Tese de

Doutorado

# Fixações de Gauge para o Modelo Super$-BF$

Wesley Spalenza

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/MCT

Rio de Janeiro, Junho de 2004

# DEDICATÓRIA

Esta tese é dedicada a:

*Minha amada esposa Viviane, meus pais Rubens e Isaltina e minha irmã Ana Rachel.*

# AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus pela vida, e pelo privilégio de poder servi-lo.

- Aos meus orientadores, Olivier e Helayel, pela amizade, pelo grande carinho, paciência, disposição, pelas palavras sábias nos momentos certos, pelo grande conhecimento que aprendi a adimirar, bom! dispensam apresentações.

- Aos amigos: Wander e Gilmar, pela amizade, discussões, companheirismo e trabalho.

- A amizade dos professores: Clisthenis, pelo grande ajuda desde a graduação, nos trabalhos e publicações; Daniel, pela força, companheirimos e conhecimento; José Alexandre, pelo incentivo nos primeiros passos da carreira que me foi tão importante; Tião; Carlos Pinheiro e a todos os professores do DCP e da UFES que contribuiram para minha formação.

- A toda galera do DCP pelo companheirismo: Thales, Léo Moraes, Léo Assis (Coronel), Álvaro, Roger, Humberto, Moisés, etc.

- A Rosângela e Elizete ao pessoal, da biblioteca, do CAT e a todos os servidos do CBPF.

- A todos os colegas da UFES.

- Aos meus compatriotas brasileiros que através do CNPq foi possível realizar este trabalho.

# Resumo

Apresentamos nesta tese, alguns resultados sobre observáveis e o modelo super-BF em teorias topológicas de Yang-Mills, onde as reescrevemos num super-espaço de dimensão arbitrária. Esta supersimetria topológica também é conhecida como simetria de shift. Propomos uma sistematização do estudo das soluções das equações de descida encontradas a partir de um observável. Na fixação de gauge do modelo super-BF, onde reconsideramos a formulação da ação de Yang-Mills topológica apresentada por Horne. A partir daí, elaboramos o modelo generalizado de Blau-Thompson no superespaço, ausente de qualquer correção radiativa, isto, devido ao número de simetrias do modelo, temos apenas gráficos de Feynman tipo árvore. Usamos este formalismo de Teoria de Campos Topológicas no superespaço, para escrever a ação de Avdeev-Chizhov e investigar as carcterísticas topológicas de seu tensor energia-momento, onde confirmamos ser um observável Topológico.

# Abstract

In this thesis, we present some results on the observables and the super BF models in topogical Yang-Mills theories, formulated in a superspace of arbitrary dimension, corresponding to topological supersymmetry, also called shift symmetry. We propose a systematic study of the solutions of Witten's descent equations which lead to the observables. In the gauge fixing of the super BF models, we reconsider the formulation of the toplogical Yang-Mills action presented by Horne. From this we construct a generalized Blau-Thompson model in superspace with arbitrary dimension, without any radiative correction: due to the number of symmetries of the model, only tree Feynman graphs are contributing. We used this formalism of Topological Field Theory in the superspace, to write the Avdeev-Chizhov's action and to investigate the topological type of the energy-momentum tensor, verifying then, to be this an topological observable.

# Índice

# Introdução

As teorias de gauge, são estudadas em várias sub-áreas de pesquisa dentro da Física Teórica de Partículas Elementares. Dentro das teorias topológicas tipo Witten, que são a discussão central deste trabalho, as teorias de gauge tem um papel primordial, por descreverem teorias bem fundamentadas do ponto-de-vista da unitariedade e renormalizabilidade. Isto, porque as teorias topológicas contam com uma particularidade essencial, que é a caracterização global das ações e dos observáveis. Temos também, nestes modelos um grande número de simetrias envolvidas, basicamente a simetria de BRST, a simetria do operador de diferenciação exterior e a supersimetria.

Neste trabalho, foi de extrema preocupação, a contagem dos graus de liberdade dos campos envolvidos na teoria, via suas leis de transformação. Recorremos ao método de quantização de Batalin-Vilkovisky, que significa definirmos um objeto diagramático, que contenha campos fixadores dos graus de liberdade espúrios, conhecidos como multiplicadores de Lagrange dos campos essenciais da teoria ou campos do setor geométrico: numa linguagem mais técnica é chamada de fixação do gauge (calibre) destes campos. Apenas isto, não era suficiente para obtermos a construção esperada, portanto, também recorremos aos métodos de renormalização algébrica para termos um modelo invariante frente a qualquer simetria da teoria. Assim, foi possível generalizar nossa teoria a qualquer dimensão da variedade em questão, o superespaço. O trabalho está disposto da seguinte forma:

No *primeiro capítulo*, apresentamos as idéias básicas introdutórias e bem resumidas sobre Teorias de Campos Topológicas; em seguinda mostramos o formalismo de supersimetria apresentado por Horne, que é um formalismo um pouco semelhante ao apresentado por Witten para descrever a Mecânica Quântica Supersimétrica. Descrevemos o setor geométrico de gauge da teoria, elementos básicos da álgebra do grupo de Lie numa variedade (Pseudo)Riemanniana[1], pentencendo a superconexão de gauge. Esta supersimetria nada mais é que uma simetria de "shift", ou a simetria das cargas fermiônicas; quando estudadas no superespaço são derivadas nas coordenadas de Grassmann. Com isto, foi escolhido um gauge para esta simetria, já que a mesma possui as características de uma simetria de BRST, recuperando assim as transformações originais da Teorias de Campos topológicas introduzidas por Witten. Também, a fim de conhecer e desvendar as características supersimétricas deste formalismo, fizemos também a estensão do número de supersimetrias, i.e., construimos um superespaço com um número arbitrário tanto para dimensões bosônicas quanto fermiônicas.

No *segundo capítulo,* estudamos a determinação de observáveis em Teorias de Campos Topológicas usando o formalismo apresentado no Capítulo 1. Mostraremos que, para o cálculo destes observáveis, a descrição no superespaço é uma grande aliada, pois fica fácil a identificação das características estatísticas (fermiônicas ou bosônicas) dos campos. Aqui, a cohomologia equivariante das simetrias do modelo conduz-nos as equações de descida, cujas soluções levanos aos procurados observáveis. Nossa preocupação não será só encontrá-los mas também futuramente classifcá-los.

O *terceiro capítulo,* consiste nas fixações de gauge de modelos tipo super-BF, utilizando o formalismo usado do Capítulo 1 Escreveremos as fixações de gauge das seguintes ações: primeiramente, a ação de Witten descrita por Horne no superespaço, mostrando as dificuldades de escrevermos os gráficos de Feynman, como citado por Horne em poucas palavras. Em seguida, escreveremos a ação mínima de Blau-Thompson, via método de Batalin-Vilkovisky, quando mostraremos que este método permite-nos escrever todas os gráficos em todas as ordens de renormalização. Também, desenvolvemos uma nova forma de escrevermos o modelo super-BF, uma nova fixação de gauge, sendo este, totalmente invariante frente à simetria de BRST, diferentemente do modelo de Blau-Thompson. Estendemos estes dois modelos a uma super-variedade em qualquer dimensão bosônica e fermiônica, usando a contagem dos graus de liberdade apresentada no Capítulo 1.

No *quarto capítulo* fazemos a supersimetrização topológica do modelo de Avdeev-

[1]Tratando-se de uma teoria topológica, o tipo de variedade diferenciável não importa muito.

Chizhov não-Abeliano, para $N_T = 2$ supersimetrias, na representação do Capítulo 1, onde escrevemos a teoria numa variedade Riemanniana com uma métrica de fundo. Somamos esta ação assim descrita, à ação topológica de super-Yang-Mills descrita por Blau-Thompson[2]. Segundo Geyer, o tensor momento-energia encontrado a partir da ação total de Avdeev-Chizhov, pode ser caracterizado por um observável topológico, sendo a ação invariante frente a simetria de "shift".

Finalmente no quinto capítulo, reunimos as nossas conclusões gerais e pespectivas futuras. Seguem-se os Apêndices A, B e C, onde apresentamos convensões, notações e resultados técnicos auxiliares à leitura dos capítulos.

[2]Poderíamos escolher qualquer uma das ações com D=4 e N=2 desenvolvidas no Capítulo 3, porém optamos em seguir o mesmo procedimento da ação de Witten.

# Capítulo 1

# Teorias de Campos Topológicas e a Supersimetria de "Shift"

## 1.1 Introdução histórica

A história das relações entre problemas físicos, que surgem nos estudos de sistemas dinâmicos e desenvolvimentos matemáticos com respeito a teorias topológicas, tem ultimamente tomado um rumo que converge para o que conhecemos como teorias de gauge, estas como forma de se entender o real significado das teorias clássicas de Yang-Mills com soluções de instantons. O estudo destas equações, conduz a avanços matemáticos significativos em topologia e geometria em geral. Recentemente estes resultados vêm emergindo no âmbito da teoria quântica de campos topológica. A partir daí ocorreu um aumento significativo nas pespectivas sobre teorias conformes em duas dimensões e em modelos de mecânica estatística, como uma promessa de vislumbrar nas teorias de cordas, enriquecendo, assim, as teorias quânticas de campos em seu contexto geral. Teorias de campos topológicas, são caracterizadas por observáveis (funções de correlação) que dependem somentes das características globais do espaço em que estas teorias são definidas. Em particular, os observáveis são independentes de uma métrica, definidos para descreverem sistemas clássicos. Este é um resultado notável, que pode garantir covariância na teoria quântica, sem a necessidade de integração sobre a métrica, como é feito na gravitação quântica, por exemplo. Os invariantes geométricos e topológicos que são calculados por técnicas padrão, são de extremo interesse na matemática atual, como a busca de se entender e mapear variedades ainda desconhecidas. Do ponto de vista matemático, as teorias topológicas apresentam certos invariantes globais, cujas propriedades são refletidas nas integrais de trajetórias. Embora cada derivação não possa ser considerada rigorosa, podem ser checadas por outros métodos físicos (Hamiltonianas) e matemáticos.

A origem das teorias de campos topológicas, foi remontada nos trabalhos de Schwarz e Witten. Schwartz foi quem mostrou em 1978 [6], que a torção de Ray-Singer – um particular invariante topológico – poderia ser representado como uma certa função de partição para uma certa teoria quântica de campo. Distinto desta observação, foi o trabalho de Witten, em 1982 [7], onde uma estrutura foi dada como entendida – Teorias de Morse – em termos da mecânica quântica supersimétrica. Estas duas construções representam os protótipos de todas as teorias de campos topológicas conhecidas e estudas atualmente. O modelo usado por Witten, também encontra aplicações em teorias clássicas de índices [8] . O significado da construção de Witten, foi idealizado e realizado por Floer [9], quem aplicou técnicas similares a um conjunto dimensional finito, para obter novos resultados concernentes a topologia de variedades tridimensionais. Este resultado foi claramente relatado por Donaldson [10], agora para uma geometria de variedades quadridimensionais. Num interessante trabalho [11], Atiyah descobriu que, numa certa teoria de campos topológica, estes resultados poderiam ser aplicados. Ele construiu uma Hamiltoniana não-relativística em uma variedade tridimensional cujo "ground-state" obedecem aos grupos de Floer. Um Lagrangiano relativístico quadridimensional foi descrito por Witten em 1988, que supriu algumas dúvidas levantadas na literatura da época, e que estabelecia um "link" entre resultados em variedades com dimensões iguais a três e quatro. Completamente à parte destes desenvolvimentos, um novo polinômio invariante de "knot" foi construído por Jones em 1985 [12]. Este trabalho foi influenciado por problemas de mecânica estatística em duas dimensões. Como em todas as teorias sobre "knot", os invariantes foram baseados em projeções bidimensionais. Como os "knot" são objetos que vivem intrinsicamente em regiões de variedades tridimensionais, estes polinômios foram estudados em três dimensões. Num paper clássico de Witten [13], surge uma pergunta sobre as construções de "knot" polinomiais, como funções de correlação de operados de loops de Wilson, em uma teoria quântica de campos tridimensional era definida pela ação de Chern-Simons. Além disto, esta teoria incorpora generalizações significantes dos invariantes previamente conhecidos. Enquanto estas teorias com campo matemático são auto-evidentes, teorias de Chern-Simons, também mostram uma unificação em variedades tridimensionais sob o ponto de vista bi-dimensional, com relação a teorias de campos conformes, bem como em gravitação quântica em três dimensões [14], outros exemplos de teorias topológicas foram também descritas por Witten [15] [16], como o modelo-sigma topológico, usado para construir invariantes em variedades complexas e que são relatados em outros trabalhos de Floer [17]. Também de extrema importância, foram os estudos de modelos de gravitação topológica em variedades bi-dimensionais. A partir daí, realmente acreditou-se que as teorias de cordas não-críticas, contendo matéria, seriam equivalentes a gravitação topológica acoplada a matérias topológicas. Dentro destes desenvolvimentos, foi natural tentar entender se estes modelos foram exemplos isolados, ou se eles pertencem a uma larga classe de teorias que desfrutam de propriedades similares as topológicas. É necessário entender a estrutura formal das teorias de campos das ações de Witten. Uma explanação da origem destas ações foi dada por vários grupos, e uma prescrição geral para a construção destes e de outros modelos desenvolvidos. Vejamos então, uma introdução básica às idéias das teorias de campos topológicas.

## 1.2 Aspectos gerais das Teorias de Campos Topológicos

Antes de entrarmos no propósito real do nosso trabalho, introduziremos primeiro algumas definições e propriedades usadas por todas as teorias topológicas. Dentre estas há simples argumentos formais que estabelecem, com algumas exceções, a natureza topológica de um dado modelo. Usaremos um esquema de classificação de teorias conhecidas. Caracterizamos modelos como sendo de Witten ou Schwarz; o protótipo do primeiro, sendo as Teorias de Donaldson, enquanto as teorias de Chern-Simons são bem conhecidas como exemplos das classes de Schwarz. Finalmente, introduziremos a importante noção de um espaço chamado espaço modular, que contém os dados sobre os quais todas as teorias de campos topológicos são contruídas.

### 1.2.1 Definições

Começamos mostrando os ingredientes essenciais e fundamentais nas convenções para se definir as teorias de campos de gauge, por exemplo, teorias de Yang-Mills. Denotamos uma coleção de campos, por $\Phi$, que inclui campos de gauge, de matéria, ghosts e multiplicadores de Lagrange. Correnspondendo à simetria de gauge local, construímos um operador de BRST, $Q$, independente da métrica e nilpotente, $Q^2 = 0$. A variação de um funcional, $\mathcal{O}$, de um campo, $\Phi$, é denotada por

$$\delta\mathcal{O} = \{Q, \mathcal{O}\}, \tag{1.1}$$

onde $\{,\}$ é o comutador graduado e $Q$ é uma carga de natureza fermiônica. A ação quântica completa, $S_q$, abrange a ação clássica, $S_c$, junto com os termos necessários, como termos de fixação de gauge e de ghosts, sendo estes invariantes frente a transformações de $Q$, por construção. O espaço de Hilbert físico é definido pela condição:

$$Q|estado\rangle = 0;$$

além disto, estados físicos da forma $|\text{estado}\rangle' = |\text{ estado}\rangle + Q|\psi\rangle$, são considerados como equivalentes a $|estado\rangle$, para qualquer estado $|\psi\rangle$. Um estado que é aniquilado por $Q$ é dito ser um estado fechado em $Q$, enquanto um estado $Q|\psi\rangle$ é chamado de um estado exato em $Q$. Esta relação de equivalência, particiona o espaço de Hilbert físico no que chamamos de classes de cohomologia de $Q$, i.e., estados que são fechados e exatos em $Q$. A partir da invariância de BRST de um vácuo, segue imediatamente que o valor esperado do vácuo de $\{Q, \mathcal{O}\}$ para qualquer funcional $\mathcal{O}$, é nulo:

$$\langle 0|\{Q, \mathcal{O}\}|0\rangle \equiv \langle\{Q, \mathcal{O}\}\rangle = 0. \tag{1.2}$$

Supomos a partir de agora, que definimos nossa teoria em alguma variedade $M$, com uma métrica $g$. Neste caso, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, é definido pela mudança na ação sobre uma deformação infinitesimal da métrica, dando a seguinte relação

$$\delta_g S_q = \frac{1}{2}\int_M d^n x\,\sqrt{g}\;\delta g^{\mu\nu}\;T_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

Finalmente, tomamos que a medida do funcional na integral de tragetória seja invariante em $Q$ independente da métrica. Estamos, agora, na posição de definir o que conhecemos por uma teoria de campos topológica [18] [15]. Vejamos as definições que determina uma teoria de campos topológicos.

**Postulado.** Uma teoria de campos topológica consiste de:

*(a) Uma coleção de campos $\Phi$ (que são graduados de Grassmann) definidos sobre uma variedade (Pseudo)Riemanniana $(M, g)$,*

*(b) Um operador nilpotente, $Q$, que é impar com respeito à graduação de Grassmann,*

*(c) Estados físicos definidos como sendo classes de cohomologia de $Q$,*

*(d) Um tensor energia-momento que é exato em $Q$, i.e.*

$$T_{\mu\nu} = \{Q, V_{\mu\nu}\}, \tag{1.4}$$

*sendo que $V_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}(\Phi, g)$.*

Aqui, $Q$ tem uma identificação especial, não só como uma carga supersimétrica, mas também um operador de BRST, i.e., contém uma graduação de Grassmann correspondentes ao número de ghosts da teoria. Entretanto, deveríamos lembrar que esta identificação não é obrigatória; isto ocorre se houver este tipo de simetria na teoria; portanto, nos referimos a partir de agora a $Q$ como um operador de BRST. Além disto, $Q$ é, em geral, independente da métrica, sendo esta realmente a situação mais simples a se tratar. Consideremos agora a função de partição

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi \, \exp[-S_q]; \tag{1.5}$$

fazendo uma mudança infinitesimal sobre a métrica, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta_g Z &= \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q](-\delta_g S_q) \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q](-\frac{1}{2}\int_M d^n x \sqrt{g}\, \delta g^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu}) \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q](-\frac{1}{2}\int_M d^n x \sqrt{g}\, \delta g^{\mu\nu}\, \{Q, V_{\mu\nu}\}) \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q]\{Q, \chi\} \\
&= \langle 0|\{Q, \chi\}|0\rangle \qquad (1.6) \\
&= \langle \{Q, \chi\} \rangle = 0, \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

onde usamos (1.4) e

$$\chi = -\frac{1}{2}\int_M d^n x \sqrt{g}\, \delta g^{\mu\nu}\, V_{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

Vemos, assim, que dada uma invariância de BRST do vácuo, temos um função de partição que é independente da métrica, isto é, a função de partição não depende de uma estrutura local da variedade, mas somente de propriedades globais, tornando $Z$ um invariante topológico. Desta forma, talvez devêssemos esclarecer o uso da terminologia "topológico". Em todos os casos, nossa teoria é definida com respeito a uma variedade "base" $M$. Esta poderia ser, por exemplo, uma variedade Riemanniana com uma métrica $g$, ou uma situaç ão mais geral. O que temos que mostrar é que se as condições *(a)-(d)* são satisfeitas, então a função de partição toma um valor constante sobre o espaço de todas as métricas em $M$. Daqui em diante, usaremos o termos "topológico" para especificar esta independência da métrica. Duas variedades, $M$ e $M'$, são ditas ser homeomóficas se existe um homeomorfismo $f : M \to M'$ (i.e. $f$ e $f^{-1}$ são mapeamentos contínuos). Podemos, assim, particionar as variedades em classes de equivalências de homeomorfismos, e um objeto que é tomado uma constante sobre uma carta, é chamado um invariante diferencial da variedade $M$. Um invariante frente uma deformação métrica (i.e. topológico) é certamente um invariante de difeomorfismo e daí correspondendo a um invariante diferencial. Considere o valor esperado do vácuo de um observável $\mathcal{O}$, dado por

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q]\, \mathcal{O}(\Phi) = Z\ \{\mathcal{O}(\Phi)\}. \tag{1.9}$$

Gostaríamos de determinar condições suficientes para que este valor esperado seja um invariante topológico, i.e., $\delta\langle\mathcal{O}\rangle = 0$. Procedendo como anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \delta\langle\mathcal{O}\rangle &= \delta_g \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q]\mathcal{O}(\Phi), \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp[-S_q]\left[\delta_g\mathcal{O}(\Phi) - (\delta_g S_q)\mathcal{O}(\Phi)\right]. \end{aligned}$$

Suponha que

$$\delta_g\mathcal{O}(\Phi) = \{Q, R\} \quad e \quad \{Q,\mathcal{O}\} = 0, \qquad \forall\ R, \tag{1.10}$$

temos que

$$\begin{aligned} \delta_g\langle\mathcal{O}\rangle &= \langle\{Q, R+\chi\mathcal{O}\}\rangle \\ &= \langle\{Q,R\}\rangle + \langle\{Q,\chi\mathcal{O}\}\rangle = 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se $\mathcal{O}' = \{Q,\mathcal{O}\}$, fica automático que $\langle\mathcal{O}\rangle = 0$. Daí, o interesse real na classe de cohomologia do operador $Q$ (i.e., operadores de BRST invariantes que não são exatos em $Q$) que satisfaz $\delta_g\langle\mathcal{O}\rangle = \langle\{Q,R\}\rangle$. Deveríamos notar que fazemos uso essencial da independência da métrica na medida do funcional. Para mostrar que esta afirmação é, de fato, realizada, precisamos checar as anomalias da métrica. Queremos, então, uma classificação conveniente para as teoria de campos topológicas conhecidas. Já vimos que as teorias topológicas podem ser classificadas como teorias tipo Witten e Schwarz. Vamos primeiro identificar as características de uma teoria Witten. Neste caso a ação quântica completa $S_q$, que abrange a ação clássica e termos necessários, pode ser escritas comutadores de BRST:

$$S_q = \{Q, V\}, \tag{1.12}$$

para algum funcional $V = V(\Phi, g)$, e $Q$ nilpotente e em geral independente da métrica. Existem também a liberdade de adicionarmos um termo topológico à ação (1.12), i.e., termos pelo qual o Lagrangeano é localmente uma derivada total.

**Lema.** O tensor-energia-momento como consequência de (1.12), é dado por

$$T_{\mu\nu} = \{Q, \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}}\}; \tag{1.13}$$

**Prova:** A partir da equação (1.3) e da variação de (1.12) com respeito a métrica, temos:

$$\delta_g S_q = \{Q, \delta_g V\},$$

e ficamos com o seguinte resultado:

$$\frac{1}{2}\int_M d^n x\sqrt{g}\,\delta g^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu} = \{Q, \delta_g V\}.$$

Da equação (1.4), obtemos

$$\{Q, \frac{1}{2}\int_M d^n x\sqrt{g}\,\delta g^{\mu\nu}\,V_{\mu\nu}\} = \{Q, \delta_g V\},$$

onde temos

$$V_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Assim asseguramos a natureza topológica do modelo.

□

Para aproximações semi-clássicas, em que as integrais de tragetória são dominadas por flutuações ao redor do valor clássico mínimo, cada aproximação é dita ser exata para teorias tipo Witten. Um argumento similar aplica-se a eq. (1.9), estabelecendo a exatidão da aproximação para funções de correlação. Para o caso das teorias tipo-Schwarz, não começamos com uma ação clássica, $S_c(\Phi)$, independente da métrica, que não é uma derivada total. Para uma fixação de gauge, a ação total para alguns casos, assume a seguinte forma:

$$S_q(\Phi, g) = S_c(\Phi) + \{Q, V(\Phi, g)\}; \tag{1.14}$$

se a ação clássica é independente da métrica, o tensor energia-momento anula-se. Se a equação acima carrega o tensor energia-momento, este é dado pela equação 1.13 com inteira contribuição vinda dos termo de fixação de gauge e ghosts. Segue, então, que $Z$ é independente da métrica. Em resumo, quando as condições *(a)-(d)* são satisfeitas, ocorre que

$$\begin{aligned} \langle estado|' H|estado\rangle &= \langle estado|' \int T_{00}|estado\rangle \\ &= \langle estado|' \int \{Q, V_{00}\}|estado\rangle = 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $H$ é a Hamiltoniana. Assim, vemos que, se a energia de um estado físico é zero, não há excitações físicas neste sistema.

### 1.2.2 Espaços Modulares de Campos, Equações e Simetrias

Na seção anterior, esboçamos as características gerais comuns a todas as teorias de campos topológicas estudadas. Os conceitos que se encontram no centro de todas estas teorias é essencialmente a noção de espaço modular. Para um dado espaço modular, existem muitas diferentes teorias de campos topológicos (i.e., diferentes campos, equações e simetrias) que a descrevem. Em outros casos estas diferenças podem simplesmente ser relacionadas a liberdade inerente no progrma de quantização. Existem também espaços modulares que possuem várias descriçõs clássicas diferentes, associadas a teorias estritamente topológicas. Contudo, este espaço é único para todas estas teorias que serão apresentadas. Grosseiramente falando, um espaço modular é o conjunto de classes de equivalências de certos objetos, definidas a partir de uma variedade base. Duas superfícies de Riemann, $M$ e $M'$, são consideradas equivalentes se existe um difeomorfismo $f : M \to M'$ que é holomórfico em âmbas direções. Os espaços modulares de superfícies de Riemann é, então, o conjunto de classes de equivalência em que quaisquer dois pontos distintos, representam superfícies de Riemann, não necessáriamente equivalentes. Na prática, os espaços modulares podem carregar uma estrutura geométrica adicional, assim os espaços modulares de superfícies de Riemann, com uma métrica $g$, podem ser considerados como uma variedade de dimensão finita. O espaço modular de superfícies de Riemann, podem como qualquer outro espaço modular, ser descrito em termos de campos, equações e simetrias [19].

*(FONTE PRINCIPAL* [27]*)*

## 1.3 A supersimetria $N_T = 1$

Desde que foram introduzidas, há 15 anos atrás, as teorias de campos topológicas têm sido consideradas um campo de interesse ativo pela comunidade de Física. Por exemplo, veja as referências, [13, 18, 19]. Um destes interesses é a classificação de observáveis, que são caracterizados por uma natureza global, por exemplo, invariantes de "nó (Knot)" em teoria de Chern-Simons e pelos invariante de Donaldson em teorias de Yang-Mills. Para teorias de YM e teorias gravitacionais, este observáveis, pertencem originalmente à classe de cohomologia equivariante, mostrado por Witten em seu trabalho, abrindo caminho para Teorias de YM topológicas em quatro dimensões [18] e mais adiante elucidando o ponto de vista matemático sobre o assunto [23]. Um ponto crucial é que a cohomologia de $Q$, embora vazia no espaço funcional local irrestrito, se torna não-vazia se a invariância de gauge é imposta nestes funcionais [23, 25]. Como apontado por Horne [26], o operador de supersimetria pode ser representado como a derivada com respeito a variável de Grassmann, $\theta$, dentro de um formalismo de supercampos tal que a invariância de medida é implementada como invariancia de supergauge que segue a introdução de um superconexão para o modelo. Embora foram achadas formulações de supercampos deste tipo sendo bastante úteis para a discussão da dinâmica e simetrias de modelos de topológicos, tipo o modelo de Witten [23, 26], estes não têm sido usados sistematicamente para a obtenção e determinação de observáveis. Teorias de campos topológicas de Witten podem ser obtidas a partir de teorias de gauge com supersimetrias estendidas com um chamdado "twist" apropriado. A invariância sob transformações de supersimetrias extendidas dá origem a uma simetria de "shift" no modelo topológico. Assim a invariância é freqüentemente chamada como transformação de supersimetria e pode ser convencionalmente descrita no superespaço [23, 26]. A formulação no superespaço que nós usaremos foi apresentada por Horne [26], e por comodidade em vez de carregarmos o símbolo $N_T$ para o número de supersimetria topológica, escreveremos apenas $N$, ficando implícito a característica topológica desta supersimetria. Vamos, então, introduzir a formluação geométrica de objetos no superespaço.

### 1.3.1 Definições no superespaço

Estendemos uma variedade espaço-temporal $D$-dimensional com uma supervariedade de coordenadas $\theta$, obtendo assim o chamado superespaço parametrizado por coordenadas locais $(x^\mu, \theta)$, sendo $\mu = (0, ..., D)$. Caracterizamos um número de supersimetrias para os campos e coordenadas. Por definição, tomamos este número para a coordenada $\theta$ sendo $-1$. Um supercampo neste superespaço pode ser escrito como

$$F(x,\theta) = f(x) + \theta f'(x), \tag{1.16}$$

onde $f(x)$ tem a mesma paridade de Grassmann do supercampo $F(x,\theta)$, enquanto o parceiro supersimétrico $f'_\theta(x)$, tem paridade oposta. Mais precisamente um supercampo é determinado e caracterizado por uma determinada transformação de supersimetria, isto que diferencia um supercampo de uma simples superfunção. Uma $p$-superforma admite a seguinte expansão

$$\widehat{\Omega}_p(x,\theta) = \sum_{k=0}^{p} \Omega_{p-k}(x,\theta)(d\theta)^k, \tag{1.17}$$

onde $\Omega_{p-k}$ é uma $(p-k)-$forma-supercampo. As componentes da $p$-superforma (1.17) são realmente $(q = p-k)-$formas cujos coeficientes são supercampos

$$\Omega_q(x,\theta) = \frac{1}{q!}\Omega_{\mu_1...\mu_q}(x,\theta)dx^{\mu_1}...dx^{\mu_q} = \omega_q(x) + \theta\omega'_q(x). \tag{1.18}$$

Expressões no superespaço do tipo (1.18) se referem a supercampos como formas, omitimos o símbolo de produto exterior, a fim de tornar mais compactas nossas equações. A derivada exterior no superespaço é definida por: $\widehat{d} = d + d_\theta$ com $d = dx^\mu\partial_\mu$ e $d_\theta = d\theta\partial_\theta$, sendo que $\widehat{d}^2 = d^2 = d_\theta^2 = 0$ e $[d, d\theta\partial_\theta] = 0$ [1]. Uma transformação infinitesimal de

[1] Onde aqui [,] denota o comutador graduado, sendo definido como anticomutador, se um dos elementos for um férmions e comutador para se os dois forem bósons (ímpar e par respcctivmente de acordo com a

supersimetria global é dada por uma translação na variável $\theta$, $\theta \rightarrow \theta + \varepsilon$, sendo $\varepsilon$ um parâmetro fermiônico, com a mesma paridade do $\theta$. Assim, identificamos operador de carga supersimétrica como operador de translação de supersimetrias

$$\varepsilon Q = \varepsilon \partial_\theta \Longrightarrow Q = \partial_\theta,$$

e este é nilpotente $Q^2 = 0$.

**Proposição:** O grupo de cohomologia do operador $Q$ de supersimetria, $H(Q)$ é trivial se $Q\varphi = 0$ então $\varphi = Q\varphi'$.

**Prova:** A prova é direta se os campos são representados por dubletos, $\{\varphi, \varphi'\}$, fornecendo a identidade acima. A estensão para o superespaço é feita simplesmente definindo um supercampo, $F(x,\theta) = f(x) + \theta f'(x)$, com a propriedade de transformação de SUSY

$$QF(x,\theta) = \partial_\theta F(x,\theta), \tag{1.19}$$

assim em componentes teremos

$$Qf(x) = f'(x) \quad e \quad Qf'(x) = 0. \tag{1.20}$$

□

Então, em geral, escreve-se o supercampo como dado pela eq. (1.16) e a superforma (1.17)

$$\widehat{\Omega}_p(x,\theta) = \widehat{\Omega}_p(x) + \theta Q \widehat{\Omega}_p(x). \tag{1.21}$$

Dizemos estar numa teoria com $N = 1$ SUSY. Enquanto uma $p-$forma ordinária pode ser integrada sobre uma variedade de dimensão $p$, não existe o análogo para uma $p-$superforma, devido à paridade de uma diferencial de comprimento no superespaço ser contrária a diferencial de bases no espaço de formas fermiônicas. Lembrando que isto pode ser feito para diferenciais de comprimento e diferenciais bases do espaço das formas bosônicas, pois as paridades são as mesmas. Portanto, consideramos uma coleção $\mathcal{M} = (M_0, M_1, ..., M_p)$ de varidades tipo espaço-temporal fechadas, assim definimos a integral de uma $p$-superforma (1.17), que seja soma direta desta coleção

$$\int_{\mathcal{M}} \widehat{\Omega}_p(x,\theta) = \sum_{k=0}^{p} (d\theta)^k \int_{M_{p-k}} \Omega_{p-k}(x,\theta), \tag{1.22}$$

paridade de Grassmann).

pela propriedade de intergração grasmanniana e pela forma do operador de carga supersimétrica temos que

$$\int d\theta \int_{\mathcal{M}} \widehat{\Omega}_p(x,\theta) = Q \int_{\mathcal{M}} \widehat{\Omega}_p(x,\theta), \tag{1.23}$$

sendo que $\int d\theta = \partial_\theta = Q$. Ou também, explicitando em componentes

$$\begin{aligned}\int d\theta \int_{\mathcal{M}} \widehat{\Omega}_p(x,\theta) &= \sum_{k=0}^{p} (d\theta)^k \int_{M_{p-k}} Q\Omega_{p-k}(x,\theta)\\ &= \sum_{k=0}^{p} (d\theta)^k \int_{M_{p-k}} \omega'_{p-k}(x),\end{aligned}$$

onde usamos (1.18).

### 1.3.2 Formalismo de BRST

No formalismo de BRST, os parâmetros de transformações infintesimais de simetria são identificados dentro dos campos de ghost. Temos o que chamamos de número de ghost, que é $g = 1$, enquanto os campos fundmentais aparecem na ação invariante (i.e. a conexãç para Teoria de Yang-Mills topológica) tendo o número de ghost nulo, ou seja, o número de ghost total da ação deve desaparecer. A paridade de Grassmann de um objeto é dada pela paridade total deste, tal que $p + g + s$, onde $p$ é o grau da forma, $g$ o número de ghost e $s$ o número de supersimetrias. Todas as relações de comutaç ão e anticomutação assumem a classificação de acordo com estes graus específicos.

### 1.3.3 Superconexão e Supercurvatura

O elemento básico de uma teoria de Yang-Mills é a conexão. Como a teoria topológica será desenvolvida no superespaço, o elemento básico será uma 1-superconexão de gauge $\hat{A}$. Introduzimos também um 0-superforma - o super-ghost $\hat{C}$, e ambos elementos da álgebra do grupo de Lie associada ao grupo de gauge.

$$\hat{A} = \hat{A}^a T_a, \;\; \hat{C} = \hat{C}^a T_a, \;\; [T_a, T_b] = f_{ab}^{\;\;c} T_c, \; Tr(T_a T_b) = k\delta_{ab}. \tag{1.24}$$

onde $T^a$ são as matrizes geradoras do grupo de Lie e $f_{ab}^c$ a constante de estrutura de grupo. Escrevemos, assim, a 1-superforma conexão e a 0-superforma ghost como:

$$\hat{A}(x,\theta) \;\; \equiv \;\; A_\mu(x,\theta)dx^\mu + E_\theta(x,\theta)d\theta, \tag{1.25}$$

$$\hat{C}(x,\theta) \equiv C(x,\theta). \tag{1.26}$$

Em componentes

$$\begin{aligned}
A(x,\theta) &\equiv a(x) + \theta\psi(x), &(1.27)\\
E_\theta(x,\theta) &\equiv \chi(x) + \theta\phi(x), &(1.28)\\
C(x,\theta) &= c(x) + \theta c'(x). &(1.29)
\end{aligned}$$

A transformação de BRST, $s$, de $\hat{A}(x,\theta)$ e $\hat{C}(x,\theta)$ descreve invariâncias de supergauge, dadas por:

$$s\hat{A} = -\hat{d}\hat{C} - [\hat{A},\hat{C}] = -\hat{D}_{\hat{A}}\hat{C}, \quad s\widehat{C} = -\widehat{C}^2, \tag{1.30}$$

que podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
sA &= -dC - [A,C] = -D_A C, &(1.31)\\
sE_\theta &= -\partial_\theta C - [E_\theta, C] = -D_\theta C, &(1.32)
\end{aligned}$$

com a derivada covariante dada por: $\hat{D}_{\hat{A}}(\cdot) = \hat{d}(\cdot) + [\hat{A},(\cdot)]$. Em componentes

$$D_A(\cdot) = d(\cdot) + [A,(\cdot)] \;\; e \;\; D_\theta(\cdot) = \partial_\theta(\cdot) + [E_\theta,(\cdot)],$$

sendo $(\cdot)$ representando qualquer campo.

Expandindo-se em campos componentes, as transformações de BRST (1.30) lêem-se:

$$\begin{array}{lll}
sa = -D_a c, & s\psi = -[c,\psi] - D_a c', & s\phi = -[c,\phi] - [\chi, c'], \\
sc = -c^2, & sc' = -[c,c'], & s\chi = -[c,\chi] - c'.
\end{array} \tag{1.33}$$

As transformações de supersimetria de todos os campos componentes das equações (1.25) e (1.26) seguem de (1.19)

$$\begin{aligned}
Qa &= \psi, \; Q\psi = 0, \; Q\chi = \phi,\\
Q\phi &= 0, \; Qc = c', \; Qc' = 0,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

sendo que $Q^2 = 0$. Uma supercurvatura de Yang-Mills terá a forma

$$\hat{F} = \hat{d}\hat{A} + \hat{A}^2; \tag{1.35}$$

expandida

$$\hat{F} = f + \psi d\theta + \phi (d\theta)^2 - \theta D_a \psi - \theta d\theta D_a \phi,$$

tal que onde $\hat{d} = dx^\mu \partial_\mu + d\theta \partial_\theta$. Sendo que a supercurvatura de Yang-Mills, é dada por

$$F = dA + A^2, \tag{1.36}$$

e ainda $f = da + a^2$. Usamos estas relações para definirmos os seguinte supercampos

$$\Psi(x,\theta) \equiv \partial_\theta A + D_A E_\theta, \tag{1.37}$$

$$\Phi(x,\theta) \equiv \partial_\theta E_\theta + E_\theta^2, \tag{1.38}$$

os supercampos (1.37) e (1.38) nos permitem escrever (1.35) como

$$\hat{F} = F + \Psi d\theta + \Phi (d\theta)^2,$$

denominadas, então, como componentes da supercurvatura $\hat{F}$. As tranformações de BRST para os supercampos definidos acima são:

$$\begin{aligned} sA &= -D_A C, \ s\Psi = -[C, \Psi], \\ sC &= -C^2, \ s\Phi = -[C, \Phi], \end{aligned}$$

valendo as relações de comutação graduadas: $[s, Q] = [s, d] = [d, Q] = 0$. As tranformações de supersimetria saõ dadas por

$$\begin{aligned} QA &= \Psi - D_A E_\theta, \ QF = -D_A \Psi - [E_\theta, F], \\ Q\Psi &= -D_A \Phi - [E_\theta, \Psi], \ Q\Phi = -[E_\theta, \Phi], \end{aligned}$$

Notamos que $Q$ age em $A, \Psi, \Phi$ e na curvatura $F$ de acordo com

$$Q = Q_0 + s|_{C=E_\theta},$$

com

$$Q_0 A = \Psi, \ Q_0 \Psi = -D_A \Phi, \ Q_0 \Phi = 0,$$

onde o quadrado de $Q_0$ é proporcional a transformações infinitesimais de supergauge do campo $\Phi$, i.e. $Q_0^2 \propto \Phi$. Assim, o operador $Q_0$ é nilpotente quando age sobre polinômios que dependem dos supercampos $F$, $\Psi$, $\Phi$, $D_A\Psi$ e $D_A\Phi$.

### 1.3.4 Transformações de BRST topológicas e o Gauge de Wess-Zumino

A liberdade de supergauge pode se reduzir à liberdade de gauge ordinária impondo a chamada condição de supergauge de Wess-Zumino [1], onde escolhemos.

$$\chi = 0, \tag{1.39}$$

Em virtude das equações (1.31) e (1.32), fixamos $\chi$ e a partir da simetria de "shift" a invariância do operador $s$ nesta condição de gauge requer $c' = 0$. Então reduzimos as transformações de BRST no gauge de Wess-Zumino para

$$sa = -D_a c,\ s\psi = -[c, \psi],\ s\phi = -[c, \phi],\ sc = -c^2.$$

A condição disposta na equação (1.39) não é invariante sobre transformações de supersimetrias do operador $Q$, i.e. sobre as variações (1.34). Uma modificação no operador de supersimetria $Q$ que deixa estas invariante nas transformações (1.34) e a combinação com uma transformação de gauge $s$, tal que

$$\tilde{Q} = (Q + s)\ |_{\chi=c=0,\ c'=\phi}, \tag{1.40}$$

atuando sobre $a$, $\psi$, $\phi$, produzindo então as transformações de supersimetrias no gauge de Wess-Zumino.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}a &= \psi, \\ \tilde{Q}\psi &= -D_a\phi, \\ \tilde{Q}\phi &= 0, \end{aligned} \tag{1.41}$$

que também satisfaz a condição

$$\tilde{Q}^2 \propto (transf.\ de\ gauge\ \ infinitesimal\ de\ \ \phi) \qquad ou \qquad \tilde{Q}^2 = \delta_\phi. \tag{1.42}$$

Um ponto crucial da teoria é o fato do operador $\tilde{Q}$ ser nilpotente quando agindo sobre invariantes polinomiais. Também notamos que a álgebra gerada pelas formas $a$, $\psi$ e $\phi$ e suas derivadas exteriores, juntas com a ação do operador $s$ e $\tilde{Q}$ é isomórfica à álgebra gerada pelas superformas $A$, $\Psi$ e $\Phi$ e suas derivadas exteriores, juntos com a ação dos operadores $Q_0$ e $s$; lembrando que estes campos são covariante de supergauge.

## 1.4 A supersimetria $N = 2$

### 1.4.1 Definições

Introduzimos aqui as componentes da superconexão de gauge e do ghost, evaluada para $N = 2$ no superespaço, como:

$$\hat{A} = A(x_\mu, \theta_I) + E_I\ (x_\mu, \theta_I) d\theta^I, \quad \widehat{C} = C(x_\mu, \theta_I), \tag{1.43}$$

com $I = 1, 2$ (*ver Apêndice A*), os campos componentes, escritos como:

$$\begin{aligned} A(x,\theta) &= a(x) + \theta^I \psi_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \alpha(x), &(1.44)\\ E_I(x,\theta) &= \chi_I(x) + \theta^J \phi_{IJ}(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \eta_I(x), &(1.45)\\ C(x,\theta) &= c(x) + \theta^I c_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 c_F(x) &(1.46)\end{aligned}$$

A superforma Field-Strength [2], ou Supercurvatura definida em (1.35), é reescrita como

$$\hat{F} = \hat{d}\hat{A} + \hat{A}^2 = (dA + A^2) + (\partial_I A + D_A E_I)\ d\theta^I + (\partial_I E_J + E_I E_J) d\theta^I d\theta^J, \tag{1.47}$$

com $\hat{d} = d + d_\theta$, e $d = \partial_\mu dx^\mu$, $d_\theta = \partial_I d\theta^I$, sendo $\hat{d}$ nilpotente, i.e., $\hat{d}^2 = 0$. Identificamos as componentes da supercurvaturas como sendo:

$$\hat{F} = F + \Psi_I\ d\theta^I + \Phi_{IJ}\ d\theta^I d\theta^J, \tag{1.48}$$

explicitamente lêem-se:

$$F = f - \theta^I D_a \psi_I + \frac{1}{2}\theta^2 (D_a \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\,[\psi_I, \psi_J]), \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned} \Psi_I &= \psi_I + D_a \chi_I + \theta^J (\varepsilon_{IJ}\alpha - D_a \phi_{IJ} + [\psi_J, \chi_I]) \\ &\quad + \theta^2 (\frac{1}{2} D_a \eta_I - \frac{1}{2}\varepsilon^{KJ}[\psi_K, \phi_{IJ}] + \frac{1}{2}[\alpha, \chi_I]), \end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{IJ} &= \frac{1}{2}\{\phi_{IJ} + \phi_{JI} + [\chi_I, \chi_J] + \theta^K (\varepsilon_{KI}\eta_J + \varepsilon_{JK}\eta_I + [\chi_I, \phi_{JK}] + [\phi_{IK}, \chi_J]) \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta^2 ([\chi_I, \eta_J] + [\eta_I, \chi_J] - \varepsilon^{KL}[\phi_{IK}, \phi_{JL}])\}, \end{aligned} \tag{1.51}$$

[2] Chamaremos assim o tensor de intensidade de campo de Yang-Mills.

onde $f = da + a^2$ e a derivada covariante em $a$, sendo $D_a(\cdot) = d(\cdot) + [a, (\cdot)]$, com $(\cdot)$ representando qualquer campo.

O número de SUSY, $s$, é definido atribuindo $-1$ a $\theta$. Assim, o gerador de supersimetria $Q$ tem número de supersimetria 1.

A transformação de BRST, dos supercampos componentes da superconexão é dada por

$$sA = -dC - [A, C], \ sE_I = -\partial_I C - [E_I, C] \ e \quad sC = -C^2,$$

e em campos componentes são:

$$\begin{aligned}
&sa = -dc - [a, c] \equiv -D_a c \ , \\
&s\psi_I = -c\,[c, \psi_I] - D_a c_I, \\
&s\alpha = -[c, \alpha] - D_a c_F + \varepsilon^{IJ}\,[c_I, \psi_J]\,, \\
&s\chi_I = -[c, \chi_I] - c_I, \\
&s\phi_{IJ} = -[c, \phi_{IJ}] - \varepsilon_{IJ} c_F + [\chi_I, c_J] \ , \\
&s\eta_I = -[c, \eta_I] - [c_F, \chi_I] + \varepsilon^{JK}[c_J, \phi_{IK}], \\
&sc = -c^2, \\
&sc_I = -[c, c_I], \\
&sc_F = -[c, c_F] + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\,[c_I, c_J]\,.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Generalizamos a derivada covariante como

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{\hat{A}}(\cdot) &= \hat{d}(\cdot) + [\hat{A}, (\cdot)] \\
&= d(\cdot) + [A, (\cdot)] + d\theta^I(\partial_I(\cdot) + [E_I, (\cdot)]) \\
&= D_A + d\theta^I D_I.
\end{aligned}$$

As transformações de supersimetria dos supercampos da teoria, ou simetria de "shift", são definidas de acordo com (1.19), e expressadas como

$$Q_I A = \partial_I A, \ \ Q_I E_J = \partial_I E_J, \ Q_I C = \partial_I C,$$

dando

$$\begin{aligned}
&Q_I a = \psi_I \ , &&Q_I\psi_J = -\varepsilon_{IJ}\alpha, &&Q_I\alpha = 0, \\
&Q_I\chi_J = \phi_{JI}, &&Q_I\phi_{Jk} = -\varepsilon_{IK}\eta_J \ , &&Q_I\eta_J = 0, \\
&Q_I c = c_I, &&Q_I c_I = -\varepsilon_{IJ} c_F, &&Q_I c_F = 0.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

### 1.4.2 Gauge de Wess-Zumino

O gauge de Wess-Zumino visto em [1] [28] [3], aqui é definido pela condição

$$\chi_I = 0 \quad e \quad \phi_{[IJ]} = 0. \tag{1.54}$$

devido ao "shift" linear nas transformações (1.52) dos campos $\chi_I$ e $\phi_{IJ}$ respectivamente nos campos de ghost $c_I$ e $c_F$. Existe agora, apenas o campo simétrico $\phi_{(IJ)}$, que escreveremos, daqui em diante, simplesmente como $\phi_{IJ}$. Esta condição não é invariante sob transformações de SUSY do operador de "shift" $Q_I$, que pode ser definido em termo de um parâmetro fermiônico infinitesimal $\epsilon^I$ como: $Q = \epsilon^I Q_I$.

O operador que deixa esta condição invariante é construído a partir da combinações do operador $Q$ com a transformação de BRST no gauge de Wess-Zumino, tal que

$$\tilde{Q} = (s + Q)|_{c_I = \epsilon^J \phi_{IJ},\; c_F = \frac{1}{2}\epsilon^J \eta_J}\,, \tag{1.55}$$

com os resultados nos campos componentes

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}a &= -D_a c \; + \epsilon^I \psi_I, \\
\tilde{Q}\psi_I &= -\left[c, \psi_I\right] - \epsilon^J D_a \phi_{IJ} + \epsilon_I \alpha, \\
\tilde{Q}\alpha &= -[c, \alpha] + \varepsilon^{IJ} \epsilon^K \left[\phi_{Ik}, \psi_J\right] - \tfrac{1}{2}\epsilon^I D_a \eta_I, \\
\tilde{Q}\phi_{IJ} &= -[c, \phi_{IJ}] + \tfrac{1}{2}\left(\epsilon_I \eta_J + \epsilon_J \eta_I\right), \\
\tilde{Q}\eta_I &= -[c, \eta_I] + \varepsilon^{JK} \epsilon^M [\phi_{JM}, \phi_{IK}], \\
\tilde{Q}c &= -c^2 + \epsilon^I \epsilon^J \phi_{IJ}.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Reproduzindo os resultados de [36].

O número de graus de liberdade total da teoria para $D = 4$, é descrito pela tabela abaixo, tendo como suporte as transformações de Blau-Thompson (1.56) acima

| *Campos* | *# g.l.* | *SUSY* |
|---|---|---|
| $a$ | 4 | 0 |
| $\psi_I$ | 8 | 1 |
| $\phi_{IJ}$ | 3 | 2 |
| $\eta_I$ | 2 | 3 |
| $\alpha$ | 4 | 2 |

(1.57)

com # g.l.:(número de graus de liberdade) e # SUSY:(número de supersimetrias).

[3] Foi dado este nome devido a semelhança de tratarmos de um gauge linear para campos escalares.

## 1.5 Extensão para $N-$SUSY

### 1.5.1 Formalismo num superespaço $D-$DIM e $N-$SUSY

Consideremos agora uma super-variedade $D-$dimensional bosônica e $N-$dimensional fermiônca [4], onde as coordenadas desta supervariedade são: $x^\mu$, com $\mu = (0, ..., D-1)$ – coordenadas bosônicas e $\theta^I$, com $I = (1, ..., N)$ – coordenadas fermiônicas.

Uma expansão nas coordenadas $\theta^I$ de um supercampo genérico $F(x, \theta)$ é escrito como

$$F(x,\theta) = f(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\theta^{I_1}...\theta^{I_n} f_{I_1...I_n}(x), \tag{1.58}$$

onde os índices dos da função $f_{I_1...I_n}(x)$ são ditos completamente antisimétricos. Escrevemos então as componentes da superconexão (1.25):

$$A = a(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\theta^{I_1}...\theta^{I_n} a_{I_1...I_n}(x),$$

como 1-forma de gauge, refletindo nas componentes $a = a_\mu(x)dx^\mu$ e $a_{I_1...I_n} = a_{\mu I_1...I_n}(x)dx^\mu$,

$$E_I = e_I(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\theta^{I_1}...\theta^{I_n} e_{I,I_1...I_n}(x),$$

como 0-forma e

$$C = c(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\theta^{I_1}...\theta^{I_n} c_{I_1...I_n}(x),$$

sendo este o super-ghost também uma 0-forma. A super-curvatura obedece a equação (1.35), e cujas componentes são dadas pela equação (1.47).

### 1.5.2 Gauge de Wess-Zumino

As transformações de BRST dos campos componentes da superconexão são dados por:

$$\begin{aligned} sa &= -dc + ..., \quad sa_{I_1...I_N} = -dc_{I_1...I_N} + ..., \\ se_I &= -c_I + ..., \quad se_{I,I_1...I_N} = -c_{I\ I_1...I_N} + ..., \end{aligned}$$

[4]Consideraremos a notação de supersimetria topológica como sendo $N_T$, porém para não carregarmos demais as equações colocaremos apenas $N$ em alguns casos, que será a mesma coisa.

onde temos escritos apenas os termos lineares das transformações, sendo os outros termos compostos apenas de termos não-Abelianos anticomutadores [5]. Estes indicam que os campos $e_I(x)$ e a parte completamente antissimétrica do campo $e_{I,I_1...I_N}(x)$ são puros graus de liberdade de gauge. Uma possível fixação dos graus de liberdades de gauge é o seu conjunto nulo, assim definido condição de gauge de Wess-Zumino.

$$e_I = 0, \ e_{[I,I_1...I_N]} = 0\,(N \geq 1). \tag{1.59}$$

Esta fixação de gauge corresponde ao ghost $c_{I,I_1...I_N}$ para $N \geq 1$, conduzindo-nos com a invariância de gauge de Yang-Mills parametrizado pelo campo de ghost $c(x)$ que pode fixar qualquer campo da forma usual.

A condição de gauge (1.59) não é estavél frente a transformações de supersimetria do operador $Q_I$ ou equivalentemente a $Q$. Podemos, então, redefinir da seguinte forma

$$\tilde{Q} = \epsilon^I Q_I + \delta_\Lambda \equiv \epsilon^I \tilde{Q}_I, \tag{1.60}$$

onde $\delta_\Lambda$ é uma trasformações de supergauge, dependente de um parâmetro-supercampo fermiônico infinitesimal $\Lambda(x,\theta)$. $\delta_\Lambda$ é de fato a tranformação de BRST (1.33) mas com o superghost $C$ trocado por $\Lambda$. A condição de gauge (1.60), escolhida para modificar o operador de supersimetria $Q$, nos conduz a condições de gauge de WZ invariante, de acordo com (1.59). Devemos agora encontrar a forma do operador de BRST $\delta_\Lambda$, é conveniente reescrevermos a condição de Wess-Zumino como uma condição equivalente no superespaço:

$$\theta^I E_I(x,\theta) = 0. \tag{1.61}$$

Aplicando $\tilde{Q}$ na equação acima e usando a definição de $Q$ e $\delta_\Lambda$, encontramos

$$\tilde{Q}(\theta^I E_I) = -\epsilon^I E_I + \theta^I \partial_I \Lambda + \partial_J(\epsilon^J \theta^I E_I) + [\theta^I E_I, \Lambda], \tag{1.62}$$

que mostra explicitamente que a condição de Wess-Zumino (1.61) é estável, se e somente se $\Lambda$ obedece a equação

$$\theta^I \partial_I \Lambda = \epsilon^I E_I. \tag{1.63}$$

Com esta condição imposta, podemos escrever o parâmetro de gauge, como

$$\Lambda = \epsilon^I \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!n} \theta^{I_1}...\theta^{I_n} \overline{e}_{I,I_1...I_n}(x), \tag{1.64}$$

[5] Ver as expressões para o caso para $N = 1$.

onde os campos $\overline{e}_{I,I_1...I_n}(x)$ são coeficientes da expansão do supercampo $\overline{E}_I$ que é solução de (1.61), e temos que a nilpotencia de $\tilde{Q}$ é uma transformação nos campos:

$$[\tilde{Q}_I, \tilde{Q}_J] = -2\delta_{\bar{e}_{IJ}}.$$

### 1.5.3 Contagem dos graus de liberdade para $N-$SUSY

A sistematização da contagem dos graus de liberdade para $N_T$ supersimetrias extendidas, é a mesma feita para $N = 1$ e $N = 2$, apenas um pouco mais complicado, pois lidamos com índice das séries de Taylor. Para uma variedade $D$-dimensional, temos a seguintes tabelas referente aos respectivos campos:

*Superampo $A$:*

$$\begin{array}{ccc} campos & SUSY & g.l.\text{"}relativos\text{"} \\ a & 0 & D \\ a_I & 1 & \frac{N!}{1!(N-1)!}D \\ a_{[IJ]} & 2 & \frac{N!}{2!(N-2)!}D \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{I_1...I_s} & s & (-1)^s\frac{N!}{s!(N-s)!}D \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{I_1...I_N} & N & (-1)^N D \end{array} . \tag{1.65}$$

A soma total do número de graus de liberdade, é

$$D\sum_{s=0}^{N}(-1)^s\frac{N!}{s!(N-s)!} = (1-1)^N = 0, \tag{1.66}$$

resultado esperado.

*Supercampo $E_I$:*

$$\begin{array}{ccc} campos & SUSY & g.l. \\ e_I & 1 & N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{I,I_1...I_{s-1}} - e_{[I,I_1...I_{s-1}]} & s & N\frac{N!}{(s-1)![N-(s-1)]!} - \frac{N!}{s!(N-s)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{I,I_1...I_{N-1}} & N & \frac{N!}{(N-1)![N-(N-1)]!} \end{array} . \tag{1.67}$$

A contagem dos graus de liberdade dos campos, $e$, simétricos parcialmente nos índices $I$ e $I_s$, é o número de $g.l.$ do campo primitivo menos o do campo totalmente anti-simétrico:

$$\#(e_{I,I_1\ldots I_{s-1}} - e_{[I,I_1\ldots I_{s-1}]}) : \frac{N}{(s-1)!}\frac{N!}{(N-s+1)} - \frac{N!}{s!(N-s)!} = \frac{(N+1)!(s-1)}{s!(N-s+1)!},$$

portanto a soma total será

$$\#(e_I) : \sum_{s=2}^{N+1}(-1)^s\frac{(N+1)!(s-1)}{s!(N-s+1)!} = \sum_{s=2}^{N+1}(-1)^s\frac{(N+1)!}{s!(N+1-s)!}(s-1),$$

usando ainda a fórmula:

$$\frac{1}{a}(a+b)^{N+1} = \sum_{s=2}^{N+1}\frac{(N+1)!}{s!(N+1-s)!}a^{s-1}b^{N+1-s}.$$

Derivando esta com relação a $a$, e tomando $a=-1$ e $b=1$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{N+1}(-1)^s\frac{(N+1)!}{s!(N+1-s)!}(s-1) &= \frac{d}{da}[\frac{1}{a}(a+b)^{N+1}]|_{a=-1}\\ &= -\frac{1}{a^2}(a+1)^{N+1} + \frac{1}{a}(N+1)(a+1)^N|_{a=-1}\\ &= 0,\end{aligned}$$

A soma será então

$$\sum_{s=2}^{N}(\ldots) = \sum_{s=0}^{N}(\ldots) - \sum_{s=0}^{1}(\ldots) = 1,$$

onde $(\ldots) = (-1)^s\frac{(N+1)!}{s!(N+1-s)!}(s-1)$. No final das contas, este é o grau de liberdade longitudinal de $a_\mu$. Portanto, para uma superforma de Yang-Mills topológico $\hat{A}$. tanto numa varidade 4$-$dimensional $N=1$, como numa $D-$dimensional e $N-$supersimetrias, temos a contagem sendo igual a 1. Então, em 4 dimensões e $N=1$, temos que fixar 3 condições de gauge, já em $D-$dimenões e $N-$supersimetrias, precisamos fixar $(D-1)$ condições de gauge.

Finalizando, procuramos neste capítulo, organizar e sistematizar os conceitos, idéias e desenvolvimento mais relevantes da supersimetria em teorias topológicas, reunindo resultados esparsos em artigos e facilitando, assim, uma leitura de introdução ao tópico.

# Capítulo 2

# Observáveis em Teorias de Super-Yang-Mills Topológica

Neste capítulo, usaremos o material apresentado no capítulo anterior, para discutirmos a definição e determinação de observáveis em Teoria de Campos Topológicas tipo-Witten. Adotaremos as definições da supersimetria de "shift" num superespaço proposto por Horne [26]. Usaremos esta abordagem para a aplicação da cohomologia equivariante, que nos conduzirá a um conjunto de equações de bi-descida, onde estão envolvidas as simetrias de BRST a supersimetria de "shift" e também o operador derivada exterior de formas diferenciais. Esta sistematização nos permite determinar expressões para uma classe de observáveis com $N = 1$, onde podemos escrever os chamados polinômios de Donaldson-Witten no gauge de Wess-Zumino, definido no Capítulo 1. Para $N-$estendido, iremos mostrar e classificar os observáveis da forma mais geral possível. Começaremos com uma revisão de resultados conhecidos para $N_T = 1$ [28], generalizando em seguida para um número de supersimetrias $N_T$ qualquer.

## 2.1 Observáveis para $N = 1$

### 2.1.1 Equações de descida

Podemos lembrar que a supercurvatura, escrita em campos componentes, é dada por

$$\hat{F} = f + \psi d\theta + \phi(d\theta)^2 - \theta D_a\psi - \theta d\theta D_a\phi;$$

podemos então, escrevê-la como uma superforma genérica, descrita na equação (1.21):

$$\hat{F} = \mathcal{F} + \theta\tilde{Q}\mathcal{F}, \tag{2.1}$$

onde

$$\mathcal{F} = f + \psi d\theta + \phi(d\theta)^2 \quad e \quad \tilde{Q}\mathcal{F} = -(D_a\mathcal{F})(d\theta)^{-1}, \tag{2.2}$$

sendo que a notação $(d\theta)^{-1}$ é puramente simbólica e $D\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [a, \mathcal{F}]$. Lembramos que $\tilde{Q}$ é o operador de supersimetria, com relação à condição de gauge de Wess-Zumino descrito pela equação (1.40). A quantidade $\mathcal{F}$ representa a curvatura universal num fibrado definido numa supervariedade $\mathcal{M}_d$, considerado por Baulieu-Singer [22] em suas derivações dos Observáveis de Witten. Na verdade estes autores não introduziram a quantidade $d\theta$, mas associaram o número de ghost 1 para $\psi$ e 2 para $\phi$. Para derivações de observáveis, podemos argumentar o seguite: para $m = 1, 2, \ldots$, teremos

$$Tr\hat{F}^m = Tr\mathcal{F}^m + \theta\tilde{Q}Tr\mathcal{F}^m, \tag{2.3}$$

onde o primeiro termo produz os chamados *Polinômios de Donaldson-Witten:*

$$\begin{aligned} Tr\mathcal{F}^m &= Trf^m + Tr(mf^{m-1}\psi)d\theta + \ldots + Tr(m\psi\phi^{m-1})(d\theta)^{2m-1} + Tr\phi^m(d\theta)^{2m} \\ &= \sum_{p=0}^{2m}\omega_p(d\theta)^{2m-p}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

e o segundo termo representa uma derivada total

$$\tilde{Q}Tr\mathcal{F}^m = -d\left[Tr\mathcal{F}^m(d\theta)^{-1}\right]. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.4) em (2.5), obtemos as *Equações de descida de Witten,* para cada polinômios $\omega_p$:

$$\tilde{Q}\omega_p + d\omega_{p-1} = 0 \quad com \quad p = 0, 1, \ldots, 2m, \tag{2.6}$$

### 2.1.2 Combinando as Simetrias

É possível incorporar as transformações (1.41) na álgebra de BRST, introduzindo uma constante comutativa $\varepsilon$ como ghost. O operador de BRST, quando age sobre $a$, $\psi$, $\phi$ revela a seguinte característica:

$$s_{Total} = s + \epsilon\tilde{Q}, \tag{2.7}$$

e sobre $c$ e $\varepsilon$, de acordo com

$$s_{Total}c = -c^2 + \epsilon^2\phi, \qquad s_{Total}\epsilon = 0, \tag{2.8}$$

assegura a nilpotência do operador $s_{Total}$. Mais explicitamente, temos a seguinte expansão:

$$s_{Total} = s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon^2 s_2, \tag{2.9}$$

com

$$\begin{aligned} s_0 a &= -D_a c, & s_1 a &= \psi, & s_2 a &= 0, \\ s_0\psi &= -[c,\psi], & s_1\psi &= -D_a\phi, & s_2\psi &= 0, \\ s_0\phi &= -[c,\phi], & s_1\phi &= 0, & s_2\phi &= 0, \\ s_0 c &= -c^2, & s_1 c &= 0, & s_2 c &= \phi, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde temos que

$$s_0^2 = 0, \qquad [s_0, s_1] = 0, \qquad s_1^2 + [s_0, s_2] = 0. \tag{2.11}$$

Em termos das notações descritas acima, temos que $s_0 = s$ e $s_1 = \tilde{Q}$, que agem sobre $a$, $\psi$, $\phi$. Se considerarmos apenas funcionais $\Delta$ dependendo de $a$, $\psi$, $\phi$, e não de $c$, i.e., funcionais de número de ghost nulos, então a última relação de (2.11) nada mais é que (1.42). Se estes funcionais são invariantes de gauge, então o operador $s_1$ é nilpotente:

$$s_0\Delta = s_2\Delta = 0, \quad \textit{implicando em} \quad s_1^2\Delta = 0, \tag{2.12}$$

Sua cohomologia é referente à cohomologia equivariante. Assim, a cohomologia equivariante é a cohomologia do operador $s_1$ no espaço dos funcionais locais dos campos $a$, $\psi$, $\phi$ e $c$ restrita pela invariância de $s_2$ e $s_0$.

### 2.1.3 Condições de Cociclo

Nas expressões a seguir, usaremos que, para uma forma ${}^{s}\varphi_{p}^{g}$, os índices $p$, $g$, e $s$ denotam o grau da forma, o número de ghost e número de supersimetria, respectivamente.

Consideramos o gauge de Wess-Zumino para descrever os observáveis da teoria. As representações (2.9) e (2.10) de um conjunto completo de transformações de simetria são usadas para especificar a caracterização cohomológica dos observáveis. Como é bem conhecido, a cohomologia do operador $s_{Total}$ é vazia [23]. Não vazia é a cohomologia do operador $\tilde{Q}$, definido pela equação (1.41), no espaço dos funcionais locais invariantes de gauge nos campos $a$, $\psi$, $\phi$. Escrevemos um tal funcional local, como:

$$ {}^{s}\Delta_{(d)} = \int_{M_d} {}^{s}\omega_{d}^{0}\,(x), $$

onde ${}^{s}\omega_{d}^{0}$ é uma $d$-forma e $M_d$ uma variedade $d$-dimensional fechada. Esse funcinal define um observável se obedece à condição de $\tilde{Q}$-cociclo

$$ \tilde{Q}(\ {}^{s}\Delta_{(d)}\ ) = 0, \tag{2.13} $$

e está vinculado à invariância de gauge

$$ s(\ {}^{s}\Delta_{(d)}\ ) = 0. \tag{2.14} $$

Este cociclo é requerido ser não-trivial e independente do ghost

$$ {}^{s}\Delta_{(d)} \neq \tilde{Q}(\ {}^{s-1}\Delta'_{(d)}\ ), \qquad s(\,{}^{s-1}\Delta'_{(d)}\,) = 0, \tag{2.15} $$

onde

$$ {}^{s-1}\Delta'_{(d)} = \int_{M_0} {}^{s-1}\omega'^{0}_{d}(x). $$

Portanto, da lei de transformação de $\tilde{Q}$, segue que uma zero-forma não pode ser escrita como uma variação de $\tilde{Q}$; assim, temos a condição de não-trivialidade na equação (2.15) sendo automaticamente satisfeita no caso $d = 0$.

As equações para integrandos com ${}^{s}\Delta_{(d)}$, i.e. $\tilde{Q}({}^{s}\omega_{d}^{0}) = s({}^{s}\omega_{d}^{0}) = 0$, (módulo derivadas exteriores) são solucionadas como polinômios invariantes de gauge, como o acima descrito. Deste modo, definimos uma cohomologia equivariante, dada por formas diferenciais geradas a partir destes polinômios, em virtude das equações de descida de $\tilde{Q}$ modulo $d$, (as equações (2.6)). Depois de integrada, cada uma destas formas definidas sobre ciclos fechados, obtemos observáveis globais que dependem somente da classe de homologia destes ciclos. Este observáveis referem-se aos *Observáveis de Witten* [19]. Equivalentemente, a cohomologia equivariante pode ser definida como a cohomologia do operador de BRST $s_{Total}$, restrito no espaço dos funcionais locais dos campos $a$, $\psi$, $\phi$, independentes de $c$ e invariantes de gauge. As técnicas matemáticas usadas em cohomologia equivariante [24] permitem-nos construir representativos de cohomologas que coincidem com os observáveis de Witten. Consideremos um número de supersimetria fixado, $s \geq 0$ e um grau de forma fixado $d \geq 0$. A tarefa é encontrar a solução da condição de cociclo

$$s( {}^{s}\Delta_{(d)} ) = 0, \tag{2.16}$$

satisfazendo o vínculo de supersimetria

$$Q( {}^{s}\Delta_{(d)} ) = 0, \tag{2.17}$$

onde

$${}^{s}\Delta_{(d)} = \int_{M_d} {}^{s}\omega_d^0\,(x), \tag{2.18}$$

denota um funcional local com número de supersimetria $s$ que depende das componentes dos supercampos $A$, $E_\theta$ e $C$ e suas derivadas exteriores.

A solução do problema nas condições acima procede em várias etapas. Nossa discussão será puramente algébrica, e não assumiremos a especificação do espaço-tempo em $n$ dimensões. Se todas as formas de graus maiores que $n$ anulam-se, os de graus menores que $n$ podem ser integrados sobre uma sub-variedade $M_d \subset \mathcal{SM}_d$ orientada. Lembremos que $\mathcal{SM}_d$ é uma supervariedade. As variedades são tomadas fechadas o que implica na ausencia de termos de borda na integração em $M_d$. Com isso, excluímos das discussões as soluções triviais da equações (2.16) e (2.17), que existem para os valores $d = 2m$

$${}^{0}\Delta_{(2m)} = \int_{M_{2m}} {}^{0}\omega_{2m}^0\,(x) \equiv \int_{M_{2m}} Tr(\,f^m\,), \qquad m = 1, 2, ..., \tag{2.19}$$

sendo $Tr(f^m)$ a densidade de Pontrjagin, com características locais, dadas pela derivada exterior da forma de Chern-Simons de grau $2m-1$.

De acordo com a equação (1.21), a curvatura 2-superforma tem a forma geral escrita como: $\hat{F}(x,\theta) = \hat{F}(x) + \theta Q\hat{F}(x)$, onde o primeiro termo desta expansão pode também ser escrito como $\widehat{F}|_{\theta=0} = \widehat{F}|$. Para $m = 1, 2, ...,$ a $2m-$superforma $Tr\widehat{F}^m(x,\theta)$ admite uma expressão análoga

$$Tr\hat{F}^m = Tr\hat{F}|^m + \theta Q\hat{F}^m, \qquad Tr\hat{F}|^m = \sum_{p=0}^{2m}({}^{2m-p}\omega_p^0)(d\theta)^{2m-p}, \tag{2.20}$$

sendo que $Tr\hat{F}^m$ é uma superforma fechada

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{d}\{Tr\hat{F}^m\}, \\ &= (d\theta\partial_\theta + d)\{Tr\hat{F}^m\}, \\ &= Q\{Tr\hat{F}^m\}d\theta + d\{Tr\hat{F}^m\}. \end{aligned}$$

Da componete $\theta = 0$, tiramos que

$$Q\{Tr\hat{F}|^m\} = -d\{Tr\hat{F}|^m\}(d\theta)^{-1}, \tag{2.21}$$

lembrando que $(d\theta)^{-1}$ é uma expressão simbólica. Substituindo as equações (2.20) em (2.21), obtemos as equações de *Descida de Witten* em um supergauge geral

$$Q\ {}^{2m-p}\omega_p^0 + d\ {}^{2m-(p-1)}\omega_{(p-1)}^0 = 0 \qquad com \qquad p = 0, 1, ..., 2m\ , \tag{2.22}$$

A proxima tarefa, agora, é determinar se outras soluções podem ser obtidas a partir de estudos sistemáticos no superespaço.

### 2.1.4 Equações de bi-descida

Foi demonstrado no trabalho [28] que a invariânça supersimétrica do funcional (2.18) implica no integrando poder ser escrito como a variação supersimétrica dum forma-supercampo:

$${}^s\omega_d^0 = Q\ {}^{s-1}\Omega_d^0.$$

O operador $Q$, atuando sobre uma forma-supercampo por derivação em $\theta$, isso mostra-nos que ${}^s\Delta_{(d)}$ é uma integral no superespaço de ${}^{s-1}\Omega_d^0$, ou seja

$$Q\ {}^s\Delta_{(d)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad {}^s\Delta_{(d)} = \int_{M_d} Q\ {}^{s-1}\Omega_d^0, \tag{2.23}$$

invariante sob transformações de supersimetria.

Além disso, foi mostrado a partir da invariânça de BRST que o super-integrando ${}^{s-1}\Omega_d^0$ mais geral é solução dum sistema de equações de "bi-descida"

$$s\ {}^{s-r-1}\Omega_p^{d-p+r} + d\ {}^{s-r-1}\Omega_{p-1}^{d-p+r+1} + Q\,{}^{s-r-2}\Omega_p^{d-p+r+1} = 0 \tag{2.24}$$

com $r = 0, ..., s-1$ e $p = 0, ..., d$.

A conclusão final do trabalho [28] foi que as soluções correspondendo às classes de Chern encontradas acima, equivalentes às soluções de Witten, são de fato as soluções não triviais mais gerais das equações de bi-descida.

## 2.2 Estudo da Cohomologia para $N$ Operadores

### 2.2.1 Definições

Seja um observável $\Delta$, definido numa variedade diferenciável, $M_d$, dado pela equação:

$${}^{S}\Delta_d^0 = \int_{M_d} {}^{S}\omega_d^0(x). \tag{2.25}$$

onde $S = (s_1, \cdots, s_N)$ é o peso supersimétrico[1]. Ele deve obedecer às seguintes condições de cociclo:

$$Q_I\ {}^{S}\Delta_d^0 = 0, \qquad I = 1, 2, ..., N \tag{2.26}$$

$$s\ {}^{S}\Delta_d^0 = 0, \qquad {}^{S}\Delta_d^0 \neq s\ {}^{S}\Delta_d'. \tag{2.27}$$

Da equação (2.25), juntamente com a condição de vínculo da supersimetria de "shift" (2.26), tiramos para o seu integrando as equações

$$Q_I\ {}^{H+E}\omega_d^0 + d\ {}^{H+E+E_I}\omega_{d-1}^0 = 0, \qquad I = 1, 2, ..., N. \tag{2.28}$$

Por comodidade escolhemos $S = H + E$, tal que $E = (1, 1, ..., 1) = \sum_{I=1}^{N} E_I$; $H = (h_1, ..., h_N)$, $h_I \geq 0$ e $E_I = (0, ..., 1, ...0)$ é é o vetor peso de base número $I$.

Duma maneira análoga à usada no caso $N = 1$, e usando as proposições demonstradas no Apêndice C, podemos mostrar o seguinte [29].

[1] $s_I$ é o peso supersimétrico da supersimetria número $I$, onde o operador $Q_I$ tem peso 1, e $-1$ à variável $\theta^I$. $I$ varia de 1 até $N$.

**1.** Da invariância supersimétrica, segue que o integrando de (2.25) pode ser escrito como

$$^{H+E}\omega_d^0 = Q_1 ... Q_N \ ^H\Omega_d^0, \tag{2.29}$$

onde $^H\Omega_d^0$ é uma forma-supercampo.

**2.** Da invariância de BRST segue que o super-integrando $^H\Omega_d^0$ obedece do modo mais geral a um sistema de equações de "multi-descida"

$$s\,^S\Omega_p^{d-p+|H|-|S|} + d\ ^S\Omega_{p-1}^{d-p+|H|-|S|+1} + \sum_{I=1}^{N} Q_I\,^{S-E_I}\,\Omega_p^{d-p+|H|-|S|+1} = 0, \tag{2.30}$$

onde $S = (s_1, ..., s_N),\ \ s_I = 0, ..., h_I,\ \ p = 0, ..., d.$

Veremos agora alguns exemplos onde esta equação se aplica a uma classe específica de observáveis, e está embutida numa expressão mais geral ainda.

### 2.2.2 Exemplos de Observáveis para $N-$SUSY

Como vimos na subseção anterior, todos os observáveis são dados pela solução geral das equações de multi-descida (2.30). Uma importante classe de observáveis pode ser calculada como solução geral de equações de "super-descida". Usaremos neste exemplo, as classes de Chern, associadas à superconexão $\hat{A}$. Tais equações, são dadas por

$$s\,\hat{\Omega}_q^{D-q} + \hat{d}\,\hat{\Omega}_{q-1}^{D-q+1} = 0, \qquad q = 0, ..., D. \tag{2.31}$$

Definimos aqui a superforma $\hat{\Omega}_q^{D-q}$, como uma expansão em forma-supercampos, tal que tenhamos

$$\hat{\Omega}_q^{D-q} = \sum_{h_1,...,h_N,p}^{q} (d\theta^1)^{h_1} ... (d\theta^2)^{h_N}\ ^{(h_1,...,h_N)}\Omega_q^{D-q}, \tag{2.32}$$

sendo que $|H| + d = D$.

Reescrevendo (2.31) em termos dos componentes obtemos o sistema

$$\begin{gathered} s\,^S\Omega_p^{D-p-|S|} + d\ ^S\Omega_{p-1}^{D-p-|S|+1} + \textstyle\sum_{I=1}^{N} Q_I\,^{S-E_I}\,\Omega_p^{D-p-|S|+1} = 0, \\ 0 \leq s_I \leq D, \qquad 0 \leq p \leq D, \qquad p + |S| \leq D. \end{gathered} \tag{2.33}$$

Observa-se que as equações de multi-descida (2.30) formam um sub-sistema do sistema das equações de super-multi-descida (2.33). Por conseqüencia, a solução geral de (2.31) ou (2.33) representa uma classe particular de solues de (2.30), dando assim uma classe particular de observáveis.

A solução geral não trivial de (2.31) é dada pela geralização para o superespaço das classes de Chern [28]. Explicitamente, temos

$$s\ (Q_I)^N\ \hat{\Omega}^0_{2n+2p+1} + d\left\{\partial_I^N \left[\hat{\Omega}^{1\ CS}_{2n}\, Tr\left(\hat{F}\right)^p\right]\right\} = 0, \tag{2.34}$$

onde $\hat{\Omega}^{1\ CS}_{2n}$ é uma $2n$-superforma de número de ghost 1, associada à superforma de Chern-Simons em dimensão $2n+1$:

$$\hat{\Omega}^{CS}_{2n+1} = Tr\left\{\hat{A}(\hat{d}\hat{A})^n + ...\right\}, \tag{2.35}$$

pela equação

$$s\ \hat{\Omega}^{CS}_{2n+1} + \hat{d}\hat{\Omega}^{1\ CS}_{2n} = 0. \tag{2.36}$$

A superderivada de (2.35) é dada por:

$$\hat{d}\,\hat{\Omega}^{CS}_{2n+1} = Tr\left\{\hat{F}^{n+1}\right\}. \tag{2.37}$$

Daí obtemos o conjunto de equações

$$\begin{aligned} &\hat{\Omega}^0_{2n+2p+1} = \hat{\Omega}^{CS}_{2n+1} Tr\left\{\hat{F}^p\right\}, \\ &s\ Tr\left\{\hat{F}^p\right\} = 0, \\ &\hat{d}\left\{\hat{F}^p\right\} = 0, \end{aligned} \tag{2.38}$$

com $p$ arbitrário.

Para ilustrar esse resultado, vejamos agora dois casos práticos, ondc aplicamos a fórmula de Chern-Simons para forma-supercampos de gauge.

**Exemplo 1.** *Este exemplo está melhor apresentado no trabalho [28]. Para* $N=1$ *e* $D=3$, *partimos das equações de super-descida*

$$s\hat{\Omega}_3 + \hat{d}\hat{\Omega}^1_2 = 0, \qquad s\hat{\Omega}^1_2 + \hat{d}\hat{\Omega}^2_1 = 0, \qquad s\hat{\Omega}^3_0 = 0.$$

*A única solução não-trivial é*

$$\hat{\Omega}_3 = Tr\{\hat{A}d\hat{A} + \frac{2}{3}\hat{A}^3\}, \quad \hat{\Omega}^1_2 = Tr\{\hat{A}\hat{d}\hat{C}\}, \quad \hat{\Omega}^2_1 = Tr\{\hat{C}\hat{d}\hat{C}\}, \quad \hat{\Omega}^3_0 = -\frac{1}{3}Tr\{\hat{C}^3\},$$

*onde $\hat{C} = C$. Utilizando as definições da superconexão $\widehat{A}$ , obtemos observáveis dados como integrais das formas*

$$\begin{aligned} &\omega_0 = Tr\{\phi^2 + 2\phi\chi^2\}, && \omega_1 = 2Tr\{\psi\phi + \psi\chi^2 + \phi D_a\chi\}, \\ &\omega_2 = Tr\{\psi^2 + 2\phi f + 2\psi D_a\chi\}, && \omega_0 = 2Tr\{\psi f\}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

*No gauge de WZ, onde $\chi = 0$:*

$$\omega_0 = Tr\{\phi^2\}, \quad \omega_1 = 2Tr\{\psi\phi\}, \quad \omega_2 = Tr\{\psi^2 + 2\phi f\}, \quad \omega_3 = 2Tr\{\psi f\}, \tag{2.40}$$

*correspendendo aos resultados obtidos por Witten* [18].

**Exemplo 2.** *Para $N = 2$ e $D = 3$ usando as definições de $\hat{A}$ , chegamos aos seguintes resultados*

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 2Tr\left\{\alpha f + \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\psi_I D_a\psi_J\right\}, \\ \omega_{2\,I} &= 2Tr\left\{\alpha\psi_I + \chi_I\left(D_a\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon^{JK}[\psi_J, \psi_K]\right) + \varepsilon^{JK}\phi_{IJ}D_a\psi_K + \eta_I f\right\}, \\ {}^3\omega_{1\,IJ} &= Tr\{\psi_I\eta_J + \alpha(\phi_{IJ} + \frac{1}{2}[\chi_I, \chi_J]) + a[\chi_I, \eta_J] \\ &\quad -\varepsilon^{KM}a\left(\frac{1}{2}[\phi_{IK}, \phi_{JM}] - \psi_K[\chi_I, \phi_{JM}]\right)\}, \\ {}^2\omega_{0\,IJK} &= Tr\left\{\eta_I\phi_{JK} + \chi_I\chi_J\eta_K - \varepsilon^{MN}\chi_I\phi_{JM}\phi_{KN}\right\}. \end{aligned}$$

*definindo os quatro invariantes frente a cohomologia da supersimetria.*

# Capítulo 3

# Fixações de Gauge em Modelos de Donaldson-Witten

Mostraremos a construção de teorias tipo-Witten [18] no o formalismo de supercampos, apresentado inicialmente por Horne [26]. Seguiremos o formalismo de formas diferenciais usado no capítulo anterior, apresentado no trabalho [28]. Apresentaremos ações conhecidas na literatura, construídas no superespaço para $N = 1$, $N = 2$, e $N$ qualquer. Mostraremos também a generalização para $D$ dimensões das fixações de gauge de Blau-Thompson, via método de Batalin-Vilkovisky (BV). A partir daí, definiremos uma expansão dos diagramas de BV nas coordenadas $\theta$, caracterizando-o como um superdiagrama. Motivados por tal construção, sistematizamos uma nova fixação de gauge, onde a ação correspondente é completamente estável, sob o ponto de vista da renormalização.

## 3.1 Ação de Witten para $N = 1$ SUSY

### 3.1.1 Construção da ação de Witten no Superespaço

Os funcionais invariantes, ou melhor, as ações invariantes frente às exigências descritas no capítulo anterior, com relação a número de ghost, grau de forma e número de supersimetria (2.13), (2.14), serão aqui postas em prática e apresentadas, na construção da ação de Witten supersimétrica com a formulação de forma-supercampo.

Aqui a ação, ou a integração de forma-supercampo será feita de forma parcial, com relação ao superespaço, isto devido as definições que tivemos no capítulo anterior, provindas do fato de não podermos integrar uma diferencial de "comprimento" das variáveis de Grassmann, da mesma forma que é integrada a base das formas diferenciais. Isto ocorre, como discutido anteriormente, devido às paridades destas grandezas, aqui definidas, terem características opostas. Assim usaremos o método de integração das formas ordinárias separadamente da integração nas variáveis de Grassmann, com definida na equação (1.23).

Usamos uma construção sutilmente diferente para o modelo $N = 1$, com relação a construção proposta por Horne [26], pois tentamos uma maneira, na qual a montagem dos termos da ação fosse tal que, pudessemos associar termos independentes a cada condição de gauge contada a partir das transformações (1.41).

Começaremos com a transformação: $\tilde{Q}\psi = -D_a\phi$, contando aqui uma condição de gauge para $\psi$. Definimos um multiplicador de Lagrange

$$H(x,\theta) = h(x) + \theta h'(x), \tag{3.1}$$

sendo uma 0-forma-supercampo, este acoplado à condição de gauge: $D_a^{\mu}\psi_{\mu} = 0$. Daí, usamos a 1-forma-supercampo covariante de gauge $\Psi(x,\theta)$ descrito na equação (1.37), com a ação definida por [1]

$$S_{\psi} = Tr\int d\theta\{HD_A * \Psi\} = Tr\int\{-h'D_a * \psi + hD_a * D_a\phi + [\psi, h] * \psi\}. \tag{3.2}$$

usando aqui o gauge de Wess-Zumino (1.39).

Precisamos, agora, fixar as condições de gauge da tranformação $\tilde{Q}a = \psi$, que são três para $a$. Para isto, propomos uma 2-forma-supercampo auto-dual

$$K(x,\theta) = k(x) + \theta k'(x), \tag{3.3}$$

com $K = *K$ e covariante de gauge $sK = -[C, K]$, acoplada a supercurvatura de Yang-Mills, $F$, descrita na equação (1.36), gerando assim três soluções do tipo instantons: $f = *f$ . Portanto a ação será dada por

$$S_f = Tr\int d\theta\{K * F\} = Tr\int\{k' * f - k * D_a\psi\}, \tag{3.4}$$

[1] Lembrando que $\int d\theta = \partial_\theta = Q$.

com $f = da + a^2$ sendo a curvatura de Yang-Mills ordinária e $D_a\psi = d\psi + [a,\psi]$, sendo a derivada covariante ordinária, referente a conexão $a$.

Precisamos ainda de um complemento necessário para nos auxiliar no cálculo dos propagadores, como feito nos trabalhos [18], [26], [28], [30] [2]. Definimos esta ação apenas em termos do supercampo $K$

$$S_k = Tr\int d\theta\{\zeta K * D_\theta K\} = Tr\int\{\zeta k' * k' - k * [\phi, k]\}, \tag{3.5}$$

sendo $\zeta$ constante. Somando as ações propostas acima (3.4), (3.5) e (3.2), chegamos a uma parte da ação de Witten invariante

$$S_{Witten} = Tr\int d\theta\{K * F + \zeta K * D_\theta K + H * D_A\Psi\}; \tag{3.6}$$

em componentes, temos

$$\begin{aligned} S_{Witten} &= Tr\int\{k' * f + \zeta k' * k' - k * [\phi, k] + k * D_a\psi \\ &\quad -h' D_a * \psi + [\psi, h] * \psi + h D_a * D_a\phi\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Montamos uma tabela descrita no esquema abaixo, caracterizando os supercampos básicos da teoria,

| $\backslash Supercampos$ | $C$ | $A$ | $A_\theta$ | $K$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\# SUSY$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ | $-2$ |
| $\# Ghost$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Grau\ de\ forma\,(p)$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| $Dim.\,de\,massa$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| $Estatísticas$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |

onde $C$ é o super-ghost da teoria, que será visto a seguir.

Para escrevermos a fixação de gauge de Yang-Mills no formalismo de supercampo [3], devemos reproduzir a ação de Fadeev-Popov, invariante de BRST, no gauge de Landau, a partir dos campos de ghost $c$ e anti-ghost $\bar{c}$. A ação de Fadeev-Popov é [2]

$$S_{FP} = \int d^4x\{s(\bar{c}\partial^\mu a_\mu)\} = \int d^4x\{b\partial^\mu a_\mu - \bar{c}\partial^\mu D_\mu c\}, \tag{3.8}$$

[2]Este termo quadrático é necessário quando não queremos fixar o gauge do supercampo $K$.

[3]Este termo fixar um grau de liberdade longitudinal do campo de YM.

Usaremos aqui para descrecer a fixação de gauge na sua forma supersimetrizada, como em [26], as componentes 1-superforma conexão de gauge descrita pelas equações (??) e (1.28) e o super-ghost (1.29). Definimos também um super-anti-ghost

$$\overline{C}(x,\theta) = \overline{c}(x) + \theta\overline{c}'(x), \tag{3.9}$$

como 0-forma-supercampo e um multiplicador de Lagrange

$$B(x,\theta) = b(x) + \theta b'(x), \tag{3.10}$$

cujas transformações são, $s\overline{C} = B$ e $sB = 0$.

A proposta de escrever a ação de fixação do gauge de Yang-Mills supersimetrizada é motivada pela equação (3.8), sendo que esta contém os termos de Landau, Faddeev-Popov e termos provindos da supersimetrização do modelo; portanto, a ação será

$$\begin{aligned} S_{FP} &= Tr\int d\theta\{s[\overline{C}d*A]\} = Tr\int d\theta\{Bd*A - \overline{C}d*D_AC\} && (3.11)\\ &= Tr\int\{b'd*a - \overline{c}'d*D_ac - bd*\psi + \overline{c}d*D_ac' + \overline{c}d*[\psi,c]\}, && (3.12)\end{aligned}$$

Assim a ação de Witten supersimétrica [26] fica

$$S_{Witten} = Tr\int d\theta\{K*F + \zeta K*\partial_\theta K + H*D_A\Psi + s(\overline{C}d*A)\}, \tag{3.13}$$

e, em componentes,

$$\begin{aligned} S_{Witten} = Tr\int\{&k'*f + \zeta k'*k' + k*D_a\psi - k*[\phi,k]\\ &-h'D_a*\psi + [\psi,h]*\psi + hD_a*D_a\phi\\ &+b'd*a - \overline{c}'d*D_ac - bd*\psi + \overline{c}d*D_ac' + \overline{c}d*[\psi,c]\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

### 3.1.2 Obtenção das Equações de Movimento

Queremos, aqui, mostrar que a fixação de gauge está concluída e confirmar a supersimetrização proposta por Horne da ação de topológica de Witten. Calcularemos em seguida alguns propagadores da teoria livre. Tomamos a parte livre da ação supersimétrica

(3.13) e acrescentamos a termos de fontes a todos os campo [4], tal que

$$\begin{aligned} S_0 &= Tr\int d\theta\{K * dA + \zeta K * \partial_\theta K + H\, d * (\partial_\theta A + dE_\theta) \\ &\quad + Bd * A - \overline{C}d * d * C\}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$S_{fontes} = Tr\int d\theta\{J_A A + J_{E_\theta}E_\theta + J_K K + J_H H + J_B B + J_{\overline{C}}\overline{C} + J_C C\}, \tag{3.16}$$

onde se introduzem termos de corrente para todos os campos.

Tiramos as equações de movimento para os campos da ação livre (3.15) e a ação de corrente (3.16) onde $S_T = S_0 + S_{fontes}$, e usando resultados da Geometria Diferencial e as vantagens de trabalharmos no superespaço, as equações de movimento são dadas por:

$$H(x,\theta) = \Box^{-1}(*J_{E_\theta}), \tag{3.17}$$

$$E_\theta(x,\theta) = \Box^{-1}(*J_H + *\partial_\theta J_B), \tag{3.18}$$

$$B(x,\theta) = \Box^{-1}(*dJ_A - \partial_\theta J_{E_\theta}), \tag{3.19}$$

$$K(x,\theta) = \Box^{-1}\{*dJ_A + dJ_A\}, \tag{3.20}$$

$$A(x,\theta) = \Box^{-1}\{-\zeta\Box^{-1} * d * d\partial_\theta J_A - *dJ_K - d * J_B\}, \tag{3.21}$$

$$C(x,\theta) = \Box^{-1} * J_{\bar{C}}, \tag{3.22}$$

$$\bar{C}(x,\theta) = -\Box^{-1} * J_C, \tag{3.23}$$

assim justificando a completa fixação das condições de gauge.

A partir destas equações, seguiremos com o cálculo de alguns propagadores, necessitando apenas da definição de uma superdistribuição de Dirac sob o ponto de vista da Geometria Diferencial, (*ver Apêndice A*). Mostraremos o cálculo apenas de alguns propagadores, já que o cálculo completo, ou mesmo os resultados já foram estão no trabalho [26].

### 3.1.3 Cálculo de alguns propagadores

Seguindo as definições do *Apêndice A*, fica fácil a determinação dos propagadores referentes às equações de movimento descritas na seção anterior. A definição da distribuição

[4] As equações serão resolvidas como supercampos.

de Dirac no superespaço e no formalismo de formas diferenciais, foi crucial para o entendimento de como seria um propagador de uma $p$-formas, já que um propagador pode ser considerado como uma zero-forma.

Começamos escrevendo os propagadores para os supercampos de ghost e anti-ghost $C$ e $\overline{C}$, respectivamente. Seguindo a partir dos cálculos das equações de movimento para os supercampos, obtemos o propagador medido nos pontos $z_1$ e $z_2$ do superespaço:

$$\Delta_{\overline{C}C}(z_1, z_2) = \frac{\delta}{\delta J_{\overline{C}}(z_1)} C(z_2),$$

tratando a corrente como uma 4-forma $J_{\overline{C}} = dx^1 ... dx^4 j_{\overline{C}}$ obtemos o super-ghost $C = \Box^{-1}(j_{\overline{C}})$, usando ainda $\delta(z_1, z_2) = \delta^4(x_1 - x_2)(\theta_1 - \theta_2)$ com $\delta(\theta_1 - \theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)$. Com estas definições, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{C}C}(z_1, z_2) &= \Box_{x_2}^{-1} \delta(z_1, z_2) \\
&= \langle 0|\overline{c}(x_1) + \theta_1 \overline{c}'(x_1), c(x_2) + \theta_1 c'(x_2)|0\rangle \\
&= \Box_{x_2}^{-1} \delta^4(x_1 - x_2)(\theta_1 - \theta_2);
\end{aligned}$$

tirando os propagadores para os campos componentes

$$\langle 0|\overline{c}(x_1) c(x_2)|0\rangle = 0, \tag{3.24}$$

$$\langle 0|\overline{c}(x_1) c'(x_2)|0\rangle = -\Box_{x_2}^{-1} \delta^4(x_1 - x_2), \tag{3.25}$$

$$\langle 0|\overline{c}'(x_1) c(x_2)|0\rangle = \Box_{x_2}^{-1} \delta^4(x_1 - x_2), \tag{3.26}$$

$$\langle 0|\overline{c}'(x_1) c'(x_2)|0\rangle = 0. \tag{3.27}$$

Também, para a equação do super-anti-ghost, obtemos os seguintes propagadores:

$$\Delta_{\bar{C}\bar{C}}(z_1, z_2) = 0, \;\; \Delta_{CC}(z_1, z_2) = 0 \;\; e \;\; \Delta_{\bar{C}C}(z_1, z_2) = \Delta_{C\bar{C}}(z_1, z_2).$$

Identificamos, assim, que os campos componentes do super-ghost e do super-anti-ghost obedecem à seguinte ordem de definição: $\overline{c}'$ é o anti-ghost de $c$ e $\overline{c}$ é o anti-ghost de $c'$, isto é, aqui os papéis são invertidos.

Vamos, agora, ao cálculo do propagador do supercampo $H$. Este é relacionado com a supercorrente $J_{E_\theta}$, que devido as definições anteriores da ação de corrente foi definida como uma 4-forma, tal que $J_{E_\theta} = dx^1...dx^4 j_{A_\theta}$, o propagador ficará

$$\begin{aligned}
\langle 0|H(x_1)E_\theta(x_2)|0\rangle &= \Delta_{H,E_\theta}, \\
&= \Box_{x_2}^{-1}\delta(z_1, z_2), \\
&= \Box_{x_2}^{-1}\delta^4(x_1 - x_2)(\theta_1 - \theta_2);
\end{aligned}$$

usando as notações de definição do supercampo $H$ e $E_\theta$, temos

$$\begin{aligned}
\langle 0|h(x_1)\chi(x_2)|0\rangle &= 0, \\
\langle 0|h'(x_1)\phi(x_2)|0\rangle &= 0, \\
\langle 0|h'(x_1)\chi(x_2)|0\rangle &= -\Box_{x_2}^{-1}\delta^4(x_1 - x_2), \\
\langle 0|h(x_1)\phi(x_2)|0\rangle &= -\Box_{x_2}^{-1}\delta^4(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Para os outros supercampos, os resultados são os mesmo de [26].

Esta teoria apresenta uma propagação do tipo $\langle AA\rangle$, primeiramente por causa de não querermos fixar o gauge do multiplicador da curvatura, colocando assim na ação um termo quadrático neste multiplicador. Também por causa de uma derivada de Grassmann na fonte $J_A$ descita na equação (3.21), isto faz com que tenhamos "loops" neste supercampo, e por conseguinte, em várias outras interações. Como citado por Horne, torna-se muito trabalhoso descrevermos os gráficos de Feynman da teoria, devido ao grande número de campos envolvidos.

A fim de contornarmos este problema, estudaremos o modelo super-BF e suas devidas fixações de gauge. Veremos que aqui é possível escrever todos os gráficos de Feynman, devido o fato de não termos interação do tipo $\langle AA\rangle$.

## 3.2 Fixações de gauge de Blau-Thompson em modelos super-BF

Nosso propósito nesta seção é descrever as fixações de gauge baseadas numa construção supersimétrica. Esta é, de fato, uma construção em que temos total controle, com relação à positividade do Hamiltoniano e por escolhermos uma teoria que descreve apenas interações do tipo "árvore", e vistas as facilidades técnicas de se trabalhar com teorias topológicas no superespaço. Começaremos construindo uma espécie de super-triângulo de Batalin-Vilkovisky, onde este acomoda todos os elementos da teoria, tais como o setor geométrico o setor de anti-ghost e ainda os multiplicadores de Lagrange, onde para $N = 1$ é a aplicação do operador $Q$ sobre os anti-ghosts e para $N = 2$, aqui são definidos como sendo a aplicação não apenas de um transformação de $Q$, mas de duas, i.e., $Q_1Q_2$, sobre os anti-ghosts, generalizando-se para a estensão de $N$ supersimetrias como $Q_1...Q_N$ sobre os anti-ghosts nessas condições.

### 3.2.1 Construção para $N = 1$ e $D = 3$

De acordo com a construção de Blau-Thompson [36], revista no *Apêndice B*, podemos construir sob o formalismo de supersimetria desenvolvido, a mesma teoria de Fixação de gauge para $N = 1$ e $D = 3$. O formalismo de supercampo é equivalente a construção feita em componentes, para a ação invariante frente a transformação de supersimetria. A proposta de construir no superespaço é parte das definições do *Capítulo 1*. Partimos então da superconexão de gauge $\hat{A}$ e da supercurvatura $\hat{F}$, [5].

Sejam, as componentes da superconexão de gauge

$$ {}^{0}A_1 = {}^{0}a_1 + \theta\, {}^{1}\psi_1 \,, \qquad {}^{1}E_0 = {}^{1}\chi_0 + \theta\, {}^{2}\phi_0, \tag{3.28} $$

as componentes da supercurvatura

$$ {}^{0}F_2 = {}^{0}f_2 + \theta D_a\, {}^{1}\psi_1, \qquad {}^{1}\Psi_1 = {}^{1}\psi_1 + D_a\, {}^{1}\chi_0 - \theta\left(D_a\, {}^{2}\phi_0 - [{}^{1}\psi_1, {}^{1}\chi_0]\right). \tag{3.29} $$

Para fixação de gauge, definiremos uma espécie de super-triângulo de Batalin-Vilkovisky[6], de acordo com (B.2) que acomodam o setor super-geométrico e de super-anti-ghost ao mesmo tempo

$$ \begin{array}{ccc} & {}^{0}F_2 & \\ {}^{-1}\overline{\Psi}_1 & & {}^{1}\Psi_1 \\ {}^{0}\overline{\Lambda}_0 \quad {}^{-2}\overline{\Phi}_0 & & {}^{2}\Phi_0 \end{array} \;. \tag{3.30} $$

[5]Usaremos a seguinte convenção, ${}^{s:\#\,susy}\Omega^{g:\#\,ghost}_{p:\#\,grau\ de\ forma}$.

[6]O triângulo referente aos multiplicadores de Lagrange, das primeiras componentes dos supercampos anti-ghosts, estão implícitos, pois estes supercampos acomodam os multiplicadores na componente em $\theta$.

Seguindo as convenções anteriores, os supercampos anti-ghosts são definidos por

$$ {}^{-1}\bar{\Psi}_1 \equiv {}^{-1}\bar{\psi}_1 + \theta\,{}^{0}b_1, \qquad {}^{-2}\bar{\Phi}_0 \equiv {}^{-2}\bar{\phi}_0 + \theta\,{}^{-1}\eta_0, \qquad {}^{0}\bar{\Lambda}_0 \equiv {}^{0}\bar{\lambda}_0 + \theta\,{}^{1}\bar{\eta}_0, \tag{3.31} $$

sendo suficientes para escrevermos a ação total de fixação de gauge, no superespaço e no gauge de Wess-Zumino. Lembrando que esta ação é a ação reduzida de Blau-Thompson (B.11), sendo esta definida aqui, da seguinte forma

$$ S_{N=1,D=3} = Tr \int d\theta \{ {}^{-1}\bar{\Psi}_1\,{}^{0}F_2^0 + {}^{-2}\bar{\Phi}_0 D_a * {}^{1}\Psi_1 + {}^{0}\bar{\Lambda}_0 D_a * {}^{-1}\bar{\Psi}_1 + s[\bar{C} d * A] \}, \tag{3.32} $$

onde os anti-ghosts e multiplicadores de Lagrange de Yang-Mills são

$$ \bar{C} = \bar{c} + \theta\bar{c}', \qquad \Pi = \pi + \theta\pi', \tag{3.33} $$

com $s\bar{C} = \Pi$. Em componentes, no gauge de WZ, temos

$$ \begin{aligned} S_{N=1,D=3} \;=\; & Tr \int \{ bf + \bar{\psi} D_a \psi + \eta D_a * \psi + \bar{\phi} D_a * D_a \phi + \bar{\eta} D_a * \bar{\psi} - \bar{\lambda} D_a * b \\ & + \pi' d * a - \bar{c}' d * D_a c - \pi d * \psi + \bar{c} d * D_a c' + \bar{c} d * [\psi, c] \}, \end{aligned} \tag{3.34} $$

descrevendo a mesma fixação de gauge da equação (B.11).

### 3.2.2 Construção para $N = 1$ e $D = 4$

Partiremos, agora, para descrição da teoria para $N = 1$ e $D = 4$ [36], descrita agora no superespaço. A construção é similar a subseção anterior, diferenciando apenas, com relação à dimensionalidade do setor de anti-ghost, pois a fixação de gauge do setor geométrico é sempre a mesma, isto porque a superconexão é sempre uma 2-superforma. Definimos, então, um super-triângulo, ou melhor um super-diagrama[7] de BV, da forma

$$ \begin{array}{cccc} & & {}^{0}F_2 & \\ & {}^{-1}\bar{\Psi}_2 & & {}^{1}\Psi_1 \\ {}^{0}\bar{\Lambda}_1 & & {}^{-2}\bar{\Phi}_0 & \quad {}^{2}\Phi_0 \\ {}^{-1}\bar{Z}_0 & & & \end{array} . \tag{3.35} $$

[7]O diagrama, não possui mais as características de um triângulo, devido a assimetria nos graus de forma, também porque o setor de anti-ghost tem mais termos que o setor geométrico.

Os supercampos anti-ghosts definidos por

$$
\begin{aligned}
{}^{-1}\bar{\Psi}_2 &\equiv {}^{-1}\bar{\psi}_2 + \theta\, {}^{0}b_2, & (3.36)\\
{}^{-2}\bar{\Phi}_0 &\equiv {}^{-2}\bar{\phi}_0 + \theta\, {}^{-1}\eta_0, & (3.37)\\
{}^{0}\bar{\Lambda}_1 &\equiv {}^{0}\bar{\lambda}_1 + \theta\, {}^{1}\bar{\eta}_1, & (3.38)\\
{}^{-1}\bar{Z}_0 &\equiv {}^{-1}\bar{\zeta}_0 + \theta\, {}^{0}u_0. & (3.39)
\end{aligned}
$$

A ação em forma-supercampo terá a forma

$$
S_{N=1,D=4} = Tr \int d\theta \{\bar{\Psi} F + \bar{\Phi} D_a * \Psi + \bar{\Lambda}\, D_a * \tilde{\Psi} + \bar{Z}\, D_a * \bar{\Lambda} + s[\bar{C} d * A]\}; \qquad (3.40)
$$

em componentes, no gauge de WZ, temos

$$
\begin{aligned}
S_{N=1,D=4} = \; & Tr \int \{ bf - \bar{\psi} D_a \psi + \eta D_a * \psi - \bar{\phi} D_a * D_a \phi \\
& + \bar{\eta} D_a * \bar{\psi} - \bar{\lambda} D_a * b + \bar{\zeta} D_a * \bar{\eta} + u D_a * \bar{\lambda} \\
& + \pi' d * a - \bar{c}' d * D_a c - \pi d * \psi + \bar{c} d * D_a c' + \bar{c} d * [\psi, c]\}. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Estando de acordo com a ação reduzida de Blau-Thompson (B.31).

### 3.2.3 Fixação de Gauge para $N = 2$ e $D = 3$

Nestas condições de dimensionalidade, verificamos que é possível descrevermos um modelo$-BF$, de forma diferente da proposta por Blau-Thompson [36]. Em seu trabalho, Blau e Thompson descreveram o modelo de super$-BF$ para $N = 2$, partindo de uma ação tipo super-Chern-Simons. Veremos no próximo capítulo uma outra formulação da ação do modelo super-BF. Considerando o método de fixação de gauge de Batalin-Vilkovisky, foi possível montar uma ação totalmente calibrada, partindo de um triângulo, em que o setor geométrico agora descrevesse os primeiros termos da supercurvatura no gauge de Wess-Zumino (1.40)

$$
\begin{array}{ccccc}
{}^{0}f_2 & & 0 & & 0 \\
{}^{-2}\bar{\psi}_1 \;\; {}^{1}\psi_{1I} & \xrightarrow{\tilde{Q}} & {}^{-1}\zeta_{1I} \;\ddots\; {}^{2}\alpha_1 & \xrightarrow{\tilde{Q}} & {}^{0}b_1 \;\ddots\; 0 \\
{}^{0}\bar{\lambda}_1 \; {}^{-3}\bar{\phi}_{0I} \; {}^{2}\phi_{0IJ} & & {}^{1}\xi_{0I} \; {}^{-3}\varphi_0 \;\ddots\; {}^{3}\eta_{0I} & & {}^{2}h_0 \; {}^{-1}k_{0I} \;\ddots\; 0
\end{array}, \qquad (3.42)
$$

onde $\tilde{Q} = Q|_{WZ-gauge}$. Assim, as componentes dos supercampos anti-ghosts da teoria são

$$
\begin{aligned}
{}^{-2}\bar{\Psi}_1 &= {}^{-2}\bar{\psi}_1 + \theta^I\, {}^{-1}\zeta_{1\,I} + \frac{1}{2}\theta^2\, {}^0 b_1, & (3.43)\\
{}^{-3}\bar{\Phi}_{0\,I} &= {}^{-3}\bar{\phi}_{0\,I} + \theta_I\, {}^{-2}\varphi_0 + \frac{1}{2}\theta^2\, {}^{-1}k_{0\,I}, & (3.44)\\
{}^0\bar{\Lambda}_0 &= {}^0\bar{\lambda}_0 + \theta^I\, {}^1\xi_{0\,I} + \frac{1}{2}\theta^2\, {}^2 h_0. & (3.45)
\end{aligned}
$$

Com isto, podemos construir como anteriormente, um super-triângulo de BV, para esta configuração de supercampos,

$$
\begin{array}{ccc}
 & {}^0F_2 & \\
{}^{-2}\bar{\Psi}_1 & & {}^1\Psi_{1I} \\
{}^0\bar{\Lambda}_0 \quad {}^{-3}\bar{\Phi}_{0\,I} & & {}^2\Phi_{0\,IJ}
\end{array}
\quad , \tag{3.46}
$$

A ação de fixação de gauge é definida com relação a este triângulo, por

$$
S_{N=2,D=3} = Tr \int d^2\theta \{ \bar{\Psi}F + \varepsilon^{IJ}\bar{\Phi}_I D_A * \Psi_J + \bar{\Lambda} D_A * \bar{\Psi} + s[\bar{C} d * A] \}, \tag{3.47}
$$

onde o anti-ghost $\overline{C}$ é dado pela expressão

$$
\overline{C}(x,\theta) = \overline{c}(x) + \theta^I \overline{c}_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \overline{c}_F(x), \tag{3.48}
$$

e seu multiplicador de Lagrange

$$
\Pi(x,\theta) = \pi(x) + \theta^I \pi_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \rho(x), \tag{3.49}
$$

com as transformações

$$
s\bar{C} = \Pi \qquad e \qquad s\Pi = 0. \tag{3.50}
$$

Âmbos são 0-forma-supercampo. Para explicitarmos a ação em componentes, lembramos que, $D_A X = D_a X + \theta^I[\psi_I, X] + \frac{1}{2}\theta^2[\alpha, X]$, assim temos:

$$
\begin{aligned}
S_{N=2,D=3} = Tr \int \{ & \frac{1}{2}bf - \frac{1}{2}\zeta^I D_a\psi_I + \frac{1}{2}\bar{\psi} D_a \alpha + \frac{1}{2}k^I D_a * \psi_I - \varphi D_a * \alpha \\
& + \varepsilon^{JK}\varphi D_a * D_a \phi_{JK} - \varepsilon^{IJ}\frac{1}{2}\bar{\phi}_I D_a * D_a \eta_J + \frac{1}{2} h D_a * \bar{\psi} \\
& + \frac{1}{2}\xi^I D_a * \zeta_I + \frac{1}{2}\bar{\lambda} D_a * b + \frac{1}{4}\varepsilon^{IJ}\bar{\psi}[\psi_I, \psi_J] + \varepsilon^{IJ}\varphi[\psi_I, \psi_J] \\
& + \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{KL}\bar{\phi}_I D_a * [\psi_I, \phi_{JL}] - \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{KL}\bar{\phi}_I[\psi_J, *D_a\phi_{KL}] - \frac{1}{2}\zeta^I[\psi_I, *\bar{\psi}]
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\bar{\lambda}[\psi_I, *\zeta_J] + \frac{1}{2}\bar{\lambda}[\alpha, *\bar{\psi}] \tag{3.51}$$
$$+\frac{1}{2}\pi d * \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_I^{IJ}\pi d * \psi_J + \frac{1}{2}\rho d * a - \frac{1}{2}\bar{c}d * D_a c_F \tag{3.52}$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\bar{c}d * [\psi_J, c_J] - \frac{1}{2}\bar{c}d * [\alpha, c] + \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\bar{c}_I d * D_a c_J \tag{3.53}$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\bar{c}_I d * [\psi_J, c] - \frac{1}{2}\bar{c}_F d * D_a c\}. \tag{3.54}$$

Para confirmar que a fixação de gauge foi completada, tiramos as equações de movimento da ação (3.47) ainda como supercampos. A parte livre da ação total dos supercampos e suas respectivas fontes, será

$$\begin{aligned} S_0^{N=2,D=3} + S_{fontes} &= Tr \int d^2\theta\{\bar{\Psi}dA + \varepsilon^{IJ}\bar{\Phi}_I d * (\partial_J A + dE_J) \\ &\quad +\bar{\Lambda}d * \bar{\Psi} + \Pi d * A - \bar{C}d * dC \\ &\quad +AJ^A + \bar{\Psi}J^{\bar{\Psi}} + \varepsilon^{IJ}\bar{\Phi}_I J_J^{\bar{\Phi}} + \varepsilon^{IJ}E_I J_J^E \\ &\quad +\bar{\Lambda}J^{\bar{\Lambda}} + \Pi J^{\Pi} + \bar{C}dJ^{\bar{C}} + CJ^C\}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Destas, tiramos os supercampos explicitamente. Combinando as equações, chegamos aos resultados:

$$\begin{aligned} A &= \Box^{-1}\{*d * J^{\bar{\Psi}} + d * J^{\Pi}\}, && (3.56)\\ E_I &= \Box^{-1}\{*J_I^{\bar{\Phi}} + \Box^{-1} * d * d * \partial_I J^{\Pi}\}, && (3.57)\\ \bar{\Psi} &= \Box^{-1}\{*d * J^A + d * J^{\bar{\Lambda}}\}, && (3.58)\\ \bar{\Phi}_I &= \Box^{-1}\{*J_I^E\}, && (3.59)\\ \bar{\Lambda} &= \Box^{-1}\{*dJ^{\bar{\Psi}}\}, && (3.60)\\ C &= \Box^{-1}\{*J^{\bar{C}}\}, && (3.61)\\ \bar{C} &= -\Box^{-1}\{*J^C\}, && (3.62)\\ \Pi &= \Box^{-1}\{d * J^A + \varepsilon^{IJ}\partial_I * J_J^E\}. && (3.63) \end{aligned}$$

Isto nos diz que a teoria é totalmente fixada. Seguindo o mesmo padrão de construção, a generalização para $D = 4$ é possível, visto que o triângulo de BV (3.42) é semelhante a (B.12). Portanto escrevemos um super-diagrama de BV acrecentando apenas um supercampo, que fixa o gauge de $\overline{\Lambda}_0^0$, tal que

$$\begin{array}{cccc} & & {}^{0}F_2 & \\ & & {}^{-2}\bar{\Psi}_2 & {}^{1}\Psi_{1I} \\ & {}^{0}\bar{\Lambda}_1 & {}^{-3}\bar{\Phi}_{0I} & {}^{2}\Phi_{0\,IJ} \\ {}^{-2}\overline{Z}_0 & & & \end{array} , \tag{3.64}$$

cuja ação será

$$S_{N=2,D=4} = Tr\int d^2\theta\{\bar{\Psi}F + \varepsilon^{IJ}\bar{\Phi}_I D_A * \Psi_J + \bar{\Lambda}D_A * \bar{\Psi} + \bar{Z}D_A * \bar{\Lambda} + s[\bar{C}d * A]\}, \tag{3.65}$$

estando completante fixada [36].

### 3.2.4 Generalização para $N-$SUSY e $D-$Dimensões

Generalizamos esta construção para uma variedade de dimensão $D$ qualquer, e para um primeiro por exemplo, tomamos $N = 2$ supersimetrias. Usando o algorítimo de Blau-Thompson [27] [36] para para aniquilar os triângulos espúrios da teoria, o super-diagrama nestas condições assume a forma

$$\begin{array}{ccccc} & & & {}^{0}F_2 & \\ & & & {}^{-2}\bar{\Psi}_{D-2} & {}^{1}\Psi_{1I} \\ & & {}^{0}\bar{\Psi}_{D-3} & {}^{-3}\bar{\Phi}_{0\,I} & {}^{2}\Phi_{0\,IJ} \\ & {}^{-2}\overline{\Psi}_{D-4} & & & \\ \swarrow & & & & \\ {}^{s}\overline{\Psi}_0 & & & & \end{array} , \tag{3.66}$$

com $s = 0$ ($D$ ímpar) ou $-2$ ($D$ par).

Sem perda de generalidade, escreveremos este diagrama, para $N$ supersimetrias estendidas, lembrando que a supercurvatura é sempre uma 2-superforma. Isto faz com que o triângulo se generalize apenas na diagonal referente ao setor de anti-ghosts, como anteriormente, obedecendo ao algorítimo de Blau-Thompson. O super-diagrama para $N$

supersimetrias e $D$ dimensões é definido por

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & {}^{0}F_2 & & \\
 & {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-2} & {}^{1}\Psi_{1I} & & \\
 {}^{0}\bar{\Psi}_{D-3} & {}^{-3}\bar{\Phi}_0^I & {}^{2}\Phi_{0\,IJ} & & \\
 {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-4} & & & & \\
 \swarrow & & & & \\
 {}^{s}\bar{\Psi}_0 & & & &
\end{array} , \tag{3.67}
$$

com $s = 0$ ($D$ ímpar) ou $-N$ ($D$ par). A ação equivalente terá a seguinte forma

$$
\begin{aligned}
S_{N,D} &= Tr \int d^N\theta \{ {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-2}\,{}^{0}F_2 + {}^{-N-1}\bar{\Phi}_0^I D_A * {}^{1}\Psi_{1I} + {}^{0}\bar{\Psi}_{D-3} D_A * {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-2} \\
&+ {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-4} D_A * {}^{0}\bar{\Psi}_{D-3} + \ldots + {}^{s}\bar{\Psi}_0 D_A * {}^{-N-s}\bar{\Psi}_1 + s[\bar{C} d * A]\}. 
\end{aligned} \tag{3.68}
$$

As equações de movimento são imediatas, e semelhante aos resultados mostrados para $N = 2$, $D = 3$. Portanto a fixação de gauge desta está concluída.

## 3.3 Nova fixação de gauge para o modelo super$-BF$

### 3.3.1 Modelo em $D = 3$ e $N = 1$

Estudamos uma outra alternativa, numa formulação que se baseava na obtenção da ação mínima de Blau-Thompson, com o propósito de termos uma teoria consistente do ponto de vista unitariedade, sendo facilmente escrita perturbativamente e também onde poderiamos escrever a ação total, como variações dos operadores de BRST linearizados.

Usando uma construção semelhante ao de Blau-Thompson, via método de Batalin-Vilkovisky, a fim de contornarmos os problemas de uma interação tipo $\langle AA \rangle$. Começaremos, então, descrevendo um exemplo de uma ação para $N = 1$ e $D = 3$. O super-diagrama de Batalin-Vilkovisky referente ao setor geométrico é dado por

$$
\begin{array}{ccc}
 & {}^{0}F_2 & \\
 {}^{-1}\bar{\Psi}_1 & {}^{1}\Psi_1 & \\
 & {}^{-2}\bar{\Phi}_0 & {}^{2}\Phi_0
\end{array} , \tag{3.69}
$$

onde não incluímos o termo fixador de $\bar{\Psi}$, porque agora daremos uma ênfase especial a este campo. As transformações de BRST destes campos são, a princípio, dadas por:

$$\begin{aligned} sA &= -D_A C, \\ sC &= -C^2, \\ s\overline{C} &= \Pi, \ s\Pi = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &sF = -[C, F], \\ &s\Psi = -[C, \Psi], \\ &s\bar{\Psi} = -[C, \overline{\Psi}], \\ &s\bar{\Phi} = -[C, \overline{\Phi}]. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Cosideremos agora que $\bar{\Psi}$ tenha uma simetria de gauge de "modo zero" (background), assim sua transformação de BRST fica definida por:

$$s\bar{\Psi} = -D_A\Sigma - [C, \bar{\Psi}], \tag{3.71}$$

onde a este supercampo é associado um super-ghost, $\Sigma$, onde agora podemos escrever um super-triângulo de BV, associado a $\bar{\Psi}$, tal que:

$$\begin{array}{ccc} & {}^{-1}\bar{\Psi}^{0}_{1} & \\ {}^{0}\overline{\Sigma}^{-1}_{0} & & {}^{-1}\Sigma^{1}_{0} \end{array}, \tag{3.72}$$

onde $s\overline{\Sigma} = \Gamma$ [8]. A nilpotência do operador de BRST, $s$, deve ser "on-shell", i.e., como estamos falando de uma teoria num espaço-tempo tri-dimensional, a equação de movimento deve ser,

$$D^2 = F = 0,$$

curvatura nula, onde

$$s^2\ \bar{\Psi} = s\Sigma = -[F, \bar{\Psi}] = 0.$$

Veremos agora que a ação invariante da teoria, referente ao setor geométrico pode ser escrita como:

$$S_{Geom} = \int d\theta\{\bar{\Psi}F + \bar{\Phi}D_A * \Psi\} = s_{lin}\Delta, \tag{3.73}$$

[8] Observe que $\Gamma(x,\theta)$ é o multiplicador de Lagrange de $\overline{\Sigma}$.

i.e., é invariante de BRST [38]. Vamos escrever explicitamente as parcelas da ação acima, a partir dos contadores de campos $\mathcal{N}$:

$$s_{lin} Tr \int d\theta \bar{\Phi}^* \cdot \bar{\Phi} \ = \ (\mathcal{N}_{\bar{\Phi}} - \mathcal{N}_{\bar{\Phi}^*}) S_{Geom} = Tr \int d\theta \{\bar{\Phi} D_A * \Psi\}, \tag{3.74}$$

$$s_{lin} Tr \int d\theta \bar{\Psi}^* \cdot \bar{\Psi} \ = \ (-\mathcal{N}_{\bar{\Psi}} + \mathcal{N}_{\bar{\Psi}^*}) S_{Geom} = Tr \int d\theta \{\bar{\Psi} F\}, \tag{3.75}$$

onde $\bar{\Psi}^*$ e $\bar{\Phi}^*$ são os anti-campos de $\bar{\Psi}$ e $\bar{\Phi}$, e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = s_{lin} + \mathcal{O}(\hbar)$, o operador de Slavnov-Taylor [38], atuante num funcional $\mathcal{F}$, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}(\mathcal{F}) &= 0, \quad \forall \quad \mathcal{F} \\ \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} &= 0, \quad se \quad \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0. \end{aligned}$$

Fomos a procura de possíveis contratermos existentes na teoria, de uma forma meio que manual, e verificamos que todos eram nulos, concluímo que isso ocorria pelo grande numero de simetrias do modelo. Portanto não foi necessário a introdução de outros campos exteriores, diferentemente da ação (3.32), em que o último termo não podia ser escrito como variação de, $s_{lin}$.

A ação de fixação de gauge, refente ao super-triângulo (3.72) e a parte de Yang-Mills, é escrita como

$$\begin{aligned} S_{Ghost} &= sTr \int d\theta \{\bar{C} d * A + \overline{\Sigma} d * \bar{\Psi}\} \qquad (3.76) \\ &= Tr \int d\theta \{\Pi d * A - \bar{C} d * D_A C + \Gamma D_A * \bar{\Psi} + \overline{\Sigma} D_A * \left(D_A \Sigma + [C, \bar{\Psi}]\right)\}, \end{aligned}$$

onde a ação total de super-BF agora será a soma das equações (3.73) e (3.76)

$$S_{SBF} = S_{Geom} + S_{Ghost}, \tag{3.77}$$

que é uma ação totalmente invariante sob a simetria de BRST. A ação total também tem loop nulos, portanto, do ponto de vista da renormalizabilidade ela é estável e descreve somente gráfico de Feynman tipo “árvore”.

Para comprovar isto, vamos descrever as equações de movimento, começando com a parte da ação livre de (3.77), somada com a ação das fontes

$$\begin{aligned} S_{Fonte} &= Tr \int d\theta \{A J^A + \bar{\Psi} J^{\bar{\Psi}} + E_\theta J^{E_\theta} + \bar{\Phi} J^{\bar{\Phi}} \\ &+ \Gamma J^\Gamma + \bar{\Sigma} J^{\bar{\Sigma}} + \Sigma J^\Sigma + \Pi J^\Pi + C J^C + \bar{C} J^{\bar{C}}\}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

onde escrevemos apenas as equações:

$$\begin{aligned} A &= \Box^{-1}\{*d * J^{\bar{\Psi}} + d * J^{\Pi}\}, \\ \bar{\Psi} &= \Box^{-1}\{*d * J^{A} + d * J^{\Gamma}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

que já nos garante a não existência de "loops" tipo $\langle AA \rangle$, ou qualquer outro que tenha derivadas de Grassmann nos termos fontes.

### 3.3.2 Modelo em $D = 4$ e $N = 1$

Consideremos agora o caso em que a curavatura é anti-auto-dual, i.e, soluções tipo instantons. O diagrama de BV para o setor geomértico é dado por

$$\begin{array}{ccc} & {}^{0}F_2 & \\ {}^{-1}\bar{\Psi}_2 & {}^{1}\Psi_1 & \\ & {}^{-2}\bar{\Phi}_0 & {}^{2}\Phi_0 \end{array} ,$$

com as mesmas transformações anteriores (3.70). Se $\bar{\Psi}$ apresenta "modo zero", implica que este não é covariante frente transformação de BRST, transformando-se da mesma forma que (3.71), portanto, setor de anti-ghost agora assume a forma

$$\begin{array}{ccc} & {}^{-1}\overline{\Psi}_2^0 & \\ {}^{0}\overline{\Sigma}_1^{-1} & {}^{-1}\Sigma_1^1 & \\ {}^{-1}\overline{\Sigma}_0^0 & {}^{0}\overline{\Sigma}_0^0 & {}^{-1}\Sigma_0^2 \end{array} ,$$

com $s$ nilpotente e "on-shell", aqui considerando $F^+ = 0$ [9].

A ação invariante é determinada por:

$$\begin{aligned} S_{inv} &= Tr \int d\theta \{ \overline{\Psi} F + \bar{\Phi} D_A * \Psi + s[\bar{C} d * A + {}^{0}\overline{\Sigma}_1^{-1} d * \bar{\Psi} \\ &\quad {}^{-1}\overline{\Sigma}_0^0 d * {}^{0}\overline{\Sigma}_1^{-1} + {}^{0}\overline{\Sigma}_0^0 d * {}^{-1}\Sigma_1^1] \}, \end{aligned} \tag{3.79}$$

Aqui também verificamos as mesmas propriedades de renomalizabilidade do exemplo anterior para $D = 3$.

[9] Onde temos que $F^+ = F + i\widetilde{F}$, representando soluções intantonicas em $D = 4$.

Esta sistematização será usada, para generalizarmos a fixaç ão de gauge do modelo super-BF, tanto para dimensão bosônica quanto para fermiônica. Para tratarmos da generalização supersimétrica (fermiônica), é necessário o uso do super-diagrama de BV, para acomodarmos todos os campo possíveis, como feito anteriormente para o modelo de Blau-Thompson.

### 3.3.3 Generalização para $D-$Dimensões e $N-$SUSY

A generalização para $D-$Dimensões e $N-$SUSY é imediata, preservando as transformações de BRST e de "shift" dos supercampos. Devemos generalizar o super-diagramas do setor geométrico (3.69), sendo este agora dado por:

$$\begin{array}{cc} & {}^{0}F_{2}^{0} \\ {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-2}^{0} & {}^{1}\Psi_{1\,I}^{0} \\ {}^{-N-2}\bar{\Phi}_{0}^{0\,I} & {}^{2}\Phi_{0\,IJ}^{0} \end{array} , \tag{3.80}$$

O setor de ghosts e anti-ghosts de $\bar{\Psi}$ (3.72), considerando a propriedade de "modo zero", será

$$\begin{array}{ccccc} & & {}^{-N}\bar{\Psi}_{D-2}^{0} & & \\ & {}^{0}\bar{\Sigma}_{D-3}^{-1} & & {}^{-N}\Sigma_{D-3}^{1} & \\ {}^{-N}\bar{\Sigma}_{D-4}^{0} & & {}^{0}\bar{\Sigma}_{D-4}^{-2} & & {}^{-N}\Sigma_{D-4}^{2} \\ \swarrow & & \cdots & & \searrow \\ {}^{s}\bar{\Sigma}_{0}^{g} & & \cdots & & {}^{-N}\Sigma_{0}^{D-2} \end{array} , \tag{3.81}$$

cujas transformações de BRST tanto para ghosts e anti-ghosts, são:

$$s\left({}^{s}\Xi_{D-2-g}^{-(-1)dig(g)}\right) = D_A\left({}^{s}\Xi_{D-3-g}^{-(-1)dig(g+1)}\right) - [C,{}^{s}\Xi_{D-2-g}^{-(-1)dig(g)}], \tag{3.82}$$

e $\Xi = \{{}^{s}\Sigma_{p}^{g}, {}^{s}\bar{\Sigma}_{p}^{g}\}$. Aqui, a nilpotência do operador de BRST $s$ também é definida "on-shell", cuja solução é de curvatura nula. Usando o mesmo argumento usado anteriormente para $D = 3$, garantimos a nilpotência de $s$. O triângulo referente aos multiplicadores de Lagrange e os anti-ghosts ${}^{s}\bar{\Sigma}_{p}^{g}$ é

$$\begin{array}{ccc} & {}^{0}\Pi_{D-3}^{0} & \\ {}^{-N}\Pi_{D-4}^{1} & & {}^{0}\Pi_{D-4}^{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} ,$$

com $\quad s\,{}^{s}\bar{\Sigma}_{p}^{g} = {}^{s}\Pi_{p}^{g-1}, \quad s\,{}^{s}\Pi_{p}^{g-1} = 0.$

A ação invariante de gauge fica determinada da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_{SBF} &= Tr \int d^{N}\theta\{({}^{-N}\overline{\Psi}_{D-2}^{0})({}^{0}F_{2}^{0}) + ({}^{-N-2}\overline{\Phi}_{0}^{0})D_{A} * ({}^{1}\Psi_{1}^{0}) \\ &\quad + s[\bar{C}d * A + ({}^{0}\overline{\Sigma}_{D-3}^{-1})d * ({}^{-N}\overline{\Psi}_{D-2}^{0}) + ({}^{0}\bar{\Sigma}_{D-4}^{-2})d * ({}^{-N}\Sigma_{D-3}^{1}) \\ &\quad + ({}^{-N}\bar{\Sigma}_{D-4}^{0})d * ({}^{0}\Sigma_{D-3}^{-1}) + ... + ({}^{s}\Sigma_{0}^{g})d * ({}^{-s-1}\Sigma_{0}^{-g-1})]\}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

onde $s = -N$ e $g = 0$ se $D-$par ou $s = 0$ e $g = -1$ se $D-$ímpar.

Resumindo: a forma geral deste novo modelo é a seguinte:

$$S = Q\, s(...),$$

ou seja, é a atuação dos dois operadores de cohomologia, $Q$ e $s$, um tendo cohomologia trivial e o outro não, enquanto na ação de Blau-Thompson se restringia apenas ao setor de gauge-fixing:

$$S = Q(\Psi_{Geom} + s\Psi_{Gauge-Fixing}),$$

sendo instável com respeito a renormalizabilidade.

## 3.4 Argumentos da Renormalizabilidade dos modelos

Vamos, primeiramente, verificar a renormalizabilidade da teoria descrita pela ação (3.32), já que a ação (3.13), descrita em [26] foi verificada, apenas lembrando, que lá é inconsistente a difinição dos ghosts e anti-ghosts, pois estes não são supercampos, visto que o multiplicador de Lagrange do anti-ghost é. Essa inconsistência afeta a unitariedade da matriz$-S$, pois, ficam sobrando campos de ghosts referentes à componente $\theta$. A ação de Witten, descrita por Horne no superespaço, é simplesmente uma ação de super-Yang-Mills topológica, pois podemos escreve-la como $(F^{+})^{2} \sim F^{2} + F\tilde{F}$. Portanto, uma ação como esta, em qualquer dimensão bosônica ou fermiônica, admite "loops" tipo $(AA)$ (supercampo) e ordens superiores. Já teorias tipo super$-$BF, como a descrita por Blau-Thompson [34] [36] e a que chamamos na seção anterior de Nova fixação de gauge, preocupam-se em tratar da fixações de gauge em todos os campos, do setor geométrico ou do setor de anti-ghost. Em nosso caso, trabalhamos com supercampos onde, os supercampos anti-ghosts que carregam tanto um termo de anti-ghost como o termo multiplicador de Lagrange [10], não há "loops" não-nulos [11]. Assim verifica-se que todas as interações nestes modelos são do tipo "árvore". Isso permite-nos eliminar qualquer proposta de contratermos candidatos que apareçam. Para isso deve existir uma simetria associada.

Pensemos numa teoria com $N = 1$ SUSY. Quando escrevemos um propagador supersimétrico, dependendo de campos interagentes, se este propagador tiver termos em componentes $\theta$ e em $x$, isto deve gerar nos super-gráficos de Feynman, linhas consideradas internas. Tais linhas internas, no processo de estudo da renormalização não seriam amputadas, portanto não teriamos apenas uma teoria a nível árvore. Na descrição e no estudo da renormalização da ação (3.32), verificamos que este procedimento é plenamente aplicado, i.e., os loops, tanto das interações da ação original como os referentes aos contratermos adicionados no processo de renormalização algébrica, eram nulos antes mesmo de uma integração final dos propagadores, isso por causa de três motivos:

*(i)* Não tínhamos propagração $\langle AA \rangle$;

*(ii)* Os propagadores eram desconexos, tais que: $\langle A\bar{\Psi} \rangle$, $\langle E\bar{\Phi} \rangle$ e $\langle \bar{\Lambda}\bar{\Psi} \rangle$, não conseguiam formar loops não-nulos;

*(iii)* O único campo que continha derivadas de $\theta$ nas fontes era, o multiplicador de Lagrange $\Pi(x, \theta)$, que não é interagente.

Estes argumentos são plausíveis para podermos escrever a teoria renormalizável a qualquer ordem e generalizarmos a qualquer dimensão no superespaço.

Vejamos os propagadores não-nulos da ação generalizada (3.83) são os seguintes:

$$
\begin{gathered}
\langle A(z_1)\bar{\Psi}(z_2) \rangle,\ \langle A(z_1)\Pi(z_2) \rangle,\ \langle C(z_1)\bar{C}(z_2) \rangle \\
\langle E_I(z_1)\bar{\Phi}(z_2) \rangle,\ \langle E_I(z_1)\Pi(z_2) \rangle, \\
\langle \bar{\Psi}(z_1)\Pi(z_2) \rangle,\ \langle \bar{\Sigma}(z_1)\bar{\Sigma}(z_2) \rangle,\ \ldots
\end{gathered}
$$

com $g \geq 0$. O primeiro propagador tem a forma

$$\langle A_\mu(z_1)\, \bar{\Psi}_{\nu_1 \ldots \nu_{D-2}}(z_2) \rangle \sim \Delta^{-1} \varepsilon_{\mu\nu_1 \ldots \nu_{D-2}\, \rho} \partial^\rho \delta(z_1, z_2),$$

[10] O Multiplicador de Lagrange, é por definição, sempre a última componente de cada supercampo anti-ghost do superdiagrama de BV.

[11] Este se cancelam ou são nulos antes de uma integração final em $\theta$, no super-propagador.

onde $\Delta^{-1}$ é o inverso do Operador de Laplace-Beltrani $\Delta = *d*d + d*d*$, a super-distribuição de Dirac

$$\delta(z_1, z_2) = \delta^D(x_1 - x_2)\frac{(-1)^{N+1}}{N!}(\theta_1 - \theta_2)^N.$$

Temos também a exceção, onde há derivadas de Grassmann no propagador:

$$\langle E_I(z_1)\Pi(z_2)\rangle \sim \Delta^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_1^I}\delta(z_1, z_2).$$

Devido ao fato do multiplicador de Lagrange $\Pi$ não se propagar, isto não penaliza todo o resto da construção do modelo, com respeito a ausência das correções radiativas.

A semelhança com a teoria anterior (Fixação de gauge de Blau-Tompson) restringe-se apenas na disposição dos termos que fixam o setor geomérico, aqui ação super$-$BF invariante, pois o modo de como é feita a fixação de gauge do anti-ghost de $F$ é estritamente diferente, devido a simetria de BRST usada na fixação de todos os campos. A ação alternativa descrita aqui, apresenta ghosts associados a $\bar{\Psi}$, isto faz com que tenha um termo tipo Fadeev-Popov associado ao seu ghost, o que não ocorre anteriormente, devido ao processo de ação mínima de Blau-Thompson, dizemos que, $\bar{\Psi}$, não tem ghost associado, possui somente anti-ghosts. Isto faz com que a matriz$-S$ de uma ação seja diferente da outra [2]. Vemos também claramente a diferença entre as duas simetrias, a de "shift" e a de BRST, externadas pela diferença explícita das ações.

# Capítulo 4

# Campo de Matéria Tensorial antissimétrico com $N = 2$

Resultados experimentais recentes, envolvendo decaimento de pion(−) em elétron, seu anti-neutrino e radiação: $\pi^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\gamma$; e Kaon(+) decaindo no pion neutro, pósitron e seu neutrino: $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+\nu$ , foram descobertos por Chizhov em trabalhos experimentais da década de 90 [39] e trouxeram esperanças, ainda como hipóteses, de que haveria novos tipos de interações, formuladas no trabalho [40] chamadas interações tensoriais de matéria. Mas, tais interações não são previstas pelo Modelo Padrão, daí a ideia de se estudar este modelo como proposta de unificação, ou ainda tentar uma classificação mais adequada para este tipo de interação. Segundo Chizhov e trabalhos anteriores [41] [42], os resultados experimentais mostram que a precisão não é tão refinada como na teoria eletrofraca: os resultados experimentais ainda persistem algumas diferenças em relação aos valores calculados com auxílio do modelo de interações fracas, em suma, há muito ainda que o fazer, para se chegar a resultados, tanto teórico como experimental, na obtenção de um modelo consistente para tais decaimentos. Surgiu também outro trabalho [43] que deixou perguntas no ar, i.e., inconsistências haviam surgido, do ponto de vista da unitariedade e renormalizabilidade, destas teorias. Portanto, formam feitas análises deste modelo, o que revelou interessantes propriedades como renormalizabilidade por "power couting" e cálculos a um "1-oop" revelando liberdade assintótica da constante de acoplamento de gauge no caso do acoplamento abeliano. Neste trabalho, tentamos realizar uma formulação supersimétrica da ação do campo tensorial de matéria de rank-2 complexo e auto-dual, com um acoplamento mínimo de gauge não-Abeliano e topológico, como descrito em [45], que por sua vez reescreveu esta ação em termos da ação original de Avdeev-Chizov [40] a partir de princípios fenomenológicos [46]. Um trabalho interessante também foi investigado [44], pois sistematiza uma série de resultados interessantes no que diz respeito aos campos tensoriais antisimétricos de gauge. Tal ação original foi discutida por Avdeev-Chizov [43] onde estes, apresentaram a inconsistência teórica citada anteriormente. Eles fazem referência à unitariedade e renormalizabilidade, vistas a partir do espaço de Fock. Estas são as motivações que nos levaram a pensarmos neste trabalho, de posse da ação do tensor antisimétrico de rank-2, como campo de matéria acoplada ao campo vetorial de gauge não-Abeliano.

A partir do conhecimento adquirido das propriedades supersimétricas, do campo tensorial de matéria antisimétrico de rank-2, iremos tentar escrever a ação que o define, sob o ponto de vista das Teorias de Campos Topológicas, Esta investigação foi feita primeiramente por Geyer-Mülsch [30] para $N = 1$ e $N = 2$. Tentaremos aqui mostrar uma construção um pouco diferente tabalhando com supercampos que carregue o este tensor. Usaremos as definições apresentadas no *Capítulo 1* e no *Apêndice A* para $N = 2$.

De posse destas definições, iremos escrever a ação da matéria tensorial não-Abeliana, invariante frente ao grupo das transformações de gauge. Escreveremos a teoria definida numa Variedade Riemanniana 4−dimensional, portanto como acoplamento de Super-Yang-Mills, poderá ser usada a ação de Blau-Thompson ou mesmo a ação de Super-BF apresentada no *Capítulo 3*. Vejamos a construção que segue.

## 4.1 Ação de Super-Yang-Mills topológica de Blau-Thompson

A ação topológica de Yang-Mills para $D = 4$ : é a ação de Witten [32] [33] [35], e em $N = 2$ SUSY foi descrita por Blau-Thompson [34] [36].

Consideremos as definições do *Capítulo 1* e *Apêndice A* com respeito aos supercampos de definidos com $N = 2$ supersimetrias e ao grupo das transformações de gauge.

Vamos escrever a ação de Blau-Thompson[1] no superespaço para soluções auto-duais tipo instantônicas, $F = *F$. Definimos, então, uma 2—forma-supercampo multiplicador de Lagrange, com a propriedade de anti-auto-dualidade e covariância de gauge: $sK = -[C, K]$, tal que

$$K(x,\theta) = k(x) + \theta^I k_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \kappa(x).$$

Queremos um termo quadrático na última componente de $K$, para não precisarmos fixar seu gauge, isto é, eliminamos todos os eventuais graus de liberdades espúrios de $K$. Queremos também uma 0-forma-supercampo para completar a fixação do gauge de $\Psi_I$:

$$H_I(x,\theta) = h_I(x) + \theta^J h_{JI}(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \rho_I(x). \tag{4.1}$$

Para fixar o gauge de Yang-Mills definimos um anti-ghost de $C$, sendo uma 0-forma-supercampo de natureza fermiônica

$$\overline{C}(x,\theta) = \overline{c}(x) + \theta^I \overline{c}_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \overline{c}_F(x), \tag{4.2}$$

associado a este um 0-forma-supercampo multiplicador de Lagrange

$$B(x,\theta) = b(x) + \theta^I b_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 \beta(x). \tag{4.3}$$

cujas transformações de BRST são $s\overline{C} = B,\ sB = 0$, em componentes:

$$s\overline{c} = b,\ s\overline{c}_I = b_I \ and \ s\overline{c}_F = \beta. \tag{4.4}$$

Portanto a ação de Blau-Thompson com o gauge completamente fixado, toma a forma:

$$S_{BT} = Tr\int \sqrt{g}d^2\theta\{K * F + \zeta K * D_\theta^2 K + \varepsilon^{IJ} H_I D_A * \Psi_J + s(\overline{C}d * A)\}, \tag{4.5}$$

com $\zeta$ sendo constante. Em componentes, teremos

$$\begin{aligned} S_{BT} &= Tr\int \sqrt{g}\{\frac{1}{2}\kappa * f + \zeta\kappa * \kappa + \zeta\varepsilon^{IJ}(k * [\eta_I, k_J] + [k_J, \eta_I] * k) - \zeta\phi^{IJ}\phi_{IJ} k * k \\ &\quad -\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ} k_I * D_a\psi_J + \frac{1}{2}k * D_a\alpha + \frac{1}{4}k * \varepsilon^{IJ}[\psi_I, \psi_J] \\ &\quad +\varepsilon^{IJ}(\frac{1}{2}\rho_I D_a * \psi_J + \frac{1}{2}h_{JI} D_a * \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon^{KL} h_{KI} D_a * D_a\phi_{JL} \end{aligned}$$

[1]Essa proposta para ação, tem as mesmas características da ação de Witten descrita no Capítulo 1.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}h_I D_a * D_a\eta_J - \varepsilon^{KL}h_I D_a * [\psi_K,\phi_{JL}] - \frac{1}{2}[h_I,\psi_J] * \alpha \\
&-\frac{1}{2}\varepsilon^{KL}[\psi_K,h_I] * D_a\phi_{JL} + \frac{1}{2}\varepsilon^{KL}[\psi_K,h_{LI}] * \psi_J + [\alpha,h_I] * \psi_J) \\
&+\frac{1}{2}bd * B + \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}b_I d * \psi_J + \frac{1}{2}\beta d * a - \frac{1}{2}\overline{c}d * D_a c_F \\
&-\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\overline{c}d * [\psi_J, c_J] - \frac{1}{2}\overline{c}d * [B,c] + \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\overline{c}_I d * D_a c_J \\
&+\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\overline{c}_I d * [\psi_J, c] - \frac{1}{2}\overline{c}_F d * D_a c\}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

onde a métrica $g$ é uma métrica de fundo e Riemanniana.

A ação acima está descrita no gauge de Wess-Zumino dadas pelas equações (1.54), (1.55). Podemos também escrever o acoplamento de gauge com a ação de Super-BF (), que deverá dar as mesmas soluções de (4.5).

Na proxima seção, veremos a ação de Avdeev-Chizhov numa variedade Riemannian.

## 4.2 Matéria Tensorial numa Variedade Riemanniana Geral

Partimos da ação de Avdeev-Chizhov descrita no trabalo [45], escrita numa variedade Minkowskiana 4−dimensional com uma métrica de assinatura $sign(\eta_{mn}) = (+,-,-,-)$, cujos índices serão agora denominados por: $m, n, \ldots$ . Escrevemos esta ação, apenas com os termos referentes aos campos de Matéria

$$
S_{AC} = \int d^4x\{(D^m\varphi_{mn})^\dagger(D_p\varphi^{pn}) + \xi(\varphi^\dagger_{mn}\varphi^{pm}\varphi^{\dagger mq}\varphi_{pq})\}, \tag{4.7}
$$

com $\xi$ uma constante de acoplamento de auto-interação, e a derivada covariante $D^m\varphi_{mn} = \partial^m\varphi_{mn} - a^m\varphi_{mn}$, pertencendo a representação finita do grupo de Lie $G$, e $a^m$ sendo o potencial de gauge e anti-hermitiano. Esta ação é invariante de gauge pela seguinte transformação

$$
\delta_G(\omega)a_m = D_m\omega, \quad \delta_G(\omega)\varphi_{mn} = \varphi_{mn}\omega, \quad \delta_G(\omega)\varphi^\dagger_{mn} = -\omega\varphi^\dagger_{mn}, \tag{4.8}
$$

Com $\varphi_{mn}$ definido por:

$$
\varphi_{mn} = T_{mn} + i\widetilde{T}_{mn} \tag{4.9}
$$

tendo as propriedades $\varphi_{mn} = i\tilde{\varphi}_{mn}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}_{mn} = -\varphi_{mn}$, onde a dualidade é definida por $\tilde{\varphi}_{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnpq}\varphi^{pq}$.

Para tratar desta teoria como uma teoria topológica, Geyer reescreveu-a numa variedade Riemanniana quadri-dimensional, dotada da vierbein $e_\mu{}^m$ e da conexão de spin $\omega_\mu{}^{mn}$, onde com isso possamos escrever a ação (4.7) como

$$S_{AC} = \int d^4x\{(\nabla_\mu\varphi^{\mu\nu})^\dagger(\nabla_\rho\varphi^\rho{}_\nu) + \xi(\varphi^\dagger_{\mu\nu}\varphi^{\rho\nu}\varphi^{\dagger\mu\lambda}\varphi_{\rho\lambda})\}. \tag{4.10}$$

Nesta variedade Riemanniana, encontramos as seguintes propriedades:

$$\sqrt{g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon^{mnpq} = e_{[\mu}{}^m e_\nu{}^n e_\rho{}^p e_{\lambda]}{}^q, \tag{4.11}$$

e

$$e_\mu{}^m e_\nu{}^n g^{\mu\nu} = \eta^{mn} \quad ou \quad e_\mu{}^m e_\nu{}^n \eta_{mn} = g_{\mu\nu}, \tag{4.12}$$

A derivada covariante agora se apresenta em termos da conexão de spin: $\nabla_\mu = D_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn}\sigma_{mn}$, obedecendo as equações

$$\omega_\mu{}^{mn} = -(\partial_\mu e_\nu^m - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho{}^m)e^{\nu n}, \quad \partial_{[\mu}e_{\nu]}^m + \omega_{[\mu}{}^{mn}e_{\nu]m} = 0,$$

sendo que $\sigma_{mn}$ é o gerador do grupo de holonomia $SO(4)$ [31] e $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ a conexão de Levi-Civita na ausência da torção, também $D_\mu = (D_a)_\mu$. Com isso teremos

$$\nabla_\mu\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}D_\mu(\sqrt{g}\varphi^{\mu\nu}),$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}{}^\nu = \partial_\mu(\ln\sqrt{g})$. Agora a ação é invariante frente as seguintes transformações

$$\delta_G(\omega)a_\mu = D_\mu\omega, \quad \delta_G(\omega)\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}\omega, \quad \delta_G(\omega)\varphi^\dagger_{\mu\nu} = -\omega\varphi^\dagger_{\mu\nu}. \tag{4.13}$$

## 4.3 Supersimetrização da Ação de Avdeev-Chizhov

Agora, iremos escrever a ação (4.10) em termos de supercampos, mensionando as convensões dos trabalhos [28] [26]. O supercampo que acomoda o campo tensorial de matéria anti-simétrico de rank-2, é similar ao definido no capítulo anterior [47], sendo agora expessado como linear fermiônico com o índice topológico: $I = 1, 2$, referindo a SUSY topológica:

$$\Sigma^I_{\mu\nu}(x,\theta) = \lambda^I_{\mu\nu}(x) + \theta^I\varphi_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}\theta^2\zeta^I_{\mu\nu}(x), \tag{4.14}$$

onde $\varphi_{\mu\nu}(x)$ é o campo de Avdeev-Chizhov. A supervariedade é composta pela variedade de Riemannian e a variedade topológica fermiônica $N = 2$, por causa disto não é necessária uma introdução da super-vierbein e da super-conexão de spin.

O supercampo é definido segundo a transformações de supersimetrias

$$Q_I \Sigma_{\mu\nu J} = \partial_I \Sigma_{\mu\nu J}, \tag{4.15}$$

em componentes:

$$\begin{aligned} Q_I \lambda_{\mu\nu J} &= \varepsilon_{IJ}\varphi_{\mu\nu}, \\ Q_I \varphi_{\mu\nu} &= -\zeta_{\mu\nu I}, \\ Q_I \zeta_{\mu\nu J} &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Baseado no trabalho [45], nós reescrevemos a transformação de BRST

$$\begin{aligned} s\varphi^i_{mn} &= ic^a(t^a)^{ij}\varphi^j_{mn}, \\ s\varphi^{\dagger i}_{mn} &= -ic^a\varphi^{\dagger j}_{mn}(t^a)^{ji}, \\ s(\nabla_m\varphi_{mn})^i &= ic^a(t^a)^{ij}(\nabla_m\varphi_{mn})^j, \\ s(\nabla_m\varphi_{mn})^{\dagger i} &= -ic^a(\nabla_m\varphi_{mn})^{\dagger j}(t^a)^{ji}, \end{aligned}$$

onde (??) é a álgebra de Lie. Queremos escrever a transformação de BRST para transformações de supergauge, generalizando para:

$$\begin{aligned} s\Sigma^I_{\mu\nu} &= iC\Sigma^I_{\mu\nu}, \\ s(\Sigma^I_{\mu\nu})^\dagger &= iC(\Sigma^I_{\mu\nu})^\dagger, \end{aligned} \tag{4.17}$$

em componentes

$$\begin{aligned} s\lambda^I_{\mu\nu} &= ic\lambda^I_{\mu\nu}, \\ s\lambda^{\dagger I}_{\mu\nu} &= -ic\lambda^{\dagger I}_{\mu\nu}, \\ s\varphi_{\mu\nu} &= ic\varphi_{\mu\nu} + ic^I\lambda_{\mu\nu I}, \\ s\varphi^\dagger_{\mu\nu} &= -ic\varphi^\dagger_{\mu\nu} - ic^I\lambda^\dagger_{\mu\nu I}, \\ s\zeta^I_{\mu\nu} &= ic\zeta^I_{\mu\nu} - ic^I\varphi_{\mu\nu} + ic_F\lambda^I_{\mu\nu}, \\ s\zeta^{\dagger I}_{\mu\nu} &= -ic\zeta^{\dagger I}_{\mu\nu} + ic^I\varphi^\dagger_{\mu\nu} - ic_F\lambda^{\dagger I}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Assim, a superderivada covariante fica determinada por:

$$\mathcal{D}_\mu(\cdot) = (D_A)_\mu(\cdot) + \omega_\mu(\cdot) = \nabla_\mu(\cdot) + \theta^I[\psi_{I\mu}, (\cdot)] + \frac{1}{2}\theta^2[\alpha_\mu, (\cdot)].$$

Portanto o gauge de Wess-Zumino, escrito para $N=2$ no *Capítulo 1* pelas equações (1.54) e (1.55), para o supercampo de Avdeev-Chizhov, será:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}\lambda_{\mu\nu I} &= \epsilon^J \varepsilon_{JI}\varphi_{\mu\nu} + ic\lambda_{\mu\nu I}, \\
\tilde{Q}\lambda^\dagger_{\mu\nu I} &= \epsilon^J \varepsilon_{JI}\varphi^\dagger_{\mu\nu} - ic\lambda^\dagger_{\mu\nu I}, \\
\tilde{Q}\varphi_{\mu\nu} &= ic\varphi_{\mu\nu} + i\epsilon^I\zeta_{\mu\nu I} + i\epsilon^I\phi_{IJ}\lambda^J_{\mu\nu}, \\
\tilde{Q}\varphi^\dagger_{\mu\nu} &= -ic\varphi^\dagger_{\mu\nu} - i\epsilon^I\zeta^\dagger_{\mu\nu I} - i\epsilon^I\phi_{IJ}\lambda^{\dagger J}_{\mu\nu}, \\
\tilde{Q}\zeta_{\mu\nu I} &= ic\zeta_{\mu\nu I} - i\epsilon^J\phi_{JI}\varphi_{\mu\nu} + i\epsilon^J\eta_J\lambda_{\mu\nu I}, \\
\tilde{Q}\zeta^\dagger_{\mu\nu I} &= -ic\zeta^\dagger_{\mu\nu I} + i\epsilon^J\phi_{JI}\varphi^\dagger_{\mu\nu} - i\epsilon^J\eta_J\lambda^\dagger_{\mu\nu I}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Como anteriormente, seguiremos o mesmo padrão de construção para ação não-Abeliana de Avdeev-Chizhov, sendo esta ção invariante pelas transformaçõs de gauge (4.13) e SUSY. O termo cinético é proposto como:

$$S_{kin} = \int \sqrt{g}d^4xd^2\theta\varepsilon^{IJ}\{(\mathcal{D}_\mu\Sigma^{\mu\nu}_I)^\dagger(\mathcal{D}_\rho\Sigma^\rho{}_{\nu J})\},$$

em componentes:

$$\begin{aligned}
S_{kin} &= \int d^4x\sqrt{g}\{\frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi^{\mu\nu})^\dagger(\nabla_\rho\varphi^\rho{}_\nu) + \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}(\nabla_\mu\lambda^{\mu\nu}_I)^\dagger(\nabla_\rho\zeta^\rho{}_{\nu J}) \\
&+\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}(\nabla_\mu\zeta^{\mu\nu}_I)^\dagger(\nabla_\rho\lambda^\rho{}_{\nu J}) + (\nabla_\mu\varphi^{\mu\nu})^\dagger[\psi^I_\rho, \lambda^\rho{}_{\nu I}] \\
&+[\psi_{\mu J}, \varphi^{\dagger\mu\nu}](\nabla_\rho\varphi^\rho{}_\nu) + \varepsilon^{IJ}(\nabla_\mu\lambda^{\mu\nu}_I)^\dagger\left([\alpha_\rho, \lambda^\rho{}_{\nu J}] + [\psi_{\rho J}, \varphi^\rho{}_\nu]\right) \\
&+\varepsilon^{IJ}\left([\alpha_\mu, \lambda^{\dagger\mu\nu}_I] + [\psi_{\mu J}, \varphi^{\dagger\mu\nu}]\right)(\nabla_\rho\lambda^\rho{}_{\nu J})\}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

O termo de interação carrega um contribuição de uma derivada segunda nas coordenadas de Grassmann, que com isso torna-se invariante de supersimetria de BRST (4.13). Definimos então como:

$$S_{int} = \int \sqrt{g}d^4xd^2\theta\{\varepsilon^{IJ}\varepsilon^{LM}(\Sigma_{\mu\nu I})^\dagger(\Sigma^{\rho\nu}_J)D^KD_K(\Sigma^{\mu\lambda}_L)^\dagger(\Sigma_{\rho\lambda M})\}, \tag{4.21}$$

onde $D_K(\cdot) = \partial_K(\cdot) + [E_K, (\cdot)]$, em componentes teremos

$$\begin{aligned}
S_{int} &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{g}\{\varphi^\dagger_{\mu\nu}\varphi^{\rho\nu}\varphi^{\dagger\mu\lambda}\varphi_{\rho\lambda} - \varepsilon^{IJ}[(\lambda^\dagger_{\mu\nu I}\zeta^{\rho\nu}_J + \zeta^\dagger_{\mu\nu I}\lambda^{\rho\nu}_J)\varphi^{\dagger\mu\lambda}\varphi_{\rho\lambda} \\
&-\varphi^\dagger_{\mu\nu}\varphi^{\rho\nu}(\lambda^{\dagger\mu\lambda}_I\zeta_{\rho\lambda J} + \zeta^{\dagger\mu\lambda}_I\lambda_{\rho\lambda J})] + \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{KL}[\lambda^\dagger_{\mu\nu I}\zeta^{\rho\nu}_J(\lambda^{\dagger\mu\lambda}_K\zeta_{\rho\lambda L} + \zeta^{\dagger\mu\lambda}_K\lambda_{\rho\lambda L}) \\
&+\zeta^\dagger_{\mu\nu I}\lambda^{\rho\nu}_J(\lambda^{\dagger\mu\lambda}_K\zeta_{\rho\nu L} + \zeta^{\dagger\mu\lambda}_K\lambda_{\rho\nu L}) + \lambda^\dagger_{\mu\nu I}\lambda^{\rho\nu}_J[\eta_L, \lambda^{\mu\lambda}_K]\varphi_{\rho\lambda} && (4.22) \\
&-\lambda^\dagger_{\mu\nu I}\varphi^{\rho\nu}_J\eta_L\lambda^{\dagger\mu\lambda}_K\lambda_{\rho\lambda} + \varphi^\dagger_{\mu\nu}\lambda^{\rho\nu}_J\eta_I\lambda^{\dagger\mu\lambda}_K\lambda_{\rho\lambda L} - \lambda^\dagger_{\mu\nu I}\lambda^{\rho\nu}_J\eta_L\lambda^{\dagger\mu\lambda}_K\varphi_{\rho\lambda} && (4.23) \\
&-\lambda^\dagger_{\mu\nu I}\lambda^{\rho\nu}_J\eta_K\varphi^{\dagger\mu\lambda}\lambda_{\rho\lambda L} + \lambda^\dagger_{\mu\nu I}\lambda^{\rho\nu}_J\phi^{MN}\phi_{MN}\lambda^{\dagger\mu\lambda}_K\lambda_{\rho\lambda L}]\}. && (4.24)
\end{aligned}$$

A ação total de matéria fica determinada por: $S_{Kin} + qS_{Int}$, tal que

$$S_{AC} = -\int \sqrt{g} d^2\theta \{ \varepsilon^{IJ} (\mathcal{D}_\mu \Sigma_I^{\mu\nu})^\dagger (\mathcal{D}_\rho \Sigma^\rho{}_{\nu\,J}) + q\varepsilon^{IJ}\varepsilon^{LM} (\Sigma_{\mu\nu\,I})^\dagger (\Sigma_J^{\rho\nu}) D^K D_K (\Sigma_L^{\mu\lambda})^\dagger (\Sigma_{\rho\lambda\,M}) \}, \tag{4.25}$$

onde $q$ é a constante de auto-interação quártica. Em componentes temos a ação de Avdeev-Chizhov mais termo provindos da supersimetrização do modelo

$$\begin{aligned} S_{AC} \;=\; & \int d^4x \sqrt{g} \{ \frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi^{\mu\nu})^\dagger (\nabla_\rho \varphi^\rho{}_\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} (\nabla_\mu \lambda_I^{\mu\nu})^\dagger (\nabla_\rho \zeta^\rho{}_{\nu\,J}) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} (\nabla_\mu \zeta_I^{\mu\nu})^\dagger (\nabla_\rho \lambda^\rho{}_{\nu\,J}) + (\nabla_\mu \varphi^{\mu\nu})^\dagger [\psi_\rho^I, \lambda^\rho{}_{\nu\,I}] \\ & + [\psi_{\mu\,J}, \varphi^{\dagger\mu\nu}] (\nabla_\rho \varphi^\rho{}_\nu) + \varepsilon^{IJ} (\nabla_\mu \lambda_I^{\mu\nu})^\dagger \left( [\alpha_\rho, \lambda^\rho{}_{\nu\,J}] + [\psi_{\rho\,J}, \varphi^\rho{}_\nu] \right) \\ & + \varepsilon^{IJ} \left( [\alpha_\mu, \lambda_I^{\dagger\mu\nu}] + [\psi_{\mu\,J}, \varphi^{\dagger\mu\nu}] \right) (\nabla_\rho \lambda^\rho{}_{\nu\,J}) \\ & + q (\varphi^\dagger_{\mu\nu} \varphi^{\rho\nu} \varphi^{\dagger\mu\lambda} \varphi_{\rho\lambda} - \varepsilon^{IJ} [ (\lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \zeta_J^{\rho\nu} + \zeta^\dagger_{\mu\nu\,I} \lambda_J^{\rho\nu}) \varphi^{\dagger\mu\lambda} \varphi_{\rho\lambda} \\ & - \varphi^\dagger_{\mu\nu} \varphi^{\rho\nu} (\lambda_I^{\dagger\mu\lambda} \zeta_{\rho\lambda\,J} + \zeta_I^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\lambda\,J}) ] + \varepsilon^{IJ} \varepsilon^{KL} [ \lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \zeta_J^{\rho\nu} (\lambda_K^{\dagger\mu\lambda} \zeta_{\rho\lambda\,L} + \zeta_K^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\lambda\,L}) \\ & + \zeta^\dagger_{\mu\nu\,I} \lambda_J^{\rho\nu} (\lambda_K^{\dagger\mu\lambda} \zeta_{\rho\nu\,L} + \zeta_K^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\nu\,L}) + \lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \lambda_J^{\rho\nu} [\eta_L, \lambda_K^{\mu\lambda}] \varphi_{\rho\lambda} \\ & - \lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \varphi_J^{\rho\nu} \eta_L \lambda_K^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\lambda} + \varphi^\dagger_{\mu\nu} \lambda_J^{\rho\nu} \eta_I \lambda_K^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\lambda\,L} - \lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \lambda_J^{\rho\nu} \eta_L \lambda_K^{\dagger\mu\lambda} \varphi_{\rho\lambda} \\ & - \lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \lambda_J^{\rho\nu} \eta_K \varphi^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\lambda\,L} + \lambda^\dagger_{\mu\nu\,I} \lambda_J^{\rho\nu} \phi^{MN} \phi_{MN} \lambda_K^{\dagger\mu\lambda} \lambda_{\rho\lambda\,L} ] ) \}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Esta ação tem a propriedade de ser invariante conforme. A ação total será $S_{AC} + S_{BT}$. Também, podemos escrever a ação invariante como a soma de (4.26) mais (3.83), onde (3.83) é a nova ação de super-BF, que descreve as soluções de super-Yang-Mills topológica adaptada para $N = 2$.

O fato da ação total ser $Q-$exata é também conteplada para $N = 2$ SUSY como em [30], este porque o elemento de volume no superespaço $Q^2 \propto Q_1 Q_2$ torna a ação exata em $Q_1$ e $Q_2$. De acordo com o review de Blau-Thompson [27], o tensor momento energia $\Theta_{\mu\nu}$ é também $Q-$exato, portanto escrevemos um observável desta teoria como:

$$\mathcal{O} = \langle 0 | \Theta_{\mu\nu} | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (S_{BT} + S_{AC}) | 0 \rangle = \langle 0 | Q \Upsilon_{\mu\nu} | 0 \rangle, \tag{4.27}$$

garantindo a natureza topológica do modelo, onde usaremo apenas o termo cinético para descrever um observável, pois este, deve ser isento de qualquer constante de acoplamento, com a $q$, que torna o termo que a carrega irrelevante, e pode ser omitido.

# Conclusão e Pespectivas Futuras

Os resultados aqui obtidos mostram-nos que nesta nova formulação de superespaço, é possível construir teorias quânticas de campos topológicas aceitáveis, já que Horne encontrou uma barreira, o grande número de campos envolvidos na teoria que gerava por conseguinte muitos gráficos de Feynman. Portanto, a nossa motivação, foi procurar uma teoria que não apresentava tais problemas, basicamente uma teoria com poucos propagadores.

Sistematizamos, a obtenção de observáveis em uma dimensão arbitrária do superespaço, através de uma série de proposições, que serviram de suporte técnico para estudarmos as soluções das equações de descida e uma futura classificação das mesmas. Apresentamos também alguns exemplos, para uma dada classe de observáveis conhecida na literatura como classes de Chern. Este exemplo, nos fez refletir melhor, sobre como poderiamos dar continuidade ao estudo das classificações de novos observáveis, que apareciam na equação de super-multi-descida, já que, as soluções do observável de partida, $\Delta$ (equações de multi-descida), está contida nesta, ou seja, há soluções a mais a serem estudadas futuramente.

Restringimos agora, a teoria de campos topológicas de Yang-Mills à dois tipos de soluções de instantons: uma de curvatura nula e outra de curvatura anti-auto-dual. Para corresponder as expectativas da nossa motivação. Desevolvemos uma nova fixação de gauge do modelo super-BF, através do formalismo de Batallin-Vilkovisky, Capítulo 3. Esta fixação de gauge, nos proporcionou uma teoria bem comportada, livre de problemas de natureza estrutural, tais como: renormalizabilidade, unitariedade e anomalias de gauge, pois os possíveis contratermos formam todos eliminados através das simetrias da teoria.

Para o campo de Avdeev-Chizhov, $\varphi_{\mu\nu}$, tivemos que acomodá-lo num setor que caracterizava-o como campo de ghost (pela simetria de "shift"). Ocorria algo similar quando verificavamos o comutador no espaço de Fock de sua ação [43], lá há um ghost provindo de termos com derivadas na distribuição de Dirac, sendo então necessário tomarmos nulos os termo transversais, eliminando os setores problemáticos desta ação. Não sabemos ainda se há relações entre estas definições e os problemas de natureza estrutural da ação de Avdeev-Chizhov. Será necessário um investigação mais aprofundada para verificarmos se a simetria de "shift", neste gauge proposto, é capaz de responder tais prolemas.

# Apêndice A

# Simetria de "Shift"

## A.1 Formalismo $N = 2$ SUSY

O índice que representa o número de supersimetria $I = 1, 2$ é o índice característico do grupo $SU(2)$, este é abaixado e levantado com a ajuda da métrica antisimétrica $\varepsilon^{IJ}$, $\varepsilon_{IJ}$, $\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = 1$ e $\varepsilon\varepsilon^{-1} = 1$. Dado um campo $\varphi$ dotado do índice $I$, vale as propriedades:

$$\varphi^I = \varepsilon^{IJ}\varphi_J \; ; \quad \varphi_I \; = \varepsilon_{IJ}\varphi^J \; ;$$

com $\varepsilon_{IK}\varepsilon^{KJ} = \delta_I^J$. Fazemos as seguintes identificações:

$$\varepsilon = -\varepsilon^t, \; \varepsilon = -i\sigma_y, \; \varepsilon^{-1} = i\sigma_y \tag{A.1}$$

onde

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As derivadas nas coodenadas $\theta^I$ são definidas como

$$\partial_I = \frac{\partial}{\partial\theta^I}, \; \partial^I = \frac{\partial}{\partial\theta_I} \text{ e } \partial_I\theta^J \stackrel{def}{=} \delta_I^J \tag{A.2}$$

$$\partial^I f = \varepsilon^{IJ}\partial_J f$$

com $f$ uma superfunção qualquer. Atuando nas coordenadas

$$\partial^I\theta^J = -\varepsilon^{IJ}, \; \partial_I\theta_J = -\varepsilon_{IJ} \tag{A.3}$$

O produto escalar fermiônico nesta representação é definido por:

$$(\chi\varphi) = \chi^I \varphi_I = -\chi_I \varphi^I. \tag{A.4}$$

A derivação de um quadrado em $\theta$, fica definida por:

$$\partial^I \left(\theta^2\right) = -2\theta^I, \ \partial_I \left(\theta^2\right) = 2\theta_I, \tag{A.5}$$

e verifica-se a igualdade

$$\theta^I \theta^J = -\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\theta^2 \ e \ \theta_I \theta_J = \frac{1}{2}\varepsilon_{IJ}\theta^2, \tag{A.6}$$

com $\theta^3 = 0$.

Um Supercampo aqui é expandido da seguinte forma

$$F(x,\theta) = f(x) + \theta^I f_I(x) + \frac{1}{2}\theta^2 f_F, \tag{A.7}$$

e obedece a transformação

$$Q_I F(x,\theta) \overset{def}{=} \partial_I F(x,\theta), \tag{A.8}$$

em componentes obtemos

$$Q_I f = f_I \ ; \ \ Q_I f_J = -\varepsilon_{IJ} f_F \ ; \ \ \ Q_I f_F = 0. \tag{A.9}$$

Definimos um elemento invariante no espaço de $N = 2$ supersimetrias de acordo com as convensões de derivações definidos acima, onde estas são definidas a partir da definição da métrica antisimétrica $\varepsilon$. Lembrando que uma integração nas variáveis Grassmaniannas implica numa derivação com relação a mesma, preservando o índice da diferencial

$$\int d\theta^I \equiv \partial_I \tag{A.10}$$

Vimos anteriormente o resultado de uma derivação do quadrado de $\theta$, a partir desta definiremos o elemento de volume no superespaço, por

$$\int d^2\theta f(\theta) \overset{Def}{=} \frac{1}{4}\varepsilon^{IJ}\partial_I\partial_J f(\theta) \tag{A.11}$$

assim temos que

$$\begin{aligned} \int d^2\theta(\theta^2) &= \frac{1}{4}\varepsilon^{IJ}\partial_I\partial_J(\theta^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Identificamos como anteriormente o operador de carga supersimétrica, com a integração em duas dimensões nas variáveis de Grassmann, sendo

$$Q^2 = Q^I Q_I = \varepsilon^{IJ} Q_J Q_I = \varepsilon^{IJ} \partial_J \partial_I = \partial^I \partial_I = 4 \int d^2\theta. \qquad \text{(A.12)}$$

## A.2 $N$–SUSY

O superespaço generalizado é definido pelas coordenadas $x^\mu$ e $\theta^I$, com $\mu = 0, ..., D-1$ e $I = 1, 2, ..., N$. Os geradores da supersimetria $Q_I$ são conhecidos também como operadores da simetria de "shift", definido atuante sobre um superfunção pela equação (A.8).

Vejamos algumas relações:

$$\begin{aligned}
\theta^N &= \varepsilon_{I_1 ... I_N} \theta^{I_1} ... \theta^{I_N} = N! \theta^1 ... \theta^N, \\
\partial_\theta^N &= \varepsilon^{I_1 ... I_N} \partial_{I_1} ... \partial_{I_N}, \\
\partial_\theta^N (\theta^N) &= -(N!)^2,
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon_{I_1 ... I_N} = (-1)^{N+1} \varepsilon^{I_1 ... I_N}$. Atribuimos o número de supersimetria 1 a $Q_I$ e $-1$ a $\theta$.

A integração de uma forma-supercampo $\Omega_p$ é definida por:

$$\int d^N\theta \, \Omega_p = \int_{M_p} \int d^N\theta \, \Omega_p$$

onde a integração em $\theta$ é a integral de Berezin, definida aqui como

$$\int d^N\theta \, (\cdot) = -\frac{1}{(N!)^2} \partial_\theta^N (\cdot) \qquad tal\,que \qquad \int d^N\theta (\theta^N) = 1$$

A generalização de um supercampo para $N$ supersmetrias é feita simplesmente pela generalização do que escrevemos na equação (A.12).

# Apêndice B

# Fixação de Gauge de Blau-Thompson via método Batalin-Vilkovisky

Mostraremos aqui, mais explicitamente, o processo de fixação de gauge, feito por Blau-Thompson [36], onde foi usado o método de Batalin-Vilkovisky (BV) [37]. Este método consiste: quando conhecidas as condições de gauge da teoria, constroe-se um triângulo que contenha os campos de ghost e anti-ghost, referente aos campos portadores dos parâmetros gauge, fixando assim o formato da ação invariante de BRST. Este Apêndice, faz referência as condições de gauge descritas nas teorias topológicas de Donaldson-Witten [18] , e que serviu de espelho para teorias de fixação de gauge com $N = 2$ SUSY, que descrevemos no capítulo 3.

## B.1 Fixação de Gauge para $D = 3$

Para a teoria em $N = 1$, descrita por Blau-Thompson[1] [36], foi usado o método de Fixação de gauge de Batalin-Vilkovisky [37]. Partindo das transformações de BRST da

[1] É acoselhável o acompanhamento a referência citada, pois aqui não estamos frisando totalmente os argumentos centrais feitos por Blau-Thompson, estamos apenas explicitando o processo sistemático da fixação de gauge do modelo.

1-forma-supercampo conexão de gauge $A$, onde temos

$$Qa_1^0 = \psi_1^1, \qquad Q\psi_1^1 = D_a\phi_0^2, \qquad Q\phi_0^2 = 0, \tag{B.1}$$

aqui seguiremos a notação: $\Omega_{p:\ \#grau\,de\,forma}^{s:\ \#ghost}$. A partir daí construimos o triângulo de BV com os termos de ghost e anti-ghost

$$\begin{array}{ccccc} & & a_1^0 & & \\ & \chi_1^{-1} & & \psi_1^1 & \\ u_0^0 & & \overline{\phi}_0^{-2} & & \phi_0^2 \end{array}, \tag{B.2}$$

onde tem-se as transformações

$$\begin{array}{ll} Q\chi_1^{-1} = B_1^0, & Qu_0^0 = \overline{\eta}_0^1, \\ Q\overline{\phi}_0^{-2} = \eta_0^{-1}, & Q\eta_0^{-1} = [\overline{\phi}_0^{-2}, \phi_0^2], \end{array} \tag{B.3}$$

que equivale a um outro triângulo

$$\begin{array}{ccc} & B_1^0 & \\ \overline{\eta}_0^1 & & \eta_0^{-1} \end{array}.$$

Cuja ação original apresenta-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} S &= Q\int\{\chi_1^{-1}f_2^0 + \overline{\phi}_0^{-2}D_a * \psi_1^1\} \\ &= \int\{B_1^0 f_2^0 - \chi_1^{-1}D_a\psi_1^1 + \eta_0^{-1}D_a\psi_1^1 - \overline{\phi}_0^{-2}(D_a * D_a\phi_0^2 - [\psi_1^1, *\psi_1^1])\}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Não usamos ainda o anti-ghost $u_0^0$, pois este requer uma verificação a mais. Para os campos $\chi_1^{-1}$ e $B_1^0$ definimos os seus triângulos de BV equivalentes, tal que

$$\begin{array}{ccc} & \chi_1^{-1} & \\ \overline{\sigma}_0^0 & & \sigma_0^0 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} & B_1^0 & \\ \overline{\Sigma}_0^{-1} & & \Sigma_0^1 \end{array}, \tag{B.5}$$

sendo $\sigma_0^0$ e $\overline{\sigma}_0^0$ o ghost e o anti-ghost de $\chi_1^{-1}$ e $\pi_0^1$ o multiplicador de Lagrange de $\overline{\sigma}_0^0$; para $B_1^0$ temos $\overline{\Sigma}_0^{-1}$ e $\Sigma_0^1$ sendo o anti-ghost e o ghost e $\Pi_0^0$ o multiplicador de Lagrange de $\overline{\Sigma}_0^{-1}$. Cujas transformações são

$$\begin{array}{ll} Q\chi_1^{-1} = B_1^0 + D_a\sigma_0^0, & QB_1^0 = D_a\Sigma_0^1 + [\chi_1^{-1}, \phi_0^2] + [\psi_1^1, \sigma_0^0], \\ Q\sigma_0^0 = \Sigma_0^1, & Q\Sigma_0^1 = [\sigma_0^0, \phi_0^2], \\ Q\overline{\sigma}_0^0 = \pi_0^1, & Q\pi_0^1 = [\overline{\sigma}_0^0, \phi_0^2], \\ Q\overline{\Sigma}_0^{-1} = \Pi_0^0, & Q\Pi_0^0 = [\overline{\Sigma}_0^{-1}, \phi_0^2]. \end{array} \tag{B.6}$$

A ação equivalente escrevemos da seguinte forma

$$
S = Q\int\{\chi_1^{-1}f_2^0 + \bar{\phi}_0^{-2}D_a * \psi_1^1 + \sigma_0^0 D_a * \chi_1^{-1} + \bar{\Sigma}_0^{-1}D_a * B_1^0\} \tag{B.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\{(B_1^0 + D_a\sigma_0^0)f_2^0 + \eta_0^{-1}D_a * \psi_1^1 + \pi_0^1 D_a * \chi_1^{-1} + \Pi_0^0 D_a * B_1^0 \\
&+\chi_1^{-1}D_a\psi_1^1 + \overline{\phi}_0^{-2}D_a * D_a\phi_0^2 + \overline{\sigma}_0^0 D_a(B_1^0 + D_a\sigma_0^0) \\
&+\overline{\Sigma}_0^{-1}D_a * (D_a\Sigma_0^1 + [\chi_1^{-1},\phi_0^2] + [\psi_1^1,\sigma_0^0])\}.
\end{aligned} \tag{B.8}
$$

Vemos que há uma redundância, pois dois multiplicadores descrevem a mesma fixação de gauge. Fazendo então uma mudança de variáveis da forma $\hat{B}_1^0 = B_1^0 + D_a\sigma_0^0$, sendo agora a transformação de $\chi_1^{-1}$ em termos do novo campo. A transformação sobre este será

$$
\begin{aligned}
Q\hat{B}_1^0 &= QB_1^0 - D_a Q\sigma_0^0 \\
&= D_a\Sigma_0^1 - D_a\Sigma_0^1 + \mathit{termos\,de\,int.} \\
&= 0 + \mathit{termos\,de\,int.}
\end{aligned}
$$

Com isso pode-se descartar a hipótese da introdução dos campo de ghost $\sigma_0^0$ para $\chi_1^{-1}$ e $\Sigma_0^1$ para $B_1^0$, e também os termos de anti-ghost. Assim fica provado, que devemos utilizar o triângulo de BV (B.2) para fixar o gauge desta teoria. As trasformações ficam determinadas por

$$
\begin{aligned}
&Qa_1^0 = \psi_1^1, && Q\psi_1^1 = D_a\phi_0^2,\ Q\phi_0^2 = 0, \\
&Q\chi_1^{-1} = B_1^0, && QB_1^0 = [\chi_1^{-1},\phi_0^2], \\
&Q\overline{\phi}_0^{-2} = \eta_0^{-1}, && Q\eta_0^{-1} = [\overline{\phi}_0^{-2},\phi_0^2], \\
&Qu_0^0 = \overline{\eta}_0^1, && Q\overline{\eta}_0^1 = [u_0^0,\phi_0^2].
\end{aligned} \tag{B.9}
$$

A ação fica determinada de acordo com (B.2), i.e.

$$
S = Q\int\{\chi_1^{-1}f_2^0 + \overline{\phi}_0^{-2}D_a * \psi_1^1 + u_0^0 D_a\chi_1^{-1}\} \tag{B.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\{(B_1^0 f_2^0 + \eta_0^{-1}D_a * \psi_1^1 + \overline{\eta}_0^1 D_a * \chi_1^{-1})_{CG} \\
&+(\chi_1^{-1}D_a\psi_1^1 + \overline{\phi}_0^{-2}D_a * D_a\phi_0^2 + u_0^0 D_a * B_1^0)_{FP}\},
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

que é o modelo super-BF, que pode ser verificado no livro [38]. Descrevemos a ação de Blau-Thompson no capítulo 3, com $N = 2$ supersimetrias e fixações de gauge semelhantes a estas.

## B.2 Fixação de Gauge para $D = 4$

Agora verificaremos pelo mesmo processo, a teoria para $N = 1$ e $D = 4$. Partimos da mesma forma que anteriormente da tranformação da 1-forma-supercampo de gauge $A$ escrita em (B.1). Definindo agora o triângulo de BV nestas condições de dimensionalidade, teremos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_1^0 & & & \\ & & \chi_2^{-1} & & \psi_1^1 & & \\ & \lambda_1^0 & & \bar{\phi}_0^{-2} & & \phi_0^2 & \\ \zeta_0^{-1} & & & & & & \end{array} . \tag{B.12}$$

Não sabemos ainda, se esta disposição do triângulo é a mais conveniente para descrevermos a ação de Witten. As tranformações do sctor de ghost e anti-ghost são

$$Q\chi_2^{-1} = B_2^0, \qquad Q\,\bar{\phi}_0^{-2} = \eta_0^{-1}, \qquad Q\lambda_1^0 = \bar{\eta}_1^1, \qquad Q\zeta_0^{-1} = u_0^0,, \tag{B.13}$$

nos dá outro triângulo equivalente

$$\begin{array}{ccccc} & & B_2^0 & & \\ & \bar{\eta}_1^1 & & \eta_0^{-1} & \\ u_0^0 & & & & \end{array} . \tag{B.14}$$

O que sabemos é somente que a ação referente ao setor geométrico dispõe-se da forma:

$$S_1 = Q\int\{\chi_2^{-1}f_2^0 + \bar{\phi}_0^{-2}D_a * \psi_1^1\}, \tag{B.15}$$

A fim de verificarmos a consistencia da teoria, definiremos uma classe de campos de ghost e anti-ghost para $\chi_2^{-1}$ e $B_2^0$, formando assim dois triângulos de BV, para cada um destes. Este procedimento é semelhante ao que usamos na seção anterior, i.e., verifica se há alguma redundância nestas definições de novos campos, ou se elas são realmente necessárias. Seja então o triângulo de BV referente ao campo $\chi_2^{-1}$, dado por

$$\begin{array}{ccccc} & & \chi_2^{-1} & & \\ & \bar{\rho}_1^0 & & \rho_1^0 & \\ \bar{\rho}_0^{-1} & & \rho_0^{-1} & & \rho_0^1 \end{array} , \tag{B.16}$$

dando a transformação

$$Q\chi_2^{-1} = B_2^0 + D_a\,\rho_1^0, \qquad Q\,\rho_1^0 = \Sigma_1^1 + D_a\,\rho_0^1, \qquad Q\,\rho_0^1 = 0. \tag{B.17}$$

Temos assim o triângulo referente aos multiplicadores do setor de ghost e anti-ghost de (B.16), que é

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1^1 & \\ \overline{\pi}_0^0 & & \pi_0^0 \end{array}, \tag{B.18}$$

com as transformações

$$Q\bar{\rho}_1^0 = \pi_1^1, \qquad Q\bar{\rho}_0^{-1} = \overline{\pi}_0^0, \qquad Q\rho_0^{-1} = \pi_0^0. \tag{B.19}$$

A ação equivalente a esta configuração é dada por

$$S_2 = Q\int\{\overline{\rho}_1^0 D_a * \chi_2^{-1} + \rho_0^{-1} D_a * \rho_1^0 + \overline{\rho}_0^{-1} D_a * \overline{\rho}_1^0\}, \tag{B.20}$$

Definimos agora um triângulo para o campo $B_2^0$, dado por

$$\begin{array}{ccccc} & & B_2^0 & & \\ & \Sigma_1^{-1} & & \Sigma_1^1 & \\ \Sigma_0^0 & & \Sigma_0^{-2} & & \Sigma_0^2 \end{array}, \tag{B.21}$$

cujas transformações são

$$QB_2^0 = D_a\Sigma_1^1, \qquad Q\Sigma_1^1 = D_a\Sigma_0^2, \qquad Q\Sigma_0^2 = 0, \tag{B.22}$$

o triângulo para os multiplicadores é

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_1^0 & \\ \sigma_0^1 & & \sigma_0^{-1} \end{array}, \tag{B.23}$$

sendo as transformações

$$Q\Sigma_1^{-1} = \sigma_1^0, \qquad Q\Sigma_0^0 = \sigma_0^1, \qquad Q\Sigma_0^{-2} = \sigma_0^{-1}, \tag{B.24}$$

A ação equivalente ao triângulo (B.21) é definida por

$$S_3 = Q\int\{\Sigma_1^{-1} D_a * B_2^0 + \Sigma_0^{-2} D_a * \Sigma_1^1 + \Sigma_0^0 D_a * \Sigma_1^{-1}\}. \tag{B.25}$$

*Verificamos que:*

*(1)* Podemos reescrever como anteriormente $\hat{B}_2^0 = B_2^0 + D_a\rho_1^0$. Tomando a transformação em $Q$, temos $Q\hat{B}_2^0 = 0$.

*(2)* Também podemos reescrevemos o campo $\Sigma_1^1$, como: $\hat{\Sigma}_1^1 = \Sigma_1^1 + D_a\rho_0^1$, com $Q\hat{\Sigma}_1^1 = 0$. As transformações (B.17) em termos dos novos campos são:

$$\begin{aligned}
&Q\chi_2^{-1} = \hat{B}_2^0, \qquad Q\hat{B}_2^0 = 0, \\
&Q\,\rho_1^0 = \hat{\Sigma}_1^1, \qquad Q\hat{\Sigma}_1^1 = 0, \\
&Q\,\rho_0^1 = 0.
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Em função destas novas definições de campos e das redundâncias encontradas na ação (B.20), redefinimos também outros campos, tais que

$$\hat{\overline{\rho}}_1^0 = \overline{\rho}_1^0 + \sigma_1^0, \qquad \hat{\rho}_0^{-1} = \rho_0^{-1} + \sigma_0^{-1}.$$

Reescrevemos então a ação em termos dos novos campos, portanto, a ação total será a soma das ações (B.15), (B.20) e (B.25), dando

$$\begin{aligned}
S_T \;=\;& Q\int\{\chi_2^{-1}f_2^0 + \overline{\phi}_0^{\,-2}D_a * \psi_1^1 + \overline{\rho}_1^0 D_a * \chi_2^{-1} \\
&+\rho_0^{-1}D_a * \rho_1^0 + \overline{\rho}_0^{-1}D_a * \overline{\rho}_1^0 \\
&+\Sigma_1^{-1}D_a * (\hat{B}_2^0 - D_a\rho_1^0) + \Sigma_0^{-2}D_a * (\hat{\Sigma}_1^1 - D_a\rho_0^1) \\
&+\Sigma_0^0 D_a * \Sigma_1^{-1}\}, \\
=\;& \int\{\hat{B}_2^0 f_2^0 + \eta_0^{-1}D_a * \psi_1^1 + \chi_2^{-1}D_a\psi_1^1 + \overline{\phi}_0^{\,-2}D_a * D_a\phi_0^2 \\
&+\overline{\pi}_1^1 D_a * \chi_2^{-1} + \pi_0^0 D_a * \rho_1^0 + \overline{\pi}_0^0 D_a * \hat{\overline{\rho}}_1^0 + \hat{\overline{\rho}}_1^0 D_a\hat{B}_2^0 \\
&+\hat{\rho}_0^{-1}D_a * \hat{\Sigma}_1^1 + \overline{\rho}_0^{-1}D_a * \overline{\pi}_1^1 - \sigma_1^0 D_a * D_a\rho_1^0 - \sigma_0^{-1}D_a * D_a\rho_0^1 \\
&+\sigma_0^1 D_a * \Sigma_1^{-1} + \Sigma_1^{-1}D_a * D_a\hat{\Sigma}_1^1 + \Sigma_0^0 D_a * \sigma_1^0\},
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Com isto identificamos as componentes do setor geométrico desta ação, escrevemos o triângulo de BV que é equivalente a (B.12), usando as notações da ação acima temos que

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_1^0 & & & \\
 & & \chi_2^{-1} & & \psi_1^1 & & \\
 & \overline{\rho}_1^0 & & \bar{\phi}_0^{-2} & & \phi_0^2 & \\
\overline{\rho}_0^{-1} & & & & & &
\end{array}\quad, \tag{B.28}$$

com o triângulo de multiplicadores sendo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \hat{B}_2^0 & & \\
 & \overline{\pi}_0^{-1} & & \eta_0^{-1} & \\
\overline{\pi}_0^0 & & & &
\end{array}\quad. \tag{B.29}$$

A ação referente a estes triângulos, é chamada de ação reduzida. Portanto a diferença entre esta ação reduzida e a ação total deve ter a forma: $S_T - S_{red} = Q(\Psi_T - \Psi_{red})$. Vemos então que os campos $\rho_1^0$ e $\rho_0^1$ não contam para o setor geométrico, i.e., para fixação do gauge de $\chi_2^{-1}$, que na diferença nas ações referem-se aos termos

$$\pi_0^0 D_a * \rho_1^0, \qquad \sigma_1^0 D_a * D_a \rho_1^0, \qquad \sigma_0^{-1} D_a * D_a \rho_0^1.$$

Para o triângulo de $\hat{B}_2^0$, os campos $\hat{\Sigma}_1^1$ e $\Sigma_0^2$ também não contribuiem para o setor de fixação de gauge, que referem-se aos termos

$$\hat{\rho}_0^{-1} D_a * \hat{\Sigma}_1^1, \qquad \sigma_0^1 D_a * \Sigma_1^{-1}, \qquad \Sigma_1^{-1} D_a * D_a \hat{\Sigma}_1^1. \tag{B.30}$$

Com isso demonstramos que a ação $S_T$ é equivalente a $S_{red}$, i.e., a ação que descreve a teoria deve ser justamente a ação do triângulo (B.12) e (B.14), que é dada por

$$S_{red} = Q \int \{\chi_2^{-1} f_2^0 + \bar{\phi}_0^{-2} D_a * \psi_1^1 + \bar{\lambda}_1^0 D_a * \chi_2^{-1} + \bar{\zeta}_0^{-1} D_a * \lambda_1^0\},$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned} S_{red} &= \int \{[B_2^0 f_2^0 + \eta_0^{-1} D_a * \psi_1^1 + \bar{\eta}_1^1 D_a * \chi_2^{-1} + \bar{u}_0^0 D_a * \lambda_1^0]_{C.G.} \\ &\quad +[\chi_2^{-1} D_a \psi_1^1 + \bar{\phi}_0^{-2} D_a * D_a \phi_0^2 + \lambda_1^0 D * B_2^0 + \bar{\zeta}_0^{-1} D_a * \bar{\eta}_1^1]_{F.P.}\}, \end{aligned} \tag{B.31}$$

que descreve a ação de Witten [18] para $N = 1$ e $D = 4$. Assim verificamos que podemos descartar o campo de ghost $\hat{\rho}_0^{-1}$ e seu multiplicador $\pi_0^0$.

# Apêndice C

# Proposições do Capítulo 2

**Definição.** Seja $\omega^{(s_1,\ldots,s_n)}$ formas cujos pesos $s_i$ referem-se a $n$ operadores $\delta_i$, com $i = 1, ..., n$, nilpotentes e anticomutantes entre si, $\{\delta_i, \delta_j\} = 0$ e fazemos a hipótese de que o grupo de cohomologia de cada operador $\delta_i$ seja trivial. Se qualquer peso $s_i$ for negativo então $\omega^{(s_1,\ldots,s_n)} = 0$, por convenção.

**Proposição 1.** Seja o conjunto das formas $\{\omega^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)} \mid i = 1, ..., n\}$, que satisfaz a condição de cociclo

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \; \omega^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)} = 0. \tag{C.1}$$

1. O conjunto das formas $\omega^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)}$ pode ser estendido num conjunto que constitui a seguinte forma estendida

$$\tilde{\omega} = \sum_{s_1 \ldots s_n;\ \sum_{i=1}^{n} s_i = H-1} \omega^{(s_1,\ldots,s_n)}, \qquad com \qquad H = \sum_{j=1}^{n} h_j, \tag{C.2}$$

tal que

$$\tilde{\delta}\ \tilde{\omega} = 0 \qquad onde \qquad \tilde{\delta} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\,. \tag{C.3}$$

**2.** Existe uma forma estendida

$$\tilde{\varphi} = \sum_{s_1 \ldots s_n;\ \sum_{i=1}^{n} s_i = H-2} \varphi^{(s_1,\ldots,s_n)}, \tag{C.4}$$

onde $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\varphi}$ satisfazem a equação

$$\tilde{\omega} = \tilde{\delta}\ \tilde{\varphi}, \tag{C.5}$$

**Corolário 1.** O grupo de cohomologia de $\tilde{\delta}$ é trivial, $H(\tilde{\delta}) = 0$.

**Corolário 2.** A solução geral da eq. (C.1) para qualquer um $\omega^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)}$ é dada por:

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)} = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \varphi^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_j-1\ldots,h_n)} \qquad com \qquad i\,,\, j = 1, \ldots, n \tag{C.6}$$

onde todos os $\varphi^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_j-1\ldots,h_n)}$ para $i,\ j = 1, \ldots, n$, são componentes de uma só forma estendida $\tilde{\varphi}$.

**Prova da Proposição 1.** A prova será feita por indução a partir do caso $n = 2$ que será tratado explicitamente.

**Caso $n = 2$.** Neste caso a equação (C.1) é dada por

$$\delta_1 \omega^{(h_1-1,h_2)} + \delta_2 \omega^{(h_1,h_2-1)} = 0. \tag{C.7}$$

*Prova da parte 1.* Aplicamos em (C.7) $\delta_1$, obtemos: $\delta_2 \delta_1 \omega^{(h_1,h_2-1)} = 0$. Usando que a cohomologia de $\delta_2$ é trivial, deduzimos a existência de uma forma $\omega^{(h_1+1,h_2-2)}$, tal que:

$$\delta_1 \omega^{(h_1,h_2-1)} + \delta_2 \omega^{(h_1+1,h_2-2)} = 0 \tag{C.8}$$

Repetimos sucessivamente este procedimento até chegarmos a equação

$$\delta_1 \omega^{(H-1,0)} = 0. \tag{C.9}$$

Assim obtemos um conjunto de equações do tipo

$$\delta_1 \omega^{(h_1+k-1,h_2-k)} + \delta_2 \omega^{(h_1+k,h_2-k-1)} = 0, \qquad com \qquad 0 \leq k \leq h_2,$$

Aplicando agora $\delta_2$ em (C.7) e usando a trivialidade da cohomologia de $\delta_1$obtemos de maneira análoga o conjunto de equaçãoes

$$\delta_1 \omega^{(h_1-k'-1,h_2+k')} + \delta_2 \omega^{(h_1-k',h_2+k'-1)} = 0 \qquad com \qquad 0 \leq k' \leq h_1.$$

Juntanto os contadores $k$ e $k'$ em um só contador $p$, obtemos o seguinte conjunto de equações

$$\delta_1 \omega^{(h_1+p-1,h_2-p)} + \delta_2 \omega^{(h_1+p,h_2-p-1)} = 0, \quad com \quad -h_1 \leq p \leq h_2. \tag{C.10}$$

Esta, nada mais é que a expressão em componentes da eq. (C.3), correspondendo a forma estendida e ao operador estendido

$$\tilde{\omega} = \sum_{p=-h_1}^{h_2} \omega^{(h_1+p-1,h_2-p)}, \qquad \tilde{\delta} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i . \tag{C.11}$$

*Prova da parte 2.* A equação (C.10) para $p = -h_1$ é a equação (C.9). Pela trivialidade da cohomologia de $\delta_2$ temos a solução geral

$$\omega^{(0,H-1)} = \delta_2 \varphi^{(0,H-2)}. \tag{C.12}$$

Subtituindo (C.12) em (C.10) para $p = -h_1+1$, obtemos: $\delta_2 \left[-\delta_1\varphi^{(0,H-2)} + \omega^{(1,H-2)}\right] = 0$, cuja solução geral para $\omega^{(1,H-2)}$ é

$$\omega^{(1,H-2)} = \delta_1\varphi^{(0,H-2)} + \delta_2\varphi^{(1,H-3)}. \tag{C.13}$$

Continuando até a resolução da penúltima eq. (C.10), para $p = h_2 - 1$, obtemos ao final

$$\omega^{(h_1+p-1,h_2-p)} = \delta_1\varphi^{(h_1+p-2,h_2-p)} + \delta_2\varphi^{(h_1+p-1,h_2-p-1)} \quad com \quad -h_1+1 \leq p \leq h_2. \tag{C.14}$$

a última equação (C.10), para $p = h_2$ sendo identicamente satisfeita. O conjunto de equações (C.14) pode ser escrita na forma da equação (C.5), com

$$\tilde{\varphi} = \sum_{p=-h_1+2}^{h_2} \varphi^{(h_1+p-2,\, h_2+p)}. \tag{C.15}$$

**Caso $n$ qualquer.**

Começamos a prova para $n$ qualquer supondo por hipotese que o problema já esteja resolvido para $(n-1)$. Apliquemos um operador específico, por exemplo $\delta_1$ na eq. (C.1), nos dando

$$\sum_{i=2}^{n} \delta_i\delta_1\omega^{(h_1,h_2,\dots,h_i-1,\dots,h_n)} = 0. \tag{C.16}$$

Por hipotese de indução, existem $(n-1)$ formas $\omega^{(h_1+1,h_2-2,h_3,\dots,h_n)}$ e $\omega^{(h_1+1,h_2-1,h_3,\dots,h_i-1,\dots,h_n)}$, com $i = 3, \dots, n$, tais que

$$\delta_1\omega^{(h_1,h_2-1,h_3,\dots,h_n)} + \delta_2\omega^{(h_1+1,h_2-2,h_3,\dots,h_n)} + \sum_{i=3}^{n} \delta_i\omega^{(h_1+1,h_2-1,h_3,\dots,h_i-1,\dots,h_n)} = 0. \tag{C.17}$$

Repetindo o procedimento chegamos as equações

$$\delta_1\omega^{(h_1+k-1,h_2-k,h_3,...,h_n)} + \delta_2\omega^{(h_1+k,h_2-k-1,h_3,...,h_n)} + \sum_{i=3}^n \delta_i\omega^{(h_1+k,h_2-k,h_3,...,h_i-1,...,h_n)} = 0, \quad com \;\; 0 \leq k \leq h_2. \tag{C.18}$$

Recomecando a partir da eq. (C.1), desta vez aplicando $\delta_2$ e usando a cohomologia de $\delta_1$, obtemos

$$\delta_1\omega^{(h_1-k'-1,h_2+k',h_3,...,h_n)} + \delta_2\omega^{(h_1-k',h_2+k'-1,h_3,...,h_n)} + \sum_{i=3}^n \delta_i\omega^{(h_1-k',h_2+k',h_3,...,h_i-1,...,h_n)} = 0, \quad com \; 0 \leq k' \leq h_1 - 1. \tag{C.19}$$

Reescrevendo os dois últimos conjuntos de equações unificando num só contador $p$, obtemos

$$\delta_1\omega^{(h_1+p-1,h_2-p,h_3,...,h_n)} + \delta_2\omega^{(h_1+p,h_2-p-1,h_3,...,h_n)} + \sum_{i=3}^n \delta_i\omega^{(h_1+p,h_2-p,h_3,...,h_i-1,...,h_n)} = 0, \quad onde \;\; -h_1 \leq p \leq h_2. \tag{C.20}$$

Introduzindo o operador "2-estendido" $\tilde{\delta}_{(1,2)} = \delta_1+\delta_2$ e as $(n-1)$ formas "2-estendidas"

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^{(\tilde{h},h_3,...,h_i-1,...,h_n)} &= \sum_{s_1+s_2=\tilde{h}} \omega^{(s_1,s_2,h_3,...,h_i-1,...h_n)}, \\ \tilde{\omega}^{(\tilde{h}-1,h_3,...,h_n)} &= \sum_{s_1+s_2=\tilde{h}-1} \omega^{(s_1,s_2,h_3,...h_n)}, \\ com \quad & i = 3, ..., n \end{aligned} \tag{C.21}$$

podemos assim reescrever (C.20) como:

$$\tilde{\delta}_{(1,2)}\tilde{\omega}^{(\tilde{h}-1,h_3,...,h_n)} + \sum_{i=3}^{n} \delta_i\tilde{\omega}^{(\tilde{h},h_3,...,h_i-1,...,h_n)} = 0, \qquad onde \qquad \tilde{h} = h_1 + h_2. \tag{C.22}$$

Observamos que o operador $\tilde{\delta}_{(1,2)}$, nilpotente e anticomutante com os demais $\delta_i$, tem cohomologia trivial em virtude da proposição para o caso $n = 2$. Para resolver (C.22) podemos usar a proposição no caso $(n-1)$, onde os $(n-1)$ operadores agora são $\{\tilde{\delta}_{(1,2)}, \delta_3, ..., \delta_n\}$. Então temos a forma estendida

$$\tilde{\omega} = \sum_{\bar{s}+\sum_{i=3}^n s_i = H-1} \tilde{\omega}_{(1,2)}^{(\bar{s},s_3,...,s_n)} \equiv \sum_{\sum_{i=1}^n s_i = H-1} \tilde{\omega}^{(\bar{s},s_3,...,s_n)}, \tag{C.23}$$

obedecendo a equação (C.1):

$$\left(\tilde{\delta}_{(1,2)} + \sum_{i=3}^{n} \delta_i\right) \tilde{\omega} \equiv \tilde{\delta}\, \tilde{\omega} = 0 \qquad com \qquad \tilde{\delta} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Sabemos trambém pela *parte 2* da proposição para $(n-1)$, que existe uma forma $n-$estendida

$$\tilde{\varphi} = \sum_{\tilde{s}+\sum_{i=3}^{n} s_i = H-2} \tilde{\varphi}_{(1,2)}^{(\tilde{s},s_3,\ldots,s_n)} \equiv \sum_{\sum_{i=1}^{n} s_i = H-2} \tilde{\varphi}^{(s_1,\ldots,s_n)},$$

satisfazendo a equação

$$\tilde{\omega} = \left(\tilde{\delta}_{(1,2)} + \sum_{i=3}^{n} \delta_i\right) \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\delta}\ \tilde{\varphi}. \tag{C.24}$$

□.

**Proposição 2.** Seja a forma $\omega = \omega^{(h_1, \cdots, h_n)}$, representada pela equação

$$\delta_1 \ldots \delta_n\, \omega = 0. \tag{C.25}$$

Esta, admite uma solução do tipo

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\, \varphi^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)}. \tag{C.26}$$

**Prova da Proposição 2.** A prova será feita em primeiro lugar para $n = 1$ e em seguida para um $n$ qualquer por indução.

*Caso $n = 1$:* Dada a equação (C.25) neste caso: $\delta\, \omega = 0$, sua solução geral pela hipótese da trivialidade da cohomologia de $\delta$ é da forma

$$\omega = \delta\, \varphi.$$

*Caso $n$:* Reescrevemos a eq. (C.25) como

$$(\delta_1 \ldots \delta_{n-1})\delta_n\ \omega = 0 \tag{C.27}$$

Supondo a proposição válida para $n-1$, podemos resolver (C.27) com respeito a $\delta_n\ \omega$, obtendo

$$\delta_n\ \omega^{(h_1,\ldots,h_n-1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \eta^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)}. \tag{C.28}$$

A proposição 1 segue que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, \varphi^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)} \tag{C.29}$$

$\square$.

**Proposição 3.** Seja a forma, $\omega^{(h_1,\ldots,h_n)}$, que obedece a equação

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1} \, \omega^{(h_1,\ldots,h_n)} + \delta_n \psi^{(h_1+1\,,\ldots,\, h_{n-1}+1,\, h_n-1)} = 0. \tag{C.30}$$

A solução geral para $\omega$ é dada por

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, \varphi^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots,h_n)} \tag{C.31}$$

**Prova da Proposição 3.** A prova é simples e decorre da proposição anterior. Aplicando $\delta_n$ em (C.30) temos

$$(\delta_1 \ldots \delta_{n-1}) \delta_n \; \omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = 0$$

tendo como solução (C.31) em virtude da proposição 2, $\square$.

**Proposição 4.** Seja uma forma, $\omega^{(h_1,\ldots,h_n)}$, obedecendo o conjunto de equações

$$\delta_i \; \omega^{(h_1,\ldots,h_n)} + \delta_n \psi_i^{(h_1+1\,,\ldots,\, h_{n-1}+1,\, h_n-1)} = 0, \qquad com \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{C.32}$$

Esta equação admite a solução geral

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \delta_1 \ldots \delta_{n-1} \; \varphi^{(h_1-1,\ldots,\, h_{n-1}-1,\, h_n)} + \delta_n \eta^{(h_1,\ldots,h_n-1)}. \tag{C.33}$$

**Prova da Proposição 4.** Da proposição 1 tiramos a solução da primeira equação de (C.32), tal que:

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \delta_1 \varphi^{(h_1-1,\ldots,h_n)} + \delta_n \eta_1^{(h_1,\ldots,h_n-1)}. \tag{C.34}$$

Substituimos na segunda equação (C.32), obtemos

$$\delta_2 \delta_1 \varphi^{(h_1-1,h_2,\ldots,h_n)} + \delta_n \lambda^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)} = 0 \tag{C.35}$$

com $\lambda^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)} = \psi_2^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)} - \delta_2 \eta_1^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)}$. Pela proposição 3, tiramos a solução da equação (C.35):

$$\varphi^{(h_1-1,h_2,\ldots,h_n)} = \delta_1 \varphi^{(h_1-2,h_2,\ldots,h_n)} + \delta_2 \varphi^{(h_1-1,h_2-1,\ldots,h_n)} + \delta_n \varphi^{(h_1-1,h_2,\ldots,h_n-1)} \tag{C.36}$$

Substituindo (C.36) em (C.34) chegamos na seguinte equação

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \delta_1\delta_2\varphi^{(h_1-1,h_2-1,\ldots,h_n)} + \delta_n\eta_2^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)}. \tag{C.37}$$

onde $\eta_2^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)} = \eta_1^{(h_1,h_2,\ldots,h_n-1)} - \delta_1\varphi^{(h_1-1,h_2,\ldots,h_n-1)}$.

Vamos supor que a solução para o conjunto das $k$ primeiras equações seja da forma

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \delta_1\ldots\delta_k\varphi^{(h_1-1,\ldots,h_k-1,\ldots,h_n)} + \delta_n\,\eta_k^{(h_1,\ldots,h_k,\ldots,h_n-1)}. \tag{C.38}$$

Inserindo então (C.38) na $(k+1)-$ésima equação (C.32) temos

$$\delta_1\ldots\delta_{k+1}\varphi^{(h_1-1,\ldots,h_k-1,h_{k+1},\ldots,h_n)} + \delta_n\lambda_{k+1}^{(h_1-1,\ldots,h_k-1,h_{k+1},\ldots,h_n)} = 0.$$

Da proposição 2, tiramos que

$$\varphi^{(h_1-1,\ldots,h_k-1,h_{k+1},\ldots,h_n)} = \sum_{i=1}^{k+1}\delta_i\varphi^{(h_1,\ldots,h_i-1,\ldots h_{k+1},h_{k+2}\ldots,h_n)} + \delta_n\varphi^{(h_1-1,\ldots,h_k-1,h_{k+1},\ldots,h_n-1)}. \tag{C.39}$$

Substituindo em (C.38) chegamos finalmente à solução para as $k+1$ primeiras equações

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \delta_1\ldots\delta_{k+1}\varphi^{(h_1-1,\ldots,h_k-1,h_{k+1}-1,h_{k+2},\ldots,h_n)} + \delta_n\eta_{k+1}^{(h_1,\ldots,h_{k+1},\ldots,h_n-1)}. \tag{C.40}$$

Portanto a prova é completa para $k=n$. □

**Corolário.** Seja forma $\omega^{(h_1,\ldots,h_n)}$, obedecendo o conjunto de equações

$$\delta_i\,\omega = 0, \qquad com \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{C.41}$$

Esta equação admite a solução geral

$$\omega^{(h_1,\ldots,h_n)} = \delta_1\ldots\delta_n\;\varphi^{(h_1-1,\ldots,h_n-1)}. \tag{C.42}$$

# Referências


[1] Wess-Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Second Edition, Princeton University Press, New Jersey, 1992;

[2] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Edition, Cambridge University Press, 1996;

[3] P. Fayet and S. Ferrara, *Supersymmetry*, Phys.Rep. **32** (1977) 294;

[4] M.F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys.Rep **128** (1985) 39;

[5] H.J.W.Müler-Kirsten, A. Wiedemann, *Supersymmetry*, World Scientific, 1987;

[6] A.S. Schwarz, Lett. Math. Phys. 2 (1978) 247;

[7] E. Witten, J. Diff. Geom. 17 (1982) 661;

[8] E. Witten, Nucl. Phys. **B 202** (1982) 253;

[9] A. Floer, Commun. Math. Phys. 118 (1988) 215;

[10] S. Donaldson, J. Diff. Geom. 30 (1983) 289, Topology 29 (1990) 257

[11] M.F. Atiyah, Am. Math. Soc. "Providence" (1988);

[12] V. Jones, Bull. Am. Math. Soc. 12 (1985) 103;

[13] E. Witten, Commun. Math. Phys. 121 (1989) 351;

[14] E. Witten, Nucl. Phys. **B 311** (1988) 46;

[15] E. Witten, Commun. Math. Phys. 118 (1988) 411;

[16] E. Witten, Phys. Lett. **B 206** (1988) 601;

[17] A. Floer, Bull. Am. Math. Soc. 16 (1987) 279;

[18] E. Witten, Commun. Math. Phys. 117 (1988) 353;

[19] E. Witten, Int. J. Mod. Phys. A 6 (1991) 2775;

[20] D. Birmingham, M. Blau and G. Thompson, Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990) 4721;

[21] J. Sonnenshein, Phys. Rev. D 42 (1990) 2080;P. van Baal, S. Ouvry and R. Stora, Phys.

[22] L. Baulieu and I.M. Singer, Topological Yang-Mills symmetry, Nucl. Phys.(Proc. Suppl.) **B 5** (1988) 12;

[23] P. van Ball, S. Ouvry and R. Stora, Phys. Lett. **B 220** (1989) 159;

[24] V.W. Guillemin and S. Sternberg, SUSY and Equivariant de Rham Theory, (Springer-Verlag, Berlin 1999);

[25] F. Delduc, N. Maggiore, O. Piguet and S. Wolf, Phys. Lett. B 385 (1996) 132, hep-th/9605158;

[26] J.H. Horne, Nucl. Phys. B 318 (1989) 22

[27] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, Phys. Rep. 209 (1991) 129;

[28] J. L. Boldo, C.P. Constantinidis, F. Gieres, M. Lefrançois and O. Piguet, hep-th/0303053, int J. Mod. Phys. A 18 (2003), hep-th/0303084;

[29] C. P. Constantinidis, J. A. Nogueira, O. Piguet and W. Spalenza, trabalho em andantamento;

[30] B. Geyer and D. Mülsch, Phys. Lett. **B 535** (2002) 349;

[31] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate student series in physics, (1992);

[32] J.P. Yamron, Phys. Lett. **B 213** (1988) 325;

[33] B. Geyer and D. Mülsch, Nucl. Phys. **B 616** (2001) 476;

[34] M. Blau and G. Thompson, Commun. Math. Phys. 152 (1993) 41, hep-th/9112012;

[35] C. Vafa and E. Witten, hep-th/9408074;

[36] M. Blau and G. Thompson, hep-th/9612143;

[37] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, Phys. Lett. **B 69** (1977) 309;
I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, Phys. Lett. **B 102** (1981) 27;
I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, Phys. Rev. **D 28** (1983) 2567;

[38] O. Piguet and S.P. Sorella, Algebraic Renormalization, Springer-Verlag (1995);

[39] M.V. Chizhov, Phys.Lett. **B 381** (1996) 359, hep-ph/9511287;

[40] L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, Phys. Lett. **B 321** (1994) 212, hep-th/9312062;

[41] V. N. Bolotov, Phys. Lett **B 243** (1990) 308;

[42] S. A. Akimenko Phys. Lett **B 259** (1991) 225;

[43] L.V. Avdeev and M.V. Chizhov, *A queer reduction of degrees of freedom*, preprint JINR Dubna, hep-th/9407067;

[44] P. van Nieuwenhuizen, *General Theory of Coset Monifolds and Antisymmetric Tensors Applied to Kaluza-Klein Supergravity, Trieste Spring School* (1984);

[45] V. Lemes, R. Renan, S.P. Sorella, Phys. Lett. **B 352** (1995) 37;

[46] L. V. Avdeev and M.V. Chizhov, Mod. Phy Lett **A 9** (1994) 279, Mod. Phy Lett **A 8** (1993) 2753;

[47] V. Lemes, A.L.M.A. Nogueira and J.A. Heläyel-Neto, Int. Jorn. Mod. Phy. **A 13**, No. 18 (1998) 3145, hep-th/9508045;

**- Trabalhos Referentes aos Capítulos 3 e 4 respectivamente -**

[48] Clisthenis P. Constantinidis, Olivier Piguetl and Wesley Spalenza, Eur. Phys. J. C33, 443-456 (2004);

[49] Wesley Spalenza, Wander G. Ney and J.A. Helayel-Neto, Phys. Lett. B587 (2004) 143-149,

# “Fixações de gauge para o Modelo Super - BF”

Wesley Spalenza

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente

Olivier Piguet – Co-orientador/UFES

Ricardo Machado de Amorim – UFRJ

Silvio Paolo Sorella – UERJ

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira – CBPF

Sebastião Alves Dias – CBPF

Rio de Janeiro, 14 de julho de 2004