

TESE DE
DOUTORADO

Modelo Cosmológico Inflacionário
baseado nos
Efeitos Quânticos de Vácuo

Ana das Mercês Pelinson

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF
Rio de Janeiro, fevereiro de 2003

Dedicatória

Ao meu irmão Agnaldo,
meu anjinho!

Agradecimentos

- Ao meu orientador Prof. Dr. Ilya L. Shapiro pelos problemas sugeridos, atenção, auxílio e empenho na pesquisa.
- Ao meu co-orientador Prof. Dr. Júlio Fabris pelas discussões da teoria e por propor este trabalho na escola de verão da UFES juntamente com meu orientador.
- Ao Prof. Dr. J. A. Heläyel pela disponibilidade e auxílio no trabalho e participação em escolas e congressos.
- A todos do CBPF pela atenção em todas as circunstâncias.
- A todos do Departamento de Física da UFJF por auxiliar no trabalho, em especial, o Prof. Dr. Flávio I. Takakura pela colaboração e apoio.
- Aos meus pais que acreditaram em mim e me apoiaram em todas as horas.
- Aos amigos, que dividiram comigo cada esforço e alegria.
- A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, neste trabalho.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O propósito desta tese é apresentar os desenvolvimentos atualizados da inflação induzida pela anomalia. Este modelo de inflação baseia-se completamente nos princípios da Teoria Quântica de Campos (TQC) e na abordagem efetiva comum que nos habilita separar a descrição de fenômenos de baixa energia de uma física fundamental desconhecida que supostamente vale em altas energias. A tese inicia com uma breve revisão do formalismo da TQC em espaço-tempo curvo, incluindo a derivação da anomalia conforme para campos conformes sem massa no fundo da métrica clássica. Logo após, a solução de Starobinsky é reproduzida usando o método de ação efetiva e generalizado para constante cosmológica não-nula. As condições de estabilidade da solução inflacionária são investigadas usando o método de Lyapunov e são mostradas serem independentes da presença da constante cosmológica e da escolha da topologia global $k = 0, \pm 1$. A estabilidade da inflação depende do conteúdo de partículas da teoria e admite uma interface entre a inflação estável em altas energias e o comportamento de FRW em baixas energias. Esta transição é causada pelo decréscimo do parâmetro de Hubble durante a inflação. Para ver a origem deste decréscimo, a ação efetiva de vácuo é obtida para a teoria dos campos quânticos massivos no fundo da métrica inflacionária. O resultado é um modelo de Starobinsky modificado que parece ser um candidato mais natural ao modelo de inflação. As vantagens deste modelo incluem a ausência de *inflaton*, a não necessidade de ajuste fino da teoria ou/e de dados iniciais, passagem automática para FRW, estabilidade e concordância em todos os estágios da inflação. Uma das vantagens mais importantes com relação ao modelo original de Starobinsky é o espectro de ondas gravitacionais completamente controlável que não requer nenhum tipo de ajuste fino.

Abstract

The purpose of this thesis is to present up-to-date developments in the anomaly-induced inflation. This model of inflation is completely based on the principles of Quantum Field Theory and on the standard effective approach which enables one to separate the description of the low-energy phenomena from the unknown fundamental physics which supposed to hold at high energies. The thesis starts from the brief review of the known formalism of Quantum Field Theory in curved space-time, including the derivation of the conformal anomaly for the massless conformal fields on classical metric background. After that, the known Starobinsky solution is reproduced using the effective action method, and is generalized for the case of the nonzero cosmological constant. The conditions of stability for the inflationary solution are investigated using the Lyapunov method and are shown to be independent on the presence of the cosmological constant and on the choice of the global topology $k = 0, \pm 1$. The stability of inflation depends on the particle content of the underlying theory and admits an attractive interface between the stable inflation at high energies and the graceful exit to the FRW behavior at low energies. This transition is caused by the decrease of the Hubble parameter during inflation. In order to see the origin of this decrease, the effective action of vacuum is derived for the massive quantum fields on the background of the inflationary metric. The result is the modified Starobinsky model, which looks as the most natural candidate to be the model of inflation. The advantages of this model include the absence of *inflaton*, no need for the fine-tuning of the parameters of the theory or/and initial data, automatic graceful exit to FRW, the stability and robustness of all stages of inflation. One of the most important advantages with respect to the original Starobinsky model is the completely controllable spectrum of the gravitational waves, which does not require any sort of a fine-tuning.

Índice

1	Introdução	1
2	Uma breve revisão do Modelo Cosmológico Padrão	6
3	Elementos da Teoria Quântica de Campos em espaço curvo: ação efetiva induzida pela anomalia	12
3.1	Introdução geral	12
3.2	Método de Schwinger-DeWitt	16
3.3	Equações do grupo de renormalização	26
3.4	Renormalização para a ação do vácuo	28
3.5	Anomalia do traço do tensor momento-energia	30
3.5.1	Simetria conforme local	31
3.5.2	Divergências e anomalia	32
3.6	Ação induzida pela anomalia	33
4	Modelo cosmológico induzido pelos efeitos quânticos dos campos sem massa	38
4.1	Soluções cosmológicas particulares	39
4.2	Solução inflacionária sem singularidade	42
4.3	Estudo da estabilidade da solução inflacionária por métodos numéricos	44
4.4	Estudo da estabilidade das soluções particulares por métodos analíticos	50
4.4.1	Critério de estabilidade das soluções	53

5 Ondas gravitacionais	58
5.1 Perturbações da métrica para modelo inflacionário baseado em constante cosmológica ou inflaton	58
5.2 Cálculos das perturbações da métrica para a ação induzida com campos sem massa	61
5.3 O problema de dados iniciais e análise espectral	64
6 Modelo cosmológico induzido pelos efeitos dos campos massivos	70
6.1 Ação efetiva para campos massivos e solução cosmológica	70
6.2 A estabilidade no regime de transição para FRW	78
6.3 Ondas gravitacionais do modelo induzido com campos massivos	83
7 Conclusão	88
A Transformações conformes	90
B Cálculo das perturbações da métrica para ação induzida	94

Capítulo 1

Introdução

Historicamente, a Teoria Quântica de Campos está intimamente relacionada com a física de partículas. Por enquanto, experimentos realizados em aceleradores confirmam a validade do Modelo Padrão de partículas elementares (veja, por exemplo, [87], [26], [71]). Porém, mesmo por meio de aceleradores mais modernos, não é possível estudar a física de energias mais altas, como as Teorias de Grande Unificação GUT's e Gravitação Quântica.

A aplicação da Teoria Quântica de Campos abrange atualmente várias áreas como a física estatística, matéria condensada, cosmologia e vários outros ramos da física [11]. Em particular, em cosmologia, temos a possibilidade de considerar o Universo primordial como um laboratório para o estudo dos fenômenos numa faixa de energia que não pode ser atingida pelos aceleradores. Inclusive esperamos que, nos próximos anos, possamos obter dados experimentais sobre ondas gravitacionais que são geradas no final do período inflacionário. Assim, poderemos ter maiores informações sobre os fenômenos ocorridos no Universo primordial. Outro aspecto relevante é que a Gravitação Quântica não é renormalizável. Uma das razões deve-se ao fato de que sua constante de acoplamento tem dimensão de comprimento, o que não ocorre com as teorias renormalizáveis como eletrodinâmica quântica e teoria de Yang-Mills. Com isto, outras teorias têm sido desenvolvidas como a teoria de (super)corda e supergravidade (veja, por exemplo, [42], [68]) com o objetivo de obter uma teoria unificada de todas as interações. Por enquanto, a realização deste programa está longe de alcançar o sucesso. Existem cinco tipos de teorias de cordas consistentes a 10 dimensões. Elas se conectam por relações de dualidade. Supeita-se que estas cinco teorias de cordas sejam diferentes manifestações de uma única

teoria a 11 dimensões, denominada teoria- M , da qual só se conheceria seu limite a baixas energias, a supergravidade a 11 dimensões. Por conseguinte, o conteúdo físico das teorias de cordas é ainda um problema em aberto. No entanto, existe uma possibilidade alternativa de conseguir bons resultados usando abordagem efetiva da TQC (veja [85], [26], [71] entre outros). Assim, podemos estudar fenômenos de energia relativamente baixas sem que a física de altas energias influencie os resultados.

Um exemplo importante na área de gravitação é a abordagem semi-clássica, onde a métrica é considerada como um parâmetro externo para a quantização dos campos de matéria. Existem várias tentativas em aplicar aproximação semi-clássica em Cosmologia. Em particular, no trabalho de [33] foi utilizado correções quânticas na ação de Einstein-Hilbert (EH). Nas pesquisas de Starobinsky [81] em 1980 (veja também [56] onde as mesmas soluções foram obtidas), foi construído um modelo sem singularidade inicial, baseado na anomalia do traço. Esta anomalia vem do fato de que o traço do tensor momento-energia, a nível quântico, não é nulo. A anomalia pode ser calculada e, a partir dela, chega-se a uma equação para a correção quântica finita para a ação clássica do vácuo (veja [72], [34]). Vários aspectos deste modelo foram discutidos em outros trabalhos [1], [61]. Infelizmente, este modelo perdeu sua popularidade após os trabalhos históricos de Guth [44], no qual a inflação resulta como consequência da quebra espontânea de simetria no Modelo Padrão das interações eletrofracas. Nas pesquisas seguintes, o modelo de Guth foi modificado, e como resultado apareceram vários modelos de inflação (modelo caótico, “slow-roll” etc). O problema destes modelos surgiu pelo fato de ter que introduzir um campo escalar (chamado inflaton) para produzir inflação com um potencial de forma muito especial (veja [7], [55], [51]). No entanto, nestes modelos “padrões” de inflação é importante a presença deste campo escalar e um potencial que reproduz a constante cosmológica durante o período inflacionário e atinge seu estado fundamental no final deste período. Porém, estes modelos exigem ajuste fino (fine tuning), escolha dos parâmetros do potencial ou dos dados iniciais etc. A precisão deste ajuste é muito grande, tipicamente da ordem de 10^{-10} . Além disso, os potenciais utilizados nos modelos de inflação baseados no inflaton para produzir a inflação, são postulados de alguma forma apropriada, na maioria destes modelos. Em outras palavras, estes potenciais são fenomenológicos e dificilmente

podem ser obtidos a partir de alguma versão da Teoria Quântica de Campos. Além disso, o inflaton deve ser algum campo escalar com um valor esperado de energia (VEV) da ordem da energia de Planck. A existência de tal campo é inconsistente com a física moderna de altas energias, que favorece outros candidatos como a teoria de cordas para um papel como teoria fundamental. Por outro lado, os modelos inflacionários baseados em teoria de cordas encontram dificuldades com relação à saída da inflação (graceful exit), veja por exemplo [52]. Ao mesmo tempo o Modelo de Starobinsky original também exige ajuste fino de vários parâmetros, como dados iniciais e parâmetros da ação do vácuo.

Em nossos trabalhos, aplicamos os métodos da teoria quântica de campos efetiva numa abordagem semi-clássica para a gravitação. Como resultado, surgiu um modelo que chamamos de *Modelo de Starobinsky modificado* [31], [32], [76], [66]. Neste modelo, resolvemos vários problemas do modelo de Starobinsky original. No momento, nosso modelo de inflação é o único que não exige nenhum ajuste fino para os dados iniciais, nem mesmo para se chegar à fase de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), não inflacionária, dominada pela radiação.

Aqui voltaremos à origem da inflação, segundo o Modelo de Starobinsky [81], [56] e derivaremos os efeitos quânticos, ou seja, uma correção quântica à equação clássica de Einstein. No caso de campos sem massa reproduzimos os resultados de [81], usando ação efetiva e princípio da ação mínima, enquanto os artigos [81], [56] utilizaram as componentes-(0, 0) da equação de Einstein-Hilbert. Investigamos as soluções cosmológicas para diferentes valores do parâmetro $k = 0, 1, -1$ e também com constante cosmológica Λ . Estas soluções são parecidas com as encontradas por Starobinsky, porém agora, o parâmetro de Hubble H é modificado pela presença da constante cosmológica. Estudamos estabilidade destas soluções e verificamos que, na aproximação para tempos grandes (final da inflação), temos a mesma equação perturbada e a condição de estabilidade para todos os valores de curvatura k . Outro fator importante é que esta condição de estabilidade não depende da constante cosmológica. Portanto, isto simplifica a investigação posterior de uma estabilidade para situação mais complicada, quando devemos considerar os efeitos de campos massivos. Nesta situação, podemos utilizar os resultados de campos sem massa considerando k e Λ nulos, uma vez que não surge termos novos com esta dependência.

Para nosso modelo de inflação é importante mostrar que após um certo tempo a partir do início da inflação os efeitos das massas dos campos quânticos ganham importância tal que isto provoca uma desaceleração da inflação [66]. Isto é especialmente importante se supormos que existe supersimetria em energias altas. Já na última fase da inflação, as partículas- S (parceiros supersimétricos das partículas do Modelo Padrão) tornam-se muito pesadas comparando com o parâmetro de Hubble (que define uma escala de massa) e não produzem efeitos quânticos de vácuo. Isto acontece devido a um fenômeno que se chama desacoplamento (detalhes de desacoplamento para campos quânticos massivos em espaço-tempo curvo foram considerados em [41]). Como resultado deste fenômeno, o Universo passa para uma inflação instável e finalmente acontece uma transição para a evolução FRW dominada pela radiação. Outro aspecto importante é a amplificação das perturbações da métrica (ondas gravitacionais) durante o período inflacionário, especialmente nos últimos 65 e -folds (uma expansão em e^{65} ordens de magnitude começando de algum tempo inicial) da fase estável. Investigamos o espectro de potências destas ondas e encontramos concordância no índice espectral tanto com os modelos de inflação baseados em inflaton, quanto com os dados observacionais.

Durante as investigações utilizamos o pacote algébrico *Mathematica* [89], também Fortran e método de aproximação analítica baseado no critério de Routh-Hurwitz [20]. Usamos também o programa CMBFast [74] para obter o espectro de anisotropia da radiação cósmica de fundo devido as ondas gravitacionais.

Nesta tese apresentaremos uma visão completa do modelo de inflação baseado nos efeitos quânticos de vácuo. Uma parte desta tese é não original: a revisão nos capítulos 2 e 3 foi baseada em livros na área (tais como [85], [53], [17] e outros) e também em notas de aula [78]. Por outro lado, os capítulos 4, 5 e 6 são originais.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, derivamos a solução cosmológica clássica [85] no espaço plano. No capítulo 3, apresentamos uma rápida revisão de renormalização da teoria quântica dos campos com uma métrica externa como fundo [11] (aqui seguimos como base o livro [17]) e, posteriormente, consideramos em detalhes a renormalização da ação do vácuo. Logo a seguir, revemos a derivação da correção quântica para a ação clássica gravitacional [72, 34]. Mostramos que esta correção resulta

da anomalia do traço [27] e que contém um funcional conformalmente invariante desconhecido. Porém, para a métrica FRW (Friedmann-Robertson-Walker), este funcional é irrelevante e a solução é, dentro deste modelo, exata [72, 34]. No capítulo 4, vamos considerar o modelo do Universo primordial preenchido por radiação livre. Esta radiação é composta por um conjunto de campos de matéria livre, sem massa e conformalmente invariantes num espaço-tempo curvo arbitrário. Também levamos em conta a correção quântica para a ação clássica gravitacional apresentada no capítulo 3. Ainda no capítulo 4 apresentamos as soluções particulares para os valores de $k = 0, 1, -1$ e com constante cosmológica Λ . Após isto, mostramos nossos estudos numéricos e análises físicas da inflação para dois casos específicos – Modelo Padrão de física de partículas (SM) e modelos de GUT – que surge após compactificação da teoria- M para 4 dimensões, para k e Λ nulos. Verificamos que a estabilidade ou instabilidade das perturbações do fator conforme depende do número dos campos com spin $0, \frac{1}{2}$ e 1 e não depende de Λ . Além disso, mostramos que na aproximação para tempos grandes, a estabilidade para curvatura não nula, se comporta identicamente quando consideramos $k = 0$. No capítulo 5, encontramos a equação das perturbações da métrica para $k = 0$ seguida pela análise espectral das ondas gravitacionais por métodos numéricos utilizando o pacote *Mathematica* e comparamos com a previsão teórica do modelo de inflação baseado no inflaton e com dados observacionais. Posteriormente, no capítulo 6, levamos em conta a contribuição dos campos massivos e investigamos o comportamento das perturbações do fator conforme da métrica por método analítico e análise numérica utilizando os programas *Mathematica* e Fortran. Finalmente, fazemos estudo da estabilidade das perturbações da métrica via método de aproximação analítica. Seguem-se as Conclusões Gerais e os Apêndices A, B onde são reunidos expressões auxiliares no desenvolvimento dos tópicos estudados.

Capítulo 2

Uma breve revisão do Modelo Cosmológico Padrão

Neste capítulo vamos rever o Modelo Cosmológico Padrão, inclusive quando a constante cosmológica $\Lambda \neq 0$. Vamos ver dois tratamentos para o modelo, primeiro utilizando as equações de Einstein e posteriormente, considerando o princípio variacional, onde a métrica é introduzida já a nível da ação. Veremos que, independente do tratamento, temos as soluções com singularidade (o Universo se reduz a um ponto) para duas versões da equação de estado da matéria: radiação (Universo primordial) e poeira (Universo atual) quando consideramos $\Lambda = 0$.

O Modelo Cosmológico Padrão baseia-se na hipótese de um Universo homogêneo e isotrópico [85]. Isto implica que ele pode ser descrito pela métrica de Robertson-Walker. Ou seja, o elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right], \quad (2.1)$$

onde r é a distância de algum ponto do espaço dado (para espaço-tempo homogêneo e isotrópico a escolha deste ponto não é importante), $a(t)$ é uma função somente da variável temporal e $d\Omega$ é o elemento do ângulo sólido. O valor de k define a curvatura ${}^{(3)}\mathcal{K}$ da seção espacial M^3 de uma variedade 4-dimensional M^{3+1}

$${}^{(3)}\mathcal{K} = \frac{k}{a^2}. \quad (2.2)$$

Portanto, para $k = 0$ o espaço M^3 é plano, $k = 1$ o espaço M^3 é uma esfera 3-dimensional e $k = -1$ o espaço M^3 é uma pseudo-esfera 3-dimensional.

Consideremos a solução das equações de Einstein para $k = 0$. Primeiro, temos que definir uma fonte. Suponha o Universo preenchido por matéria que pode ser, em escalas cósmicas, descrita como um fluido perfeito. As únicas características deste fluido são a densidade de energia ρ e pressão p , na qual tem que satisfazer alguma equação de estado. O tensor momento-energia pode ser apresentado, em coordenadas co-móveis [53] como

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (2.3)$$

Para chegarmos na equação para $a(t)$ precisamos encontrar os Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (2.4)$$

considerando a métrica (2.1). Após cálculos algébricos, obtemos as componentes não nulas de (2.4) que contribuirão para as equações de movimento. E, conseqüentemente, as do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e curvatura escalar R para as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Primeiramente vamos considerar constante cosmológica $\Lambda = 0$. Com cálculos diretos, usando as componentes de (2.5), encontramos as seguintes equações de Einstein:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.6)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é a constante de Hubble, e

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2\ddot{a}}{a} = -8\pi G p. \quad (2.7)$$

Aqui adotamos o sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$. A equação

$$\frac{d\rho}{\rho + p} = -\frac{3da}{a} \quad (2.8)$$

vem da Lei da Conservação de Energia $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ e podemos escrever a seguinte integral

$$3 \ln a = -\int \frac{d\rho}{p + \rho} + \text{const.} \quad (2.9)$$

Neste caso, a eq.(2.9) dá uma relação entre ρ e o fator de escala $a(t)$. A relação entre p e ρ é dada pela equação de estado da matéria.

Diferenciando (2.6) em relação ao tempo e usando a relação entre ρ e $a(t)$ obtemos uma equação que, após uma combinação linear com a equação inicial (2.6), resulta na equação (2.7). Em outras palavras, as equações (2.6) e (2.7) não são independentes e, tanto uma quanto a outra, podem ser utilizadas para se chegar na solução das equações de movimento. Este resultado já era esperado, uma vez que a teoria tem apenas um grau de liberdade $a(t)$.

É comum considerar dois casos particulares, separadamente, com relação às equações de estado da matéria:

1) Quando $a \rightarrow 0$, a densidade de matéria total torna-se infinita, assim como a pressão. Neste caso, usamos a equação de estado $p = \rho/3$, para radiação e, a partir de (2.9), temos

$$\rho = \frac{\alpha}{a^4}.$$

Utilizando a equação de movimento (2.6) encontramos a seguinte solução

$$a \sim t^{\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

ou seja, um Universo primordial em expansão. O problema da singularidade aparece se quisermos saber como o Universo se comporta no início desta expansão (ou seja, quando $t \rightarrow 0$). Neste caso, temos a singularidade $a(t) \rightarrow 0$, e os valores de curvatura e da densidade de energia ρ ficam infinitos. A este período denominamos *fase radiativa*.

2) Alternativamente, recorreremos à equação de estado da matéria incoerente $p = 0$ e a partir de (2.9) temos:

$$\rho = \frac{\alpha}{a^3}.$$

Neste caso, as equações de movimento apresentam a solução

$$a \sim t^{\frac{2}{3}}, \quad (2.11)$$

com as mesmas características da solução anterior, ou seja, em ambos os casos temos uma singularidade no início da expansão do Universo. Denominamos, a este período, *fase de matéria*.

Uma solução sem singularidade para o Universo primordial pode ser obtida considerando $\Lambda \neq 0$ em (2.5). Neste caso, na ausência de matéria, temos uma expansão

da forma

$$a(t) \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (2.12)$$

Assim, o Universo primordial expande muito rapidamente por esta exponencial. Um dos problemas para esta inflação originada da constante cosmológica inicial é explicar a passagem para o Universo observado hoje. A constante cosmológica não poderia ser alterada neste modelo, e tudo indica que, no Universo primordial seu valor deveria ser muito maior que o esperado atualmente. Para resolver este problema, modelos incluindo campo escalar (chamado inflaton) foram considerados [44] com um potencial reproduzindo esta constante cosmológica (veja [7], [55], [51]). Acontece que nestes modelos é necessário ajuste fino dos dados iniciais e o potencial deve ser postulado. Aqui vamos trabalhar com um modelo alternativo, generalizando o modelo original de Starobinsky [81]. No modelo original de Starobinsky é preciso um ajuste fino para atingir a fase de FRW e controlar as ondas gravitacionais. Mostraremos que é possível resolver este problema de forma natural e sem ajuste de parâmetros.

Primeiramente, vamos ressaltar alguns pontos relevantes com relação à forma inicial das equações consideradas. É importante notar que, por exemplo, pelo fato de termos apenas um grau de liberdade, podemos obter as mesmas soluções acima considerando o traço das equações de Einstein

$$-R = 8\pi G T,$$

ou seja,

$$6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 8\pi G (\rho - 3p), \quad (2.13)$$

onde foi considerado $\Lambda = 0$. Para simplificar, podemos escrever a equação (2.13) em termos do tempo conforme (η) definido por $a(t) d\eta = dt$. Denotaremos $\frac{da}{d\eta} = a'$, $\frac{d^2a}{d\eta^2} = a''$ e assim por diante. Com isto, a equação de movimento fica

$$\frac{a''}{a^3} = \frac{4\pi G}{3} (\rho - 3p)$$

e para radiação $p = \rho/3$, temos:

$$a''(t) = 0. \quad (2.14)$$

Após transformação de volta ao tempo real, utilizando $\frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{dq}$, obtemos novamente $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$. Este fato é importante, pois pode simplificar a solução das equações de movimento e, em alguns casos, explicitar simetrias.

Vale ressaltar que a equação (2.14) também pode ser obtida levando-se em conta o princípio da ação mínima, ou seja, exigindo que a derivada variacional com relação à ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = -\frac{M_P^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (2.15)$$

seja nula, onde M_P é a massa de Planck.

Usaremos o fato de que a métrica de FRW, com $k = 0$, pode se escrita como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}, \quad (2.16)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $\sigma = \ln a(t)$ é o fator conforme da métrica. Neste caso, podemos transformar R , curvatura escalar, em termos de σ (veja Apêndice-A para a transformação conforme de outras grandezas) e obter, para $n = 4$,

$$R = e^{-2\sigma} [\bar{R} - 6(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 6(\bar{\nabla}^2\sigma)], \quad (2.17)$$

onde $\bar{R} = -6k = 0$, para o caso plano. Porém, é útil guardar os resultados em termos de k e Λ . O determinante da métrica g , se transforma como

$$\sqrt{-g} = e^{4\sigma} \sqrt{-\bar{g}},$$

onde, para métrica de Minkowski, $\sqrt{-\bar{g}} = 1$. A ação de Einstein fica da seguinte forma

$$S_{EH}[\bar{g}] = -\frac{6M_P^2}{16\pi} \int d^4x \left[k e^{2\sigma} + e^{2\sigma} (\sigma'' + (\sigma')^2) - \frac{\Lambda}{3} e^{4\sigma} \right]$$

e sua derivada variacional, após algumas simplificações e integrações por partes, vale

$$\frac{\delta S_{EH}[\bar{g}]}{\delta\sigma} = \frac{12M_P^2}{16\pi} e^{2\sigma} V \left[k + \sigma'' + (\sigma')^2 - \frac{2\Lambda}{3} e^{2\sigma} \right], \quad (2.18)$$

onde V é o volume 3-dimensional originado da integração espacial direta.

Escrevendo a equação de movimento acima em termos de $a(t)$ e considerando k e Λ nulos (caso estudado nesta seção), chegamos ao mesmo resultado (2.14) para a evolução de radiação-dominante.

Porém, este é um resultado particular, somente para radiação. Para considerarmos a matéria, devemos utilizar como parte da ação total, a ação do fluido ideal preenchendo o Universo. Esta ação pode ser obtida através do tensor momento-energia

$$T^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu (p + \rho) - pg^{\mu\nu},$$

onde u^μ é a quadri-velocidade, p a pressão e ρ a densidade de matéria. Por outro lado, a definição do tensor momento-energia é a seguinte:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = 0. \quad (2.19)$$

onde S é uma ação das partículas ou dos campos de matéria. Portanto, podemos escrever a ação da matéria como

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \{x(p + \rho) u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} + yp + z\rho\}, \quad (2.20)$$

onde x, y, z são, a princípio, alguns coeficientes desconhecidos. Fazendo variação de (2.20) em termos da métrica e comparando com a eq.(??), encontramos os seguintes valores para os coeficientes $x = -1/2, y = 3/2$ e $z = 1/2$. É fácil ver que, para métrica conformalmente plana $g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$, a variação de (2.20) com relação ao fator de escala

$$\frac{\delta S_M}{\delta a} = (3p - \rho) a^3 V \quad (2.21)$$

é nula para $p = \rho/3$ e, portanto, o traço do tensor momento-energia é nulo também. Isto faz (2.18) coincidir com o resultado (2.14). O mesmo pode ser obtido em termos do fator conforme. Porém, para outras equações de estado, devemos considerar como ação clássica a seguinte ação total:

$$S_t = S_{EH} + S_M$$

e a equação de movimento deve ser $\frac{\delta S_t[\bar{g}]}{\delta \sigma} = 0$. Podemos facilmente ver que isto nos leva à mesma equação (2.13), se $M_P^2 = 1/G$, inclusive se considerarmos $\Lambda \neq 0$.

Aqui vamos trabalhar com este método variacional diretamente na ação usando transformações conformes. Consideraremos termos mais complexos na ação onde levaremos em conta a contribuição quântica para esta solução. Portanto, vamos no próximo capítulo, apresentar algumas considerações gerais sobre Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo para chegarmos a estas contribuições.

Capítulo 3

Elementos da Teoria Quântica de Campos em espaço curvo: ação efetiva induzida pela anomalia

3.1 Introdução geral

Podemos esperar que, no início do Universo, as forças gravitacionais foram bastante intensas e geraram partículas com energias muito altas, até chegar à energia de Planck. Por este motivo, consideraremos a importância dos efeitos quânticos dos campos de matéria num espaço com métrica clássica (de fundo) como uma teoria efetiva para energias abaixo da escala de Planck.

Neste capítulo, mostraremos como estes efeitos podem ser analisados com o objetivo de aplicar, em seguida, uma descrição para o Universo novo. Inicialmente, mostraremos como devemos formular a teoria dos campos no espaço-tempo curvo. Introdução geral de renormalização da Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo pode ser encontrado nos livros [17], [11], [36], [25]. Apresentaremos esta parte com base no livro [17] e notas de aulas [78].

Nosso primeiro objetivo é calcular as correções quânticas. Usaremos o método de Schwinger-DeWitt [25] para os campos de matéria livres e sem massa com $spin = 0, \frac{1}{2}$ e 1. Assim, chegamos a uma ação efetiva que possui termos infinitos. Para retirarmos estas divergências, contratermos são introduzidos resultando em implicações como a dependência de escala nos parâmetros da ação do vácuo e anomalia conforme.

Necessidade de Teoria Quântica de Campos e/ou Gravitação Quântica

Não podemos dispensar o significado das singularidades já que elas surgem nas soluções mais importantes e mais simples, que correspondem às principais áreas de aplicação da Relatividade Geral (RG), como a solução de Schwarzschild e a solução cosmológica.

A resolução mais natural para o problema das singularidades é que a RG não é válida em todas as escalas. Assim, estamos forçados a supor que, para distâncias muito pequenas, quando as curvaturas se tornam muito grandes, os fenômenos gravitacionais devem ser descritos por alguma outra teoria, mais geral do que RG. Mas, devido ao sucesso da RG na área clássica, esperamos que esta teoria mais geral coincidirá com a RG no limite de grandes distâncias. A origem mais provável do desvio da RG são os efeitos quânticos. Usualmente, a escala esperada dos efeitos da gravitação quântica está associada às unidades do comprimento, tempo e massa de Planck. A idéia das unidades de Planck é a seguinte. Suponha que existam apenas três constantes fundamentais na natureza

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg}, \quad \hbar = 1.054 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{seg}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}^2 \cdot \text{g}}. \quad (3.1)$$

Em termos destas constantes, pode-se construir uma forma única para as quantidades com dimensão de comprimento l_P , tempo t_P e massa M_P :

$$\begin{aligned} l_P &= G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-3/2} \approx 1.4 \cdot 10^{-33} \text{ cm}; \\ t_P &= G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-5/2} \approx 0.7 \cdot 10^{-43} \text{ seg}; \\ M_P &= G^{-1/2} \hbar^{1/2} c^{1/2} \approx 0.2 \cdot 10^{-5} \text{ g} \approx 10^{19} \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

As Unidades de Planck podem ser utilizadas de diferentes formas. Em física de partículas, é comum considerar $c = \hbar = 1$ e medir todas as grandezas em GeV . Esta unidade é muito conveniente neste caso, pois as quantidades de medidas são energias e momento de partículas, e estas costumam ser grandezas comparáveis entre si. Também pode-se medir a constante de Newton G , em GeV ; obtendo, de acordo com (3.2), a correspondência $G = 1/M_P^2$. Claro que, nestas unidades $t_P = l_P = 1/M_P$.

Agora, se considerarmos M_P como uma medida universal, devemos fazer $M_P = 1$, tal que $G = 1$ também, e todas as outras grandezas passam a ser medidas em potências

de massa de Planck M_P . Em gravitação quântica, este é o melhor sistema de unidades, já que ele está baseado nas unidades fundamentais e não há necessidade de indicar a dimensão das grandezas. Já que as quantidades (3.2) envolvem, simultaneamente, c , \hbar e G , pode-se interpretar isto tal que a escala fundamental corresponde a algum efeito quântico relativístico. No entanto, esta interpretação é também ambígua por estar relacionada com duas teorias bastante diferentes: o efeito quântico dos campos de matéria ou quantização dos mesmos. A teoria quântica de campos de matéria, no fundo clássico, não apresenta problemas como renormalização e tem sido aplicada com sucesso em cosmologia inflacionária e evaporação de buracos negros. Por outro lado, a quantização dos campos gravitacionais encontra sérias dificuldades. Uma delas é devido à natureza dimensional da constante gravitacional e sua versão perturbada não é renormalizável na aproximação tradicional. Nesta tese, não consideramos quantização da métrica e executamos nosso trabalho dentro de uma abordagem semi-clássica.

Construção de ação para os campos de matéria em espaço-tempo curvo

Mostraremos a seguir algumas regras que devemos exigir para a construção das ações dos campos de matéria em espaço-tempo curvo.

Uma primeira possibilidade para construir uma teoria em espaço-tempo curvo é supor que num ponto qualquer do espaço nas coordenadas locais de Lorentz, a ação deve ter a mesma forma que no espaço-plano. Portanto, quando fazemos uma transformação de coordenadas, devemos obter a ação como uma função escalar. Então, uma forma usual de se obter a ação no espaço curvo é utilizar as seguintes correspondências entre espaço-tempo plano e curvo para que se mantenha a ação como um escalar:

$$\int d^4x \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g},$$

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu,$$

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu},$$

onde $g = \det g_{\mu\nu}$ e ∇_μ é a derivada covariante. No entanto, existe um procedimento mais geral que é, na verdade, o mais adequado para a construção de uma teoria quântica

renormalizável de forma mais simples possível. De acordo com a Relatividade Geral, para construirmos a ação devemos impor as seguintes condições:

1. localidade;
2. covariância geral;
3. preservação de todas as simetrias da ação clássica, no espaço-tempo de Minkowski;
4. não introdução de novos parâmetros com dimensão $[\text{massa}]^{-1}$.

De acordo com estas condições, obteremos as expressões para a ação de campos livres escalares, férmions de Dirac e campos de gauge vetoriais (com spin 0, 1/2, 1 respectivamente)

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (\nabla\varphi)^2 + m_s^2 \varphi^2 + \xi R \varphi^2 \right\}, \quad (3.3)$$

onde ξ é o parâmetro de acoplamento não-mínimo e $(\nabla\varphi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$

$$S_{1/2} = i \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \bar{\psi} [\gamma^\mu \nabla_\mu + im_f] \psi \right\}; \quad (3.4)$$

e

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}. \quad (3.5)$$

A ação do vácuo, que satisfaz as condições mencionadas acima e também possui a forma mais simples possível garantindo a teoria renormalizável [11, 17, 78], adquire a seguinte forma geral

$$S_{vac} = S_{AD} + S_{EH}, \quad (3.6)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert, dado pela eq. (2.15), S_{AD} é o termo que chamamos de “altas derivadas”

$$S_{AD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \nabla^2 R + a_4 R^2 \right\}, \quad (3.7)$$

onde

$$C^2(4) = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + 1/3 R^2 \quad (3.8)$$

é o quadrado do tensor de Weyl no espaço 4-dimensional. É útil ter, além de (3.8), uma expressão similar para dimensão n arbitrária:

$$C^2(n) = C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{4}{n-2}R_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{(n-1)(n-2)}R^2. \quad (3.9)$$

Outra combinação importante dos quadrados do tensor de curvatura é

$$E = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2, \quad (3.10)$$

integrando do invariante topológico Gauss-Bonnet (no caso 4-dimensional).

Os coeficientes $a_{1,4}$ são parâmetros arbitrários. Para qualquer campo livre, o único diagrama de Feynmann que existe é o de 1-loop, fechado e sem linhas externas de campos de matéria. Por isso, utilizando o cálculo dos graus de divergência, obtemos que as divergências que encontramos para campos livres são as de 1-loop para a ação do vácuo.

Os campos de matéria sem massa possuem invariância conforme local quando os escalares são acoplados à gravidade com acoplamento não-mínimo e com $\xi = 1/6$. A nível clássico, este valor faz com que o traço do tensor momento-energia seja nulo. Além disso, no nível a 1-loop, a condição $\xi = 1/6$ produz renormalização [17], mas não em loops superiores [45]. Logo, como estamos interessados apenas no nível de 1-loop, assumiremos este valor.

Notemos que é possível a introdução de termos não conformalmente invariantes na ação do vácuo, tais como $\int \sqrt{-g}R$ ou $\int \sqrt{-g}R^2$, mas não é necessário para a renormalização de teorias livres conformalmente invariantes.

Na próxima seção, vamos dar uma revisão sobre a técnica de Schwinger-DeWitt para extrair divergências a 1-loop da ação efetiva.

3.2 Método de Schwinger-DeWitt

O método de Schwinger-DeWitt é a maneira mais elegante (e por isto, mais popular) de calcular as correções quânticas a 1-loop para os campos de matéria em espaço-tempo curvo. Neste método nós obtemos a ação efetiva em forma de potências em termos da curvatura e suas derivadas. Como estes termos são locais, esta técnica é mais prática para

a avaliação das divergências. Não apresentaremos aqui os detalhes da obtenção da ação efetiva, apenas damos as referências [17, 25] e artigos originais neles citados [17].

No método de integral de trajetória, definimos o funcional gerador das funções de Green no espaço-tempo curvo

$$Z[J] = \int d\phi e^{i\{S[\phi] + \phi \cdot J\}}. \quad (3.11)$$

Aqui usamos as notações condensadas com ϕ denotando um conjunto de campos de matéria, J denotando um conjunto de fontes correspondentes, enquanto o produto $\phi \cdot J$ representa soma sobre todos os índices e integração sobre todas as variáveis contínuas do espaço-tempo (notações de DeWitt). Não apresentaremos aqui detalhes da construção dos loops de $Z[J]$ que pode ser visto em [17]. Mas para isto é necessário uma expansão do funcional gerador em série de Taylor após a seguinte mudança de variável $\phi \rightarrow \bar{\phi} + \phi$, algumas vezes chamada de “deslocamento de fundo”. Onde $\bar{\phi}$ é o campo médio

$$\bar{\phi}(x) = \langle \phi \rangle_x = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (3.12)$$

e $W[J]$ é o funcional generalizado das funções de Green conectadas e está relacionado com $Z[J]$ por

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (3.13)$$

Em particular, no nível a 1-loop obtemos uma fórmula conhecida [17]

$$e^{\bar{\Gamma}^{(1)}[\bar{\phi}]} = \int d\phi e^{i/2 S_2[\bar{\phi}]\phi^2} = \frac{i}{2} \text{Det}^{-1/2} S_2[\bar{\phi}], \quad (3.14)$$

ou

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\bar{\phi}] = \frac{i}{2} \ln \text{Det} S_2[\bar{\phi}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln S_2[\bar{\phi}], \quad (3.15)$$

onde,

$$S_2[\bar{\phi}] = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S[\bar{\phi}]}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi=\bar{\phi}}. \quad (3.16)$$

Na equação (3.15), nós generalizamos uma relação bem conhecida da álgebra linear $\text{tr} \ln A = \det \ln A$. Em princípio, deve-se ter um cuidado a mais usando esta relação, mas só em situações mais complicadas, quando estudamos termos não-locais.

Os cálculos práticos a 1-loop sempre reduzem o cálculo dos determinantes funcionais eq.(3.15). Portanto, nossa próxima tarefa será considerar estes determinantes, veja como referência o livro de DeWitt [25]. Definimos

$$\hat{H} \equiv S_2[\bar{\varphi}], \quad (3.17)$$

ou seja,

$$e^{i\Gamma^{(1)}[\bar{\varphi}]} = \int D\varphi^{\frac{1}{2}\varphi\hat{H}\varphi} \quad \Gamma^{(1)}[\bar{\varphi}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}. \quad (3.18)$$

Este operador depende de parâmetros externos, como a métrica. Considerando a expressão

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}$$

e fazendo variação com relação aos parâmetros externos, temos

$$\frac{i}{2} \delta \text{Tr} \ln \hat{H} = \frac{i}{2} \text{Tr} \hat{H}^{-1} \delta \hat{H}.$$

O propagador $G = \hat{H}^{-1}$ admite a representação

$$\hat{H}^{-1} = \int_0^\infty ids e^{-is\hat{H}},$$

onde s é o tempo-próprio de Schwinger. Logo,

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \delta \hat{H} \cdot \int_0^\infty ids e^{-is\hat{H}} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \delta \int_0^\infty ids e^{-is\hat{H}}.$$

Além disso, obtemos que

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}} + cte,$$

onde o termo constante pode ser seguramente desprezado. Seguindo DeWitt [25], devemos introduzir o operador evolução temporal $\hat{U}(x, x'; s) = e^{-is\hat{H}}$ como

$$\hat{U}_0(x, x'; s) = \frac{1}{(4\pi i)^{n/2}} \frac{\mathcal{D}^{1/2}(x, x')}{s^{n/2}} e^{i\frac{\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s},$$

onde o operador \hat{H} age na função-delta covariante. Aqui $\sigma(x, x')$ é a distância geodésica entre os pontos x e x' , que satisfaz uma identidade $2\sigma = (\nabla\sigma)^2 = \sigma^\mu \sigma_\mu$. O índice em σ

sempre denotará derivada covariante: $\sigma_\mu = \nabla_\mu \sigma$, $\sigma_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma$, assim por diante. Além disso, \mathcal{D} é o determinante de *Van Vleck-Morette* e tem a seguinte forma

$$\mathcal{D}(x, x') = \det \left(-\frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^\mu \partial x'^\nu} \right),$$

que é um tensor de densidade dupla, com relação a ambos argumentos do espaço-tempo x e x' . É útil definir o correspondente bi-escalar $\Delta(x, x')$:

$$\Delta(x, x') = \sqrt{-g(x')} \mathcal{D}(x, x') \sqrt{-g(x)}.$$

Consideremos uma possível representação para o operador evolução $\hat{U}(x, x'; s)$ na forma

$$\hat{U}(x, x'; s) = \hat{U}_0(x, x'; s) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'), \quad (3.19)$$

onde $\hat{a}_k(x, x')$ são alguns coeficientes que podem ser considerados de tal forma que o operador evolução satisfaz a equação

$$i \frac{\partial \hat{U}}{\partial s} = + \hat{H} \hat{U}. \quad (3.20)$$

Vamos construir a equação para os coeficientes $\hat{a}_k(x, x')$. Usando as regras para se derivar determinantes e a identidade $2\sigma = (\nabla\sigma)^2$, podemos estabelecer as seguintes relações

$$\Delta^{-1} \nabla_\mu (\Delta \sigma^\mu) = n;$$

$$\sigma^\mu_{\alpha} \sigma_{\mu\nu'} + \sigma^\mu \sigma_{\alpha\nu'\mu} = \sigma_{\alpha\nu'}.$$

Fazendo contração com $(\sigma^{-1})_{\alpha\nu'}$, chegamos em

$$\sigma^\mu_{\mu} + \sigma^\mu \sigma_{\alpha\nu'\mu} (\sigma^{-1})^{\alpha\nu'} = (n - \sigma^\mu_{\mu}) \Delta.$$

Substituindo (3.19) em (3.20), chegamos nas seguintes equações

$$\sigma^\mu \nabla_\mu \hat{a}_0 = 0, \quad (3.21)$$

$$(k+1) \hat{a}_{k+1} + \sigma^\mu \nabla_\mu \hat{a}_{k+1} = \Delta^{-1/2} \nabla^2 (\Delta^{1/2} \hat{a}_k) + \hat{\Pi} \hat{a}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

A solução dessas equações não pode ser encontrada na forma geral, mas é suficiente saber a coincidência dos limites $\lim_{x \rightarrow x'} \hat{a}_k(x, x')$, onde podemos fazer algum cálculo. Denotemos este limite por uma linha vertical e chegamos nas seguintes relações

$$\sigma^\mu \Big|_{x \rightarrow x'} = \sigma^\mu = 0, \quad \sigma_{\mu\nu} \Big| = g_{\mu\nu}.$$

Analogamente,

$$\sigma_{\mu\nu} \Big| = -g_{\mu\nu}$$

e $\Delta \Big| = 1$, assim por diante. Depois de algumas álgebras, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu\alpha\beta} \Big| &= \frac{1}{3} (R_{\mu\beta\alpha\nu} + R_{\mu\alpha\beta\nu}), \\ \sigma^\mu \nabla_\mu \hat{a}_0 &= 0, \quad \nabla_\mu \nabla_\nu \hat{a}_0 = \frac{1}{2} \hat{R}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde $\hat{R}_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ está no espaço dos campos correspondentes. Outra relação útil é

$$\sigma^\mu \nabla_\mu \Delta^{1/2} = \frac{1}{2} (\eta - \nabla^2 \sigma) \Delta^{1/2}$$

da qual conseguimos

$$\nabla_\mu \Delta^{1/2} \Big| = 0, \quad \nabla_\mu \nabla_\nu \Delta^{1/2} \Big| = \frac{1}{6} R_{\mu\nu}, \quad \nabla_\mu \nabla_{\nu'} \Delta^{1/2} \Big| = -\frac{1}{6} R_{\mu\nu}. \quad (3.23)$$

Se substituirmos estes resultados na equação para \hat{a}_1 , chegamos na seguinte solução

$$\hat{a}_1 \Big| = \hat{a}_1(x, x) = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R. \quad (3.24)$$

Notemos que se considerarmos o operador mais geral [9]

$$S_2 = \hat{H} = \hat{1} \nabla^2 + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}, \quad (3.25)$$

o termo linear pode ser de fato absorvido na definição de derivada covariante

$$\nabla_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + \hat{h}_\mu.$$

Se considerarmos apenas divergências ultra-violetas (UV) podemos também, incluir o parâmetro m^2 na definição de $\hat{\Pi}$ para simplificar. Logo, todos os cálculos serão essencialmente os mesmos, com duas exceções. O comutador das novas derivadas covariantes não será $\hat{R}_{\mu\nu}$, mas

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - (\nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu) - (\hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu) \quad (3.26)$$

e, no lugar de (3.24), temos

$$\hat{a}_1 \Big| = \hat{a}_1(x, x) = \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu. \quad (3.27)$$

Após cálculos muitos extensos chegamos em

$$\hat{a}_2 \Big| = \hat{a}_2(x, x) = \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \nabla^2 R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\nabla^2 \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2. \quad (3.28)$$

A grande vantagem desta expressão está na sua universalidade. Cálculos dos demais coeficientes \hat{a}_k são possíveis, apesar de serem mais complicados.

Agora, consideremos novamente a expressão

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \hat{U}(x, x'; s) = \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mathcal{D}^{1/2}(x, x')}{(4\pi is)^{n/2}} e^{i\frac{\sigma(x, x')}{2s} - m^2 s} \sum_{k=0}^\infty (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \end{aligned} \quad (3.29)$$

É fácil ver que (para mais detalhes veja [10]) as divergências UV correspondem ao limite inferior desta integral e que, em $n = 4$, somente os três primeiros termos são divergentes. Além disso, as divergências logarítmicas são dadas pelo terceiro termo da expansão, tal que a expressão para a parte divergente da ação efetiva, na regularização dimensional, nada mais é que

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} \hat{a}_2(x, x), \quad (3.30)$$

onde $\varepsilon = (4\pi)^2(n - 4)$ é o parâmetro de regularização dimensional e μ , parâmetro dimensional de renormalização. A última fórmula é uma ferramenta poderosa para a obtenção das divergências de vários modelos de teoria de campos em espaço-tempo curvo. Substituindo (3.28) em (3.30) chegamos a

$$\Gamma_{div}^{(1)}[\phi] = -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \nabla^2 R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\nabla^2 \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right\}. \quad (3.31)$$

Esta é a fórmula de Schwinger-DeWitt para o cálculo das divergências à 1-loop (onde voltamos à convenção em que $\hbar = 1$). A seguir, utilizaremos esta expressão geral para calcular as divergências dos campos de matéria com $spin = 0, \frac{1}{2}$ e 1.

- Campo escalar

Para o campo escalar real, sem interação, consideramos a ação eq.(3.3) e o operador \hat{H} tem a seguinte forma

$$\hat{H} = \left(-\nabla^2 + m_s^2 + \xi R \right),$$

onde,

$$\hat{\Pi} = - (m_s^2 + \xi R).$$

Conseqüentemente, o operador \hat{P} da eq.(3.31) tem a forma

$$\hat{P} = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R - m_s^2.$$

Temos também que

$$\hat{S}_{\mu\nu} = 0.$$

Substituindo estes valores na equação (3.31) e considerando as identidades (3.8) e (3.10), chegamos no resultado para as divergências

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(sc)} = -\frac{1}{\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{120} C^2(4) - \frac{1}{360} E + \frac{1}{180} \nabla^2 R - \frac{1}{6} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \nabla^2 R + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 + m_s^2 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + \frac{1}{2} m_s^4 \right\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

porém consideraremos $\xi = \frac{1}{6}$ para obter uma forma conformalmente invariante e $m = 0$ no modelo para campos livres sem massa. O índice (sc) em $\Gamma_{div}^{(sc)}[\phi]$ é apenas para indicar que (3.32) nos dá as divergências a 1-loop para o campo escalar livre (*spin*-0), num campo gravitacional externo.

• Campo espinorial

Para que a ação do campo espinorial satisfaça as condições impostas anteriormente, introduzimos o tetrada (*verbein*) e_μ^a da seguinte forma:

$$e_\mu^a e_{\nu a} = g_{\mu\nu}, \quad e^{\mu a} e_a^\nu = g^{\mu\nu}$$

e também

$$e_\mu^a e^{\mu b} = \eta^{ab}, \quad e_{\mu a} e_b^\mu = \eta_{ab}.$$

Com esta construção, podemos definir $\gamma^\mu = \gamma^a e_\mu^a$ covariantemente (γ^a são as matrizes de Dirac [12]). Definimos a derivada covariante de um espinor como

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi, \quad (3.33)$$

onde

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2} (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a),$$

e também os coeficientes de conexão espinorial

$$w_{ab,\mu} = \frac{1}{4} (e_{b\alpha} \partial_\mu e_b^\alpha - e_{a\alpha} \partial_\mu e_a^\alpha) + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha (e_a^\lambda e_{b\alpha} - e_b^\lambda e_{a\alpha}),$$

o que nos permite escrever a ação da seguinte forma eq.(3.4). Para os espiniores, temos outro tipo de operador

$$\hat{H} = i (\gamma^\alpha \nabla_\alpha - im_f). \quad (3.34)$$

Para reduzir o cálculo da ação efetiva para o férmion

$$\tilde{\Gamma}^{(f)} = -i \text{Tr} \ln \hat{H}$$

nós primeiramente multiplicaremos \hat{H} pela expressão conjugada $\hat{H}^* = i (\gamma^\alpha \nabla_\alpha + im_f)$. A diferença no sinal é devido à paridade ímpar do campo fermiônico enquanto Tr é considerado de forma usual “bosônico”.

Supõe-se que a parte divergente de $\tilde{\Gamma}^{(f)}$ não pode depender do sinal da massa, apenas por razões de dimensão. De fato, $\tilde{\Gamma}_{div}^{(f)}$ deve ser um funcional local, dependendo somente da métrica e sem os parâmetros de dimensão inversa da massa. Esta estrutura de $\tilde{\Gamma}^{(f)}$ segue, também, da possibilidade de sua obtenção usando os diagramas de Feymann simples ou representação momento local. Existe uma prova direta geral da identidade

$$\text{Tr} \ln \hat{H} = \text{Tr} \ln \hat{H}^* \quad (3.35)$$

de acordo com [65]. Uma vantagem adicional desta prova é que ela afeta também a parte de $\text{Tr} \ln \hat{H}$ e inclui casos mais complicados de férmion em uma métrica externa, campos vetoriais e vetoriais axiais. Vamos agora simplesmente usar (3.35) e escrever

$$\tilde{\Gamma}^{(f)} = -i \text{Tr} \ln \hat{H} \hat{H}^* = \text{Tr} \ln (\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu + m_f^2), \quad (3.36)$$

onde usamos $\nabla_\alpha \gamma^\mu = 0$, identidade que está relacionada com a condição de metricidade

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0. \quad (3.37)$$

Agora aplicamos as identidades

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu = \nabla^2 - \frac{1}{4} R \quad (3.38)$$

e chegamos ao operador padrão (3.25) com os seguintes elementos

$$\hat{h}^\mu = 0, \quad \hat{\Pi} = -\frac{1}{4} R, \quad \hat{P} = -\frac{1}{12} R, \quad \hat{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau. \quad (3.39)$$

Depois de alguma álgebra chegamos à seguinte expressão para divergências

$$\hat{\Gamma}_{div}^{(f)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{10} C^2(4) - \frac{11}{180} E + \frac{1}{15} \nabla^2 R + \frac{2m_f^2}{3} R - 4m_f^4 \right\}. \quad (3.40)$$

Note que as duas componentes fermiônicas contribuem com o coeficiente geral 1/2.

Podemos fazer três observações interessantes se compararmos o resultado (3.40) com o caso escalar. *Primeiro*, no caso conforme $m_f = 0$, as divergências são também conformalmente invariantes para os férmions; *Segundo*, as contribuições dos espinores e escalares não se cancelam, exceto para a renormalização da constante cosmológica. Para todos os três termos de altas derivadas C^2 , E e $\nabla^2 R$ ambas contribuições de escalares e espinores contribuem com mesmo sinal. *Terceiro*, a ambigüidade relacionada à escolha de $C^2(4)$ também acontece para os férmions, exatamente como se ele fosse escalar.

• Campo vetorial

No caso vetorial sem massa ¹ nós não precisamos distinguir os casos Abelianos e não-Abelianos, pois somente a parte livre da ação não-Abeliana é importante e as contribuições desses campos livres são somados. Entretanto, podemos considerar um vetor Abeliano simples e então multiplicar o resultado pelo número de campos vetoriais. A ação deve ser completada pela fixação de gauge de acordo com o método de Fadeev-Popov [17]. Afim de fixar o gauge introduzimos

$$S_{gf} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu A^\mu)^2$$

e também a ação dos campos auxiliares $C(x)$, campos fantasmas (ghost) e $\bar{C}(x)$, campos anti-fantasmas

$$S_{gh} = \int d^4x \sqrt{-g} \bar{C} M C,$$

¹A obtenção das divergências para o campo vetorial massivo (Proca) foi determinado em [10].

onde

$$M = \frac{\delta\chi}{\delta A^\alpha} R^\alpha,$$

ou seja, $M = \nabla^2$. Então, a contribuição da ação efetiva do vácuo é

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(vet)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} - i \text{Tr} \ln \hat{H}_{gh}, \quad (3.41)$$

onde \hat{H} e \hat{H}_{gh} são as formas bilineares da ação dos campos. O sinal da contribuição dos ‘ghosts’ de Faddeev-Popov é devido ao fato de que estes campos são anti-comutativos à paridade ímpar de Grassmann dos ghosts.

Depois de algumas integrações parciais e comutações de derivadas covariantes, a ação (3.5) pode ser reescrita como

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} (\partial_\mu A_\nu)^2 + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} A^\mu (\delta_\mu^\nu \nabla^2 - R_\mu^\nu) A_\nu. \quad (3.42)$$

Agora, escolhemos o termo de fixação de gauge na forma $S_{gf} = -(1/2) \cdot \int d^4x \sqrt{g} (\partial_\mu A_\nu)^2$ e chegamos à seguinte forma bilinear

$$\hat{H} = \delta_\mu^\nu \nabla^2 - R_\mu^\nu. \quad (3.43)$$

Levando em conta o gerador para as transformações de gauge, chegamos em $\hat{H}_{gh} = \nabla^2$, portanto

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\delta_\mu^\nu \nabla^2 - R_\mu^\nu) - i \text{Tr} \ln (\nabla^2). \quad (3.44)$$

Para o primeiro termo obtemos que

$$\hat{\Pi} = \Pi_\nu^\mu = -R_\nu^\mu, \quad \hat{h}^\mu = 0,$$

já que

$$\hat{P} = P_\nu^\mu = \frac{1}{6} R \delta_\nu^\mu - R_\nu^\mu, \quad \hat{S}_{\alpha\beta} = [S_{\alpha\beta}]_\nu^\mu = -R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}.$$

Substituindo essas expressões em (3.28), e considerando as contribuições dos campos fantasmas, temos

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(vet)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{10} C^2(4) - \frac{31}{180} E - \frac{1}{10} \nabla^2 R \right\}. \quad (3.45)$$

Como era esperado, as divergências são dadas pelos termos conformalmente invariantes e termos de superfície. As contribuições dos termos de altas derivadas C^2 e E têm o mesmo

sinal para férmions e escalares, enquanto que a contribuição para o termo $-\nabla^2 R$ tem sinal contrário.

Para condensar os 3 campos, usaremos uma notação conhecida em termos de $N_0, N_{\frac{1}{2}}$ e N_1 , que determinam a quantidade de campos com $spin = 0, \frac{1}{2}$ e 1 existentes

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}(N_0, N_{1/2}, N_1) = N_0 \cdot \Gamma_{div}^{(sc)}[\phi] + N_{1/2} \cdot \Gamma_{div}^{(f)}[\phi] + N_1 \cdot \Gamma_{div}^{(vet)}[\phi],$$

onde N_{spin} é denominado como o *conteúdo de partícula* da teoria.

De forma condensada, escrevemos

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}(N_0, N_{1/2}, N_1) = -\frac{1}{(n-4)} \int d^4x \sqrt{-g} \{wC^2 + bE + c\nabla^2 R\}, \quad (3.46)$$

com os respectivos coeficientes

$$w = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{120} N_0 + \frac{1}{20} N_{1/2} + \frac{1}{10} N_1 \right), \quad (3.47)$$

$$b = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{360} N_0 + \frac{11}{360} N_{1/2} + \frac{31}{180} N_1 \right), \quad (3.48)$$

$$c = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{180} N_0 + \frac{1}{30} N_{1/2} - \frac{1}{10} N_1 \right). \quad (3.49)$$

A expressão $\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}(N_0, N_{1/2}, N_1)$ é a divergência à 1-loop para o conjunto dos campos livres no espaço-tempo curvo [11],[17].

3.3 Equações do grupo de renormalização

Exploraremos agora uma conseqüência importante da renormalização. Os resultados finais da teoria renormalizada podem depender da escolha da escala de renormalização μ . Existe uma simetria associada com esta dependência, ou seja, um grupo de transformações envolvendo variações em μ . Este grupo de transformações é chamado *grupo de renormalização* (para aprofundamento veja, por exemplo, os livros [22], [71]).

Para obtermos as equações do grupo de renormalização no espaço-tempo curvo seguiremos [17]. Os funcionais geradores das funções de Green conectadas “nuas” (*bare*) e renormalizadas são escritos respectivamente

$$e^{iW_0[J_0]} = \int D\phi_0 e^{i(S_0[\phi_0, p_0] + \phi_0 J_0)}, \quad (3.50)$$

$$e^{iW[J]} = \int D\phi e^{i(S[\phi, p] + \phi J)}, \quad (3.51)$$

onde p é conjunto de parâmetros (massas, constantes de acoplamento ξ , parâmetros da ação do vácuo) e p_0 são parâmetros “bare” correspondentes.

Renormalização multiplicativa significa $S_0[\phi_0, p_0] = S[\phi, p]$. Faremos a seguinte mudança de variável $\phi_0 \rightarrow Z_1^{\frac{1}{2}}\phi$, onde ϕ_0 e ϕ são os campos médios escalares. A partir das equações (3.50) e (3.51) temos que $W_0[J_0] = W[J]$. Neste caso,

$$J = \mu^{(n-4)} Z_1^{\frac{1}{2}} J_0.$$

Desta forma o campo médio satisfaz a seguinte relação

$$\phi_0 = \frac{\delta W_0}{\delta J_0} = \mu^{(n-4)} Z_1^{\frac{1}{2}} \phi,$$

e, conseqüentemente, encontramos, para a ação efetiva

$$\Gamma_0[\phi_0] = W_0[J_0] - \phi_0 J_0 = \Gamma[\phi].$$

Então, podemos escrever que

$$\Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi_0, p_0, n] = \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n],$$

onde n é um parâmetro de regularização dimensional e μ é a energia de escala típica. A parte esquerda da equação anterior não depende de μ . Logo, é evidente que

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0,$$

e como consequência

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial}{\partial p} + \int d^n x \sqrt{-g} \mu \frac{d\phi(x)}{d\mu} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0.$$

Denotamos

$$\mu \frac{dp}{d\mu} = \beta_p(n), \quad \mu \frac{d\phi(x)}{d\mu} = \gamma(n) \phi(x), \quad (3.52)$$

denominadas funções beta e gamma. Desta forma,

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_p(n) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma(n) \int d^n x \sqrt{-g} \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0 \quad (3.53)$$

é a equação do grupo de renormalização para a ação efetiva.

Na próxima seção, renormalizaremos a ação efetiva e calcularemos, a partir de (3.52), os parâmetros de renormalização da ação do vácuo.

3.4 Renormalização para a ação do vácuo

Vamos considerar a ação total (sem o termo de Einstein-Hilbert, que introduziremos posteriormente) como

$$\Gamma = S_{\text{matéria}} + S_{AD} + \bar{\Gamma}^{(1)}, \quad (3.54)$$

onde S_{AD} é dado pela eq. (3.7) e $\bar{\Gamma}^{(1)}$ é a correção quântica simples (não renormalizada) da ação clássica $S = S_{\text{matéria}} + S_{AD}$ com a ação

$$S_{\text{matéria}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{2} (\nabla^\mu \varphi_i \nabla_\mu \varphi_i + \frac{1}{6} R \varphi_i^2) + i \sum_{j=1}^{N_{1/2}} \bar{\psi}_j \gamma^\mu \nabla_\mu \psi_j - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N_1} F_{k,\mu\nu} F_k^{\mu\nu} \right\}$$

dos campos livres sem massa conformalmente invariantes reunindo as equações (3.3), (3.4) e (3.5), que são invariantes perante transformação conforme (consideramos $m = 0$ e $\xi = \frac{1}{6}$).

A correção a 1-loop $\bar{\Gamma}^{(1)}$ possui termos infinitos. Para retirarmos esta divergência fazemos a seguinte renormalização

$$S_{AD} \rightarrow S_{AD}^n + \Delta S = S_{AD}^R, \quad (3.55)$$

onde ΔS é um contratermo e S_{AD}^n o termo de altas derivadas da ação de vácuo eq.(3.7) em n -dimensões.

Queremos um ΔS que seja

1. um funcional local;
2. infinito, tal que $S_{AD} + \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S$ seja finito.

Para retirar as divergências de $\bar{\Gamma}^{(1)}$ definimos $\Delta S = -\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$, equação (3.46) no espaço n -dimensional. Devemos notar que esta mudança em S_{AD} não altera o valor de $\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$, uma vez que $\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$ tem como origem os efeitos dos campos de matéria e não depende da ação do vácuo (3.46). No caso geral de teoria com interações, também não teremos mudança alguma em $\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$ pois ΔS é proporcional à \hbar , e por isto, só poderá afetar termos de ordem superior a 2-loops.

ΔS retira toda a parte que diverge em $\bar{\Gamma}^{(1)}$, mas ainda ficamos com uma parte finita e que não é conformalmente invariante. Isto gera uma anomalia no traço do tensor

momento-energia. Veremos na próxima seção que esta anomalia nos habilita a encontrar o termo não conforme da ação efetiva do vácuo [34], [72].

A ação do vácuo renormalizada $S_{AD}^R = S + \Delta S$ fica da seguinte forma

$$S_{AD}^R = \mu^{n-4} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \left(a_1 + \frac{s_1}{\varepsilon} \right) C^2 + \left(a_2 + \frac{s_2}{\varepsilon} \right) E + \left(a_3 + \frac{s_3}{\varepsilon} \right) \nabla^2 R \right\},$$

onde

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = (4\pi)^2 \begin{pmatrix} w \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

para termos correspondência com a equação (3.46), já que os coeficientes são idênticos.

Mas ainda temos um problema: a ação efetiva é finita, mas a ação clássica, S_{AD}^R , é infinita porque seus coeficientes são infinitos em $n = 4$, uma vez que $\varepsilon = (4\pi)^2 (n - 4)$. Para resolver este problema, introduzimos os parâmetros “nús” (bare) $a_i^{(0)}$, tal que

$$S_{AD}^{(0)} = S_{AD}^R, \quad (3.56)$$

tenha a seguinte forma

$$S_{AD}^{(0)} = \int d^4 x \sqrt{-g} \{ a_1^{(0)} C^2 + a_2^{(0)} E + a_3^{(0)} \nabla^2 R \}.$$

A equação (3.56) significa que dois funcionais são iguais se seus parâmetros satisfazem a seguinte relação:

$$a_i^{(0)} = \mu^{n-4} \left(a_i + \frac{s_i}{\varepsilon} \right).$$

Desta forma, os valores observáveis (renormalizados) a_i são finitos, mas os valores não observáveis (nús ou “bare”) $a_i^{(0)}$ são infinitos. Veremos agora como a_i depende de μ utilizando a equação do grupo de renormalização (3.53), fazendo

$$\mu \frac{d}{d\mu} a_i^{(0)} = \mu \frac{d}{d\mu} \left[\mu^{n-4} \left(a_i + \frac{s_i}{\varepsilon} \right) \right] = 0.$$

Desta equação obtemos o valor de a_i

$$\mu \frac{d}{d\mu} a_i = -(n-4) \left(a_i + \frac{s_i}{\varepsilon} \right).$$

Substituindo o valor de ε e depois considerando o limite $n \rightarrow 4$, chegamos à função beta (3.52) para a_i

$$\beta_{a_i} = \mu \frac{d}{d\mu} a_i \Big|_{n=4} = -\frac{s_i}{(4\pi)^2}.$$

Fazendo, na equação anterior, uma mudança de variável $t = \ln \mu/\mu_0$, chegamos a

$$a_i(t) = a_i(0) - \frac{s_i t}{(4\pi)^2}, \quad (3.57)$$

onde $a_i(t)$ ou $a_i(\mu)$ é uma constante de acoplamento adimensional. Definimos [3]

$$\lambda_i = -\frac{1}{a_i}$$

e, como em (??), concluímos que

$$\lambda_i(t) = \frac{\lambda_i(0)}{1 + \frac{s_i \lambda_i(0)}{(4\pi)^2} t}.$$

Supondo que $\lambda_i > 0$, podemos analisar duas situações:

1. $s_i < 0$. Neste caso, quando $t \rightarrow -\left(\frac{s_i \lambda_i(0)}{(4\pi)^2}\right)^{-1}$, vemos que $\lambda_i(t) \rightarrow \infty$. Este é o comportamento típico para teorias como a eletrodinâmica quântica (QED) ou a teoria escalar com acoplamento quádruplo.
2. $s_i > 0$. Aqui $\lambda_i(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, este é o comportamento assintoticamente livre. Para as cargas λ_1 e λ_2 podemos observar este mesmo tipo de comportamento para quaisquer valores (N_0 , $N_{\frac{1}{2}}$ e N_1) dos campos da teoria. Para λ_3 encontramos uma teoria assintoticamente livre se $N_1 < \frac{N_0}{18} + \frac{1}{3} N_{1/2}$, e comportamento do primeiro tipo no caso contrário. É importante ressaltar que, no nosso modelo, este comportamento não traz problemas como em QED, pois todos os λ_i não são parâmetros da expansão em *loop*, mas sim, parâmetros da ação do vácuo. Veremos também que termos conformalmente invariantes na ação do vácuo (3.6) não contribuem para as equações dinâmicas do fator conforme. Por isto, a dependência de escala para os parâmetros da ação do vácuo não tem importância para cosmologia isotrópica e homogênea. Por outro lado, as funções- β definem a anomalia do traço e esta anomalia faz grande mudanças na evolução do Universo primordial. A próxima seção será dedicada a este assunto.

3.5 Anomalia do traço do tensor momento-energia

O efeito que surge do fato do tensor momento-energia, nas teorias classicamente conformes, não ser nulo quanticamente é chamado de “anomalia do traço” [11, 27, 19]. Veremos

como esta anomalia contribui para a correção quântica da ação clássica. Para tratar de casos mais gerais, vamos considerar, inicialmente, uma métrica arbitrária no espaço-tempo curvo. Porém, no modelo cosmológico a ser apresentado posteriormente, escolhemos uma forma particular para esta métrica, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW); neste caso, teremos uma correção quântica exata. Primeiramente, introduziremos o ponto principal para execução dos cálculos neste modelo que é a simetria conforme. Logo após, veremos como a anomalia surge da renormalização da ação do vácuo gerando assim a ação efetiva, considerada como correção quântica da ação clássica.

3.5.1 Simetria conforme local

Os campos de matéria considerados em (3.54) são conformalmente invariantes (no espaço-tempo 4-dimensional). Veremos que isto faz com que o traço do tensor momento-energia seja nulo. Porém, isto é verdade somente no nível clássico. Quando consideramos as correções quânticas a 1-loop dos campos de matéria sem massa e livres, citados anteriormente, temos divergências (termos infinitos). Para retirar esta divergência, contratermos são introduzidos no espaço n -dimensional. Estes não são conformalmente invariantes, surgindo assim a anomalia no traço do tensor momento-energia.

Segundo a eq.(??), para que S seja conformalmente invariante, devemos ter

$$-2g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} + \sum_i d_{\varphi_i} \frac{\delta S}{\delta \varphi_i} = 0, \quad (3.58)$$

onde d_{φ_i} são chamados de *pesos conformes*.

Quando as equações dos campos são satisfeitas $\frac{\delta S}{\delta \varphi_i} = 0$, temos

$$-2g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 = -2\bar{g}_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}},$$

que implica em $\frac{\delta S}{\delta \sigma} = 0$ para o *fator conforme* da métrica σ , se $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}$.

Em termos de $T_{\mu\nu}$ dado pela equação (??), temos

$$T^\mu{}_\mu = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (3.59)$$

Não é difícil verificar que a ação clássica $S = S_{matéria} + S_{AD}$ e também os campos de matéria, considerados em (3.54), satisfazem as equações (3.58) e (3.59), ou seja, são

conformalmente invariantes. Detalhes de transformação conforme de vários termos da ação do vácuo estão apresentadas no *Apêndice A*.

Porém, como veremos daqui a pouco, a nível quântico

$$T = \langle T^\mu_\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \neq 0, \quad (3.60)$$

onde $\langle T^\mu_\mu \rangle$ indica o valor médio do traço do tensor momento-energia.

A partir da eq.(3.60) encontramos a correção quântica para a ação clássica. Veremos a seguir, como esta anomalia surge e calcularemos sua contribuição para a correção quântica.

3.5.2 Divergências e anomalia

Após a renormalização, a ação efetiva a 1-loop tem a seguinte forma

$$\Gamma = S + \bar{\Gamma}, \quad \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S, \quad (3.61)$$

onde $\bar{\Gamma}$ é a correção quântica da ação clássica S . Em (3.61), $\bar{\Gamma}^{(1)}$ possui termos finitos e infinitos (encontrado anteriormente por ser $\bar{\Gamma}^{(1)}$, segundo a equação (3.46)). Colocamos $\Delta S = -\bar{\Gamma}^{(1)}$ como um contratermo definido em n -dimensões

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{(n-4)} \int d^n x \sqrt{-g} \{wC^2 + bE + c\nabla^2 R\}, \quad (3.62)$$

que não é conformalmente invariante e gera uma anomalia no traço do tensor momento-energia [27]

$$T = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \neq 0, \quad (3.63)$$

lembrando que S e $\bar{\Gamma}^{(1)}$ são conformalmente invariantes. É conveniente escrever ΔS da seguinte forma

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{(n-4)} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ wC^2 + b \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right) + \left(c + \frac{2}{3} b \right) \nabla^2 R \right\}. \quad (3.64)$$

Faremos o cálculo da anomalia do traço (3.63) utilizando a transformação conforme (2.16). Obtemos facilmente que $\sqrt{-g} = e^{n\sigma} \sqrt{-\bar{g}}$ (n é a dimensão do espaço-tempo) e, portanto, podemos encontrar T a partir da seguinte equação

$$T = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-n\sigma} \frac{\delta\Delta S [\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta\sigma}, \quad (3.65)$$

sendo que, após considerarmos a derivada variacional em termos da métrica, devemos considerar os limites $n \rightarrow 4$, $\sigma \rightarrow 0$ e $\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$. Para resolver a equação (3.65) precisamos aplicar a transformação conforme considerada na equação (2.16) afim de obter ΔS em termos da métrica conforme $\bar{g}_{\mu\nu}$. Podemos considerar esta transformação no quadrado do tensor de Weyl (3.8) e ver que este é conformalmente invariante, ou seja,

$$C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = e^{-4\sigma} \bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \quad (3.66)$$

no espaço 4-dimensional (veja o *Apêndice A* para mais detalhes). O integrando topológico de Gauss Bonnet (3.10) pode ser combinado com o terceiro termo da eq.(3.64), dando uma transformação conforme simples

$$\sqrt{-g} \left(E - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R} \right) = \sqrt{-\bar{g}} \left[\left(\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R} \right) + 4\bar{\Delta}\sigma \right], \quad (3.67)$$

onde

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2 R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \nabla^2 + \frac{1}{3} (\nabla^\mu R) \nabla_\mu$$

é um operador auto-adjunto conformalmente invariante $\sqrt{-g} \Delta_4 = \sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4$, no espaço-tempo 4-dimensional.

Utilizando (3.66) e (3.67) em (3.65) e fazendo a derivada funcional em relação à σ , não esquecendo de considerar os limites para n , σ , $g_{\mu\nu}$, obtemos

$$T = - \left(wC^2 + bE + c\nabla^2 R \right). \quad (3.68)$$

Este é o resultado para a anomalia [46, 17, 8, 49] (veja também [27, 28]). Na próxima seção, obteremos a contribuição para a correção quântica da ação de vácuo.

3.6 Ação induzida pela anomalia

A nível quântico, encontramos a anomalia do traço do tensor momento-energia (3.68), como foi mostrado na seção anterior. Porém, esta anomalia pode ser considerada uma equação para a parte finita de $\bar{\Gamma}$ da forma

$$T = - \frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} = - \left(wC^2 + bE + c\nabla^2 R \right). \quad (3.69)$$

Em termos do fator conforme, temos

$$e^{4\sigma} \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \sigma} = -\sqrt{-g} \left(wC^2 + bE + c\nabla^2 R \right) \Big|_{g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}}. \quad (3.70)$$

Como anteriormente, reescreveremos o tensor momento-energia na forma

$$T = - \left[wC^2 + b \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right) + \left(c + \frac{2}{3} b \right) \nabla^2 R \right] \quad (3.71)$$

e aplicamos transformação conforme dos termos. Utilizando os resultados do *Apêndice A*, fazemos integração direta em termos de σ na equação (3.70) e chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} [\bar{g}_{\mu\nu}] = S_c[\bar{g}_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \{ w\sigma \bar{C}^2 + b\sigma (\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R}) + 2b\sigma \bar{\Delta} \sigma \} \\ - \frac{1}{12} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(c + \frac{2}{3} b \right) R^2. \end{aligned}$$

Sendo que, o último termo na equação anterior vem do fato que

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} R^2 = -12 \nabla^2 R.$$

Escrevendo todos os termos na métrica conforme, temos [72, 34]

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} = S_c[\bar{g}_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \{ w\sigma \bar{C}^2 + b\sigma (\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R}) + 2b\sigma \bar{\Delta}_4 \sigma - \\ - \frac{1}{12} (c + \frac{2}{3} b) [\bar{R} - 6(\bar{\nabla} \sigma)^2 - 6(\bar{\nabla}^2 \sigma)]^2 \}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde $S_c[g_{\mu\nu}] = S_c[\bar{g}_{\mu\nu}]$ é um funcional conformalmente invariante desconhecido [72] e surge como uma constante de integração da equação (3.69). De modo geral, o cálculo exato deste funcional é impossível. Se estamos interessados em soluções cosmológicas, este funcional não é importante para as equações de movimento, uma vez que o mesmo não depende do fator conforme σ . Porém para considerarmos outros casos, como por exemplo, perturbações da métrica (ondas gravitacionais), ele deverá contribuir e também devemos utilizar a ação de forma covariante não-local.

A seguir, apresentaremos os passos para obter esta ação [78]. Para conseguirmos a forma não-local da ação efetiva, devemos usar novamente as transformações conformes

dos termos. Para um $A = A(g_{\mu\nu})$ arbitrário, conformalmente invariante, temos a seguinte relação

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \int d^4x \sqrt{-g(x)} A \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right) \Big|_{g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}} = 4\sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4 A = 4\sqrt{-g} \Delta_4 A.$$

Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} C^2(x) G(x, y) \frac{1}{4} \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right) \Big|_{g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}} &= \\ &= \int d^4x \sqrt{-\bar{g}(x)} \bar{\Delta}_4(x) \bar{G}(x, y) \bar{C}^2(x) = \sqrt{-g} C^2(y). \end{aligned}$$

Assim, o termo na ação efetiva, que produz $T_w = -wC^2$, é

$$\Gamma_w = \frac{w}{4} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} C^2(x) G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right)_y. \quad (3.73)$$

Analogamente, pode-se verificar que a variação conforme (sempre usaremos esta forma)

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta A[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-4\sigma} \frac{\delta A[\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta\sigma} \Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0} \quad (3.74)$$

produz o termo $T_b = b \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right)$, se

$$\Gamma_b = \frac{b}{8} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right)_x G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right)_y. \quad (3.75)$$

Junto com o último termo da ação efetiva $\int \sqrt{-g} R^2$, completamos a derivação da ação na forma covariante e não-local. Podemos também escrever de uma forma mais simétrica e criar uma apresentação covariante local mais útil para a ação induzida. Para isto, devemos tentar reescrever as expressões tipo não-locais (3.75) e (3.73) como uma integral Gaussiana sobre campos auxiliares.

Devemos levar em conta que a integração sobre estes campos pode, provavelmente, dar contribuição para a anomalia do traço, podendo mudar

$$w \rightarrow w', \quad b \rightarrow b', \quad c \rightarrow c'.$$

A expressão para

$$\Gamma_{c'} = -\frac{3c' + 2b'}{36} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) \quad (3.76)$$

já é local e não requer a introdução de campos auxiliares. Os termos- w, b restantes podem ser escritos na forma

$$\Gamma_{w', b'} = \Gamma_{w'} + \Gamma_{b'} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} (E - \frac{2}{3} \nabla^2 R)_x G(x, y) \left[\frac{w'}{4} C^2 + \frac{b'}{8} (E - \frac{2}{3} \nabla^2 R) \right]_y = \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} - \frac{\sqrt{b'}}{2} \left[(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R) + \frac{w'}{b'} C^2 \right]_x \times \\
 &\quad \times G(x, y) \frac{\sqrt{-b'}}{2} \left[(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R) + \frac{w'}{b'} C^2 \right]_y + \\
 &+ \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(\frac{w'}{2\sqrt{-b'}} C^2 \right)_x G(x, y) \left(\frac{w'}{2\sqrt{-b'}} C^2 \right)_y. \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

A expressão acima possui as funções de Green $G(x, y)$, o que torna complicado a obtenção posterior das equações de movimento. Uma forma de eliminá-las é utilizar o propagador da forma Δ^{-1} e introduzir campos auxiliares produzindo uma ação local equivalente a (3.77). A ação (3.77) pode ser obtida novamente se buscarmos as equações de movimento para os campos auxiliares, sua solução em termos do fator conforme σ , e substituímos novamente na ação. Introduzindo dois campos auxiliares φ e ψ , chegamos na seguinte expressão final da ação efetiva da gravidade na forma covariante

$$\begin{aligned}
 \Gamma = S_c[g_{\mu\nu}] - \frac{3c' + 2b'}{36} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) + \int d^4x \sqrt{-g(x)} \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Delta_4 \varphi - \frac{1}{2} \psi \Delta_4 \psi \right. \\
 \left. + \varphi \left[\frac{\sqrt{-b'}}{2} (E - \frac{2}{3} \nabla^2 R) - \frac{w'}{2\sqrt{-b'}} C^2 \right] + \frac{w'}{2\sqrt{-b'}} \psi C^2 \right\}. \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

É importante ressaltar que estes campos auxiliares não dependem de σ e, portanto, não contribuem para a equação de movimento. As condições iniciais para os campos auxiliares são independentes.

A magnitude de w' , b' , c' depende da interpretação. Se a ação (3.78) é apenas uma representação clássica alternativa para a ação induzida pela anomalia não-local eq.(3.77), então o correto é colocar $w' = w$, $b' = b$ e $c' = c$ [5]. Somente para o caso em que queremos integrar sobre os campos auxiliares na integral de trajetória, eles devem dar uma contribuição independente para a anomalia [72].

Algumas observações devem ser feitas. O termo cinético para o campo auxiliar φ é positivo, enquanto para σ e ψ , negativo. O sinal negativo no termo cinético dos campos auxiliares ψ não pode ser visto como um problema, pois este campo auxiliar é um modo

induzido e não precisa satisfazer as condições de usuais para os campos físicos. Portanto, a ação efetiva induzida pela anomalia fica, na forma geral:

$$\Gamma = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \nabla^2 R - \frac{k_3}{12} R^2 + \frac{1}{2} \varphi \Delta \varphi + \varphi \left[k_1 C^2 + k_2 \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right) \right] + \frac{1}{2} \psi \Delta \psi + l_1 C^2 \psi \right\}, \quad (3.79)$$

onde $a_{1,2,3}$, são parâmetros arbitrários da ação clássica de vácuo. Os coeficientes $k_{1,2,3}$ e l_1 dependem do conteúdo de partículas e possuem correspondência com os valores apresentados em (3.78), ou seja,

$$k_1 = -\frac{w}{2\sqrt{-b}}; \quad k_2 = \frac{\sqrt{-b}}{2}; \quad k_3 = c + \frac{2}{3}b; \quad l_1 = \frac{w}{2\sqrt{-b}}. \quad (3.80)$$

Todos os coeficientes a_i na expressão (3.79) são as correções quânticas da ação clássica do vácuo. As equações para φ e ψ têm uma forma simples

$$\sqrt{-g} \left[\Delta_4 \varphi + \frac{\sqrt{-b}}{2} \left(E - \frac{2}{3} \nabla^2 R \right) - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] = 0, \\ \sqrt{-g} \left[\Delta_4 \psi - \frac{w}{2\sqrt{-b}} C^2 \right] = 0.$$

Devemos lembrar que φ , ψ são conformalmente invariantes, ou seja, eles não se transformam quando fazemos $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma(\eta)} \bar{g}_{\mu\nu}$. Se escolhermos $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, considerando uma transformação conformalmente plana, chegamos nas seguintes equações

$$\partial_\eta^4 \varphi + 8\pi\sqrt{-b} \partial_\eta^4 \sigma = 0, \quad \partial_\eta^4 \psi = 0. \quad (3.81)$$

As soluções de (3.81) podem ser apresentadas na forma

$$\varphi = -8\pi\sqrt{-b} \sigma + \varphi_0, \quad \psi = \psi_0. \quad (3.82)$$

onde φ_0 e ψ_0 são constantes de integração arbitrárias. Portanto, encontramos uma arbitrariedade relacionada com a escolha das condições iniciais para os campos auxiliares φ , ψ . Como veremos no próximo capítulo, isto não afeta a solução inflacionária pois não há dependência em φ_0 e ψ_0 . Substituindo (3.82) novamente na ação e fazendo variação com relação ao fator conforme σ , chegamos na mesma equação para σ na forma local (3.72). A escolha de φ_0 e ψ_0 é arbitrária e está relacionada com o funcional $S_c[g_{\mu\nu}]$ na eq.(3.78). Voltaremos a este ponto no momento conveniente, quando considerarmos perturbações da métrica.

Capítulo 4

Modelo cosmológico induzido pelos efeitos quânticos dos campos sem massa

Neste capítulo, vamos descrever nosso modelo cosmológico e apresentar as soluções cosmológicas particulares para as curvaturas: $k = 0, 1, -1$. Estas soluções foram primeiramente descobertas por Starobinsky [81], Mamaev e Mostepanenko [56] (veja também [16]). Porém, aqui aplicamos uma abordagem um pouco diferente e obtemos também, solução com constante cosmológica Λ , que não foi apresentada em [81, 56].

Nosso propósito é implementar uma correção quântica no sistema clássico de matéria e gravitação. Faremos estudo da estabilidade das soluções através de perturbações do fator conforme chegando a um critério de estabilidade nas soluções.

Utilizaremos como ação total para o modelo, a ação clássica $S_{vac} + S_M$, introduzidas em (3.6) e (2.20) respectivamente, adicionadas à ação efetiva induzida pela anomalia (3.72), que é a contribuição quântica. Para adicionarmos a parte de matéria, não podemos em geral utilizar as ações dos campos quânticos porque isto só é válido para a micro-física e elas não são próprias para as equações cosmológicas. Para longas distâncias é necessário utilizar ação macroscópica como, normalmente, a ação do fluido ideal [85], apresentada em (2.20). Por isto, consideramos, como parte da ação total (análogo ao apresentado para o caso clássico), a ação do fluido ideal preenchendo o Universo.

4.1 Soluções cosmológicas particulares

No Universo primordial, devemos considerar a equação de estado $p = \rho/3$, ou seja, período dominado pela radiação. Neste caso, como no segundo capítulo, a variação da ação (2.20) com relação ao fator conforme da métrica é nula, ou seja $T_\mu^\mu = 0$, de tal forma que a radiação deva ser descrita por ações de campos conformalmente invariantes.

A contribuição não trivial da equação dinâmica para $a = e^\sigma$ vem somente da ação efetiva do vácuo. De fato, os termos conformes e de superfície da ação clássica do vácuo (3.7) não contribuem para as equações dinâmicas do fator conforme. Por outro lado, para ter correspondência com a gravitação clássica, precisamos adicionar o termo de Einstein-Hilbert S_{EH} na ação total. É importante lembrar que este termo é completamente clássico e não é objeto da renormalização em teoria conforme. Logo, a ação total tem a forma

$$S_t = -\frac{M_P^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \bar{\Gamma}[g] + \text{termos conformalmente invariantes}, \quad (4.1)$$

onde $\bar{\Gamma}[g]$ vem de (3.72) e $M_P^2 = 1/G$ é a massa de Planck. No nosso caso, a ação de matéria foi incluída como termos conformalmente invariantes.

Agora, para encontrarmos as equações de movimento, vamos aplicar a transformação conforme (2.16) na ação total S_t , ou seja, S_{EH} e $\bar{\Gamma}[g]$ e encontrar o princípio da variação mínima para o fator conforme $\frac{\delta S_t}{\delta \sigma} = 0$.

Devemos lembrar que $\sigma = \ln a(\eta)$, onde $a(\eta)$ é o fator de escala e só depende da variável temporal (neste caso, o tempo conforme η), portanto, $\bar{\nabla}^2 \sigma = \sigma''$ e $\bar{\nabla} \sigma = \sigma'$. Usaremos linha ($'$), quando considerarmos derivada em relação ao tempo conforme η . A contribuição clássica, ou seja, do termo de Einstein-Hilbert, é fácil de indentificar por ter o coeficiente M_P^2 , mostrada no capítulo 2. Incluindo termos quânticos vindos da ação efetiva induzida pela anomalia, a equação de movimento fica:

$$\sigma^{(4)} - 2k \left(1 + \frac{2b}{c}\right) \sigma'' - 2 \left(3 + \frac{2b}{c}\right) (\sigma')^2 \sigma'' - \frac{M_P^2}{8\pi c} e^{2\sigma} \left[k + \sigma'' + (\sigma')^2 - \frac{2\Lambda}{3} e^{2\sigma}\right] = 0,$$

onde $k = 0, +1, -1$ para métrica de FRW plana, aberta ou fechada com solução de DeSitter. Vamos escrever esta equação para tempo físico, lembrando que $e^\sigma d\eta = a d\eta = dt$, da seguinte forma

$$\ddot{\sigma} + 4 \dot{\sigma}^2 + 7 \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 4 \left(3 - \frac{b}{c}\right) \ddot{\sigma} \dot{\sigma}^2 - 2k \left(1 + \frac{2b}{c}\right) e^{-2\sigma} (\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma}) +$$

$$-\frac{4b}{c} \dot{\sigma}^4 - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left[k e^{-2\sigma} + \ddot{\sigma} + 2 \dot{\sigma}^2 - \frac{2\Lambda}{3} \right] = 0. \quad (4.2)$$

Esta equação será importante para estudarmos estabilidade da solução. Porém, faz mais sentido buscarmos as soluções das equações para o fator de escala $a(t)$, como feito no capítulo 2 para o caso clássico. Desta forma, após transformação de variáveis, lembrando que $a(t) = e^{\sigma(t)}$, chegamos

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \left(5 + \frac{4b}{c} \right) \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\ddot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 2k \left(1 + \frac{2b}{c} \right) \frac{\dot{a}(t)}{a^3(t)} - \\ - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left[\frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{2\Lambda}{3} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde convencionamos por pontos as derivadas com relação ao tempo real t . A última equação contém constantes adimensionais b e c , definidos pelas equações (3.48), (3.49), que dependem do conteúdo de partículas da teoria, ou seja, do número de partículas com $spin = 0, \frac{1}{2}, 1$. Os valores de b e c podem ser fixados pela escolha de um modelo de partículas. Há também uma constante dimensional M_P (massa de Planck), que define a escala. A equação (4.3) é bastante complicada e uma solução exata é difícil de ser obtida. No entanto, nesta equação de movimento, podemos facilmente verificar três soluções particulares para $k = 0, 1, -1$. Elas têm a seguinte forma:

$$k = 0 \quad a(t) = A \cdot \exp(Ht), \quad (4.4)$$

$$k = -1 \quad a(t) = \frac{1}{H} \sinh(Ht), \quad (4.5)$$

$$k = +1 \quad a(t) = \frac{1}{H} \cosh(Ht), \quad (4.6)$$

onde A é uma constante arbitrária e, em todos os casos, a constante de Hubble vale

$$H = \frac{M_P}{\sqrt{-32\pi b}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{64\pi b}{3} \frac{\Lambda}{M_P^2}} \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

As soluções para o caso com constante cosmológica Λ nula foi encontrada por Starobinsky em [81] (veja também [56]). Pelo fato de b ser sempre negativo em (3.48), as soluções (4.4), (4.5) e (4.6) existem somente para $\Lambda \geq 0$. Mas, já que estamos interessados em regiões de alta energia, o sinal mais natural de Λ é positivo. Vamos investigar este ponto. No Universo atual, Λ é também positivo mas muito pequeno, devido ao cancelamento

das densidades induzidas e da energia de vácuo (veja, por exemplo [75, 67] e também [73, 86, 80]). A constante cosmológica induzida aparece da quebra espontânea de simetria no Modelo Padrão, como uma energia de vácuo correspondente ao potencial mínimo de Higgs

$$V_{cl} = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{f}{8}\phi^4 \quad (4.8)$$

e tem como valor clássico

$$\Lambda_{ind} = \langle V_{cl} \rangle = -\frac{m^4}{2f} < 0 \quad (4.9)$$

com magnitude em torno de 55 ordens maior que a constante cosmológica observável. A parte da contribuição do vácuo deve ser positiva para providenciar o cancelamento em baixas energias. Mas, em altas energias, com temperatura em torno de 300 GeV , a simetria no potencial (4.8) é restaurada, tal que a parte induzida (4.9) desaparece. Após isto, o valor da constante cosmológica será dado pelo termo de vácuo com as correções quânticas correspondentes [75]. Aumento similar de Λ pode ser esperado em qualquer outra transição de fase que pode ocorrer em altas energias. Em particular, a contribuição da constante cosmológica pode vir da quebra da supersimetria. Uma última observação é que, após a inflação, quando o conteúdo de matéria do Universo entra em estado de equilíbrio, a radiação de alta temperatura domina sobre o termo de constante cosmológica [13]. No que segue, a não ser que indiquemos explicitamente, assumiremos que a constante cosmológica Λ , no período inflacionário de alta energia, satisfaz a relação $0 < \Lambda \ll M_P^2$. Então, a expansão de (4.7) em termos de Λ/M_P^2 , resulta em dois valores

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad \text{e} \quad H = \sqrt{-\frac{M_P^2}{16\pi b} - \frac{\Lambda}{3}}, \quad (4.10)$$

sendo que, o primeiro valor é exatamente o que encontramos sem correções quânticas eq.(2.12). O erro de H , em ambos os casos, tem a ordem de magnitude Λ^2/M_P^2 . No Universo atual, isto significa que, o que nós observamos, é exatamente Λ , sem correção quântica $\bar{\Gamma}$, relacionada com o termos da ação (3.72). No período inflacionário, devemos comparar a segunda solução de (4.10) com o caso em que $\Lambda = 0$. O espectro de H é modificado por correções dependentes de Λ e esta correção é muito pequena. Veremos detalhes do estudo de H posteriormente através de gráficos.

4.2 Solução inflacionária sem singularidade

Uma solução particular bastante especial é a para k e Λ nulos. Historicamente, este foi o primeiro exemplo de comportamento inflacionário [81]. Pretendemos estudar estabilidade desta solução, portanto, vamos reescrevê-la como sendo a solução inicial não perturbada

$$a(t) = a_0(t) = Ae^{\pm H_0 t}, \quad H_0 = \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}}. \quad (4.11)$$

A solução com sinal positivo descreve uma expansão do Universo. Esta solução exponencial (4.11) é exatamente uma das soluções obtidas em [81, 56] com o uso do Tensor Momento-Energia renormalizado [24] (veja também [33]). A equação para $a(t)$ que foi usada em [81] é diferente de (4.3), pois em [81], a componente-(0,0) da equação de Einstein (2.5) foi utilizada, enquanto que em (4.3) utilizamos o traço da mesma. De fato, ambas contêm a mesma informação, uma vez a métrica tem somente um grau de liberdade, como já mostramos no capítulo 2. Por outro lado, na nossa consideração, fica claro que a introdução dos campos de matéria conformalmente invariantes ou a ação para o fluido ideal (2.20) com $p = \rho/3$ (que é sempre válido para partículas ultra-relativísticas sem massa) não modifica a equação de movimento. Então, a solução inflacionária acima é válida para qualquer matéria conformalmente invariante. Uma consequência importante é que as perturbações de densidade, que não violem o vínculo $p = \rho/3$, não podem destruir o comportamento exponencial de $a(t)$. Obviamente, qualquer perturbação que viole este vínculo implica no surgimento de partículas massivas ou de uma constante cosmológica. Algumas questões importantes relativas à solução exponencial acima são:

1. O período de inflação é suficiente para atingir uma taxa necessária de expansão?
2. A inflação ocorre somente para condições iniciais especiais ou podemos encontrar uma situação mais geral?
3. A solução inflacionária é estável perante perturbações da métrica que são consistentes com $p = \rho/3$?

Para entender melhor o significado da massa de Planck nas expressões acima, introduzire-

mos uma nova variável para o tempo, sem dimensão, da forma

$$\tau = \frac{M_P}{16\pi} t. \quad (4.12)$$

Fazendo isto, a equação (4.3) permanece idêntica, exceto pelo fato de que M_P desaparece. Logo, em termos de τ , temos a seguinte solução inflacionária

$$a_0(\tau) = A e^{+\tau/\sqrt{-b}}. \quad (4.13)$$

A equação acima (4.13) pode ser utilizada para encontrarmos a taxa com que a inflação ocorre. Suponha que queremos uma expansão do Universo em 10^n ordens de magnitude, começando de algum τ_0 . De acordo com (4.13), a taxa total de inflação é

$$\frac{a_0(\tau_0 + \Delta\tau)}{a_0(\tau_0)} = \exp \left\{ 4\pi \sqrt{\frac{360}{N_t}} \Delta\tau \right\} = 10^n, \quad (4.14)$$

onde

$$N_t = N_0 + 11N_{1/2} + 62N_1$$

é o conteúdo de partículas da teoria. Assim, obtemos

$$\Delta\tau = n \frac{\ln 10}{4\pi} \sqrt{\frac{N_t}{360}}. \quad (4.15)$$

Como primeiro exemplo, podemos considerar o Modelo Padrão estendido, $N_0 = 8$, $N_{1/2} = 48$ e $N_1 = 12$ (será explicado, no final deste capítulo, detalhes sobre estes números de campos) e concluimos que $\Delta\tau \approx 0.345n$. Supondo, $n = 60$ encontramos um período necessário de inflação $\Delta\tau \approx 20.7 t_P$, onde t_P é o *tempo de Planck*, que serve como uma unidade de tempo para τ . Se aumentarmos o conteúdo de partículas da teoria, $\Delta\tau$ aumenta um pouco. Lembremos que as contribuições de diferentes campos no coeficiente b em (3.68) possuem os mesmos sinais. No caso geral, o tempo de inflação esperado pode ser calculado com uma ou duas ordens superiores ao tempo de Planck, dependendo da escolha do modelo. Detalhes sobre a estabilidade desta solução exponencial será discutida na seção seguinte.

4.3 Estudo da estabilidade da solução inflacionária por métodos numéricos

Nesta seção, consideraremos a estabilidade para o caso de campos livres sem massa, da solução com $k = 0$ e constante cosmológica $\Lambda = 0$. Em vez de trabalhar com a equação (4.3), pode-se também, considerar a componente-(0,0) da equação de Einstein (2.5) obtendo uma equação de terceira ordem para $a(t)$ equivalente à equação (4.3) (veja, por exemplo [81, 33, 47]). A equação-(0,0) pode ser resolvida analiticamente [81] e o diagrama de fase mostra a existência de um atrator simples correspondendo à solução inflacionária no caso estável e vários atratores, incluindo $H = 0$, no caso não estável, com $k = \Lambda = 0$.

No início da inflação, a estabilização da solução exponencial acontece muito rápido [31]. No entanto, no estágio final, ela é suficiente para verificar a estabilidade assintótica da solução inflacionária com relação a pequenas perturbações na forma de Lyapunov (veja, por exemplo [57, 21], para estabilidade em modelos de altas derivadas). Nesta seção, vamos estabelecer algumas propriedades importantes da estabilidade para o caso de campos sem massa. Aplicaremos análise numérica e aproximações analíticas que poderão ser utilizadas para situações mais complexas, como por exemplo, considerando campos massivos.

Vamos estudar a estabilidade da solução para o caso de $k = 0$. Veremos, na próxima seção, que para estudar estabilidade devemos fazer perturbação do fator conforme $\sigma(\tau) = \ln a(\tau)$. Além disso, mostraremos que, considerando estabilidade assintótica, permanecemos com as mesmas equações perturbadas encontradas para $k = 0$, independente dos valores $k = 1, -1$ e com constante cosmológica Λ . Portanto, vamos considerar a equação (4.2) e reescrevê-la em termos de τ , definido na eq. (4.12), como

$$\ddot{\sigma} + 7\dot{\sigma}\dot{\sigma} + 4 \left(1 - 3\frac{b}{c}\right) \ddot{\sigma}\dot{\sigma}^2 + 4\dot{\sigma}^2 - 4\frac{b}{c}\dot{\sigma}^4 - \frac{1}{8\pi c} (2\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma}) = 0, \quad (4.16)$$

e a partir daí vamos incluir as perturbações de

$$\sigma(\tau) = \sigma_0(\tau) + y(\tau) \quad (4.17)$$

em relação à solução inflacionária $\sigma_0(\tau) = \ln A + \frac{1}{\sqrt{-b}} \tau$. Para simplificar, consideraremos

$A = 1$. Neste caso, a equação para as perturbações $y(\tau)$ tem a forma

$$\ddot{y} + 7H\dot{y} + 2\left(6 - \frac{b}{c}\right)H^2y - \frac{8b}{c}H^3y = 0 \quad (4.18)$$

(com todas as derivadas com relação a τ) e podemos facilmente explorá-la. Veremos que a estabilidade da solução inflacionária da equação (4.18), curiosamente, depende do conteúdo de partícula da teoria. Devemos notar que, se fizermos uma mudança de variável na equação (4.18) da forma

$$\frac{d}{d\tau} = H \frac{d}{dT},$$

teremos (na equação abaixo as derivadas são com relação a T)

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 2\left(6 - \frac{b}{c}\right)y - \frac{8b}{c}\dot{y} = 0, \quad (4.19)$$

ou seja, a estabilidade depende somente da razão b/c . Substituindo $y = e^{r \cdot T}$ encontramos três raízes diferentes de zero $r_{1,2,3}$ e também $r_4 \equiv 0$.

Lembremos que a existência de raiz nula significa arbitrariedade dos dados iniciais em uma das coordenadas no espaço 4-dimensional (escolha do $\ln A$). Isto pode ser visto também se fizermos perturbações em (4.3). Os valores de $r_{1,2,3}$ dependem do conteúdo de partícula $N_{0,1/2,1}$. Com o aumento proporcional do número de campos $N_{0,1/2,1}$ os valores absolutos da parte real de r_i decrescem. Também, de acordo com (4.15), o período necessário de inflação pode ser maior neste caso. Substituindo os valores típicos para o Modelo Padrão estendido ($N_0 = 8, N_{1/2} = 48, N_1 = 12$), obtemos

$$r_{1/2} \approx -20.63 \pm 55.52i, \quad r_3 \approx -5.40. \quad (4.20)$$

Assim, para este modelo, todas as três raízes têm a parte real negativa. Isto implica que a inflação exponencial é estável sob pequenas perturbações do fator conforme da métrica. Uma possível fonte de instabilidade permanece nas perturbações de outros graus de liberdade, ou nas perturbações de densidade. É necessário observar que a análise da estabilidade feita (de diferentes formas) em [81] resultam em conclusões diferentes das obtidas acima. A origem desta discrepância é que em [81] foi escolhido o sinal negativo do coeficiente c em (3.68). De fato, o sinal negativo corresponde às contribuições dos campos vetoriais em (3.46), enquanto os campos de spin-0 e spin-1/2 contribuem com

sinal positivo. Os resultados apresentados são para campos contidos no Modelo Padrão estendido, e nossas conclusões serão confirmadas utilizando métodos numéricos.

Como um segundo exemplo, estudemos a teoria- M , que é atualmente considerada como uma possível candidata para o modelo unificado de todas as interações. Uma possível realização da teoria- M é a supergravidade máxima de $N = 1$, $n = 11$. O setor de spin- $0, 1/2, 1$ da teoria compactificada em $n = 4$ tem 70 escalares, 28 vetores e 56 espinores Majorana. Considerando $N_{0,1/2,1} = (70, 28, 28)$ encontramos as raízes

$$r_{1/2} \approx -56.47 \pm 67.12 i, \quad r_3 \approx +76.63, \quad (4.21)$$

indicando a instabilidade da solução inflacionária. Uma questão é, esta instabilidade implica num tempo necessário de inflação em todas as circunstâncias? Como veremos posteriormente, a resposta é não. O estudo da estabilidade na seção anterior nos dá poucas informações sobre o comportamento de $a(t)$ com relação aos dados iniciais numa vizinhança da solução especial considerada. Podemos verificar como estas soluções se comportam se fizermos pequenas alterações nos dados iniciais. Para isto, utilizaremos métodos numéricos do programa *Mathematica* [89] e verificaremos, por métodos gráficos, qual o comportamento de $a(t)$ perante estas pequenas modificações nos dados iniciais.

A equação de quarta ordem (4.3) depende de dois parâmetros b e c . O primeiro parâmetro, b , é negativo para qualquer conteúdo de partícula, e o segundo parâmetro, c , pode ser tanto positivo quanto negativo. A integração numérica desta equação exige que os valores numéricos de b e c sejam especificados, assim como as condições iniciais. Entre os muitos possíveis cenários para estes parâmetros, podemos identificar três principais:

1. Expansão singular do Universo, com possíveis oscilações entre fases de aceleração e desaceleração;
2. Expansão inflacionária do Universo;
3. Universo não singular, apresentando contração na fase inicial, seguida por uma fase de expansão, uma solução ricochete (bounce solution).

A solução inflacionária exata (4.13) representa uma escolha particular das condições iniciais. O estudo perturbativo, indica que esta solução é estável para o conteúdo de

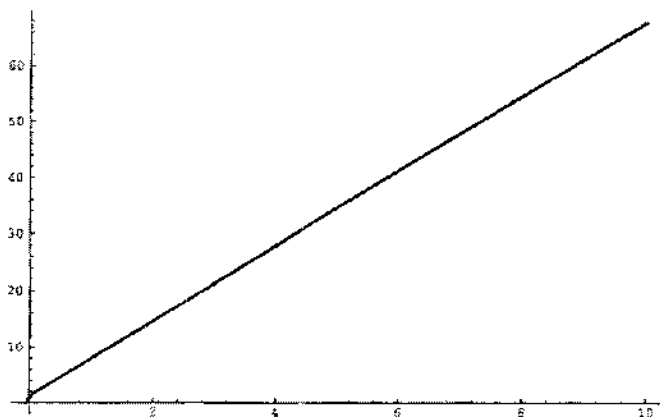


Figura 4.1: Gráfico de σ versus tempo físico normalizado τ para o Modelo Padrão estendido com os valores típicos dos números de campos $N_0 = 8, N_{1/2} = 48$ e $N_1 = 12$ e condições iniciais: $\sigma(0) = 1; \dot{\sigma}(0) = 2(-b)^{-\frac{1}{2}}; \ddot{\sigma}(0) = 0; \ddot{\sigma}(0) = -0.1$. Podemos ver uma rápida estabilização da solução exponencial.

partícula do Modelo Padrão estendido com $N_0 = 8, N_{1/2} = 48, N_1 = 12$ (veja as figuras 4.1 e 4.2).

Para podermos usar a representação gráfica dos resultados vamos explorar o comportamento da variável logarítmica $\sigma(\tau)$ ao invés de $a(\tau)$. A inflação ocorre para um grande conjunto de condições iniciais, até mesmo quando estas condições são levadas longe da solução exponencial exata (4.13).

Um estudo numérico para variações nas condições iniciais representando a solução (4.13) revela que esta solução inflacionária é bastante sólida; há dois cenários principais:

1. Uma expansão inflacionária eterna;

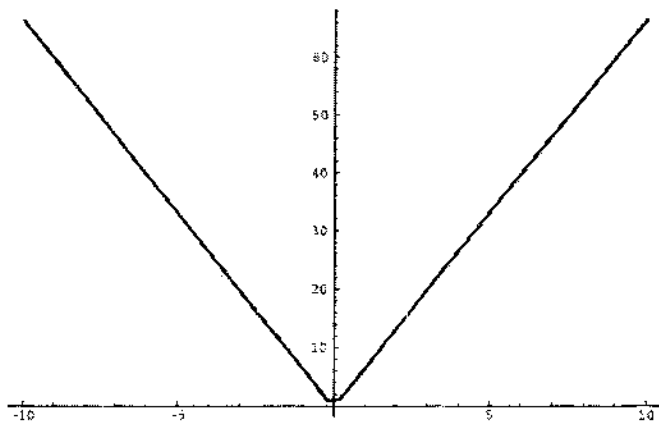


Figura 4.2: Gráfico de σ versus tempo físico normalizado τ para o Modelo Padrão estendido com os valores típicos dos números de campos $N_0 = 8, N_{1/2} = 48$ e $N_1 = 12$ e condições iniciais: $\sigma(0) = 1; \dot{\sigma}(0) = 0.1(-b)^{-\frac{1}{2}}; \ddot{\sigma}(0) = 0; \ddot{\sigma}(0) = 0$. Exemplo de solução ricochete (bounce solution).

- Um Universo não-singular, apresentando um contorno para o fator de escala.

No último caso, o Universo exibe uma contração acelerada, seguida por uma expansão acelerada; em alguns dos casos especiais há um pequeno período não inflacionário de contração (expansão). Esses resultados numéricos confirmam os possíveis cenários analíticos e estendidos do Universo incluindo contorno. Somente estes dois cenários foram encontrados para o Modelo Padrão estendido (as figuras 4.1 e 4.2 dão exemplos típicos dos gráficos). O principal efeito dos cenários obtidos aqui é seu comportamento inflacionário quase universal, enquanto que, em outras teorias, havia um pequeno período de inflação próximo ao contorno. Consideremos agora, por exemplo, o multipletto da teoria- M (setor de matéria $n = 11$ da supergravidade compactado para $n = 4$). Quando fazemos uma

pequena mudança nas condições iniciais para a solução inflacionária exata, temos uma expansão extremamente rápida, com singularidade apenas por uma fração da unidade de tempo (Planck), após o momento inicial (veja as figuras 4.3 e 4.4).

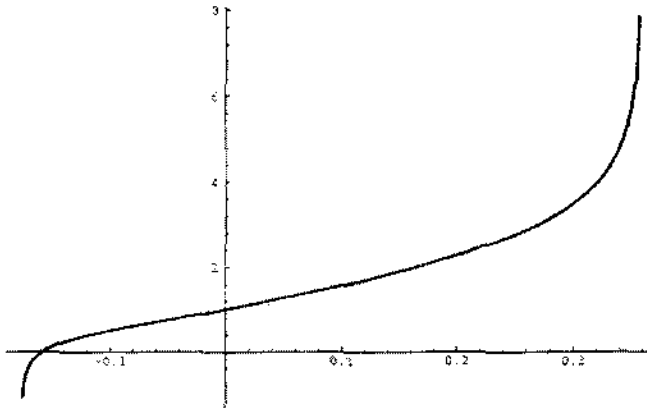


Figura 4.3: Gráfico de σ versus tempo físico normalizado τ para o setor de spin 0, 1/2, 1 da teoria-M compactificada em $n = 4$, $N_{0,1/2,1} = (70, 28, 28)$ e condições iniciais: $\sigma(0) = 1$; $\dot{\sigma}(0) = (b)^{-\frac{1}{2}}$; $\ddot{\sigma}(0) = 0.001$; $\ddot{\sigma}(0) = 0$. Neste caso, não existe estabilidade e observamos o caso de “hiperinflação”, que é fisicamente inaceitável.

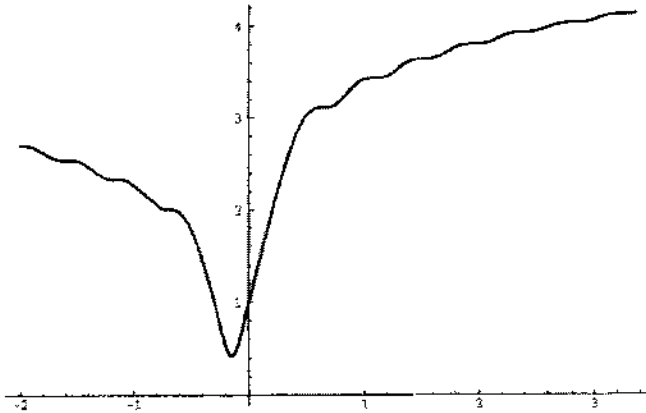


Figura 4.4: Gráfico-exemplo de σ versus tempo físico normalizado τ para o setor de spin- $0, 1/2, 1$ da teoria-M compactificada em $n = 4$, com $N_{0,1/2,1} = (70, 28, 28)$ e condições iniciais: $\sigma(0) = 1$; $\dot{\sigma}(0) = (-b)^{-1/2}$; $\ddot{\sigma}(0) = 0$; $\ddot{\sigma}(0) = -80$. Aqui observamos uma grande variação no comportamento de $\sigma(t)$ para condições iniciais distintas.

4.4 Estudo da estabilidade das soluções particulares por métodos analíticos

Aqui vamos investigar, pelo método analítico aproximado, a estabilidade da inflação com relação ao fator conforme levando em conta também a constante cosmológica e as topologias $k = 0, 1, -1$. Nesta seção, consideraremos a existência de uma fase inflacionária do Universo bem no início, quando os efeitos de massa das partículas são desprezíveis. Em seguida, no capítulo 6, generalizamos os resultados para o caso de H variável que é consequência das contribuições de campos massivos.

Primeiramente, vamos esclarecer porque é necessário trabalhar com as perturbações

em relação ao fator conforme $\sigma(\tau)$.

Para entender a importância desta escolha de variáveis, consideremos uma perturbação da forma $a = a_0 + x(\tau)$. Lembrando que $\sigma(\tau) = \ln a(\tau)$ e a eq.(4.17), teremos a seguinte relação entre as perturbações

$$y(\tau) = \ln \left[1 + \frac{x(\tau)}{a_0(\tau)} \right],$$

onde a_0 é dado por (4.13).

Já que $a_0(\tau)$ cresce muito rápido, o crescimento em $x(\tau)$ pode ser desprezível pois é suprimido pelo fator $1/a_0(\tau)$. Claro que, isto acontece somente quando $x(\tau)$ produz uma perturbação estável. Portanto, não é seguro estudarmos estabilidade considerando perturbações do fator de escala $a(\tau)$.

Por outro lado, podemos também trabalhar com uma equação para $H(t)$, considerando $\dot{\sigma} = H(t)$ em (4.2) resultando

$$\begin{aligned} & \ddot{H} + 7H \dot{H} + 4\dot{H}^2 + 4 \left(3 - \frac{b}{c} \right) \dot{H} H^2 - \frac{4b}{c} H^4 \\ & - 2k \left(1 + \frac{2b}{c} \right) e^{-2Ht} (H^2 + \dot{H}) - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left[k e^{-2Ht} + \dot{H} + 2H^2 - \frac{2\Lambda}{3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

É fácil verificar que se fizermos:

$$H(t) = H_{1/2} + y(t),$$

onde $H_{1/2} = \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}}$ é uma constante que satisfaz a equação acima para $\Lambda = 0$, temos uma equação perturbada idêntica à eq.(4.18) para $k = 0$. Porém vamos trabalhar com $\sigma(\tau)$ por ter uma relação simples com $a(t)$, $\sigma = \ln a$, para todos os valores de curvatura $k = 0, 1, -1$, o que não acontece se considerarmos o parâmetro de Hubble.

Finalmente, aprendemos algo importante para estudarmos o caso massivo, que é mais complicado: devemos perturbar $\sigma(t)$ em vez de $a(t)$. Os cálculos para $k \neq 0$ são um pouco mais complicados. Mas, as condições de estabilidade são as mesmas uma vez que após aproximação para tempos grandes, teremos as mesmas equações perturbadas. O importante é que esta condição de estabilidade será para $k = 0, 1, -1$ e independente da constante cosmológica Λ . Vamos formular dois teoremas simples:

Teorema 1. O valor de Λ não influencia a estabilidade assintótica.

Prova: A equação perturbada para $x(t)$ ou $y(t)$ não muda a equação original para $a(t)$, ou $\sigma(t)$, se esta for multiplicada por uma fator a^n , ou $e^{n\sigma}$. Portanto, podemos sempre isolar o termo cosmológico, tal que sua contribuição para a equação perturbada seja zero. A dependência de Λ pode ser vista em H , mas a magnitude de H é irrelevante para a estabilidade, pois podemos sempre renormalizar o tempo tal que, na nova equação, temos $H = 1$.

Observação. Este teorema é válido somente para $\Lambda \ll M_P^2$.

Teorema 2. A escolha de $k = 0, 1$ e -1 não influencia a estabilidade assintótica e teremos uma mesma condição para os três casos.

Prova: É suficiente aplicar o teorema de estabilidade assintótica para $k = 0$ e no limite $t \rightarrow \infty$. Na equação para as perturbações, podemos trocar as funções dos coeficientes pelos seus valores assintóticos. Já que ambos, $\sinh(Ht)$ e $\cosh(Ht)$ comportam-se como uma exponencial para tempos posteriores, as condições de estabilidade nos três casos serão as mesmas. Veremos mais detalhes a seguir.

Ilustração. A equação para a perturbação, para teoria dos campos sem massa é

$$\begin{aligned} \ddot{y}[t] + 7\dot{\sigma}_0\dot{y}[t] + \left[\left(1 + \frac{2b}{c}\right) (\dot{\sigma}_0^2 + \ddot{\sigma}_0) + \frac{M_P^2}{16\pi c} \right] 4ke^{-2\sigma_0}y[t] \\ + \left[8\ddot{\sigma}_0 + 4\left(3 - \frac{b}{c}\right)\dot{\sigma}_0^2 - 2k\left(1 + \frac{2b}{c}\right)e^{-2\sigma_0} - \frac{M_P^2}{8\pi c} \right] \dot{y}[t] \\ + \left[7\ddot{\sigma}_0 + 8\left(3 - \frac{b}{c}\right)\ddot{\sigma}_0\dot{\sigma}_0 - \frac{16b}{c}\dot{\sigma}_0^3 - 4k\left(1 + \frac{2b}{c}\right)e^{-2\sigma_0}\dot{\sigma}_0 - \frac{M_P^2}{2\pi c}\dot{\sigma}_0 \right] y[t] = 0. \end{aligned}$$

Se desprezarmos os termos nos coeficientes das perturbações que tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$, a dependência dos termos com k desaparece.

Ou seja, será suficiente considerar $\Lambda = 0$ e $k = 0$ para investigar estabilidade das soluções. Esta informação pode ser útil no capítulo 6, quando estudarmos campos massivos, já que não serão incluídos termos novos com dependência na curvatura e constante cosmológica.

4.4.1 Critério de estabilidade das soluções

Podemos fazer um estudo analítico destas perturbações do fator conforme e chegar a um critério para que ocorra a estabilidade das soluções. Usaremos as condições de estabilidade de Routh-Hurwitz (veja [20] para detalhes) que será resumido a seguir: Suponha que conhecemos uma solução particular $x_0(t)$ da equação

$$x^{(N)} = f(x^{(N-1)}, x^{(N-2)}, \dots, x', x), \tag{4.23}$$

onde $x = x(t)$ e $x^{(N)} = \frac{d^N x}{dt^N}$. Para verificar a estabilidade assintótica desta solução sob pequenas perturbações, consideramos $x(t) = x_0(t) + y(t)$ e expandimos (4.23) em primeira ordem de $y(t)$

$$b_0 y^{(N)} + b_1 y^{(N-1)} + b_2 y^{(N-2)} + \dots + b_{N-1} y' + b_N y = 0, \tag{4.24}$$

onde $b_0 > 0$ por definição. Consideremos duas possibilidades:

1) Todos os valores de b_i são constantes. Neste caso, o problema se reduz à análise das soluções da equação característica

$$b_0 \lambda^N + b_1 \lambda^{N-1} + b_2 \lambda^{N-2} + \dots + b_{N-1} \lambda + b_N = 0. \tag{4.25}$$

A solução geral de (4.24) é uma combinação dos termos $\exp(\lambda_i \cdot t)$, onde λ_i são as raízes de (4.25) e os coeficientes são polinomiais em t . Se todas estas raízes tem a parte real negativa

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0, \tag{4.26}$$

a solução $y_0(t)$ é assintoticamente estável. O critério acima, relação (4.26) produz o que chamamos de *condições de Routh-Hurwitz*. As condições são que, os determinantes D_j devem ser positivos, onde $D_1 = b_1$ e

$$D_j = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \dots & b_{2j-1} \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots & b_{2j-2} \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & b_{2j-3} \\ 0 & b_0 & b_2 & \dots & b_{2j-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

com $j = 2, 3, \dots, N$ e $b_i = 0$, $i > N$. Para $N = 4$, que é nosso maior interesse, encontramos quatro determinantes.

2) Para os valores de $k = 1, -1$ encontramos os coeficientes $b_i = b_i(t)$ não constantes. Mas, existe um teorema geral (veja, por exemplo [20]) que o estudo de estabilidade neste caso, pode ser reduzido ao de coeficientes constantes \bar{b}_i , quando existem os limites $b(t) \rightarrow \bar{b}_i$ para $t \rightarrow \infty$. Isto é exatamente o que acontece ao considerarmos as perturbações de σ com $k = 1, -1$. Além disso, os valores de \bar{b}_i correspondem aos mesmos da equação perturbada com $k = 0$.

Portanto, podemos considerar os coeficientes de (4.23) para $k = 0$ ou os limites dos coeficientes para $k = 1, -1$ e buscarmos as condições dos sinais do determinantes (4.27).

Fazendo isto, encontramos que, para os determinantes serem positivos (ou seja, estabilidade das soluções) devemos ter $-\frac{b}{c} > 0$. Como sabemos, o sinal de b em (3.48) é sempre negativo independente do conteúdo de partículas. Ou seja, para que haja estabilidade devemos ter $c > 0$ e instabilidade $c < 0$ (veja [81], [31]). De acordo com (3.49), $c < 0$ é equivalente a

$$N_1 > \frac{1}{3} N_{1/2} + \frac{1}{18} N_0. \quad (4.28)$$

A única forma de produzir uma não estabilidade na inflação, para quando $c > 0$, é introduzindo algum termo adicional na ação clássica de vácuo. Por exemplo, um termo $\int \sqrt{-g} R^2$ com um coeficiente suficientemente grande que serve para este objetivo.

Notemos porém, que a correção quântica (3.72) não é válida somente para o Universo primordial, mas também nos últimos estágios da sua evolução. Portanto, o conteúdo de partículas $N_0, N_{1/2}$ e N_1 pode ser diferente, pois para energias típicas pequenas, os campos massivos devem se desacoplar. Vamos considerar alguns exemplos de conteúdo de partículas possíveis para determinados estágios da história do Universo. Para H comparável com a energia de Fermi $M_F = G_F^{-1/2} \approx 293 \text{ GeV}$, podemos considerar o Modelo Padrão da física de partículas elementares (Standard Model, SM). Neste caso, $N_1 = 12$, pois existem W^\pm, Z e fóton, além de 8 quarks. Há também 3 gerações de férmions, organizados em representações de grupo $SU(2)$ que são quarks e léptons, além do fato dos quarks possuírem cores e também pertecerem ao grupo $SU(3)_c$. Logo, $N_{1/2} = 6 + 18 = 24$, onde 6 corresponde aos léptons e 18 aos quarks. Além disso, existe o campo de Higgs que é um escalar complexo na representação do grupo $SU(2)$. Portanto, $N_0 = 4$. Neste caso, o sinal da eq.(4.28) permanece o mesmo e a inflação é instável.

Para energias mais altas, o conteúdo de partículas deve ser diferente. Em particular, podemos esperar encontrar supersimetria (SUSY) que proporciona grandes vantagens comparando com o SM [14, 75]. Neste caso, o número de vetores é o mesmo $N_1 = 12$, pois as forças fundamentais (força eletromagnética, forças fraca e forte) não mudam. Por outro lado, para providenciar a supersimetria, cada partícula do SM precisa de um “superparceiro”, as partículas- S . Assim, precisamos adicionar o *gaugino* que contribui com 12 espinores de Majorana, equivalente a 6 espinores de Dirac. Além disso, para o setor de Higgs é necessário acrescentar mais um campo escalar e adicionar o *Higgsino* com 2 espinores de Dirac. O *leptino* e o *quarkino* contribuem com 96 escalares. Logo, obtemos para o MSSM $N_0 = 104$, $N_{1/2} = 32$. Neste caso, temos estabilidade.

Consideremos outro exemplo, o Universo atual. O valor da constante de Hubble atual é extremamente pequeno, em torno de 10^{-42} GeV , que são 30 ordens menor que a massa do neutrino. De acordo com dados recentes [67], esta magnitude da constante de Hubble é devido principalmente à contribuição da constante cosmológica. O valor de “ c ”, eq.(3.49), no Universo atual é negativo devido à contribuição de uma única partícula sem massa - fóton ¹ com $N_1 = 1$, $N_0 = N_{1/2} = 0$. Portanto, a inflação é estável.

Porém, devemos verificar se os termos de altas derivadas não destroem a estabilidade da primeira solução na eq.(4.10). Usando (4.18), chegamos na seguinte equação característica para a perturbação de H

$$\lambda^3 + 7H\lambda^2 + \left[4\left(3 - \frac{b}{c}\right)H^2 - \frac{M_P^2}{8\pi c}\right]\lambda - \left[\frac{16b}{c}H^3 + \frac{M_P^2}{2\pi c}H\right] = 0. \quad (4.29)$$

Para obter a solução explícita desta equação, vamos começar com o caso particular quando $\Lambda = 0$. Então $H = 0$ e as raízes da equação (4.29) são

$$\lambda_1^{(0)} = 0, \quad \lambda_{2/3}^{(0)} = \pm \frac{M_P}{\sqrt{8\pi|c|}} i. \quad (4.30)$$

Até este momento, não podemos definir nenhuma condição para a estabilidade, pois a única raiz real é nula. Agora, vamos procurar solução para a eq.(4.29) fazendo perturbações em (4.30). Devido à grande diferença entre as ordens de grandeza de H e M_P ,

¹Se o neutrino for sem massa, pode acontecer uma igualdade em (4.28).

esta aproximação é perfeita. As soluções têm a forma

$$\lambda_1 = -4H, \quad \lambda_{2/3} = -\frac{3}{2}H \pm \frac{M_P}{\sqrt{8\pi|c|}}i, \quad \text{onde} \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} > 0. \quad (4.31)$$

Podemos ver que uma pequena constante cosmológica $\Lambda > 0$ realmente estabiliza a solução na região de baixa energia, exatamente como esperávamos. Além disso, podemos verificar também a estabilidade para o próximo período pós-inflacionário, quando a densidade de energia do vácuo deve ser menor que a densidade de radiação [13, 86]. Para período posterior, como já mencionamos, quando substituímos a solução de FRW na eq.(4.3), os termos quânticos decrescem com $1/t^2$ comparando com os termos de Einstein-Hilbert e termos de matéria. Portanto, no período posterior da expansão pós-inflacionária do Universo, a solução de FRW é uma boa aproximação. Logo, a relação (4.28) mostra a não-estabilidade e não é necessário introduzir o termo especial $\int \sqrt{-g}R^2$.

A condição (4.28) nos habilita construir um cenário inflacionário muito atrativo (veja [76, 66]). O Universo pode começar na fase estável, tal que a inflação inicia independente dos dados iniciais. A forma mais simples de providenciar a estabilidade em (4.28) é assumir supersimetria na região de alta energia e também supor sua ausência em energias baixas, pois as partículas- S são pesadas e desacoplam-se [76]. Se, no decorrer da inflação, a magnitude da constante de Hubble diminuir, os loops das partículas- S desacoplam-se e o conteúdo de matéria $N_{0,1/2,1}$ fica modificado. Como resultado, o sinal da desigualdade (4.28) muda para o oposto e o Universo entra em uma inflação não-estável com a transição eventual para a evolução de FRW. Uma questão importante é, porque o parâmetro de Hubble deve decrescer durante a inflação? De fato, as soluções (4.4), (4.5) e (4.6) são caracterizadas pela constante H . A resposta a esta pergunta é que o valor de H decresce realmente, se formos além da aproximação sem massa [77, 66], como veremos no capítulo 6.

Outro aspecto interessante da cosmologia baseado na ação efetiva de vácuo induzida pelos efeitos quânticos dos campos sem massa é a possível contribuição de matéria. Aqui, temos duas situações diferentes. Primeiro, a possibilidade de ter um conjunto de campos massivos no início da inflação. Esses campos podem vir da transição de fase de cordas. Para nosso modelo é importante que este conteúdo massivo não destrói a estabilidade neste estágio da inflação. Suponha, para simplificar a consideração, que estes campos

criam pressão $p = 0$. Então, a equação (4.3) é modificada pela adição do termo $\rho_m a^{-3}$ no lado direito. A investigação da equação com este termo e com $\Lambda = k = 0$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3 \dot{a} \ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \left(5 + \frac{4b}{c}\right) \frac{\ddot{a} \dot{a}^2}{a^3} - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{\rho_m a^{-3}}{c}, \quad (4.32)$$

foi feita numericamente. O resultado é tal que, mesmo para $\rho_m = M_P^4$, o sistema não perde a estabilidade e a solução volta a ser exponencial em poucos tempos de Planck. Os gráficos são quase idênticos ao estudo de campos sem matéria. A razão disto é que o novo termo decresce muito rapidamente durante a inflação e torna-se irrelevante. O segundo aspecto é a transição para o estágio de FRW. Após alguns campos massivos desacoplarem, a inflação torna-se instável. Para entender melhor esta situação, vamos substituir a solução correspondente de FRW, ou seja $a(t) \sim t^{2/3}$, na equação (4.32). É fácil ver que os termos “clássicos” ambos de matéria e Einstein, comportam-se como $1/t^2$, enquanto que, a correção quântica, com derivadas superiores, comporta-se como $1/t^4$. De fato, $H(t) \rightarrow 0$, como usual. No entanto, considerando dados iniciais próprios para a inflação instável, a solução de FRW é uma aproximação perfeita para períodos posteriores.

Capítulo 5

Ondas gravitacionais

O teste mais difícil para um modelo cosmológico com altas derivadas é o comportamento das perturbações cosmológicas. Neste capítulo, apresentaremos o cálculo das perturbações da métrica, ou seja, ondas gravitacionais. Iremos comparar os resultados do espectro de perturbações com o modelo convencional clássico baseado no potencial de inflaton.

Apresentaremos os resultados preliminares relativos às perturbações da métrica (ondas gravitacionais) durante os últimos 65 e -folds na inflação induzida pela anomalia. Análise similar foi previamente feita em [81, 32]. Em ambos artigos, a investigação foi restrita ao caso de efeitos quânticos dos campos sem massa, e a pequena diferença nas equações para a perturbação é (em nossos termos) devido à diferença na escolha do funcional conformalmente invariante $S_c[g_{\mu\nu}]$ na eq.(3.72). Primeiramente, vamos mostrar algumas considerações das perturbações da métrica no modelo convencional. Detalhes do estudo das ondas gravitacionais para campos sem massa e massivos serão apresentados separadamente. E, finalmente, faremos comparação dos resultados do modelo induzido pela anomalia com o modelo tradicional, bem como com os resultados observacionais.

5.1 Perturbações da métrica para modelo inflacionário baseado em constante cosmológica ou inflaton

Nos modelos convencionais, a constante cosmológica é gerada pelo potencial inflaton. Durante o período inflacionário, o potencial é praticamente constante e podemos considerar a teoria de Einstein com constante cosmológica. A teoria das perturbações da métrica é importante para descrever o crescimento de estruturas no Universo, calcular as previsões

das radiações cósmicas de fundo e muitas outras considerações. A maior evidência da homogeneidade e isotropia do Universo primordial vem da isotropia da radiação cósmica de fundo (veja, por exemplo, [85, 51]). Porém, para explicar estruturas não lineares atuais, na escala de galáxia e aglomerados de galáxias exige-se perturbações iniciais. É muito natural assumir que estas perturbações começam num instante inicial com uma amplitude pequena e gradualmente devem crescer com o tempo. Matematicamente, isto se reduz a resolver as equações de Einstein com uma expansão de fundo. Assim, assume-se que o espaço-tempo é desviado por uma pequena quantidade do espaço-tempo homogêneo e isotrópico idealizado, que é definido como sendo o espaço de fundo. Neste caso, é conveniente dividir a métrica em duas partes, a primeira sendo a métrica de fundo e a outra descrevendo como o espaço-tempo “real” é desviado do modelo de fundo idealizado. A segunda parte é chamada perturbação.

O cálculo implica na análise de

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde $g_{\mu\nu}^0$ são as soluções inflacionárias de fundo (4.13)

$$g_{\mu\nu}^0 = (1, -\delta_{ij} e^{Ht}), \quad H = \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

H é a constante de Hubble e $h_{\mu\nu}$ são as perturbações em relação à solução inflacionária. Já que estamos interessados nas ondas gravitacionais, podemos manter somente a parte transversa e sem traço de $h_{\mu\nu}$, que são puramente modos tensoriais ¹. Ou seja, as perturbações da métrica estão submetidas às restrições:

$$\partial_i h^{ij} = 0, \quad h_{kk} = 0. \quad (5.3)$$

Podemos também impor a condição de coordenada sincrônica $h_{\mu 0} = 0$.

A equação para a onda gravitacional no cenário inflacionário usual, tem a seguinte forma

$$\ddot{h} - \frac{\dot{a}\dot{h}}{a} + \left\{ \frac{n^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a} \right\} h = 0, \quad (5.4)$$

¹Perturbações escalares no modelo de anomalia induzida foram primeiramente estudadas em [61], com uma nova abordagem em [2].

onde $a(t) = e^{Ht}$ e a variável dinâmica são as componentes mistas da perturbação, que serão denotadas por $h_j^i \equiv h$. O “estado de vácuo” é bem conhecido [11]

$$h(x, \eta) = h(\eta) e^{\pm i\vec{n} \cdot \vec{x}} \quad , \quad h(\eta) \propto \frac{e^{\pm i\eta}}{\sqrt{2n}} \quad . \quad (5.5)$$

As últimas expressões estão em termos do tempo conforme, já que a métrica de FRW torna-se conforme à métrica de Minkowski no espaço-plano; \vec{n} é o número de onda vetorial. Suponha que a solução desejável seja dada pela função $h(t, \vec{x})$. Através de uma transformação de Fourier chegamos

$$h_{\vec{n}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int h(t, \vec{x}) e^{i\vec{n} \cdot \vec{x}} d^3x \quad . \quad (5.6)$$

O quadrado da amplitude total das perturbações é obtida por

$$h^2(t) = \int h_{\vec{n}}^2(t) d^3n \quad (5.7)$$

e pode ser reescrito como

$$h^2(t) = 4\pi \int h_{\vec{n}}^2(t) n^2 dn = 4\pi \int h_{\vec{n}}^2(t) n^3 d \ln n = \int P_n^2(t) d \ln n \quad . \quad (5.8)$$

A quantidade

$$P_n^2(t) = h_{\vec{n}}^2(t) n^3 \quad (5.9)$$

é o quadrado do espectro de potência e nos diz como a amplitude das ondas gravitacionais variam num intervalo entre $\ln n$ e $\ln(n + dn)$. Assim, para calcular o espectro de potência devemos elevar ao quadrado o valor da perturbação gravitacional num dado momento e para um determinado número de onda fixo. Após integração numérica, faremos um gráfico de

$$\ln [n^3 h_{\vec{n}}^2(t)] \times \ln n \quad .$$

O espectro de potência essencialmente diz como a amplitude das perturbações depende do seus comprimentos de onda. Um espectro plano, o de Harrison-Zeldovich, estabelece um “princípio de democracia”: todas as perturbações entram novamente no horizonte de Hubble durante a fase dominante de radiação e matéria (após terem saído da fase inflacionária [62]) com a mesma amplitude independente de seus comprimentos de onda. Notemos que, em geral, obtemos uma expressão para as pequenas variações de n no limite

para grandes comprimentos de onda (que são os mais importantes para a cosmologia [62]), quando a dependência pode ser considerada como $P_n^2 \propto n^k$. Esta distribuição diz como a amplitude das perturbações depende de n . O coeficiente k é chamado de índice espectral da perturbação.

Para comparar nossos resultados com os tradicionais, considere o cenário inflacionário baseado nas equações de Einstein com uma constante cosmológica. Esta constante cosmológica pode surgir de algum potencial de inflaton na fase inflacionária. Então, encontra-se o Universo de DeSitter, e as perturbações comportam-se como [43]

$$h(\eta) = \sqrt{\eta} c_{\pm}(n) J_{\pm\frac{3}{2}}(n\eta) \quad , \quad (5.10)$$

onde $J_{\pm\frac{3}{2}}(n\eta)$ são as funções de Bessel e c_{\pm} são constantes de integração que podem depender de n . Esta dependência deve ser fixada pelo espectro inicial. Mas, se escolhermos o estado de vácuo como descrito acima, encontramos que estas constantes não dependem de n . Usando o limite para grandes comprimentos de onda, ou seja, na aproximação $n \rightarrow 0$, e considerando o modo dominante na expressão acima, encontramos

$$P_n \propto n^{3/2-3/2} = \text{cte} \quad . \quad (5.11)$$

Assim, o cenário inflacionário tradicional prediz um espectro plano, com $k = 0$. As análises dos programas observacionais como Cobe, Boomerang e Maxima, favorecem o espectro plano também [50, 70].

Na próxima seção, apresentaremos a derivação das equações para as perturbações baseado na ação efetiva induzida pela anomalia.

5.2 Cálculos das perturbações da métrica para a ação induzida com campos sem massa

A equação para a perturbação da métrica no modelo induzido pela anomalia está baseado na expansão bilinear da ação (3.79). Nesta seção, apresentaremos as contas intermediárias para obtenção da equação perturbada. Antes de considerarmos a expansão, apresentaremos a ação através de algumas integrações por partes, numa forma mais conveniente

$$S = \int d^4x L ,$$

com

$$L = \sum_{s=0}^5 f_s L_s = \sqrt{-g} \left\{ f_0 R + f_1 R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + f_2 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + f_3 R^2 + f_4 \varphi \nabla^2 R + f_5 \varphi \Delta \varphi \right\} . \quad (5.12)$$

Aqui, as seguintes definições foram introduzidas

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{M_P^2}{16\pi} ; \\ f_1 &= a_1 + a_2 - \frac{b+w}{2\sqrt{-b}} \varphi + \frac{w}{2\sqrt{-b}} \psi ; \\ f_2 &= -2a_1 - 4a_2 + \frac{w+2b}{\sqrt{-b}} \varphi - \frac{w}{\sqrt{-b}} \psi ; \\ f_3 &= \frac{a_1}{3} + a_2 - \frac{3c+2b}{36} - \frac{3b+w}{6\sqrt{-b}} \varphi + \frac{w}{6\sqrt{-b}} \psi ; \\ f_4 &= -\frac{4\pi\sqrt{-b}}{3} ; \\ f_5 &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Podíamos simplificar os coeficientes, substituindo seus valores, mas é melhor mantê-los para voltar à origem de cada termo no final das equações.

Agora temos uma arbitrariedade relacionada às soluções homogêneas φ_0 e ψ_0 em (3.82). Lembremos que a escolha dos dados iniciais de φ e ψ define o estado de vácuo para as perturbações. Podemos fazer uma comparação com o estudo de vácuo para buracos negros. Numa aproximação semi-clássica da radiação de buraco negro, o vácuo produz uma transição suave ao vácuo de Minkowski no espaço infinito. Supomos que o vácuo cosmológico próprio para a expansão do Universo reduz ao de Minkowski num tempo infinito também. Para a solução homogênea e isotrópica, temos a equação $\partial_t^4 \varphi_0 \equiv \ddot{\varphi}_0 = 0$, e a solução dependerá de quatro constantes de integração. Mas, se impormos um comportamento finito em um tempo infinito, a única escolha é $\varphi_0 = \text{const}$. Agora, se impormos correspondência com a escolha de buracos negros no espaço infinito [5], a única possibilidade é $\varphi_0 = 0$, e o mesmo também para ψ . Portanto, a escolha consistente das soluções para os campos auxiliares, que devemos usar no restante do capítulo é

$$\varphi = -8\pi\sqrt{-b} \sigma, \quad \psi = 0. \quad (5.13)$$

Os detalhes da expansão bilinear estão apresentadas no *Apêndice B*. A maioria destas expansões são idênticas às feitas por Gasperini em [37], que estudou as perturbações

da métrica para a ação de corda induzida. Nós apenas verificamos estas expansões (e as encontramos absolutamente corretas). Alguns outros termos são típicos do modelo induzido em consideração e os expandimos pela primeira vez. O resultado final para as expansões de todas as estruturas $L_i f_i$ são:

$$L_0 = a^3 f_0 \left\{ 3H^2 \dot{h}^2 + \ddot{h} \dot{h} + 4H \dot{h} \dot{h} + \frac{3}{4} \dot{h}^2 - \frac{h}{4} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right\} + \mathcal{O}(h^3) \quad ;$$

$$L_1 = a^3 f_1 \left\{ 2H^2 \dot{h}^2 - 4H^2 h \ddot{h} - 6H^4 h^2 - 16H^3 h \dot{h} + \ddot{h}^2 + 4H \dot{h} \ddot{h} + \frac{1}{a^4} \nabla^2 h \nabla^2 h + 2\dot{h} \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} + (H^2 h - 2H \dot{h}) \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right\} + \mathcal{O}(h^3) \quad ;$$

$$L_2 = a^3 f_2 \left\{ -9H^4 h^2 - 24H^3 h \dot{h} - 6H^2 h \ddot{h} - \frac{9}{4} H^2 \dot{h}^2 + \frac{3}{2} H \dot{h} \ddot{h} + \frac{\ddot{h}^2}{4} + \frac{1}{4a^4} \nabla^2 h \nabla^2 h - \frac{1}{2} (\ddot{h} + 3H \dot{h} - 3H^2 h) \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right\} + \mathcal{O}(h^3) \quad ;$$

$$L_3 = -12H^2 a^3 f_3 \left\{ 3H^2 h^2 + 2h \ddot{h} + 8H \dot{h} \dot{h} + \frac{3}{2} \dot{h}^2 - \frac{h}{2} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right\} + \mathcal{O}(h^3) \quad ;$$

$$L_4 = a^3 f_4 \left\{ 3H \dot{\varphi} \left[h \ddot{h} + 4H \dot{h} \dot{h} + \frac{3}{4} \dot{h}^2 + 3H^2 h^2 - \frac{h}{4} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right] + 6H^2 h \dot{h} \dot{\varphi} \right\} + \mathcal{O}(h^3) \quad ;$$

$$L_5 = a^3 f_5 \left\{ -\frac{1}{3} \dot{\varphi}^2 h \ddot{h} - \frac{7}{3} H \dot{\varphi}^2 h \dot{h} - \frac{7}{4} H^2 \dot{\varphi}^2 h^2 - \frac{h}{6} \frac{\nabla^2 h}{a^2} \dot{\varphi}^2 \right\} + \mathcal{O}(h^3) \quad .$$

Devemos agora considerar a equação de Lagrange para a ação (5.12):

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{h}} + \nabla^2 \frac{\partial L}{\partial \nabla^2 h} - \frac{d}{dt} \nabla^2 \frac{\partial L}{\partial \nabla^2 \dot{h}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} - \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla h} + \frac{\partial L}{\partial h} = 0 \quad . \quad (5.14)$$

A equação resultante para as perturbações da métrica no fundo da inflação exponencial (4.13) tem a forma:

$$\begin{aligned} 0 = & h \left[\frac{1}{3} H \dot{\varphi}^2 \dot{f}_5 + \frac{1}{2} H^2 \dot{\varphi}^2 f_5 + 3H^2 f_0 - H^3 (8\dot{f}_1 + 12\dot{f}_2 + 48\dot{f}_3 - 9\dot{\varphi} f_4) \right] + \\ & + \dot{h} \left[H^3 (-9f_2 - 36f_3) + \frac{9}{2} \dot{\varphi} H^2 f_4 - 2H \dot{\varphi}^2 f_5 + \right. \\ & + H^2 (12\dot{f}_1 + \frac{3}{2} \dot{f}_2 - 12\dot{f}_3) + \frac{3}{2} H (f_0 + \dot{\varphi} f_4) - \frac{2}{3} \dot{\varphi}^2 \dot{f}_5 \left. \right] + \\ & + \ddot{h} \left[H^2 (18f_1 + \frac{3}{2} f_2 - 12f_3) + \frac{3}{2} H \dot{\varphi} f_4 - \frac{2}{3} \dot{\varphi}^2 f_5 + H (16\dot{f}_1 + \frac{9}{2} \dot{f}_2) + \frac{1}{2} f_0 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \ddot{\varphi} \left[H(12f_1 + 3f_2) + 4\dot{f}_1 + \dot{f}_2 \right] + h^{iv} \left[2f_1 + \frac{1}{2}f_2 \right] - \\
 & - \frac{\nabla^2 h}{a^2} \left[\frac{1}{2}f_0 - H^2(4f_1 + 4f_2 + 12f_3) + \frac{3}{2}H\dot{\varphi}f_4 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 f_5 - H(2\dot{f}_1 + \frac{1}{2}\dot{f}_2) \right] - \\
 & - \frac{\nabla^2 \dot{h}}{a^2} \left[H(4f_1 + f_2) + (4\dot{f}_1 + \dot{f}_2) \right] - \frac{\nabla^2 \ddot{h}}{a^2} \left[4f_1 + f_2 \right] + \frac{\nabla^4 h}{a^4} \left[2f_1 + \frac{1}{2}f_2 \right] \quad . \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Neste momento, precisamos fixar as funções $f_s(t)$ como foi discutido acima. Então a equação (5.15) produz uma base apropriada para as análises das perturbações da métrica. Faremos isto na seção logo a seguir.

5.3 O problema de dados iniciais e análise espectral

Mesmo para a escolha especial dos $f_s(t)$, a equação (5.15) permanece difícil de resolver analiticamente, mas ela admite um estudo numérico eficiente. Uma análise numérica requer um certo cuidado, principalmente em dois aspectos: as equações devem ser sem dimensão e as condições iniciais devem ser escolhidas de forma consistente. Como primeiro ponto, não há problema na equação escrita acima se fixarmos a massa de Planck igual a um, assim o tempo será automaticamente medido em unidades de Planck.

Para as condições iniciais, consideremos que as perturbações têm origem quântica: a origem das perturbações são flutuações quânticas dos campos primordiais. Isto é fixado da seguinte forma. A equação para as ondas gravitacionais reduzem à equação de um campo escalar com um coeficiente de modo tensorial na frente. Então as perturbações, que surgem das flutuações da energia de ponto zero dos campos quânticos, têm o espectro característico de um campo escalar quântico no espaço de Minkowski. Considerando $a_0 = 1$, a transformação das condições iniciais para o tempo físico apenas introduz algumas constantes. A partir de (5.5), podemos fixar o espectro inicial, onde podemos obter como a amplitude inicial depende do número de onda \vec{n}

$$h_0 \propto \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad , \quad \dot{h}_0 \propto \sqrt{\frac{n}{2}} \quad , \quad \ddot{h}_0 \propto \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \dddot{h}_0 \propto \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}} \quad (5.16)$$

onde as derivadas são em relação ao tempo t .

Usando a equação sem dimensão e considerando as condições iniciais de acordo com o espectro quântico inicial (5.16), podemos integrar a equação de quarta ordem (5.15)

numericamente. Não é difícil fazer o gráfico do espectro final, mas primeiramente temos que decidir que quantidade é de interesse calcular. Um número crucial é o espectro de potências das perturbações, como apresentado para o modelo clássico (5.9). Podemos padronizar nosso procedimento numérico com passos análogos ao clássico. Fixando nosso espectro inicial de acordo com (5.16) e integrando a equação para a onda gravitacional (5.15), encontramos, para o caso (5.10),

$$k \simeq 0.01. \quad (5.17)$$

Este resultado numérico está próximo do analítico, que é identicamente zero. Apliquemos agora, o mesmo procedimento para o nosso modelo, com $a_1 = a_2 = 0$ e qualquer $\varphi_0 < 1$, considerando o multiplete do Modelo Padrão estendido $N_0 = 8, N - 1/2 = 48, N_1 = 12$, encontramos

$$k \simeq -0.01, \quad (5.18)$$

que está, qualitativamente, de acordo com o espectro plano. É importante notar que, este resultado depende do número de e -folds durante a fase inflacionária. Aqui fixamos que a fase inflacionária termina em vinte tempos de Planck, ou seja, em aproximadamente 65 e -folds na expansão. Estes eram os mesmos valores empregados no teste numérico no caso inflacionário tradicional exposto anteriormente. Algumas análises recentes indicam que $-0.15 < k < 0.16$ [50]. Nosso índice espectral não é muito diferente do encontrado para o cenário inflacionário tradicional. Além disso, o índice espectral na inflação induzida pela anomalia tem uma boa concordância com os dados observacionais. No capítulo seguinte, vamos ver que, na verdade, no número de e -folds é muito maior que 65 e que nos últimos 65 e -folds o espectro é bem mais simples. Algumas considerações adicionais estão em ordem. Nosso resultado está essencialmente baseado no número de suposições sobre o estado de vácuo. Em particular, negligenciamos o funcional conformalmente invariante $S_c[g_{\mu\nu}]$. Isto pode ser justificado pelo sucesso óbvio do procedimento similar no caso de buracos negros [5]. Ao mesmo tempo, é interessante verificar se a dependência desta suposição é realmente consistente. O mais natural é considerar o coeficiente a_1 não nulo na ação de vácuo (6.6), já que, do ponto de vista da teoria quântica de campos, não é possível que a_1 seja exatamente zero. A razão é que a_1 é objeto de renormalização e

consequência do grupo de renormalização (veja [17] e também capítulo 3). Fizemos análise numérica e encontramos que para $a_1 \neq 0$, os diferentes resultados para o espectro podem ser obtidos. Por exemplo, com $a_1 < 1$ e os demais valores como antes, encontramos a seguinte relação entre o índice espectral e o valor de a_1 :

Tabela 1

a_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
k	-0.01	-0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2

Como podemos ver nesta tabela, quando os valores de a_1 aumentam, o espectro torna-se mais e mais negativo. Isto significa que, levando a_1 em conta, a amplitude das perturbações gravitacionais decresce numa escala crescente. Considerando o valor numérico da função beta- β , $w/(4\pi)^2 \approx 0.02$ para a_1 em (3.7) do SM estendido e MSSM, nós concluímos que o valor admissível $a_1 < 0.4$ vale sob correções quânticas. Da tabela acima, é possível ver que este valor está dentro do limite observacional. Entre outros fatores, a dependência na composição do multiplete não parece ser muito importante. No mínimo, o espectro é quase o mesmo quando consideramos multipletos do Modelo Padrão estendido ou Modelo Padrão Minimamente Simétrico (conhecido como MSSM).

Por outro lado, o espectro plano (ou quase plano) encontrado para $a_1 = 0$ essencialmente depende do fato que nossa versão estável da inflação induzida pela anomalia desenvolve somente DeSitter como comportamento. Nosso modelo não admite as soluções inflacionárias do tipo lei de potência, $a \propto t^n$, mesmo quando $n \ll 1$ (se for possível as equações perturbadas devem ser também modificadas com a inclusão de termos contendo \ddot{H} , \ddot{H} etc).

Como já mencionamos no capítulo anterior, a estabilização da inflação exponencial é obtida rapidamente [31]. Portanto, podemos supor que, durante o período de estabilização, as perturbações quânticas iniciais não têm tempo de mudar seu espectro. Consideremos este período como uma pequena modificação dos dados iniciais para as perturbações. Por outro lado, a transição para a solução de FRW pode incluir um período de rápida expansão tipo-potência. Já que não temos mecanismos para descrever tal processo ainda, podemos supor que esta transição também aconteceu rapidamente, tal que as perturbações não sofreram grandes modificações. Em princípio, já que as duas escalas M_P

(correspondendo a fase inicial de inflação) e densidade de energia de matéria no período posterior (que define o “graceful exit”) ² são diferentes, é natural esperar uma transição rápida que não produz sérias modificações no índice k . Usualmente, um comportamento inflacionário tipo-potência produz um espectro de potência decrescente $k < 0$ [39] e, qualitativamente, temos o mesmo efeito que é fornecido quando $a_1 \neq 0$.

Vamos agora investigar a dependência da escolha dos dados iniciais. Para fazer isto, podemos substituir outros conjuntos de condições iniciais, diferente de (5.16). A primeira alternativa de escolha foi:

$$h_0 \propto 0.001 \quad , \quad \dot{h}_0 \propto 1 \quad , \quad \ddot{h}_0 \propto 1 \quad , \quad \dddot{h}_0 \propto 1 \quad , \quad (5.19)$$

para qualquer valor de n . A análise numérica mostra que estas condições iniciais produz o seguinte resultado

$$k = -0.00002 \quad . \quad (5.20)$$

A segunda escolha foi

$$h_0 = 0.001 \quad , \quad \dot{h}_0 = -1 \quad , \quad \ddot{h}_0 = 2 \quad \dddot{h}_0 = 0.1 \quad (5.21)$$

com espectro de potência

$$k \sim -0.00002 \quad . \quad (5.22)$$

Resultados análogos surgiram para algumas outras escolhas. Logo, o resultado não é muito sensível à escolha das condições iniciais, e pode-se esperar que o espectro de potência seja muito próximo de zero. Esta universalidade é um ponto muito bom, de fato. As informações obtidas consistem em como a amplitude das perturbações, associadas com as ondas gravitacionais (modo tensorial), depende de n . Na figura 5.1, mostramos os gráficos para os coeficientes da função de correlação de dois-pontos da radiação cósmica de fundo, medida em termos das flutuações de temperatura. Este coeficiente é dado pela expressão

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{l=2}^n C_l P_l(\cos \theta) \quad , \quad (5.23)$$

onde C_l são os coeficientes de multi-pólos, $P_l(x)$ são os polinômios de Legendre, θ é o ângulo entre dois pontos de observação no céu e $\frac{\Delta T}{T}$ é a flutuação de temperatura entre

²Saída do comportamento inflacionário para a evolução mais moderada de FRW.

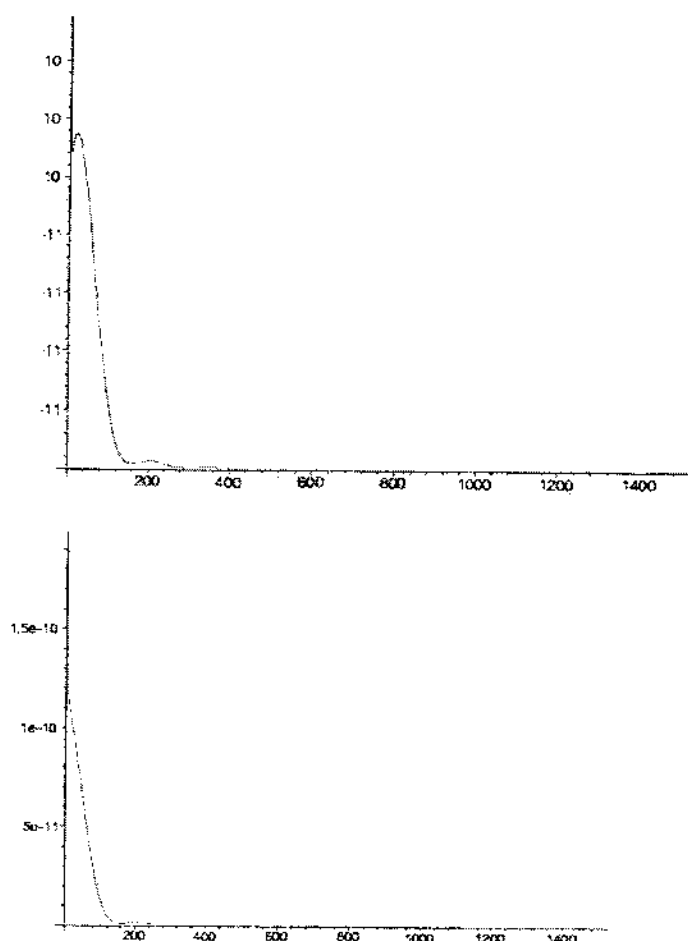


Figura 5.1: O primeiro gráfico mostra o comportamento do espectro de anisotropia CMB para ondas gravitacionais com $k = -0.01$ (correspondente a $a_1 = 0$) e o segundo para $k = -0.2$ que corresponde $a_1 = 1$.

estes dois pontos. A soma inicia com $l = 2$ porque excluimos o momento de dipolo devido ao movimento da Terra. Usando o programa CMBFasf [74], fizemos o gráfico do espectro de anisotropia da Radiação Cósmica de Fundo (CMB) devido as ondas gravitacionais para alguns dos casos especificados acima. Nestes gráficos há duas quantidades essenciais: o espectro de potência k e o conteúdo de matéria no Universo.

O espectro de potência foi descrito acima e, para o conteúdo de matéria, nós consideramos o que é mais aceito na literatura: 5% de matéria bariônica, 35% de matéria escura e 60% devido ao termo cosmológico. Os gráficos mostram uma pequena diferença na amplitude do espectro devido exatamente ao fato de que a amplitude decresce um pouco diferentemente em cada caso.

Qualitativamente, as previsões do nosso modelo de teoria induzida pela anomalia, em relação ao espectro das ondas gravitacionais, concorda com os resultados da inflação de DeSitter tradicional e com os dados observacionais.

Capítulo 6

Modelo cosmológico induzido pelos efeitos dos campos massivos

Vamos agora assumir que alguns dos campos escalares e de férmions são massivos. Em altas energias, o que produz o efeito do vácuo quântico mais relevante, é a renormalização dos termos de Newton e cosmológico. Em [77], a renormalização do termo de Newton foi feita considerando uma aproximação especial que produz conexão direta com as aplicações cosmológicas. Em nosso trabalho seguimos o mesmo método, porém fazendo os cálculos de uma forma geral e mais detalhada [66]. Em particular, consideraremos a renormalização do termo cosmológico.

6.1 Ação efetiva para campos massivos e solução cosmológica

Tecnicamente, a maior vantagem das teorias sem massa é a possibilidade de usar a anomalia do traço para calcular a ação efetiva. Nosso objetivo é modificar as teorias com massa para usar a mesma técnica. A invariância conforme das ações (3.3) e (3.4) é violada por causa dos termos de massa e, a princípio, não podemos usar anomalia conforme para obter as correções quânticas. Mas, isto pode ser mudado se aplicarmos uma descrição conforme da teoria massiva na estrutura do modelo “cosmon” [64, 29, 88, 18] (veja também [79, 23, 84] para abordagens similares e para aplicações do modelo “cosmon” ao problema da constante cosmológica). Vamos trocar os parâmetros massivos pelas potências de um

novo campo escalar auxiliar χ de acordo com

$$m_s^2 \rightarrow \frac{m_s^2}{M^2} \chi^2, \quad m_f \rightarrow \frac{m_f}{M} \chi, \quad \frac{1}{16\pi G} R \rightarrow \frac{M_P^2}{16\pi M^2} [R\chi^2 + 6(\partial\chi)^2], \quad \Lambda \rightarrow \frac{\Lambda}{M^2} \chi^2. \quad (6.1)$$

Na versão original do modelo cosmológico [77, 66], a introdução de novos campos escalares χ é convocada para providenciar a invariância com relação à dilatação, com o objetivo posterior de usar a quebra desta simetria. No nosso caso, precisamos de uma invariância conforme local mais geral. Portanto, postulamos que o campo auxiliar χ transforma-se como

$$\chi \rightarrow \chi e^{-\sigma}, \quad (6.2)$$

independentemente da dimensão do espaço-tempo ¹. Após aplicarmos o procedimento (6.1), os termos massivos em (3.3) e (3.4) são trocados pelas interações de Yukawa, interação escalar quártica entre os campos físicos de férmion e escalares, assim como por novos campos auxiliares χ . A vantagem deste procedimento é que as novas ações, em ambos setores, tornam-se conformalmente invariantes. Esta invariância é violada pela anomalia conforme e pode-se obter a ação efetiva dos campos de fundo $g_{\mu\nu}$ e χ usando o esquema de ação efetiva induzida pela anomalia, ou seja, usar a mesma forma de obter a ação efetiva que empregamos no capítulo 5. As divergências da teoria massiva, nesta representação conforme tem a forma

$$\Gamma_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{(n-4)} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ wC^2 + bE + c\nabla^2 R + \frac{f}{M^2} [R\chi^2 + 6(\partial\chi)^2] + \frac{g}{M^4} \chi^4 \right\}, \quad (6.3)$$

onde os coeficientes w, b e c são dados pelas eqs.(3.47), (3.48) e (3.49) respectivamente. Introduzimos as seguintes notações para as quantidades dimensionais

$$f = \frac{1}{3(4\pi)^2} \sum_f N_f m_f^2, \quad (6.4)$$

e

$$g = \frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_s N_s m_s^4 - \frac{2}{(4\pi)^2} \sum_f N_f m_f^4. \quad (6.5)$$

¹Outros campos se transformam de forma usual: $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \exp(2\sigma)$, $\varphi \rightarrow \varphi \exp(-\frac{n-2}{2}\sigma)$, $\psi \rightarrow \psi \exp(-\frac{n-1}{2}\sigma)$.

Aqui as somas são feitas sobre todos os férmions massivos “ f ” e campos escalares “ s ” com as massas m_f e m_s , respectivamente. N_f e N_s são as multiplicidades dos férmions e escalares, por exemplo $N_{lepton} = 1$ e $N_{quark} = 3$.

Para obter a anomalia conforme, é necessário considerar a identidade de Noether clássica para a parte de vácuo da ação efetiva

$$\mathcal{T} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta S_{vac}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\chi\frac{\delta S_{vac}}{\delta\chi} = 0. \quad (6.6)$$

É fácil ver que, na teoria em consideração, a invariância conforme não significa que o tensor momento-energia é sem traço, mas que a quantidade \mathcal{T} é zero. Correspondentemente, a anomalia conforme significa que $\langle \mathcal{T} \rangle \neq 0$ ao contrário do usual $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle \neq 0$. Primeira descrição de uma situação deste tipo foi apresentada em [48] para teoria com métrica e torção de fundo. Agora a questão é calcular a nova anomalia para \mathcal{T} . No entanto, desde que os termos dependentes de χ em (6.3) têm as mesmas propriedades conformes que o quadrado do tensor de Weyl, podemos absorvê-los no termo de Weyl tal que o problema para obter anomalia se reduz ao padrão. Finalmente, chegamos à seguinte expressão para a anomalia

$$\langle \mathcal{T} \rangle = -\left\{ wC^2 - bE + c\nabla^2 R + \frac{f}{M^2}[R\chi^2 + 6(\partial\chi)^2] + \frac{g}{M^4}\chi^4 \right\}. \quad (6.7)$$

De forma padrão, usando a parametrização $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu}$ e $\chi = e^{-\sigma}\bar{\chi}$, podemos obter a ação efetiva induzida pela anomalia dos campos de fundo

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} = & S_c[g_{\mu\nu}, \chi] + \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\{w\bar{C}^2\sigma + b(\bar{E} - \frac{2}{3}\bar{\nabla}^2\bar{R})\sigma + 2b\sigma\bar{\Delta}\sigma + \\ & + \frac{f}{M^2}[\bar{R}\bar{\chi}^2 + 6(\partial\bar{\chi})^2]\sigma + \frac{g}{M^4}\bar{\chi}^4\sigma\} - \frac{3c+2b}{36}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}R^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

O último passo agora é fixar a simetria conforme usando a condição $\chi = \bar{\chi}e^{-\sigma} = M$, tal que os termos clássicos de Einstein-Hilbert e cosmológico adquiram suas formas padrões.

A ação efetiva a 1-loop torna-se

$$\begin{aligned} \Gamma = & S_{vac} + \Gamma_{ind}[\chi \rightarrow M] = S_{AD} + S_c[g_{\mu\nu}, M] + \\ & + \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\{w\bar{C}^2\sigma + b(\bar{E} - \frac{2}{3}\bar{\nabla}^2\bar{R})\sigma + 2b\sigma\bar{\Delta}\sigma\} - \frac{3c+2b}{36}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}R^2 - \end{aligned}$$

$$- \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{2\sigma} [\bar{R} + 6(\bar{\nabla}\sigma)^2] \cdot \left[\frac{1}{16\pi G} - f \cdot \sigma \right] - \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{4\sigma} \cdot \left[\frac{\Lambda}{8\pi G} - g \cdot \sigma \right]. \quad (6.9)$$

Notemos que a expressão (6.9) não depende da magnitude de M , mas somente dos campos e dos parâmetros da teoria. Esta ação efetiva difere da parte sem massa (4.1) em dois aspectos. Primeiro, devido a existência de novos termos que surgem pela renormalização do termo de Einstein-Hilbert e cosmológico. Segundo, porque a constante de integração $S_c[g_{\mu\nu}, M]$ não é mais irrelevante, mesmo para métrica homogênea e isotrópica. Após impormos a fixação de calibre $\chi = \bar{\chi} e^{-\sigma} = M$, $S_c[g_{\mu\nu}, M]$ torna-se não invariante. No entanto, a expressão (6.9) pode ser considerada somente como uma aproximação da ação efetiva de vácuo para os campos massivos e temos que verificar os limites da validade desta aproximação.

A parte de altas derivadas de (6.9) é idêntica a dos campos sem massa, como tinha que ser (veja, por exemplo [11, 56]). Além disso, há uma forte conexão entre a ação efetiva induzida pela anomalia eq.(6.9) e as correções quânticas que vêm do grupo de renormalização. Uma evolução do Universo homogêneo e isotrópico pode ser visto como uma transformação conforme da métrica $g_{\mu\nu}(t) = \bar{g}_{\mu\nu} \exp[\sigma(t)]$. Por outro lado, o grupo de renormalização no espaço-tempo curvo corresponde a uma transformação de escala da métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \cdot e^{-2\tau}$ simultaneamente com a transformação inversa de todas as quantidades dimensionais [17]. Para qualquer μ , temos $\mu \rightarrow \mu \cdot e^\tau$. Podemos comparar a dependência de σ da ação efetiva induzida pela anomalia (6.9) e a dependência de τ no grupo de renormalização da ação clássica

$$S_{vac.imp} = S_{vac}[P(\tau)], \quad (6.10)$$

onde $P = \{a_{1,2,3,4}, G, \Lambda\}$ denota os parâmetros de vácuo da teoria e assume a forma $P(\tau) = P_0 + \beta_P \tau$.

A expressão (6.10) é uma aproximação “leading-log”² para a solução da equação do grupo de renormalização para a ação efetiva [17]

$$\Gamma[e^{-2\tau} g_{\alpha\beta}, \Phi_i, P, \mu] = \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi_i(\tau), P(\tau), \mu], \quad (6.11)$$

onde Φ_i são os campos de matéria. É fácil ver que a eq.(6.9) torna-se completamente equivalente à (6.10) se fixarmos $\sigma = const$. O coeficiente f é um fator da função- β para a

²Na aproximação “leading-log” é considerado apenas a primeira ordem no logaritmo $\tau = \ln(\mu/\mu_0)$.

constante de Newton inversa $1/16\pi G$ e o coeficiente g é um fator da função- β para o termo cosmológico $\Lambda/16\pi G$. De fato, a eq.(6.11) pode ser considerada como uma generalização do grupo de renormalização para a ação clássica (6.10). No entanto, temos fortes razões para considerar a eq. (6.9) como uma aproximação do tipo “leading-log” para a ação efetiva dos campos massivos. Esta aproximação possui as correções quânticas e é confiável nas regiões de altas energias onde a massa dos campos é muito menor que a constante de Hubble. Por outro lado, em baixas energias, os campos massivos desacoplam-se e seus efeitos quânticos tornam-se desprezíveis.

Aqui, vamos fazer uma interpolação entre estes dois regimes usando o esquema de Subtração Mínima (MS) e a aproximação “sharp cut off”³ em alguma escala específica M_* . Esta escala é definida tal que, em $H = M_*$, algumas partículas- S desacoplam-se e a desigualdade (4.28) muda de sinal. Aqui usamos a sugestão de [76] sobre a relação entre supersimetria e estabilidade da inflação. Na nossa aproximação, o funcional S_c contém termos de correções não logarítmicos e pode ser desprezado. De fato, esta aproximação é muito boa no início da inflação e parece menos justificada quando o valor H está próximo de M_* . Observemos que a escala M_* pode ser diferente da escala da quebra de supersimetria M_{SUSY} que pode ser definido, por exemplo, como a energia esperada de vácuo (VEV) do campo de Higgs correspondente. Em particular, podemos supor que M_{SUSY} está em torno de $10^{16} GeV$ enquanto o limite superior para M_* é $10^{14} GeV$. Este limite aparece porque a amplitude das ondas gravitacionais geradas tem uma taxa admissível somente para $H/M_P \leq 10^{-5}$, no último estágio da inflação ($\approx 65 e$ -folds). A equação de movimento para $\sigma(t)$ tem a forma

$$\ddot{\sigma} + 7\dot{\sigma}\dot{\sigma} + 4\dot{\sigma}^2 + 4\left(3 - \frac{b}{c}\right)\ddot{\sigma}\dot{\sigma}^2 - 4\frac{b}{c}\dot{\sigma}^4 - 2k\left(1 + \frac{2b}{c}\right)(\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma})e^{-2\sigma} - \frac{M_P^2}{8\pi c}\left[(\ddot{\sigma} + 2\dot{\sigma}^2 + ke^{-2\sigma}) \cdot (1 - \bar{f}\sigma) - \frac{1}{2}\bar{f}\dot{\sigma}^2\right] + \frac{M_P^2\Lambda}{12\pi c}(1 - \bar{g}\sigma - \bar{g}/4) = 0, \quad (6.12)$$

onde introduzimos as seguintes notações

$$\bar{f} = \frac{16\pi f}{M_P^2} = \frac{1}{3\pi} \sum_f \frac{N_f m_f^2}{M_P^2}; \quad \bar{g} = \frac{8\pi g}{M_P^2\Lambda} = \frac{1}{4\pi} \sum_s \frac{N_s m_s^4}{M_P^2\Lambda} - \frac{1}{\pi} \sum_f \frac{N_f m_f^4}{M_P^2\Lambda}. \quad (6.13)$$

³Esta aproximação significa que efeitos quânticos dos campos massivos são completamente desligados “à mão” para energias menores que as massas das partículas. Na verdade, o desacoplamento acontece de forma bem mais suave [41].

É útil reescrever esta equação, também, em termos de $a(t)$ ⁴

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \left(5 + \frac{4b}{c}\right) \frac{\ddot{a}}{a} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2k \left(1 + \frac{2b}{c}\right) \frac{\ddot{a}}{a^3} - \\ & - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \cdot (1 - \tilde{f} \cdot \ln a) - \frac{\tilde{f}}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] + \frac{M_P^2 \Lambda}{12\pi c} (1 - \tilde{g} \cdot \ln a - \tilde{g}/4) = 0, \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde fixamos $a(t=0) = 1$. A solução da equação (6.12) não pode ser resolvida analiticamente na forma geral, mas a solução aproximada para pequenos $\ln a(t)$ pode ser obtida pela troca

$$M_P^2 \rightarrow \tilde{M}_P^2 = M_P^2 [1 - \tilde{f} \ln a(t)]; \quad \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda} = \Lambda \{1 - \tilde{g} \ln a(t)\} \quad (6.15)$$

na expressão para o parâmetro de Hubble (4.7) correspondendo às soluções (4.4), (4.5) e (4.6). Outra possibilidade é a integração numérica da equação (6.12). Nós mostramos os gráficos produzidos pela integração numérica na figura 6.1 para o caso $\Lambda = 0$. Estes gráficos foram obtidos usando o programa *Mathematica* [90], Fortran e algoritmos padrões de [69]. É fácil ver que a parte inicial destas soluções numéricas são indênticas às obtidas em [77]. Vamos agora entender melhor estes gráficos e a aproximação qualitativa, integrando a eq.(6.15), para $\Lambda = 0$

$$\dot{\sigma} = H = H_0 \sqrt{1 - \tilde{f} \sigma(t)}, \quad H_0 = \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}}, \quad \sigma(0) = 0 \quad (6.16)$$

e encontrar sua solução na forma

$$\sigma(t) = H_0 t - \frac{H_0^2}{4} \tilde{f} t^2. \quad (6.17)$$

Podemos esperar que esta fórmula simples deve ser uma aproximação razoável somente para o estágio inicial quando σ é pequeno.

No entanto, se compararmos os gráficos da figura 6.1 com a parábola (6.17), a diferença numérica (para $\tilde{f} = 10^{-5}$) é notavelmente pequena - em torno de 0.1 num ponto máximo com $\sigma_{max} = 10^5$ (considerando o conteúdo de campo para MSSM).

As duas soluções são quase indênticas para todos os valores de tempo t . Além disso, esta não é uma propriedade deste valor particular de \tilde{f} . Se substituirmos (6.17) na equação

⁴Aqui corrigimos um pequeno erro na expressão similar (sem os termos com constante cosmológica) em [77]. Esta correção não modifica o comportamento de $a(t)$.

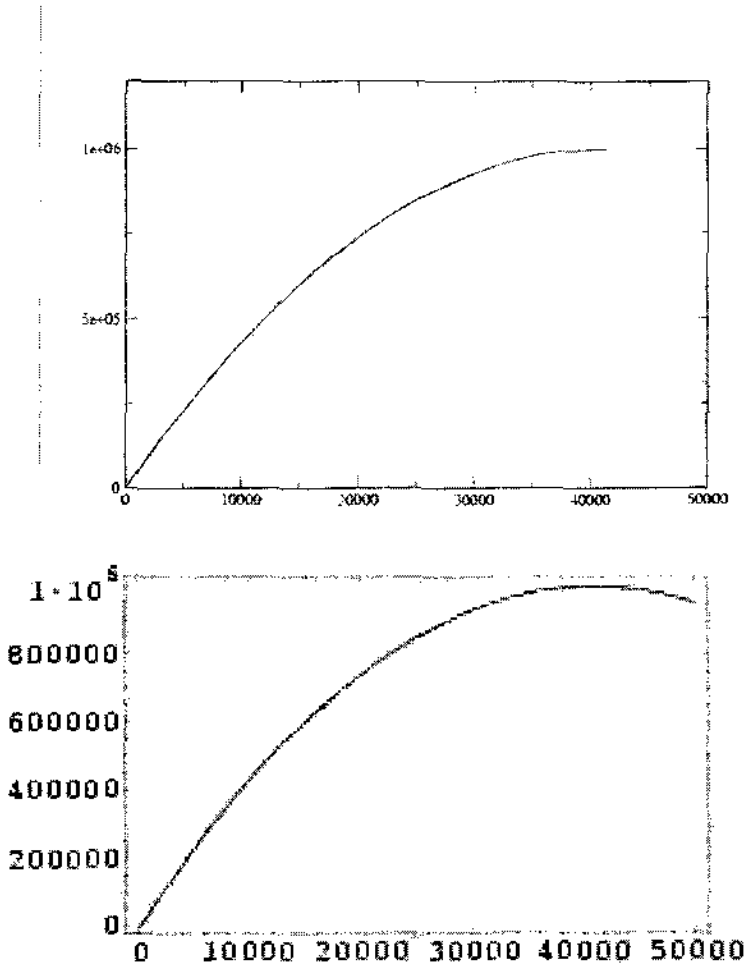


Figura 6.1: Os gráficos representam soluções numéricas de $\sigma(t')$, onde $t' = t/16\pi$ da equação (6.12) para um modelo com $\tilde{f} = 10^{-6}$ e conteúdo de partícula do MSSM. O primeiro gráfico é o mesmo obtido em [77]. Na região $\sigma = M_*$, os dois gráficos são equivalentes. O segundo gráfico é quase idêntico a uma parábola (6.17). No ponto mais alto do segundo gráfico, σ vale 1000000 enquanto que na parábola σ vale 1000001.

(6.12), o resultado é

$$\begin{aligned}
 & -1.2 \cdot 10^{-8} + (25.9 \tilde{f} - 2.59 \cdot 10^{-8}) t + (3.14 \cdot 10^{-17} - 3.14 \cdot 10^{-8} \tilde{f}) t^2 + \\
 & + (-1.22 \cdot 10^{-26} + 1.22 \cdot 10^{-17} \tilde{f}) t^3 + (1.48 \cdot 10^{-36} - 1.48 \cdot 10^{-27} \tilde{f}) t^4
 \end{aligned}$$

que, de fato, é desprezível para todas as situações de interesse (quando \tilde{f} é muito pequeno). Este efeito inesperado da solução é extremamente útil, porque podemos sempre utilizar a expressão simples (6.17) em vez de uma solução numérica complicada da equação (6.12). Nas últimas considerações, levamos em conta que \tilde{f} e \tilde{g} são quantidades muito pequenas. A aproximação (6.15) vale enquanto as correções logarítmicas forem pequenas. Primeiramente, isto implica na condição

$$\sum_f \frac{1}{3\pi} \frac{m_f^2}{M_P^2} \cdot \ln a(t) \ll 1. \quad (6.18)$$

Além disso, há outra condição para a magnitude das correções quânticas da constante cosmológica

$$\left| \frac{1}{2} \sum_s m_s^4 - 2 \sum_f m_f^4 \right| \cdot \ln a(t) \ll 8\pi \Lambda M_P^2. \quad (6.19)$$

E ainda, pode-se exigir que a constante cosmológica seja menor que as contribuições de altas derivadas induzidas:

$$\left| \frac{1}{2} \sum_s m_s^4 - 2 \sum_f m_f^4 \right| \ll M_P^2 [1 - \tilde{f} \ln a(t)]^2 \quad \text{e} \quad \Lambda \ll 8\pi M_P^2 [1 - \tilde{f} \ln a(t)]^2. \quad (6.20)$$

De fato, todas estas condições são satisfeitas no início da inflação, quando $\ln a(t)$ é pequeno e os termos de altas derivadas dominam sobre a constante cosmológica, que deve ser, na maioria das vezes, da ordem de M_{GSV}^4 . É conveniente assumir que a quebra suave de supersimetria funciona tal que a magnitude da constante cosmológica é muito menor que $\Lambda \propto M_*^4/M_P^2$ (veja [75]). Quando $\ln a(t)$ torna-se grande e o Universo está próximo da transição de inflação estável para instável, não podemos confiar muito na eq.(6.15) e temos que usar métodos numéricos para verificar ambas estabilidades da solução inflacionária “temperada” e a “saída graciosa” para a fase depois da quebra de supersimetria.

6.2 A estabilidade no regime de transição para FRW

Logo no início do período inflacionário, a evolução ocorre exatamente como no caso sem massa e a condição de estabilidade deve ser a mesma (4.28). Posteriormente, quando $\sigma(t)$ torna-se grande o suficiente, o desvio da inflação exponencial torna-se maior. Finalmente, a inflação diminui, tal que o parâmetro de Hubble se aproxima da escala M_* e as partículas- S desacoplam-se. Logo, a condição (4.28) não funciona mais. Nosso propósito é verificar se a eq.(4.28) permanece satisfazendo a mesma condição de estabilidade para as equações modificadas (6.12) até o ponto em que $H \approx M_*$.

Antes da análise numérica, vamos fazer algumas investigações da estabilidade de uma forma aproximativa. Para isto, é suficiente investigar o comportamento as perturbações na região fisicamente importante, correspondendo aos últimos 65 e -folds (antes de H atingir o valor M_*). Observe, na figura 6.1, que a dependência em $\sigma(t)$ é bem suave. Além disso, podemos dividir esta região em pequenos intervalos $(t_i, t_i + \Delta t_i)$ e considerar $H(t) = H_i = \text{const}$ entre cada intervalo. De fato, H irá variar de um intervalo a outro e isto pode ser a fonte de novas perturbações. Claro que, toda esta consideração é feita para o caso estável $c > 0$, enquanto que para o caso não estável, esta aproximação não faz sentido. Para um estudo analítico, vamos aceitar a aproximação (6.15). Cálculos diretos produzem as seguintes equações para as perturbações $\sigma \rightarrow \sigma + y(t)$:

$$b_0 \ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y + b_3 \dot{y} + b_4 y = 0, \quad (6.21)$$

onde

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, & b_1 &= 7\tilde{H}, & b_2 &= 4\left(3 - \frac{b}{c}\right)\tilde{H}^2 - \frac{\tilde{M}_P^2}{8\pi c}, \\ b_3 &= -\frac{16b}{c}\tilde{H}^3 - \frac{\tilde{M}_P^2\tilde{H}}{2\pi c}, & b_4 &= \frac{\tilde{M}_P^2}{4\pi c}\left(\tilde{H}^2\tilde{f} - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}\tilde{g}\right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

e

$$\tilde{H}^2 = -\frac{\tilde{M}_P}{32\pi b} \left[1 + \left(1 + \frac{64\pi b}{3} \frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{M}_P^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (6.23)$$

Se considerarmos a pequena variação de $\sigma(t)$ como uma constante, então, a estabilidade depende dos sinais dos determinantes de Routh-Hurwitz (4.27). Obviamente, $D_1 = b_1$ é

positivo. Após alguma álgebra, chegamos na seguinte expressão

$$D_2 = -\frac{21\tilde{M}_P^2\tilde{H}}{8\pi b} \left[1 + \left(1 - \frac{b}{7c}\right) \cdot \left(1 + \frac{64\pi b}{3} \frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{M}_P^2}\right)^{1/2} \right] > 0. \quad (6.24)$$

A expressão geral para D_3 é

$$D_3 = -\frac{21\tilde{M}_P^4\tilde{H}^2}{16\pi^2bc} \left[1 + \frac{64\pi b}{3} \frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{M}_P^2} + \left(1 - \frac{b}{7c}\right) \cdot \left(1 + \frac{64\pi b}{3} \frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{M}_P^2}\right)^{1/2} \right] - \frac{49\tilde{M}_P^2\tilde{H}^2}{4\pi c} \left[\tilde{H}^2\tilde{f} - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}\tilde{g} \right]. \quad (6.25)$$

Aqui, os valores dos últimos termos podem ser negativos. Notemos que os valores de \tilde{f} e \tilde{g} são pequenos, porque eles são proporcionais à razão das massas das partículas e a massa de Planck (6.13). Assim, podemos concluir que D_3 é positivo se a constante cosmológica não for muito grande. Além disso, $D_4 = b_4 \cdot D_3$ e a estabilidade da região temperada, na nossa estrutura, depende do mesmo sinal da expressão que encontramos em (6.25)

$$\tilde{H}^2\tilde{f} - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}\tilde{g}. \quad (6.26)$$

A positividade da última expressão é um critério de estabilidade no último estágio do regime de transição, logo antes do desacoplamento das partículas- S e uma conseqüente transição para o regime instável. O sinal de (6.26) depende da relação entre as massas dos férmions e bósons contidos na teoria e também da forma da quebra de supersimetria. A última, define a magnitude da constante cosmológica. Se a quebra de supersimetria é espontânea, a densidade de energia $\tilde{\Lambda}\tilde{M}_P^2$ pode ser tão grande quanto M_{SUSY}^4 , que deve ser, em princípio, muito maior que M_*^4 . Logo, para \tilde{g} positivo em (6.13), a inflação deve sempre perder a estabilidade devido, principalmente, à constante cosmológica (mais do que da escala M_*). Para a quebra de supersimetria na escala da GUT isto pode ser um problema, pois a magnitude do parâmetro de Hubble nos últimos 65 e -folds é muito grande.⁵ Assim, para simplificar, assumiremos que \tilde{g} é negativo (quebra da supersimetria não é espontânea), tal que a densidade de energia de vácuo não ultrapassa M_*^4 .

Em cada um destes casos, a transição da inflação de estável para a instável, acontece, qualitativamente, da mesma forma que para $\tilde{\Lambda} = 0$ e a estabilidade da inflação vale até

⁵Isto já não seria problema para a quebra de supersimetria na escala de baixa energia.

a quebra de supersimetria na escala de M_* . Da mesma forma, podemos investigar as oscilações do parâmetro de Hubble durante a inflação. Este é um assunto importante, pois está relacionado com a possibilidade de reaquecimento. Estudemos, novamente, as equações para as perturbações (6.21). Tipicamente, a equação característica eq.(4.26) tem uma ou um par de soluções conjugadas

$$\lambda = -\alpha \pm i\beta, \quad (6.27)$$

onde α é positivo, no caso estável. Também podemos ter soluções reais. Por exemplo, para MSSM, $\Lambda = 0$ e $\tilde{f} = 10^{-5}$, encontramos um par de soluções complexas da forma $\lambda_{1/2} \approx -1.46 \pm 3.47i = \alpha \pm i\beta$ e duas soluções reais $\lambda_3 \approx -3.88$ e $\lambda_4 \approx -4.85 \cdot 10^{-6}$.

A solução para as perturbações é

$$y(t) = C_0 e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) + C_1 e^{-\lambda_3 t} + C_2 e^{-\lambda_4 t}. \quad (6.28)$$

Estamos interessados no efeito de β . Claro que, para o coeficiente constante b_i em (6.22) as oscilações na solução não são visíveis porque elas são suprimidas pelas exponenciais. No entanto, lembremos que os coeficientes b_i não são constantes, pois eles dependem de $\tilde{H} = \tilde{H}(t)$. Podemos considerar \tilde{H} como uma constante somente num pequeno intervalo $(t_i, t_i + \Delta t_i)$. Quando passamos de um dado intervalo para outro, o valor de \tilde{H} muda. A evolução de \tilde{H} resultará nas oscilações (6.28) que podem se tornar, eventualmente significantes se \tilde{H} variar muito rápido. Vamos mostrar o cálculo deste efeito. Se definirmos os coeficientes como $\bar{b}_k = \tilde{H}^{-n} b_k$, e considerarmos $\bar{\lambda} = -\bar{\alpha} + i\bar{\beta}$, e $\bar{\alpha}_{1/2}$ por serem as soluções da equação

$$\bar{b}_0 \bar{\lambda}^4 + \bar{b}_1 \bar{\lambda}^3 + \bar{b}_2 \bar{\lambda}^2 + \dots + \bar{b}_3 \bar{\lambda} + \bar{b}_4 = 0, \quad (6.29)$$

então $\bar{\alpha}_{1/2}$, $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são constantes e, além disso

$$\alpha_{1/2} = \tilde{H} \bar{\alpha}_{1/2} \cong H(1 - \tilde{f}\sigma) \bar{\alpha}_{1/2}, \quad \beta = \tilde{H} \bar{\beta} \cong H(1 - \tilde{f}\sigma) \bar{\beta}, \quad \alpha = \tilde{H} \bar{\alpha} \cong H(1 - \tilde{f}\sigma) \bar{\alpha}. \quad (6.30)$$

A última fórmula mostra que a frequência das oscilações de $\sigma(t)$ e $H(t)$ está decrescendo bastante durante a inflação. O mesmo ocorre também com o parâmetro de decaimento α . Podemos dividir o primeiro gráfico da fig. 6.1, em três regiões com propriedades distintas:

- 1) No estágio inicial quando as massas das partículas são irrelevantes. Logo, $H(t)$ é quase

constante e as perturbações não são visíveis.

2) No estágio intermediário da inflação “temperada” com um efeito significativo das partículas massivas. Nesta região, $H(t)$ varia rapidamente e podemos esperar as oscilações com amplitude relevante. É fácil ver que a amplitude das oscilações de $H(t)$ tem a ordem de magnitude de $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} C_0$.

3) A última fase da inflação é quando $\sigma(t)$ cresce mais lentamente e $H(t)$ se aproxima do ponto M_* , onde o comportamento estável termina. Neste caso, nossa aproximação relacionada ao desacoplamento do tipo “sharp cut-off”, obviamente falha. Nesta região, as partículas- S começam a se desacoplar e o Universo inicia uma transição para a inflação não-estável, e eventualmente, entra numa evolução tipo-FRW.

A análise da estabilidade foi feita usando método de simulações numéricas e encontramos que todas as curvas rapidamente convergem para a não perturbada, em ambos, primeiro e últimos 65 e -folds da inflação. Nós escolhemos os dados iniciais $\bar{\sigma}(t_i)$, $\bar{\sigma}'(t_i)$, $\bar{\sigma}''(t_i)$, $\bar{\sigma}(t_i)$ para a equação (6.12) usando um gerador de números aleatórios independentes para cada derivada e integramos esta equação numericamente. A escolha de t_i foi feita, de tal forma que, $\sigma_i = \sigma(t_i) = \sigma_f - 65$, onde σ_f corresponde a $H = M_*$. Em todos os casos, consideramos o mesmo valor inicial $\sigma(t_i) = 1$. A medida do desvio da solução $H(t)$ comparando com a solução não perturbada $H_{np}(t)$ pode ser feita, por exemplo, na forma

$$D = \left(\frac{\dot{H} - \dot{H}_{np}}{H_{np}^2} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{H} - \ddot{H}_{np}}{H_{np}^3} \right)^2 + \left(\frac{\dddot{H} - \dddot{H}_{np}}{H_{np}^4} \right)^2.$$

O resultado dos cálculos é que, independente da escolha das medidas para o desvio, a solução de σ_0 , apresentada no segundo gráfico da figura 6.1, é estável. Alguns gráficos, ilustrando o comportamento das soluções perturbadas, estão apresentados na figura 6.2. O gráfico de $H(t)$, para os últimos 65 e -folds da figura 6.3 nos habilita ver as oscilações que não são visíveis na escala da figura 6.1 (veja também [77]).

Finalmente, as soluções numéricas e investigação analítica aproximada da estabilidade deste modelo concordam completamente entre si. Podemos observar, na figura 6.1, uma ilustração da estabilidade da solução inflacionária e, na figura 6.3, as oscilações de H . Podemos concluir que nossa aproximação analítica é suficientemente forte e aplicável em

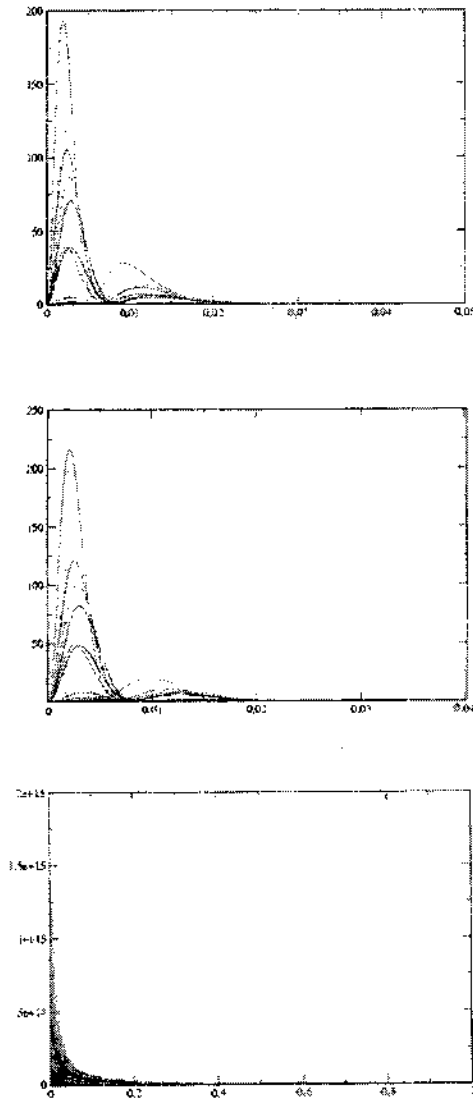


Figura 6.2: Ilustração do comportamento das perturbações da medida D no início e nos últimos 65 e-folds da inflação (primeiro e último gráficos, respectivamente). O segundo gráfico difere do primeiro devido a presença de matéria (poeira) com densidade de matéria M_p^4 no início da inflação . Podemos ver que a estabilização acontece num tempo muito curto em todos os casos.

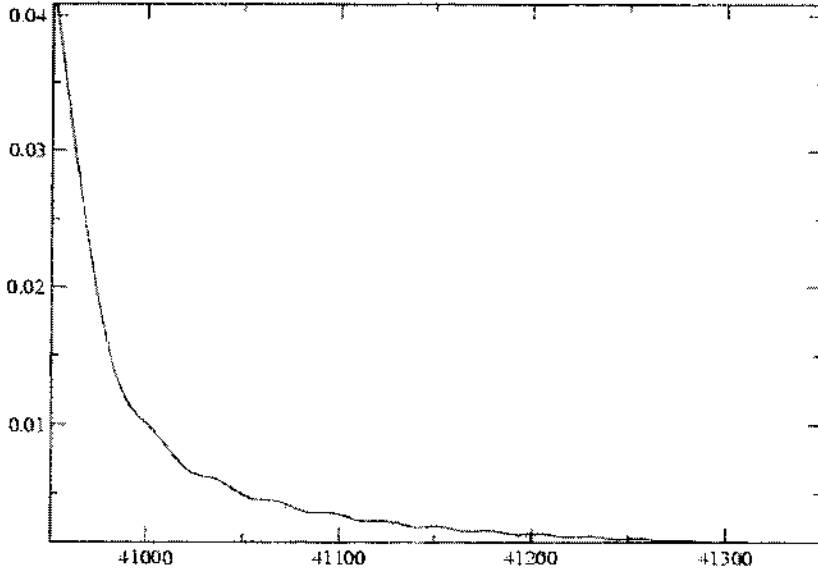


Figura 6.3: Solução numérica para $H(t)$, na região onde as oscilações são explicitamente visíveis.

outros problemas, como a análise das ondas gravitacionais e também, das perturbações de densidade.

6.3 Ondas gravitacionais do modelo induzido com campos massivos

Nesta seção vamos investigar a estabilidade das ondas gravitacionais incluindo os termos massivos da equação de movimento. Porém, primeiramente, vamos fazer algumas observações sobre o que realmente precisamos saber sobre as perturbações da métrica. Sabemos que, a região importante é a dos últimos 65 e -folds da inflação. Todas as ondas gravitacionais que são geradas antes, não são visíveis hoje e, por isto, não têm importância. Devemos seguir o mesmo procedimento, que nos mostrou confiável, da seção anterior, quando investigamos as perturbações para $\sigma(t)$. Assim, dividimos o intervalo de tempo correspondente aos últimos 65 e -folds em pequenos intervalos $(t_i, t_i + \Delta t_i)$. Em cada intervalo $(t_i, t_i + \Delta t_i)$, a derivada temporal do parâmetro de Hubble é desprezível se compararmos com sua própria amplitude e podemos seguramente, considerar H como

constante. Isto significa que, nos últimos 65 e -folds, podemos fazer uma aproximação ao modelo considerando campos sem massa, porém com uma grande redução da magnitude da constante de Hubble e com o valor de $\sigma = \ln a$ bem maior.⁶ Como veremos abaixo, o último ponto, produz uma diferença dramática em relação ao modelo de Starobinsky [81].

Para simplificar, apresentaremos os cálculos para o caso $\Lambda = 0$ somente. Usando os resultados para o caso de campos sem massa [32] e contribuições dos campos massivos, encontramos

$$b_0 \overset{\cdot\cdot\cdot}{h} + b_1 \overset{\cdot\cdot}{h} + b_2 \overset{\cdot}{h} + b_3 \dot{h} + b_4 h + n_1 e^{-2\sigma} \nabla^2 \dot{h} + n_2 e^{-2\sigma} \nabla^2 \ddot{h} + n_3 e^{-4\sigma} \nabla^4 h = 0, \quad (6.31)$$

onde $h \equiv h(t, \vec{x})$ e os coeficientes têm a forma

$$\begin{aligned} b_0 &= a_1 + w \cdot \sigma(t), & b_1 &= 6H[a_1 + w \cdot \sigma(t)] + 2wH, \\ b_2 &= 11H^2[a_1 + w \cdot \sigma(t)] + H^2(c - b/2 + 7w), \\ b_3 &= 6H^3[a_1 + w \cdot \sigma(t)] + H^3(3c - 3b/2 + 5w), & b_4 &= -12H^4b \end{aligned} \quad (6.32)$$

e também

$$n_1 = -2H[a_1 + w + w \cdot \sigma(t)], \quad n_2 = -2[a_1 w \cdot \sigma(t)], \quad n_3 = a_1 + w \cdot \sigma(t). \quad (6.33)$$

Nosso principal interesse na dinâmica das perturbações é nos últimos 65 e -folds da inflação, quando a magnitude de σ é, no mínimo, da ordem de 10^4 . A primeira observação em relação à eq.(6.31) é que os termos com as derivadas espaciais são suprimidos pelo fator de $e^{2\sigma}$ e, podem seguramente ser desprezados, tal que a equação não depende da magnitude do número de onda n . Isto não garante que o espectro é plano, pois a dependência em n pode aparecer nos dados iniciais. Por exemplo, no caso de perturbações de origem quântica, já vimos que os dados iniciais são fornecidos por (5.16). Mesmo sem os termos de dependência em n , a equação (6.31) é ainda complicada, mas sua análise pode ser essencialmente simplificada se lembrarmos que $\sigma \gg 1$. Levando em conta que as funções- β (3.47), (3.48), (3.49) têm a mesma ordem de magnitude, podemos desconsiderar os termos dependentes de σ em (6.32). Se omitirmos também o pequeno termo

⁶Neste instante, temos que admitir que a escolha do vácuo para as perturbações pode ser feita da mesma forma que para as ações efetivas generalizadas dos campos massivos e sem massa.

b_4 , os coeficientes da eq.(6.31) tornam-se constantes e podemos facilmente verificar se os modos crescentes estão presentes usando os métodos padrões. Fazemos uma aproximação mais fraca e consideremos σ como uma constante de grande magnitude. Então, os determinantes de Routh-Hurwitz têm a forma

$$D_0 = b_0, \quad D_1 = b_1, \quad D_2 = 60H^3[a_1 + w \cdot \sigma(t)]^2,$$

que são positivos para quaisquer parâmetros da teoria;

$$D_3 = 360H^6[a_1 + w \cdot \sigma(t)]^3 + 432H^6wb[a_1 + w \cdot \sigma(t)]^2$$

é positivo se

$$\sigma(t) + a_1/w > -6b/5.$$

Já que b é um número negativo (da ordem 10, no máximo), esta condição é satisfeita se nós incluirmos tal coeficiente negativo a_1 na ação clássica de vácuo (3.7). Finalmente,

$$D_4 = -12bH^4 \cdot D_3$$

é positivo se D_3 for positivo. Para os valores $n < n_c$, onde n_c é um “cut-off” dependendo de M_* , isto significa que a inflação induzida pela anomalia é estável sob perturbações da métrica. Este fato é muito importante para o modelo completo.

Se admitimos que a transição da inflação estável para instável ocorre em $H = M_* \leq 10^{-5} M_P$, então, esta escala definirá a amplitude máxima das ondas gravitacionais e nosso modelo se ajusta com as restrições da anisotropia de CMBR. Esta conclusão é válida sem nenhum ajuste fino (fine-tuning) dos parâmetros do modelo. Na consideração acima nós desprezamos as derivadas \dot{H} . Isto pode ser justificado, por exemplo, usando a eq.(6.15). Lembremos que, por razões dimensionais, \dot{H} deve ser comparável com H^2 . Um cálculo simples nos dá

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \approx -\frac{\tilde{f}}{2(1 - \tilde{f}\sigma)}.$$

Para a GUT supersimétrica, a magnitude de \tilde{f} é no máximo 10^{-5} , enquanto a expressão $(1 - \tilde{f}\sigma)$ torna-se comparável com 10^{-5} somente muito no final da inflação estável quando a expressão (6.15) e a aproximação completa baseada no “sharp-cut-off” precisa ser trocada por uma descrição detalhada do mecanismo de desacoplamento para as

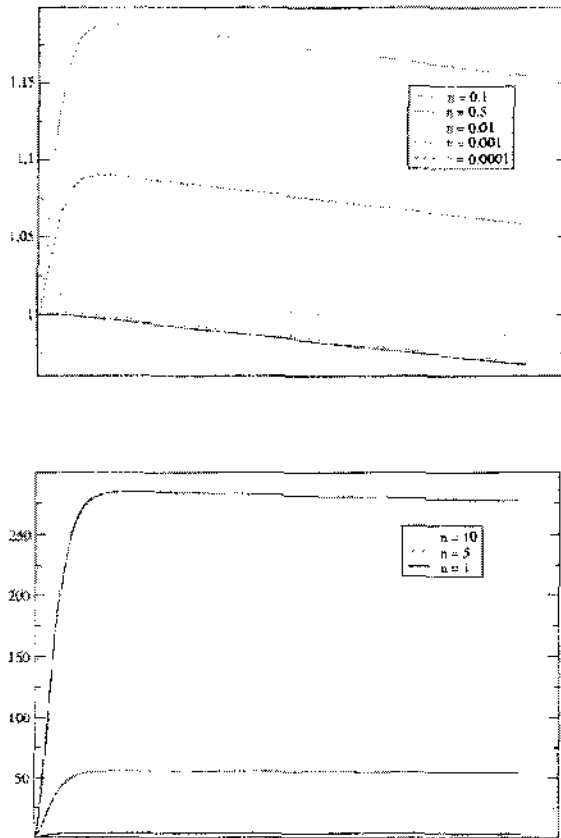


Figura 6.4: Exemplos de gráficos das soluções numéricas de $h(t)$ nos últimos 65 e -folds da inflação e espectro inicial normalizado por $h(0) = 1$ e $\tilde{f} = 10^{-5}$.

partículas- S massivas no espaço-tempo curvo. Entretanto, nossa aproximação $\dot{H}/H^2 \approx 0$ é coerente na região onde a aproximação também é segura, e pode ser considerado como uma dica qualitativa para a região de desacoplamento.

A integração numérica da equação (6.31) foi feita para vários valores do número de onda vetorial n e condições iniciais (5.16). Os gráficos ilustrando a estabilidade de $h(t)$ são apresentados na figura 6.4, que correspondem a $n \leq n_c = 0.1$. Como podemos ver, existe uma diferença entre estes gráficos, tal que o espectro é plano. Para grandes valores de n os gráficos têm um grande crescimento no período inicial (veja segundo gráfico da figura 6.4).

Após um crescimento inicial, as perturbações decrescem exponencialmente, de acordo com nossa consideração analítica. Mas apesar deste decréscimo exponencial e, para n

grande, as ondas deixam o horizonte com amplitude muito maior que a inicial. Este efeito é essencialmente forte para pequenos valores do parâmetro \tilde{f} . Uma observação importante é que, enquanto o decaimento exponencial das perturbações (após o crescimento inicial) não depende da escolha do vácuo e da aproximação $\tilde{H} \approx const$, o crescimento inicial pode mudar muito se considerarmos estes aspectos. Podemos notar também, que a condição $n \ll 1$ é bastante segura nos últimos 65 e -folds, pois n é uma quantidade dimensional e medimos em unidades de M_P . Como a magnitude de H (que gera perturbações) é $H \approx 10^{-5} M_P$, obviamente $n \approx 10^{-5}$ e não pode ser comparado com $n = 1$.

No entanto, a conclusão final consiste de que a amplitude das perturbações com n grande pode concordar somente após uma análise mais completa. O resultado positivo para $n < n_c$ ajuda a encontrar um procedimento aceitável para as perturbações da métrica. A diferença principal em relação à análise anterior das perturbações (campos sem massa, [81, 32]) é que aqui desprezamos todos os termos independentes de σ em (6.31). Isto muda a estrutura da equação e o modo de crescimento desaparece.

Lembremos que a análise numérica das perturbações da métrica nos primeiros 65 e -folds da inflação, mostra que, as perturbações de origem quântica crescem muito rapidamente, tal que a amplitude atinge em torno de 15 ordens de magnitude. De fato, estas ondas enormes não podem ser observadas e sua existência não contradiz com os dados do CMBR. Entretanto, é muito importante que a magnitude das perturbações esteja, de fato, *decrecendo* com relação à métrica de fundo inflacionária. Como resultado, o Universo entra nos últimos 65 e -folds da inflação num estado inicial muito isotrópico. Em geral, o modelo da inflação induzida pela anomalia não apresenta problemas em relação às ondas gravitacionais.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta tese, apresentamos uma abordagem da inflação baseada nos métodos da Teoria Quântica de Campos. Foram obtidos os seguintes resultados originais:

1. Reproduzimos através do método de ação efetiva e ação induzida pela anomalia conforme, soluções inflacionárias do modelo de Starobinski [81]. Generalizamos este resultado para o caso de constante cosmológica não-nula, com $k = \pm 1$.
2. Analisamos as condições de estabilidade das soluções inflacionárias com relação ao fator conforme da métrica, inclusive para os casos de constante cosmológica não-nula e para $k = 0, 1, -1$. Mostramos que estas condições não dependem da constante cosmológica e nem da escolha do parâmetro de curvatura k .
3. Estabelecemos uma condição de estabilidade em termos dos números de campos com $spin = 0, 1/2, 1$. Discutimos a possibilidade de transição entre inflação estável e não-estável.
4. Calculamos, usando o método de integração de anomalia e representação conforme dos campos massivos, a ação efetiva dos campos massivos, levando em conta a renormalização da constante cosmológica.
5. Estudamos a solução cosmológica levando em conta os efeitos quânticos dos campos massivos. Descobrimos uma desaceleração da inflação, como esperávamos, inclusive no caso de constante cosmológica não-nula.

6. Estudamos o espectro das ondas gravitacionais para a inflação exponencial induzida pelos efeitos quânticos dos campos sem massa. Encontramos o espectro consistente com os resultados da inflação de DeSitter tradicional e com os dados observacionais.
7. Analisamos o problema do crescimento das ondas gravitacionais nos últimos 65 e -folds da inflação até o ponto de transição para o regime instável e passagem para o regime de FRW. Encontramos um comportamento muito satisfatório das perturbações da métrica.

Apêndice A

Transformações conformes

Aqui serão apresentadas todas as fórmulas das transformações conformes que foram usadas no texto. Todas as fórmulas correspondem ao espaço n -dimensional.

Usamos notações condensadas como:

$$A^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu,$$

$$(\nabla B)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu B \nabla_\nu B, \quad \nabla^2 B = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu B.$$

Parênteses fechados significam fim da ação da derivada.

Por exemplo: $\nabla_\mu B = (\nabla_\mu B) + B \nabla_\mu$, caso não haja campo à direita de B .

Transformação da métrica, métrica inversa e determinante da métrica:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{2\sigma}, \quad \sigma = \sigma(x). \quad (\text{A.1})$$

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} e^{-2\sigma}, \quad g' = g e^{2n\sigma}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.2})$$

Transformação do símbolo de Christoffel:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \delta^{\lambda}_{\alpha} (\nabla_{\beta} \sigma) + \delta^{\lambda}_{\beta} (\nabla_{\alpha} \sigma) - g_{\alpha\beta} (\nabla^{\lambda} \sigma). \quad (\text{A.3})$$

Transformação do tensor de curvatura de Riemann

$$\begin{aligned}
 R'^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = & R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + (\delta_{\nu}^{\alpha}g_{\mu\beta} - \delta_{\mu}^{\alpha}g_{\nu\beta}) \cdot (\nabla\sigma)^2 + \\
 & + \delta_{\nu}^{\alpha}(\nabla_{\mu}\nabla_{\beta}\sigma) - \delta_{\mu}^{\alpha}(\nabla_{\nu}\nabla_{\beta}\sigma) + g_{\mu\beta}(\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}\sigma) - g_{\nu\beta}(\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}\sigma) + \\
 & + \delta_{\mu}^{\alpha}(\nabla_{\nu}\sigma)(\nabla_{\beta}\sigma) - \delta_{\nu}^{\alpha}(\nabla_{\mu}\sigma)(\nabla_{\beta}\sigma) + g_{\nu\beta}(\nabla_{\mu}\sigma)(\nabla^{\alpha}\sigma) - g_{\mu\beta}(\nabla_{\nu}\sigma)(\nabla^{\alpha}\sigma), \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

do tensor curvatura de Ricci

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (n-2)(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma) - g_{\mu\nu}(\nabla^2\sigma) + (n-2)(\nabla_{\mu}\sigma)(\nabla_{\nu}\sigma) - (n-2)g_{\mu\nu}(\nabla\sigma)^2 \quad (A.5)$$

e da curvatura escalar

$$R' = e^{-2\sigma} \left[R - 2(n-1)(\nabla^2\sigma) - (n-1)(n-2)(\nabla\sigma)^2 \right]. \quad (A.6)$$

O tensor de Weyl em n dimensões é definido como

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\mu\nu} = & R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{n-2} (g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}) + \\
 & + \frac{1}{(n-1)(n-2)} R (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

Com esta definição o tensor de Weyl não tem traço $C^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = 0$ e sua transformação conforme é trivial

$$C'_{\alpha\beta\mu\nu} = e^{2\sigma} C_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (A.8)$$

A transformação do quadrado dos escalares de curvatura têm a forma:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g'} R'^2_{\mu\nu\alpha\beta} = & \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} \left\{ R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + 8R^{\mu\nu}(\nabla_{\mu}\sigma\nabla_{\nu}\sigma - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma) + \right. \\
 & + 4(\nabla^2\sigma)^2 - 4R(\nabla\sigma)^2 + 2(n-2)[2(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma)^2 - 4(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma)(\nabla^{\mu}\sigma)(\nabla^{\nu}\sigma) + \\
 & \left. + 4(\nabla^2\sigma)(\nabla\sigma)^2 + (n-1)(\nabla\sigma)^4 \right\}, \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g'} R'^2_{\mu\nu} = & \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} \left\{ R^2_{\mu\nu} - 2R(\nabla^2\sigma) + (3n-4)(\nabla^2\sigma)^2 + \right. \\
 & + (n-2)[2R^{\mu\nu}(\nabla_{\mu}\sigma\nabla_{\nu}\sigma - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma) - 2R(\nabla\sigma)^2 + (n-1)(n-2)(\nabla\sigma)^4 + \\
 & \left. + (n-2)(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma)^2 - 2(n-2)(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\sigma)(\nabla^{\mu}\sigma)(\nabla^{\nu}\sigma) + 2(2n-3)(\nabla^2\sigma)(\nabla\sigma)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{-g'} R'^2 = \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} \left[R - 2(n-1)(\nabla^2\sigma) - (n-1)(n-2)(\nabla\sigma)^2 \right]^2. \quad (\text{A.10})$$

Agora consideremos o quadrado do tensor de Weyl

$$C^2(n) = C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{4}{n-2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R^2. \quad (\text{A.11})$$

De (A.8) segue que ele se transforma de acordo com

$$\sqrt{-g'} C_{\mu\nu\alpha\beta}'^2 = \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} C_{\mu\nu\alpha\beta}^2. \quad (\text{A.12})$$

Outra combinação útil do quadrado dos escalares de curvatura é

$$E = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2. \quad (\text{A.13})$$

Em $n = 4$ este é um integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet. Mas, mesmo para $n \neq 4$ a expressão $\int d^n \sqrt{-g} E$ não contribui para o propagador de grávitons, pois possui traço nulo e modos completamente transversos. A transformação conforme do termo de Gauss-Bonnet é

$$\begin{aligned} \sqrt{-g'} E' = \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} & \left[E + 8(n-3)R^{\mu\nu}(\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma - \nabla_\mu\nabla_\nu\sigma) - \right. \\ & -2(n-3)(n-4)R(\nabla\sigma)^2 - 4(n-2)(n-3)(\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma)^2 + 4(n-2)(n-3)(\nabla^2\sigma)^2 + \\ & + 8(n-2)(n-3)(\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma)(\nabla^\mu\nabla^\nu\sigma) - 4(n-3)R(\nabla^2\sigma) + \\ & \left. + 4(n-2)(n-3)^2(\nabla^2\sigma)(\nabla\sigma)^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\nabla\sigma)^4 \right]. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

O termo de superfície $\nabla^2 R$ tem a seguinte regra de transformação

$$\begin{aligned} \sqrt{-g'} (\nabla'^2 R') = \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} & \left[(\nabla^2 R) - 2(n-1)(\nabla^4\sigma) - (n-1)(n-2)\nabla^2(\nabla\sigma)^2 - \right. \\ & -2(n-1)(n-6)(\nabla^\mu\sigma)(\nabla_\mu\nabla^2\sigma) - (n-1)(n-2)(n-6)(\nabla^\mu\sigma)\nabla_\mu(\nabla\sigma)^2 \\ & -2R(\nabla^2\sigma) + 4(n-1)(\nabla^2\sigma)^2 + 2(n-1)(3n-10)(\nabla^2\sigma)(\nabla\sigma)^2 - 2(n-4)R(\nabla\sigma)^2 + \\ & \left. + (n-6)(\nabla^\mu\sigma)(\nabla_\mu R) + 2(n-1)(n-2)(n-4)(\nabla\sigma)^4 \right]. \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Para obter a última expressão usamos a transformação do operador ∇^2 agindo em escalares

$$\nabla'^2 = e^{-2\sigma} \left[\nabla^2 + (n-2)(\nabla^\mu\sigma)\nabla_\mu \right].$$

É fácil verificar que, para $n = 4$, a seguinte expressão é válida

$$E' - \frac{2}{3} (\nabla^{2'} R') = E - \frac{2}{3} (\nabla^2 R) + 4\Delta_4 \sigma, \quad (\text{A.16})$$

onde Δ_4 é o operador hermitiano, conformalmente invariante [72]

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2 R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \nabla^2 + \frac{1}{3} (\nabla^\mu R) \nabla_\mu. \quad (\text{A.17})$$

Por outro lado, para $n \neq 4$ nenhuma relação simples entre as transformações de E e $(\nabla^2 R)$ é conhecida, enquanto o operador Δ_4 pode ser generalizado usando a transformação de abaixamento não trivial para escalar [6].

Apêndice B

Cálculo das perturbações da métrica para ação induzida

Para obter as equações para as ondas gravitacionais, devemos considerar as perturbações da métrica no lagrangeano e manter os termos bilineares tal que conseguimos termos lineares nas equações dos campos. Para podermos comparar detalhes técnicos, vamos fixar nossas notações como as de Gasperini em [37]. Da mesma forma, podemos encontrar a maioria das fórmulas intermediárias necessárias como as expansões das componentes do tensor de curvatura. Não apresentaremos estas expansões aqui, somente vamos considerar termos dependentes de φ que não podem ser encontrados em [37]. As soluções de fundo são

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -a^2(t)\delta_{ij} = -e^{2Ht}\delta_{ij}. \quad (\text{B.1})$$

Consideramos, para simplificar, o parâmetro de Hubble H constante. É útil escolher, como variáveis dinâmicas, as componentes mistas da perturbação, que serão denotadas como $h_j^i \equiv h$.

O modo tensorial das perturbações da métrica é definido pela relação

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad \text{onde} \quad \delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

e é parametrizado pelo tensor transversal sem traço $h_{\mu\nu}$. Além disso, fixamos as coordenadas pela condição $h_{\mu 0} = 0$. Expandindo as componentes contravariantes do tensor métrico, em primeira e segunda ordem de h temos

$$\delta^{(1)}g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}, \quad \delta^{(2)}g^{\mu\nu} = h^{\mu\alpha}h_{\alpha}^{\nu},$$

onde $\delta^{(n)}$ denota a n -ésima ordem na expansão da quantidade correspondente em potências de h . Analogamente, para o determinante da métrica temos

$$\delta^{(1)}\sqrt{-g} = 0, \quad \delta^{(2)}\sqrt{-g} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Usando a fórmula intermediária

$$\nabla^2\varphi = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{h}h\dot{\varphi} + O(h^3), \quad (\text{B.4})$$

chegamos nas seguintes expressões

$$\delta^{(2)}\left(\sqrt{-g}\left(\nabla^2\varphi\right)^2\right) = a^3\left\{-\frac{1}{4}h^2\left(\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}\right)^2 - \dot{h}h\left(\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}\right)\dot{\varphi}\right\} \quad (\text{B.5})$$

$$\delta^{(2)}\left[\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi\right] = a^3\dot{\varphi}^2\left\{\frac{3}{4}\left(H^2 + \dot{H}\right)h^2 + \frac{1}{2}\ddot{h}h + \frac{1}{4}\dot{h}^2 + H\dot{h}h\right\} \quad (\text{B.6})$$

$$\delta^{(2)}\left[\sqrt{-g}R\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi\right] = a^3\dot{\varphi}^2\left\{\left(3H^2 + \frac{3}{2}\dot{H}\right)h^2 + \ddot{h}h + \frac{3}{4}\dot{h}^2 + 4H\dot{h}h - \frac{1}{4}h\frac{\nabla^2 h}{a^2}\right\} \quad (\text{B.7})$$

Estas expansões foram utilizadas juntamente com as de [37] para a obtenção de (5.14) considerando $H = \text{constante}$. Todo o estudo foi feito para este caso e também com algumas restrições para φ e ψ comentadas no desenvolver do cálculo de ondas gravitacionais.

Cálculos com $H \neq \text{const.}$, considerando φ e ψ de forma geral, foram feitos e escrevemos a ação da seguinte forma

$$\delta^{(2)}S = \int d^4x \left\{ C_1(t) \left(\dot{h} - \frac{\nabla^2 h}{a^2} \right)^2 + C_2(t) \dot{h}^2 + C_3(t) h^2 + C_4(t) (\nabla h)^2 \right\} \quad (\text{B.8})$$

onde novas definições foram introduzidas

$$C_1(t) = B_3(t)$$

$$C_2(t) = B_1(t) - B_2(t) - \frac{1}{2}\dot{B}_4(t)$$

$$C_3(t) = B_5(t) - \frac{1}{2}\dot{B}_6(t) + \frac{1}{2}\ddot{B}_2(t)$$

$$C_4(t) = -B_8(t) + \frac{1}{2} \dot{B}_9(t) - \frac{1}{2} \ddot{B}_7(t) \quad (\text{B.9})$$

e, com os mesmos coeficientes f 's utilizados em (5.12) escrevemos os coeficientes B 's

$$B_1(t) = a^3 \left\{ \left(2f_1 - \frac{9}{4}f_2 - 18f_3 \right) H^2 + \left(-2f_1 - \frac{5}{2}f_2 - 9f_3 \right) \dot{H} - \frac{1}{2}k_2 \ddot{\varphi} - \frac{3}{2}k_2 H \dot{\varphi} \right\}$$

$$B_2(t) =$$

$$= a^3 \left\{ (-4f_1 - 6f_2 - 24f_3) H^2 + (-4f_1 - 4f_2 - 12f_3) \dot{H} - \frac{2}{3}k_2 \ddot{\varphi} - 2k_2 H \dot{\varphi} - \frac{1}{6} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \right\}$$

$$B_3(t) = a^3 \left(f_1 + \frac{f_2}{4} \right)$$

$$B_4(t) = a^3 H \left(4f_1 + \frac{3}{2}f_2 \right)$$

$$B_5(t) =$$

$$= a^3 \left\{ \begin{aligned} &(-3f_1 - 3f_2 - 9f_3) \dot{H}^2 + (-6f_1 - 9f_2 - 36f_3) \dot{H} H^2 + (-6f_1 - 9f_2 - 36f_3) H^4 \\ &-k_2 (\dot{H} + 2H^2) \ddot{\varphi} - 3k_2 (H \dot{H} + 2H^2) \dot{\varphi} - \frac{1}{8} (\ddot{\varphi}^2 + \ddot{\psi}^2) \\ &-\frac{7}{8} H^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) - \frac{3}{4} H (\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \ddot{\psi}) - \frac{1}{4} \dot{H} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \end{aligned} \right\}$$

$$B_6(t) = a^3 \left\{ \begin{aligned} &(-8f_1 - 12f_2 - 48f_3) \dot{H} H + (-16f_1 - 24f_2 - 96f_3) H^3 \\ &-\frac{2}{3}k_2 (3 \dot{H} \dot{\varphi} + 18H^2 \dot{\varphi} + 4H \ddot{\varphi}) \\ &-\frac{1}{2} (\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \ddot{\psi}) - \frac{7}{6} H (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \end{aligned} \right\}$$

$$B_7(t) = 2f_1 a$$

$$B_8(t) = a \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}f_2 + 3f_3 \right) \dot{H} + \left(f_1 + \frac{3}{2}f_2 + 6f_3 \right) \dot{H} H^2 \\ &+\frac{1}{6}k_2 (\ddot{\varphi} + 3H \dot{\varphi}) - \frac{1}{12} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \end{aligned} \right\}$$

$$B_9(t) = aH \left\{ -2f_1 - \frac{3}{2}f_2 \right\}$$

com os mesmos valores de k 's que antes, na equivalência das equações (3.78) e (3.79).

Referências

- [1] P.R. Anderson, *Effects of quantum-fields on singularities and particle horizons in the early universe. 2*, Phys.Rev. **D29** (1984) 615-627; *Effects of quantum-fields on singularities and particle horizons in the early universe. 3. The conformally coupled massive scalar field*, Phys.Rev. **D32** (1985) 1302; *Effects of quantum fields on singularities and particle horizons in the early universe - initially empty universes*, Phys.Rev. **D33** (1986) 1567.
- [2] I. Antoniadis, P.O. Mazur and E. Mottola, *Comment on 'nongaussian isocurvature perturbations from inflation*, Phys.Rev.Lett. **79** (1997) 14.
- [3] I.G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity*, (PhD thesis, Moscow University, 1986). hep-th/9510140.
- [4] D. Bailin, A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, (California Institute of Technology, Pasadena, California, 1981).
- [5] R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Anomaly induced effective actions and Hawking radiation*, Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 1494.
- [6] J.A. Barros and I.L. Shapiro, *Renormalization group study of the higher derivative conformal scalar model*, Phys. Lett. **412B** (1997) 242.
- [7] J.D. Barrow, *In The Very Early Universe* (Proceedings of the Nuffield Workshop), ed. G.W. Gibbons, S.W. Hawking and S.T.C. Siklos, (1983) 267.
- [8] A.O. Barvinsky, Yu.V. Gusev, G.A. Vilkovisky and V.V. Zhitnikov, *The one-loop effective action and trace anomaly in four dimensions*, Nucl. Phys. **B439** (1995) 561.

- [9] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Divergences and anomalies for coupled gravitational and Majorana spin 1/2 fields*, Nucl.Phys. **B191** (1981) 237.
- [10] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rep. **119**, (1985) 1.
- [11] N.D. Birell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [12] J.D. Bjorken, S.D.Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw Hill College Div, 1970).
- [13] S.A. Bludman and M.A. Ruderman, *Induced cosmological constant expected above phase-transition restoring broken symmetry*, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 255.
- [14] W. Boer, *Grand unified theories and supersymmetry in Particle Physics and Cosmology*, hep-ph/9402266.
- [15] S.L. Bridle, I. Zehavi, A. Dekel, O. Lahav, M.P. Hobson and A.N. Lasenby, *Cosmological parameters from velocities, CMB and supernovae*, astro-ph/0006170.
- [16] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov, I.L. Shapiro, *Nonsingular cosmological model with torsion induced by vacuum quantum effects*, Phys.Lett. **B162** (1985) 92.
- [17] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing-Bristol, 1992).
- [18] W. Buchmuller, N. Dragon, *Dilatons in flat and curved space-time*, Nucl.Phys. **B321** (1989) 207.
- [19] D.J.E. Callaway, Phys Rep. **167**, (1998) 241.
- [20] L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, (Springer-Verlag, 1963).
- [21] C.M. Chen and W.F. Kao, *Stability analysis of anisotropic inflationary cosmology*, Phys.Rev. D64 (2001) 124019.

- [22] J.C. Collins, *Renormalization*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
- [23] G.D. Coughlan, I. Kani, G.G. Ross, G. Segre, *Dilatations and the cosmological constant*, Nucl.Phys. **B316** (1989) 469.
- [24] P.C.W. Davies, S.A. Fulling, S.M. Christensen, T.S. Bunch, *Energy momentum tensor of a massless scalar quantum field in a Robertson- Walker universe*, Published in Annals Phys. **109** (1977) 108; T.S. Bunch and P.C.W. Davies, *Stress tensor and conformal anomalies for massless fields in a Robertson-Walker universe*, Proc.R.Soc.London **A 356** (1977) 569.
- [25] B.S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and Fields*, (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [26] J.F. Donoghue, E. Golowich, B.R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [27] M.J. Duff, *Observations on conformal anomalies*, Nucl. Phys. **125B** (1977) 334.
- [28] M.J. Duff, *20 Years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387.
- [29] J.R. Ellis, N.C. Tsamis, M.B. Voloshin, *Could a dilaton solve the cosmological constant problem?*, Phys.Lett. **B194** (1987) 291.
- [30] J.C. Fabris, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro, *Vacuum effective action and inflation*, Particles and Fields (1999) 489-493.
- [31] J.C. Fabris, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro, *Anomaly induced effective action for gravity and inflation*, Grav. Cosmol. **6** (2000) 59; *Anomaly induced effective action and inflation*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **95** (2001) 78.
- [32] J.C. Fabris, A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation*, Nucl.Phys. **B597** (2001) 539.
- [33] M.V. Fischetti, J.B. Hartle and B.L. Hu, *Quantum effects in the early universe. I. Influence of trace anomalies on homogeneous isotropic, classical geometries*, Phys.Rev. **D20** (1979) 1757.

- [34] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal anomaly in Weyl-theory and anomaly free superconformal theories*, Phys.Lett. **134B** (1984) 187.
- [35] A. Friedmann, Z.Phys., *On the curvature of space*, **10** (1922) 377; **21** (1924) 326.
- [36] S.A. Fulling, *Aspects of quantum field theory in curved space-time*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1982).
- [37] M. Gasperini, *Tensor perturbations in high-curvature string backgrounds*, Phys.Rev. **D56** (1997) 4815.
- [38] M. Gasperini, *String cosmology versus standard and inflationary cosmology*, Class.Quant.Grav. **17** (2000) R1.
- [39] M. Gasperini, *Elementary introduction to pre-big bang cosmology and to the relic graviton*, hep-th/9907067.
- [40] P.B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, (Perish, Wilmington, 1984).
- [41] E.V. Gorbar, I.L. Shapiro, *Renormalization Group Decoupling in Curved Space*, JHEP **02** (2003) 021.
- [42] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. I e II, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
- [43] L.P. Grishchuk, *Relic Gravitational Waves and Limits on Inflation*, Phys.Rev. **D48** (1993) 3513.
- [44] A. Guth, *Cosmological consequences of a first order phase transition in the SU(5) Grand Unified Model*, Phys.Rev. **23D** (1981) 347.
- [45] S.J. Hathrell, *Trace anomalies and Lambda-phi-4-theory in curved space*, Ann.Phys. **139** (1982) 136; *Trace anomalies and QED in curved space*, **142** (1982) 34.
- [46] S.W. Hawking, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*, Comm. Math. Phys. **55** (1977) 133.

- [47] S.W. Hawking, T. Hertog and H.S. Real, *Trace anomaly driven inflation*, Phys.Rev. **D63** (2001) 083504.
- [48] J.A. Helayel-Neto, A. Penna-Firme and I.L. Shapiro, *Conformal simetry, anomaly and effective action for metric-scalar gravity with torsion*, Phys.Lett. **479B** (2000) 411.
- [49] M. Henningson and K. Skenderis, *The holographic Weyl anomaly*, JHEP **9807** (1998) 023.
- [50] W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga and M. Tegmark, *CMB observables and their cosmological implications*, astro-ph/0006436.
- [51] E. Kolb and M. Turner, *The very early Universe*, (Addison-Wesley, New York, 1994); *Astroparticle Physics: an overview*, Mini-curso na Escola Brasileira de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Proceedings: 2002.
- [52] K.E. Kunze and R. Durrer, *Anisotropic 'hairs' in string cosmology*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 2597.
- [53] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Hydrodynamics*, (Pergamon, London, 1969).
- [54] G. Lemaitre, *Expansion of the universe, The expanding universe*, Mon. Not. Royal Astron. Soc. **91** (1931) 483.
- [55] A.D. Linde, *The new inflationary universe scenario*, In Cambridge 1982, Proceedings, *The Very Early Universe*, 205-249.
- [56] S.G. Mamaev and V.M. Mostepanenko, *Isotropic cosmological models determined by vacuum quantum effects*, Sov.Phys. JETP **51** (1980) 9.
- [57] A.L. Maroto and I.L. Shapiro, *On the inflationary solutions in higher-derivative gravity with dilaton field* Phys. Lett. **414B** (1997) 34.
- [58] A. Melchiorri and N. Vittorio, *The gravitational-wave contribution to the CMB anisotropies*, astro-ph/9901220.

- [59] M.B. Mijić, M.S. Moris and W.-M. Suen, *The R^{**2} cosmology: inflation without a phase transition* Phys. Rev. **34D** (1986) 2934.
- [60] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, San Francisco, 1973).
- [61] V.F. Mukhanov and G.V. Chibisov, *Quantum fluctuations and 'nonsingular universe*, JETP Lett. **33** (1981) 532; *The vacuum energy and large scale structure of the universe*, JETP (1982) 258.
- [62] V.F. Mukhanov, H.A. Feldinan and R.H. Brandenberger, *Gauge invariant cosmological perturbations: theory and applications*, Phys. Rep. **215** (1992) 203.
- [63] L. Parker and D.J. Toms, *Renormalization group analysis of grand unified theories in curved space-time*, Phys.Rev. **29D** (1984) 1584.
- [64] R.D. Peccei, J. Solà, C. Wetterich, *Adjusting the cosmological constant dinamically: cosmos and a new force weaker than gravity*, Phys. Lett. **195B** (1987) 183.
- [65] G.B. Peixoto, *A note on the heat kernel method applied to fermions*, Mod.Phys.Lett. **A16** (2001) 2463.
- [66] A.M. Pelinson, I.L. Shapiro, F.I. Takakawa, *On the stability of the anomaly-induced inflation*, Nucl.Phys., **B648** (2003) 417.
- [67] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al. *Measurements of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae*, Astrophys. J, **517** (1999) 565;
- [68] J. Polchinski, *String Theory, Superstring Theory and Beyond*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
- [69] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, (Cambridge Univ. Press, 1992).
- [70] J.R. Primack, *Cosmological parameters*, astro-ph/0007187.
- [71] P. Ramond, *Field Theory, A Modern Primer*, (Inst. of Phys. Pub., 1994).

- [72] R.J. Reigert, *A non-local action for the trace anomaly*, Phys.Lett. **134B** (1980) 56.
- [73] A.G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116** (1998) 1009.
- [74] U. Seljak and M. Zaldarriaga. Computer code is available in the website <http://www.sns.ias.edu/~matiasz/CMBFAST/cmbfast.html>.
- [75] I.L. Shapiro, J.Solà, *On the scaling behavior of the cosmological constant and the possible existence of new forces and new light degrees of freedom*, Phys. Lett. **475 B** (2000) 236; *Scaling behavior of the cosmological constant: interface between quantum field theory and cosmology* JHEP **0202** (2002) 006.
- [76] I.L. Shapiro, *The graceful exit from the anomaly-induced inflation: Supersymmetry as a key*, Int.J.Mod.Phys. **D11** (2002) 1159.
- [77] I.L. Shapiro, J. Solà, *A modified Starobinsky model of inflation: Anomaly induced inflation, susy and graceful exit*, Phys. Lett. **530B** (2002) 10.
- [78] I.L. Shapiro, *Notas de aula em Teoria Quântica de Campos*, unpublished.
- [79] J. Solà, *The cosmological constant and the fate of the cosmon in Weyl conformal gravity*, Phys.Lett. **B228** (1989) 317; *Scale gauge symmetry and the Standard Model*, Int.J.Mod.Phys. **A5** (1990) 4225.
- [80] J. Solà, *The Cosmological Constant in Brief*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **95** (2001) 29.
- [81] A.A. Starobinsky, *Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the Universe*, JETP Lett. **30** (1979) 719; *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys.Lett. **91B** (1980) 99.
- [82] A.A. Starobinsky, *Evolution of small perturbations of isotropic cosmological models with one-loop quantum gravitational corrections*, JETP Lett. **34** (1981) 460; *Nonsingular Model of the Universe with the Quantum-Gravitational De Sitter Stage and Its Observational Consequences*, Proceedings of the second seminar "Quantum Gravity",

- Moscow, (1982) 58-72; *From Quantum to Stochastic Classical Cosmology*, Mini-curso na Escola Brasileira de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Proceedings: 1998.
- [83] W.M. Suen, P.R. Anderson, *Reheating in the higher derivative inflationary models*, Phys. Rev. **35D** (1987) 2940.
- [84] E.T. Tomboulis, *Dynamically adjusted cosmological constant and conformal anomalies*, Nucl.Phys. **B329** (1990) 410.
- [85] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley and Sons, New York. 1972).
- [86] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys., **61** (1989) 1.
- [87] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Foundations, Vol.I*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [88] C. Wetterich, *Cosmology and the fate of dilatation symmetry*, Nucl.Phys. **B302** (1988) 668.
- [89] S. Wolfram, *Mathematica. Program Package*, (Cambridge Univ. Press, 1996).
- [90] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, (Cambridge Univ. Press, 1999).

“Modelo Cosmológico Inflacionário baseado nos Efeitos Quânticos de vácuo”

Ana das Mercês Pelinson

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Ilia Chapiro – Presidente/UFJF

Júlio César Fabris – UFES

Reuven Opher – USP

Mário Novello - CBPF

Nami Fux Svaiter – CBPF