Tese de Mestrado

DUALIDADE, CONDENSAÇÃO DE BRANAS E GRUPOS DE DUALIDADE PARA P-FORMAS MASSIVAS

Jorge José Leite Noronha Junior

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/MCT
Rio de Janeiro, setembro de 2004

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE PARTÍCULAS E CAMPOS/CCP

Tese de Mestrado

Dualidade, condensação de branas e grupos de dualidade para p-formas massivas

Jorge José Leite Noronha Junior

Rio de Janeiro, setembro de 2004.

Agradecimentos

Em especial, expresso aqui minha sincera gratidão ao Professor Clóvis Wotzasek, meu orientador nesta tese. Venho trabalhando com ele desde o final da minha graduação e tenho aprendido muito desde então. Todos os ensinamentos, o constante incentivo ao trabalho, a liberdade concedida, o apoio irrestrito em todas as situações (mesmo nas mais burocráticas) além da grande amizade, foram fundamentais para a realização deste trabalho e muito contribuíram para a minha formação como físico e também como ser humano.

Aos meus pais por todo o apoio e amor dedicados a mim ao longo de toda a minha vida.

À minha querida Juzinha, por todo o amor e carinho para comigo. Você me faz querer ser um homem melhor. Neoqeav.

Queria agradecer a toda minha família e em especial à minha tia Eloína que me levou ao CBPF pela primeira vez em 1998, fato que ratificou minha paixão pela física.

Aos meus amigos do Jabour que sempre deram muito apoio as minhas "viagens" pela ciência, desde garoto. Em especial meus amigos Serginho (e Dani), Rodrigo (Big), André (da Silva), Juliana (Pamps), Rodrigo (Dodô), Marcelo Sugata, Paulo Ivo e Leo Grigório. Meus amigos do Cefet-RJ, Adielson (Bruce), Reinaldo (Dotô), Ellen, Paulo (Juca), Marlos (Ramones), Tropeço (Marcelo) e Fábio (Gordinho). Aos meus amigos do fundão, Marcelo (Kamiza), Kazu (um amigo para toda a hora!), Malena, Alexandre, Filipe, Rani, Franciole (Mente) e Davi e do CBPF, André Gavini e Fernando (Boiúna).

Aos meus professores da UFRJ, Felipe Canto, Belita Koiller, Ildeu, Marechal, Leandro e Joaquim pelos ensinamentos e apoio. Ao prof. Takeshi Kodama por todo incentivo e auxílio nas horas mais difíceis ("Samurai tem que vencer jogo na regra de adversário!"). Em especial, gostaria de agradecer à minha eterna orientadora Monica Bahiana por sua incrível paciência e boavontade para comigo durante minhas "crises existenciais", por me ensinar a sempre buscar entender a física de uma forma global e interdisciplinar e, principalmente, por acreditar em mim sempre.

Agradeço também aos meus professores no CBPF, Evaldo, Lígia, Nami, Caride e Toppan. Em especial, agradeço ao meu grande amigo Geraldo Cernicchiaro pelas conversas sobre física e política que mantemos desde meu estágio no CBPF. Também agradeço a todo o pessoal do CFC pelo apoio recebido.

Queria agradecer ao CNPq e a Faperj pelo suporte financeiro que recebi ao longo do mestrado.

Por fim, agradeço a Deus por tudo.

"Se estás no uso da razão é porque Deus conta contigo para que auxilies a ti mesmo, doando à vida o máximo de tudo aquilo que já possuas de melhor."

Emmanuel

Resumo

Neste trabalho estudamos transformações de dualidade em teorias de campo para p-formas definidas em $(d+1)$–dimensões. Para o caso não massivo, discutimos as conseqüências destas operações quando os campos estão acoplados às suas respectivas branas elétricas e magnéticas. Um estudo sobre o mecanismo de geração de massa para estas teorias devido a condensação de branas é apresentado. Motivados por esta discussão nós consideramos vários aspectos relacionados a teorias para p-formas massivas. Suas propriedades de dualidade são discutidas e aplicadas no entendimento das diferentes fases apresentadas por elas. Nós estabelecemos a classificação dos grupos de dualidade para teorias de p-formas massivas e encontramos sua dependência com a dimensionalidade do espaço-tempo. Nós também demonstramos que este resultado não é alterado pelo processo de quantização.

Também pode ser encontrado neste trabalho um breve estudo sobre ações e correntes para p-branas.

Abstract

In this work we study duality transformations in field theories for p-forms defined in $(d+1)-$dimensions. For the massless case, we discuss the consequences of these operations when the fields are coupled to their respective eletric and magnetic branes. A study on the mass generation mechanism for these theories due to brane condensation is presented. Motivated by this discussion we consider several aspects related to theories for massive p-forms. Their duality properties are discussed and applied in the understanding of the different phases presented by those ones. We establish the classification of the duality groups for massive p-form theories and find its dependence with the dimensionality of the spacetime. We also prove that this result is not changed by the quantization process.

It can also be found in this work a brief study on actions and currents for p-branes.

Índice

"It always seems odd to me that the fundamental laws of physics, when discovered, can appear in so many different forms that are not apparently identical at first, but, with a little mathematical fiddling you can show the relationship... There is always another way to say the same thing that doesn't look at all like the way you said before. I don't know what the reason for this is. I think it is somehow a representation of the simplicity of nature."

R. P. Feynman

Capítulo 1

Introdução

Transformações de dualidade são mapeamentos entre diferentes formulações matemáticas de uma mesma situação física. Uma vez determinado um mapeamento dual, a análise do seu conteúdo físico torna-se uma ferramenta poderosa para uma compreensão precisa das propriedades do sistema considerado. A grande maioria dos exemplos de dualidade estabelecidos até hoje apresenta uma importante característica: uma teoria fortemente (fracamente) acoplada é mapeada, via dualidade, em uma teoria dual fracamente (fortemente) acoplada [1, 2]. Neste aspecto, pode-se dizer que o estudo de dualidades constitui o mais importante passo dado até hoje rumo ao total entendimento de sistemas que interagem fortemente, considerados inacessíveis através da análise essencialmente perturbativa usualmente empregada.

Outra característica fundamental apresentada pelas operações de dualidade é a troca de quanta elementares por excitações coletivas, sendo um exemplo típico a conjectura partícula/sóliton de Montonen-Olive em teorias de calibre não abelianas em (3+1)-dimensões [3]. Esta propriedade também é encontrada em sistemas de Matéria Condensada como por exemplo a dualidade ordem/disordem em sistemas do tipo Ising [5], a dualidade partícula/vórtice existente em filmes superfluidos efetivamente bidimensionais [6] e a dualidade envolvendo a condutividade no efeito Hall quântico [7], comprovada experimentalmente em [8]. A bosonização [9] também apresenta esta propriedade e constitui um exemplo de dualidade que possui importantes aplicações em Física da Matéria Condensada e de Altas Energias [10].

Com relação à Física de Altas Energias, uma das mais conhecidas dualidades é a dualidade entre p-formas (tensores antissimétricos de posto p) em várias dimensões [11, 12]. Estes objetos desempenham um importante papel no estudo da teoria de cordas e teoria M pois no limite de baixas energias os setores bosônicos dessas teorias são descritos por um conjunto de determinadas $p-$formas [13] em 10 e 11 dimensões, respectivamente. Dualidades envolvendo $p-$formas estendem a conjectura de Montonen-Olive para uma dualidade entre branas (soluções solitônicas das teorias de cordas e da teoria M [14]), que vem sendo bastante estudada atualmente. Ainda com relação à teoria de cordas, encontra-se sob intensa investigação a dualidade Anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT), proposta inicialmente por Juan Maldacena [15], que identifica as propriedades físicas de uma CFT em 4 dimensões com as encontradas numa teoria de cordas definida num $AdS_5 \otimes H$[1], estabelecendo uma correspondência que permite relacionar campos de Yang-Mills no limite N (número de cores da cromodinâmica quântica) muito grande com supercordas. Portanto, dado que a cromodinâmica em baixas energias possui acoplamento forte (o que inviabiliza uma análise perturbativa), uma dualidade desta teoria com uma teoria de cordas estando no seu limite de acoplamento fraco permitiria a realização de cálculos até então inacessíveis e de fato passos já estão sendo dados nesta direção [16].

A maior parte desta tese é dedicada ao estudo das dualidades presentes em teorias que envolvem $p-$formas compactas massivas e não- massivas. A dualidade existente entre as diferentes fases apresentadas por estes sistemas [17] pode desempenhar um importante papel no entendimento das dualidades entre teorias de cordas [18]. Através do acoplamento

[1] H é uma variedade compacta (como por exemplo a esfera S_5).

com branas elétricas e magnéticas, a relação entre dualidade e a condição de quantização de Dirac [19] é derivada.

Estudamos também o processo de geração de massa para p-formas devido a condensação de branas elétricas ou magnéticas através do mecanismo de Higgs-Stuckelberg e de Julia-Toulouse [17]. Utilizando as transformações de dualidade entre p-formas massivas demonstramos a existência de uma dualidade entre estes dois mecanismos. Motivados por esta discussão, através do método da projeção dual [20] estabelecemos a classificação dos grupos de dualidade para teorias de p-formas massivas e encontramos sua dependência com a dimensionalidade do espaço-tempo [21]. Também demonstramos que nossos resultados não são alterados pelo processo de quantização.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 discutimos a dualidade entre teorias para p-formas não massivas. Visando um melhor entendimento das propriedades apresentadas por estes sistemas, abordaremos inicialmente a dualidade eletromagnética em (3+1)-dimensões (envolvendo tanto cargas elétricas quanto magnéticas) e em seguida desenvolveremos o caso mais geral envolvendo $p-$formas e suas respectivas branas elétricas e magnéticas. No capítulo 3 fazemos uma revisão sobre as diferentes fases apresentadas por teorias de campo envolvendo $p-$formas compactas em $D = (d+1)$-dimensões [17]. No quarto capítulo aplicamos a projeção dual no estudo dos grupos de dualidade para p-formas massivas tanto em nível clássico quanto quântico. Por fim, encerramos apresentando nossas conclusões e perspectivas.

Nos apêndices A, B e C colocamos as definições empregadas e os vários resultados matemáticos que utilizamos na intenção de prover uma rápida referência durante a leitura desta tese.

Capítulo 2

Dualidade entre $p-$formas não massivas

2.1 Dualidade eletromagnética

A dualidade entre campos elétricos e magnéticos já é conhecida há muito tempo; possivelmente ela é mais antiga até do que as próprias equações de Maxwell. No vácuo as equações para o campo elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ são [22]

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{2.2}$$

Pode-se notar que elas são invariantes sob a transformação de dualidade $D : \vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$. É possível escrevê-las de uma forma bem concisa definindo a variável complexa $Z = \vec{E} + i\vec{B}$ [23]

$$\nabla \cdot Z = 0 \qquad \nabla \times Z = i\frac{\partial Z}{\partial t}, \tag{2.3}$$

de forma que agora a transformação de dualidade acima pode ser generalizada para rotações por um ângulo ϕ num plano complexo formado por $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$D_\phi : Z \to e^{i\phi} Z. \tag{2.4}$$

Entretanto, a forma mais conveniente para a análise desta propriedade é obtida escrevendo as equações de Maxwell utilizando o tensor de campo $F^{\mu\nu}$, sendo $F^{0i} = E^i$ e $F^{ij} = \epsilon^{ijk}B^k$, o que nos fornece as equações de movimento [22]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.5}$$

e a identidade de Bianchi

$$\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.6}$$

onde usamos o tensor dual $*F^{\mu\nu}$ definido por $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$, em acordo com o apêndice C. A identidade de Bianchi nos possibilita introduzir o potencial vetor A^μ pois $\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, em situações comuns (ver lema de Poincaré, apêndice C).

Observe que a transformação de dualidade D anterior, escrita agora sob uma forma covariante, corresponde a troca das equações de movimento pela a identidade de Bianchi. De fato, temos agora a transformação $D_{Lorentz} : F^{\mu\nu} \rightarrow *F^{\mu\nu}$. É simples perceber que esta dualidade é quebrada pela presença de fontes elétricas ou magnéticas. Considerando apenas cargas elétricas $J^\mu(x) = (\rho_e(x), \vec{j}_e(x))$ [22] as equações de movimento se tornam

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{2.7}$$

sendo J^μ uma corrente conservada, ou seja, $\partial_\mu J^\mu = 0$. A identidade de Bianchi por sua vez permanece inalterada. Para restaurar a simetria entre estas equações é necessário introduzir uma fonte de origem magnética $K^\mu(x) = (\rho_m(x), \vec{j}_m(x))$, de forma que além de (2.7) tenhamos também $\partial_\mu * F^{\mu\nu} = K^\mu$ [19, 22].

Analisando a dinâmica quântica de uma partícula elétrica na presença de um monopólo magnético, Dirac [19] concluiu que sua função de onda só poderia ser consistente se a carga elétrica e e magnética g envolvidas satisfizessem a seguinte condição de quantização

$$eg = 2\pi n\hbar, \tag{2.8}$$

sendo $n \in \mathbf{Z}$. Portanto, a simples existência de um monopólo g implica que todas as cargas e do universo devem ser múltiplas de $2\pi\hbar/g$, explicando assim a quantização da carga elétrica[1]. Outra conseqüência interessante de (2.8) é que as cargas do elétron e do próton devem ser exatamente iguais, o que de fato está amplamente comprovado [24]. Pode-se notar também que usando o valor padrão para a constante de estrutura fina elétrica $\alpha_e = e^2/4\pi = 1/137$ e a condição de Dirac acima, a constante de estrutura fina magnética α_m seria muito maior que a unidade, ou seja, $\alpha_m = g^2/4\pi = n^2/4\alpha_e >> 1$, mostrando que em situações usuais nas quais $\alpha_e << 1$ os monopólos estariam fortemente acoplados.

Novos fatos relacionados aos monopólos foram revelados quando t'Hooft [25] e Polyakov [26] demonstraram que em toda teoria de grande unificação (envolvendo por exemplo grupos $SU(5)$) sua existência é garantida. Nestas teorias os monopólos aparecem como sólitons, i.e., soluções das equações de movimento clássicas que descrevem objetos de dimensões não singulares que se mantém conservados devido a propriedades topológicas. É importante notar que, no regime de acoplamento fraco, os objetos elétricos e os magnéticos apresentam características bem distintas. Nesta situação, as cargas elétricas estão fracamente acopladas e possuem natureza pontual e os objetos carregados magneticamente estão fortemente acoplados devido a condição de Dirac (2.8) e possuem tamanho finito. Mas qual seria o quadro apresentado pelas cargas elétricas e magnéticas numa situação de acoplamento forte? Montonen e Olive [3] conjecturaram que neste caso ocorrerá o inverso da situação anterior: os objetos carregados eletricamente estarão fortemente acoplados e terão tamanho finito (sólitons) e os objetos magnéticos serão fracamente acoplados e se tornarão objetos pontuais. Portanto, a teoria fortemente acoplada seria equivalente à sua versão fracamente acoplada sendo que agora as partículas elementares envolvidas

[1]No que segue retornaremos ao sistema natural de unidades onde $\hbar = 1$.

possuiriam cargas magnéticas ao invés de elétricas. Isto constituiria a versão não-abeliana para a dualidade eletromagnética descrita nos parágrafos anteriores e a aplicação dessas idéias tem produzido importantes resultados relacionados ao problema do confinamento de quarks [27]. Apesar de bastante poderosa, esta conjectura foi vista com bastante ceticismo no início pois as evidências encontradas para sua confirmação eram bastante indiretas e a construção dos campos duais a partir dos originais não é possível. Atualmente, com auxílio de argumentos baseados em supersimetria, várias evidências importantes foram descobertas que levam a crer que esta dualidade de fato deve ser possível [27].

Vimos anteriormente como a dualidade eletromagnética no seu caso abeliano é muito simples de ser verificada e entendida. Veremos na próxima seção que neste caso é possível a construção exata de uma teoria dual e que a troca de papéis entre partículas elementares e sólitons também estará presente neste caso.

2.2 Formalismo lagrangeano para a dualidade eletromagnética

Apresentar a dualidade eletromagnética utilizando somente as equações de movimento, apesar de correta, não é a forma mais utilizada atualmente. Geralmente, discute-se dualidade envolvendo as ações clássicas dos respectivos campos. O formalismo lagrangeano é o mais empregado em discussões sobre dualidade devido, entre outras razões, a direta visualização das possíveis simetrias existentes (via teorema de Noether) e sua estreita ligação com o processo de quantização através de integrais de trajetória [28]. Entende-se que demonstrando a equivalência entre as ações automaticamente as equações de movimento (obtidas via extremização do funcional ação) serão equivalentes, assegurando portanto uma mesma dinâmica para os campos duais.

Usando a linguagem das formas diferenciais[2], a ação de Maxwell [28] (na ausência de fontes)

$$S_{Maxwell} = -\frac{1}{4}\int_M dx^4 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, pode ser reescrita simplesmente em termos da 1-forma A_1 e da 2-forma exata $F_2(A_1) = dA_1$ como

$$S_{Maxwell} = -\frac{1}{2}\int_M F_2(A_1) * F_2(A_1) = -\frac{1}{2}(F_2(A_1), F_2(A_1)), \tag{2.10}$$

sendo M um espaço de Minkowski de $(3+1)-$dimensões. Esta é uma teoria de calibre (grupo $U(1)$) pois transformações do tipo $A_1 \to A_1 + d\phi_0$ não alteram a ação acima. Nesta dimensionalidade o potencial A_1 envolvido possui dois graus de liberdade, o que está de acordo com o número de polarizações existentes para a luz.

Desenvolveremos abaixo, em detalhe, os passos para a obtenção da teoria dual à (2.10). Primeiramente a reescrevemos de uma forma mais conveniente introduzindo a 2-forma auxiliar Π_2, reescrevendo a ação (2.10) para o campo A_1 (que é de segunda ordem nas derivadas espaço-temporais) como uma ação de primeira ordem envolvendo dois campos acoplados A_1 e Π_2

$$S(A_1, \Pi_2) = -\frac{1}{2}(dA_1, dA_1) = -(\Pi_2, dA_1) + \frac{1}{2}(\Pi_2, \Pi_2). \tag{2.11}$$

Eliminando Π_2 através de suas equações de movimento é possível reobter a ação original (2.10). Agora, usando a propriedade (C.30) do operador δ, obtemos

$$S(A_1, \Pi_2) = -(A_1, \delta\Pi_2) + \frac{1}{2}(\Pi_2, \Pi_2). \tag{2.12}$$

Podemos reconhecer agora que o potencial A_1 se tornou um multiplicador de Lagrange, impondo a condição $\delta\Pi_2 = 0$. Como sempre estamos considerando espaços topologica-

[2] Ver apêndice C.

mente triviais[3], esta condição para o campo Π_2 é facilmente resolvida introduzindo o campo $\tilde{A}_1$ tal que

$$\Pi_2 = *F_2(\tilde{A}_1) = *d\tilde{A}_1, \tag{2.13}$$

e então (2.12) se torna, com auxílio da identidade (C.32),

$$S(A_1, \Pi_2) \to \tilde{S}(\tilde{A}_1) = -\frac{1}{2}(d\tilde{A}_1, d\tilde{A}_1). \tag{2.14}$$

Esta é a ação dual à teoria de Maxwell (2.10) e a 1-forma $\tilde{A}_1$ é denominada o campo dual ao A_1 original presente em (2.10). O campo dual neste caso também é uma 1-forma (campo vetorial) e esta nova ação compartilha de todas as características presentes na teoria original como por exemplo a simetria de calibre.

Um requisito necessário para uma teoria dual é que ela possua o mesmo número de graus de liberdade da teoria inicial e portanto transformações de dualidade devem manter este número inalterado. É simples notar que esta propriedade é satisfeita no exemplo acima.

A discussão sobre dualidade se torna bem mais interessante quando são inseridas fontes, tanto elétricas quanto magnéticas, em (2.10) como veremos mais adiante. Generalizaremos a dualidade encontrada nesta seção para o caso no qual o potencial presente na teoria inicial é uma p-forma. Para tal, é necessário que façamos agora uma breve digressão sobre a descrição de branas, objetos que constituirão as fontes para o caso mais geral de teorias envolvendo p-formas que consideraremos.

2.3 Advento das branas

A partir de 1995 ocorreram profundas descobertas relacionadas aos aspectos não perturbativos da teoria de cordas [29]. Uma delas foi a descoberta de que a teoria admite

[3]Para espaços não-triviais a solução a seguir pode não ser válida globalmente. Ver apêndice C, Lema de Poincaré.

uma variedade de excitações não-perturbativas, chamadas $p-$branas [14], em adição às cordas que já faziam parte de seu espectro. A letra p denota o número de dimensões espaciais da excitação. Assim, nesta linguagem, uma partícula pontual é uma 0-brana, uma corda é uma 1-brana, uma membrana uma 2-brana e assim por diante.

Para que um estudo perturbativo seja coerente é necessário que o parâmetro de expansão utilizado seja menor do que a unidade. Em teoria de cordas o parâmetro de expansão é a constante de acoplamento das cordas g_s e portanto, para a realização de cálculos perturbativos bastante acurados, é necessário considerar casos onde $g_s \to 0$. Nestas situações, a tensão (ou densidade de energia) das membranas diverge quando $g_s \to 0$ e portanto apenas um estudo não perturbativo poderia de fato atestar a existência de tais objetos.

Ao longo desta tese, assumiremos a hipótese de que todas as branas, em suas diversas dimensionalidades possíveis, constituem objetos fundamentais da natureza que podem tanto ser produzidos durante as flutuações quânticas do espaço-tempo na escala de Planck [30], como também podem aparecer como sólitons de teorias de cordas e teoria M [14]. Usaremos a hipótese da "democracia das branas", conceito introduzido por Townsend num estudo sobre propriedades não perturbativas da teoria de cordas [31], que para nós simplesmente significará dizer que todas as branas têm a mesma "importância", justificando o estudo desses objetos estendidos e suas possíveis interações.

O caráter geométrico das formas diferenciais é ilustrado claramente na sua utilização para a descrição das correntes associadas aos volumes de mundo das $p-$branas. Para uma melhor compreensão veremos primeiramente o caso de uma 0-brana[4].

[4]É importante no que segue ter em mente os resultados matemáticos disponíveis nos apêndices.

2.3.1 Descrição de uma 0-brana

A trajetória de uma partícula pontual no espaço-tempo M produz uma variedade unidimensional Σ_1 denominada linha de mundo da partícula [29, 32, 33], que é descrita por funções X^μ. Pontos no espaço-tempo Minkowskiano $(d+1)$-dimensional M são denotados por x^μ. O elemento de linha invariante de Lorentz é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu. \tag{2.15}$$

A ação da brana está justamente associada ao "comprimento"[5] de sua trajetória, ou seja,

$$S_0 = -m\int_{\Sigma_1} ds, \tag{2.16}$$

sendo m a massa da brana. Podemos reescrever essa ação usando as funções $X^\mu(\tau)$

$$S_0 = -m\int_{\Sigma_1} d\tau\sqrt{-g_{\mu\nu}(X(\tau))\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}}, \tag{2.17}$$

sendo τ um parâmetro real que varia monotonamente ao longo da linha de mundo. Pode-se notar que ação acima é invariante por reparametrizações $\tau \to \tau(\tilde{\tau})$ da linha de mundo desde que $\tau(\tilde{\tau})$ seja suave e monótona crescente ($\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} > 0$).

A ação (2.17) apresenta dois fatos bastante inconvenientes: ela não é definida para uma partícula sem massa e sua quantização é problemática devido a presença da raiz quadrada. É possível contornar essas dificuldades [13] notando que classicamente (2.17) é equivalente a ação

$$S = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} d\tau\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}g_{\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau} + \gamma(\tau)m^2\right), \tag{2.18}$$

onde $\gamma(\tau)$ é um campo auxiliar. De fato, tomando variações de (2.18) com respeito a $\gamma(\tau)$ obtemos a condição $\gamma(\tau)^2m^2 = \frac{dX_\mu}{d\tau}\frac{dX^\mu}{d\tau}$ que ao ser utilizada em (2.18) recupera a ação original (2.17). Essa nova ação é quadrática (o que facilita sua quantização, por exemplo, através de integrais de trajetória) e bem definida no limite $m \to 0$.

[5] Essa quantidade seria de fato o comprimento da linha se estivéssemos num espaço-tempo euclideano.

2.3.2 Descrição das p−branas

Podemos agora estender esta análise feita para a partícula pontual massiva na intenção de descrever uma p−brana de tensão T_p [14, 29, 34]. O volume de mundo $(p+1)$−dimensional (orientável) $\Sigma_{p+1} \subset \Omega_{p+1}(M)$[6] gerado pelo movimento da p−brana é definido pelas equações paramétricas $X^\mu = X^\mu(\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^p)$, onde o índice $\alpha = 0, \ldots, p$ indica as p+1 coordenadas σ^α do volume de mundo da p−brana e o índice $\mu = 0, \ldots, d$ indica as $(d+1)$ coordenadas x^μ de M. Vimos que para uma 0-brana sua ação estava associada à sua linha de mundo que é o mais simples objeto geométrico (no sentido de ser invariante por reparametrizações) invariante de Lorentz disponível neste caso. Generalizando esta idéia, é natural estabelecer que a ação de uma p−brana esteja associada ao seu volume de mundo, sendo proporcional à forma volume (C.16) desta variedade [13, 14, 29, 34]

$$S_p = -T_p \int_{\Sigma_{p+1}} *1 = -T_p \int_{\Sigma_{p+1}} \sqrt{|g_{ab}(\sigma)|}d^{p+1}\sigma \tag{2.19}$$

onde $|g_{ab}(\sigma)|$ é o determinante da métrica induzida em Σ_{p+1}. Esta é a generalização da ação de Nambu-Goto [13] para descrição de cordas. A tensão T_p é interpretada como massa por unidade de volume da p−brana de modo que, para a 0-brana, teremos apenas a massa m.

É possível encontrar uma ação quadrática equivalente classicamente a (2.19), a ação de Polyakov [13], porém nesta tese manteremos como ação das branas as do tipo Nambu-Goto.

2.3.3 Correntes de p−branas

Como exemplo, vamos voltar ao caso de uma 0-brana carregada num espaço M quadridimensional. Como vimos anteriormente, a linha de mundo dessa brana define

[6] Ver apêndice C.

uma variedade unidimensional Σ_1. Tendo como base o usual conceito de corrente elétrica [22], a uma 0-brana de carga e devemos associar uma corrente elétrica $J_1(x) = J_\mu(x)dx^\mu$ na qual

$$J^\mu(x) = e\int_{\Sigma_1} dX^\mu \delta^4[x-X] = e\int_{\Sigma_1} d\tau \frac{dX^\mu}{d\tau}\delta^4[x-X(\tau)], \tag{2.20}$$

onde $\delta^d[x-X(\tau)]$ assegura que a corrente em x desapareça a menos que a brana esteja passando através deste ponto; essencialmente J_1 é uma delta de Dirac sobre a variedade sem fronteira Σ_1. Generalizando esta idéia para $(p+1)-$correntes, podemos dizer que estas devem ser deltas sobre as variedades Σ_{p+1}. De fato, seja Σ_{p+1} uma variedade imersa em M que é o volume de mundo de uma $p-$brana de carga e_p[7]. Pela dualidade de Poincaré (ver apêndice C), associa-se a essa hipersuperfície Σ_{p+1} uma $(d-p)-$corrente $PD(\Sigma_{p+1}) = *J_{p+1}$ com componentes dadas por

$$J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}(x) = e_p\int_{\Sigma_{p+1}} \delta^{d+1}(x-X)dX^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} \tag{2.21}$$

e que satisfaz as importantes propriedades:

- $PD(\Sigma_{p+1}) = *J_{p+1}$ é tal que $\forall A_{p+1}\in\Lambda^{p+1}(M)$

$$\int_{\Sigma_{p+1}} A_{p+1} = \int_M *J_{p+1}A_{p+1}, \tag{2.22}$$

que é o conhecido termo de acoplamento mínimo [35].

- A relação entre Σ_{p+1} e sua fronteira $\partial\Sigma_{p+1}$ é mapeada em

$$PD(\partial\Sigma_{p+1}) = (-1)^{d-p}d(PD(\Sigma_{p+1})). \tag{2.23}$$

Então, a ação envolvendo uma $0-$brana acoplada a um campo de calibre A_1 pode ser

[7]Essa carga pode ser pensada como uma generalização da usual carga elétrica e de uma 0-brana, quantificando seu acoplamento com o campo de calibre.

escrita como

$$S = S_0 - \int_{\Sigma_1} A_1 - \frac{1}{2}(F_2(A_1), F_2(A_1)), \tag{2.24}$$

e no caso geral envolvendo uma $p-$brana teremos

$$S = S_p + (-1)^{p(d+1)+d} \int_{\Sigma_{p+1}} A_{p+1} - \frac{1}{2}(F_{p+2}(A_{p+1}), F_{p+2}(A_{p+1})), \tag{2.25}$$

sendo $F_{p+2}(A_{p+1}) = dA_{p+1}$ (C.10).

2.3.4 Conservação das $(p+1)-$correntes de de Rham

Através do teorema de Poincaré é simples demonstrar que a $(p+1)-$corrente J_{p+1} associada ao volume de mundo Σ_{p+1} de uma $p-$brana fechada é conservada. De fato, se a brana é fechada isso implica que $\partial\Sigma_{p+1} = 0$ e, usando (C.57), vemos que $d(PD(\Sigma_{p+1})) = d(*J_{p+1}) = 0 \Longrightarrow \delta J_{p+1} = 0$, que é a expressão usual para conservação de correntes.

A conservação de carga é melhor visualizada através de uma formulação integral. Considere uma subvariedade Υ_{d-p} (do tipo espaço) que intercepta Σ_{p+1} $(\partial\Sigma_{p+1} = 0)$ num número finito de pontos. Essa afirmação é descrita, via dualidade de Poincaré, pela expressão

$$q_p(\Upsilon_{d-p}) = \int_{\Upsilon_{d-p}} *J_{p+1} = e_p I(\Upsilon_{d-p}, \Sigma_{p+1}) \tag{2.26}$$

onde $I(\Upsilon_{d-p}, \Sigma_{p+1})$ é o número de interseções entre as superfícies (C.58) e portanto $q_p(\Upsilon_{d-p}) = ne_p (n \in Z)$ pode ser considerada como a carga total existente na hipersuperfície Υ_{d-p}. Para entender sua conservação nesta visão integral, considere que façamos uma "medição" da carga sobre a hipersuperfície $\Upsilon_{d-p}(t_0)$ (definida em $t = 0$) e sobre $\Upsilon_{d-p}(t_0 + \Delta t)$ num tempo infinitesimalmente posterior, obtendo respectivamente as cargas $q_p(t_0)$ e $q_p(t_0 + \Delta t)$. Podemos também considerar que $q_p(\Upsilon_{d-p}(t_0 + \Delta t)) = q_p(\Upsilon_{d-p}(t_0)) + \Delta t q_p(\partial V_{d-p+1})$, sendo V_{d-p+1} o volume infinitesimal varrido pela evolução de $\Upsilon_{d-p}(t_0)$. Então

$$q_p(t_0+\Delta t) - q_p(t_0) = \Delta t \int_{\partial V_{d-p+1}} *J_{p+1} \Longrightarrow \frac{dq_p(t)}{dt} = \int_{V_{d-p+1}} d * J_{p+1} = 0, \tag{2.27}$$

o que mostra claramente a relação entre conservação de carga e a topologia das branas. No presente caso envolvendo apenas acoplamentos mínimos branas fechadas terão suas cargas conservadas e conseqüentemente a simetria de calibre presente no termo de Maxwell (generalizado) da ação (2.25) será uma simetria de toda a teoria.

2.4 Introdução de branas magnéticas

As equações de movimento para A_{p+1} que seguem da ação

$$S = S_p + (-1)^{p(d+1)+d} \int_{\Sigma^e_{p+1}} A_{p+1} - \frac{1}{2}(F_{p+2}(A_{p+1}), F_{p+2}(A_{p+1})) \tag{2.28}$$

são

$$d * F_{p+2} = *J_{p+1}, \tag{2.29}$$

sendo $*J_{p+1}$ a corrente elétrica da $p-$brana carregada cujo volume de mundo é denotado por Σ^e_{p+1}. A identidade de Bianchi agora se torna

$$dF_{p+2} = d^2 A_{p+1} = 0. \tag{2.30}$$

Nesta ação acima, as branas envolvidas se acoplam minimamente ao potencial A_{p+1} e por isso dizemos que elas constituem fontes do tipo elétricas para o campo A_{p+1} [35]. Para discussão de dualidade, postulamos a existência de uma $(d-p-3)$-brana (dita a brana magnética associada ao campo A_{p+1}) que tem como volume de mundo uma hipersuperfície $(d-p-2)-$dimensional Σ^m_{d-p-2} tal que $PD(\Sigma^m_{d-p-2}) = *K_{d-p-2}$ e que obedece a equação

$$dF_{p+2} = *K_{d-p-2}. \tag{2.31}$$

K_{d-p-2} é da forma (2.21) sendo que a carga presente nesse caso é a carga magnética g_{d-p-3}. É importante observar que estamos considerando apenas branas fechadas, ou seja, $d * J_{p+1} = d * K_{d-p-2} = 0$.

A presença de K_{d-p-2} modifica bastante a estrutura da teoria. De fato, podemos ver que (2.31) impossibilita a "solução" da identidade de Bianchi $F_{p+2} = dA_{p+1}$. De fato, considerando uma subvariedade $V_{p+3} \subset M$ (que intercepta a brana magnética uma única vez e $\partial V_{p+3} \neq 0$), vemos que

$$\int_{V_{p+3}} dF_{p+2} = \int_{\partial V_{p+3}} F_{p+2} = \int_{V_{p+3}} *K_{d-p-2} = g_{d-p-3} \neq 0. \tag{2.32}$$

É fácil ver que se $F_{p+2} = dA_{p+1}$ a carga deveria ser necessariamente zero. Para resolver este problema quanto à definição do F_{p+2} usamos o fato de que a brana é fechada (a corrente magnética é conservada, $d * K_{d-p-2} = 0$) para definirmos uma hipersuperfície M^m_{d-p-1} (dita brana de Dirac [19]) tal que $\partial M^m_{d-p-1} = \Sigma^m_{d-p-2}$ e $PD(M^m_{d-p-1}) = *G_{d-p-1}$ ou, numa forma mais explícita,

$$G^{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}}(x) = g_{d-p-3} \int_{M^m_{d-p-1}} \delta^{d+1}(x - Z) dZ^{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}}, \tag{2.33}$$

sendo a imersão $i : M^m_{d-p-1} \to M$ localmente definida por $Z^\mu = Z^\mu(\zeta^a)$ onde ζ^a são as $(d-p-1)-$coordenadas sobre M^m_{d-p-1} e x^μ coordenadas de M. Por construção, essa corrente obedecerá a seguinte relação

$$(-1)^{(p+1)} d * G_{d-p-1} = *K_{d-p-2} = 0. \tag{2.34}$$

É simples ver que nesta situação devemos modificar o F_{p+2} para

$$F_{p+2}(A_{p+1}) = dA_{p+1} + (-1)^{(p+1)} * G_{d-p-1} \tag{2.35}$$

de modo que (2.31) seja válida. O campo F_{p+2} é bem definido em todo o espaço[8] porém o potencial A_{p+1} é singular sobre a brana de Dirac. Essa situação é bem conhecida no

[8] Excluindo as singularidades essenciais.

eletromagnetismo em (3+1)-dimensões onde essa região de singularidade para o A_1 está associada à folha de mundo descrita pela corda de Dirac [19] que está presa ao monopólo magnético.

Decorre de sua definição que a brana de Dirac contém uma arbitrariedade: existem infinitas hipersuperfícies semelhantes à M^m_{d-p-1} que têm Σ^m_{d-p-2} como fronteira. De fato, duas branas M^m_{d-p-1} e $\widetilde{M}^m_{d-p-1}$ com fronteira em Σ^m_{d-p-2} tais que $\widetilde{M}^m_{d-p-1} = M^m_{d-p-1} + \partial V_{d-p}$, para algum $V_{d-p} \subset M$, são totalmente equivalentes. Essa equivalência é descrita em termos das correntes da seguinte forma

$$*\widetilde{G}_{d-p-1} = *G_{d-p-1} + (-1)^p d * H_{d-p}, \tag{2.36}$$

onde $PD(\widetilde{M}^m_{d-p-1}) = *\widetilde{G}_{d-p-1}$, $PD(M^m_{d-p-1}) = *G_{d-p-1}$ e $PD(V_{d-p}) = *H_{d-p}$. Portanto, escolher uma determinada brana de Dirac não deve gerar efeitos físicos observáveis. É importante notar que essa condição impõe que ao mudarmos a brana de Dirac $M^m_{d-p-1} \to M^m_{d-p-1} + \partial V_{d-p}$, para que F_{p+2} não se transforme, devemos modificar o potencial $A_{p+1} \to A_{p+1} + *H_{d-p}$. Essas transformações são conhecidas como transformações magnéticas [36] ou transformações de calibre singulares.

2.5 Ação envolvendo branas elétricas e magnéticas

A ação (2.28) contém apenas branas elétricas. Para obtermos as equações (2.29) e (2.31) é necessário utilizarmos o novo F_{p+2} dado por (2.35). A ação total, incluindo uma ação tipo Nambu-Goto S_{d-p-3} para a brana magnética, será

$$S = S_p + S_{d-p-3} + (-1)^{(p)(d+1)+d} \int_{\Sigma^e_{p+1}} A_{p+1} - \frac{1}{2}(F_{p+2}(A_{p+1}), F_{p+2}(A_{p+1})). \tag{2.37}$$

2.5.1 Veto de Dirac

Ao variarmos infinitesimalmente a posição $Z^{\mu}(\zeta^{a})$ da brana de Dirac, mantendo sua fronteira intacta, geramos uma hipersuperfície infinitesimal V_{d-p} tal que as variações da brana $\delta M^{m}_{d-p-1} = \partial V_{d-p}$ e $PD(V_{d-p}) = *H_{d-p}$. Tomando as demais variáveis como sendo fixas vemos que essa mudança produzirá a seguinte variação na ação (2.37)

$$\delta_{z} S = (-1)^{p} \int_{V_{d-p}} d * F_{p+2}. \tag{2.38}$$

Para que as equações obtidas ao extremizarmos a ação com respeito a A_{p+1} e $*G_{d-p-1}$ mantenham uma relação consistente, é necessário impor o veto de Dirac que estabelece que uma brana de Dirac nunca pode interceptar uma brana elétrica. Isto é visto da seguinte forma: impondo $\delta_{z} S = 0$ e usando (2.29) vemos que

$$\int_{V_{d-p}} *J_{p+1} = 0 \tag{2.39}$$

que é justamente a afirmativa contida no veto. Essencialmente estamos dizendo que as equações de movimento para a brana de Dirac são conseqüências de outras equações já estabelecidas, não sendo portanto equações dinâmicas. Isso está de acordo com a exigência de não observabilidade da brana de Dirac. Outro importante fato associado ao veto é que as equações de movimento para as branas elétricas e magnéticas tomam sua forma usual somente quando ele é válido [34].

2.5.2 Condição de quantização de Dirac

O conjunto de transformações magnéticas citado anteriormente $M^{m}_{d-p-1} \to M^{m}_{d-p-1} + \partial V_{d-p}$ e $A_{p+1} \to A_{p+1} + *H_{d-p}$, sendo $PD(V_{d-p}) = *H_{d-p}$, deve ser uma simetria da ação (2.37). Realizando estas transformações, vemos que a ação sofre uma alteração de

$$\delta S = (-1)^{p(d+1)+d} \int_{\Sigma^{e}_{p+1}} *H_{d-p} = (-1)^{p(d+1)+d} L(\Sigma^{e}_{p+1}, \partial V_{d-p}), \tag{2.40}$$

onde $L(\Sigma^e_{p+1}, \partial V_{d-p})$ é o linking number[9] para estas hipersuperfícies. Dado que isto representa uma quantidade puramente topológica, vemos que esta operação é uma simetria da teoria clássica. Porém, ao analisarmos esta transformação no domínio quântico (numa quantização via integrais de trajetória [37]), essa alteração na ação define uma anomalia [38], a chamada anomalia de Dirac A_D discutida por Lechner e Marchetti em [39] e, de forma independente, por Kleinert em [36]. De uma forma geral, esta anomalia é definida como a variação da ação perante a mudanças na brana de Dirac (transformações magnéticas) [39]. Mais explicitamente, essas transformações produzirão uma variação $\delta S = A_D$ tal que

$$S \to S + A_D \Longrightarrow e^{iS} \to e^{iS+iA_D}. \tag{2.41}$$

Para que a teoria quântica fique livre de inconsistências é necessário que

$$A_D = 2\pi n,\ n \in Z \tag{2.42}$$

e portanto, para esta ação que estamos discutindo, teremos

$$A_D = (-1)^{p(d+1)+d} L(\Sigma^e_{p+1}, \partial V_{d-p}). \tag{2.43}$$

Impondo a condição de consistência (2.42) e usando do fato de que $L(\Sigma^e_{p+1}, \partial V_{d-p})$ é um número inteiro obtemos a famosa condição de quantização de Dirac [19, 35]

$$e_p g_{d-p-3} = 2\pi n,\ n \in Z, \tag{2.44}$$

ao fatorarmos as cargas elétricas e magnéticas e_p, g_{d-p-3} presentes nas definições das correntes. Esta é a generalização para branas da condição de quantização envolvendo a carga elétrica e a magnética em (3+1)-dimensões encontrada por Dirac [19].

[9] Ver apêndice C.

2.6 Dualidade envolvendo branas elétricas e magnéticas

Faremos um procedimento similar ao que foi introduzido na seção anterior quando obtivemos a ação dual (2.14) no caso quadridimensional sem fontes. Trataremos da situação na qual existem apenas uma $p-$brana elétrica e uma $(d-p-3)-$brana magnética (sua generalização envolvendo mais branas de cada tipo é direta). Partiremos da ação

$$S(A_{p+1}) = -\frac{1}{2}(F_{p+2}(A_{p+1}), F_{p+2}(A_{p+1})) + (-1)^p(A_{p+1}, J_{p+1}) \tag{2.45}$$

onde $F_{p+2}(A_{p+1}) = dA_{p+1} + (-1)^{p+1} *G_{d-p-1}$. Todas os resultados anteriores com respeito às correntes bem como o veto e a condição de quantização entre as cargas são consideradas válidas. Seguindo nossos passos anteriores, introduzimos um campo auxiliar Π_{p+2} de forma a reduzir a ordem de (2.45), ou seja, $S(A_{p+1}) \to S(A_{p+1}, \Pi_{p+2})$ sendo

$$\begin{aligned} S(A_{p+1}, \Pi_{p+2}) &= -(\Pi_{p+2}, dA_{p+1} + (-1)^{p+1} * G_{d-p-1}) + \frac{1}{2}(\Pi_{p+2}, \Pi_{p+2}) \\ &+ (-1)^p(A_{p+1}, J_{p+1}). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Eliminando Π_{p+2} usando suas equações de movimento reobtemos a ação original (2.45). Usando a propriedade (C.30) do operador δ obtemos

$$\begin{aligned} S(A_{p+1}, \Pi_{p+2}) &= -(\delta\Pi_{p+2}, A_{p+1}) + (-1)^p(\Pi_{p+2}, *G_{d-p-1}) \\ &+ \frac{1}{2}(\Pi_{p+2}, \Pi_{p+2}) + (-1)^p(J_{p+1}, A_{p+1}). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Podemos reconhecer agora que o potencial A_{p+1} se tornou um multiplicador de Lagrange, impondo a condição $d * \Pi_{p+2} = *J_{p+1}$. Para resolvermos esta equação usamos o fato de que a brana elétrica é fechada (a corrente elétrica é conservada, $d * J_{p+1} = 0$), o que torna possível definirmos uma hipersuperfície M^e_{p+2} (dita brana de Dirac elétrica) tal que $\partial M^e_{p+2} = \Sigma^e_{p+1}$ e $PD(M^e_{p+2}) = *T_{p+2}$ ou, numa forma mais explícita,

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_{p+2}}(x) = e_p \int_{M^e_{p+2}} \delta^{d+1}(x - Y) dY^{\mu_1 \cdots \mu_{p+2}}, \tag{2.48}$$

sendo a imersão $i : M^e_{p+2} \to M$ localmente definida por $Y^\mu = Y^\mu(\varsigma^a)$, onde ς^a são as $(p+2)$−coordenadas sobre M^e_{p+2} e x^μ coordenadas de M. Por construção, essa corrente obedecerá a seguinte relação

$$(-1)^{(d-p)} d * T_{p+2} = *J_{p+1}. \tag{2.49}$$

Como sempre estamos considerando espaços topologicamente triviais, esta equação para o campo Π_{p+2} é resolvida usando a brana de Dirac elétrica de forma que

$$d * \Pi_{p+2} = *J_{p+1} = (-1)^{(d-p)} d * T_{p+2} \tag{2.50}$$

tem como solução

$$*\Pi_{p+2} = d\tilde{A}_{d-p-2} + (-1)^{(d-p)} * T_{p+2}, \tag{2.51}$$

envolvendo o novo campo $\tilde{A}_{d-p-2}$. Substituindo essa solução em (2.47) teremos uma nova ação escrita apenas em termos de $\tilde{A}_{d-p-2}$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{A}_{d-p-2}) &= (-1)^{p(d-p)}(d\tilde{A}_{d-p-2} + (-1)^{(d-p)} * T_{p+2}, G_{d-p-1}) \\ &+ \frac{(-1)^d}{2}(\tilde{F}_{d-p-1}(\tilde{A}_{d-p-2}), \tilde{F}_{d-p-1}(\tilde{A}_{d-p-2})), \end{aligned} \tag{2.52}$$

sendo

$$\tilde{F}_{d-p-1}(\tilde{A}_{d-p-2}) = d\tilde{A}_{d-p-2} + (-1)^{(d-p)} * T_{p+2}. \tag{2.53}$$

É importante destacar que

$$(*T_{p+2}, G_{d-p-1}) = e_p g_{d-p-3} I(M^e_{p+2}, M^m_{d-p-1}) = 2\pi N, \tag{2.54}$$

onde $N \in Z$ devido a condição de Dirac (2.44) e ao fato de que $I(M^e_{p+2}, M^m_{d-p-1})$ representa o número de interseções entre as branas de Dirac elétrica e magnética[10], sendo portanto um número inteiro. Logo, esse termo da ação não contribuirá classicamente nem

[10] Ver apêndice C.

quanticamente pois $e^{i2\pi N} = 1$, podendo ser ignorado completamente. Usando (2.34) é possível reescrever o primeiro termo de (2.52) como

$$(-1)^{(d+1)p+d}(\tilde{A}_{d-p-2}, K_{d-p-2}), \tag{2.55}$$

evidenciando o fato de que a brana magnética estará minimamente acoplada ao campo $\tilde{A}_{d-p-2}$. A nova ação, dual a (2.45), será portanto

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\tilde{A}_{d-p-2}) &= \frac{(-1)^d}{2}(\tilde{F}_{d-p-1}(\tilde{A}_{d-p-2}), \tilde{F}_{d-p-1}(\tilde{A}_{d-p-2})) \\ &\quad (-1)^{(d+1)p+d}(\tilde{A}_{d-p-2}, K_{d-p-2}).\end{aligned} \tag{2.56}$$

Podemos notar alguns aspectos interessantes nesta transformação de dualidade. Tanto o campo original A_{p+1} quanto o campo dual $\tilde{A}_{d-p-2}$ têm $\binom{d-1}{p+1} = \frac{(d-1)!}{(p+1)!(d-p-2)!}$ graus de liberdade. A preservação do número de graus de liberdade é um requisito básico que qualquer transformação de dualidade deve preservar. A $p-$brana que se acoplava minimamente ao campo A_{p+1} na ação inicial (2.45) agora se acopla magneticamente ao campo dual $\tilde{A}_{d-p-2}$ na ação dual (2.56) e a $(d-p-3)-$brana que se acoplava magneticamente ao campo A_{p+1} agora se acopla minimamente ao $\tilde{A}_{d-p-2}$. Usando a condição de Dirac (2.44) podemos notar que houve uma inversão na intensidade dos acoplamentos. De fato, se $e_p << 1$ a condição de Dirac impõe que $g_{d-p-3} >> 1$ e portanto se na teoria original (2.45) a $p-$brana está acoplada fracamente e a $(d-p-3)-$brana acoplada fortemente na teoria dual ocorre justamente o inverso. Essa troca de papéis entre as branas e a inversão da intensidade dos acoplamentos são marcas registradas das transformações de dualidade [1]. É importante reforçar que esta propriedade, conhecida como dualidade S em teoria de cordas [13, 29], têm origem quântica (note o aparecimento de $\hbar$ em (2.8)) [1].

Fica claro que, devido a dualidade, dizer se uma brana é elétrica ou magnética é completamente relativo. Porém, manteremos a definição de que numa dada ação a forma do acoplamento nomeia a brana como elétrica (acoplamento mínimo) ou magnética (não mínimo).

Capítulo 3

Condensação de branas e dualidade

3.1 Introdução

Em geral, uma análise sobre transições de fase decorrentes da condensação de defeitos topológicos envolve duas importantes etapas. Inicialmente, é necessário saber qual espécie de defeito topológico pode condensar e sob quais condições (temperatura, constantes de acoplamento e etc) isto deve acontecer. Em seguida, deve-se estabelecer as novas propriedades físicas apresentadas pelo sistema nesta nova fase condensada. Enquadra-se nesse esquema a transição de Kosterlitz-Thouless [40], um dos exemplos mais conhecidos no qual a condensação de defeitos topológicos (neste caso vórtices) acarreta em transições de fase.

Julia e Toulouse abordaram este tipo de problema há muito tempo atrás [41], num contexto relacionado à descrição de sistemas ordenados [42]. Essencialmente, eles consideraram que na situação onde há uma distribuição contínua destes defeitos as flutuações deste condensado que possuem grandes comprimentos de onda correspondem a novos graus de liberdade que devem ser descritos pela teoria efetiva de baixas energias que modela o sistema. Seguiremos a ordem disposta no trabalho de Quevedo e Trugenberger [17] (nossa principal referência para este assunto), apresentando inicialmente a prescrição de Julia-Toulouse da forma que foi concebida para o tratamento de sistemas ordenados para em seguida desenvolvermos sua correspondente generalização e aplicação em teorias de campo de p-formas.

3.2 Prescrição de Julia-Toulouse para sistemas ordenados

Numa descrição efetiva de sistemas ordenados, as excitações de baixa energia presentes são genericamente descritas por uma teoria de campo para um parâmetro de ordem [43] que possui um dado grupo de simetria G. A descrição da supercondutividade via teoria de Ginzburg-Landau [28, 33] constitui um bom exemplo disto. Além de modos propagantes, soluções clássicas massivas correspondendo aos possíveis defeitos topológicos existentes no sistema também devem estar presentes nesta descrição. Em geral estes defeitos aparecem devido a quebra espontânea de simetria do grupo $G \to H$, e são classificados através dos grupos de homotopia $\Pi_p(G/H)$ [44]. Estes grupos, quando não triviais (e $p < d$), descrevem sólitons de dimensão $d-p-1$ que são caracterizados por uma escala de comprimento da ordem de $1/M$, sendo M a massa associada à quebra espontânea de simetria ocorrida. Do ponto de vista de nossa teoria efetiva de baixas energias com grupo de simetria H, válida em escalas de energia bem menores do que M, estes sólitons podem ser vistos como singularidades tipo delta de dimensão $d-p-1$ em $\mathcal{R}^d$ (para sólitons[1]) nas quais a teoria adotada não é bem definida. É importante destacar que apesar dos sólitons constituírem objetos massivos não singulares, numa descrição efetiva para baixas energias como a nossa as escalas de comprimento utilizadas são bem maiores do que as que os caracterizam (essencialmente dada por $1/M$), não sendo portanto possível a verificação da grande maioria de suas propriedades. Colocando esta afirmação em termos mais familiares, estaremos interessados em escalas de energia nas quais o monopólo de

[1]Singularidades pontuais em $\mathcal{R}^{d+1}$ para instantons.

t'Hooft-Polyakov pode ser visto como um monopólo de Dirac. O primeiro possui por exemplo uma massa bem definida[2] enquanto que para o monopólo de Dirac tal informação não é conhecida.

Apenas defeitos topológicos estáveis ($\Pi_p(G/H) = Z$) são considerados, aos quais associa-se o invariante topológico

$$I = \int_{S_p} F_p \tag{3.1}$$

onde S_p é uma hipersuperfície $p-$dimensional sem fronteira (por exemplo uma esfera $p-$dimensional) que envolve a singularidade. Fora dessa esfera $F_p = dA_{p-1}$, sendo portanto simples demonstrar que $I = 0$ neste domínio[3]. De fato, nestas regiões S_p pode ser considerada fronteira de um hipervolume $V_{p+1} \subset \mathcal{R}^{p+1}$, ou seja, $S_p = \partial V_{p+1}$. Usando o teorema de Stokes (C.25) teremos que

$$I = \int_{S_p = \partial V_{p+1}} F_p = \int_{V_{p+1}} dF_p = 0 \tag{3.2}$$

pois $d^2 = 0$ (C.13). Este número real I funciona como uma espécie de sonda capaz de detectar a presença de defeitos pois ele é não-nulo somente nas regiões que os contém. Na situação onde há um número finito de defeitos a teoria efetiva é válida somente nas regiões onde $I = 0$ e portanto quanto maior for a quantidade de defeitos mais complicada se torna a variedade na qual esta teoria está bem definida. Um objeto importante na descrição dessa situação, e que está associado ao I, é a $(p+1)-$corrente de Rham $*K_{d-p} = dF_p$ usada para descrever os defeitos. Como correntes de Rham, ao considerarmos todo o $\mathcal{R}^{d+1}$ como sendo seu domínio, estas correntes serão singularidades tipo delta nas regiões que contém os defeitos, sendo topologicamente conservadas (para o caso de $(d-p-1)-$branas fechadas). Podemos reconhecer estas correntes como sendo as correntes dos "monopólos

[2] Através das equações de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) [45].

[3] Os campos F_p e A_{p-1} são construídos em termos dos campos fundamentais existentes na teoria efetiva.

magnéticos" (branas magnéticas) estudadas no capítulo anterior.

Na situação em que há um contínuo de defeitos formando um condensado de densidade finita, Julia e Toulouse propuseram que o campo F_p deve ser elevado a condição de um campo fundamental que estará associado aos novos graus de liberdade surgidos devido a condensação. Nesta fase, a teoria envolvendo F_p é bem definida para todo $\mathcal{R}^{d+1}$ e as correntes $*K_{d-p}$ se tornam campos suaves que descrevem as flutuações deste condensado de defeitos. Estas flutuações constituem os novos graus de liberdade oriundos do processo de condensação e, dado que $*K_{d-p} = dF_p$, podemos notar que eles são insensíveis perante transformações de calibre para o campo F_p

A construção de Julia e Toulouse permite identificar estes novos graus de liberdade porém neste contexto de sistemas ordenados não é simples obter a dinâmica destes novos modos e o seu respectivo acoplamento com os campos originais presentes anteriormente na teoria. Veremos que estas idéias se tornam bem mais simples quando aplicadas em teorias de campo relativísticas envolvendo p-formas compactas, onde será possível escrever uma ação efetiva que descreverá o sistema nesta fase com uma densidade finita de defeitos topológicos.

3.3 Aplicação da prescrição de Julia-Toulouse para teorias de campo de p-formas

Consideraremos agora teorias de campo relativísticas definidas em $(d+1)-$dimensões que apresentam em seu limite de baixas energias $(p-1)$-formas A_{p-1} compactas [46] como campos fundamentais e que possuem invariância de calibre perante as transformações $A_{p-1} \rightarrow A_{p-1} + d\lambda_{p-2}$. Estaremos interessados em ações do tipo

$$S = S_{p-2} + \frac{(-1)^{p-1}}{2e^2}(dA_{p-1}, dA_{p-1}) + k_{p-2}\int_{\Sigma^*_{p-1}} A_{p-1}, \tag{3.3}$$

sendo Σ^{e}_{p-1} o volume de mundo de uma $(p-2)-$brana elétrica[4] fechada descrita pela ação de Nambu-Goto S_{p-2} e k_{p-2} a sua carga (explicitada aqui visando uma maior clareza do processo de condensação). Na ausência de correntes, a ação para A_{p-1} descreve um total de $\binom{d-1}{p-1}$ graus de liberdade não massivos. Por conveniência, definimos a dimensão de A_{p-1} como sendo $\frac{(d-1)}{2}$ de modo que a constante e^2 seja adimensional. A presença de termos fixadores de calibre nesta ação, necessários para a quantização, fica subentendida e não será explicitada.

O fato de A_{p-1} ser compacto assegura a presença de defeitos topológicos $(d-p-1)-$dimensionais [46] e podemos notar que neste caso[5] o invariante topológico I (3.1) pode ser formulado diretamente fazendo $F_p = dA_{p-1}$ nas regiões livres de singularidades. Dado que I pode ser definido através de uma relação relação linear envolvendo o campo fundamental A_{p-1} da teoria, podemos notar que a versão relativística da prescrição de Julia-Toulouse é de certa forma mais simples do que a situação que encontramos anteriormente na descrição de sistemas ordenados onde o campo A_{p-1} relacionado ao I não era fundamental (ele era apenas uma função dos outros campos considerados fundamentais). A condensação de defeitos gerará novos modos de baixa energia que serão descritos pela parte invariante de calibre de F_p, considerado agora como um novo campo independente do campo original A_{p+1}, não sendo portanto válida nessa fase a relação $F_p = dA_{p-1}$.

Um parâmetro importante para a descrição da condensação é a densidade do condensado ρ. Esta nova quantidade é definida como a densidade média de interseções entre uma hipersuperfície $(p+1)-$dimensional e as $(d-p-1)-$branas que formam o condensado. Desde que ρ tem dimensão de $(\text{massa})^{p+1}$, podemos dizer que a condensação introduziu uma nova escala Λ na teoria, que é essencialmente dada por $\Lambda \propto \rho^{1/p+1}$ [17].

[4] Estamos usando a convenção estabelecida no capítulo anterior de que as branas que se acoplam minimamente ao campo de calibre são ditas elétricas.

[5] Considerando uma situação na qual o número de defeitos é finito.

3.4 Descrição da nova fase do sistema devido à condensação

A nova ação que descreve a fase condensada deve possuir três características fundamentais que limitam bastante a sua forma. A primeira é invariância de calibre. De fato, as transformações

$$A_{p-1} \rightarrow A_{p-1} + d\lambda_{p-2} \tag{3.4}$$

e

$$F_p \rightarrow F_p + d\psi_{p-1} \tag{3.5}$$

devem ser simetrias deste sistema. A segunda propriedade importante é invariância relativística e a terceira trata do limite $\Lambda \rightarrow 0$. Neste limite deve ser possível recuperar a teoria original (3.3) que descreve a fase na qual estes defeitos estão diluídos. Considerando termos até segunda ordem nas derivadas para o campo F_p obtemos a seguinte ação efetiva S_c para a fase condensada

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{(-1)^p}{2\Lambda^2}(dF_p, dF_p) + \frac{(-1)^{p-1}}{2e^2}(F_p - dA_{p-1}, F_p - dA_{p-1}) \\ &+ k_{p-2}\int_{M_p^c}(F_p - dA_{p-1}) + S_{p-2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nesta ação, invariância relativística bem como as duas simetrias de calibre requeridas estão manifestas. De fato, transformações do condensado (3.5) devem estar associadas as transformações (3.4) do campo original. É importante notar que introduzimos em (3.6) uma $p-$brana aberta M_p^c, nos moldes do formalismo desenvolvido no capítulo anterior, de modo que $\partial M_p^c = \Sigma_{p-1}^c$. No limite $\Lambda \rightarrow 0$ as únicas contribuições para o funcional gerador associado à ação (3.6) serão aquelas nas quais $\Omega_{p+1} \equiv dF_p = 0 \Rightarrow F_p = d\psi_{p-1}$ e, dado que podemos redefinir A_{p-1} de modo que ele incorpore ψ_{p-1}, vemos que a ação original (3.3) é recuperada. Note que o setor da ação puramente relacionada à $(p-2)-$brana elétrica,

S_{p-2}, não é alterado pela condensação. A fixação de calibre para (3.6) pode ser realizada absorvendo dA_{p-1} na definição de F_p, gerando uma nova ação escrita exclusivamente em termos de F_p

$$S_c = \frac{(-1)^p}{2\Lambda^2}\left(\Omega_{p+1}, \Omega_{p+1}\right) + \frac{(-1)^{p-1}}{2e^2}\left(F_p, F_p\right) + k_{p-2}\int_{M_p^e} F_p + S_{p-2}, \qquad (3.7)$$

que reconhecemos como sendo uma teoria de Proca [28] para o campo F_p do condensado. Nesta situação, este campo que possui $\binom{d}{p}$ graus de liberdade massivos e suas equações de movimento (na ausência de fontes) são dadas por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) F^{\mu_1 \cdots \mu_p} = 0, \qquad (3.8)$$

sendo $m^2 = \left(\frac{\Lambda}{e}\right)^2$.

É importante destacar que o mecanismo de Julia-Toulouse é justamente o oposto do mecanismo de Higgs para geração de massa de campos vetoriais [47] no qual o campo vetorial adquire massa ao absorver o bóson de Goldstone oriundo da condensação do campo de Higgs. No mecanismo de Julia-Toulouse é o campo do condensado quem "devora" o campo de calibre original adquirindo seus $\binom{d-1}{p-1}$ graus de liberdade e tornando-se massivo. Apesar de descreverem situações físicas aparentemente bem distintas, veremos na próxima seção que o mecanismo de Julia-Toulouse é dual ao mecanismo de Higgs.

Uma importante questão está relacionada à afirmação de que o mecanismo de Julia-Toulouse descreve uma fase de confinamento para as $(p-2)-$branas elétricas iniciais. Não abordaremos esse tópico com profundidade nesta tese porém este fato pode ser demonstrado da seguinte forma: ao integrarmos o campo F_p em (3.7) surgirão termos para a ação efetiva descrevendo interações entre as fontes elétricas $*T_p = PD(M_p^e)$ que, no limite de baixas energias, darão origem a potenciais de confinamento entre branas elétricas estáticas de cargas opostas [17]. Isto generaliza um conhecido resultado de Polyakov [46] que estabelece que a condensação de ínstantons magnéticos em (2+1)-dimensões acarreta em confinamento para cargas elétricas. De fato, este resultado pode ser entendido através do mecanismo de Julia-Toulouse.

3.5 Dualidade entre o mecanismo de Higgs e de Julia-Toulouse

Vimos na seção anterior que no mecanismo de Julia-Toulouse é o novo campo associado ao condensado de defeitos que adquire massa e que nesta situação as branas elétricas presentes após a condensação estarão confinadas. Geração de massa e confinamento nos remete ao modelo criado por Nambu [48] para explicar qualitativamente o confinamento de quarks. Neste modelo um hádron é visto como um par de quarks ligados por uma corda do tipo Nielsen-Olesen [49]. Dado que essa corda possui fluxo magnético e que neste caso ela estaria aberta, para que haja conservação do fluxo magnético, é necessário que suas extremidades sejam monopólos magnéticos de cargas opostas. Nesta visão os quarks possuiriam carga magnética constituindo assim uma espécie de monopólo magnético. Em adição aos quarks, se fazem presentes neste modelo um campo de Higgs complexo ϕ e um campo do tipo eletromagnético A_1. Em geral, ocorrida a condensação do campo de Higgs, o campo A_1 se torna massivo e isso faz com que os campos magnéticos sejam expulsos da região na qual o condensado está presente (processo análogo ao efeito Meissner apresentado por materiais em fases supercondutoras[6]). Porém, é importante lembrar que neste caso esta condensação se dá na presença de monopólos magnéticos (representados pelos quarks) que são fontes de fluxo magnético. Surgirão tubos de fluxo magnético formados por pares de monopólos e anti-monopólos (quarks e anti-quarks), ligados por cordas do

[6]Na verdade os campos magnéticos conseguem penetrar no supercondutor ao longo de uma escala de comprimento conhecida como comprimento de penetração de London [33].

tipo Nielsen-Olesen, de modo que só existirá campo magnético no interior de tais tubos. Pode-se mostrar que a energia para a formação destes tubos é proporcional ao seu comprimento [48], o que explicaria a ausência de monopólos magnéticos isolados pois para separar um monopólo de um anti-monopólo seria necessária uma quantidade infinita de energia (o mesmo raciocínio valeria para o confinamento de quarks). Apesar de ser bastante simples (não existem bárions neste modelo), esta visão fornece uma boa explicação qualitativa para o confinamento de quarks e anti-quarks[7].

Podemos extrair deste modelo para confinamento de quarks a seguinte informação: condensação de cargas elétricas (ϕ é carregado) gera confinamento para cargas magnéticas. Usando nossa linguagem envolvendo branas poderíamos dizer então que a condensação de branas elétricas deve levar ao confinamento de branas magnéticas. Porém, como vimos no capítulo anterior, uma teoria na qual uma dada brana é considerada elétrica possui uma descrição dual na qual esta mesma brana é tida como magnética. Portanto, esse aspecto dual apresentado pelas branas nos leva a conjecturar que o mecanismo de Julia-Toulouse deve ser dual ao mecanismo de Higgs. Isto de fato é verdade e pode ser visto, em termos matemáticos, como conseqüência da dualidade existente entre teorias envolvendo p-formas massivas: uma p-forma massiva F_p, como já vimos anteriormente, possui $\binom{d}{p}$ graus de liberdade. Esta fórmula indica que uma $(d-p)$−forma $\tilde{A}_{d-p}$ massiva também deve ter o mesmo número de graus de liberdade. De fato, a dualidade entre estas teorias pode ser demonstrada através da seguinte ação

$$\begin{aligned} S &= \frac{(-1)^p}{2\Lambda^2}(\Omega_{p+1}, \Omega_{p+1}) + \int_M \Omega_{p+1}(d\tilde{F}_{d-p-1} - \tilde{A}_{d-p}) \\ &+ \frac{(-1)^{p-1}}{2e^2}(F_p - dA_{p-1}, F_p - dA_{p-1}) - \int_M F_p d\tilde{A}_{d-p}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

formulada em termos dos pares duais $A_{p-1}, \tilde{A}_{d-p}$ e $F_p, \tilde{F}_{d-p-1}$ e do campo Ω_{p+1} [17, 51].

[7]Uma descrição mais realística sobre o confinamento de quarks usando analogias com supercondutores deve envolver campos de calibre não abelianos [50].

Esta ação é invariante perante as transformações de calibre

$$F_p \to F_p + d\psi_{p-1}, \tag{3.10}$$

$$A_{p-1} \to A_{p-1} + \psi_{p-1} \tag{3.11}$$

e

$$\tilde{F}_{d-p-1} + \tilde{\psi}_{d-p-1}, \tag{3.12}$$

$$\tilde{A}_{d-p} \to \tilde{A}_{d-p} + d\tilde{\psi}_{d-p-1}. \tag{3.13}$$

Para demonstrar a equivalência desejada, primeiramente resolvemos as equações de movimento para os campos $\tilde{A}_{d-p}$ e $\tilde{F}_{d-p-1}$ mantendo os outros campos fixos. Notando que $d\tilde{F}_{d-p-1}$ pode ser absorvido através de uma redefinição de $\tilde{A}_{d-p}$, as equações para $\tilde{A}_{d-p}$ apenas estabelecem a condição

$$\Omega_{p+1} = (-1)^p dF_p. \tag{3.14}$$

Retornando com (3.14) na (3.9) vemos que esta se torna

$$S_{d-p-1} = \frac{(-1)^p}{2\Lambda^2}(dF_p, dF_p) + \frac{(-1)^{p-1}}{2e^2}(F_p - dA_{p-1}, F_p - dA_{p-1}), \tag{3.15}$$

que é justamente a ação da fase condensada (3.7) na ausência de fontes. Alternativamente, podemos resolver as equações de movimento para os campos A_{p-1}, F_p e Ω_{p+1} mantendo os outros campos fixos. Eliminando dA_{p-1} através de uma redefinição de F_p e resolvendo as equações de movimento restantes obteremos a ação dual à anterior (3.15)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{d-p-1} = {} & \frac{(-1)^{d-p}e^2}{2}(d\tilde{A}_{d-p}, d\tilde{A}_{d-p}) \\ & + \frac{(-1)^{d-p-1}\Lambda^2}{2}(\tilde{A}_{d-p} - d\tilde{F}_{d-p-1}, \tilde{A}_{d-p} - d\tilde{F}_{d-p-1}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

demonstrando assim a dualidade entre os campos massivos F_p e $\tilde{A}_{d-p}$. Para o caso particular no qual $p = d-1$, $\tilde{A}_{d-p}$ é uma 1-forma e $\tilde{F}_{d-p-1}$ é uma 0-forma: estamos diante do mecanismo de Higgs em sua formulação via Stückelberg [52]. Portanto, podemos notar que a teoria dual (3.16) representa a generalização do mecanismo de Higgs para uma $(d-p)$−forma $\tilde{A}_{d-p}$ e que isto ratifica nossa afirmação de que o mecanismo de Julia-Toulouse é dual ao de Higgs.

De uma forma geral, vemos que a dualidade entre estes dois mecanismos ressalta os fenômenos físicos mais importantes subjacentes à esta discussão que são a condensação das $(d-p-1)$−branas e o confinamento das $(p-2)$−branas. Isto ocorre em ambas descrições, apesar das branas receberem denominações diferentes em cada mecanismo. Vemos também ao comparar (3.15) e (3.16) que as constantes e, Λ presentes em uma teoria têm seu papel invertido na teoria dual e que, no limite de $\Lambda \to 0$, a dualidade entre campos não massivos A_{p-1} e $\tilde{A}_{d-p}$ descrita anteriormente é consistentemente recuperada.

É natural agora considerar o problema de como descrever a situação em que as $(p-2)$−branas iniciais condensam. O melhor modo de encarar esse problema é aplicar o mecanismo de Julia-Toulouse na ação dual que descreve a fase diluída (3.3)

$$S = \frac{(-1)^{d-p}e^2}{2}(d\tilde{A}_{d-p}, d\tilde{A}_{d-p}) \tag{3.17}$$

produzindo a ação para o campo ρ_{d-p+1} do condensado de $(p-2)$−branas

$$\begin{aligned} S_{p-2} &= \frac{(-1)^{d-p+1}}{2\tilde{\Lambda}^2}(d\rho_{d-p+1}, d\rho_{d-p+1}) \\ &+ \frac{(-1)^{d-p}e^2}{2}(\rho_{d-p+1} - d\tilde{A}_{d-p}, \rho_{d-p+1} - d\tilde{A}_{d-p}), \end{aligned} \tag{3.18}$$

sendo $\tilde{\Lambda}$ a escala associada a essa condensação. Seguindo passos análogos aos que produziram (3.15) e (3.16), é possível demonstrar que (3.18) tem como dual

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{p-2} &= \frac{(-1)^{p-1}}{2e^2}(dA_{p-1}, dA_{p-1}) \\ &+ \frac{(-1)^{p}\Lambda^2}{2}(A_{p-1} - d\tilde{\rho}_{p-2}, A_{p-1} - d\tilde{\rho}_{p-2}). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Temos então três pares de ações duais, uma para cada fase da teoria: (3.3) e (3.17) descrevem a "fase de Coulomb", denominada desta forma pois nesta situação desprovida de condensado as interações entre as branas serão as correspondentes generalizações do potencial coulombiano em $(d+1)-$dimensões; (3.15) e (3.16) que descrevem a chamada "fase de confinamento" e o par (3.18), (3.19) que por sua vez descreve a "fase de Higgs". É interessante notar que quando $2p = d+1$ estas últimas serão descritas pelos mesmos tipos de tensores pois F_p e ρ_{d-p+1} terão o mesmo posto. Além disso, nesta situação os defeitos topológicos de cada visão possuem a mesma dimensionalidade pois $d-p-1 = p-2$.

Capítulo 4

Grupos de dualidade para teorias envolvendo p-formas massivas

4.1 Introdução

Transformações de dualidade e teorias auto-duais vêm sendo bastante estudadas num contexto envolvendo p-formas não massivas [53-57] principalmente devido ao seu papel nas descrições efetivas de teoria de cordas [13]. Motivados pela discussão realizada no capítulo anterior sobre a condensação de branas, realizaremos agora um estudo sobre os possíveis grupos de dualidade presentes em teorias envolvendo p-formas massivas [21]. Através do método da projeção dual [20], nós não somente estabelecemos quais são esses grupos como também demonstramos que existe uma dicotomia na caracterização dos mesmos diretamente ligada à dimensionalidade do espaço-tempo.

4.2 Grupos de dualidade para p-formas não massivas

Para a classe de teorias não massivas discutidas anteriormente, vimos que modelos envolvendo p-formas também podem ser completamente descritos utilizando $(d-p-1)-$formas[1]. O exemplo mais conhecido que ilustra esta relação é a dualidade presente na teoria de Maxwell em (3+1)-dimensões, vista em detalhes no primeiro capítulo desta tese.

[1]Definidas em um espaço-tempo $(d+1)-$dimensional M.

Este exemplo possui a importante propriedade de que tanto o campo original como o seu dual são formas de mesmo posto (1-forma para Maxwell). Nesta situação, denominaremos que as teorias envolvidas são *auto-duais* no sentido de que elas e suas duais são descritas por formas de mesmo posto. É simples notar que, no caso não massivo, teorias auto-duais só poderão existir em variedades de dimensões pares. De fato, impondo que $p = d - p - 1 \Rightarrow d = 2p + 1$ e dado que a dimensionalidade do espaço-tempo D é tal que $D = d + 1 \Rightarrow D = 2p + 2$, logo D deve ser par.

Um fato importante relacionado à essas teorias auto-duais é a existência dos chamados grupos de dualidade [53]

$$\mathcal{G}_d = \begin{cases} Z_2, & \text{se } D = 4k + 2 \\ SO(2), & \text{se } D = 4k \end{cases} \tag{4.1}$$

sendo $k \in \mathbf{Z}^+$. Estes grupos definem transformações envolvendo os campos elétricos e magnéticos da teoria (definidos através do potencial A_p) que deixam a ação

$$S = -\frac{1}{2}(dA_p, dA_p) \tag{4.2}$$

invariante. De fato, elas constituem simetrias da ação no sentido de que mantém o tensor de energia-momento da teoria invariante (on-shell) [53]. Retornando ao familiar exemplo em (3+1)-dimensões, podemos notar que a presença do grupo $SO(2)$ está de acordo com as rotações envolvendo os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ encontradas anteriormente (ver (2.4)). O grupo discreto Z_2 por sua vez representa transformações do tipo $F_{p+1} \leftrightarrow *F_{p+1}$, sendo $F_{p+1} = dA_p$.

4.3 Grupos de dualidade para p-formas massivas

O conceito de teorias auto-duais definido acima também se aplica para teorias massivas. Como vimos anteriormente ao demonstrarmos a dualidade entre o mecanismo de

Higgs e de Julia-Toulouse (ver seção 3.5), teorias massivas para p-formas possuem uma descrição dual em termos de $(d-p)-$formas. Ao exigirmos auto-dualidade, vemos que esta só é definida em variedades de dimensionalidade ímpar, i.e., $D = 2p+1$. Por analogia ao caso sem massa, uma questão que naturalmente deveria ser considerada é a existência ou não de grupos de dualidade para teorias auto-duais massivas. É interessante notar que os métodos algébricos utilizados em [53] na demonstração da existência destes grupos para teorias sem massa não se aplicam ao caso massivo. Entretanto, uma nova técnica para análise de teorias auto-duais foi desenvolvida em [54] e esta se mostrou bastante eficaz no estudo de teorias não massivas. A idéia básica deste método, denominado projeção dual, consiste em dobrar o número de potenciais de modo que as simetrias representadas pelos possíveis grupos de dualidade existentes fiquem explícitas. Isto em geral é obtido reduzindo (de uma forma não-covariante para teorias sem massa) a teoria original (normalmente uma teoria de segunda ordem para o potencial A_p) para sua versão em primeira ordem definida em termos de A_p e seu momento canonicamente conjugado Π_p. Em seguida, uma redefinição neste espaço $\{A_p, \Pi_p\}$ é efetuada de modo a revelar os grupos de dualidade até então "escondidos" na teoria. A capacidade que este método apresenta em distinguir os possíveis grupos de dualidade está ligada à dependência dimensional apresentada pela paridade do operador diferencial que resolve a lei de Gauss presente nestas teorias não massivas [54]. Diferente das técnicas utilizadas em [53], a projeção dual pode ser aplicada tanto em teorias não massivas quanto massivas e de fato veremos a seguir como utilizá-la na obtenção da dependência dimensional dos grupos de dualidade para o caso massivo. Podemos adiantar que uma estrutura similar a encontrada no caso não massivo aparecerá desta análise: os grupos de dualidade envolvidos também serão o $SO(2)$ e o Z_2.

4.3.1 Utilização da projeção dual em teorias massivas

Considere a seguinte ação para uma p-forma massiva A_p de massa m em $D = d+1$ dimensões

$$S = \frac{(-1)^p}{2}(dA_p, dA_p) + \frac{(-1)^{p+1}m^2}{2}(A_p, A_p). \tag{4.3}$$

Esta ação pode, por exemplo, corresponder a uma teoria para os graus de liberdade de um condensado de defeitos topológicos (ver (3.6)). Executaremos agora a primeira etapa da projeção dual que consiste em reduzir (4.3) para sua versão em primeira ordem introduzindo um campo auxiliar ξ_{p+1}, seguindo um procedimento análogo ao utilizado anteriormente na demonstração da dualidade entre formas não massivas (ver capítulo 2)

$$S(A_p, \xi_{p+1}) = (\xi_{p+1}, dA_p) - \frac{(-1)^p}{2}(\xi_{p+1}, \xi_{p+1}) + \frac{(-1)^{p+1}m^2}{2}(A_p, A_p). \tag{4.4}$$

Ao longo deste capítulo, chamaremos o primeiro termo da expressão acima de "setor simplético covariante" e o restante da ação de potencial simplético, em analogia a nomenclatura empregada no formalismo de Faddeev e Jackiw para análise de sistemas vinculados [58]. Escrevendo esta ação em termos de $\xi_{p+1} = *\Pi_{d-p}$ obtemos

$$S(A_p, \Pi_{d-p}) = (-1)^d \int_M \Pi_{d-p} dA_p - (-1)^{d-p}\frac{1}{2}(\Pi_{d-p}, \Pi_{d-p}) + \frac{(-1)^{p+1}m^2}{2}(A_p, A_p). \tag{4.5}$$

Impondo a condição de auto-dualidade $d - p = p$, esta ação se torna

$$S(A_p, \Pi_p) = \int_M \Pi_p dA_p + \frac{(-1)^{p+1}}{2}\left[(\Pi_p, \Pi_p) + m^2(A_p, A_p)\right]. \tag{4.6}$$

Para reconhecer, dentre as possíveis dimensões ímpares, quais apresentam a estrutura Z_2 e quais possuem a invariância dada por $SO(2)$, a seguinte redefinição no espaço $\{A_p, \Pi_p\}$ deve ser realizada de modo a rearranjar o setor simplético (de uma forma covariante)

$$\begin{aligned} A_p &= \left(A_p^+ + A_p^-\right) \\ \Pi_p &= m\left(A_p^+ - A_p^-\right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

de modo que (4.6) se torna

$$\begin{aligned} S &= m\left\{\int_M A_p^+ dA_p^+ - \int_M A_p^- dA_p^-\right\} + m\left[\int_M A_p^+ dA_p^- - \int_M A_p^- dA_p^+\right] \\ &+ \frac{(-1)^{p+1}m^2}{2}\left((A_p^+, A_p^+) + (A_p^-, A_p^-)\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Note que o termo entre chaves no setor simpético possui um aspecto Z_2 enquanto que o setor entre colchetes apresenta uma invariância do tipo $SO(2)$. Entretanto, a presença de ambas estruturas nesta ação é ilusória. De fato, é possível mostrar que

$$\int_M d\left(A_p^\pm A_p^\pm\right) = \left((-1)^{p(p+1)} + (-1)^p\right)\int_M A_p^\pm dA_p^\pm \quad (4.9)$$

e portanto, se $p = 2k, k \in \mathbf{Z}^+$ esses termos serão derivadas totais e não contribuirão para a dinâmica da ação ($\partial M = 0$), tendo portanto influência apenas quando $p = 2k + 1$, ou seja, se $D = 4k + 3$. Por outro lado, a seguinte relação também é válida

$$\int_M A_p^+ dA_p^- = (-1)^{p+1}\int_M A_p^- dA_p^+, \quad (4.10)$$

mostrando que estes termos cruzados só aparecerão de fato na ação se $D = 4k + 5$, $k \in \mathbf{Z}^+$, justamente o oposto do que foi encontrado na análise de (4.9). Portanto, para $D = 3\ \mathrm{mod}(4)$ a ação total será

$$S \to S_{Z_2} = S^+(A_p^+) + S^-(A_p^-), \quad (4.11)$$

onde

$$S^\pm(A_p^\pm) = \pm m\int_M A_p^\pm dA_p^\pm + \frac{(-1)^{p+1}m^2}{2}(A_p^\pm, A_p^\pm), \quad (4.12)$$

enquanto que para $D = 5\ \mathrm{mod}(4)$

$$\begin{aligned} S \to S_{SO(2)} &= m\left[\int_M A_p^+ dA_p^- - \int_M A_p^- dA_p^+\right] \\ &+ \frac{(-1)^{p+1}m^2}{2}\left((A_p^+, A_p^+) + (A_p^-, A_p^-)\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Devido a diagonalização imposta pela estrutura Z_2 presente em (4.12), cada $S^{\pm}(A_p^{\pm})$ carrega metade do número total de graus de liberdade da ação original (4.3). De fato, podemos dizer que a solução geral das equações de movimento $(A_p)^c$ da teoria massiva inicial (4.3) para estas dimensionalidades é dada por $(A_p)^c = (A_p^+)^c + (A_p^-)^c$, onde $(A_p^{\pm})^c$ são as soluções das equações de movimento para cada setor em (4.12). Observe que para o caso onde prevalece o aspecto $SO(2)$ os graus de liberdade presentes não são independentes e portanto este raciocínio relacionado à decomposição de soluções não é mais válido. O caso no qual ocorre a diagonalização é bastante interessante pois para encontrarmos a solução geral das equações de movimento da teoria de segunda ordem associada (4.3) basta resolvermos um único setor de (4.12) pois o outro terá uma solução análoga. Observe que impondo o vínculo de segunda classe [59]

$$\Pi_p = \pm m A_p \tag{4.14}$$

apenas um dos setores de (4.12) permanece, reduzindo pela metade o número total de graus de liberdade. Isto generaliza para $D = 3$ mod(4) a construção introduzida por Townsend *et al.* em [60] e que é conhecida como sendo o análogo massivo do escalar auto-dual proposto por Floreanini e Jackiw em [61] em $D = 2$. É interessante notar também que o modelo $SO(2)$ (4.13) tem aspecto semelhante ao modelo proposto por Schwarz e Sen [62] em seu estudo sobre dualidade para ações envolvendo p-formas sem massa.

O resultado apresentado nesta seção completa o quadro sobre grupos de dualidade para teorias de campo de p-formas. A intrigante seqüência de dubletos Z_2 e $SO(2)$ revelada ao juntarmos teorias massivas e não massivas auto-duais pode ser verificada através da tabela abaixo.

Dimensões	massivo	não massivo	posto	graus de liberdade
11	Z_2		5	252
10		Z_2	4	70
9	SO(2)		4	70
8		SO(2)	3	20
7	Z_2		3	20
6		Z_2	2	6
5	SO(2)		2	6
4		SO(2)	1	2
3	Z_2		1	2
2		Z_2	0	1

Note que a condensação de branas em teorias não massivas auto-duais geram teorias massivas que não são auto-duais e que, analogamente, teorias auto-duais massivas oriundas de uma condensação têm como limites diluídos teorias sem massa que não são auto-duais. Portanto, vemos que o processo de condensação (ou diluição) de branas quebra a característica auto-dual presente nas teorias iniciais.

4.4 Discussão dos resultados no domínio quântico

É importante destacar que os resultados que encontramos nesta discussão podem ser efetuados também no domínio quântico. De fato, definindo o funcional gerador $Z(J)$ correspondente à ação inicial S (4.3)

$$Z(J) = \int DA_p e^{i\{S+(A_p,J_p)\}}, \tag{4.15}$$

onde J_p é uma p-forma representando fontes externas [28], todos os procedimentos utilizados anteriormente podem ser aplicados em termos destes funcionais e portanto teremos para $D = 3$ mod(4)

$$Z(J) \to Z_{Z_2}(J) = Z^+(J)Z^-(J) \tag{4.16}$$

sendo

$$Z^{\pm}(J) = \int DA_p^{\pm} e^{i\left\{S^{\pm}(A_p^{\pm})+(A_p^{\pm},J_p)\right\}} \tag{4.17}$$

e para $D = 5$ mod(4)

$$Z(J) \to Z_{SO(2)}(J) = \int DA_p^+ DA_p^- e^{i\left\{S_{SO(2)}+(A_p^+,J_p)+(A_p^-,J_p)\right\}}. \quad (4.18)$$

Note que o caráter Z_2 ou $SO(2)$ da teoria estará presente na estrutura das funções de correlação obtidas de (4.17) e (4.18) e, neste sentido, podemos dizer que a dependência dimensional dos grupos de dualidade para p-formas massivas (ver tabela) é uma característica válida tanto em nível clássico quanto quântico.

Capítulo 5

Comentários e perspectivas

Neste trabalho discutimos vários aspectos relacionados às transformações de dualidade presentes em teorias de campo para p-formas massivas e não massivas. O método geral descrito no capítulo 2 para a obtenção de teorias duais para p-formas pode ser utilizado no estudo de dualidades presentes na teoria de cordas pois estas possuem descrições em baixas energias que possuem forma semelhante às ações que discutimos [14]. De fato, um dos nossos próximos passos será aplicar as transformações estudadas aqui em teorias efetivas para o setor bosônico de teorias de cordas. É importante ressaltar que, apesar de termos introduzido estas transformações em un contexto relativístico relacionado à teoria de campos, uma análise deste método que empregamos mostra que ele também pode ser utilizado em modelos efetivos que descrevem sistemas fortemente correlacionados em matéria condensada como o fluido Hall, superfluidos e supercondutores [7, 10, 33]. Dado que em geral a teoria dual possui um regime de acoplamento inverso ao da teoria inicial, transformações de dualidade devem constituir ferramentas muito úteis no entendimento destes sistemas. Além disso, o conceito de dualidade como foi definido nesta tese permite considerarmos sobre a sua presença em sistemas quânticos com número finito de graus de liberdade como átomos ou moléculas. De fato, em [63] nós introduzimos uma dualidade presente na descrição de átomos de Rydberg frios.

A demonstração da dualidade entre o mecanismo de Higgs e de Julia-Toulouse feita no capítulo 3 constituiu um importante passo no entendimento das transformações de dualidade para teorias de p-formas massivas e não massivas pois, como argumentamos anteriormente, a dualidade existente na descrição da fase de coulomb implica na existência da dualidade entre as fases de Higgs e de confinamento. Um próximo passo nesta direção seria o estudo de uma versão supersimétrica destes resultados que pode desempenhar um importante papel na questão de como quebrar a supersimetria e a degenerescência presente no vácuo das teorias de cordas [2, 17].

O estudo dos grupos de dualidade para teorias envolvendo p-formas massivas feito no capítulo 4 revelou que o método da projeção dual, introduzido durante uma análise dos grupos existentes para teorias sem massa [54], pode também ser aplicado em teorias massivas. O fato de que esta técnica pode ser empregada tanto para teorias massivas e não massivas ressalta seu valor frente aos métodos algébricos introduzidos em [53] que somente são válidos para o caso não massivo. Nossos resultados relacionados a dependência dimensional dos grupos de dualidade para teorias massivas foi demonstrado ser válido tanto em nível clássico quanto quântico. Além disso, colocando os grupos de dualidade para os casos massivos e não massivos em um único quadro (ver tabela) constatamos a presença de uma intrigante alternância de dubletos da forma Z_2 e $SO(2)$ para estas teorias. Uma análise baseada em argumentos mais físicos para os resultados dispostos nesta tabela encontra-se sob investigação [64]. Para teorias não massivas definidas numa variedade M, a presença de grupos de dualidade pode ser vista como uma conseqüência da redução dimensional de uma teoria definida num espaço-tempo do tipo $M \otimes H$, sendo H uma variedade compacta [66]. Isto nos leva a considerar se a mesma idéia pode ser aplicada no caso massivo [64].

Apêndice A

Notações e convenções

Todas as observações abaixo são válidas a menos que o contrário seja explicitamente especificado.

■ As constantes físicas c (velocidade da luz) e $\hbar$ (constante de Planck dividida por 2π) são tomadas iguais à unidade.

■ A métrica utilizada no espaço-tempo Minkowskiano $(d+1)-$dimensional M será $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,...,-)$, onde o $+$ denota a parte temporal.

■ A convenção da soma sobre índices repetidos é sempre utilizada: $A^{ab}B_a \equiv \sum_a A^{ab}B_a$.

■ As letras x e y são usadas para denotar vetores do espaço-tempo, enquanto $\vec{x}$ e $\vec{y}$ denotam vetores do espaço tridimensional e t é sempre usado para o tempo.

■ δ^a_b é a delta de Kronecker: vale 1 se $a = b$ e 0 se $a \neq b$. $\delta^{(d+1)}(x-y)$ é a delta de Dirac em M.

■ O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbf{R}$ e o conjunto dos números inteiros por $\mathbf{Z}$. Conseqüentemente, o conjunto dos números inteiros não-negativos (positivos) é denotado por $\mathbf{Z}^+$ ($\mathbf{Z}$).

■ C^n é o conjunto das funções $n-$diferenciáveis. Assim, C^∞ representa o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis (funções suaves).

■ Trabalhos denotados como hep-th/yymmnnn e semelhantes estão disponíveis no endereço eletrônico <http://xxx.lanl.gov>.

Apêndice B

Topologia e variedades diferenciáveis

Neste apêndice apresentaremos algumas definições e resultados relacionados à topologia e variedades diferenciáveis que são utilizados nesta tese. Maiores informações podem ser encontradas em [34, 38, 44, 67], nossas principais referências.

B.1 Topologia

Um espaço topológico é essecialmente um conjunto que possui uma estrutura na qual é possível definir, de forma bastante geral, o conceito de vizinhança e de funções contínuas.

Espaço topológico: Seja U um sistema de subconjuntos de um dado conjunto X. U define uma topologia em X se

i) $\emptyset \in U$ e $X \in U$,

ii) para quaisquer subconjuntos U_{i_k} a união satisfaz $\bigcup_k U_{i_k} \in U$,

iii) para quaisquer subconjuntos finitos $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ a interseção satisfaz $\bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k} \in U$.

Então, X ou o par (X, U) é denominado um espaço topológico e os conjuntos U_{i_k} são ditos abertos. Como exemplo, podemos fazer $X = \mathbf{R}$ e então todos os intervalos abertos (a, b) e suas uniões definirão a topologia usual de $\mathbf{R}$.

Conjunto fechado: Um conjunto $A \subset X$ é fechado se $A^c = X/A$ é aberto. $A^c = \{x \in$

$X|x \notin A\}$ é o complemento de A.

Vizinhança: Seja X um espaço topológico. $N(x)$ é uma vizinhança de um ponto $x \in X$ se $N(x)$ contém um conjunto aberto $U(x)$ que contém x, ou seja, $U(x) \subset N(x)$. Por exemplo, o intervalo fechado $[a, b]$ é uma vizinhança $\forall x \in (a, b)$.

Teorema: Um subconjunto $A \subset X$ é aberto se e somente se ele é uma vizinhança para cada um de seus pontos.

Ponto limite: Um ponto $x \in X$ é um ponto limite do conjunto $A \subseteq X$ se cada vizinhança $N(x)$ contém pelo menos um ponto $a \in A$ $(a \neq x)$: $(N(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall N(x)$.

Teorema: A é fechado se e somente se ele contém todos os seus pontos limite.

Fechamento: O fechamento $\bar{A}$ de A em X é a união de A com todos os seus pontos limite. Ele é o menor conjunto fechado que contém A.

Interior: O interior A^0 de A é o maior conjunto aberto contido em A.

Fronteira: Uma fronteira ∂A de um conjunto A é o complemento do interior do fechamento de A: $\partial A = \bar{A}/A^0$. Um conjunto fechado contém sua fronteira enquanto um aberto é disjunto.

Observação: Seja A um conjunto. Então

$A \cap \partial A = \emptyset \Longleftrightarrow A$ é aberto

$\partial A \subset A \Longleftrightarrow A$ é fechado.

Conjunto compacto: Dado um espaço topológico X e uma família de conjuntos $\{Y_i\} =$

Y. Então, Y é uma cobertura de X se $X \subset \bigcup_i Y_i$. Se todos os Y_i são conjuntos abertos, Y é uma cobertura aberta. O conjunto X é compacto se para toda cobertura aberta $\{Y_i\}$ existe um subcobertura finita $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de X. Um simples exemplo de conjunto compacto é o disco fechado $D \subset \mathbf{R}^2$ definido por $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Teorema: O subconjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ é compacto se e somente se ele é fechado e limitado. Assim, as esferas $n-$dimensionais S^n são compactas desde que elas são fechadas e limitadas em $\mathbf{R}^{n+1}$.

Continuidade: Sejam X e Y dois espaços topológicos. A função $\varphi : X \to Y$ é contínua se e somente se para todo conjunto aberto $V \subset Y$ o conjunto $U = \varphi^{-1}(V) \subset X$ é aberto. Alternativamente, φ é contínua em $x \in X$ se e somente se $\varphi(x_i) \to \varphi(x)$ sempre que $x_i \to x$.

Homeomofismo-difeomorfismo: Sejam X e Y dois espaços topológicos. A função φ é um homeomorfismo se $\varphi : X \to Y$ é uma bijeção e φ, φ^{-1} são contínuas. Neste caso, X e Y são ditos homeomórficos. Se φ é uma bijeção e φ, φ^{-1} são continuamente diferenciáveis[1], φ é um difeomorfismo.

B.2 Variedades diferenciáveis

Essencialmente, uma variedade diferenciável M é uma espécie de superfície suave, um espaço topológico que localmente é idêntico ao $\mathbf{R}^n$ mas que pode possui propriedades globais diferentes.

Carta: Seja M um espaço topológico. Uma carta (V_i, φ_i) é um homeomorfismo φ_i de um

[1] $\varphi, \varphi^{-1} \in C^\infty$.

conjunto aberto $V_i \subset M$ num aberto $R_i \subset \mathbf{R}^n$, $\varphi_i : V_i \to R_i$. Duas cartas $(V_1, \varphi_1), (V_2, \varphi_2)$ são compatíveis se $\varphi_1 \cdot \varphi_2^{-1}, \varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1} \in C^\infty$ ou se $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Atlas: O conjunto de cartas compatíveis $\{(V_i, \varphi_i)\}$ que cobre M é dito um atlas. Dois atlas são compatíveis se todas as suas cartas são compatíveis.

Variedade diferenciável: Um espaço topológico M é dito ser uma variedade diferenciável se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

i) M está munido de uma família de cartas $\{(V_i, \varphi_i)\}$.

ii) $\{V_i\}$ é uma família de conjuntos abertos que cobrem M, $\bigcup_i V_i = M$ e
$\varphi_i : V_i \to R_i \subset \mathbf{R}^n$ é um homeomorfismo.

iii) Dados dois conjuntos abertos V_i, V_j com $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, as funções definidas sobre esta interseção: $\varphi_j \cdot \varphi_i^{-1}$ de um subconjunto $\varphi_i(V_i \cap V_j)$ para um $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ ou $\varphi_i \cdot \varphi_j^{-1}$ de um subconjunto $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ para $\varphi_i(V_i \cap V_j)$ são difeomorfismos.

As características i) e ii) implicam que M é localmente euclideano. M é coberto pelas cartas V_i e através dos homeomorfismos φ_i é possível definir coordenadas em $\mathbf{R}^n$ para estas cartas. Assim, dentro de cada carta a variedade é localmente semelhante ao $\mathbf{R}^n$; globalmente isso não está garantido pois é preciso saber como foram unidas essas cartas na construção de M. Devido a essa identificação, $\dim M = \dim \mathbf{R}^n = n$.

Variedade com fronteira: A variedade M é definida como um espaço que é localmente equivalente ao $\mathbf{R}^n$. Se trocamos $\mathbf{R}^n$ pelo conjunto

$$\mathbf{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots x^n) \in \mathbf{R}^n | x^n \geq 0\} \tag{B.1}$$

com fronteira

$$\partial \mathbf{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n | x^n = 0\} \tag{B.2}$$

obtemos a noção de uma variedade com fronteira. Neste caso um atlas consiste de cartas $\{(V_i, \varphi_i)\}$ onde $\varphi_i : V_i \to R_i^+$ representa um homeomorfismo para $R_i^+ \subset \mathbf{R}_+^n$. A fronteira ∂M da variedade M é o conjunto de todos os pontos que são mapeados no $\partial \mathbf{R}_+^n$

$$\partial M = \bigcup_i \varphi_i^{-1}(\varphi_i(V_i) \cap \partial \mathbf{R}_+^n), \tag{B.3}$$

e a dimensão de ∂M é $\dim \partial M = n - 1$. Para uma variedade sem fronteira temos que $\partial M = 0$, e a fronteira de uma fronteira é automaticamente zero, $\partial(\partial M) = 0$.

Apêndice C

Formas diferenciais, cohomologia e correntes de de Rham

O objetivo deste apêndice é fornecer uma rápida e informal introdução sobre vários conceitos relacionados às formas diferenciais. Apresentamos também resultados relativos à cohomologia e às correntes de de Rham que são utilizados nesta tese. Para uma revisão recomendamos [13, 34, 38, 44, 67, 68], nossas principais referências sobre estes tópicos.

C.1 Formas diferenciais

Produto exterior $\wedge$: Definiremos o produto antissimétrico das diferenciais como

$$dx^\mu \wedge dx^\nu := dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\mu \otimes dx^\nu. \tag{C.1}$$

Entretanto, utilizaremos a notação $dx^\mu dx^\nu \equiv dx^\mu \wedge dx^\nu$, onde o símbolo $\wedge$ fica subentendido. Analogamente, um produto de n diferenciais $dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \ldots dx^{\mu_n} \equiv dx^{\mu_1 \ldots \mu_n}$ é um tensor totalmente antissimétrico de posto n.

Forma Diferencial: Com a ajuda do produto exterior podemos definir os seguintes objetos

$$\text{0-forma} \qquad A_0 = A(x) \tag{C.2}$$

$$\text{1-forma} \qquad A_1 = A_\mu(x)dx^\mu \tag{C.3}$$

$$\text{2-forma} \qquad A_2 = \tfrac{1}{2!}A_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{C.4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{C.5}$$

$$p\text{-forma} \qquad A_p = \tfrac{1}{p!}A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)dx^{\mu_1\ldots\mu_p}. \tag{C.6}$$

$A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)$ expressa um campo tensorial covariante totalmente antissimétrico de posto $p \leq (d+1)$, onde $(d+1)$ é a dimensão do espaço-tempo Minkowskiano M orientável [44] e sem fronteira ($\partial M = 0$) utilizado como variedade base (fica subentendida esta informação daqui por diante).

Denota-se o conjunto de todas as $p-$formas definidas em M por $\Lambda^p(M)$. O espaço de todas as formas por sua vez é definido por

$$\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \ldots \oplus \Lambda^m. \tag{C.7}$$

Derivada exterior: Diferencia-se as formas introduzindo a derivada exterior

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\mu}dx^\mu \tag{C.8}$$

que atua sobre uma $p-$forma A_p da seguinte maneira

$$dA_p = \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_p = \frac{1}{p!}\partial_\nu A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)dx^{\nu\mu_1\ldots\mu_p}. \tag{C.9}$$

Portanto, a derivada exterior é um mapa $d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$ que transforma $p-$formas em (p+1)-formas. Esse operador será utilizado constantemente nesta tese sendo portanto conveniente definir a $(p+1)-$forma $F_{p+1}(\phi_p) = d\phi_p$, construída a partir de uma $p-$forma qualquer ϕ_p, que escrita de uma forma mais explícita se torna

$$F_{p+1}(\phi_p) = d\phi_p = \frac{1}{p!(p+1)!}\partial\phi_{[\mu_1\ldots\mu_{p+1}]}dx^{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}, \tag{C.10}$$

onde

$$\partial\phi_{[\mu_1\cdots\mu_{p+1}]}=\partial_{\mu_1}\phi_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}}+(-1)^{p+2}\partial_{\mu_2}\phi_{\mu_3\cdots\mu_{p+1}\mu_1}\pm\text{permutações cíclicas},\tag{C.11}$$

que é um objeto totalmente antissimétrico em seus $(p+1)$-índices. Veja também que d obedece a seguinte regra de diferenciação envolvendo o produto de uma p-forma α_p por uma q-forma β_q

$$d(\alpha_p\beta_q)=(d\alpha_p)\beta_q+(-1)^p\alpha_p(d\beta_q).\tag{C.12}$$

Interessante notar que as expressões acima não são alteradas numa situação envolvendo um espaço-tempo curvo, fato que pode ser provado usando as usuais definições para a derivada covariante D e para a conexão afim [13]. Isto significa que d é um operador genericamente covariante mesmo não havendo nenhuma métrica em sua definição. Formas diferenciais representam uma classe de objetos onde é possível definir um operador diferencial (d) que é independente da métrica escolhida para M, o que justifica sua grande importância em Matemática. Como conseqüência, qualquer propriedade de M que puder ser formulada puramente em termos das propriedades de d será automaticamente um invariante topológico [13, 44].

Uma $p-$forma A_p é dita fechada se $dA_p=0$ e exata se $\exists\phi_{p-1}$ tal que $A_p=d\phi_{p-1}$. Dado que d é um operador nilpotente, isto é

$$d^2=0,\tag{C.13}$$

temos que toda forma exata é fechada. Usando a propriedade acima, podemos ver facilmente que a $(p+1)-$forma exata $F_{p+1}(A_p)$ é invariante perante as transformações $A_p\rightarrow A_p+d\phi_{p-1}$ e que ela obedece a "identidade de Bianchi" $dF_{p+1}(A_p)=0$. Em um contexto relacionado a teorias de calibre, podemos notar que A_p apresenta as propriedades necessárias para que seja considerado como uma generalização para dimensões superiores do potencial eletromagnético A_μ da teoria de Maxwell em (3+1)-dimensões [22].

Integração de uma forma diferencial: Por já conterem as diferenciais em sua definição, as formas já estão prontas para serem integradas. Seja $g_{\mu\nu}$ uma métrica definida sobre M tal que $|g| = -det(g_{\mu\nu})$. O tensor de Levi-Civita é definido por

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d+1}} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{d+1}}, \tag{C.14}$$

sendo $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d+1}}$ definido como

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{d+1}} = -\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{d+1}} = \begin{cases} 1 & \text{número par de permutações de 1,..., d+1} \\ 0 & \text{se dois índices são iguais} \\ -1 & \text{número ímpar de permutações de 1,..., d+1.} \end{cases} \tag{C.15}$$

Podemos agora definir a forma volume

$$\varepsilon = \sqrt{|g|}d^{d+1}x, \tag{C.16}$$

que é invariante por transformações de coordenadas. É interessante observar que não há necessidade de especificar uma escolha de coordenadas quando usamos formas diferenciais. Sendo M orientável, este elemento de volume é globalmente bem definido em todo o espaço. Por sua vez, $d^{d+1}x$ é definido por

$$d^{d+1}x \equiv \frac{1}{(d+1)!}\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d+1}} dx^{\mu_1 \dots \mu_{d+1}}. \tag{C.17}$$

Uma identidade extremamente útil relacionada ao $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d+1}}$ é a seguinte

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \rho_1 \dots \rho_{d-p+1}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{d-p+1}} = (-1)^d p! \delta^{\nu_1 \dots \nu_{d-p+1}}_{[\rho_1 \dots \rho_{d-p+1}]}, \tag{C.18}$$

onde $\delta^{\nu_1 \dots \nu_{d-p+1}}_{[\rho_1 \dots \rho_{d-p+1}]}$ é o tensor de Kronecker totalmente antissimétrico.

Dualidade $*$−Hodge: O conjunto de todas as p−formas $\Lambda^p(M)$ é um espaço vetorial de dimensão

$$\dim \Lambda^p(M) = \begin{pmatrix} d+1 \\ p \end{pmatrix} = \frac{(d+1)!}{p!(d-p+1)!}. \tag{C.19}$$

Então, $\Lambda^p(M)$ e $\Lambda^{d-p+1}(M)$ têm a mesma dimensão. Existe uma dualidade entre estes dois espaços, um isomorfismo dado pela operação $*$–Hodge

$$*:\Lambda^p(M)\to\Lambda^{d-p+1}(M). \qquad (C.20)$$

Esta operação transforma p–formas em $(d-p+1)$–formas. Dada uma p–forma A_p a operação $*$ fornecerá sua forma dual $*A_p$

$$*A_p=\frac{1}{p!(d-p+1)!}A_{\mu_1\cdots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_{d+1}}dx^{\mu_{p+1}\cdots\mu_{d+1}}. \qquad (C.21)$$

Utilizando $*$, podemos denotar $\varepsilon=*1$. Uma identidade muito utilizada envolvendo p–formas é $\forall A_p$,

$$**A_p=(-1)^{p(d-p+1)+d}A_p. \qquad (C.22)$$

Usando esse formalismo, a teoria de Maxwell é uma teoria para a 2-forma F_2 (campo eletromagnético) que obedece (na ausência de fontes) as equações de movimento [38]

$$d*F_2=0, \qquad (C.23)$$

e a identidade de Bianchi

$$dF_2=0. \qquad (C.24)$$

Sabemos da teoria eletromagnética que a identidade de Bianchi para o campo F_2 está associada à existência da 1-forma A_1 (potencial eletromagnético) de forma que $F_2=dA_1\Longrightarrow dF_2=d(dA_1)=d^2A_1=0$ e portanto (C.24) fica automaticamente satisfeita. De fato, isto constitui o

Lema de Poincaré: para toda $(p+1)$–forma fechada, $dB_{p+1}=0$, existe localmente uma A_p tal que B_{p+1} pode ser expressado localmente como uma forma exata, $B_{p+1}=dA_p$.

É importante frisar que a existência de A_p só é garantida localmente; globalmente podem existir situações que tornam isto impossível. O teorema de Stokes pode ser escrito da seguinte forma

$$\int_M dH_p = \int_{\partial M} H_p \tag{C.25}$$

sendo H_p uma $p-$forma e ∂M a fronteira de uma variedade $(p+1)-$dimensional M.

Produto interno de $p-$formas: Sejam duas $p-$formas A_p, $B_p \in \Lambda^p(M)$. Seu produto interno é definido por

$$(A_p, B_p) = \int_M A_p * B_p \in \mathbf{R}. \tag{C.26}$$

Esta expressão pode ser escrita de uma forma mais explícita

$$(A_p, B_p) = \int_M A_p * B_p = \frac{1}{p!} \int \sqrt{|g|} d^{d+1}x A_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) B^{\mu_1 \dots \mu_p}(x). \tag{C.27}$$

O produto interno é simétrico $(A_p, B_p) = (B_p, A_p)$ e é positivo definido se a variedade base M for Riemanniana $(A_p, B_p) \geq 0$, sendo a igualdade válida somente para $A_p = 0$.

Considere agora o seguinte produto interno

$$(dA_{p-1}, B_p) = \int_M dA_{p-1} * B_p = (-1)^p \int_M A_{p-1} d * B_p + \int_M d(A_{p-1} * B_p). \tag{C.28}$$

O segundo termo do lado direito desta expressão é nulo devido ao teorema de Stokes (C.25) pois $\partial M = 0$.

Definição: O operador δ, ou coderivada, que atua em $p-$formas é definido por

$$\delta := (-1)^{p(d+1)} * d * . \tag{C.29}$$

Utilizando este operador, obtemos a importante relação

$$(dA_{p-1}, B_p) = \int_M A_{p-1} * \delta B_p = (A_{p-1}, \delta B_p). \tag{C.30}$$

Portanto, podemos notar que o operador δ transforma $p-$formas em $(p-1)-$formas, ou seja, ele representa um mapeamento $\delta : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p-1}(M)$. Este operador também é nilpotente, ou seja, $\delta^2 = 0$.

Apresentamos abaixo algumas identidades importantes envolvendo produto interno de formas:

$$(*\omega_p, A_{d-p+1}) = (-1)^{p(d-p+1)}(\omega_p, *A_{d-p+1}), \tag{C.31}$$

$$(*\omega_p, *A_p) = (-1)^d(\omega_p, A_p). \tag{C.32}$$

Termo B∧F: A integral do produto de uma $p-$forma B_p e uma $(d-p+1)-$forma exata $F_{d-p+1} = d\phi_{d-p}$ é definida por

$$\int_M B_p d\phi_{d-p} = (-1)^{p(d-p+1)+d}(B_p, *d\phi_{d-p}), \tag{C.33}$$

e obedece a seguinte identidade

$$\int_M B_p d\phi_{d-p} = (-1)^{(p+1)(d-p+1)} \int_M \phi_{d-p} dB_p. \tag{C.34}$$

C.2 Cohomologia de de Rham

Usando este formalismo, podemos ver que a usual ação de Maxwell [28]

$$S_{Maxwell} = -\frac{1}{4}\int_M d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{C.35}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial A_{[\mu\nu]}$, pode ser reescrita simplesmente como

$$S_{Maxwell} = -\frac{1}{2}(F_2(A_1), F_2(A_1)), \tag{C.36}$$

onde $F_2(A_1) = dA_1$ via (C.10). Conseqüentemente, o mesmo tipo de ação para uma $p-$forma A_p será

$$S = -\frac{1}{2}(F_{p+1}(A_p), F_{p+1}(A_p)). \tag{C.37}$$

A simetria de calibre dessas teorias fica então evidente através deste formalismo: transformações do tipo $A_p \to A_p + d\phi_{p-1}$ não alteram a ação acima.

Nesta seção estaremos interessados nos modos zero do campo A_p da ação anterior (C.37). Entendemos por modos zero os modos que anulam a ação (C.37) mas que não podem ser eliminados por uma transformação de calibre, ou seja, estamos interessados no conjunto de todas as $p-$formas C_p que são fechadas mas não exatas.

Definições: Considere o espaço de todas as formas diferenciais Λ^*. Definimos os p-cociclos (formas fechadas) através de

$$Z^p(M,\mathbf{R}) = \{\omega \in \Lambda^p(M) | d\omega_p = 0\} \tag{C.38}$$

e as p-cofronteiras (formas exatas) como

$$B^p(M,\mathbf{R}) = \{\omega \in \Lambda^p(M) | \omega_p = d\beta_{p-1}\} \tag{C.39}$$

Então, temos que $B^p(M,\mathbf{R}) \subset Z^p(M,\mathbf{R})$ desde que $d^2 = 0$ e portanto o quociente desses grupos definidos acima faz sentido. De fato, define-se o $p-$ésimo grupo de cohomologia de de Rham $H^p(M,\mathbf{R})$ da variedade M como sendo $H^p(M,\mathbf{R})$=$Z^p(M,\mathbf{R})/B^p(M,\mathbf{R})$.

Seja $\omega_p \in Z^p(M,\mathbf{R})$; então $[\omega] \in H^p(M,\mathbf{R})$ representa uma classe de equivalência. De fato, duas $p-$formas $g_p, \omega_p \in Z^p(M,\mathbf{R})$ pertencem a uma mesma classe de equivalência (sendo ditas cohomólogas) se elas diferem por uma forma exata: $g_p \sim \omega_p$ se $g_p = \omega_p + d\beta_p$. Portanto, em cohomologia, estamos lidando com todas as formas fechadas que não são exatas.

Número de Betti: O p-ésimo número de Betti de uma variedade M é definido por

$$b_p(M) := \dim H_p(M,\mathbf{R}), \tag{C.40}$$

ou seja, ele representa o número de $p-$formas linearmente independentes fechadas mas não exatas (ou o número de modos zero da ação (C.37)). Sendo definidos puramente através de propriedades do operador d, que sabemos ser independente da métrica de M, os inteiros b_p são automaticamente invariantes topológicos desta variedade.

Discutiremos agora a relação entre os grupos de cohomologia e as integrais de formas diferenciais em subvariedades fechadas. Define-se uma subvariedade fechada como sendo uma subvariedade compacta sem fronteira. Sejam duas $p-$formas fechadas α_p e β_p e T uma subvariedade fechada de M de dimensão p (como por exemplo esferas $p-$dimensionais S_p). De acordo com o que foi dito anteriormente, essas formas pertencem a uma mesma classe equivalência em cohomologia se $\alpha_p - \beta_p = d\gamma_{p-1}$ e portanto

$$\int_T \alpha_p - \int_T \beta_p = \int_T d\gamma_{p-1} = \int_{\partial T} \gamma_{p-1} = 0, \tag{C.41}$$

desde que $\partial T = 0$ por definição. Então, a integral de uma $p-$forma fechada α_p numa subvariedade fechada depende somente da classe de cohomologia de α_p. Em especial, se $[\alpha_p]$ é zero, ou seja se $\alpha_p = d\gamma_{p-1}$ para algum γ_{p-1}, então $\int_T \alpha_p = 0$ para todas as variedades fechadas T. Analogamente, se $[\alpha_p]$ é diferente de zero, sempre existirá uma variedade fechada T na qual $\int_T \alpha_p \neq 0$.

Fixando uma $p-$forma α_p fechada, cuja classe de equivalência em cohomologia pode ou não ser zero, podemos considerar o número $I(T) = \int_T \alpha_p$ como um funcional da variedade fechada T. Se T pode ser continuamente deformado num $\tilde{T}$ tal que $T - \tilde{T} = \partial W$, sendo W a variedade que conecta T e $\tilde{T}$, então via teorema de Stokes $I(T) = I(\tilde{T})$

$$I(T) - I(\tilde{T}) = \int_T \alpha_p - \int_{\tilde{T}} \alpha_p = \int_{\partial W} \alpha_p = \int_W d\alpha_p = 0. \tag{C.42}$$

Existem restrições mais severas para $I(T)$. Seja T uma variedade fechada $p-$dimensional arbitrária que é fronteira de uma variedade $(p+1)-$dimensional W, ou seja, $\partial W = T$.

Então

$$\int_T \alpha_p = \int_{\partial W} \alpha_p = \int_W d\alpha_p = 0. \tag{C.43}$$

Portanto, se T é uma fronteira, a integral de qualquer α_p fechada sobre T é automaticamente zero. Analogamente, se a subvariedade fechada T de M não é fronteira de nenhuma subvariedade de M de uma dimensão superior, sempre existirá alguma α_p fechada em M tal que $I(T) = \int_T \alpha_p \neq 0$. Variedades que apresentam características similares a T são ditas topologicamente não-triviais. Lembrando da definição dos b_p, podemos ver que eles correspondem ao número de variedades fechadas $p-$dimensionais independentes existentes em M que são topologicamente não-triviais.

Laplaciano: Introduzimos o operador laplaciano $\Delta : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M)$, que é definido por

$$\Delta = d\delta + \delta d = (d+\delta)^2. \tag{C.44}$$

Propriedades de Δ:

$$\text{Hodge*} \quad *\Delta = \Delta\, * \tag{C.45}$$

$$\text{Derivada Exterior} \quad d\Delta = \Delta d \tag{C.46}$$

$$\text{Coderivada} \quad \delta\Delta = \Delta\delta \tag{C.47}$$

$$(A_p, \Delta A_p) \geq 0. \tag{C.48}$$

Definição: Uma $p-$forma A_p é dita harmônica se $\Delta A_p = 0$.

Teorema:

$$\Delta A_p = 0 \Longleftrightarrow dA_p = 0, \delta A_p = 0. \tag{C.49}$$

Teorema de Decomposição de Hodge: Seja M uma variedade compacta e sem fronteira. Então, qualquer $p-$forma $\omega_p \in \Lambda^p(M)$ pode ser unicamente decomposta em

$$\omega_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p, \tag{C.50}$$

com $\alpha_{p-1} \in \Lambda^{p-1}(M)$, $\beta_{p+1} \in \Lambda^{p+1}(M)$ e $\Delta\gamma_p = 0$.

A componente harmônica γ_p é que determina a classe de cohomologia da forma ω_p. De fato, existe um isomorfismo entre o conjunto de $p-$formas harmônicas

$$Harm^p(M) = \{\gamma_p \in \Lambda^p(M) | \Delta\gamma_p = 0\} \tag{C.51}$$

e a p-cohomologia,

$$Harm^p(M) \simeq H^p(M, \mathbf{R}). \tag{C.52}$$

E então, dim $H_p(M, \mathbf{R}) =$ dim $Harm^p(M) = b_p(M)$.

C.3 $(p+1)-$correntes de de Rham

Uma $(p+1)-$corrente (também conhecida por $(p+1)-$corrente de de Rham) em M é uma $(p+1)-$forma cujas componentes são distribuições [34, 39, 68][1].

Dualidade de Poincaré: Seja $\Omega_p(M)$ o conjunto de todas as subvariedades diferenciáveis

[1]Por consistência, fica registrado aqui que todas as formas que usamos nesta tese têm como componentes elementos que pertencem ao espaço das distribuições.

(e orientáveis) p−dimensionais Σ_p de M. Definimos o mapa

$$PD : \Omega_p(M) \to \Lambda^{d-p+1} : \Sigma_p \to PD(\Sigma_p) = *J_p. \tag{C.53}$$

Se y'^{α} são coordenadas sobre uma subvariedade N e x^{μ} coordenadas de M, a imersão $i : N \to M$ será localmente definida por $X^{\mu}(y^m)$ e as componentes de J_p serão dadas por

$$J^{\mu_1 \cdots \mu_p}(x) = \int_{\Sigma_p} \delta^{d+1}(x - X(y))dX^{\mu_1 \cdots \mu_p}. \tag{C.54}$$

A forma $PD(\Sigma_p) = *J_p$ é chamada de forma dual de Poincaré para N. Este mapa satisfaz importantes propriedades:

■ Por construção, a dual de Poincaré $*J_p$ tem como suporte a variedade N e obedece a identidade

$$*J_p * J_p = 0. \tag{C.55}$$

■ $PD(\Sigma_p) = *J_p$ é tal que $\forall A_p \in \Lambda^p(M)$

$$\int_{\Sigma_p} A_p = \int_M *J_p A_p. \tag{C.56}$$

■ A relação entre Σ_p e sua fronteira $\partial\Sigma_p$ é mapeada em

$$PD(\partial\Sigma_p) = (-1)^{d-p} d(PD(\Sigma_p)) \tag{C.57}$$

C.3.1 Interseção e Linking number

Sejam Σ_p e Υ_{d-p+1} duas subvariedades de M que se interceptam transversalmente [34, 68] num número finito de pontos apenas. A integral

$$I(\Sigma, \Upsilon) = \int_M PD(\Sigma_p) PD(\Sigma\Upsilon_{d-p+1}) \tag{C.58}$$

é sempre um número inteiro (sempre que for bem definida), contando o número de interseções com sinal entre Σ_p e Υ_{d-p+1}.

Uma importante aplicação do número de interseção I é a definição de linking number, um conceito que tem muitas aplicações em física e matemática. Sejam Σ e Υ duas subvariedades de M ($\partial M = 0$) tais que:

- $\exists C, D$ tal que $\Sigma = \partial C, \Upsilon = \partial D$,
- $\Sigma \bigcap \Upsilon = \emptyset$,
- $\dim(\Sigma) + \dim(\Upsilon)+1=\dim(M)$.

O linking number $L(\Upsilon, \Sigma)$ entre essas variedades é definido pela interseção entre Υ e C e é dado por

$$L(\Upsilon, \Sigma) = \int_M PD(\Upsilon)PD(C) \tag{C.59}$$

Referências

[1] J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979); J. Polchinski, Rev. Mod. Phys. **68**, 1245 (1996); D. I. Olive, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **58**, 43 (1997); E. Witten, Phys. Today, May 1997, pg. 28-33.

[2] F. Quevedo, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **61** A, 23-41 (1998).

[3] C. Montonen, D. Olive, Phys. Lett. B **72**, 117 (1977); J. A. Harvey, hep-th/9603086.

[4] D. Olive, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **46**, 1-15 (1996).

[5] R. Savit, Rev. Mod. Phys. **52**, 453 (1980).

[6] M. Kiometzis, H. Kleinert, A. M. J. Schakel, Phys. Rev. Lett. **73**, 1975 (1994).

[7] A. Shapere, F. Wilczek, Nucl. Phys. B **320**, 669 (1989); C. A. Lütken, G. Ross, Phys. Rev. B **45**, 11837 (1992); S. Kivelson, D. H. Lee, S. C. Zhang, Phys. Rev. B **46**, 2223 (1992); C. A. Ltken, G. Ross, Phys. Rev. B **48**, 2500 (1993); A. Zee, cond-mat/9501022.

[8] Shahar *et al.*, Science **274**, 589 (1996).

[9] S. Coleman, Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975); S. Mandelstam, Phys. Rev. D **11**, 3026 (1975).

[10] Para uma revisão veja: E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, (Frontiers in physics, 82), Addison-Wesley, Redwood City, USA, 1991.

[11] S. Deser, C. Teitelboim, Phys. Rev. D **13**, 1592 (1976); J. H. Schwarz, A. Sen, Nucl. Phys. B **411**, 35-63 (1994); S. E. Hjelmeland, hep-th/9705122; C. Wotzasek, Phys. Rev. D **58**, 125026 (1998).

[12] A. Font, L. E. Ibez, D. Lst, F. Quevedo, Phys. Lett. B **249**, 35 (1990); C. Hull, P. K. Townsend, Nucl. Phys. B **438**, 109 (1995); E. Witten, Nucl. Phys. B **443**, 85 (1995).

[13] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theories*, volumes I e II, Cambridge University Press, 1987; J. Polchinski, *String Theory*, volumes I e II, Cambridge University Press, 1998.

[14] Para uma revisão veja M. J. Duff, R. Khuri, J. Lu, Phys. Rep. **259**, 213 (1995).

[15] J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998); O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Oguri and aY. Oz, Phys. Rep. **323**, 183 (2000); A. Zaffaroni, Class. Quant. Grav. **17**, 3571 (2000).

[16] J. Polchinski, M. J. Strassler, Phys. Rev. Lett. **88**, 031601 (2002).

[17] F. Quevedo, C. A. Trugenberger, Nucl. Phys. B **501**, 143-172 (1997).

[18] C. Hull, P. K. Townsend, Nucl. Phys. B **438**, 109 (1995).

[19] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A **133**, 60 (1931); Phys. Rev. **74**, 817 (1948).

[20] C. Wotzasek, Phys. Rev. D **58**, 125026 (1998).

[21] J. L. Noronha, D. Rocha, M. S. Guimarães, C. Wotzasek, Phys. Lett. B **564**, 163 (2003).

[22] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, 1975.

[23] L. Silberstein, Ann. der Physik **24**, 783-784 (1907). Esta maneira de escrever as equações de Maxwell usando uma combinação complexa de campos elétricos e magnéticos foi descoberta realmente há muito tempo. Esta referência foi obtida de [4].

[24] Para uma revisão sobre as características das partículas do modelo padrão acesse o endereço eletrônico do Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/pdg.html>.

[25] G. t'Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).

[26] A. M. Polyakov, JETP Lett. **20**, 194 (1974).

[27] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. B **426**, 19-52, (1994), *Erratum* Nucl. Phys. B **430**, 485 (1994).

[28] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, volumes I e II, Cambridge University Press, 1995; L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1985.

[29] J. H. Schwarz, hep-ex/0008017.

[30] A. Aurilia, S. Ansoldi, E. Spallucci, Class. Quantum Grav. **19**, 3207 (2002).

[31] P. K. Townsend, hep-th/9507048 (ver se foi publicado).

[32] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[33] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

[34] X. Bekaert, *Issues in eletric-magnetic duality*, Tese de doutorado, hep-th/0209169.

[35] C. Teitelboim, Phys. Lett. B **167**, 63 (1986); Phys. Lett. B **167** 69 (1986).

[36] H. Kleinert, Int. J. of Mod. Phys. A **7**, 4693-4705 (1992).

[37] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill Companies, 1965.

[38] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[39] K. Lechner, P. A. Marchetti, Nucl. Phys. B **672**, 264 (2003); Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **102** e **103**, 94 (2001).

[40] M. Kosterlitz, D. Thouless, J. Phys. C **5**, L124 (1972); **6**, 1181 (1973).

[41] B. Julia, G. Toulouse, J. Physique Lett. **40**, 396 (1979).

[42] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979).

[43] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[44] C. Nash, S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, London, 1983.

[45] M. K. Prasad. C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975); E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).

[46] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **120**, 429 (1977); *Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic Publishers, 1987.

[47] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964); Phys. Rev. **145**, 145 (1966).

[48] Y. Nambu, Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974).

[49] H. B. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).

[50] Para uma revisão sobre este assunto veja, S. Mandelstam, Phys. Rept. **23**, 245 (1976).

[51] S. E. Hjelmeland, U. Lindström, hep-th/9705122.

[52] E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **30**, 209 (1957).

[53] D. Zwanziger, Phys. Rev. D3 (1971) 880. S. Deser, C. Teitelboim, Phys. Rev. D **13**, 1592 (1976); J. Schwarz, A. Sen, Nucl. Phys. B **411**, 35 (1994); N. Berkovits, Phys. Lett. B **388**, 743 (1996); S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux, C. Teitelboim, Phys. Lett. B **400**, 80-86, (1997).

[54] C. Wotzasek, Phys. Rev. D **58**, 125026 (1998).

[55] R. Banerjee, B. Chakraborty, J. Phys. A **32**, 4441 (1999); R. Banerjee, C. Wotzasek, Phys. Rev. D **63**, 045005 (2001).

[56] P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin, Phys. Lett. B **352**, 59 (1995); Phys. Rev. D **52**, 4277 (1995).

[57] K. Lechner, P. A. Marchetti, Nucl. Phys. B **569**, 529 (2000).

[58] L. Faddeev, R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **60**, 1692 (1988).

[59] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.

[60] P. K. Townsend , K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **136**, 38 (1984).

[61] R. Floreanini, R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **59**, 1873 (1987).

[62] J. Schwarz, A. Sen, Nucl. Phys. B **411**, 35 (1994).

[63] J. L. Noronha, C. Wotzasek, quant-ph/0306081, submetido ao Phys. Rev. A.

[64] J. L. Noronha, M. S. Guimarães, C. Wotzasek, trabalho em progresso.

[65] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982); S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Ann. Phys. **140**, 372 (1982).

[66] D. Berman, Phys. Lett. B **403**, 250 (1997); E. Verlinde, Nucl. Phys. B **455**, 211 (1995).

[67] B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge.

[68] G. de Rham, *Differentiable manifolds. Forms, Currents, Harmonic Forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[69] C. Nash, hep-th/9709135.

"Dualidade, Condensação de Branas e grupos de Dualidade para p-Formas Massivas"

Jorge José Leite Noronha Junior

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Clovis Wotzasek – Presidente/UFRJ

Silvio Paolo Sorella - UERJ

Ligia Maria Coelho de Souza Rodrigues – CBPF

Rio de Janeiro, 24 de setembro de 2004