theta^*)}} \quad (2.113)$$

Essas soluções permitem cálculos aproximados para os fluxos dos kaons na região de energia intermediária $500 \text{ GeV} \leq E \leq 1 \text{ TeV}$.

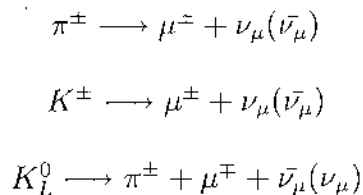
Capítulo 3

A Componente Muônica

Os muons constituem a chamada componente dura da radiação cósmica, pois são muito penetrantes. Essa grande penetração na atmosfera terrestre se deve principalmente à sua pequena seção de choque de interação com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera e também a seu tempo de decaimento muito longo ($\tau_\mu = 10^{-6}$ s) para o padrão das partículas elementares.

Além de seu grande poder penetrante eles são de fácil detecção, pois, possuem carga elétrica.

As principais fontes de muons na atmosfera são:



O último decaimento contribue muito pouco para o fluxo de muons na região de baixas energias ($E_\mu \leq 500$ GeV) e um pouco mais na região de altas energias ($E_\mu \geq 1$ TeV) (cerca de 4%)[31]. Para energias acima de 50 TeV, as contribuições dos decaimentos das partículas

charmosas tornam-se muito importantes, ultrapassando o fluxo de muons vindos dos pions e kaons.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a evolução, na atmosfera, dos muons provenientes de pions e kaons carregados que são de fundamental importância na obtenção dos fluxos de neutrinos e no estudo da chamada Anomalia dos Neutrinos Atmosféricos [24, 28].

Ao atravessarem a atmosfera os muons perdem energia por ionização, *bremstrahlung*, formação de pares e reações nucleares, além de decaírem em elétrons (ou em pósitrons) e neutrinos, segundo a reação

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu) + \nu_e(\bar{\nu}_e) \quad , \quad (3.1)$$

Este decaimento é muito importante na região de baixas energias, onde a constante de decaimento do muon $b_\mu = 1 \text{ GeV}/c$.

Neste capítulo vamos considerar a influência dos raios cósmicos primários e do modelo da atmosfera sobre os fluxos muônicos ao nível do mar. A polarização dos muons, que é de fundamental importância para a determinação dos fluxos de neutrinos, será mostrada no apêndice B.

3.1 Difusão dos Muons na Atmosfera

A equação que governa a difusão dos muons na atmosfera é escrita na forma [41],

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mu^\pm(t, E, \theta^*) = & -\hat{G}_\mu \mu^\pm(t, E, \theta^*) + \frac{\partial}{\partial E} [\beta(E) \mu^\pm(t, E, \theta^*)] + \\ & + \int_{E_{min}}^{E_{max}} \hat{G}_M M(t, E', \theta^*) f_{M\mu}(E, E') \frac{dE'}{E'} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

As funções $\mu(t, E, \theta^*)$, soluções da equação (3.2), estão sujeitas à condição de contorno

$$\mu(0, E, \theta^*) = 0 . \quad (3.3)$$

Na equação (3.2), $\mu^\pm(t, E, \theta^*)dE$ representa os fluxos diferenciais dos muons na profundidade t , inclinada ao longo da direção do muon, formando um ângulo θ^* com a vertical e com energias entre E e $E + dE$. O primeiro termo do lado direito da equação (3.2) representa o decaimento dos muons em elétrons, o segundo descreve as perdas de energia dos muons no ar, e o último as fontes de muons vindos dos decaimentos dos mesons (π^\pm, K^\pm).

Em nossos cálculos consideramos que as perdas de energia dos muons no ar ocorram continuamente, ou seja, as flutuações serão negligenciadas. Assim sendo, uma aproximação da fórmula exata [42] da perda de energia é:

$$\beta(E) = -\frac{dE}{dt} = a + bE \quad (3.4)$$

onde, a , representa a perda de energia dos muons por ionização e excitações nucleares, que são consideradas constantes, e bE representa a perda de energia média por *bremstrahlung*, por formação de pares e por colisões nucleares.

A solução da equação inhomogênea a derivadas parciais (3.2), sujeita a condição de contorno (3.3) [14] é:

$$\mu^\pm(t, E, \theta^*) = \mu_{hom}^\pm(t, E, \theta^*) + \mu_{part}^\pm(t, E, \theta^*) \quad (3.5)$$

onde

$$\mu_{hom}^{\pm}(t, E, \theta^*) = \mu(0, E, \theta^*) \exp \left[b(t - t_0) - \int_z^t \frac{dz'}{\lambda_{decay}^{\mu^{\pm}}(\epsilon, z', \theta^*(z'))} \right] \quad (3.6)$$

com $-1/\lambda_{decay}^{\mu}$ sendo o autovalor do operador \hat{G}_{μ} e

$$\mu_{part}^{\pm}(t, E, \theta^*) = \int_0^t \exp \left[b(t - z_1) - \int_{z_1}^t \frac{dz}{\lambda_{decay}^{\mu^{\pm}}(\epsilon, z, \theta^*(z))} \right] H(\epsilon(t - z_1, E), z_1, \theta^*(z_1)) dz_1 \quad (3.7)$$

A solução de (3.2) sujeita a condição de contorno (3.3) se reduz a $\mu_{part}(t, E, \theta^*)$ e é:

$$\mu^{\pm}(t, E, \theta^*) = \int_0^t \exp \left[b(t - z_1) - \int_{z_1}^t \frac{m_{\mu} \sec \theta^*(z)}{c \tau_{\mu} \epsilon(t - z, E) \rho(z)} dz \right] H(\epsilon(t - z_1, E), z_1, \theta^*(z_1)) dz_1 \quad (3.8)$$

onde

$$\epsilon(t - z_1, E) = E e^{b(t-z_1)} + \frac{a}{b} (e^{b(t-z_1)} - 1) \quad (3.9)$$

e

$$H[\epsilon(t - z_1, E), z_1, \theta^*(z_1)] = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE_M (BR)_M \hat{G}_M M(z_1, E, \theta^*(z_1)) f_{M \rightarrow \mu^{\pm}}(\epsilon, E_M) \quad (3.10)$$

A expressão (3.9) representa a energia $\epsilon(t - z_1, E)$ que um muon deve ter no nível z_1 para chegar ao nível t , com energia E , como resultado da perda de energia do muon ao atravessar a profundidade inclinada $(t - t_0)$ da atmosfera e a função H representada pela equação (3.10)

é a fonte dos muons carregados provenientes dos decaimentos dos mesons M no ar, $(BR)_M$ é o *branching ratio* do meson M ao decair em muons e $f_{M \rightarrow \mu^\pm}(\epsilon, E)$ é o espectro de energia dos muons vindos desses decaimentos. Esse espectro e os limites de integração E_{min} e E_{max} são obtidos da cinemática relativística [44] e aparecem no Apêndice C.

Para se calcular os fluxos de muons necessitamos obter a função $H(\epsilon, z_1, \theta^*(z_1))$. Essa função depende dos fluxos mesônicos obtidos no capítulo 2. As expressões (2.65), (2.87), (2.111) e (2.112) fornecem os fluxos de π^\pm , K_{low}^j e K_{high}^j , respectivamente, que são as principais fontes de muons.

3.2 Comparação com Dados Experimentais

Nesta seção serão obtidos numericamente os fluxos diferenciais de muons e a razão entre μ^+ e μ^- , os quais serão comparados aos resultados experimentais e aos resultados teóricos obtidos por outros autores [31, 34].

Para efetuar esses cálculos necessitam-se levar em conta alguns dados essenciais que entram no cálculo dos fluxos, como por exemplo: o espectro de energia dos raios cósmicos primários, a distribuição de energia dos mesons secundários, os livres percursos médios das partículas na atmosfera, a perda de energia dos muons ao atravessar a atmosfera terrestre, etc.

A seguir, serão feitas considerações sobre alguns desses dados.

a) Espectro de Energia dos Raios Cósmicos Primários

Será considerado que os raios cósmicos primários tem um espectro de energia na forma $N_i(0, E) = N_{0,i} E^{-(\gamma+1)}$, $i = p$ ou n e que a composição química isotópica não varia com a energia.

Serão usadas duas parametrizações para esse espectro:

para prótons

$$p(0, E) = p_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (3.11)$$

e para neutrons

$$n(0, E) = \delta_0 p_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (3.12)$$

I - Espectro Primário usado na referência [31]

$$p_0(1 + \delta_0) E^{-(\gamma+1)} = 1,70 E^{-2,70} \quad (\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1} \quad (3.13)$$

com $\delta_0 = 0,14$, onde δ_0 significa a razão entre neutrons e prótons no espectro primário.

II - Espectro Primário usado na referência [37]

$$p_0(1 + \delta_0)E^{-(\gamma+1)} = 7,16(E + 1,63)^{-3,12}(\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1} \text{ para } E < 10 \text{ GeV} \quad (3.14)$$

e

$$p_0(1 + \delta_0)E^{-(\gamma+1)} = 1,87E^{-2,7}(\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1} \text{ para } 10\text{GeV} \leq E \leq 10\text{TeV} \quad (3.15)$$

com $\delta_0 = 0,14$

b) Parâmetros usados para os diferentes hadrons na atmosfera

Livres percursos médios [17]:

$$\lambda_N = 86 \text{ g/cm}^2$$

$$\lambda_\pi = 116 \text{ g/cm}^2$$

$$\lambda_K = 138 \text{ g/cm}^2$$

Constantes de decaimento dos mesons na atmosfera [31]:

$$b_\pi = 115 \text{ GeV/c}$$

$$b_{K^\pm} = 850 \text{ GeV/c}$$

$$b_{K_L^0} = 201,8 \text{ GeV/c}$$

Branching ratios [45]:

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\mp + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (\text{BR})_\pi = 1$$

$$K^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (\text{BR})_{K^\pm} = 0,635$$

$$K^\pm \longrightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) \quad (\text{BR})_{K^\pm} = 0,048$$

$$K_L^0 \longrightarrow \pi^\pm + e^\mp + \bar{\nu}_e(\nu_e) \quad (\text{BR})_{K_L^0} = 0,39$$

c) Espectro de energia dos hadrons secundários das interações p-ar e p-p [31]

$$Z_{ij} = \int_0^1 x_f^{\gamma-1} f_{ij}(x_f) dx_f \quad ; \quad i = \text{partícula primária e } j = \text{partícula secundária} \quad (3.16)$$

Tabela 3.1: Fatores Z para interações hadrônicas ($\gamma = 1,70$). As colunas representam as partículas incidentes e as linhas as originadas da colisão destas com os núcleos-alvo*.

	p	n	π^+	π^-	K^+	K^-	K_L^0
p	0,2630	0,0350	0,0460	0,0330	0,0090	0,0028	0,0059
n	0,0350	0,2630	0,0330	0,0460	0,0065	0,0028	0,0014
π^+	0	0	0,2430	0,0280	0,0067	0,0067	0,0067
π^-	0	0	0,0280	0,2430	0,0067	0,0067	0,0067
K^+	0	0	0	0	0,2110	0	0,0070
K^-	0	0	0	0	0	0,2110	0,0070
K_L^0	0	0	0	0	0,0070	0,0070	0,2110

* Adaptado de [31].

As funções $f_{ij}(x_f = E_j/E_i)$ foram parametrizadas usando os dados de A.E. Brenner *et al.* [46] para prótons como alvo e de D.S. Barton *et al.* [47] para núcleos como alvo.

Essas parametrizações reproduzem os valores tabelados por P. Lipari [31].

Na tabela (3.1) algumas relações entre os momentos surgem da simetria de isospin,

$$Z_{np} = Z_{pn} ; Z_{pp} = Z_{nn} ; Z_{p\pi^\pm} = Z_{n\pi^\mp} \text{ e } Z_{pK^{+,0}} = Z_{nK^{0,+}} \quad .$$

É importante notar que $Z_{pK^+} \neq Z_{nK^-}$ devido ao fato de K^+ e K^- não estarem no mesmo multiplete de isospin.

$$Z_{pK^+} \approx Z_{pK^0} \gg Z_{nK^-} = Z_{n\bar{K}^0} \quad .$$

Além desses parâmetros e distribuições devemos, também, conhecer com detalhes a perda

de energia dos leptons ao atravessar a atmosfera terrestre. Ela é expressa aproximadamente pela relação:

$$-\frac{dE}{dt} = a + bE \quad (3.17)$$

na qual a e b são funções que variam fracamente com a energia [48]. O primeiro termo do lado direito de (3.17) dá a contribuição das perdas por ionização e por excitação. O segundo termo, representa as contribuições combinadas de *bremsthralung*, formação de pares e de interações nucleares e podem ser expressas empiricamente por $b = b_b + b_{fp} + b_{in}$. Para muons com energias menores que 1 TeV o mecanismo dominante é a ionização, e a altas energias o segundo conjunto de processos é que domina. Os valores médios de a e b usados em nossos cálculos são os empregados na ref.[49],

$$\begin{aligned} a &= 2,5 \cdot 10^{-3} GeV(g/cm^2)^{-1} \quad , \\ b &= 2,78 \cdot 10^{-6}(g/cm^2)^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

A figura (3.1) mostra os principais processos de perda de energia dos muons na atmosfera terrestre (esta figura foi retirada da ref.[48]). Em nossos cálculos não incluímos as flutuações, pois, será considerado que a energia do muon é uma função bem definida da posição ao longo de sua trajetória, ou seja, que as perdas de energia ocorrem de modo contínuo.

A expressão (3.7) pode ser reescrita na forma

$$\mu^\pm(t, E, \theta^*) = \int_0^t H(\epsilon(t - z_1, E), z_1, \theta^*(z_1)) e^{b(t-z_1)} W(t, z_1, E, \theta^*(z_1)) dz_1 \quad . \quad (3.19)$$

A função $W(t, z_1, E, \theta^*(z_1))$ representa a probabilidade de sobrevivência de um muon produzido no nível z_1 com energia ϵ chegar ao nível t com energia E . Ela é colocada na

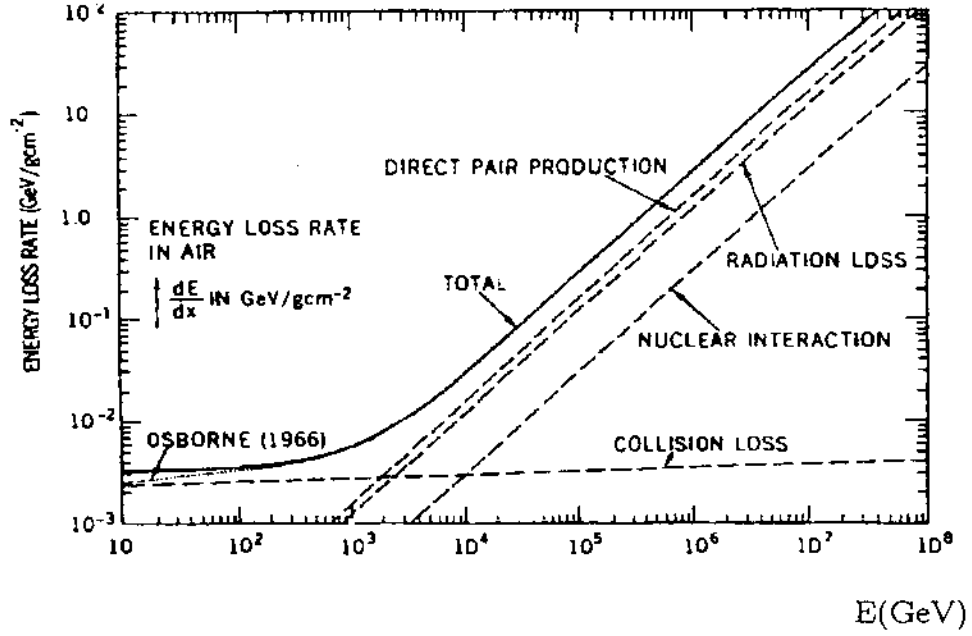


Figura 3.1: Principais processos de perda de energia dos muons na atmosfera terrestre. A linha pontilhada corresponde a cálculos feitos por J.L. Osborne, S.S. Said e A.W. Wolfendale [50]. As demais são cálculos realizados por K. Maeda [49].

forma:

$$W(t, E, z_1, \theta^*(z_1)) = \exp \left[- \int_{z_1}^t \frac{b_\mu \sec \theta^*(z)}{\rho(z) \epsilon(t-z, E)} dz \right], \quad (3.20)$$

onde $b_\mu = \frac{m_\mu c t_0}{\tau_\mu}$ é a constante de decaimento do muon na atmosfera terrestre ($b_\mu \approx 1 \text{ GeV}/c$).

A expressão de $\sec \theta^*(z)$ que aparece na equação acima é colocada na forma,

$$\cos \theta^*(z) = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{(1 + \frac{h(z)}{R_T})^2}}, \quad (3.21)$$

onde $\theta^*(z)$ e $\theta(z)$ representam os ângulos zenitais na produção e detecção do muon, respectivamente. A função $h(z)$ representa a altura do nível acima da superfície terrestre conforme mostrada na figura (3.2) e R_T é o raio da Terra.

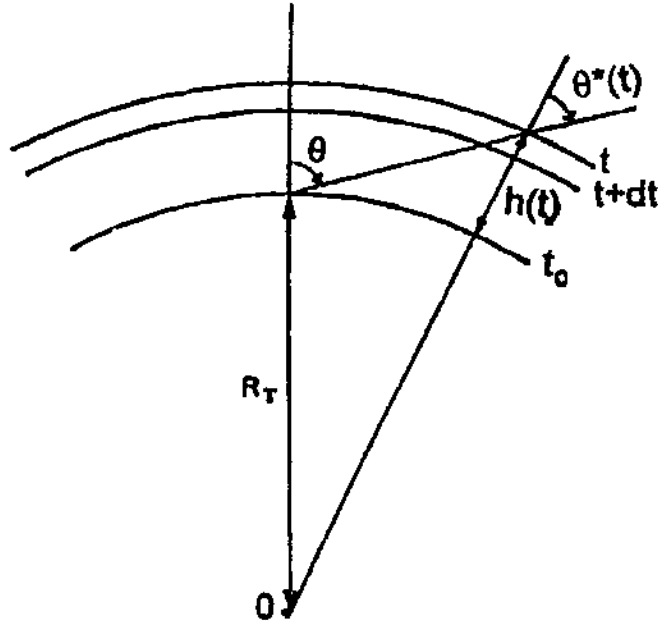


Figura 3.2: Relação geométrica entre o ângulo zenital θ na profundidade t_0 e o ângulo zenital $\theta^*(t)$ na profundidade t . R_T é o raio da Terra e $h(t)$ é a altura da profundidade atmosférica t ao nível de detecção t_0 .

As funções $h(z)$ da equação (3.21) e $\rho(z)$ da equação (3.20), dependem do local na atmosfera terrestre onde o muon é produzido. Essas funções foram parametrizadas por K. Macda [48] e por J.W. Elbert *et al.* [51]. Elas são representadas pelas funções:

$$\rho(z) \text{ (g/cm}^3\text{)} = \begin{cases} \frac{z}{h_0} & \text{para } z \leq z_1 \text{ estratosfera} \\ cz^\beta & \text{para } z > z_1 \text{ troposfera} \end{cases}$$

onde

$$h_0 = 6,344 \text{ km}$$

$$\beta = 0,81$$

$$c = 4,439 \cdot 10^{-6}$$

$$z_1 = 230 \text{ g/cm}^2$$

e

$$h(z) \text{ km} = \begin{cases} 45,450 - 6,344 \ln(z) & z \leq z_1 \\ 44,343 - 11,865 z^{0,190} & z \geq z_1 \end{cases}$$

A profundidade atmosférica da tropopausa corresponde a uma altura $h \approx 11$ km.

Na região da atmosfera, $z \geq z_1$, a densidade $\rho(z) = c \cos\theta^*(z) z^{0,81}$, e nesse caso z representa a profundidade atmosférica inclinada.

Para $\theta^* \leq 60^\circ$, os ângulos zenitais na produção e na detecção dos muons são praticamente iguais e a curvatura da Terra não é importante.

O efeito da curvatura da Terra só é sentido quando $\theta > 60^\circ$. É possível, então, ser feita uma correção média do efeito da curvatura sobre os fluxos leptônicos. Isso é feito corrigindo-se a constante de decaimento da partícula

$$b_{rel}(\theta^*) = \frac{b_m}{\cos\theta^*(z)}.$$

Em nossos cálculos vamos usar a correção feita por S.I. Klimushin, E.V. Bugaev e I.A. Sokalski [52], que é similar à obtida por L.V. Volkova [35].

Outro efeito bastante importante e que influencia muito os neutrinos ao nível do mar é o fato dos muons serem produzidos polarizados. O μ^+ tem helicidade média negativa enquanto que o μ^- tem helicidade positiva (helicidade é o valor esperado do momento angular na

direção do movimento em unidades de $\hbar/2$). No apêndice B vamos fazer alguns cálculos sobre a polarização dos muons vindos dos pions e de kaons [53].

A tabela (3.2) representa os fluxos diferenciais de muons ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais. Os valores desta tabela, para $\cos\theta = 1$ e 0,05, serão usados nas figuras a seguir.

A figura (3.3) mostra a comparação entre nossos cálculos e os fluxos diferenciais de muons para $\cos\theta = 1$ obtido pelos autores P. Lipari [31] e A.V. Butkevich, L.G. Dedenko e I.N. Zheleznykh [34]. Nossos fluxos foram obtidos considerando o ajuste de K. Maeda [49] para modelar a atmosfera terrestre, a perda de energia e também o decaimento dos muons. O acordo com os resultados de P. Lipari é excelente ($\approx 96\%$), enquanto que com os resultados de A.V. Butkevich *et al.* [34] é aproximadamente 85%. A maior discrepância entre os nossos resultados e os de A.V. Butkevich, se deve a maiores valores dos fatores hadrônicos Z_{ij} , principalmente para a produção dos kaons e também a um índice de potências menor para o espectro primário usado pelos referidos autores. Esses dois principais parâmetros aumentam consideravelmente o fluxo diferencial de muons.

A figura (3.4) mostra a comparação entre nossos cálculos e os fluxos diferenciais de muons para $\cos\theta = 0,05$, obtidos por P. Lipari [31]. Além dos parâmetros e distribuições empregados para obter os fluxos verticais de muons, também os efeitos da curvatura da Terra sobre esses fluxos, foram considerados. O acordo entre esses dois cálculos é muito bom ($\approx 85\%$). O aumento na diferença entre os dois resultados, em relação ao fluxo vertical de muons, se deve principalmente ao emprego de valores diferentes para o co-seno efetivo que corrige, em média, o efeito da curvatura da Terra.

As figuras (3.5) e (3.6) mostram uma comparação entre os nossos cálculos e os fluxos

diferenciais de muons medidos ao nível do mar, para $\theta = 0^\circ$ [54, 55, 56] e $\theta = 89^\circ$ [57], respectivamente. O acordo entre os nossos cálculos e os dados experimentais é muito bom ($\approx 97\%$). Nas figuras aparecem também, duas curvas que representam os fluxos de muons por nós calculados com dois diferentes tipos de primários (o mesmo usado por P. Lipari [31] e um outro empregado por K. Mitsui *et al.* [37]). A maior diferença entre esses fluxos se dá para energia $E \leq 10$ GeV, refletindo a influência da escolha dos espectros da Radiação Cósmica Primária, sobre o fluxo de muons. O espectro empregado por K. Mitsui, para $E \leq 10$ GeV, usa um índice de potências menor que o empregado por P. Lipari [31], o que acarreta um aumento no fluxo nessa região de energia.

As figuras (3.7) a (3.14) referem-se a influência de alguns parâmetros e distribuições sobre o fluxo de muons, como a ionização, a curvatura da Terra e a modelagem da atmosfera terrestre.

As figuras (3.7) e (3.8) mostram os fluxos de muons, vertical e horizontal calculados com e sem o decaimento e a perda de energia por ionização dos muons. Na figura (3.7) aparecem também os dados experimentais para $\theta = 0^\circ$ [54, 55, 56] e na figura (3.8) os dados para $\theta = 89^\circ$ [57], que são tomados como base para se mostrar que o efeito acima mencionado é de fundamental importância na explicação dos dados experimentais de baixa energia $E < 10$ GeV. Nessa região o decaimento e a perda de energia dos muons desempenham um papel muito importante no cálculo do fluxo de muons. A altas energias, $E_\mu \geq 1$ TeV, esses efeitos podem ser desprezados, pois o comprimento de decaimento do muon tende a zero e a probabilidade de sobrevivência desses leptons tende a um.

A figura (3.9) mostra o comportamento da razão entre as probabilidades de sobrevivência dos muons na atmosfera, sem e com a curvatura da Terra, para $\theta = 60^\circ$ (linha cheia) e

$\theta = 87^\circ$ (linha tracejada). Esse efeito é muito grande para $\theta = 87^\circ$ e na região de baixas energias, $1 \text{ GeV} \leq E < 1000 \text{ GeV}$, onde essa razão assume valores entre 0,13 e 0,90.

As figuras (3.10) e (3.11), referem-se aos fluxos diferenciais de muons calculados considerando ou não a curvatura da Terra. Novamente para $\theta = 60^\circ$, a diferença é mínima ($\approx 2\%$) entre os dois cálculos, porém, para $\theta = 87^\circ$ e na região de energias abaixo de 100 GeV os fluxos de muons são diretamente proporcionais à probabilidade de sobrevivência, que é maior quando calculada considerando o efeito da curvatura da Terra. A altas energias a probabilidade de sobrevivência tende a 1, porém, o fluxo de muons é inversamente proporcional ao $\cos\theta^*$, que surge da constante de decaimento dos mesons em muons. Assim, como se pode ver na figura (3.11), para energias acima de 1 TeV, o fluxo de muons, sem considerar o efeito da curvatura da Terra, fica acima daquele em que se considera tal efeito.

A figura (3.12) mostra a razão entre as probabilidades de sobrevivência dos muons, calculada com ajuste de K. Maeda [49] para atmosfera *U.S. standard* e calculada com atmosfera isotérmica (ver Apêndice D). Na figura aparecem duas curvas, uma para $\theta = 0^\circ$ (linha cheia) e outra para $\theta = 87^\circ$ (linha tracejada). Como se pode ver na figura a grande diferença entre as duas probabilidades de sobrevivência se dá na região de energia $1 < E < 1000 \text{ GeV}$ e ela é maior para $\theta = 87^\circ$. A altas energias, $E \geq 1 \text{ TeV}$, as duas probabilidades assumem praticamente o mesmo valor, tendendo a 1.

As figuras (3.13) e (3.14) mostram uma comparação entre os fluxos de muons, ao nível do mar, levando-se em conta os efeitos de ionização de muons e curvatura da Terra, calculados de acordo com os dois modelos de atmosfera acima mencionados, para os ângulos zenitais $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 87^\circ$, respectivamente. A diferença se dá novamente na região de baixa energia, onde os fluxos são diretamente proporcionais à probabilidade de sobrevivência dos muons na

atmosfera.

A tabela (3.3) representa a distribuição zenital da razão μ^+/μ^- ao nível do mar. Esses valores serão mostrados, junto com dados experimentais, nas figuras (3.15) e (3.16).

A figura (3.15) mostra a razão entre μ^+ e μ^- ao nível do mar, para o ângulo zenital $\theta = 0^\circ$ e a figura (3.16) a mesma razão para $75^\circ \leq \theta \leq 87^\circ$. Na primeira figura aparecem, além dos dados experimentais legendados na mesma, duas curvas que representam nossos cálculos considerando dois tipos de espectros primários (a linha cheia com o espectro usado por P. Lipari [31] e a linha tracejada com o espectro adotado por K. Mitsui *et al.* [37]), uma curva (linha pontilhada) representando as razões calculadas por P. Lipari e uma outra curva (linha ponto-tracejada) considerando a variação dos fatores Z_{ij} ($i = p$ e $j = p, n, \pi^\pm, K^\mp, K_L^0$) com a energia, obtidos na referência [30] (quebra do *Scaling* de Feynman). Na região de energia menor que 1 GeV o efeito do campo geomagnético é de fundamental importância no cálculo da razão, pois, a influência desse campo sobre os prótons e íons carregados positivamente é muito grande, enquanto que, ele não interfere no fluxo de nêutrons primários. Assim, a razão μ^+/μ^- decresce acentuadamente nessa região. Tanto os nossos cálculos como os de Lipari não levam em conta tal efeito, assim, nossas razões, como se pode ver na figura, ficam bem acima dos dados experimentais. Na região de energia acima de 500 GeV, nossos cálculos também se encontram bem acima dos dados experimentais. Isso se deve aos fatores Z para a produção de kaons, que influenciam bastante os fluxos de muons nessa região de energia e que apresentam uma grande flutuação de valores. Na segunda figura são mostrados além dos dados experimentais duas curvas que representam nossos cálculos, obtidos considerando o espectro primário usado por P. Lipari. A curva superior representa a razão calculada para $\theta = 75^\circ$ e a inferior para $\theta = 87^\circ$. Na figura aparece também uma terceira curva (linha

tracejada) representando a mesma razão, considerando a violação do *Scaling* de Feynman. Como se pode ver nas duas figuras, a introdução da quebra de *Scaling* de Feynman diminui a razão μ^+/μ^- .

A figura (3.17) mostra a razão entre as contribuições dos K^\pm e π^\pm sobre os fluxos muônicos ao nível do mar. Nossos resultados assumem os menores valores na região de energia mostrada na figura. Para 100 GeV, o fluxo de muons originado de kaons é cerca de 10% daquele originado dos pions. À medida que a energia cresce, a contribuição do decaimento dos kaons chega a cerca de 40%, para 100 TeV. Isso reflete o crescimento da produção de kaons a altas energias. Nosso resultado é comparado com aqueles de P. Lipari [31] e L.V. Volkova [35]. A baixas energias, o acordo entre eles é muito bom, entretanto, quando a energia cresce, a solução de Volkova torna-se maior que a dos outros. Esse efeito pode ser explicado pelo menor valor do índice de potência do espectro primário e maiores valores dos fatores hadrônicos para a produção de kaons usados pela autora.

Tabela 3.2: Fluxo diferencial de muons em ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{GeV}^{-1}$) ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_μ (GeV)	$\cos\theta$		
	1	0,6	0,4
10^0	$2,35 \cdot 10^{-3}$	$4,53 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$
10^1	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$6,88 \cdot 10^{-5}$	$3,89 \cdot 10^{-5}$
10^2	$2,62 \cdot 10^{-7}$	$2,96 \cdot 10^{-7}$	$3,04 \cdot 10^{-7}$
10^3	$1,20 \cdot 10^{-10}$	$1,79 \cdot 10^{-10}$	$2,38 \cdot 10^{-10}$
10^4	$2,89 \cdot 10^{-14}$	$4,68 \cdot 10^{-14}$	$6,78 \cdot 10^{-14}$
10^5	$5,90 \cdot 10^{-18}$	$9,73 \cdot 10^{-18}$	$1,43 \cdot 10^{-17}$
E_μ (GeV)	$\cos\theta$		
	0,2	0,1	0,05
10^0	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-6}$	$3,58 \cdot 10^{-7}$
10^1	$9,84 \cdot 10^{-6}$	$2,67 \cdot 10^{-6}$	$4,71 \cdot 10^{-7}$
10^2	$2,62 \cdot 10^{-7}$	$1,84 \cdot 10^{-7}$	$9,37 \cdot 10^{-8}$
10^3	$3,51 \cdot 10^{-10}$	$3,99 \cdot 10^{-10}$	$4,46 \cdot 10^{-10}$
10^4	$1,15 \cdot 10^{-13}$	$1,60 \cdot 10^{-13}$	$2,38 \cdot 10^{-13}$
10^5	$2,52 \cdot 10^{-17}$	$3,66 \cdot 10^{-17}$	$5,89 \cdot 10^{-17}$

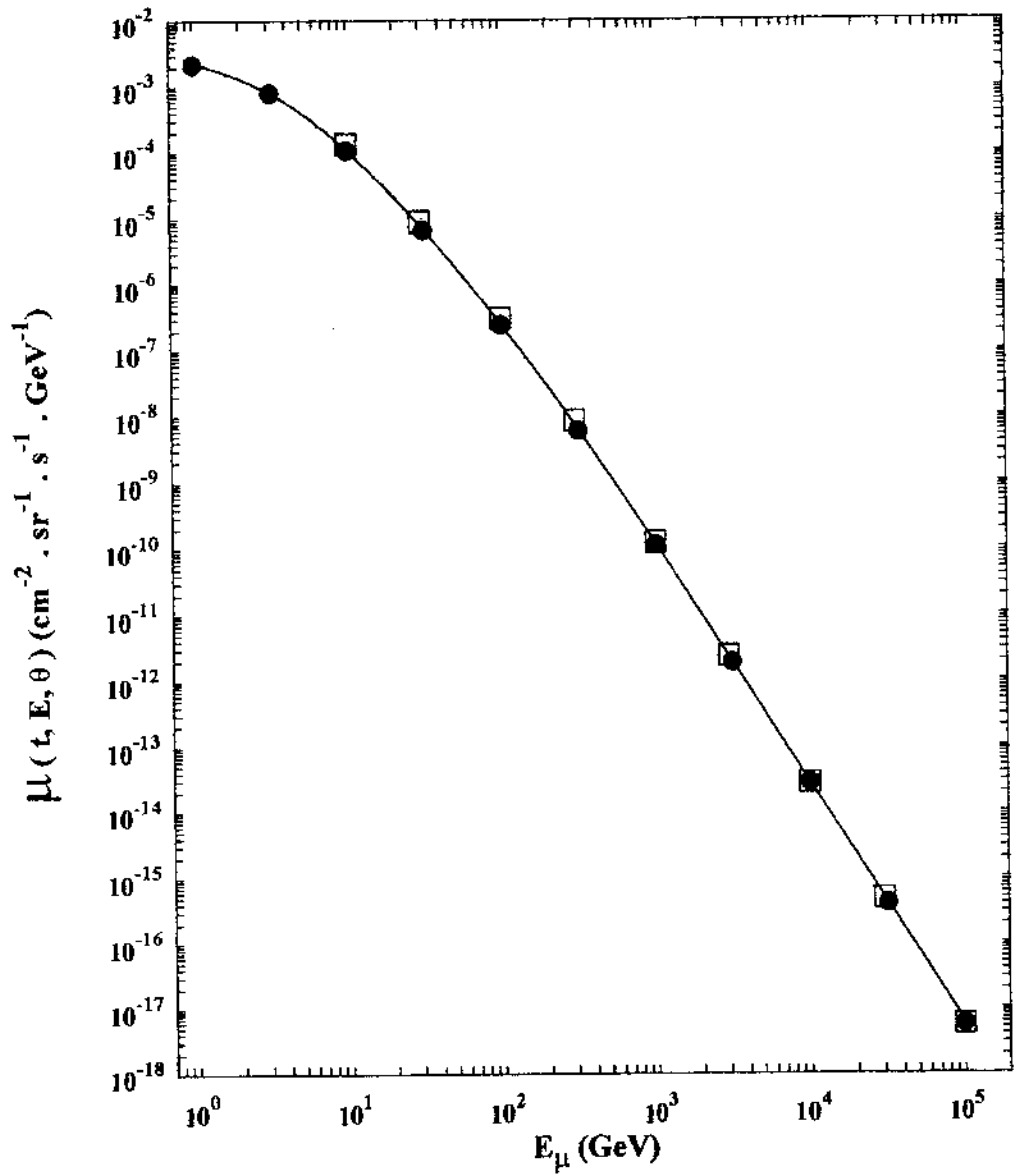


Figura 3.3: Fluxo vertical de muons ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos e os quadrados representam esse fluxo calculado nas referências [31] e [34], respectivamente.

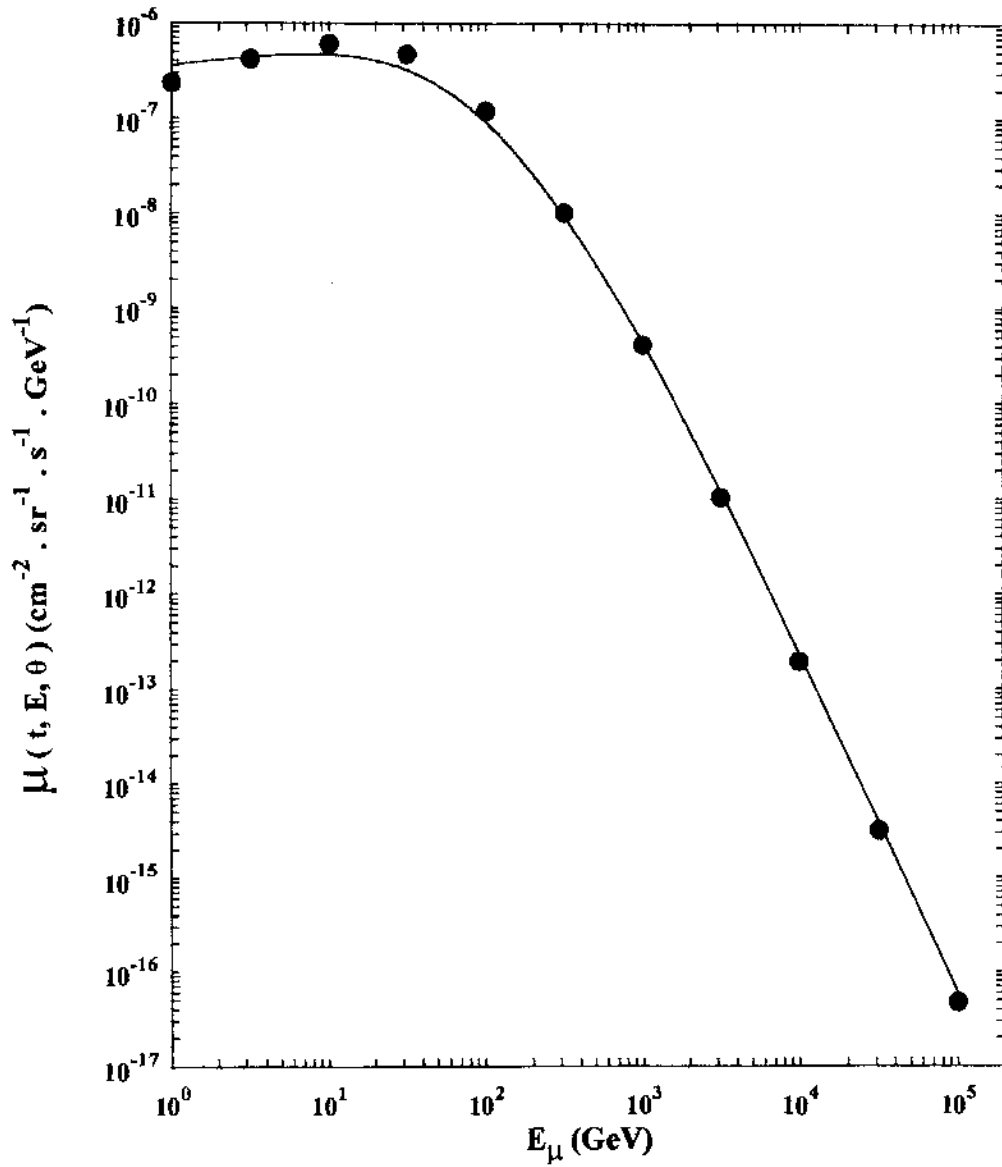


Figura 3.4: Fluxo horizontal de muons ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos representam esse fluxo calculado na referência [31].

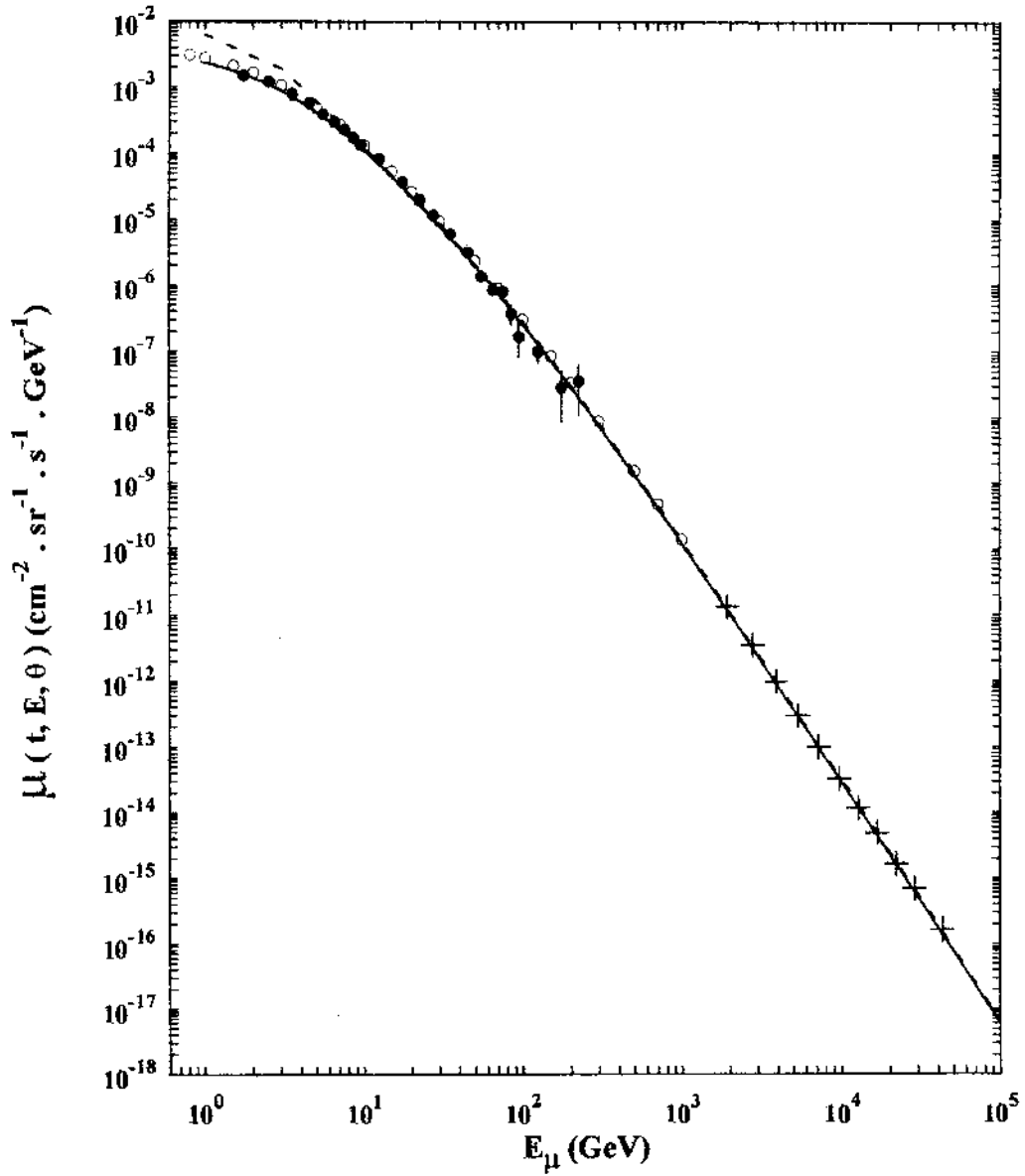


Figura 3.5: Fluxo vertical de muons ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos usando o espectro primário da referência [31] e a linha tracejada os mesmos cálculos, para o espectro primário usado na referência [37]. Os dados experimentais foram obtidos de S. Tsuji *et al.* [54] (círculos cheios), O.C. Allkofer *et al.* [55] (círculos vazios) e M. Aglietta *et al.* (LVD Collaboration) [56] (cruzes).

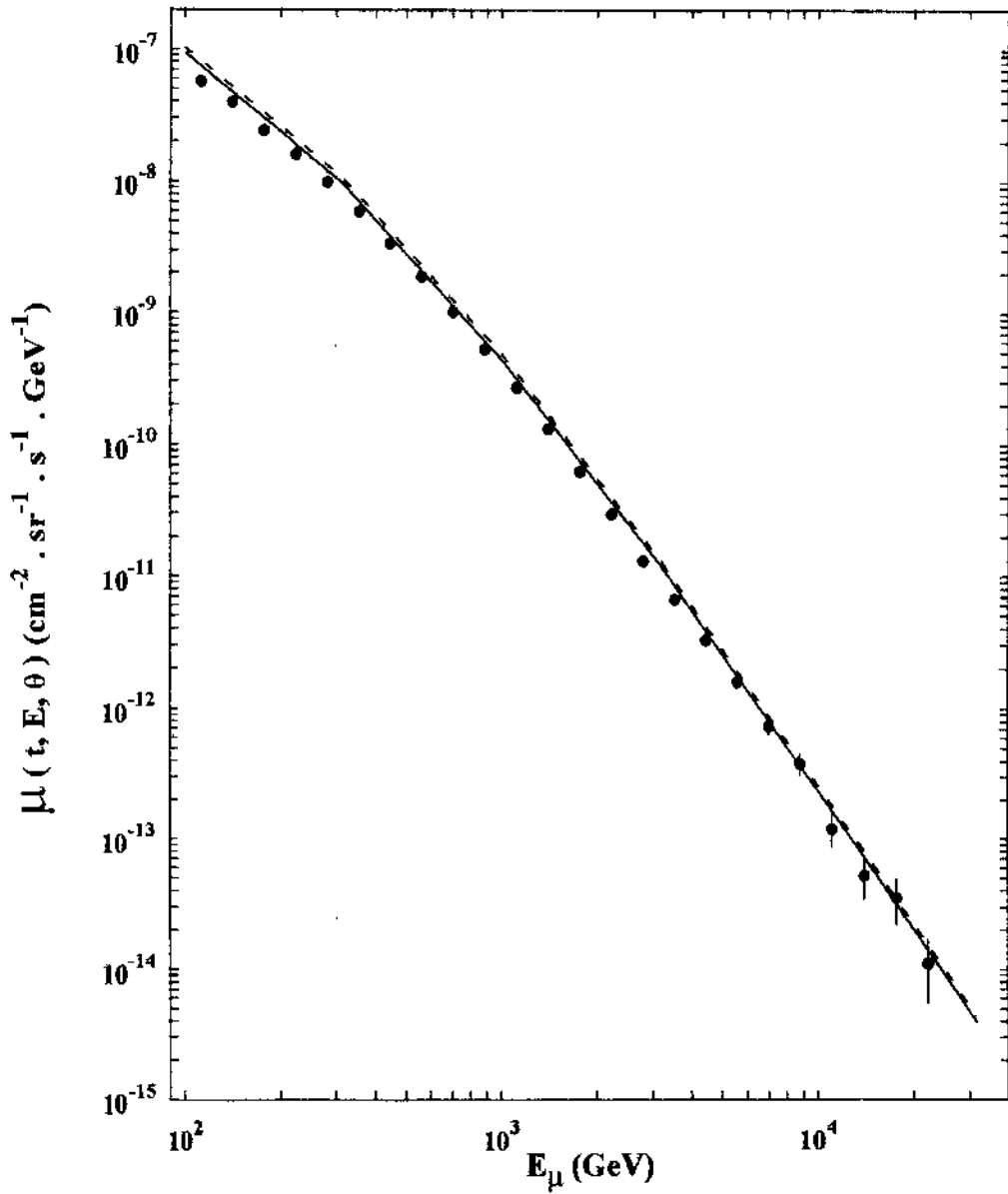


Figura 3.6: Idem da figura (3.5) para o fluxo horizontal de muons ao nível do mar. Os dados experimentais foram obtidos de S. Matsuno *et al.* (MUTRON) [57] (círculos).

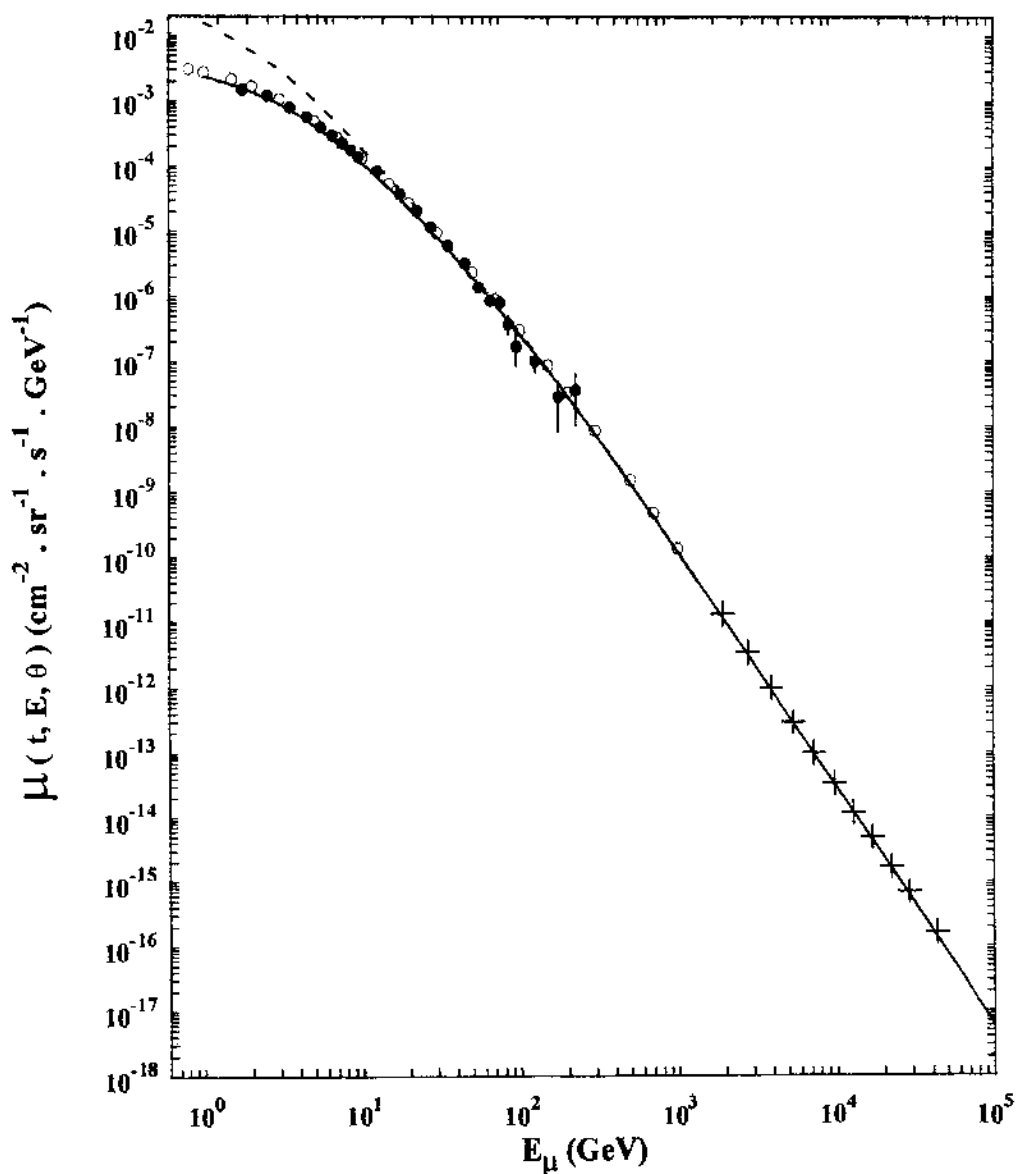


Figura 3.7: Influência dos efeitos da ionização e do decaimento dos muons sobre o fluxo vertical de muons, ao nível do mar. A linha cheia representa esses fluxos, incluindo os efeitos acima mencionados e a linha tracejada, sem a inclusão dos mesmos. Os dados experimentais foram obtidos de S. Tsuji *et al.* [54] (círculos cheios), O.C. Allkofer *et al.* [55] (círculos vazios) e M. Aglieta *et al.* (LVD Collaboration) [56] (cruzes).

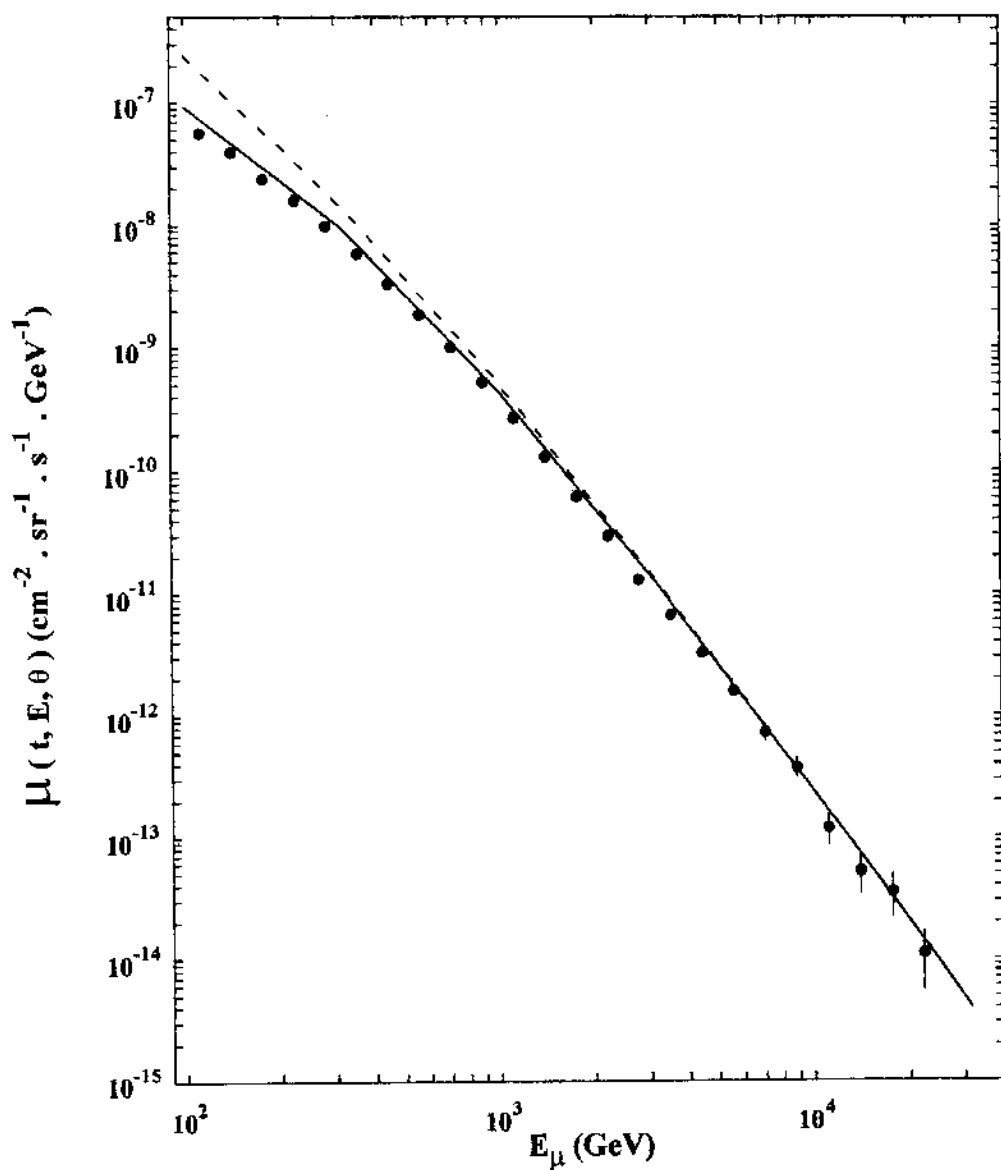


Figura 3.8: Idem da figura (3.7), para o fluxo horizontal de muons, ao nível do mar. Os dados experimentais foram obtidos de S. Matsuno *et. al.* (MUTRON) [57] (círculos).

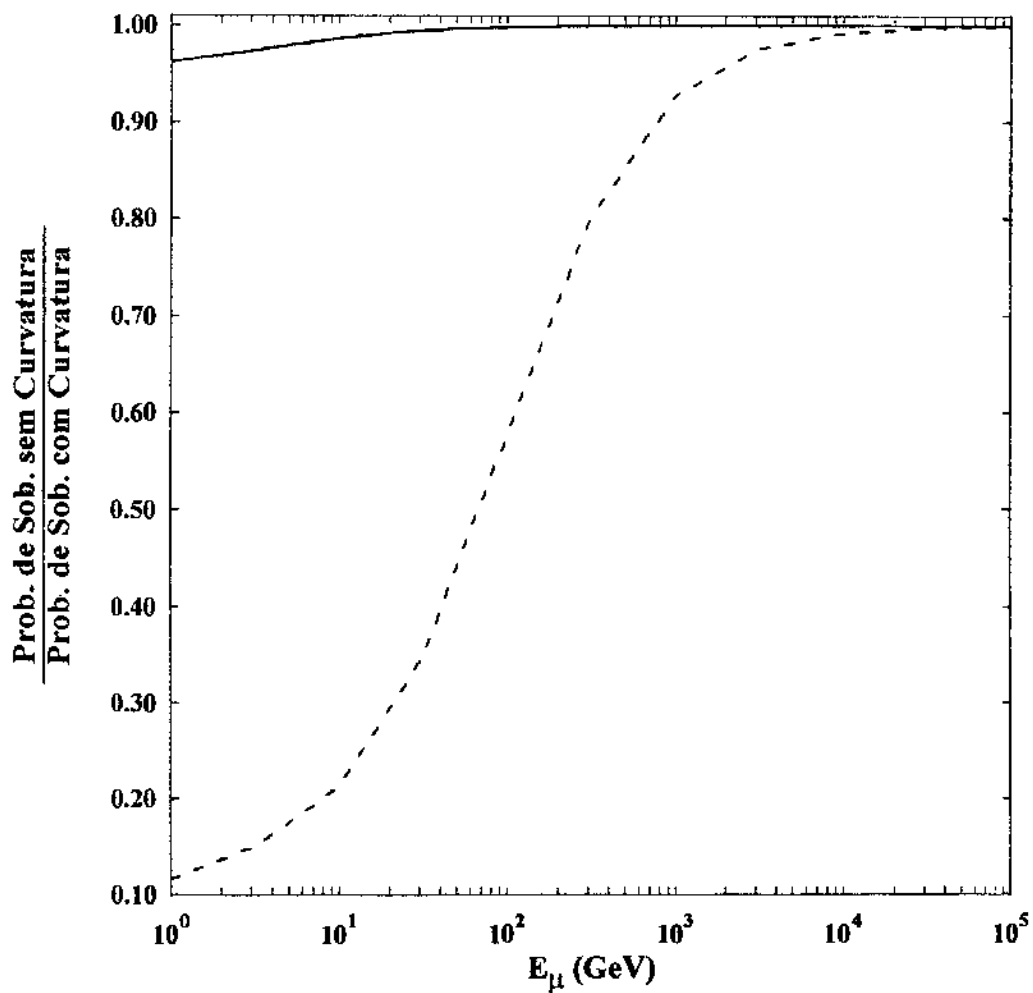


Figura 3.9: Razão, R , entre as probabilidades de sobrevivência dos muons, ao nível do mar, calculadas sem e com o efeito de curvatura da Terra. A linha cheia representa os cálculos para $\theta = 60^\circ$ e a linha tracejada para $\theta = 87^\circ$.

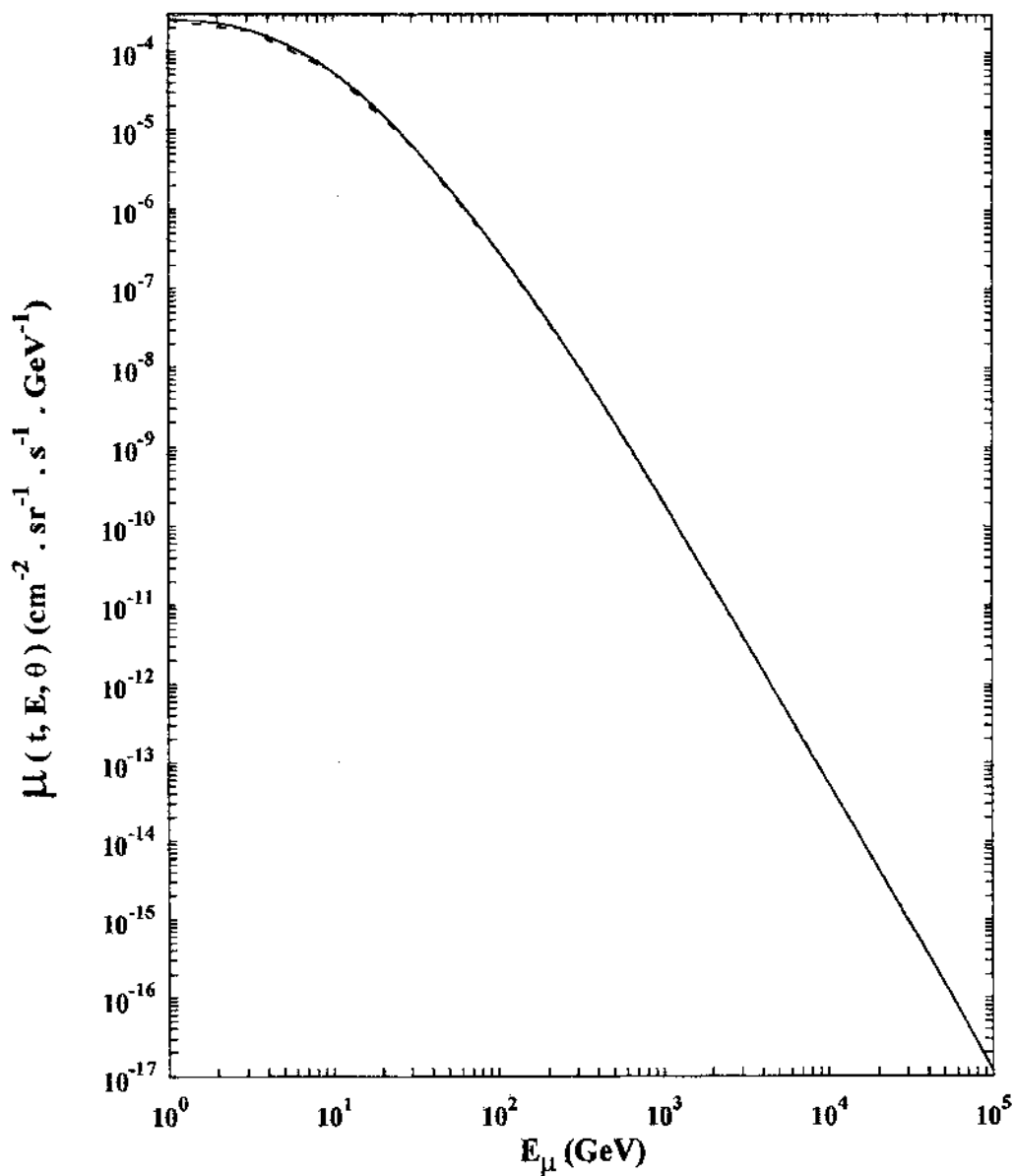


Figura 3.10: Influência da curvatura da Terra sobre o fluxo diferencial de muons ao nível do mar, para o ângulo zenital $\theta = 60^\circ$. A linha cheia representa os cálculos considerando este efeito e a tracejada sem considerá-lo.

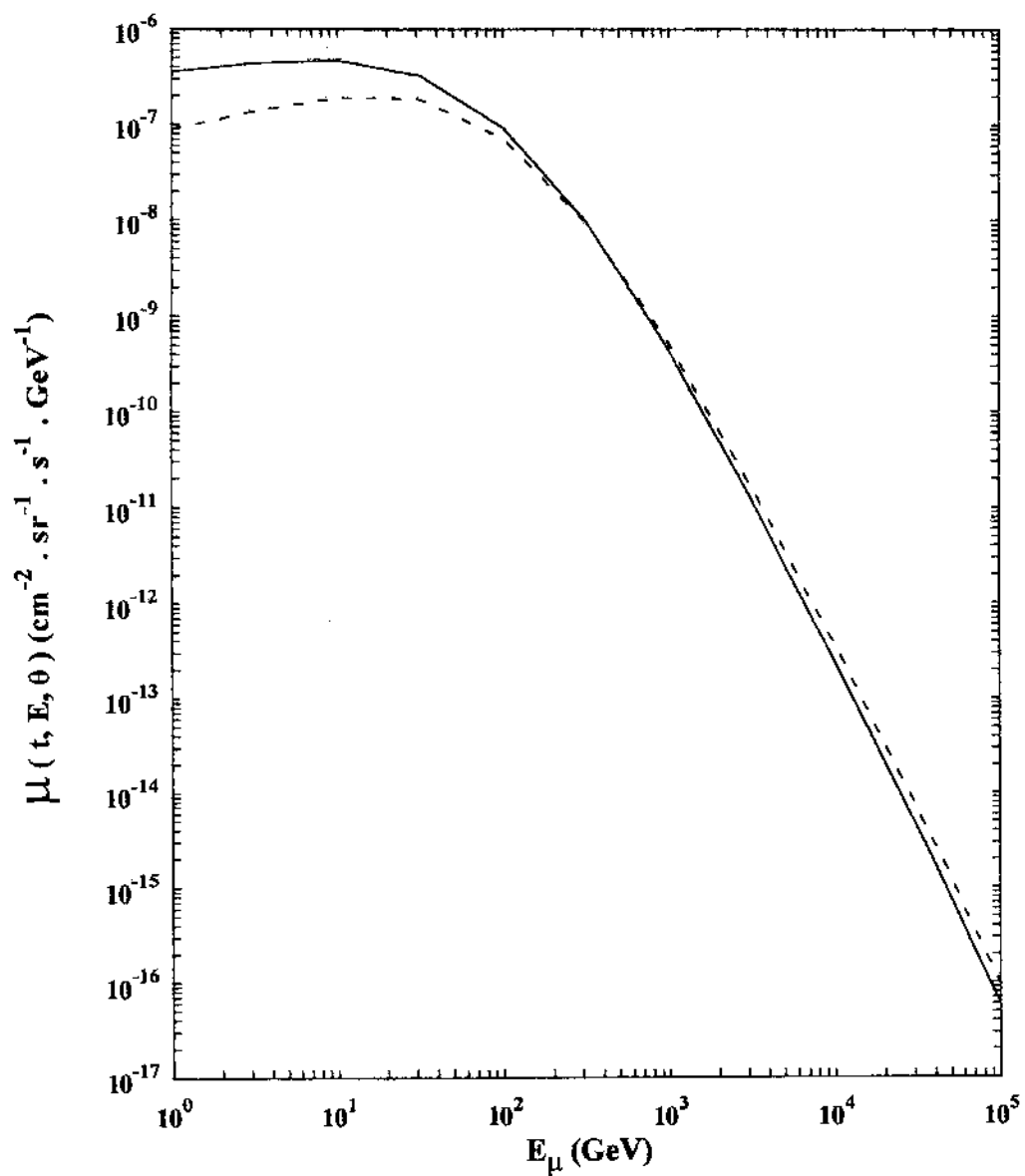


Figura 3.11: Idem da figura (3.10), para o fluxo horizontal de muons, ao nível do mar.

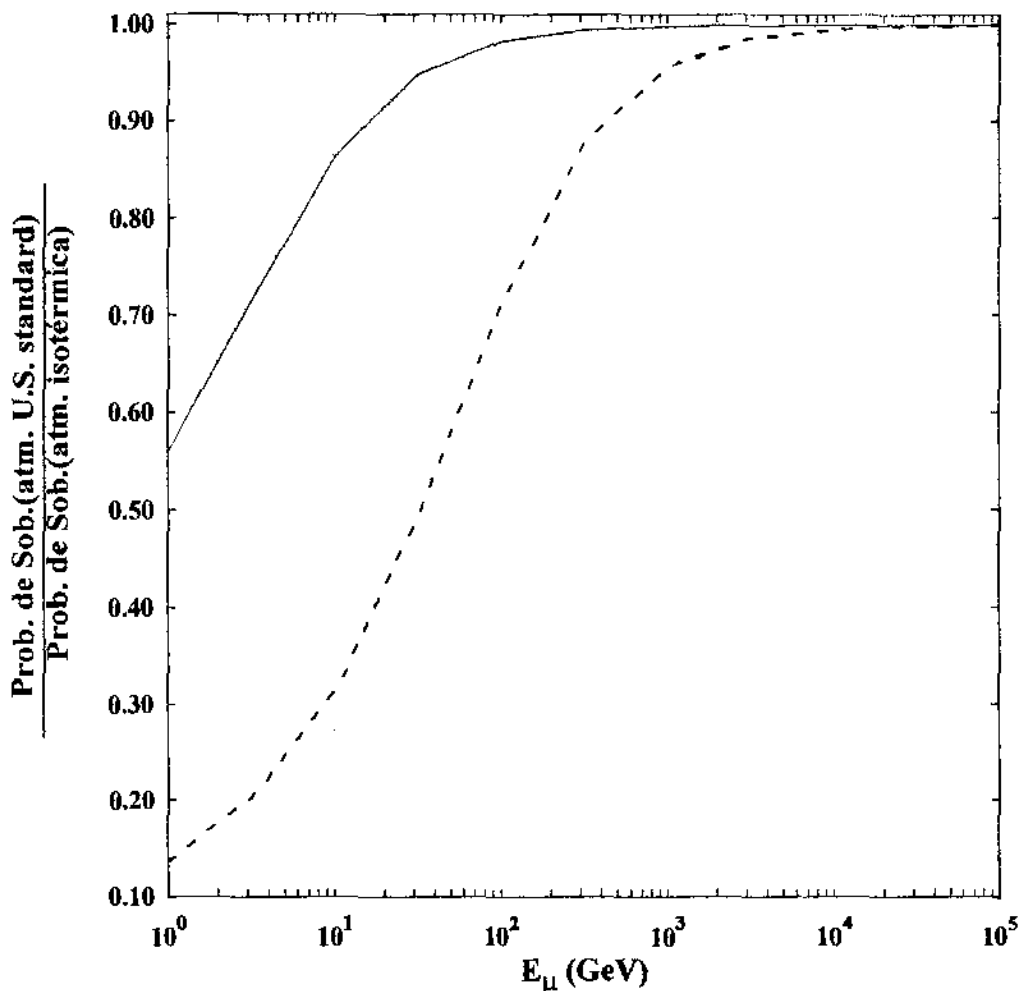


Figura 3.12: Razão, R , entre a probabilidade de sobrevivência dos muons ao nível do mar, calculada com o ajuste de K. Maeda [49], para atmosfera *U.S. standard* e a mesma probabilidade, calculada para uma atmosfera isotérmica). A linha cheia representa a razão para $\theta = 0^\circ$ e a linha tracejada para $\theta = 87^\circ$.

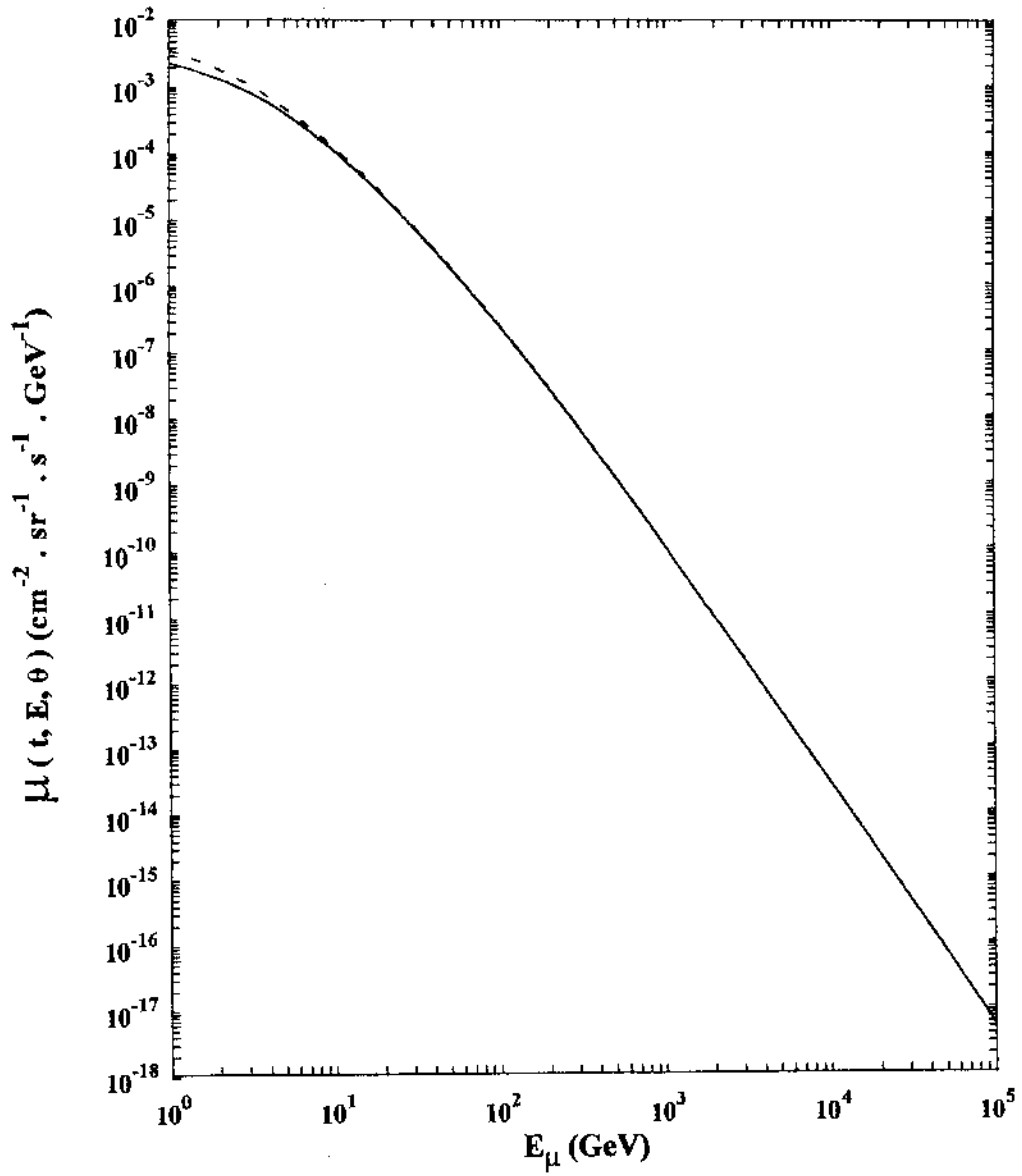


Figura 3.13: Comparação entre os fluxos verticais de muons ao nível do mar. A linha cheia representa estes fluxos considerando o ajuste de K. Maeda [49] e a linha tracejada representa os mesmos fluxos para uma atmosfera isotérmica.

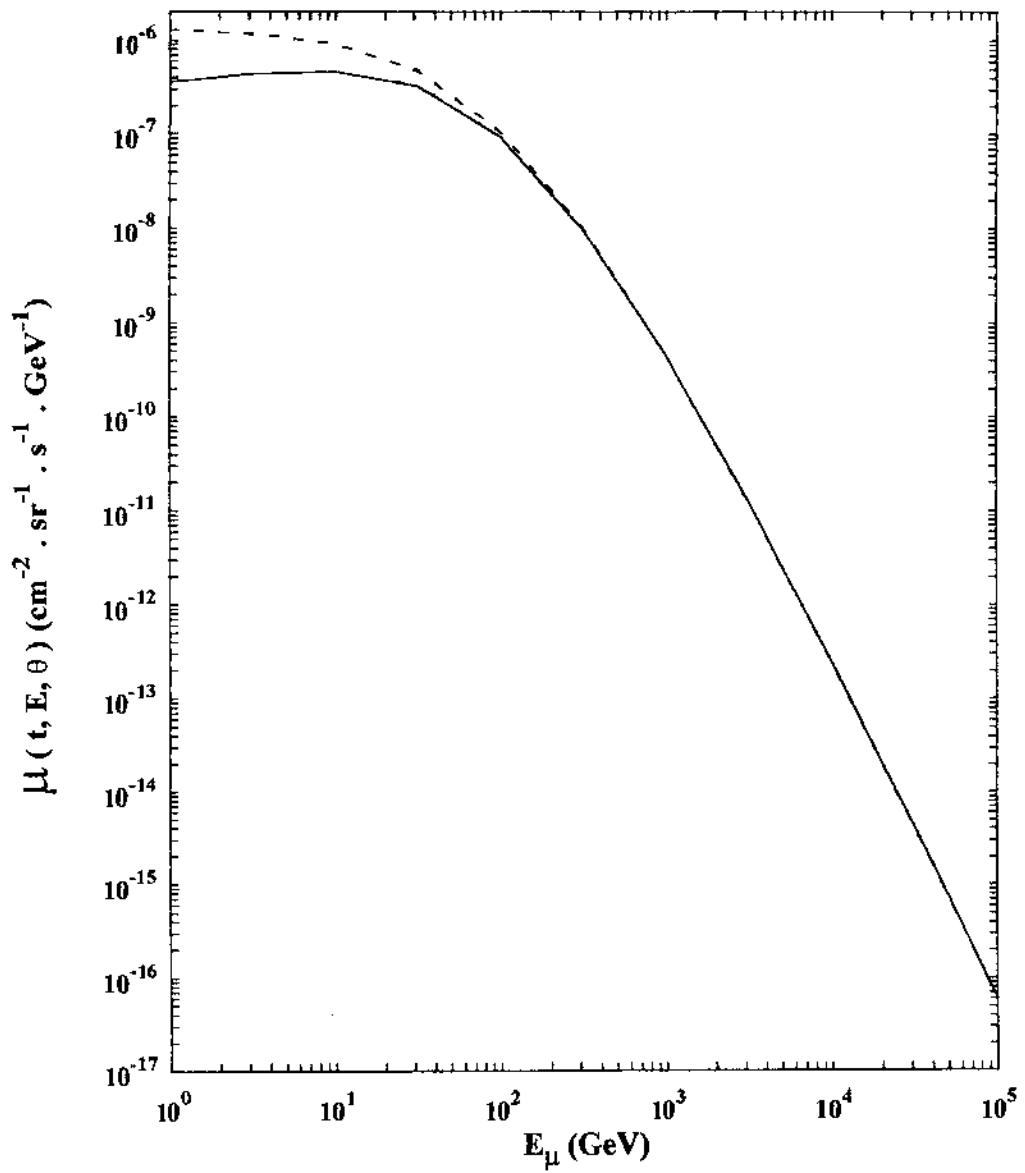


Figura 3.14: Idem a figura (3.13), para o fluxo horizontal de muons ao nível do mar.

Tabela 3.3: Razão μ^+/μ^- ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_μ (GeV)	$\cos\theta$					
	1	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05
10^0	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,30
10^1	1,31	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30
10^2	1,34	1,33	1,32	1,31	1,31	1,31
10^3	1,46	1,43	1,41	1,37	1,36	1,34
10^4	1,55	1,54	1,53	1,51	1,49	1,46
10^5	1,56	1,56	1,56	1,56	1,55	1,55

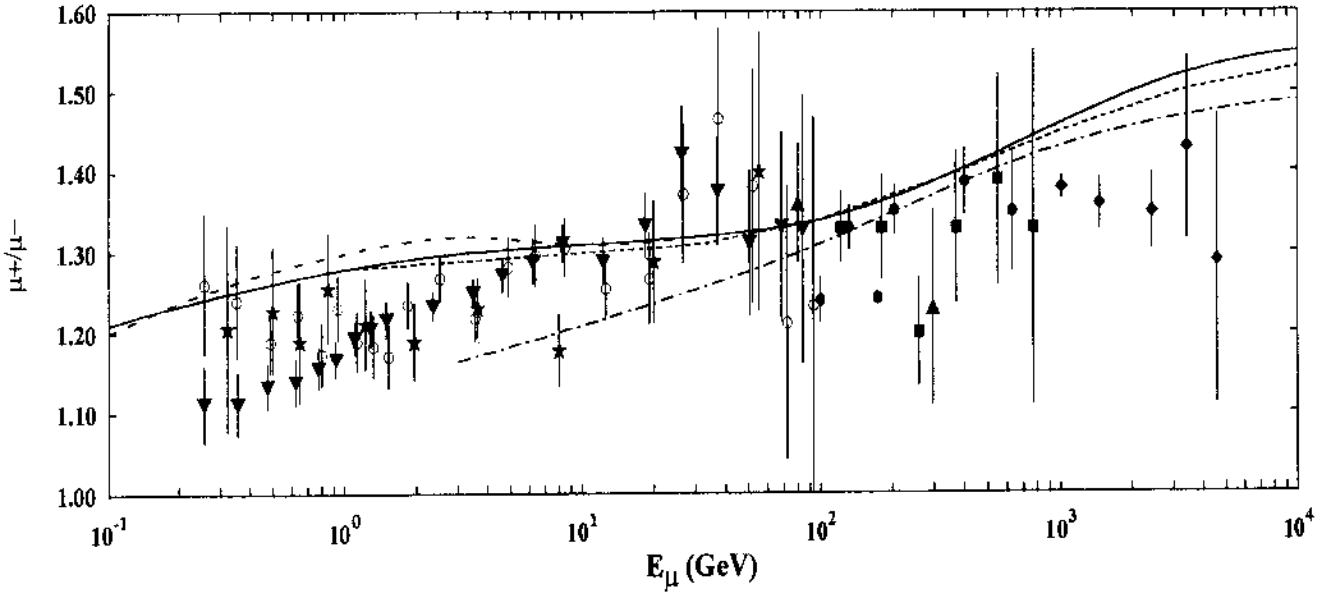


Figura 3.15: Razão, $R = \mu^+/\mu^-$ ao nível do mar, para $\theta = 0^0$. A linha cheia representa a razão por nós calculada com o espectro primário da referência [31], a linha tracejada a mesma razão com o espectro primário usado na referência [37], a linha pontilhada representa a razão obtida por P. Lipari [31] e a linha ponto-tracejada representa os nossos cálculos com quebra do *Scaling* de Feynman. Os pontos experimentais são obtidos em: CAPRICE-94 [58] (círculos claros), CAPRICE-97 [59] (triângulos invertidos), MASS-89 [60] (estrêlas), MARS [61] (círculos escuros), O.C. Alkofer *et al.* [62] (quadrados), J.M. Baxendale *et al.* [63] (triângulos) e G.K. Ashley II *et al.* [64] (losangos).

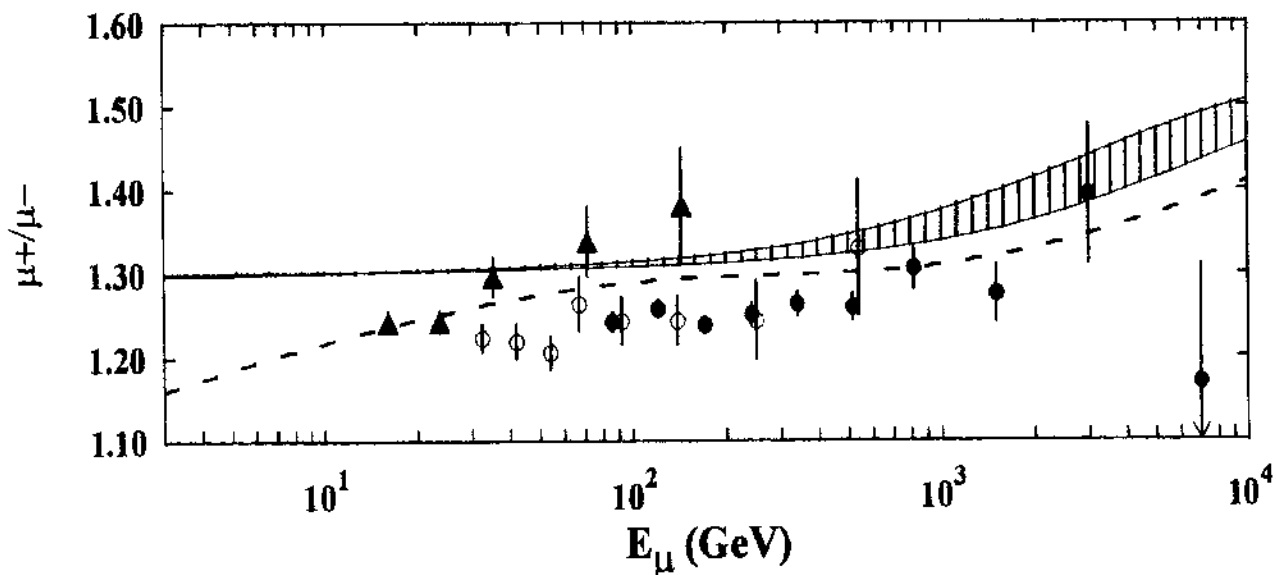


Figura 3.16: Razão, $R = \mu^+/\mu^-$ ao nível do mar, para $75^\circ \leq \theta \leq 87^\circ$. A região compreendida entre as linhas cheias representa a razão por nós calculada com o espectro primário da referência [31] e a linha tracejada representa os nossos cálculos com quebra do *Scaling* de Feynman. Os dados experimentais são de MUTRON [57] (círculos escuros, para $86^\circ \leq \theta \leq 89^\circ$), DEIS [65] (círculos claros, para $80^\circ \leq \theta \leq 88^\circ$) e Kiel-DESY [66] (triângulos, para $\theta = 75^\circ$).

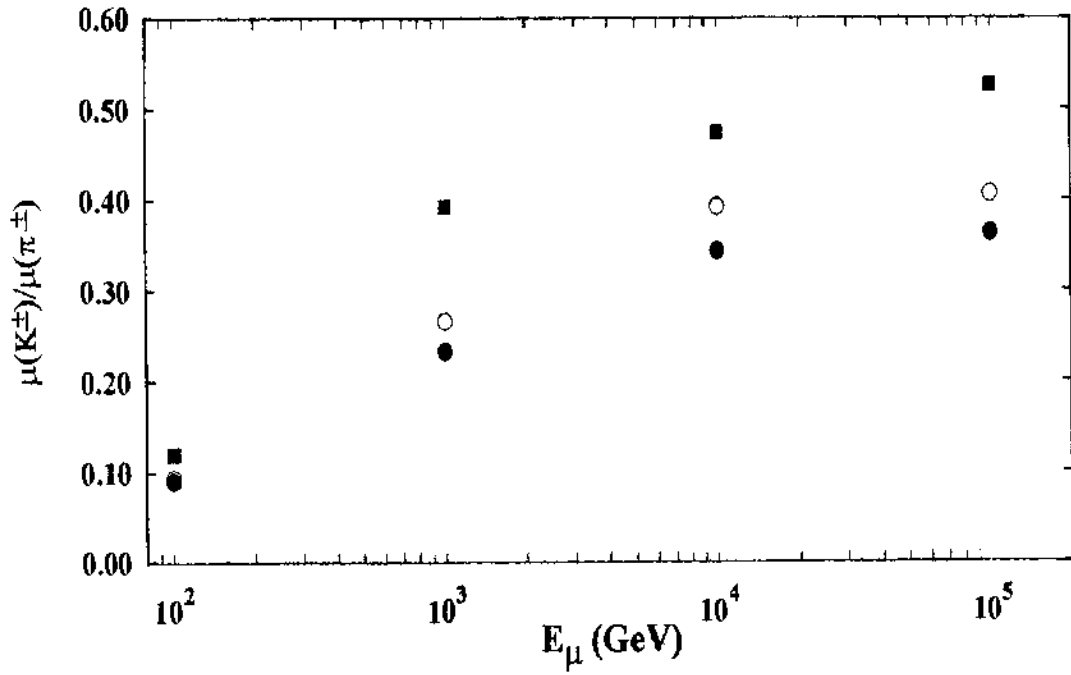


Figura 3.17: Razão entre as contribuições dos decaimentos do K^\pm e do π^\pm , para o fluxo vertical de muons ao nível do mar. Os círculos cheios representam a razão por nós calculada, os círculos vazios e os quadrados representam a mesma razão obtida por P. Lipari [31] e L.V. Volkova [35], respectivamente.

Capítulo 4

Neutrinos Atmosféricos

Neste capítulo será feita uma análise sistemática sobre a produção dos neutrinos atmosféricos bem como sobre a influência de diferentes fatores da Física de Raios Cósmicos sobre esses fluxos.

Os cálculos analíticos sobre os fluxos de neutrinos atmosféricos ainda são feitos em nossos dias, pois eles permitem o estudo da influência da produção dos mesons e do espectro primário sobre esses fluxos leptônicos de maneira direta.

As principais fontes de neutrinos atmosféricos na região de energia de $1 \text{ GeV} \leq E \leq 10 \text{ TeV}$ são:

a) Neutrinos Muônicos

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

$$K^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu) + \nu_e(\bar{\nu}_e)$$

b) Neutrinos Eletrônicos

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

$$K^\pm \longrightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$$

$$K_L^0 \longrightarrow \pi^\pm + e^\mp + \bar{\nu}_e(\nu_e)$$

Outras fontes de neutrinos não serão incluídas em nossos cálculos, pois influenciam muito pouco os fluxos de neutrinos, como por exemplo:

$$K^\pm \longrightarrow \pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (4\%)$$

$$K^\pm \longrightarrow \pi^\pm + \pi^0 \longrightarrow \pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (< 1\%)$$

$$K_S^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (< 0,5\%) \quad .$$

Serão obtidos os fluxos diferenciais dos neutrinos e antineutrinos, bem como as razões $\frac{\nu_\mu}{\bar{\nu}_\mu}$, $\frac{\nu_e}{\bar{\nu}_e}$ e $\frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ com o objetivo de se estudar a chamada “Anomalia dos Neutrinos Atmosféricos”, que é a diferença existente entre os resultados experimentais obtidos em Super-Kamiokande, IMB, Soudan-3, etc. e os cálculos analíticos e de simulação.

Os efeitos da polarização dos muons e da oscilação entre os diferentes sabores de neutrinos (ν_μ, ν_e, ν_τ) sobre os fluxos dos neutrinos atmosféricos são estudados e comparados com a distribuição zenital de neutrinos obtidos em Kamiokande [37].

4.1 Neutrinos Vindos dos Mesons

Os fluxos mesônicos são as fontes dos leptons na atmosfera via seus decaimentos “fracos”. Para os neutrinos não precisamos considerar as perdas de energia dessas partículas ao atravessar a atmosfera terrestre nem seus decaimentos. A equação diferencial que descreve a difusão dos neutrinos vindos dos mesons é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nu_j(t, E, \theta^*) = \sum_M F(M \rightarrow \nu_j) \quad (4.1)$$

com a condição de contorno

$$\nu_j(0, E, \theta^*) = 0 \quad . \quad (4.2)$$

O índice j especifica o tipo de neutrino (ou antineutrino) e a soma é feita sobre todos os mesons; $\nu_j(t, E, \theta^*)dE$ representa o fluxo diferencial de neutrinos ao longo da trajetória formando um ângulo θ^* com a vertical e com energia entre E e $E + dE$,

$$F(M \rightarrow \nu_j) = (BR)_M \int_{E_{min}}^{E_{max}} \frac{M(t, E_0, \theta^*)}{\lambda_{decay}^M(t, E_0, \theta^*)} f_{M \rightarrow \nu_j}(E, E_0) dE_0 \quad (4.3)$$

onde $(BR)_M$ representa o *branching ratio* para o decaimento $(M \rightarrow \nu_j)$, $M(t, E_0, \theta^*)$ correspondente aos fluxos de mesons dados pelas expressões (2.65) e (2.113).

As funções $f_{M \rightarrow \nu_j}(E, E_0)$ e os limites de integração são obtidos através da cinemática relativística para duas ou três partículas no estado final [44]. Essas funções que serão usadas em nossos cálculos estão tabeladas no apêndice C.

O fluxo de neutrinos vindo do decaimento direto dos mesons é:

$$\nu_j(t, E, \theta^*) = \int_0^t dt_0 \int_{E_{min}}^{E_{max}} (BR)_M \frac{M(t_0, E_0, \theta^*)}{\lambda_{decay}^M(t, E_0, \theta^*)} f_{M \rightarrow \nu_j}(E, E_0) dE_0 \quad . \quad (4.4)$$

4.2 Neutrinos Vindos do Decaimento dos Muons

Os neutrinos originados do decaimento dos muons são obtidos através da resolução da equação de difusão,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nu_j(t, E, \theta^*) = \int_E^\infty \frac{\mu_s^\pm(t, E_\mu, \theta^*)}{\lambda_{decay}^\mu(t, E_\mu, \theta^*)} f_{\mu_s^\pm \rightarrow \nu_j}(E, E_\mu) dE_\mu \quad (4.5)$$

com a condição inicial

$$\nu_j(0, E, \theta^*) = 0 \quad (4.6)$$

na qual o índice j significa o tipo de neutrino (ou antineutrino), eletrônico ou muônico, e o índice s diz respeito a helicidade do muon (*right-handed* e *left-handed*).

Os fluxos diferenciais dos muons são dados pelas equações (3.8) e as funções $f_{\mu_s^\pm \rightarrow \nu_j}(E, E_\mu)$ e os limites de integração são novamente encontrados nos Apêndices B e C e na referência [44]. Na função $f_{\mu_s^\pm \rightarrow \nu_j}$ há dois termos; um sem polarização e outro que inclui a polarização dos muons:

$$\nu_j(t, E, \theta^*) = \int_0^t dt \int_E^\infty \frac{\mu_s^\pm(t, E_\mu, \theta^*)}{\lambda_{decay}^\mu(t, E_\mu, \theta^*)} f_{\mu_s^\pm \rightarrow \nu_j}(E, E_\mu) dE_\mu \quad (4.7)$$

4.3 Oscilação de Neutrinos

O cálculo detalhado dos neutrinos atmosféricos é de extrema importância para obtermos as razões $\frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$, que escreveremos simplificadamente como $r = \left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)$, observadas por vários experimentos nos últimos 15 anos (Soudan [27], Frejus [25], IMB [22], Kamiokande [23, 24], etc.).

As razões $\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)$ eliminam várias incertezas que entram no cálculo do número de eventos do tipo muônico ou eletrônico, como por exemplo, efeitos geomagnéticos sobre os fluxos

primários, eficiência do detector, normalização dos fluxos da Radiação Cósmica Primária, etc.

Essas razões obtidas pelo detector de Kamiokande e posteriormente confirmadas pelos de Super-Kamiokande, são 60% menor que as calculadas via Monte Carlo. Outros experimentos confirmaram tais resultados. Na figura (4.1) são vistas as razões $R = \frac{(\frac{\nu_\mu}{\nu_e})_{data}}{(\frac{\nu_\mu}{\nu_e})_{MC}}$, para vários detectores de neutrinos, alguns já não mais em atividade (Nusex [26], Frejus [25]).

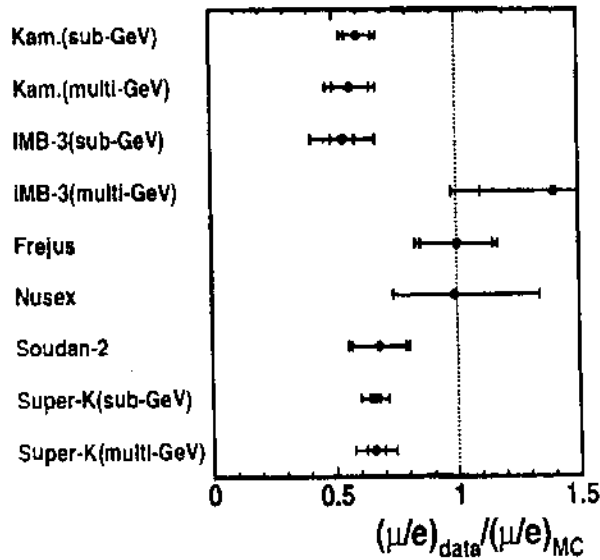


Figura 4.1: Razão, $R = \frac{(\frac{\mu}{e})_{data}}{(\frac{\mu}{e})_{MC}}$ para alguns Experimentos, onde μ e e significam eventos do tipo muônico e eletrônico, originados das interações $\nu_l(\bar{\nu}_l)N \longrightarrow l^\pm N'$, onde $l = \mu$ ou e . Adaptado da ref.[67].

Essa diferença, mostrada na figura, constitui a chamada Anomalia dos Neutrinos Atmosféricos. O estudo dessa anomalia pode ser de grande importância na Física de Partículas, pois ela pode ser interpretada em termos das oscilações entre os diferentes sabores de neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ), no intervalo de energia e comprimento de oscilação dos neutrinos não abrangido pelos aceleradores nem pelos neutrinos solares.

As oscilações entre os diferentes neutrinos ocorrem devido ao fato dos autoestados de sabores de neutrinos diferirem dos autoestados de massa, e assim ao percorrerem um meio os neutrinos podem mudar de sabor.

Para duas espécies de neutrino a relação entre esses autovetores são obtidas a partir de uma simples rotação [68, 67]

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde ϕ é o ângulo de mistura entre os neutrinos.

Em um cenário de três gerações de neutrinos, essa equação se transforma em:

$$\nu_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} \nu_i, \quad (4.9)$$

onde o índice grego indica os autoestados de sabores, enquanto que o índice latino, os autoestados de massa dos neutrinos e $U_{\alpha i}$ é a matriz que conecta os autovetores dessas duas bases.

As probabilidades de oscilações entre os neutrinos α e β em um cenário de duas gerações de neutrinos é:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = \sin^2 2\phi \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E_\nu} \right), \quad (4.10)$$

onde Δm^2 é a diferença do quadrado das massas entre dois autoestados de neutrinos, L é a distância da fonte ao detector e E_ν é a energia do neutrino.

As expressões dessas probabilidades quando se consideram três espécies de neutrinos são mais complicadas, mas no caso de considerarmos somente as *leading-oscillations* [28] (isto é, oscilações associadas com as maiores diferenças de massa), elas podem ser colocadas na

forma:

$$P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) = 4|U_{\alpha 3}|^2|U_{\beta 3}|^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E\nu} \right) ; \alpha \neq \beta . \quad (4.11)$$

Nas expressões (4.10) e (4.11) desprezamos a violação de CP.

Como as *leading-oscillations* de neutrinos e antineutrinos são idênticas, a diferença entre o número de eventos do tipo ν_α e $\bar{\nu}_\alpha$ é devida a normalização dos fluxos e das diferenças entre as seções de choque dessas partículas no detector.

Para examinar os efeitos das oscilações entre os neutrinos, se considera a expressão extremamente simples, desenvolvida por J.G. Learned, S. Parkvasa e T.J. Weiler [28]

$$R_0 = \left(\frac{P_{\mu\mu} + r_0 P_{e\mu}}{P_{ee} + \frac{1}{r_0} P_{\mu e}} \right) \frac{1}{r_0} , \quad (4.12)$$

onde P são as probabilidades de oscilação entre as duas espécies de neutrinos e $r_0 = \nu_e/\nu_\mu$, que é a razão entre os fluxos desses neutrinos na produção.

Para comparar com os dados dos Experimentos Kamiokande-II e III [24] e Super-Kamiokande [69], essa expressão deve ser modificada para

$$R = N_\mu/N_e , \quad (4.13)$$

onde N_μ e N_e são os números de eventos do tipo muônico e eletrônico, respectivamente.

Esses números de eventos podem ser escritos como,

$$\begin{aligned} N_\mu = & \int_E \nu_\mu(t, E, \theta^*) P_{\mu\mu} \sigma_\mu dE + \int_E \bar{\nu}_\mu(t, E, \theta^*) P_{\bar{\mu}\bar{\mu}} \sigma_{\bar{\mu}} dE + \\ & + \int_E \nu_e(t, E, \theta^*) P_{e\mu} \sigma_\mu dE + \int_E \bar{\nu}_e(t, E, \theta^*) P_{\bar{e}\bar{\mu}} \sigma_{\bar{\mu}} dE \end{aligned} \quad (4.14)$$

e

$$N_e = \int_E \nu_e(t, E, \theta^*) P_{ee} \sigma_e dE + \int_E \bar{\nu}_e(t, E, \theta^*) P_{\bar{e}\bar{e}} \sigma_{\bar{e}} dE +$$

$$+ \int_E \nu_\mu(t, E, \theta^*) P_{\mu e} \sigma_e dE + \int_E \bar{\nu}_\mu(t, E, \theta^*) P_{\bar{\mu} e} \sigma_{\bar{e}} dE \quad , \quad (4.15)$$

onde os ν e $\bar{\nu}$ são os fluxos dos neutrinos e antineutrinos atmosféricos e σ são as seções de choque de corrente carregada (CC) dos neutrinos e antineutrinos, com o material do detector.

As correntes neutras contribuem nesses detectores com 5% do total para o ν_e e 2% para os ν_μ [24], sendo assim elas não serão consideradas em nossos cálculos.

Na região de energia, $200 \text{ MeV} \leq E_\nu \leq 10 \text{ GeV}$ os efeitos dos ν_τ sobre os números de eventos muônicos ou eletrônicos podem ser desprezados, pois, tanto os fluxos como as seções de choque CC desses neutrinos são muito pequenas, como referenciados por A. Acker, J.G. Learned e S. Parkvasa [70].

Neste trabalho, como nosso objetivo principal é simplesmente mostrar que as oscilações entre os neutrinos podem ser uma explicação para a Anomalia dos Neutrinos Atmosféricos, vamos utilizar as probabilidades de oscilação sugeridas pelos autores acima.

$$P_{ee} = \sum_{i=1}^3 |U_{ei}|^4 = 1/3 \quad , \quad (4.16)$$

$$P_{\mu\mu} = \sum_{i=1}^3 |U_{i\mu}|^4 = 1/2 \quad , \quad (4.17)$$

$$P_{\mu e} = \sum_{i=1}^3 |U_{ei} U_{\mu i}|^2 = 1/3 \quad . \quad (4.18)$$

Embora as seções de choque CC tenham diferentes dependências da energia, vamos usar as relações encontradas por A.K. Mann [71], $\sigma_\mu \approx \sigma_e$ e $\sigma_{\bar{\mu}} \approx \sigma_{\bar{e}}$ para $E_\nu > 200 \text{ MeV}$.

Também faremos uma aproximação que simplifica a análise dos dados de Kamiokande-II e III, na região de energia $E_{\nu_e} > 1,33 \text{ GeV}$ e $E_{\nu_\mu} > 1,5 \text{ GeV}$ (Multi-GeV), que é $\sigma_{\bar{\mu}}/\sigma_\mu \approx \sigma_{\bar{e}}/\sigma_e = 0,43$, usada pelo autor acima.

Usando esses valores das $P_{\alpha\beta}$ e das seções de choque CC para os diferentes neutrinos, é possível calcular o número de eventos do tipo muônico e do tipo eletrônico, na presença

ou na ausência da oscilação. A razão $R = \left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)$ considerando oscilações entre diferentes sabores de neutrinos, fica

$$R = \frac{\frac{1}{2} (\int_E \nu_\mu dE + 0,43 \int_E \bar{\nu}_\mu dE) + \frac{1}{3} (\int_E \nu_e dE + 0,43 \int_E \bar{\nu}_e dE)}{\frac{1}{3} (\int_E \nu_e dE + 0,43 \int_E \bar{\nu}_e dE) + \frac{1}{3} (\int_E \nu_\mu dE + 0,43 \int_E \bar{\nu}_\mu dE)} \quad (4.19)$$

e na ausência de oscilações, essa razão toma a forma

$$r = \frac{\int_E \nu_\mu dE + 0,43 \int_E \bar{\nu}_\mu dE}{\int_E \nu_e dE + 0,43 \int_E \bar{\nu}_e dE} \quad (4.20)$$

Usando essas duas expressões acima, é possível avaliar os efeitos da polarização dos muons e das oscilações dos neutrinos sobre essas razões. Também é possível comparar nossos resultados com os dados obtidos na região Multi-GeV de Kamiokande-II e III.

É importante salientar que tanto para Kamiokande, como para IMB, o espectro de energia dos neutrinos *upward* e *downward*, são praticamente iguais para energias acima de 1 GeV [17]. Isso se deve principalmente ao fato de que nessa região de energia e nas latitudes onde se localizam estes experimentos, os efeitos do campo geomagnético sobre a Radiação Cósmica Primária podem ser desprezados, como já mencionado anteriormente. Assim sendo, os fluxos de neutrinos ν_e e ν_μ usados nas duas expressões acima, referem-se as duas direções de chegada dos neutrinos no detector (*upward* e *downward*).

4.4 Resultados Numéricos

Usando os resultados analíticos dos capítulos anteriores, pode-se calcular facilmente os fluxos dos neutrinos e antineutrinos muônicos, bem como, dos neutrinos e antineutrinos eletrônicos. Para obter numericamente esses fluxos, vamos usar os mesmos parâmetros e distribuições adotados no Capítulo 3. Esses fluxos diferenciais são mostrados nas tabelas (4.1) e (4.2), em função da energia e para diferentes ângulos zenitais. Na tabela (4.1) aparecem a soma dos fluxos dos neutrinos muônicos e antineutrinos muônicos na região de energia de 1 até 10^5 GeV, em função do co-seno do ângulo zenital θ . Na tabela (4.2) aparecem a soma dos fluxos dos neutrinos eletrônicos e antineutrinos eletrônicos na mesma região de energia e para os mesmos ângulos zenitais da tabela anterior.

As figuras (4.2) e (4.4) representam os fluxos diferenciais, para $\theta = 0^\circ$, dos $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)$ e $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$, respectivamente. Nessas figuras aparecem também cálculos analíticos feitos por P. Lipari [31] (círculos escuros), K. Mitsu *et al.* [33] (triângulos escuros) e por A.V. Butkevich *et al.* [34] (quadrados). As figuras (4.3) e (4.5) representam os mesmos fluxos acima, para $\theta = 87^\circ$, sendo que os quadrados referem-se aos cálculos de L.V. Volkova [35]. Nossos cálculos foram feitos considerando o decaimento, a perda de energia por ionização e também a polarização dos muons. Os efeitos da curvatura da Terra sobre os diferentes fluxos de neutrinos foram calculados considerando uma correção média através da utilização do co-seno efetivo. A concordância entre nossos resultados e os dos autores acima mencionados é em geral muito boa (em torno de 90%).

As tabelas (4.3) e (4.4) representam as distribuições zenitais das razões $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ e $\nu_e/\bar{\nu}_e$ ao nível do mar, respectivamente. As figuras (4.6) e (4.7) descrevem o comportamento

dessas razões, para $\theta = 0^\circ$ e 87° , respectivamente. Nas figuras aparecem também, as razões calculadas por P. Lipari [31]. A discrepância entre ambas não ultrapassa 3%, mostrando que no cálculo dessas razões, as incertezas nos fluxos da RCP e nos fatores hadrônicos e também no co-seno efetivo que mede a curvatura da Terra, são canceladas.

A figura (4.8) mostra a contribuição fracional das diferentes fontes sobre o fluxo de neutrinos muônicos, para $\theta = 0^\circ$ e 87° . A baixas energias, as principais fontes são os π^\pm e μ^\pm , porém, para $\theta = 0^\circ$, os K^\pm se tornam preponderantes na produção dos $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$, acima de 100 GeV e para $\theta = 87^\circ$, acima de 800 GeV.

A figura (4.9) mostra a contribuição fracional das diferentes fontes sobre o fluxo de neutrinos eletrônicos, para $\theta = 0^\circ$ e 87° . A baixas energias, a principal fonte são os μ^\pm . Para $\theta = 0^\circ$, os kaons se tornam preponderantes na produção dos $\nu_e(\bar{\nu}_e)$, para $E \approx 30$ GeV e para $\theta = 87^\circ$, acima de ≈ 500 GeV.

A tabela (4.5) representa a distribuição zenital da razão $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ ao nível do mar, em função da energia.

A figura (4.10) mostra o comportamento da razão $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ no intervalo de energia entre 1 e 10 GeV (região concernente aos dados experimentais de Kamiokande, Super-Kamiokande, IMB, etc.), para $\theta = 0^\circ, 60^\circ$ e 87° . Nessa figura, aparecem duas curvas que representam o cálculo da razão R , considerando ou não a polarização dos muons (linha cheia e tracejada, respectivamente). Aparece também uma terceira curva (linha pontilhada) que representa essa mesma razão considerando além da polarização dos muons as oscilações entre os diferentes sabores de neutrinos. Como se pode ver nas figuras o comportamento das razões é o mesmo para qualquer ângulo zenital. À medida que a energia aumenta as razões calculadas sem considerar as oscilações de neutrinos aumentam, porém, quando se introduz as oscilações

essa razão fica praticamente a mesma.

Na figura (4.11) são mostradas as razões $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$, para diferentes ângulos zenitais, calculadas considerando três casos:

- a) sem polarização dos muons (linha tracejada);
- b) com polarização dos muons (linha cheia);
- c) com polarização dos muons e oscilação dos neutrinos (linha pontilhada).

Na figura aparecem, também, os dados de Kamiokande e Super-Kamiokande (na região de multi-GeV). Nessa figura os triângulos e os triângulos invertidos representam as razões acima mencionadas para os neutrinos *upward* e *downward*, respectivamente. Os limiares de energia para os detectores são respectivamente 3,0 GeV e 6,0 GeV. Para $\cos\theta = \pm 0,8$, a diferença *up/down* é muito grande, evidenciando uma dependência do ângulo zenital na razão, que não pode ser explicada pelo cálculo dos fluxos dos neutrinos atmosféricos, pois, nessa região os efeitos do campo geomagnético são desprezíveis. Assim, os fluxos de neutrinos *up* e *down* para $E_\nu > 3,0$ GeV devem ser iguais, o que não é verificado experimentalmente.

Três elementos são necessários para calcular a taxa dos muons induzidos por neutrinos:

- a) o fluxo de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$;
- b) as seções de choque de produção dos muons pelos neutrinos;
- c) a relação alcance-energia dos muons (na rocha ou na água).

Assim, o número de *upward going* muons é dado por:

$$N_\mu(\leq E_{\mu_{min}}) = \int_{E_{\mu_{min}}}^{\infty} dE_\nu (\nu_\mu(E, t, \theta) + \bar{\nu}_\mu(E, t, \theta)) P_\nu(E_\nu > E_{\mu_{min}}) \quad (4.21)$$

onde, P_ν depende da física da interação dos neutrinos e da propagação do muon no meio, mas é independente do fluxo de neutrinos. A variação de P_ν com a energia, usada em nossos

cálculos, é a mesma adotada por T.K. Gaisser [17].

A figura (4.12) representa a distribuição zenital dos fluxos de *upward going* muons obtidos experimentalmente em Kamiokande, IMB e Super-Kamiokande. Os limiares de energia desses detectores, para esses eventos, são mostrados na figura. As linhas cheias representam nossos cálculos sem considerar as oscilações de neutrinos, enquanto que as linhas tracejadas, representam esses fluxos considerando oscilação. Como se pode ver na figura, os dados experimentais são melhor explicados quando se consideram oscilações de neutrinos. Isso se deve ao fato de que nessa região de energia ($E \leq 2,0$ GeV) a dependência zenital dos fluxos de *upward going* neutrinos é muito pequena, devido ao fato do efeito do campo geomagnético ser desprezível.

Tabela 4.1: Fluxo diferencial de neutrinos muônicos em ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{GeV}^{-1}$) ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_ν (GeV)	$\cos\theta$		
	1	0,6	0,4
10^0	$3,79 \cdot 10^{-2}$	$4,30 \cdot 10^{-2}$	$4,64 \cdot 10^{-2}$
10^1	$4,57 \cdot 10^{-5}$	$5,40 \cdot 10^{-5}$	$6,18 \cdot 10^{-5}$
10^2	$4,11 \cdot 10^{-8}$	$5,09 \cdot 10^{-8}$	$5,98 \cdot 10^{-8}$
10^3	$2,57 \cdot 10^{-11}$	$3,49 \cdot 10^{-11}$	$4,31 \cdot 10^{-11}$
10^4	$7,72 \cdot 10^{-15}$	$1,23 \cdot 10^{-14}$	$1,74 \cdot 10^{-14}$
10^5	$1,63 \cdot 10^{-18}$	$2,69 \cdot 10^{-18}$	$3,96 \cdot 10^{-18}$
E_ν (GeV)	$\cos\theta$		
	0,2	0,1	0,05
10^0	$4,99 \cdot 10^{-2}$	$5,05 \cdot 10^{-2}$	$4,93 \cdot 10^{-2}$
10^1	$7,56 \cdot 10^{-5}$	$8,55 \cdot 10^{-5}$	$9,05 \cdot 10^{-5}$
10^2	$7,55 \cdot 10^{-8}$	$8,85 \cdot 10^{-8}$	$9,75 \cdot 10^{-8}$
10^3	$5,77 \cdot 10^{-11}$	$7,00 \cdot 10^{-11}$	$7,87 \cdot 10^{-11}$
10^4	$2,85 \cdot 10^{-14}$	$4,31 \cdot 10^{-14}$	$4,70 \cdot 10^{-14}$
10^5	$7,09 \cdot 10^{-18}$	$1,17 \cdot 10^{-17}$	$1,36 \cdot 10^{-17}$

Tabela 4.2: Fluxo diferencial de neutrinos eletrônicos em ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{GeV}^{-1}$) ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_ν (GeV)	$\cos\theta$		
	1	0,6	0,4
10^0	$1,35 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$	$2,06 \cdot 10^{-2}$
10^1	$6,98 \cdot 10^{-6}$	$1,17 \cdot 10^{-5}$	$1,68 \cdot 10^{-5}$
10^2	$2,61 \cdot 10^{-9}$	$3,88 \cdot 10^{-9}$	$5,51 \cdot 10^{-9}$
10^3	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,57 \cdot 10^{-12}$	$2,11 \cdot 10^{-12}$
10^4	$2,57 \cdot 10^{-16}$	$4,18 \cdot 10^{-16}$	$6,07 \cdot 10^{-16}$
10^5	$5,26 \cdot 10^{-20}$	$8,71 \cdot 10^{-20}$	$1,29 \cdot 10^{-19}$
E_ν (GeV)	$\cos\theta$		
	0,2	0,1	0,05
10^0	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$2,68 \cdot 10^{-2}$	$2,57 \cdot 10^{-2}$
10^1	$2,98 \cdot 10^{-5}$	$3,84 \cdot 10^{-5}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$
10^2	$1,09 \cdot 10^{-8}$	$1,68 \cdot 10^{-8}$	$2,17 \cdot 10^{-8}$
10^3	$3,62 \cdot 10^{-12}$	$4,99 \cdot 10^{-12}$	$6,16 \cdot 10^{-12}$
10^4	$1,16 \cdot 10^{-15}$	$1,68 \cdot 10^{-15}$	$2,10 \cdot 10^{-15}$
10^5	$2,55 \cdot 10^{-19}$	$3,86 \cdot 10^{-19}$	$4,98 \cdot 10^{-19}$

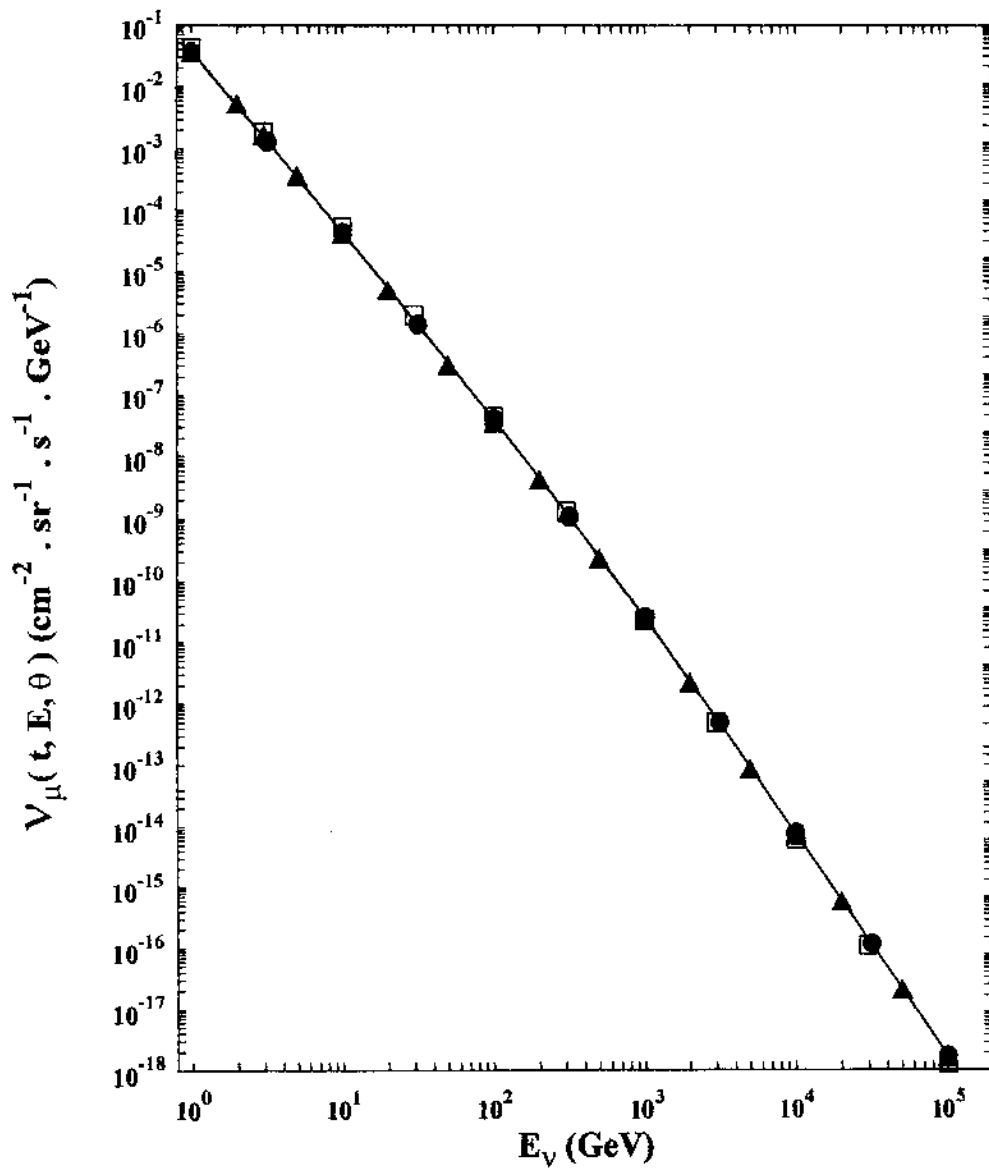


Figura 4.2: Fluxo vertical de neutrinos muônicos ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos escuros, os triângulos escuros e os quadrados, referem-se aos calculados nas referências [31], [37] e [34], respectivamente.

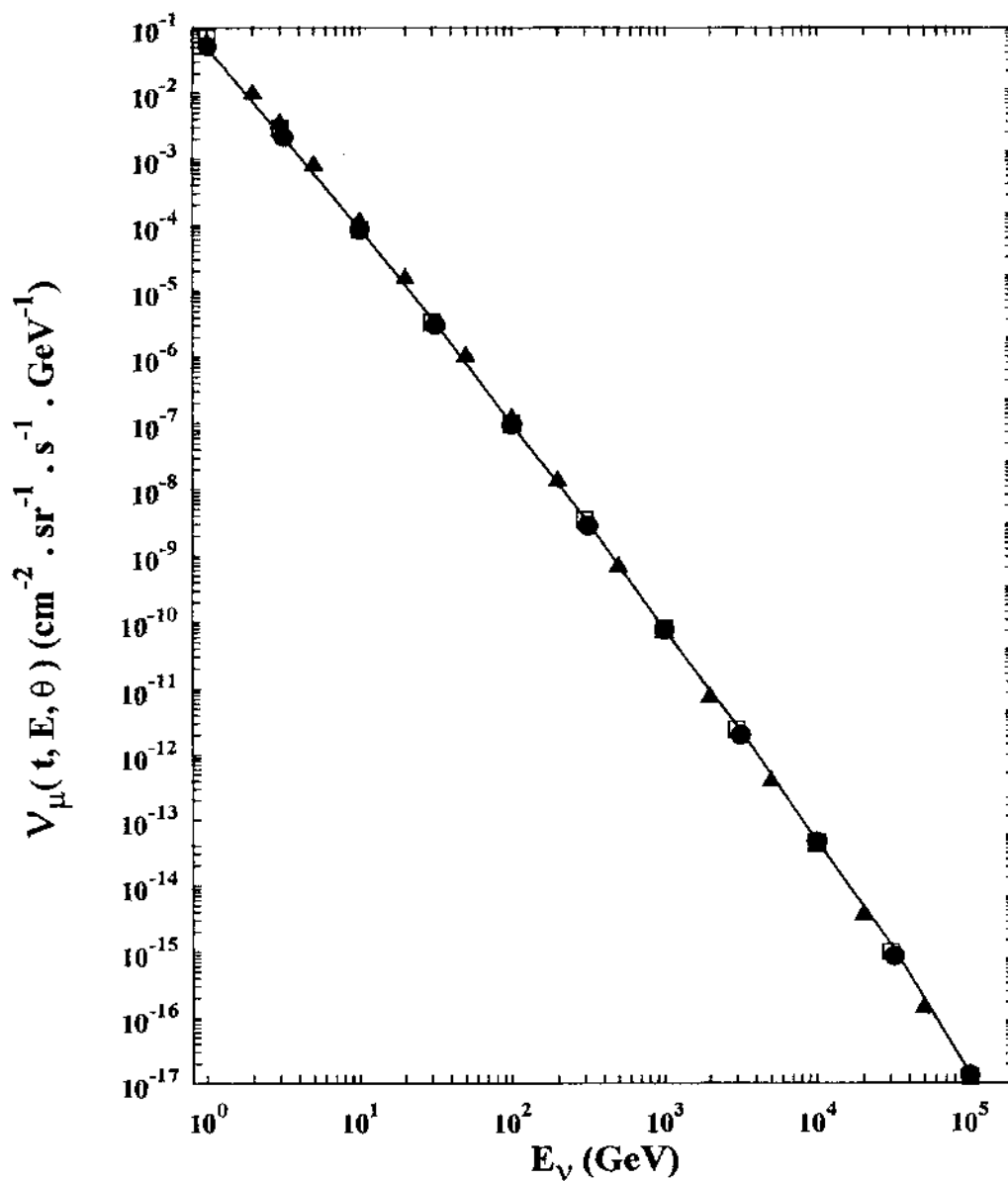


Figura 4.3: Fluxo horizontal de nêutrons muônicos ao nível do mar. A linha cheia representa nossos cálculos, enquanto que os círculos escuros, os triângulos escuros e os quadrados, referem-se aos calculados nas referências [31], [37] e [35], respectivamente.

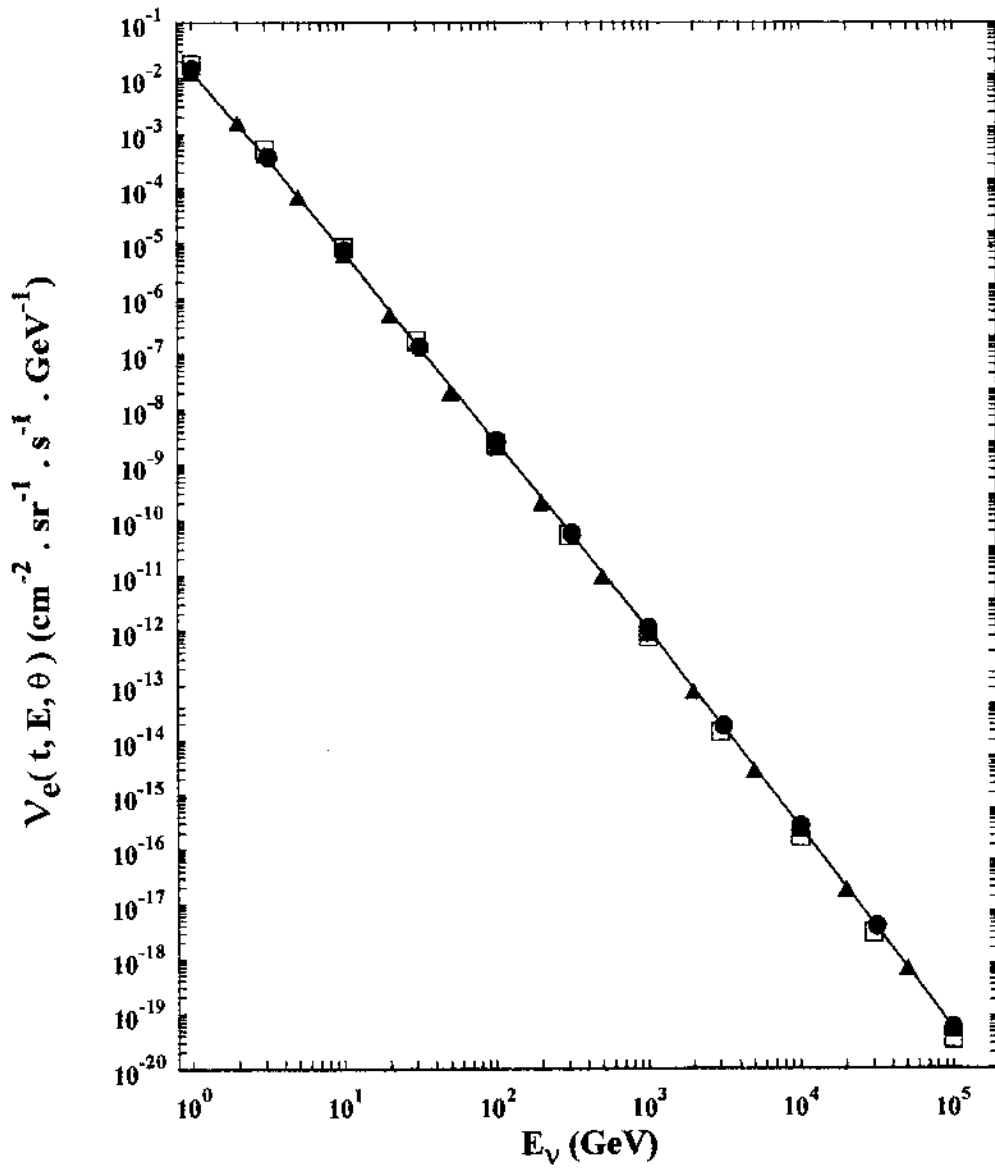


Figura 4.4: Idem da figura (4.2), para o fluxo vertical de neutrinos eletrônicos ao nível do mar.

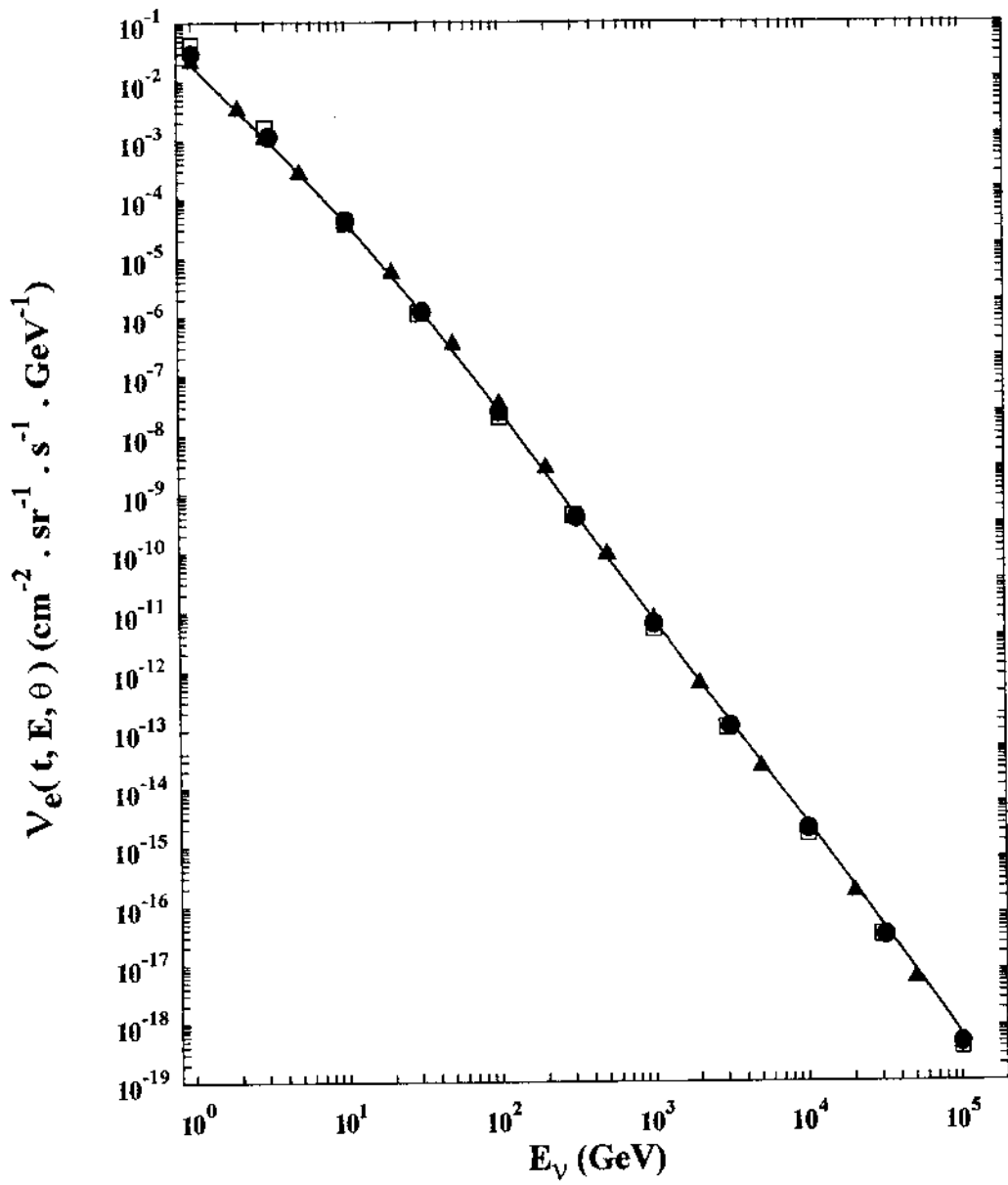


Figura 4.5: Idem da figura (4.3), para o fluxo horizontal de neutrinos eletrônicos ao nível do mar.

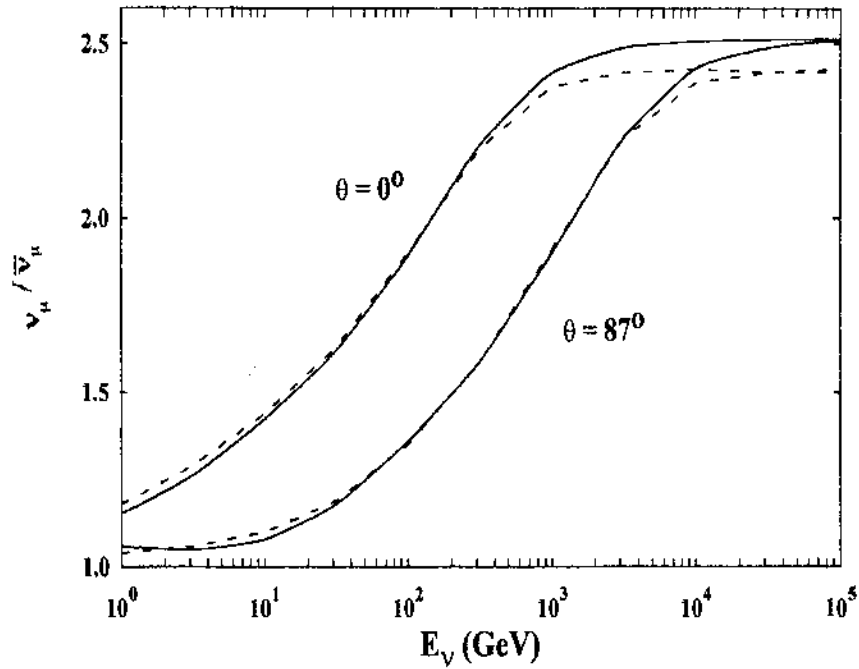


Figura 4.6: Razão, $R = \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ para $\theta = 0^\circ$ e 87° . A linha cheia representa nossos cálculos e a linha tracejada os cálculos feitos por P. Lipari [31].

Tabela 4.3: Razão $R = \frac{\nu_\mu}{\bar{\nu}_\mu}$ ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_ν (GeV)	$\cos\theta$					
	1	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05
10^0	1,15	1,10	1,07	1,05	1,05	1,06
10^1	1,42	1,32	1,24	1,15	1,10	1,08
10^2	1,89	1,75	1,65	1,51	1,41	1,36
10^3	2,42	2,35	2,27	2,11	1,98	1,90
10^4	2,51	2,50	2,50	2,48	2,48	2,43
10^5	2,51	2,51	2,51	2,51	2,51	2,51

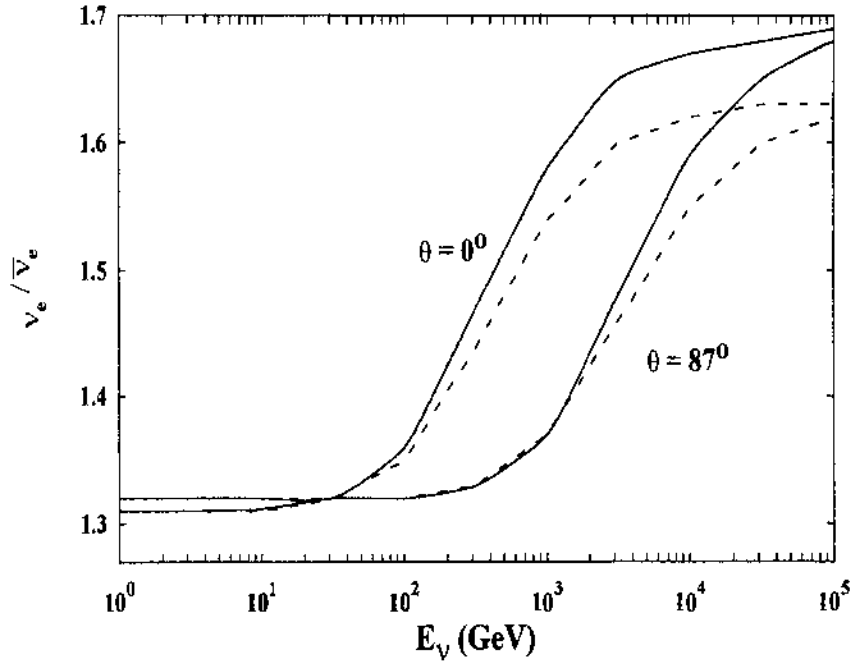


Figura 4.7: Idem da figura (4.6) para a razão, $R = \nu_c/\bar{\nu}_c$.

Tabela 4.4: Razão $R = \frac{\nu_c}{\bar{\nu}_c}$ ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_ν (GeV)	$\cos\theta$					
	1	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05
10^0	1,32	1,32	1,32	1,32	1,31	1,31
10^1	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32
10^2	1,36	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32
10^3	1,58	1,54	1,49	1,43	1,39	1,37
10^4	1,67	1,67	1,66	1,63	1,61	1,59
10^5	1,69	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68

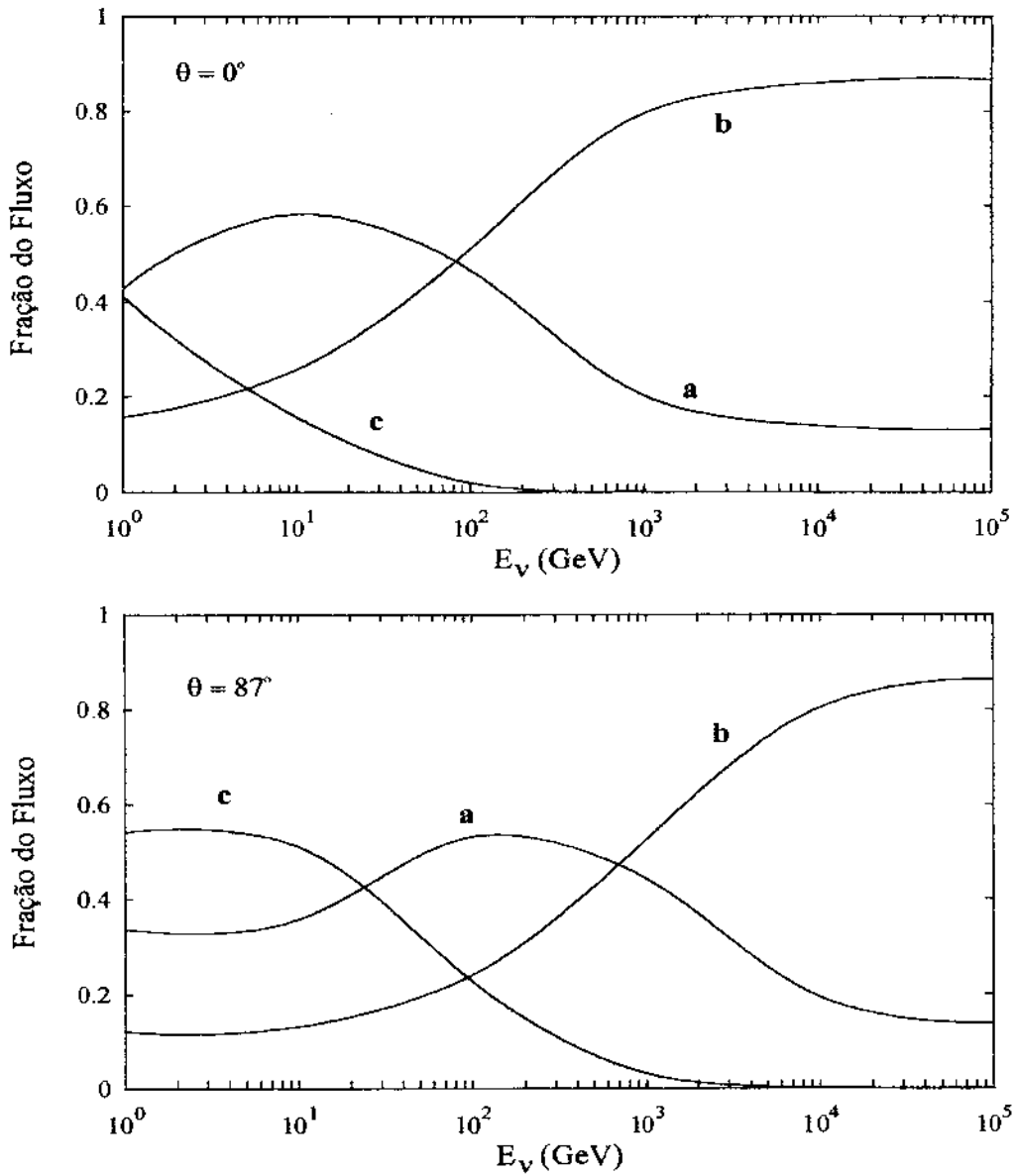


Figura 4.8: Contribuição fracional dos pions (a), kaons (b) e muons (c) para o fluxo de neutrinos muônicos ao nível do mar.

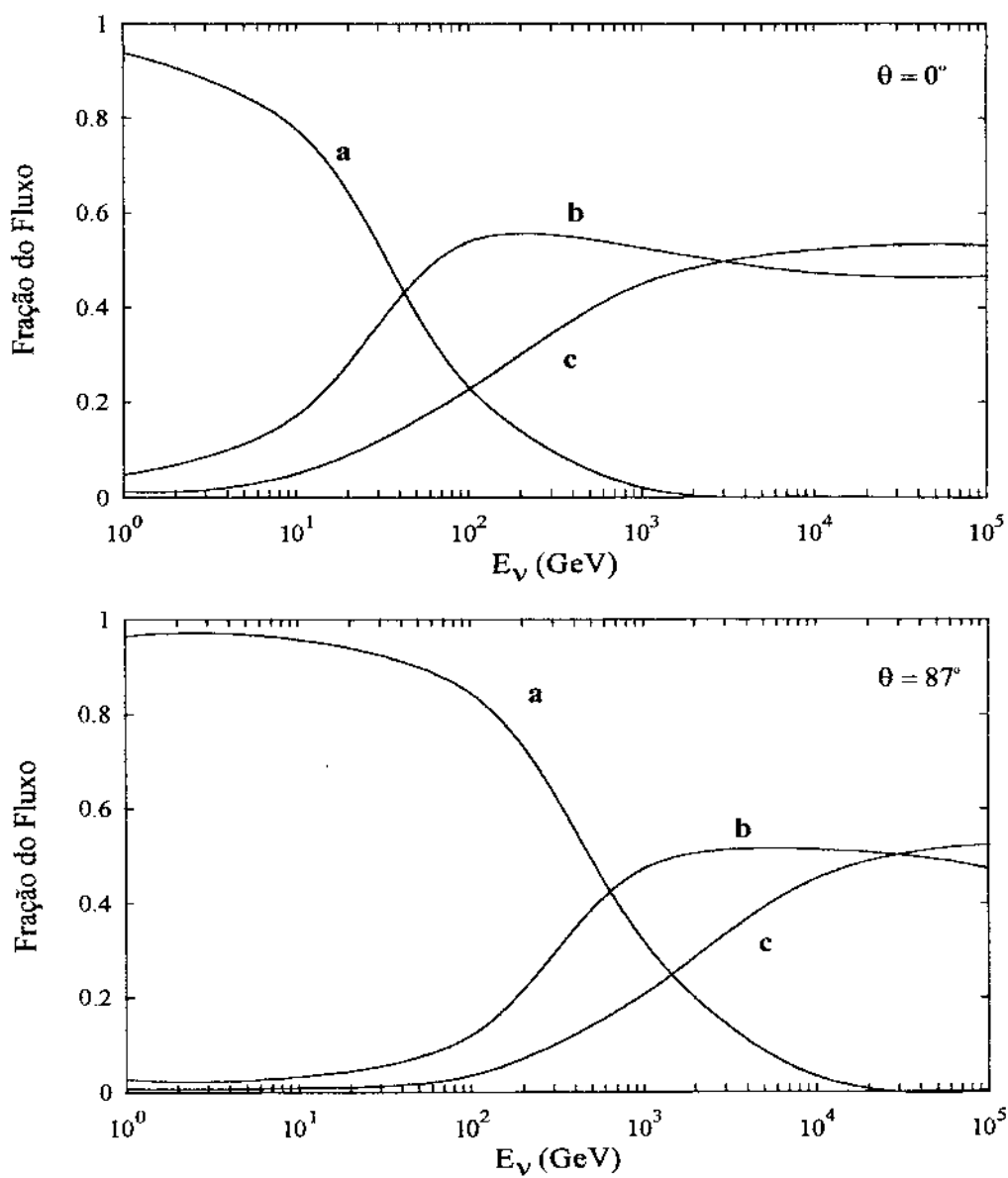


Figura 4.9: Contribuição fracional dos muons (a), kaons neutros (b) e kaons carregados (c) para o fluxo de neutrinos eletrônicos ao nível do mar.

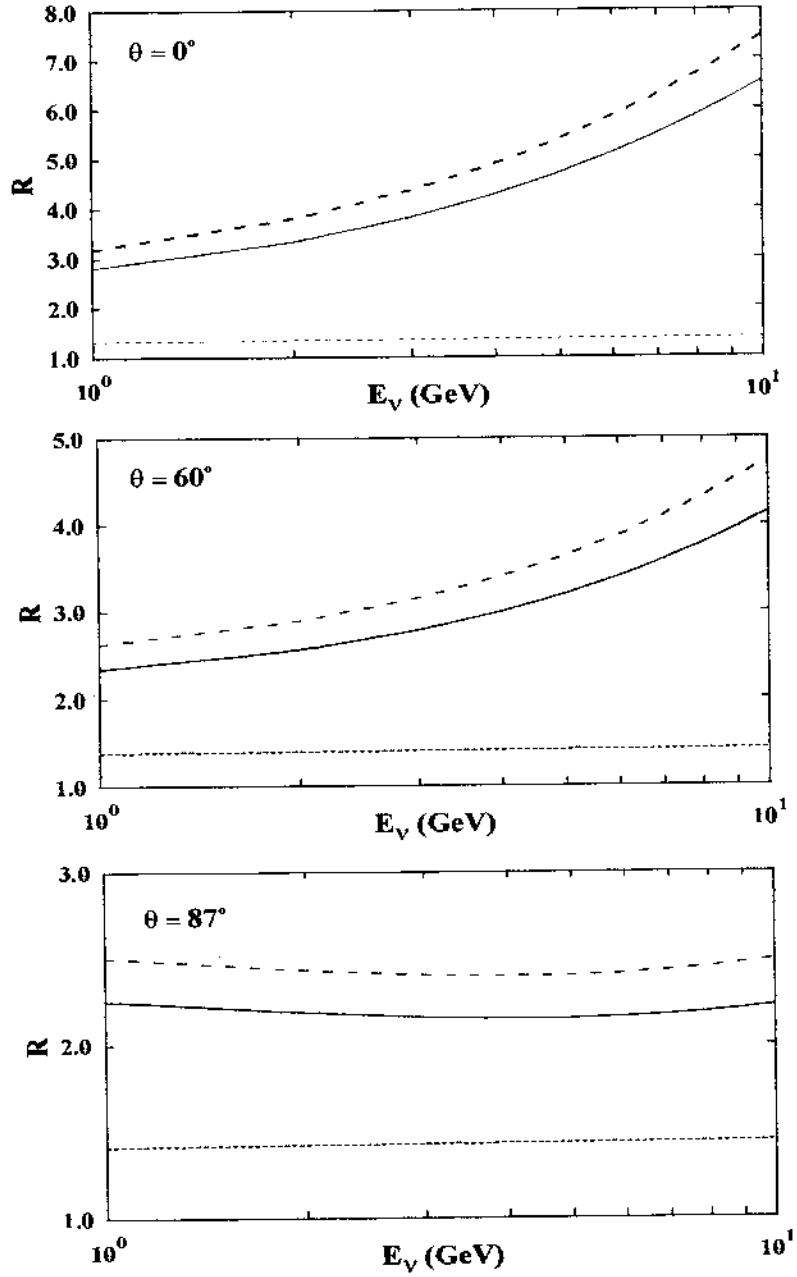


Figura 4.10: Razão, $R = \frac{(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{(\nu_e + \bar{\nu}_e)}$ ao nível do mar, em função da energia, para três diferentes valores de ângulos zenitais. A linha cheia representa esta razão considerando a polarização dos muons, a linha tracejada sem considerar a polarização dos muons e a linha pontilhada, considerando além da polarização dos muons, a oscilação dos neutrinos.

Tabela 4.5: Razão $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ ao nível do mar, para diferentes ângulos zenitais.

E_ν (GeV)	$\cos\theta$					
	1	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05
10^0	2,81	2,43	2,25	1,91	1,88	1,92
10^1	6,55	4,63	3,67	2,54	2,23	2,10
10^2	15,73	13,12	10,85	6,93	5,27	4,49
10^3	24,48	22,25	20,42	15,94	14,03	12,78
10^4	30,04	29,39	28,68	24,57	25,65	22,38
10^5	30,97	30,87	30,78	27,80	30,31	27,31

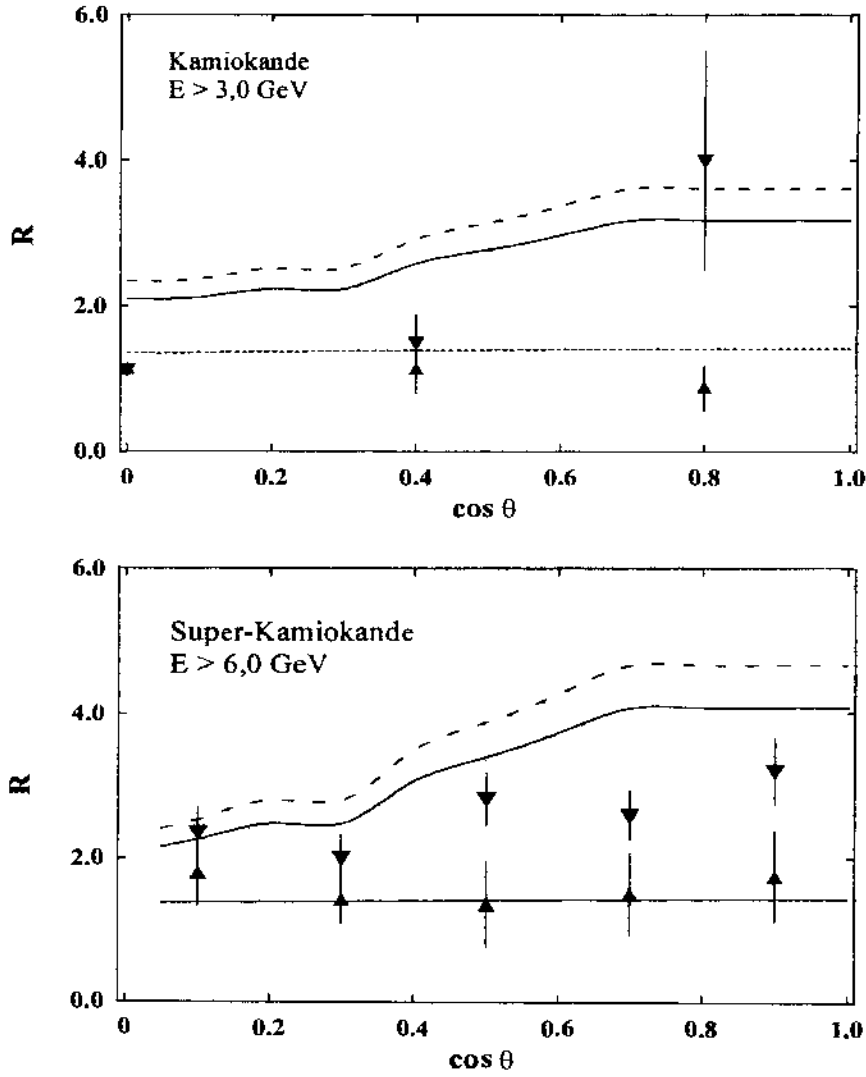


Figura 4.11: Distribuições zenitais da razão $R = \frac{(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{(\nu_e + \bar{\nu}_e)}$. A linha cheia representa a razão calculada considerando polarização dos muons, a linha tracejada representa a mesma razão sem considerar polarização dos muons. A linha pontilhada corresponde a razão calculada considerando polarização dos muons e oscilação de neutrinos. Na figura também são mostrados os dados para os eventos Multi-GeV de Kamiokande [37] e Super-Kamiokande [69], onde os triângulos representam a razão para os *upward going* neutrinos enquanto que os triângulos invertidos para os *downward going* neutrinos.

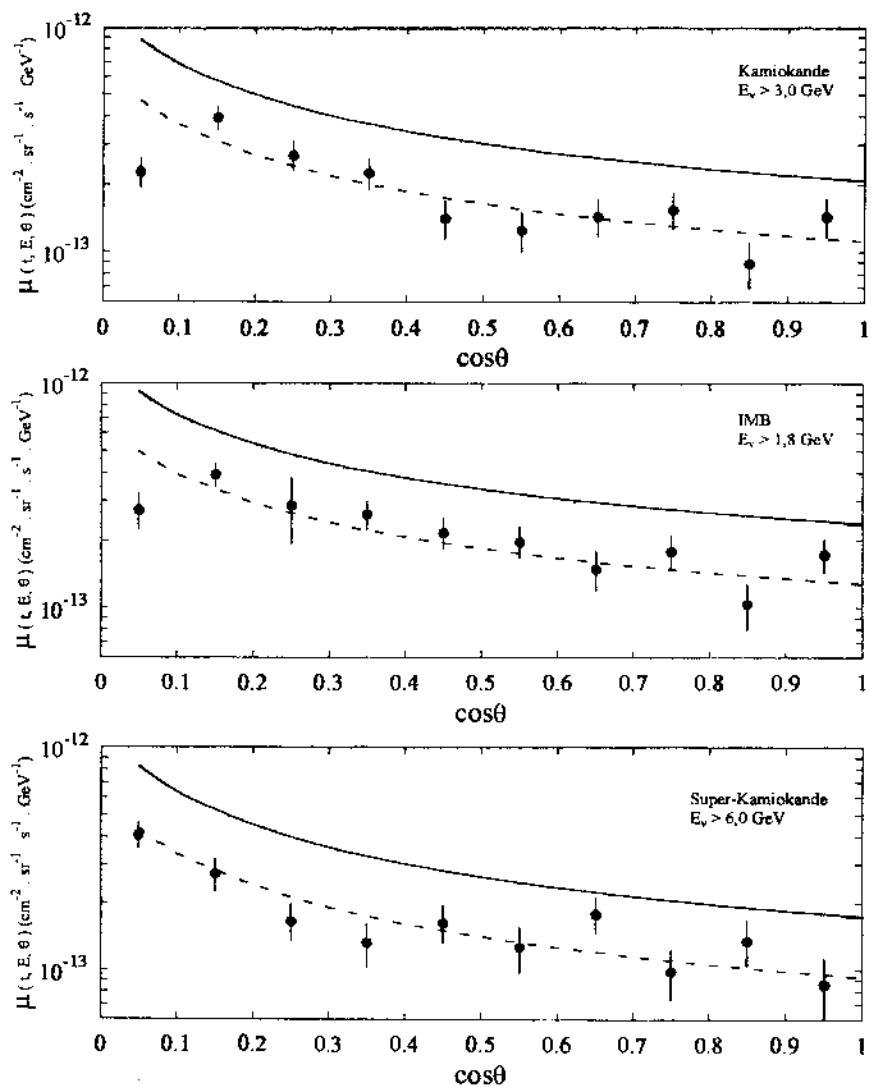


Figura 4.12: Comparação entre os fluxos de *upward going muons* medidos experimentalmente e os cálculos teóricos. A linha cheia representa os fluxos calculados sem oscilação de neutrinos e a linha tracejada considerando a oscilação. Os dados experimentais foram obtidos na referência [72].

Capítulo 5

Discussões e Conclusões

As equações integro-diferenciais que descrevem a difusão dos hadrons na atmosfera terrestre foram resolvidas analiticamente, usando a Teoria dos Semi-Grupos. A solução obtida foi colocada em termos de uma Expansional usando-se, então, o Método de Decomposição, desenvolvido por Feynman, para ordenar os operadores exponenciais não comutativos que aparecem na solução.

A partir desses fluxos hadrônicos, derivou-se os espectros zenitais de leptons em diferentes profundidades atmosféricas e em um amplo intervalo de energia (de GeV a TeV).

Este método é muito eficaz, pois, permite obter soluções válidas quando se considera formas gerais de espectros primários usados como condições de contorno ao problema. Além disso, ele permite a inclusão de livres percursos médios dos hadrons no ar, dependentes da energia e modelagens para a atmosfera, diferentes da isotérmica.

Os fluxos diferenciais de mesons obtidos no Capítulo 2, foram usados como fontes no cálculo dos fluxos de leptons ao nível do mar (muons e neutrinos), para diferentes ângulos zenitais, em um grande intervalo de energia.

No Capítulo 3 foi mostrado que nossos resultados para os fluxos verticais de muons estão em ótimo acordo com os dados experimentais ($\approx 2\%$) e também com resultados analíticos obtidos por P. Lipari e A.V. Butkevich *et al.*. A diferença com P. Lipari é cerca de 3%, enquanto que os cálculos de A.V. Butkevich *et al.*, são aproximadamente 15% maiores que os nossos, para $E_\mu \leq 100$ GeV, diminuindo consideravelmente para energias acima de 1 TeV (4%). Essa diferença com o último autor é devida principalmente ao espectro de energia da RCP usada por este ($N_0 = 1,8$ e $\gamma = 1,62$) e também aos fatores hadrônicos Z_{ij} sempre maiores que os nossos. À medida que o ângulo zenital aumenta, a diferença entre os nossos resultados e os diferentes cálculos analíticos aumenta (para $\cos\theta = 0,05$: $\approx 15\%$ com P. Lipari e $\approx 20\%$ com A.V. Butkevich *et al.*). Essa diferença se deve ao co-seno efetivo que corrige a curvatura da Terra, empregado nos diferentes cálculos.

No Capítulo 3 foi feito um estudo sistemático da influência de alguns fatores que são de fundamental importância num cálculo mais apurado dos fluxos muônicos, como por exemplo: o decaimento dos muons, a perda de energia dessas partículas na atmosfera por diferentes processos (ionização, formação de pares, reações nucleares, *bremsthrabung*, etc.), a curvatura da Terra e do modelo da atmosfera. Para energias abaixo de 1 GeV, o efeito do campo geomagnético e dos ventos solares sobre a RCP são de fundamental importância na estimativa correta dos fluxos de muons ao nível do mar.

Como se pode verificar nas figuras (3.7) a (3.14), esses efeitos são extremamente importantes na região de energia entre 1 GeV e 500 GeV. Nessa região de energia, a dependência da densidade do ar, do ângulo zenital e também do decaimento e da perda de energia dos muons, estão praticamente concentrados na probabilidade de sobrevivência dessas partículas na atmosfera (figuras 3.9 e 3.12). Esse fator varia muito nessa região de energia, sendo muito afe-

tado pelos parâmetros e distribuições acima mencionados, acarretando uma variação muito grande nos fluxos muônicos. A altas energias, $E > 1$ TeV, essa probabilidade tende a 1 e as influências desse parâmetro são praticamente desprezíveis. O efeito da curvatura da Terra, entretanto, é importante também na região de alta energia e para ângulos zenitais próximos de 90° , pois, nas expressões dos fluxos diferenciais de muons, nessa região de energia, aparece também, além da probabilidade de sobrevivência, um fator $\sec\theta^*$, que está relacionado à inclusão ou não da curvatura da Terra.

Na figura (3.15), nossos cálculos teóricos, para a razão μ^+/μ^- ao nível do mar, para $\theta = 0^\circ$, afastam-se dos dados experimentais em duas regiões de energia características:

a) Para $E_\mu < 1$ GeV. Os dados encontram-se abaixo da nossa razão; isso se deve aos efeitos do campo geomagnético que diminui consideravelmente o fluxo de prótons e íons carregados positivamente da RCP, mas não afeta o de neutrons. Dessa maneira os dados da razão μ^+/μ^- decrescem muito nessa região, afastando-se dos nossos resultados para os quais não foram incluídos tais efeitos.

b) Para $E_\mu > 1$ TeV. Os dados experimentais também se encontram abaixo dos resultados teóricos, fato que reflete as incertezas existentes nos fatores hadrônicos Z_{ij} (principalmente para os kaons) usados em nossos cálculos.

É importante salientar que a quebra do *Scaling* de Feynman para energias menores que 1 GeV e maiores que aproximadamente 5 TeV, faz com que a razão μ^+/μ^- , teoricamente calculada, decresça cerca de 10 a 15%, como se pode verificar no gráfico da figura (3.16), que se refere a razão μ^+/μ^- ao nível do mar, para ângulos zenitais entre 75° e 87° . Dessa maneira, a razão calculada considerando a quebra de *Scaling* se ajusta melhor aos dados experimentais.

Finalmente, no que se refere aos muons estimou-se o crescimento com a energia, da razão $R = (\text{muons vindos de kaons}/\text{muons vindos de pions})$, para $\theta = 0^\circ$. A 100 GeV, $R = 0,10$, chegando a 0,36 para energias na região de 100 TeV. Isso reflete o aumento na produção de kaons a medida que a energia aumenta. Como se pode observar na figura (3.17) o crescimento da razão obtida por L.V. Volkova, é maior que o encontrado em nossos cálculos e de P. Lipari. Isso se deve principalmente aos maiores fatores hadrônicos Z_{pK^\pm} e Z_{nK^\pm} e a um menor índice de potências da RCP ($\gamma = 1,62$), usados pela autora.

No capítulo 4 foram calculados os fluxos de neutrinos muônicos e eletrônicos e as razões entre neutrinos e antineutrinos para diferentes ângulos zenitais e no intervalo de energia de 1 GeV a 100 TeV. Nossos resultados foram, então, comparados com outros cálculos analíticos. A diferença com os fluxos de neutrinos muônicos e eletrônicos obtidos por P. Lipari é de aproximadamente 2%, refletindo exclusivamente a diferença entre os métodos analíticos e os cálculos numéricos empregados. O acordo com os demais autores é um pouco menor (aproximadamente 90%).

As razões lepton-antilepton calculadas neste trabalho e mostradas nas figuras (4.6) e (4.7) estão em ótimo acordo como os resultados de P. Lipari [31] ($\leq 5\%$). Isso se deve ao fato de que no cálculo dessas razões alguns parâmetros que tem grandes incertezas são cancelados, como por exemplo, os espectros da RCP, os fatores hadrônicos Z_{ij} originados das interações hadron-núcleo e os valores do co-seno efetivo.

A razão entre $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)$ e $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ ao nível do mar, foi também obtida na região de energia de 1 a 10 GeV (região denominada de multi-GeV nos Experimentos de Kamiokande e Super-Kamiokande). Na figura (4.10) são mostrados os comportamentos dessas razões para $\theta = 0^\circ, 60^\circ$ e 87° , considerando os fluxos de neutrinos calculados de três maneiras

diferentes:

- a) sem polarização de muons e sem oscilação de neutrinos;
- b) com polarização de muons e sem oscilação de neutrinos;
- c) com polarização de muons e com oscilação de neutrinos.

Como se pode ver na figura, a inclusão da oscilação dos neutrinos faz com que essa razão aumente muito pouco com a energia e com o ângulo zenital. Isso é de fundamental importância na explicação dos dados dessa razão, para os *upward going* neutrinos em Kamiokande e Super-Kamiokande (multi-GeV).

A 3,0 GeV, para ângulos zenitais de 0° , 60° e 87° , a razão calculada considerando a polarização dos muons é aproximadamente 15% menor que a mesma razão obtida sem considerar tal efeito. Esse resultado está de acordo com o encontrado por S. Barr *et al.* [73], que é de aproximadamente 20%.

Na figura (4.11) é mostrada uma comparação de nossos cálculos com a razão $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$ obtida experimentalmente em Kamiokande (dados na região de energia de multi-GeV) em função dos ângulos zenitais e para $E_\nu \geq 3,0$ GeV. Para $\cos\theta = 0,8$ (*downward* neutrinos), a razão R por nós calculada mostra um bom acordo com a razão observada no Experimento de Kamiokande, considerando os itens **a** ou **b**. A razão R observada para $\cos\theta = -0,8$ (*upward* neutrinos) é bem menor que a calculada incluindo somente a polarização (caso **b**). Se nós tomarmos em conta também, oscilações de neutrinos, a razão calculada (caso **c**), é consistente com esses dados.

A figura mostra também, que para $\cos\theta = 0$ e $\pm 0,4$, nossos resultados estão em desacordo como os obtidos experimentalmente. Uma causa possível desta discrepância pode estar ligada à identificação dos eventos do tipo muônico e eletrônico no detector, como sugerido

por E.V. Bugaev e A.V. Naumov [74].

Nesta figura é apresentada também uma comparação entre nossos cálculos e os dados de Super-Kamiokande, para $E_\nu \geq 6,0$ GeV, similar à anterior. Novamente existe um ótimo acordo entre os dados de *upward going* neutrinos com nossos cálculos, quando se inclui as oscilações de neutrinos.

Para concluir, a razão R , por nós calculada, incluindo a polarização dos muons, pode explicar os dados concernentes aos *downward* neutrinos, porém, não explicam os *upward* neutrinos. Em uma análise extremamente simples, podemos concluir que a variação da razão R com o ângulo zenital, dos dados de Kamiokande e Super-Kamiokande (multi-GeV), podem ser explicados através da oscilação entre os diferentes sabores de neutrinos. É importante salientar ainda, que nessa região de energia, os efeitos do campo geomagnético sobre os raios cósmicos primários, bem como a modulação desses primários pelos ventos solares são desprezíveis. Esses efeitos é que conduzem a uma grande dependência dos fluxos de neutrinos com os ângulos zenitais. Assim, a assimetria *up-down* encontrada nos dados acima mencionados pode ser explicada (até o presente momento) via oscilação de neutrinos.

Na figura (4.12), comparamos também nossos cálculos com a distribuição zenital dos *upward going* muons induzidos por neutrinos para Kamiokande, IMB e Super-Kamiokande. Os dados desses três Experimentos são melhores explicados quando se considera, além da polarização dos muons, a oscilação dos neutrinos.

Para desenhar um panorama mais completo a respeito da discrepância entre os dados experimentais e os diferentes cálculos teóricos sobre os neutrinos atmosféricos, necessita-se comparar esses cálculos teóricos com dados de outros experimentos, como por exemplo, IMB, Soudan, MACRO, em diferentes regiões de energia. Nesse caso, os fluxos leptônicos para

$E < 1$ GeV devem incluir os efeitos do campo geomagnético e dos ventos solares sobre os fluxos da RCP. Esses efeitos dependem da latitude onde se encontra o detector e dos ângulos zenitais e azimutais e, reduzem significativamente os ions carregados positivamente da RCP. Assim, os neutrinos atmosféricos sofrem uma diminuição acentuada na região de energia menor que 1 GeV (região de sub-GeV).

Além disso, uma análise mais detalhada das oscilações de neutrinos, incluindo a dependência com a energia, da probabilidade de oscilação e das seções de choque desses leptons (ou antileptons) no interior do detector e nas rochas que o envolvem, deverá ser realizada. Com este enfoque os dados experimentais das razões (ν_μ/ν_e) dos vários detectores são ajustados aos cálculos teóricos encontrando-se, então, uma região no espaço dos parâmetros de oscilação (Δ_{m^2} , diferença de massa ao quadrado entre dois estados de neutrinos e $\sin^2 2\alpha$, sendo α o ângulo de mistura entre os diferentes estados) que explica todos os dados experimentais conjuntamente.

Outro fator muito importante em um cálculo mais rigoroso, com o objetivo de mostrar que as oscilações entre os diferentes sabores de neutrinos é uma solução ao problema dos neutrinos atmosféricos, refere-se ao fato desses leptons poderem oscilar também na matéria. O espalhamento dos ν_e com os elétrons do meio pode ser feito de duas maneiras (ou envolvendo um boson Z^0 ou um boson W^+ ou W^-) diferentemente dos ν_μ e ν_τ , que só trocam Z^0 . Assim, nas oscilações $\nu_e \longrightarrow \nu_\mu$ e $\nu_e \longrightarrow \nu_\tau$, os efeitos da interação desses neutrinos com o meio devem ser considerados.

É fato comum [17] que pode haver uma oscilação no vácuo muito pequena, porém, os neutrinos poderão oscilar muito intensamente no interior da Terra via efeito MSW [75] (efeito ressonante da oscilação dos neutrinos na matéria).

Assim, para determinar com mais precisão os chamados parâmetros de oscilação, uma melhoria na qualidade dos dados e nos cálculos dos fluxos leptônicos (μ e ν) devem ser feitos. Atualmente há intensa atividade nos cálculos dos fluxos de neutrinos atmosféricos baseados em simulações tridimensionais das trajetórias das diferentes partículas da RC na atmosfera. Não há até o presente momento nenhum cálculo analítico para resolver as equações integro-diferenciais em três dimensões.

Na continuação deste trabalho, pretendemos realizar cálculos analíticos envolvendo equações de difusão em três dimensões. As distribuições azimutais dos neutrinos atmosféricos, diferentemente das distribuições zenitais não fornecem informações adicionais sobre oscilações (ou outras formas de nova Física Além do Modelo Padrão), pois, o comprimento de oscilação dos neutrinos na atmosfera é independente do ângulo azimutal [76]; entretanto, essas distribuições são de fundamental importância no estudo do Efeito “Leste-Oeste”. Esse efeito reflete, principalmente, a influência do campo geomagnético sobre os fluxos da RCP, bem como sobre a trajetória seguida pelos muons nesse campo (negligenciada em cálculos em uma dimensão). Esse efeito introduz correções significativas na forma dessa assimetria. Esses cálculos em três dimensões prevêem um acréscimo nos fluxos horizontais na região de baixas energias (região sub-GeV) [76].

Além desses cálculos sobre a resolução das equações de difusão em três dimensões, é nossa intenção dar uma atenção especial aos seguintes tópicos:

a) *Prompt* neutrinos vindos do charme:

Os neutrinos originados de partículas charmosas com pequeno tempo de decaimento, são de fundamental importância para energias na região de TeV. Eles devem desempenhar um papel extremamente importante no cálculo do fluxo de neutrinos para os Experimentos

AMANDA [77] e Auger [78].

b) Interações hadrônicas:

O modelo para as interações hadrônicas é também importante no cálculo dos fluxos dos leptons (muons e neutrinos) ao nível do mar. Esses cálculos são muito importantes na região de altíssima energia, bem como, na de baixa energia, onde a validade do *Scaling* de Feynman não é uma boa aproximação. Em um futuro muito próximo pode-se esperar algum progresso graças ao Experimento HARP [79], que está tomando dados no CERN. As motivações científicas para este detector são: um estudo detalhado da produção dos π^\pm para o desenvolvimento de uma “fábrica de neutrinos” e ao mesmo tempo um estudo das interações hadrônicas para o cálculo dos fluxos dos neutrinos atmosféricos.

c) Espectro de energia da RCP:

Os raios cósmicos primários são muito importantes num cálculo rigoroso dos fluxos de neutrinos atmosféricos.

Dados recentes de CAPRICE, AMS e BESS [80] tem permitido uma melhor determinação desses fluxos na região de energia $E \leq 10$ GeV. Assim, a inclusão desses dados em um estudo sistemático da influência do campo geomagnético sobre os raios cósmicos primários produz um decréscimo acentuado no fluxo dos neutrinos atmosféricos.

Devemos salientar que os experimentos sobre os neutrinos solares são bastante importantes para a exploração dos parâmetros de oscilação envolvendo os neutrinos eletrônicos. Também, os experimentos envolvendo oscilação de neutrinos, usando aceleradores de partículas de altas energias, fornecerão dados extremamente importantes sobre os parâmetros de oscilação (K2K, Minos, etc.) [81]. Esses experimentos vão estudar oscilações dos ν_μ e serão capazes de determinar os Δ_{m^2} com maior precisão que os neutrinos atmosféricos, pois,

eles trabalham com distâncias de vôo para os neutrinos bem definidas.

Para finalizar, podemos concluir que o método matemático (Teoria de Semi-Grupos) por nós empregado na resolução das equações de difusão dos hadrons na atmosfera, mostrou-se ser uma poderosa ferramenta na obtenção dos fluxos de partículas, pois podemos em alguns casos obter soluções analíticas exatas. Esse método permite usar diferentes formas do espectro primário, variação com a energia do livre percurso médio e do coeficiente de inelasticidade dos hadrons no ar e, também, a inclusão dos efeitos do campo geomagnético e da modulação da RCP pelos ventos solares.

Apêndice A

A Teoria de Semi-Grupos

Um conjunto G com uma operação é um grupo se e somente se a operação satisfaz as seguintes propriedades:

- a) fechamento,
- b) associatividade,
- c) a existência de um elemento identidade e , tal que, $\mathbf{u} \cdot e = e \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in G$,
- d) para todo $\mathbf{u} \in G$ existe um \mathbf{u}^{-1} denominado de elemento inverso.

Se a condição de inversibilidade puder ser relaxada, nós teremos um semi-grupo com respeito a essa operação.

A.1 Aplicação da teoria de Semi-Grupos na Resolução das Equações dos Nucleons na Atmosfera

A difusão dos nucleons na atmosfera pode ser descrita pela equação integro-diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t, E) = -\frac{N(t, E)}{\lambda(E)} + \int_0^1 \frac{N(t, E/\eta)}{\lambda(E/\eta)} f(E/\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad . \quad (\text{A.1})$$

com a condição de contorno

$$N(0, E)dE = N_0 E^{-(\gamma+1)} dE \quad , \quad (\text{A.2})$$

que representa o espectro diferencial dos nucleons no topo da atmosfera.

Cerca de 30 anos atrás F.M.O. Castro introduziu um método simbólico para resolver a equação (A.1) considerando λ e η constantes. Ele introduziu a operação

$$\hat{\sigma} N(t, E) = \frac{1}{\eta} N(t, E/\eta) \quad \text{para} \quad \eta \geq \eta_{min} > 0 \quad (\text{A.3})$$

onde $\hat{\sigma}$ atua somente na energia e tem para domínio de operação, o conjunto de funções positivas $N(t, E)$ limitadas e contínuas com respeito a E . Se $\frac{1}{\lambda(E)}$ pertence ao mesmo domínio de $\hat{\sigma}$ e introduzindo o operador \hat{A} independente de t

$$\hat{A} = -\left(1 - \int_0^1 f(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right) \frac{1}{\lambda(E)} \quad (\text{A.4})$$

a equação (A.1) se transforma na equação de operadores

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t, E) = -\hat{A} N(t, E) \quad . \quad (\text{A.5})$$

Considerando \hat{A} um operador gozando da propriedade de fechamento (*bounded*) a solução da equação (A.5) é:

$$N(t, E) = e^{-t\hat{A}} N(0, E) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Os operadores $\hat{G}_t = e^{-t\hat{A}}$, para $t \geq 0$ são os elementos de um semi-grupo G_t , tal que:

$$G_t \cdot G_r = G_{(t+r)}$$

$$G_{t=0} = G_0 = \mathbf{1} \quad t, r \geq 0$$

onde G_0 é o operador identidade e \hat{A} são os chamados geradores do semi-grupo.

O gerador \hat{A} é a soma de dois operadores

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\lambda(E)} \quad \text{e} \quad \hat{A}_2 = \int_0^1 f(\eta) d\eta \hat{\sigma} \frac{1}{\lambda(E)} \quad .$$

Os operadores \hat{A}_1 e \hat{A}_2 em geral não comutam entre si e somente no caso particular em que $\lambda(E) = \lambda = \text{constante}$, podemos escrever

$$e^{(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)} = e^{\hat{A}_1} e^{\hat{A}_2} = e^{\hat{A}_2} e^{\hat{A}_1}$$

como no caso dos operadores exponenciais comuns.

Para o caso dos operadores \hat{G}_1 e \hat{G}_2 do semi-grupo G não comutativo nós devemos considerar a ordem dos fatores no desenvolvimento de $\exp(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$ em uma série de potências

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)^n \frac{t^n}{n!} \quad , \quad (\text{A.7})$$

com $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$.

Para o caso da difusão dos mesons na atmosfera os operadores

$$\hat{B}_M = - \left(1 - \int_0^1 f_{MM}(x_f) dx_f \hat{\sigma} \right) \frac{1}{\lambda_M(E)} \quad (\text{A.8})$$

e

$$\hat{G}_M = \frac{b_M}{\rho(t) E \cos \theta^*(t)} \quad (\text{A.9})$$

serão os geradores do semi-grupo H_t .

Esses geradores, em geral, não comutam e as mesmas técnicas aplicadas ao caso dos operadores exponenciais \hat{A}_N devem ser utilizadas.

Esses operadores exponenciais não comutativos são denominados de operadores Expansionais, que serão representados pela letra **E** (maiúscula). A seguir iremos definir esses operadores de maneira mais rigorosa e também apresentaremos algumas técnicas de decomposição desses operadores.

Maiores detalhes em relação a Teoria de Semi-Grupos podem ser encontrados na referência [82].

A.2 O Operador Expansional

Uma discussão sucinta dos operadores expansionais e de suas principais propriedades será feita neste apêndice. Esses operadores aparecem neste trabalho como soluções das equações de difusão das partículas na atmosfera. Resolvendo as equações integro-diferenciais que descrevem a difusão das partículas na atmosfera, em sua forma de operadores, obtêm-se soluções que são colocadas na forma de operadores exponenciais que geralmente não comutam entre si. Dessa maneira é necessário utilizar a técnica desenvolvida por Feynman [15], de ordenação temporal de operadores, e de grande uso na Mecânica Quântica, para se obter soluções das equações de difusão. Esses operadores exponenciais ordenados são chamados de Expansionais e são muito utilizados nesta tese.

A técnica de decomposição é um meio para se decompor qualquer operador expansional em um produto de operadores exponenciais ordinários (que comutam entre si).

Neste trabalho foi feita uma adaptação do Método de Ordenação Temporal de Operado-

res de Feynman para ordenações de operadores que dependem do parâmetro $l(g/cm^2)$ que representa a profundidade atmosférica.

Em Mecânica Quântica, o estudo da evolução temporal de um sistema físico pode ser feito mediante duas representações equivalentes, a representação de Heisenberg e a de Schrödinger. Os operadores de uma representação são transformados para os da outra representação através de uma transformação de equivalência. O responsável por essa transformação é o operador de evolução temporal $\hat{G}(\tau)$. Assim,

$$\hat{A}(\tau) = \hat{G}(\tau)\hat{A}\hat{G}^{-1}(\tau) \quad (\text{A.10})$$

onde $\hat{A}(\tau)$ é o operador na representação de Heisenberg, e \hat{A} é o mesmo operador na representação de Schrödinger. Nesta última representação, \hat{A} não apresenta dependência temporal explícita.

Considere o sistema físico onde o hamiltoniano dependa explicitamente do tempo. A equação para o operador $\hat{G}(\tau)$ é:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{G}(\tau) = \hat{H}(\tau)\hat{G}(\tau) \quad . \quad (\text{A.11})$$

Em geral, $[\hat{H}(\tau), \hat{H}(\tau')] \neq 0$ para $\tau \neq \tau'$. Assim, a solução dessa equação é colocada na forma de um expansional,

$$\hat{G}(\tau) = \text{Exp} \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau_0}^{\tau} \hat{H}(\tau') d\tau' \right] \quad . \quad (\text{A.12})$$

O símbolo *Exp*, com E maiúsculo é para diferenciar da exponenciação usual e pode ser representado por uma expansão em múltiplas integrais.

$$\hat{G}(\tau) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_0}^{\tau} \hat{H}(\tau') d\tau' + \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \hat{H}(\tau') d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} \hat{H}(\tau'') d\tau'' - \dots \quad (\text{A.13})$$

A.3 O Método da Ordenação dos Operadores Expansionais

Seja $H(\lambda)$ um operador que envolve um parâmetro real λ e que é composto por um número arbitrário de operadores sujeitos a regras de comutação bem definidas.

O operador da transformação gerado por $H(\lambda)$, correspondendo à transição do parâmetro λ de uma configuração inicial \mathbf{a} até um estado final \mathbf{b} , é definido pelo produto de infinitas aplicações de operadores de transformações infinitesimais $(\mathbb{1} + d\lambda H(\lambda))$, arranjados da direita para a esquerda, correspondendo a sucessão de ordenamento do parâmetro λ desde \mathbf{a} até \mathbf{b} .

Como em geral $[H(\lambda), H(\lambda')] \neq 0$, deve-se tomar cuidado em expandir em uma série de potências do gerador da transformação $H(\lambda)$. O operador expansional é definido como:

$$T = \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] . \quad (\text{A.14})$$

Aqui, como já mencionado anteriormente, o símbolo *Exp* (com E maiúsculo) representa o expansional,

$$T = \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}^{(n)} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] \quad (\text{A.15})$$

onde, naturalmente

$$\text{Exp}^{(1)} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = \int_a^b d\lambda H(\lambda) \quad (\text{A.16})$$

e

$$\text{Exp}^{(n+1)} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = \int_a^b d\mu H(\mu) \text{Exp}^{(n)} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] . \quad (\text{A.17})$$

Chamando

$$T(b, a) = \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right) \quad (\text{A.18})$$

podemos obter algumas principais propriedades desse operador.

Propriedades do Operador $T(b, a)$:

$$1) \quad T(a, a) = \mathbb{1} \quad (A.19)$$

$$2) \quad T^{-1}(b, a) = \text{Exp} \left[- \int_a^b H(\lambda) d\lambda \right] = \text{Exp} \left[+ \int_b^a H(\lambda) d\lambda \right] \quad (A.20)$$

assim,

$$3) \quad T(b, a)T^{-1}(b, a) = \mathbb{1} \quad (A.21)$$

e

$$4) \quad T(b, c)T(c, a) = T(b, a) \quad (A.22)$$

e também

$$5) \quad T^{-1}(b, a)T(b, c) = T(a, c) \quad (A.23)$$

A álgebra dos Expansionais é completada com as regras de composição e decomposição obedecidas por esses operadores. Se o gerador $H(\lambda)$ é a soma de dois operadores $F(\lambda)$ e $G(\lambda)$, tal que $[F(\lambda), G(\lambda)] \neq 0$, então o expansional pode ser fatorizado como:

$$\text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] = \text{Exp} \left[\int_a^b F(\lambda) d\lambda \right] \text{Exp} \left[\int_a^b G(\lambda) d\lambda \right] \quad (A.24)$$

ou

$$\text{Exp} \left[\int_a^b F(\lambda) + G(\lambda) d\lambda \right] = \text{Exp} \left[\int_a^b \bar{F}(\lambda) d\lambda \right] \text{Exp} \left[\int_a^b G(\lambda) d\lambda \right] \quad (A.25)$$

A fim de determinar os dois operadores desconhecidos $\bar{F}(\lambda)$ e $\bar{G}(\lambda)$ diferencia-se a expressão (A.24) em relação ao limite superior

$$\frac{\partial}{\partial b} \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda F(\lambda) \right] \cdot \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda \bar{G}(\lambda) \right] \right\} \quad (\text{A.26})$$

onde obtemos

$$\begin{aligned} & F(b) \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] + G(b) \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] = \\ & F(b) \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda F(\lambda) \right) \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda G(\lambda) \right) + \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda F(\lambda) \right) \bar{G}(b) \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda \bar{G}(\lambda) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

e igualando o segundo termo de cada lado da equação, ficamos com a expressão

$$G(b) \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] = \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda F(\lambda) \right) \bar{G}(b) \cdot \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda \bar{G}(\lambda) \right] \quad (\text{A.28})$$

Multiplicando (A.27) à esquerda por $T_F(a, b)$ e à direita por $T_G(a, b)$ e substituindo b por λ obtem-se:

$$\bar{G}(\lambda) = \text{Exp} \left[\int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right] \cdot G(\lambda) \text{Exp} \left[\int_a^\lambda d\mu (F(\mu) + G(\mu)) \right] \cdot \text{Exp} \left[\int_\lambda^{\infty} d\mu \bar{G}(\mu) \right] \quad (\text{A.29})$$

Usando (A.24) na (A.28) e as propriedades de operadores inversos obtem-se

$$\bar{G}(\lambda) = \text{Exp} \left[\int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right] G(\lambda) \text{Exp} \left[\int_a^\lambda d\lambda F(\mu) \right] \quad (\text{A.30})$$

Analogamente a expressão (A.25) pode ser reescrita como:

$$\bar{F}(\lambda) = \text{Exp} \left[\int_\lambda^b d\mu G(\mu) \right] F(\lambda) \text{Exp} \left[\int_b^\lambda d\mu G(\mu) \right] \quad (\text{A.31})$$

Assim as regras de decomposição das expansionais podem ser estabelecidas:

$$\text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] =$$

$$\begin{aligned} & \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda F(\lambda) \right] \cdot \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda \text{Exp} \left(\int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right) \cdot G(\lambda) \text{Exp} \left(\int_a^\lambda d\mu F(\mu) \right) \right] = \\ & \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda \text{Exp} \left(\int_\lambda^b d\mu G(\mu) \right) F(\lambda) \text{Exp} \left(\int_b^\lambda d\mu G(\mu) \right) \right] \text{Exp} \left(\int_a^b d\lambda G(\lambda) \right) \quad , \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

onde F e G são sempre não comutáveis.

As regras de composição das expansionais também podem ser estabelecidas de maneira similar e são colocadas na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda F(\lambda) \right] \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda \bar{G}(\lambda) \right] = \\ & \text{Exp} \left\{ \int_a^b d\lambda \left[F(\lambda) + \text{Exp} \left(\int_a^\lambda d\mu F(\mu) \right) \cdot G(\lambda) \cdot \text{Exp} \left(\int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right) \right] \right\} = \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

$$\text{Exp} \left\{ \int_a^b d\lambda \left[G(\lambda) + \text{Exp} \left(\int_b^\lambda d\mu G(\mu) \right) \cdot F(\lambda) \cdot \text{Exp} \left(\int_\lambda^b d\mu G(\mu) \right) \right] \right\} \quad . \quad (\text{A.34})$$

Com as expressões (A.33) e (A.34) completa-se uma álgebra necessária e suficiente para os operadores expansionais cujos geradores do grupo $H(\lambda)$ não comutam com $H(\lambda')$ quando $\lambda \neq \lambda'$.

A.4 O Operador Exponencial

Um caso particular dos expansionais surge quando $[H(\lambda), H(\lambda')] = 0$; nesse caso o caráter de ordenação deixa de existir. O expansional se transforma no operador exponencial usual.

$$\text{Exp} \left[\int d\lambda H(\lambda) \right] \longrightarrow \exp \left[\int d\lambda H(\lambda) \right] \quad . \quad (\text{A.35})$$

A expressão (A.13) pode ser escrita trocando-se $\tau, \tau', \tau'', \text{etc.}$ por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \text{etc.}$, respectivamente, e usando a definição (A.18),

$$\begin{aligned} T(b, a) &= \text{Exp} \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = 1 + \int_a^b d\lambda_1 H(\lambda_1) + \int_a^b d\lambda_1 H(\lambda_1) \cdot \\ & \cdot \int_a^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) + \int_a^b d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_a^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \int_a^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) + \dots \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

Chamando

$$H(\lambda_1)d\lambda_1 = dx_1 \quad ; \quad H(\lambda_2)d\lambda_2 = dx_2 \quad ; \dots \quad (\text{A.37})$$

a expressão (A.36) fica:

$$T(b, a) = 1 + \int_{g(a)}^{g(b)} dx_1 + \int_{g(a)}^{g(b)} dx_1 \int_{g(a)}^{x_1} dx_2 + \int_{g(a)}^{g(b)} dx_1 \int_{g(a)}^{x_1} dx_2 \int_{g(a)}^{x_2} dx_3 + \dots \quad (\text{A.38})$$

Se $[H(\lambda_i), H(\lambda_j)] = 0$ para $i = j$ ou $i \neq j$, a expressão acima se transforma no operador exponencial ordinário

$$T(b, a) = \exp \left[\int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = e^{\int_a^b d\lambda H(\lambda)} \quad . \quad (\text{A.39})$$

A transformação inversa para esse operador é

$$e^{\int_a^b d\lambda H(\lambda)} \equiv e^{-\int_b^a d\lambda H(\lambda)} \quad (\text{A.40})$$

ou seja,

$$\left[\exp \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right]^{-1} = \exp \left(- \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right) \quad . \quad (\text{A.41})$$

Particularmente quando $H(\lambda)$ é um operador constante e assumindo $a = 0$ e $b = 1$, obtém-se o tipo mais familiar de operador exponencial,

$$e^{\int_a^b d\lambda H(\lambda)} = e^{\int_0^1 d\lambda H} = e^H \quad . \quad (\text{A.42})$$

As regras de composição e decomposição para esses operadores exponenciais tornam-se

$$e^{F-G} = e^F \text{Exp} \left[\int_0^1 d\lambda e^{-\lambda F} G e^{\lambda F} \right] = \text{Exp} \left[\int_0^1 d\lambda e^{(1-\lambda)G} F e^{-(1-\lambda)G} \right] e^G \quad (\text{A.43})$$

e

$$e^F e^G = \text{Exp} \left[\int_0^1 d\lambda \left(F + e^{\lambda F} G e^{-\lambda F} \right) \right] = \text{Exp} \left[\int_0^1 d\lambda \left(G + e^{-(1-\lambda)G} F e^{(1-\lambda)G} \right) \right] \quad . \quad (\text{A.44})$$

A notação da expansional em (A.42) e (A.43) foi mantida porque apesar de H comutar com ele próprio, F e G não são necessariamente comutativos.

Concluindo esta seção apresentamos uma fórmula de uso freqüente em nossos cálculos

$$e^{-F}Ge^F = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \quad , \quad (\text{A.45})$$

onde

$$G_0 = G \quad ; \quad G_n = \frac{1}{n!} [G_{n-1}, F] \quad . \quad (\text{A.46})$$

A.5 Atmosfera Isotérmica Plana

No Capítulo 2 aparecem expansionais que em alguns casos particulares se transformam em exponenciais ordinárias.

Para ângulos zenitais menores que 60° e para uma atmosfera isotérmica, a expansional das expressões (2.58) e (2.59) se transforma em uma exponencial ordinária,

$$\hat{T}_\pi(t, z) = \text{Exp} \left[\int_z^t \frac{b_\pi}{tE\cos\theta^*} dt \right] = 1 + \int_z^t \frac{b_\pi}{t_1E\cos\theta^*} dt_1 + \int_z^t \frac{b_\pi}{t_1E\cos\theta^*} dt_1 \int_z^{t_1} \frac{b_\pi}{t_2E\cos\theta^*} dt_2 + \dots \quad (\text{A.47})$$

onde, b_π é a constante de decaimento do pion no ar, t é a profundidade atmosférica no plano de detecção e θ é o ângulo zenital.

$$I_1 = \int_z^t \frac{b_\pi}{tE\cos\theta^*} dt = \frac{b_\pi}{E\cos\theta^*} \ln(t/z) \quad (\text{A.48})$$

$$I_2 = \int_z^t \frac{b_\pi}{t_1E\cos\theta^*} dt_1 \int_z^{t_1} \frac{b_\pi}{t_2E\cos\theta^*} dt_2 = \left(\frac{b_\pi}{E\cos\theta^*} \right)^2 \frac{\ln^2(t/z)}{2} \quad (\text{A.49})$$

e por indução o n -ésimo termo da expansão é

$$I_n = \int_z^t \frac{b_\pi}{t_1 E \cos \theta^*} dt_1 \int_z^{t_1} \frac{b_\pi}{t_2 E \cos \theta^*} dt_2 \cdots \int_z^{t_{n-1}} \frac{b_\pi}{t_n E \cos \theta^*} dt_n = \left(\frac{b_\pi}{E \cos \theta^*} \right)^n \frac{\ln^n(t/z)}{n!} . \quad (\text{A.50})$$

Assim a expressão (A.47) se torna

$$\text{Exp} \left[\int_z^t \frac{b_\pi}{t E \cos \theta^*} dt \right] = e^{\frac{b_\pi}{E \cos \theta^*} \ln(t/z)} = \left(\frac{t}{z} \right)^{\frac{b_\pi}{E \cos \theta^*}} , \quad (\text{A.51})$$

que é comum nos cálculos dos fluxos de muons.

Apêndice B

Polarização dos Muons

Dependendo da natureza da interação entre partículas não polarizadas, as partículas resultantes dessa colisão podem ser totalmente polarizadas. Os muons produzidos em raios cósmicos são polarizados [31] e [53]. Os μ^+ tem o valor médio da helicidade negativo, enquanto que os μ^- tem esse valor positivo (helicidade h_e é o valor esperado do momento angular na direção do movimento em unidades de $\hbar/2$). A polarização dos muons é de extrema importância, pois os espectros de energia dos neutrinos produzidos no decaimento dessas partículas dependem dessa polarização [53, 73].

Os muons produzidos nos decaimentos

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (\text{B.1})$$

e

$$K^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (\text{B.2})$$

são totalmente polarizados no sistema de repouso dos mesons, e tem ($h_e = -1$) para os decaimentos dos mesons M^+ e ($h_e = +1$) para o decaimento dos mesons M^- . Isso é consequência

da lei de conservação do momento angular e do fato que os mesons acima considerados tem spin zero e os neutrinos (antineutrinos) são *left-handed* (*right-handed*).

No sistema de laboratório, entretanto, a polarização não é completa. Nesse sistema, um muon produzido com ângulo θ^* do centro de massa com respeito a direção do momento, tem helicidade [31]

$$P(\beta, \theta^*) = \frac{1}{\beta_\mu} \left(\frac{(1 - r_M) + (1 + r_M)\cos\theta^*\beta_M}{(1 + r_M) + (1 - r_M)\cos\theta^*\beta_M} \right) \quad (\text{B.3})$$

onde $r_M = (m_\mu/m_M)^2$, β_M e β_μ são respectivamente, as velocidades do meson (pion ou kaon) e do muon, no sistema de laboratório.

No limite ultra-relativístico ($\beta_M \rightarrow 1$ e $\beta_\mu \rightarrow 1$) a expressão (B.3) se transforma em,

$$P_M(x) = \frac{1 + r_M}{1 - r_M} - \frac{2r_M}{(1 - r_M)x} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$x = \frac{E_\mu}{E_M} = \frac{1}{2} [(1 + r_M) + \beta_M(1 - r_M)\cos\theta^*] \quad (\text{B.5})$$

O valor médio da polarização dos muons com uma energia E produzido em um ponto (t, θ^*) é obtido a partir do decaimento dos meson,

$$\langle P_\mu \rangle = \frac{\int_{E_{min}}^{E_{max}} P(x) \frac{dE_M M(t, E_M, \theta)}{\lambda_{decay}^M(t, E_M, \theta)} f_{M \rightarrow \mu^\pm}(x) dE_M}{\int_{E_{min}}^{E_{max}} \frac{dE_M M(t, E_M, \theta)}{\lambda_{decay}^M(t, E_M, \theta)} f_{M \rightarrow \mu^\pm}(x) dE_M} \quad (\text{B.6})$$

Os valores médios da polarização dos muons originados dos decaimentos dos pions e kaons, são diferentes entre si, $\langle P_K \rangle \gg \langle P_\pi \rangle$.

O valor médio da polarização também é função do índice de potência do espectro primário (γ). Quanto maior γ , maior será o valor médio da polarização.

A figura abaixo mostra as polarizações médias ao nível do mar, dos μ^\pm , para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$, em função da energia. Nesta figura, os muons foram originados de duas fontes

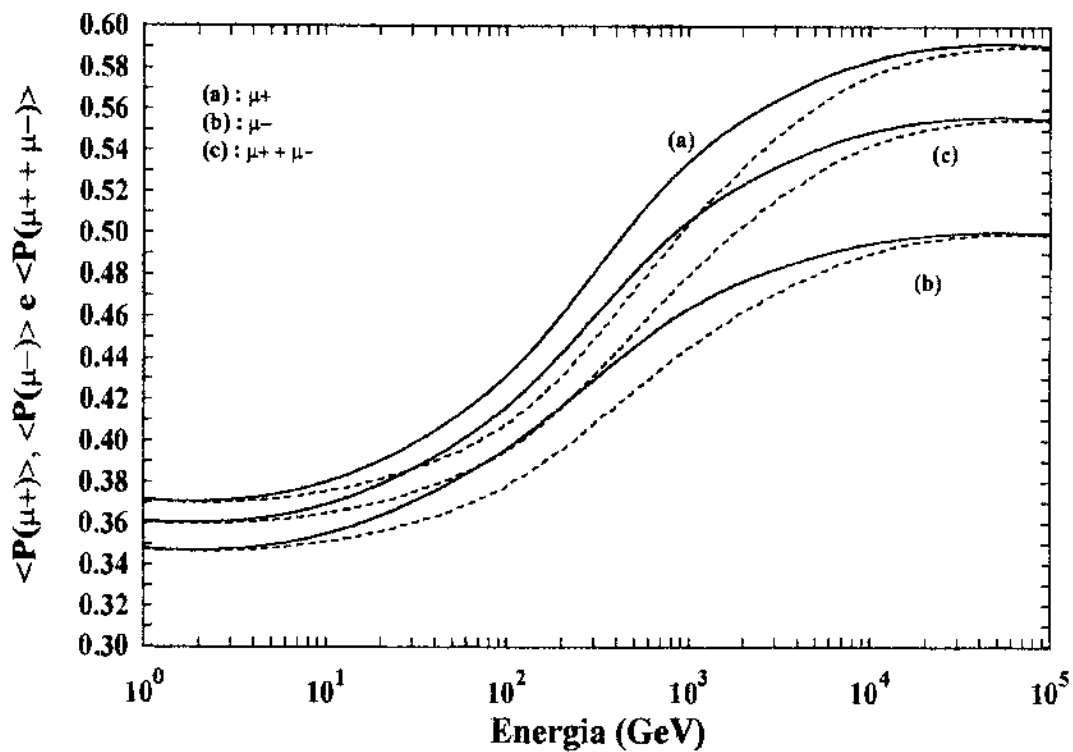


Figura B.1: Polarizações médias dos μ^+ ao nível do mar, para $\theta = 0^\circ$ (linhas cheias) e $\theta = 60^\circ$ (linhas tracejadas), em função da energia.

principais: π^\pm e K^\pm . Até agora considerou-se a polarização dos muons produzidos no ponto (t, θ^*) , entretanto, é necessário obter a polarização dos muons na detecção (por exemplo), ou seja, devemos integrar sob todos os pontos onde os muons são produzidos, levando-se em conta a perda de energia por ionização e seu decaimento em elétrons. Para esse cálculo considera-se quatro tipos de fluxos muônicos $\mu_{R,L}^\pm$. Isso pode ser obtido considerando que um μ^\pm produzido em um decaimento de um M^\pm tem uma probabilidade de ser *right* ou *left-handed* dada por:

$$P_{R,L} = \frac{1}{2} (1 \pm P(x)) \quad , \quad (\text{B.7})$$

onde $P(x)$ é definido pela expressão (B.4). As expressões de $P_R(x)$ e $P_L(x)$ são portanto, respectivamente:

$$P_R(x) = \frac{1}{1 - r_M} \left(1 - \frac{r_M}{x} \right) \quad (\text{B.8})$$

e

$$P_L(x) = \frac{1}{1 - r_M} \left(\frac{r_M}{x} - r_M \right) \quad . \quad (\text{B.9})$$

Assim, as funções de distribuições dos muons secundários do decaimento dos mesons que aparecem na equação (3.10) se modificam para

$$f_{M \rightarrow \mu_{R,L}^\pm}(\epsilon, E_M) = \frac{1}{E_M} \frac{1}{1 - r_M} P_{R,L}(x) \quad . \quad (\text{B.10})$$

Dessa maneira calcula-se separadamente os fluxos muônicos *right* e *left-handed* que vão decair produzindo os neutrinos.

Apêndice C

Cinemática dos Decaimentos

C.1 Decaimento dos Mesons

No limite ultrarrelativístico o espectro de energia da partícula b no decaimento $a \rightarrow b + X$ tem dependência de (E_b/E_a) [31].

$$f_{a \rightarrow b}(E_b, E_a) = \frac{1}{E_a} f_{a \rightarrow b}^*(E_b/E_a) \quad . \quad (\text{C.1})$$

No caso de decaimentos com dois corpos no estado final (dois leptons)

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (\text{C.2})$$

e

$$K^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \quad (\text{C.3})$$

tem-se

$$f_{\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm}^*(x) = \frac{1}{(1 - r_\pi)} \theta(x - r_\pi) \quad (\text{C.4})$$

$$f_{\pi^\pm \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}^*(x) = \frac{1}{(1 - r_\pi)} (1 - \theta(x - 1 + r_\pi)) \quad (\text{C.5})$$

$$f_{K^\pm \rightarrow \mu^\pm}(x) = \frac{1}{(1 - r_K)} \theta(x - r_K) \quad (\text{C.6})$$

e

$$f_{K^\pm \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}(x) = \frac{1}{(1 - r_K)} (1 - \theta(x - 1 + r_K)) \quad , \quad (\text{C.7})$$

onde $x = E_l/E_M$ e $r_M = (m_\mu/m_M)^2$, com $M = \pi$ ou K e θ é a função degrau de Heaviside.

Os limites das integrais E_{min} e E_{max} que aparecem na expressão (3.10) para os decaimentos acima são:

Para o decaimento (C.2)

i) Em $\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm$

$$E_{min} = E_\mu$$

$$E_{max} = E_\mu/r_\pi$$

ii) Em $\pi^\pm \longrightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$

$$E_{min} = E_\mu/(1 - r_\pi)$$

$$E_{max} = \infty$$

Para o decaimento (C.3) basta substituir, nas expressões acima, r_π por r_K .

Para os espectros de energia dos decaimentos com três corpos no estado final, em ν_e e $\bar{\nu}_e$, provenientes dos decaimentos semi-leptônicos dos kaons,

$$K^\pm \longrightarrow \pi^0 + e^\mp + \nu_e(\bar{\nu}_e) \quad (\text{C.8})$$

e

$$K_L^0 \longrightarrow \pi^\pm + e^\mp + \bar{\nu}_e(\nu_e) \quad (\text{C.9})$$

em um referencial onde os kaons são ultrarelativísticos é:

$$f_{K \rightarrow \nu_e}(y) = \frac{1}{g(\xi)} \left\{ \frac{(12 - 24\xi^2)(1 - \xi^2)^2}{2} - 4(1 - \xi^2)^3 - 12\xi^4(1 - \xi^2) + \right.$$

$$+12\xi^4 y - \frac{(12 - 24\xi^2)}{2} y^2 + 4y^3 + 12\xi^4 \ln\left(\frac{1-y}{\xi^2}\right) \} , \quad (\text{C.10})$$

com

$$\xi = m_\pi/m_K , \quad (\text{C.11})$$

$$y = E_{\nu_e}/E_K \quad (\text{C.12})$$

e

$$g(\xi) = 1 - 8\xi^2 - 24\xi^4 \ln\xi + 8\xi^6 - \xi^8 . \quad (\text{C.13})$$

Os limites E_{min} e E_{max} são, respectivamente, $E_\nu/(1 - \xi^2)$ e ∞ .

C.2 Decaimento do Muon

O espectro de energia dos neutrinos vindos do decaimento $\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, em um sistema de coordenadas no qual o muon está em repouso, calculado negligenciando a massa do elétron e correções radiativas, é:

$$\text{para } \nu_\mu \text{ e } e^- \longrightarrow g(x) = x^2(3 - 2x) + \cos\theta x^2(1 - 2x) \quad (\text{C.14})$$

$$\text{e para } \bar{\nu}_e \longrightarrow g(x) = 6x^2(1 - x) + \cos\theta 6x^2(1 - x) , \quad (\text{C.15})$$

com $x = 2E_\nu/m_\mu$, $0 \leq x \leq 1$ e θ o ângulo entre a direção da partícula emitida com o spin do muon. A normalização é escolhida tal que:

$$\int_0^1 dx \int_{-1}^1 d(\cos\theta) g(x, \cos\theta) = 1 . \quad (\text{C.16})$$

Em um sistema onde o muon é ultrarelativístico e com energia E_μ e helicidade P (P é o valor esperado do momento angular na direção do movimento em unidades de $\hbar/2$), os

espectros de energia dos neutrinos são:

$$f_{\mu_s^- \rightarrow \nu_\mu}(y) = \left(\frac{5}{3} - 3y^2 + \frac{4}{3}y^3 \right) + P_s \left(\frac{1}{3} - 3y^2 + \frac{8}{3}y^3 \right) \quad (\text{C.17})$$

e

$$f_{\mu_s^- \rightarrow \bar{\nu}_e}(y) = \left(2 - 6y^2 + 4y^3 \right) + P_s \left(-2 + 12y - 18y^2 + 8y^3 \right) \quad , \quad (\text{C.18})$$

onde $y = E_\nu/E_\mu$ e $s = R$ ou L .

Os espectros de energia dos neutrinos originados do decaimento do μ_s^+ são iguais aos que aparecem nas expressões acima, trocando-se P_s por $-P_s$.

Os limites de integração para os decaimentos dos μ_s^\pm são $E_{\min} = E_\nu$ e $E_{\max} \rightarrow \infty$.

Nas equações (C.17) e (C.18) a primeira parte do segundo membro refere-se aos decaimentos dos muons sem considerar a polarização.

Apêndice D

Modelo para a Atmosfera Terrestre

Quando se calcula os fluxos de diferentes partículas secundárias da radiação cósmica na atmosfera, é necessário se conhecer como a densidade varia com a altitude acima do nível do mar ou equivalentemente se estabelecer a relação entre a profundidade atmosférica e a altitude.

O modelo usado neste trabalho foi desenvolvido por K. Maeda [49], baseado na chamada Atmosfera Padrão. Esse modelo é estabelecido a partir de três hipóteses fundamentais,

- a) A composição do ar não se altera com a altitude.
- b) A equação de estado que governa o ar é aproximadamente a de um gás ideal.
- c) A atmosfera está em um equilíbrio hidrostático, ou seja, $g\rho(h) = -\frac{dp(h)}{dh}$ (g é a aceleração da gravidade, $p(h)$ é a pressão na altitude h e $\rho(h)$ é a densidade atmosférica em h).

O perfil da densidade atmosférica fica completamente definido pelo perfil da temperatura e pela profundidade atmosférica ao nível do mar x_0 .

O ajuste de K. Maeda consiste em se escolher uma temperatura constante na estratosfera ($h \geq h_t$) e de uma dependência linear na troposfera ($h \leq h_t$). A temperatura ao nível do

mar é relacionada à temperatura na estratosfera através do gradiente da temperatura na troposfera (Γ), $T_0 = T_S - \Gamma h_t$.

Os quatro parâmetros abaixo relacionados e o valor médio da massa molecular do ar definem completamente a atmosfera,

$$z_0 = 1030,0 \text{ g/cm}^2 \quad , \quad T_S = -56,5^0 \text{ C} \quad ,$$

$$\Gamma = -\frac{dT}{dh} = 6,5^0 \text{ C/km} \quad , \quad h_t = 11 \text{ km} \quad \text{e} \quad \langle m_{ar} \rangle = 4,811 \cdot 10^{-23} \text{ g} \quad .$$

A densidade, em g/cm^3 , e a profundidade atmosférica em função da altitude em km são, então, dadas por:

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}} & \text{para } h \geq h_t \quad (\text{isotérmica}) \\ B(h_b - h)^\alpha & \text{para } h \leq h_t \quad (\text{politrópica}) \end{cases}$$

e

$$z(h) = \begin{cases} \rho_0 h_0 e^{-\frac{h}{h_0}} & h \geq h_t \\ A(h_b - h)^{\alpha+1} & h \leq h_t \end{cases}$$

A densidade pode também ser expressa em termos da profundidade atmosférica.

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{z}{h_0} \quad , \quad z \leq z_t \quad (\text{isotérmica}) \\ cz^\beta \quad , \quad z \geq z_t \quad (\text{politrópica}) \end{cases}$$

As constantes que aparecem nas equações acima são dadas por:

$$h_0 = \frac{T_S K_B}{g \langle m \rangle} \quad , \quad h_a = \frac{T_0 K_B}{g \langle m \rangle} \quad , \quad h_b = \frac{T_0}{\Gamma} \quad , \quad \alpha = \frac{h_b}{h_a} - 1 \quad , \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha+1} \quad , \quad A = \frac{z_0}{h_b h_a^\alpha} \left(\frac{h_0 - h_t}{h_b - h_t} \right)^\alpha \quad ,$$

$$B = A(\alpha + 1) \quad , \quad C = \frac{B}{A(\alpha+1)} \quad , \quad \rho_0 = \frac{z_0}{h_b} e^{\frac{h_t}{h_0}} (\alpha + 1) \left(1 - \frac{h_t}{h_0} \right)^\alpha \quad \text{e} \quad z_t = \rho_0 h_0 e^{-\frac{h_t}{h_0}} \quad .$$

O valor numérico das constantes são:

$$h_0 = 6,34 \text{ km} \quad , \quad z_t = 230,0 \text{ g/cm}^2 \quad , \quad \rho_0 = 2,054 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

$$h_b = 44,343 \text{ km} \quad , \quad A = 2,303 \cdot 10^{-6} \quad , \quad B = 1,210 \cdot 10^{-10}$$

$$C = 4,439 \cdot 10^{-6} \quad , \quad \alpha = 4,253 \quad , \quad \beta = 0,81$$

e K_B é a constante de Boltzmann.

Bibliografia

- [1] C.T.R. Wilson, Proc. of Royal Soc. **A68** (1900) 151; **A69** (1901) 277.
- [2] J. Elster, Z. Phys. **2** (1900) 560; H. Geitel, Z. Phys. **2** (1900) 116.
- [3] V. Hess, Z. Phys. **13** (1912) 1084; **14** (1913) 610.
- [4] W. Kollhörster, Z. Phys **14** (1913) 1153.
- [5] G. Pfozzer, Z. Phys. **23** (1916) 102.
- [6] B. Rossi, Z. Physik. **82** (1933) 151.
- [7] J.G. Rushbrooke, 21st Int. Conf. on High Energy Phys., Paris (1982); CERN-EP (1982) 157.
- [8] J.F. Carlson e J.R. Oppenheimer; Phys. Rev. **51** (1937) 220.
- [9] H.J. Babha e W. Heitler, Proc. Royal Soc. **A159** (1937) 432.
- [10] L. Landau e G. Rumer, Proc. Royal Soc. **A166** (1938) 213.
- [11] I.L. Rozental, Dok. Akad. Nauk. USSR **80** (1951) 731; Von P. Budini e G. Molière, Kosmische Strahlung, Springer-Verlag (1st edition) (1952) 367; S. Hayakawa, J. Nishimura e Y. Yamamoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **32** (1964) 104.

- [12] F.M.O. Castro, An. Ac. Bras. Ciências **49** (1977) 113; **51** (1979) 1; CBPF-NF-064 (1985).
- [13] H.M. Portella, H. Shigueoka, A.S. Gomes e C.E.C. Lima, J. Phys. G **27** (2001) 191; H.M. Portella, L.C.S. Oliveira, C.E.C. Lima e N. Amato, ICRR-Report **454** (1999) 31; H.M. Portella, N. Amato, R.H.C. Maldonado, A. Gomes e C.E.C. Lima, ICRR-Report **347** (1995) 61.
- [14] J. Bellandi Filho *et al.*, Hadronic Journal **12** (1989) 13.
- [15] R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367; Phys. Rev. **D84** (1951) 108.
- [16] H.M. Portella, A.S. Gomes, R.H.C. Maldonado e N. Amato, J. Phys. A **31** (1998) 6861; H.M. Portella, F.M.O. Castro e N. Arata, J. Phys. G **14** (1988) 1157.
- [17] T.K. Gaisser, Cosmic Rays and Particle Physics, (1st edition) *Cambridge University Press* (1990).
- [18] C.V. Achar *et al.*, Phys. Lett. **18** (1965a) 196; Phys. Lett. **19** (1965b) 78.
- [19] F. Reines *et al.*, Phys. Rev. **D4** (1971) 80.
- [20] H.E. Bergeson, G.L. Cassiday *et al.*, Pre-print of Univ. of Utah (1973).
- [21] A.E. Chudakov *et al.*, Proc. of XVI ICRC (Kyoto) **10** (1979) 287.
- [22] D. Casper *et al.*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2561; R. Becker-Szendy *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992a) 1010; R. Clark *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 345.
- [23] K.S. Hirata *et al.*, Phys. Lett. **B205** (1988) 416.

- [24] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. **B335** (1994) 237.
- [25] C.H. Berger *et al.*, Nucl. Instrum. and Methods A **326** (1994) 1; **262** (1987) 463; K. Daum *et al.*, Z. Phys. **C66** (1995) 417.
- [26] M. Aglietta *et al.*, Europhys. Lett. **8** (1989) 611.
- [27] W.W.M. Allison *et al.*; Phys. Lett. **B449** (1999) 137.
- [28] J.G. Learned, S. Parkvasa e T.J. Weiler, Phys. Lett. **B207** (1988) 79.
- [29] H.M. Portella, N. Amato, R.H.C. Maldonado e C.E.C. Lima, Proc. of the 22nd ICRC, (Dublin) **HE-Session** (1991) 995; Proc. of 24th ICRC, (Roma) **HE-Session** (1995) 480.
- [30] V. Agrawal, T.K. Gaissler, P. Lipari e T. Stanev, Phys. Rev. **D53** (1996) 1314.
- [31] P. Lipari, Astroparticle Phys. **1** (1993) 195.
- [32] M.G. Thomson e M.R. Whalley, J. Phys. G **3** (1977) 97.
- [33] K. Mitsui, Y. Minorikawa, H. Komori, Il Nuovo Cimento **C9** (1986) 995.
- [34] A.V. Butkevich, L.G. Dedenko e I.M. Zheleznykh, Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1989) 90.
- [35] L.V. Volkova, Proc. of the 1st Gleb Wataghin School on High Energy Phenomenology (Campinas) **1** (1990) 103; L.V. Volkova, Sov. Journal of Nucl. Phys. **31** (1980) 784; L.V. Volkova, G.T. Zatsepin e L.A. Kuz'michev, Sov. J. Nucl. Phys. **29**(5) (1979) 645.
- [36] M. Honda *et al.*, Phys. Rev. **D54** (1996) 5578.
- [37] K. Mitsui, Y. Minorikawa e M. Takazawa, Il Nuovo Cimento **C1** (1998) 99.

- [38] H.M. Portella, R.H.C. Maldonado e C.E. Navia, Proc. of the 21st ICRC (Adelaide) **9** (1990) 232.
- [39] R.P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 415.
- [40] H.M. Portella, L.C.S. Oliveira, C.E.C. Lima e A.S. Gomes, J. Phys. G **28** (2002) 415.
- [41] G.T. Zatspein e V.A. Kuz'min, Sov. Phys. JETP, **12**, n^o 8 (1961) 1171.
- [42] W. Lohmann, R. Kopp e R. Vass, CERN Yellow Report n^o EP/85-03.
- [43] A.S. Gomes, Tese de Doutorado (CBPF) (1999).
- [44] R. Hagedorn, Relativistic Kinematics, W.A. Benjamin, Inc. (1973).
- [45] Particle Data Group, Phys. Rev. **D66** (2002) 010001.
- [46] A.E. Brenner *et al.*, Phys. Rev. **D26** (1982) 1497.
- [47] D.S. Barton *et al.*, Phys. Rev. **D27** (1983) 2580.
- [48] K. Maeda, Proc. of the 11st I.C.R.C. (Budapest), (1969) 139.
- [49] K. Maeda, J. Geophys. **69** (1964) 1725; Proc. of the VI Interam. Seminar on Cosmic Ray **4** (1970) 847.
- [50] J.L. Osborne, S.S. Said e A.W. Wolfendale, Proc. Phys. Soc. **86** (1965) 93.
- [51] J.W. Elbert *et al.*, Phys. Rev. **D12** (1975) 660.
- [52] S.I. Klimushin, E.V. Bugaev e I.A. Sokalski, Phys. Rev. **D64** (2001) 014016-1.
- [53] S. Hayakawa, Cosmic Rays Physics, *Wiley-Interscience* (1969).

- [54] S. Tsuji *et al.*, *J. Phys. G* **24** (1998) 1805.
- [55] O.C. Allkofer, K. Carstensen, W.D. Dau, *Phys. Lett.***B36** (1971) 425.
- [56] LVD Collaboration, M. Aglieta *et al.*, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 092005-1.
- [57] S. Matsumo *et al.*, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 1.
- [58] M. Boezio *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 4757; *Phys. Rev.* **D62** (2000) 032007.
- [59] J. Kremer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4241.
- [60] M.P. de Pascale *et al.*, *J. Geophys. Res.* **98** (1993) 3501.
- [61] MARS Collaboration, P.N. Lebedev Phys. Inst. - preprint n^o95 (1980).
- [62] O.C. Allkofer *et al.*, *Proc. of the 12nd I.C.R.C. (Hobart)*, **4** (1971) 1319.
- [63] J.M. Baxendale *et al.*, *Proc. of the 14th I.C.R.C. (Munich)*, **6** (1975) 2011.
- [64] G.K. Ashley II *et al.*, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 20.
- [65] O.C. Allkofer *et al.*, *Proc. of the 16th I.C.R.C. (Kyoto)*, **16** (1979).
- [66] O.C. Allkoffer *et al.*, *Report IFKKI, University of Kiel* **78/3** (1978).
- [67] T. Kajita e Y. Totsuka, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 85.
- [68] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **26** (1968) 984; S.M. Bilenky e B. Pontecorvo, *Phys. Rep.* **41** (1978) 225; T.K. Kuo e J. Pantaleone, *Rev. Mod. Phys.* **59** n^o2 (1987) 505; V. Barger, R.J.N Phillips e K. Whisnant, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 1110; C.E.C. Lima, Tese de Mestrado (CBPF) (1997).

- [69] G.L. Fogli *et al.*, Phys.Rev. **D59** (1998) 033001-1.
- [70] A. Acker, J.G. Learned, S. Parkvasa, Phys. Lett. **B298** (1993) 149.
- [71] A.K. Mann, Phys. Rev. **D48** (1993) 422.
- [72] G.L. Fogli, E. Lisi e A. Marrone, Phys. Rev. **D57** (1998) 5893.
- [73] S. Barr, T.K. Gaisser, P. Lipari e S. Tilav, Phys. Lett. **B214** (1988) 147.
- [74] E.V. Bugaev e V.A. Naumov, Phys. Lett. **B232** (1989) 391.
- [75] L.V. Wolfenstein, Phys. Rev. **D17** (1978) 2369; S.P. Mikheyev e A.Yu Smirnov, Nuovo Cimento **C 9** (1986) 17.
- [76] P. Lipari, Nucl. Phys. **B100** (2001) 136.
- [77] AMANDA Collaboration, A. Karle, Proc. of 26th I.C.R.C., Utah, **2** (1999) 221.
- [78] Pierre Auger Project Design Report, disponível em: <http://www.auger.org/admin/DesignReport>, acessado em 18 de novembro de 2002.
- [79] G. Barr, for the HARP Collaboration, Proc. of the 27th I.C.R.C., Hamburgo, **A1** (2001) 1585.
- [80] M. Circella *et al.*, Nucl. Phys. **B100** (2001) 152; M. Boezio *et al.*, Ap. J. **518** (1999) 457; T. Samuki *et al.*, Ap. J. **545** (2000) 1135.
- [81] K. Nishikawa, Nucl. Phys.-B, Proc. Suppl. **77** (1999) 198.
- [82] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, (1st edition) *Springer-Verlag* (1966).

“Fluxos de Léptons e as Razões Lepton- Antilepton ao nível do mar”

Carlos Eduardo Campos Lima

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Hélio Manoel Portella – Presidente/UFF

Luis Carlos Santos de Oliveira – CBPF

José Augusto Chinellato – UNICAMP

Marcio José Menon – UNICAMP

Moacyr Henrique Gomes e Souza – CBPF

Odilon Antonio Paula Tavares – CBPF

Rio de Janeiro, 30 de janeiro de 2003