Tese de

Doutorado

Sobre as Álgebras de Simetrias da Física Teórica:

Supersimetria Octoniônica e Simetrias Residuais

Moisés Porfirio Rojas Leyva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, Fevereiro 2004

Dedicatória

Para Carla Andréa

e a minha Família

Agradecimentos

A CAPES pela bolsa concedida.

Ao meu orientador Francesco Toppan pelas discussões, seus ensinamentos, orientação, pelo trabalho em equipe e sobretudo pela sua amizade ao longo destes anos.

Ao Professor José Helayël, pela valorosa cooperação, amizade, dedicação e ensinamento sem restrições a mim e a todos seus alunos do CCP.

A meu amigo e colaborador Hector Carrion, pelas inúmeras discussões, pela valiosa colaboração, pelo trabalho em equipe e sobretudo pela amizade.

A Myriam Simões Coutinho, secretária de CFC por toda ajuda.

A Guillermo Cuba, German Gomero, Rodolfo Casana, Gabriel Flores, Luis Peche, Jose Luis Boldo, Leonardo de Moraes, Leonardo de Assis e demais colegas do CCP.

Ao pessoal da Biblioteca do CBPF, pessoal da CFC, a secretária do CCP Rosângela.

Resumo

Nesta tese. no contexto das álgebras de simetria na Física. vamos discutir dois problemas distintos. Inicialmente fornecemos um algorítmo para construir explicitamente as representações irredutíveis das álgebras de Clifford. Por outro lado, após introduzir a Álgebra Superconforme $N = 8$ não-associativa, o primeiro exemplo de uma estensão supersimétrica $N = 8$ das equações KdV é explicitamente construído. Este envolve 8 campos bosônicos e 8 campos fermiônicos.

Também, a classificação das realizações octoniônicas das supersimetrias estendidas $1D$ são fornecidas aqui. Estas são realizações não-associativas que, não obstante inequivalentes. são postas em correspondência com uma subclasse das representações associativas já classificadas para supersimetrias estendidas $1D$. São dados exemplos de sistemas dinâmicos invariantes sob as realizações octoniônicas das supersimetrias estendidas. Mencionamos, entre outras, as spinning particles octoniônicas. o N=8 KdV. etc.

No segundo problema, estudamos a álgebra de simetria de uma teoria quântica de campos na presença de um background E.M. externo (nomeada" simetria residual") investigado dentro de um espaço Lie-algébrico, o esquema é independente do modelo. Alguns resultados encontrados previamente na literatura são estendidos aqui. Computamos em detalhe a álgebra de simetria para background E.M. constante nas dimensões $D = 3$ e $D = 4$. Em $D = 3$ dimensões, a álgebra residual de simetria é isomórfica a

$u(1)\oplus\mathcal{P}_c(2)$, com $\mathcal{P}_c(2)$ sendo a álgebra 2-dimensional centralmente estendida de Poincaré. Na dimensão $D = 4$, a álgebra residual genérica da simetria é dada por uma álgebra de Lie solúvel sete-dimensional que é explicitamente computada. O caso supersimétrico é tratado para o caso especial de uma teoria livre em $2 + 1$ dimensões acoplada minimamente ao campo externo de A_μ que descreve o background E.M. constante. As álgebras residuais da simetria são computadas também para backgrounds não-constantes específicos do E.M.

Summary

In these thesis, in the context of the study of symmetry algebras, we discuss two distinct problems. Initially we provide an explicit algorithm to construct the irreducible representations of Clifford algebras. On the other hand, after introducing the non-associative $N = 8$ Superconformal Algebra, the first example of an $N = 8$ supersymmetric extension of the KdV equation is here explicitly written down. It involves 8 bosonic and 8 fermionic fields.

Also, the classification of the octonionic realizations of the one-dimensional extended supersymmetries is given here. These are non-associative realizations which, albeit inequivalent, are put in correspondence with a subclass of the associative representations for $1D$ extended supersymmetries already classified. Examples of dynamical systems invariant under octonionic realizations of the extended supersymmetries are given. We quote, among others, the octonionic spinning particles, the $N = 8$ KdV, etc.

In the second problem, we study the symmetry algebra of a Quantum Field Theory in the presence of an external EM background (named "residual symmetry"), investigated within a Lie-algebraic, model-independent scheme. Some results previously found in the literature are here extended. In particular, we compute the symmetry algebra for a constant EM background in D=3 and D=4 dimensions. In D= 3 dimensions, the residual symmetry algebra is isomorphic to $u(1)\oplus\mathcal{P}_c(2)$, with $\mathcal{P}_c(2)$ being the centrally exrended 2-dimensional Poincaré algebra. In D=4 dimensions the generic residual symmetry algebra is given by a seven-dimensional solvable Lie algebra which is explicitly computed. The supersymmetric case is treated in the special situation of a free theory in $2+1$ dimensions minimally coupled to the external A_μ field that describes the constant EM background. Residual symmetry algebras are also computed for specific non-constant EM backgrounds.

Conteúdo

Introdução

É bem sabido que as simetrias desempenham um papel muito importante na construção das leis Físicas. A teoria dos grupos estuda as simetrias, que, ao mesmo tempo estão intimamente ligadas com suas álgebras. Estas estruturas algébricas são usualmente pesquisadas pelos físicos na tentativa de encontrar uma teoria quântica consistente e unificadora das quatro interações conhecidas.

Neste sentido, a teoria das supercordas é uma boa candidata para ser a teoria unificadora, pois sabe-se que a supergravidade é uma teoria efetiva a baixas energias da teoria das supercordas. Porém, ao final da década de 80, os físicos tinham a sensação de que, embora a teoria das cordas prometesse propiciar uma descrição única do universo, ela na verdade não chegava a preencher totalmente as expectativas. Uma das razões é que havia cinco versões diferentes desta teoria. A partir de 1995 apareceram indícios que estas 5 teorias na verdade estão reunidas numa só e formam parte de uma estrutura única. Esta teoria promissora, ainda que conjecturada é a chamada teoria-M, que mora num espaço-tempo de 11 dimensões ($11D$).

De qualquer forma, os requerimentos teóricos de consistência para todo candidato possível na unificação, nos conduzem necessariamente a uma investigação sistemática das propriedades das álgebras e espinores de Clifford nos espaços-tempo de dimensão e assinatura arbitrários, numa estrutura real, assim como também nas realizações quaterniônicas e octoniônicas. Estas últimas ganham relevância devido ao recente trabalho de F. Toppan and J. Lukierski [39], nao qual eles mostram que, além da álgebra-M relacionada à teoria-M baseada numa estrutura real, pode-se introduzir uma formulação octoniônica da mesma, que apresenta uma nova e surpreendente característica. O setor $M5$ (5-brana) octoniônico não é mais independente, mas coincide com os setores $M1$ e $M2$ octoniônicos.

Do ponto de vista matemático, as álgebras de Clifford foram classificadas nos anos de 1960 [1]. Aproximadamente vinte anos depois, no trabalho de T. Kugo and P. Townsend [3], mostrou-se que as álgebras divisionais estão relacionadas com as supersimetrias estendidas $N = 1, 2, 4, 8$. Entretanto, ainda hoje, a conexão entre as álgebras divisionais e as supersimetrias estendidas não foi completamente resolvida. Em alguns casos foi estabelecida explicitamente, em outros, entretanto, é somente implícita ou sugerida. Isto é especialmente verdadeiro, para a álgebra divisional dos octônions, já que, ao ser não-associativa, é tecnicamente difícil de manipular.

Um dos objetivos desta tese é preencher parcialmente esta lacuna, apresentando algumas construções novas que ilustram e fazem explícita tal conexão em alguns casos novos.

No artigo [12], desenvolvido pelo grupo de pesquisa do qual faço parte (e liderado pelo prof. F. Toppan (CBPF) e com a participação de Hector Carrion (CBPF)), apresentamos um algorítmo para a classificação e construção das álgebras de Clifford, não só no caso real como também no caso quaterniônico e octoniônico. No mesmo artigo estudamos a classificação mais geral da dinâmica livre (termo cinético e massivo) dos espinores na álgebra divisional nas diversas dimensões e assinaturas, sendo os casos quaterniônico e octoniônico os mais interessantes, devido à não-comutatividade e não-associatividade.

Finalmente, apresentamos algumas identidades de grande utilidade na manipulação de tensores que tomam valores octoniônicos, e com elas construímos as álgebras supersimétricas generalizadas nas diversas dimensões, em particular a chamada álgebra-M.

usada no artigo [39].

Já no artigo [42], desenvolvido também em nosso grupo de pesquisa, obtivemos a Álgebra Superconforme (ASC) não-associativa $N = 8$. No artigo [36] que faz parte do desenvolvimento desta tese, usamos a ASC não-associativa $N = 8$ para construir o primeiro exemplo de uma supersimetria $N = 8$ da equação KdV [1], além de revisar as equações $N = 2, 4$ SuperKdV.

Por outro lado, existem fortes evidências teórica, da existência de uma simetria que é fundamental na construção de teorias consistentes. Ela é a supersimetria (uma bela simetria que permite tratar de forma unificada as partículas bosônicas e fermiônicas).

A investigação das supersimetrias estendidas na Mecânica Quântica é uma ferramenta essencial para aplicações realistas da supersimetria. Aqui mencionamos alguns casos: qualquer teoria de campos supersimétrica num espaço de Minkowski ordinário adquire 4 vezes o número da supersimetria original quando é reduzido a uma dimensão temporal [18]. Por exemplo teorias de super Yang-Mills $N = 1, 2, 4$ são reduzidas para sistemas de mecânica quântica supersimétrica $N = 4, 8, 16$ respectivamente.

Devido à falta de formalismo explícito de supercampos para N grande ($N > 4$), tais sistemas receberam pouca atenção na literatura, à parte de alguns exemplos específicos ([23] e [24]).

Neste sentido, o artigo [37] apresenta a classificação das representações dos multipletos irredutíveis da Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS) N-estendida, onde tais multipletos são associados aos multipletos curtos fundamentais na qual todos os bósons e todos os férmions são acomodados em apenas dois estados de spin. Neste artigo é fornecida também a classificação completa dos multipletos curtos, além de mostrar que todos os multipletos irredutíveis desta espécie estão em correspondência um-a-um com a

[1] Korteweg-de Vries (KdV) é uma equação não-linear $u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0$, que admite uma solução tipo onda-solitaria, chamada também Soliton

classificação das matrizes-Γ de Clifford do tipo-Weyl com entradas reais.

A partir dos conceitos desenvolvidos na referência acima citada [37], estendemos as idéias em nosso artigo [38], para estudar a classificação das realizações octoniônicas da supersimetria estendida $1D$ (isto é, os ingredentes básicos da MQS estendida octoniônica). Esta classificação é obtída ao achar uma correspondência um-a-um com a classe de realizações tipo-Weyl das álgebras de Clifford onde as matrizes tem entradas octoniônicas. No final, apresentamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos que admitem realizações octoniônicas da supersimetria estendida. O primeiro exemplo não trivial é o sistema dinâmico que admite uma invariância da supersimetria global $N = 8$ octoniônica, isto é, a supersimetria $N = 8$ KdV. Devido ao fato dos supercampos da superKdV dependerem das coordenadas espaciais e temporais, a dependência temporal será "congelada", possibilitando assim obter os geradores da supersimetria octoniônica $N = 8$, $1D$ no caso da superKdV. Um outro exemplo que é invariante sobre supersimetria octoniônica $1D$ envolve as "spinning particles" octoniônicas.

Por outro lado, sempre no contexto das álgebras de simetria, é interessante estudar as denominadas "Simetrias Residuais" [48]. Estas respondem à seguinte pergunta: quais simetrias sobreviverão no caso livre, para um sistema descrito pela Teoria Quântica de Campos (TQC), inicialmente invariante de Poincaré num background Electromagnético (E.M.) constante?

A resposta em $D = 2 + 1$ é uma álgebra de Lie 5-dimensional $u(1) \oplus \mathcal{P}_c(2)$, onde $\mathcal{P}_c(2)$ é a álgebra de Poincaré em $D = 2$ centralmente estendida. No caso $D = 4$ é uma álgebra de Lie 7-dimensional centralmente estendida.

Vale à pena mencionar que, devido a presença das extensões centrais, as simetrias residuais não são subálgebras da álgebra de simetrias originais, na ausência de background E.M.

Resumindo, nesta tese iremos discutir as álgebras de simetria da Física em dois contextos diferentes:

i) Aplicação da álgebra divisional dos octônions na formulação e classificação da supersimetria estendida $1D$ octoniônica, mostrando alguns exemplos explícitos. O caso $N = 8$ KdV octoniônico, com a dependência temporal "congelada", é um bom exemplo da supersimetria octoniônica $1D$, $N = 8$. Outro exemplo que fornecemos é o da "spinning particle" octoniônica.

ii) Estudo das propriedades da álgebra de simetrias (chamadas "simetrias residuais") de uma teoria quântica de campos em presença de um background E.M. constante.

Esta tese está organizada do seguinte modo:

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo das estruturas matemáticas necessárias ao longo desta tese. Iniciamos a seção 1.1 estudando as álgebras divisionais alternativas sobre $\mathbb{R}$.

Na seção 1.2 apresentamos a classificação e construção explícita das álgebras de Clifford associadas às álgebras divisionais. Na seção 1.3 faremos o estudo das realizações quaterniônicas. Este Capítulo é finalizado com um sumário dos resultados alcançados.

A seguir, no Capítulo 2, dedicar-nos-emos ao estudo das álgebras divisionais e à superKdV estendida. Iniciaremos, na seção 2.1, introduzindo a Álgebra Superconforme (ASC) $N = 8$ não-associativa. Isto foi construído com a transformação de Sugawara da álgebra superaffinizada dos octônions fazendo uso da computação algébrica [36]. É importante ressaltar a presença do termo central na ASC $N = 8$ não-associativa que é essencial para a construção de uma equação supersimétrica da KdV. Na seção 2.2, faremos uma revisão da $N = 2$ e $N = 4$ superKdV, fazendo uso da chamada "ASC $N = 4$ minimal". Passando à seção 2.3, construímos o primeiro exemplo da estensão supersimétrica $N = 8$ das equações KdV, partindo da mais geral hamiltoniana e fazendo uso da ASC $N = 8$ não-associativa. Obtemos então, uma única hamiltoniana invariante sob o conjunto de supersimetrias globais $N = 8$. Isto gera uma estensão supersimétrica $N = 8$ da KdV, sendo esta não integrável. Finalizamos o capítulo fazendo uma breve exposição dos resultados obtidos.

Já no Capítulo 3, focalizaremos nossa atenção no estudo das classificações das representações irredutíveis da Supersimetria $1D$ N-estendida. Iniciando na seção 3.1, discutimos a Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS) N-estendida, considerando o mais geral supercampo para a MQS em D dimensões, sendo estes altamente redutíveis. Na seção 3.2, mostramos que todas às representações irredutíveis são equivalentes as representações com uma estrutura definida dos multipletos e, no final se reduz em representações irredutíveis de comprimento 2. Seguindo na seção 3.3, mostramos que a classificação das representações dos multipletos irredutíveis de uma supersimetria (p, q)-estendida, está em correspondência um-a-um com a classificação das álgebras de Clifford $C_{p,q}$, reais com a propriedade adicional de que as matrizes-Γ podem ser realizadas na forma de Weyl. Passando à seção 3.4, fazemos uma revisão da classificação das representaçõs irredutíveis. Finalizamos este capítulo com uma breve exposição dos resultados aí obtidos.

O Capítulo 4 é dedicado à classificação das realizações não-associativas da supersimetria estendida $1D$. Isto se obtém, basicamente, ao achar uma correspondência um-a-um com a classe de realizações tipo-Weyl das álgebras de Clifford, onde as matrizes tem entradas octoniônicas. Iniciaremos, na seção 4.1, mostrando a classificação e construção explícita das álgebras de Clifford, na chamada "série octoniônica" $C_{\mathbb{O}}(0, 7 + 8n)$, que vai ser de grande utilidade na seguinte seção. Na seção 4.2, mostramos a correspondência um-a-um da supersimetria estendida $1D$ octoniônica e as realizações octoniônicas da álgebra de Clifford tipo-Weyl, assim como sua classificação. Na seção 4.3, apresentamos alguns exemplos explícitos de sistemas dinâmicos que admitem invariância sob supersimetrias estendidas $1D$ octoniônicas. Finalizamos este capítulo com um sumário dos resultados nela alcançados.

O Capítulo 5 tratará de outro tipo de álgebra de simetrias da Física. O objetivo básico deste capítulo é responder à seguinte pergunta: quais simetrias sobrevivem no caso livre, para um sistema descrito pela Teoria Quântica de Campos (TQC) num background E.M. constante? As simetrias que sobrevivem chamamos "simetrias residuais". Iniciamos a seção 5.1, ilustrando o método algébrico de Lie que permite, numa maneira independente do modelo, determinar os geradores das simetrias residuais e sua
correspondente álgebra. Passando-se à seção 5.2, mostramos a álgebra de simetria residual resultante para uma TQC em $D = 3$ na presença do campo E.M. constante. Já na seção 5.3, estudamos a supersimetria residual para uma teoria supersimétrica acoplada a um background E.M. constante. Na seção 5.4, faremos um estudo das álgebras de simetria residual para uma TQC num espaço-tempo de Minkowski ordinário $D = 4$ em presença de um background E.M. constante. Passando-se à seção 5.5, estudamos o caso de um background E.M. não constante e tratamos alguns casos específicos. Este último Capítulo é finalizado com uma breve exposição dos resultados aí obtidos.

Capítulo 1

As Álgebras de Clifford Associadas às Álgebras Divisionais

O programa da unificação das interações conhecidas, que também exige uma formulação quântica consistente para a gravidade, aponta hoje na direção das teorias supersimétricas em dimensões elevadas. No presente, a mais promissora, porém ainda especulativa, é a chamada teoria-M, que mora num espaço-tempo de onze dimensões. Os requisitos teóricos de consistência para as teorias candidatas para unificação nos conduzem necessariamente a uma investigação sistemática das propriedades das álgebras e espinores de Clifford em espaços-tempos de dimensões e assinaturas arbitrárias.

Do ponto de vista matemático, as álgebras de Clifford foram classificadas nos anos de 1960 [1]. Já uma abordagem sistemática, e muito conveniente na notação dos físicos, é a classificação das álgebras e espinores de Clifford, baseada nas três álgebras associativas ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), trabalho original de Okubo [11].

A relação entre a supersimetria e a álgebra divisional foi analisada nos trabalhos originais de P. Townsend e T. Kugo [3], assim como a relação entre os espinores numa dimensão e assinatura arbitrária e as álgebras divisionais. O mesmo trabalho sugere que exista uma relação entre as supersimetrias estendidas e as álgebras divisonais. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. Adicionalmente, na referência [38] (que é a base da construção do Capítulo 4) se estabelece uma relação entre as álgebras divisionais e as supersimetrias estendidas em $1D$. Em particular, se estabelece a classificação das realizações octoniônicas das supersimetrias estendidas.

Este Capítulo está dedicado ao estudo das álgebras divisionais, em especial ao estudo dos quatérnions e dos octônions e à classificação das respectivas álgebras de Clifford. Cabe também ressaltar que os octônions não podem ser representados através de matrizes com o produto usual, devido ao fato de serem objetos não-associativos.

Na classificação das álgebras de Clifford, fornecemos um algoritmo explícito que nos permite escolher, num espaço-tempo de assinatura arbitrária, as representações irredutíveis das matrizes-Γ de Clifford. Essas representações podem ser realizações quaterniônicas ou octoniônicas das álgebras de Clifford.

1.1 Álgebras Divisionais Alternativas sobre $\mathbb{R}$

As álgebras divisionais mais conhecidas são *os Reais* $\mathbb{R}$, *os Complexos* $\mathbb{C}$ e os *Quatérnions* $\mathbb{H}$ (a identidade e as três matrizes de Pauli formam uma álgebra divisional dos quatérnions). Existe uma outra álgebra divisional chamada álgebra dos *Octônions*. Esta é uma álgebra divisional alternativa, devido ao fato dos octônions serem não-associativos. No decorrer deste Capítulo entraremos em detalhes. Antes, porém, vamos comentar algumas idéias básicas sobre as álgebras divisionais.

Podemos considerar uma *álgebra* A sobre os reais como um espaço vetorial equipado com um mapeamento bilinear $M : A \times A \to A$ chamado de "multiplicação" e o elemento não nulo "unidade" denotado por 1 tal que $1 \in A$ e $M(1, a) = M(a, 1) = a$. Como é usual, vamos abreviar $M(a, b) = ab$.

Uma álgebra divisionária sobre $\mathbb{R}$ ou álgebra divisionária Real é por definição um espaço linear real A de dimensão finita com o produto bilinear [2]

$$M: \quad A \times A \to A$$
$$(a, b) \to ab$$

tal que $\forall\, a, b \in A$,

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0. \tag{1.1.1}$$

Equivalentemente, A é uma álgebra divisional, se as operações de "multiplicação"pela direita e pela esquerda por qualquer elemento não-nulo da álgebra são invertíveis.

Algumas definições Úteis:

• Definição do **Associador**: Qualquer álgebra A tem um mapeamento trilinear

$$[\cdot,\cdot,\cdot]: \quad A^3 \to A$$
$$(x, y, z) \to [x, y, z] = x(yz) - (xy)z, \forall x, y, z \in A,$$

onde o associador $[x, y, z]$ mede a falta da associatividade, assim como o comutador mede a falta da comutatividade.

• Álgebra divisional **normada** N, é uma álgebra que tem uma forma quadrática N definida positiva [6]

$$N: \quad A \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to N(x) = |x|^2 = x^* x.$$

Satisfazendo

$$N(0) = 0,$$
$$N(x) > 0, \qquad se \quad x \neq 0$$
$$N(xy) = N(x)N(y), \qquad \forall x, y \in A$$

• Uma álgebra A é **alternativa** [4],[5] se a subálgebra gerada por qualquer par de elementos é associativo, então seja $x, y, z \in A$, temos

$$x(xy) = x^2y, \quad (xy)y = xy^2, \ \forall x, y \in A \tag{1.1.2}$$

A alternatividade é uma forma fraca de associatividade. Usando (1.1.2) no associador temos

$$[x, x, y] = [y, x, x] = 0, \forall x, y \in A. \tag{1.1.3}$$

Resumindo, uma álgebra alternativa é aquela onde o associador satisfaz à relação $[x, x, y] = 0$

Uma álgebra alternativa também pode ser definida como uma álgebra na qual todas as subálgebras geradas por dois elementos são associativos. Um exemplo de uma álgebra alternativa é a álgebra divisional dos octônions, já que eles são não-associativos.

• Uma involução (conjugação) de uma álgebra A é a operação linear $\cdot^*$

$$\begin{aligned} \cdot^* : \quad & A \rightarrow A \\ & x \rightarrow x^*, \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(xy)^* = y^*x^*, \qquad \forall x, y \in A$$

(a conjugação corresponde à transposição na representação matricial).

Com as definições apresentadas, podemos mencionar uma série de resultados importantes nas álgebras divisionais.

⋆ Teorema de Frobenius: Qualquer álgebra divisional associativa sobre os $\mathbb{R}$ é isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$. [5].

* $\star$ Teorema de Hurwitz: Qualquer álgebra divisional normada sobre os $\mathbb{R}$ com elemento unidade é isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ [5], [7].

* $\star$ Qualquer álgebra divisional alternativa sobre os $\mathbb{R}$ é isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ [5].

* $\star$ Qualquer álgebra divisional sobre os $\mathbb{R}$ tem dimensões 1,2,4 ou 8 [3].

Finalmente, resumindo as propriedades das diversas álgebras divisionais, temos

$\circ$ $\mathbb{R}$ é uma álgebra divisional real, associativa e normada.

$\circ$ $\mathbb{C}$ é uma álgebra divisional comutativa, associativa e normada.

$\circ$ $\mathbb{H}$ é uma álgebra divisional não-comutativa, associativa e normada.

$\circ$ $\mathbb{O}$ é uma álgebra divisional não-comutativa, não-associativa, alternativa e normada.

Sendo esta última álgebra divisional de difícil manipulação devido a não-associatividade.

A álgebra divisional dos Quatérnions $\mathbb{H}$:

A álgebra dos quatérnions pode ser definida como uma álgebra linear sobre o campo dos reais $\mathbb{R}$ com o elemento geral da forma

$$X = x_0\tau_0 + x_i\tau_i, \qquad x_0, x_i \in \mathbb{R},$$

onde $i = 1, 2, 3$

A base dos quatérnions $\{\tau_0, \tau_i\}$ satisfaze às seguintes propriedades

$$\tau_0 = 1, \qquad \text{elemento identidade},$$

$$\tau_i^2 = -1, \qquad \forall i = 1,2,3 \ (\tau_i \text{ são os chamados quatérnions imaginários}).$$

A base destes quatérnions imaginários (τ_i) satisfazem a seguinte regra de multiplicação

$$\tau_i \cdot \tau_j = -\delta_{ij}\tau_0 + C_{ijk}\tau_k, \tag{1.1.4}$$

onde δ_{ij} é o usual símbolo de Kronecker e C_{ijk} é o tensor Levi-Civita.

O comutador dos quatérnions imaginários é: $[\tau_i, \tau_j] = 2C_{ijk}\tau_k$, ou seja, τ_i são não-comutativos.

Verifica-se que o associador é nulo. Em conseqüência os quatérnions imaginários são associativos, devido à linearidade. Assim as álgebras dos quatérnions são não-comutativas e associativas.

A álgebra divisional dos Octônions $\mathbb{O}$:

A álgebra dos octônions pode ser definida como uma álgebra linear sobre os campos dos reais $\mathbb{R}$ com o elemento geral da forma

$$X = x_0\tau_0 + x_i\tau_i, \qquad x_0, x_i \in \mathbb{R}$$

onde $i = 1, 2, \cdots, 7$.

A base dos octónions $\{\tau_0, \tau_i\}$ satisfaze às seguintes propriedades

$$\tau_0 = 1, \qquad \text{elemento identidade,}$$

$$\tau_i^2 = -1, \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, 7 \ (\tau_i \text{ são os chamados octónions imaginários}).$$

Estes octônions imaginários satisfazem a seguinte regra de multiplicação

$$\boxed{\tau_i \cdot \tau_j = -\delta_{ij}\tau_0 + C_{ijk}\tau_k,}$$

onde δ_{ij} é o usual símbolo de Kronecker e C_{ijk} é um tensor totalmente anti-simétrico com

$$C_{123} = C_{147} = C_{165} = C_{246} = C_{257} = C_{354} = C_{367} = 1. \tag{1.1.5}$$

Podemos também introduzir o tensor dual de C_{ijk} em 7 dimensões definido por C_{lmrs}

$$C_{lmrs} = \frac{1}{6}\varepsilon_{lmrsijk}C_{ijk}, \tag{1.1.6}$$

onde $\varepsilon_{1234567} = 1$ (tensor totalmente anti-simétrico)

Assim, temos

$$C_{4567} = C_{1276} = C_{2374} = C_{2356} = C_{1346} = C_{1245} = C_{1357} = 1 \tag{1.1.7}$$

Os octônions imaginários são não-associativos $(\tau_a \cdot \tau_b) \cdot \tau_c \neq \tau_a \cdot (\tau_b \cdot \tau_c)$ para a, b, c gerais.

Assim, o associador para os octônions imaginários é dado por

$$[\tau_i, \tau_j, \tau_k] = 2C_{ijkr}\tau_r \tag{1.1.8}$$

onde C_{ijkr} é dado pela relação (1.1.6). Conseqüentemente a álgebra dos octônions é não-associativas.

Por outro lado para qualquer octônion X podemos definir seu conjugado X^* definido por

$$X^* = x_0\tau_0 - x_i\tau_i.$$

A conjugação mapeia $X \longrightarrow X^*$, sendo uma involução, isto é $(X^*)^* = X$, $(XY)^* = Y^*X^*$

Para finalizar esta seção é interessante apresentar algumas aplicações das álgebras divisionais.

Grupos de Lorentz e as álgebras divisionais.- Os grupos de cobertura universal de alguns dos grupos de Lorentz são isomorfos aos grupos $Sl(2)$ com valores nas álgebras divisionais. Assim

$$\overline{SO(2,1)} \sim Sl(2,\mathbb{R}),$$

$$\overline{SO(3,1)} \sim Sl(2,\mathbb{C}), \tag{1.1.9}$$

$$\overline{SO(5,1)} \sim Sl(2,\mathbb{H}), \tag{1.1.10}$$

onde (1.1.9) fornece as bases para construir espinores de 2 componentes no espaço padrão de Minkowski. A relação (1.1.10) nos fornece também as bases para construir espinores de 2 componentes no espaço de Minkowski $D = 6$. No caso $D = 10$, teorias supersimétricas admitem uma descrição octoniônica baseada na realização das álgebras de Jordan de $\overline{SO(9,1)}$ em termos de matrizes hermitianas 2×2 sobre os $\mathbb{O}$.

G_2, SO(8) e os Octônions [8] [47].- O grupo de automorfismos dos octônions é o grupo excepcional de Lie G_2 (Os 5 grupos excepcionais são G_2,F_4,E_6,E_7 e E_8) de dimensão 14 [9], [10]. Estes automorfismos, junto com as transformações lineares obtidas da multiplicação pela direita e pela esquerda sobre os octônions imaginários, geram o grupo $SO(8)$ de 28 geradores.

Na tabela abaixo mostraremos os automorfismos das quatro álgebras divisionais

D. Álgebra	automorfismos
$\mathbb{R}$	Identidade
$\mathbb{C}$	C_2
$\mathbb{H}$	$SU(2)$
$\mathbb{O}$	G_2

1.2 Revisão, Classificação e Construção Explícita das Álgebras de Clifford Associadas às Álgebras Divisionais

1.2.1 As Álgebras de Clifford

Os números a_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ que satisfazem as relações

$$\{a_i, a_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{1.2.11}$$

são chamados de números de Clifford.

Estes números a_i geram uma álgebra que tem como base o conjunto de monômios

$$1, a_i, a_i a_j, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_N. \tag{1.2.12}$$

De fato, cada relação de comutação destes monômios pode ser escrita como uma combinação linear deles próprios, o que faz com que formem uma álgebra fechada. Uma vez que o número total de monômios acima é 2^N a álgebra de Clifford gera um espaço linear de dimensão 2^N, ou seja, um elemento arbitrário da álgebra pode ser escrito como uma combinação linear dos monômios mostrados acima.

No contexto da Física nos centramos nas representações matriciais das álgebras de Clifford.

Fornecemos, então, a definição das álgebras de Clifford associando esta com o espaço-tempo de Minkowski. Assim, seja η_{ij} a métrica associada ao espaço-tempo Minkowskiano $M^{p,q}$ com "p"direções tipo-tempo e "q"direções tipo-espaço. A dimensão do espaço-tempo é $D = p + q$, onde

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diagonal}(\underbrace{+ + \ldots +}_{p-vezes}, \underbrace{- - \ldots -}_{q-vezes}),\ \mu, \nu = (1, \ldots, D)$$

As matrizes-Γ associadas ao espaço-tempo $M^{p,q}$ são representações matriciais dos geradores da álgebra de Clifford Γ^μ ($\mu = 0, \ldots, D-1$), as quais satisfazem à relação de anticomutação

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{1.2.13}$$

As matrizes-Γ são de dimensão $2^{[D/2]} \times 2^{[D/2]}$ e $\mathbf{1}$ é a identidade deste espaço de matrizes.

Sem perda de generalidade, as matrizes-Γ que satisfazem a ($\Gamma^{\mu 2}$=$\mathbf{1}$) e a ($\Gamma^{\mu 2}$=-$\mathbf{1}$) serão, respectivamente, associadas às direções tipo-tempo e tipo-espaço.

1.2.2 Álgebras de Clifford e Álgebras Divisionais Associativas

A seguir iremos mostrar alguns resultados já conhecidos da classificação das representações matriciais reais das álgebras de Clifford associadas com as álgebras divisionais associativas $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ [11].

Três casos podem-se distinguir para as representações reais. Estas estão especificadas pelo tipo de solução permitida (a mais geral) para uma matriz S real que comuta com todas as matrizes-Γ^i ($[S, \Gamma^i] = 0$) de Clifford.

Assim temos

i) Caso normal: neste caso, S é múltiplo da identidade.

ii) Caso quase complexo: S é uma combinação linear da identidade e da matriz real J, onde $J^2 = -\mathbf{1}$.

iii) Caso quaterniônico: neste caso S é uma combinação linear das matrizes E_i, que satisfazem a álgebra quaterniônica.

A representação irredutível real do tipo normal existe ao satisfazer-se a condição
$p - q = 0, 1, 2 \ mod8$ (a dimensionalidade é dada por $2^{[\frac{N}{2}]}$, onde $N = p + q$). No caso da representação tipo quase complexa a condição de existência é
$p - q = 3, 7 \ mod8$.

No caso quaterniônico a condição de existência é $p - q = 4, 5, 6 \ mod8$. Nas duas últimas representações a dimensionalidade é $2^{[\frac{N}{2}]+1}$.

Ademais, vamos exigir uma condição extra para a representação real. Esta deve admitir uma realização antidiagonal por blocos para as matrizes-Γ de Clifford. Esta condição é satisfeita no caso normal para $p - q = 0 \ mod8$ (que corresponde à exigência de uma estrutura de Majorana-Weyl padrão), no caso quase-complexo para $p - q = 7 \ mod8$ e no caso quaterniônico, para $p - q = 4, 6 \ mod8$. Em todos estes casos a representação real é irredutível e única.

No caso especial $p - q = 1, 5 \ mod8$ existem duas representações reais inequivalentes. Uma delas pode ser recuperada da outra fazendo uma troca no sinal de todas as matrizes-Γ ($\Gamma^i \longrightarrow -\Gamma^i$)

Estes resultados podem ser resumidos na seguinte tabela (com entradas representando valores de $p - q \ mod8$).

R	**C**	**H**
$0, 2$		$4, 6$
1	$3, 7$	5

1.2.3 Classificação e Construção Explícita das Álgebras de Clifford

Para nossos propósitos é conveniente fazer uma revisão da classificação das representações irredutíveis das álgebras de Clifford de outro ponto de vista [12], fazendo explícito um algorítmo que nos permitirá selecionar, num espaço-tempo de assinatura arbitrária, as representações irredutíveis das matrizes-Γ de Clifford. A construção explícita que apresentamos a seguir é a ferramenta certa que nos permitirá introduzir as realizações quaterniônicas (na seguinte seção) e as realizações octoniônicas (na seguinte seção e no Capítulo 3) das álgebras de Clifford.

A construção é como segue: Primeiro, provamos que iniciando numa representação das matrizes-Γ da álgebra de Clifford, associadas ao espaço-tempo de dimensão D, nós podemos construir recursivamente as matrizes-Γ da álgebra de Clifford associada ao espaço-tempo de dimensão $D+2$ com a ajuda de dois algoritmos recursivos. De fato é um exercício simples verificar isso: se γ_i denota as matrizes-Gamma de dimensão d de uma álgebra de Clifford $C(p,q)$, associado ao espaço-tempo de dimensão $D = p + q$ com assinatura (p,q), então $D+2$ matrizes-Gamma (denotadas por Γ_j) de dimensão $2d$ de uma álgebra de Clifford associado ao espaço-tempo $D+2$ são produzidas de acordo com

$$\Gamma_j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix},$$

$$(t, s) \mapsto (t+1, s+1), \tag{1.2.14}$$

ou

$$\Gamma_j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix},$$

$$(t, s) \mapsto (s+2, t). \tag{1.2.15}$$

Mostramos a seguir um exemplo imediato da praticidade deste algoritmo. As matrizes de Pauli τ_A,τ_1,τ_2 de dimensão 2 a valores reais, os quais satisfazem a álgebra de Clifford $C(2,1)$ podem ser obtidas aplicando-se o algoritmo (1.2.14) ou (1.2.15) ao número 1, que é a realização 1-dimensional da álgebra de Clifford $C(1,0)$. Temos então

$$\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.16}$$

Todas as álgebras são obtidas recursivamente usando o algoritmo (1.2.14) ou (1.2.15) na álgebra de Clifford $C(1,0)$ ($\equiv 1$) e na série de álgebras de Clifford $C(0,3+4m)$ (onde m é um número inteiro não negativo), que previamente devem ser conhecidas. Em conseqüência, na Tabela 1 que se mostra a seguir, mostramos todas as álgebras de Clifford obtidas através desse algoritmo.

Tabela 1 : Tabela com as álgebras de Clifford maximais (até $d = 256$).

1	→	2	→	4	→	8	→	16	→	32	→	64	→	128	→	256	→
$\underline{(1,0)}$	⇒	(2,1)	⇒	(3,2)	⇒	(4,3)	⇒	(5,4)	⇒	(6,5)	⇒	(7,6)	⇒	(8,7)	⇒	(9,8)	⇒
						(1,4)	→	(2,5)	→	(3,6)	→	(4,7)	→	(5,8)	→	(6,9)	→
					↗												
				$\underline{(0,3)}$													
					↘												
						(5,0)	→	(6,1)	→	(7,2)	→	(8,3)	→	(9,4)	→	(10,5)	→
								(1,8)	→	(2,9)	→	(3,10)	→	(4,11)	→	(5,12)	→
							↗										
						$\underline{(0,7)}$											
							↘										
								(9,0)	→	(10,1)	→	(11,2)	→	(12,3)	→	(13,4)	→
														(1,12)	→	(2,13)	→
													↗				
												$\underline{(0,11)}$					
													↘				
														(13,0)	→	(14,1)	→
																(1,16)	→
															↗		
														$\underline{(0,15)}$			
															↘		
																(17,0)	→

(1.2.17)

No que se refere à Tabela 1 algumas observações podem ser feitas.

As colunas são rotuladas pela dimensão d das matrizes que formam a álgebra de Clifford $C(p,q)$, à qual vamos chamar de *álgebra de Clifford maximal*. Além disso, as álgebras de Clifford sublinhadas na tabela são chamadas de *álgebras de Clifford maximais e primitivas*. Às demais álgebras de Clifford maximais que aparecem na tabela vamos chamar de *álgebras de Clifford maximais descendentes.* Elas são obtidas da álgebra de Clifford maximal primitiva por iteratividade dos algoritmos recursivos (1.2.14) e (1.2.15). Além disso, qualquer álgebra de Clifford não maximal é obtida de uma álgebra maximal apagando certo número de matrizes Gamma. Observa-se que as álgebras de Clifford de dimensão par são sempre não-maximais. É claro da construção mostrada acima que as álgebras de Clifford maximais são encontradas se, e somente se, a condição

$$p - q = 1, 5 \; mod 8,$$

é satisfeita.

Agora, vamos discutir a construção das *álgebras maximais e primitivas* $C(0, 3 + 4m)$ ($m = 0, 1, \ldots$). Vamos dividir em duas séries: a série $C(0, 3 + 8n)$ (que pode ser chamada de "série quaterniônica", devido à sua conexão com as álgebras divisionais), e a série octoniônica $C(0, 7 + 8n)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Para construir as representações matriciais das álgebras de Clifford destas duas séries, é necessária a ajuda das 3 matrizes de Pauli (1.2.16). Em seguida mostramos a realização explícita das 3 matrizes 4×4 da álgebra de Clifford $C(0, 3)$ e também da realização explícita das 7 matrizes 8×8 da álgebra de Clifford $C(0, 7)$. Estas são dadas respectivamente por

$$C(0,3) \equiv \begin{array}{l} \tau_A \otimes \tau_1, \\ \tau_A \otimes \tau_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A. \end{array} \qquad (1.2.18)$$

e

$$C(0,7) \equiv \begin{array}{l} \tau_A \otimes \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \tau_A \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_1, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_2, \\ \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_A \otimes \tau_A \otimes \tau_A. \end{array} \qquad (1.2.19)$$

As três matrizes de $C(0,3)$ são denotadas por $\overline{\tau}_i, = 1,2,3$. As sete matrizes de $C(0,7)$ serão denotadas por $\tilde{\tau}_i$, $i = 1,2,\ldots,7$.

Para construir as restantes séries das álgebras de Clifford, necessitamos aplicar o algoritmo (1.2.14) a $C(0,7)$ e construir as realizações matriciais do $C(1,8)$ (a matriz com assinatura positiva é denotada como γ_9 , $\gamma_9^2 = \mathbf{1}$, enquanto as oito matrizes com assinatura negativa são denotadas como γ_j, $j = 1,2\ldots,8$, onde ${\gamma_j}^2 = -\mathbf{1}$). Podemos agora construir explicitamente todas as representações irredutíveis das álgebras de Clifford maximais primitivas $C(0,3+8n)$, $C(0,7+8n)$ através das fórmulas

$$C(0,3+8n) \equiv \begin{array}{lll} \overline{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \gamma_9, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j, \end{array} \qquad (1.2.20)$$

e

$$
C(0,7+8n) \equiv \begin{array}{lll}
\tilde{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \gamma_9, \\
\mathbf{1}_8 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
\mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
\mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
\ldots & \ldots & \ldots, \\
\mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j,
\end{array} \qquad (1.2.21)
$$

Observe-se que o produto tensorial da representação 16-dimensional é tomado n vezes. Então, a dimensão final da representação matricial (1.2.20) é 4×16^n, enquanto a dimensão final da representação matricial (1.2.21) é 8×16^n. Assim, com a ajuda das fórmulas fornecidas nesta sub-seção, obtemos uma forma prática e eficiente de construir todas as representações irredutíveis das álgebras de Clifford reais.

Finalmente é importante mencionar a existência de uma subclasse de matrizes Gamma de Clifford, que tem a forma de blocos 2×2, onde os únicos elementos não-nulos são os blocos anti-diagonais $\begin{pmatrix} 0 & \boxdot_{d\times d} \\ \boxdot_{d\times d} & 0 \end{pmatrix}$. Este tipo de matrizes é chamado de matrizes tipo-Weyl (generalizadas). Elas também podem ser "promovidas"a matrizes fermiônicas, associadas com a representação das supersimetrias estendidas $1D$. Isto é mostrado nos Capítulos 3 e 4 e em [38].

É evidente que todas as matrizes da álgebra de Clifford *primitiva*, por construção não são tipo-Weyl. Com isso, as álgebras de Clifford derivadas destas matrizes primitivas usando os algoritmos (1.2.14) e (1.2.15) também não são do tipo-Weyl. É importante ressaltar que todas as álgebras maximais descendentes podem ser transformadas no tipo-

Weyl, se excluímos pelo menos a matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$, produzindo-se desta maneira uma álgebra de Clifford não-maximal tipo-Weyl.

Em geral as álgebras de Clifford não maximais são produzidas a partir das correspondentes álgebras de Clifford maximais descendentes eliminando algumas matrizes Gamma tipo-tempo ou tipo-espaço, obtendo-se álgebras não-maximais tipo-Weyl (W) ou álgebras não-maximais não-Weyl (NW) respectivamente. Isto se mostra na seguinte tabela

W			NW		
$(0\ mod\ 8)$	$\subset$	$(1\ mod\ 8)$	$(2\ mod\ 8)$	$\subset$	$(1\ mod\ 8)$
(t,s)	$\Leftarrow$	$(t+1,s)$	(t,s)	$\Leftarrow$	$(t,s+1)$
$(4\ mod\ 8)$	$\subset$	$(5\ mod\ 8)$	$(3\ mod\ 8)$	$\subset$	$(1\ mod\ 8)$
(t,s)	$\Leftarrow$	$(t+1,s)$	(t,s)	$\Leftarrow$	$(t,s+2)$
$(6\ mod\ 8)$	$\subset$	$(1\ mod\ 8)$			
(t,s)	$\Leftarrow$	$(t+3,s)$			
$(7\ mod\ 8)$	$\subset$	$(1\ mod\ 8)$			
(t,s)	$\Leftarrow$	$(t+2,s)$			

(1.2.22)

Nesta tabela as matrizes Gamma não-maximais que satisfazem $p-q=0,4,6,7\ mod 8$ são tipo-Weyl(W) e as matrizes Gamma não-maximais $p-q=2,3\ mod 8$ são tipo-não Weyl (NW).

1.3 As Realizações Quaterniônicas das Álgebras de Clifford

A seguir, discutimos a relação entre as álgebras de Clifford e as álgebras divisionais (quaterniônica neste caso) de uma forma ligeiramente diferente da mencionada na subseção

(1.2.2). Esta relação pode ser desenvolvida do seguinte modo:

Primeiro, observemos que é possível identificar as três matrizes Gamma que realizam $C(0,3)$ com os quatérnions imaginários (τ_i) e que satisfazem a relação (1.1.4). Esta realização quaterniônica é denotada como $C_{\mathbb{H}}(0,3)$.

Logo, a partir da realização $C_{\mathbb{H}}(0,3)$ podemos obter a realização das séries quaterniônicas $C_{\mathbb{H}}(m, 3+m)$ e $C_{\mathbb{H}}(4+m, m-1)$, onde $(m = 1, 2, \ldots)$. A dimensionalidade $dim - \Gamma_{\mathbb{H}}$ das correspondentes matrizes Gamma com entradas quaterniônicas é $2^m \times 2^m$. Isto pode ser visualizado na tabela abaixo.

$dim - \Gamma_{\mathbb{H}}$:	1×1	$*$	2×2	$*$	4×4	$*$	8×8	..	$2^m \times 2^m$
			(1,4)	$\longrightarrow$	(2,5)	$\longrightarrow$	(3,6)	..	$C_{\mathbb{H}}(m, 3+m)$
		$\nearrow$							
	(0,3)								
		$\searrow$							
			(5,0)	$\longrightarrow$	(6,1)	$\longrightarrow$	(7,2)	..	$C_{\mathbb{H}}(4+m, m-1)$

Em conseqüência, todo o conjunto das álgebras de Clifford maximais e primitivas $C_{\mathbb{H}}(0, 3+8n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e seus descendentes são representados com matrizes a valores quaterniônicos, agindo em espinores que agora vamos interpretar como vetores coluna a valores quaterniônicos.

Um exemplo explícito de uma destas álgebras de Clifford maximais descendentes é o caso $C_{\mathbb{H}}(1,4)$. Usando o algoritmo (1.2.14) obtemos

$$C(1,4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

onde $i = 1, 2, 3$

A construção da realização octoniônica das álgebras de Clifford será apresentada na seção 4.1 do Capítulo 4, onde ela terá grande utilidade.

1.4 Conclusões Preliminares

Dedicamo-nos ao longo deste Capítulo, ao estudo das ferramentas matemáticas que serão utilizadas no decorrer desta tese. Assim, após definir as álgebras divisionais alternativas sobre $\mathbb{R}$, entre elas a álgebra divisional dos quatérnions e dos octónious, estamos em posição para apresentar um algoritmo para a classificação e construção explícita das álgebras de Clifford associadas às álgebras divisionais. Estas álgebras de Clifford tem múltiplas aplicações. Pela construção, é possível obter estas álgebras numa realização com entradas quaterniônicas, onde as álgebras de Clifford maximais e primitivas foram denotadas como $C_{\mathbb{H}}(0, 3+8n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. No caso octoniônico também pode-se fazer o mesmo. No decorrer desta tese estas construções serão de muita importância.

Capítulo 2

Álgebras Divisionais e SuperKdV Estendida

Nos últimos anos, as diversas hierarquias integráveis das equações diferenciais não-lineares em $1+1$ dimensões foram exploradas intensamente, principalmente em conexão com a discretização da gravidade 2-dimensional [14].

As extensões supersimétricas de tais equações foram investigadas amplamente [15], [16],[25] usando uma variedade de métodos diferentes. Ao contrário da teoria bosônica, muitas perguntas não foram respondidas ainda no caso supersimétrico.

Todo este Capítulo é baseado no trabalho [36], no qual nós construímos o primeiro exemplo de uma extensão $N = 8$ supersimétrica global da equação KdV. A estratégia usada é baseada na derivação das equações supersimétricas não-lineares de um sistema hamiltoniano generalizado que admite a Álgebra SuperConforme (ASC) $N = 8$ de Englert et al. [13] com colchetes de Poisson generalizados. A não-associatividade desta álgebra permite superar o teorema no-go baseado em resultados estritamente matemáticos. Para construir generalizações supersimétricas do KdV para $N > 4$ é preciso relaxar alguma condição na natureza das álgebras superconformes dos colchetes de Poisson. Assim, com a ASC $N = 8$ não-associativa da referência [13], é possível introduzir uma extensão central. É conseqüentemente digno de investigar se esta álgebra superconforme pode ser relacionada à construção de uma superKdV N-estendida prolongada além da barreira $N = 4$.

Em [42] é construída explicitamente a supersimetria $N = 8$ global em termos de cargas derivadas das álgebras de supercorrentes que é uma álgebra de Malcev (um tipo especial de álgebra não-Jacobiana). Logo após superafinizar a álgebra, construímos a realização de Sugawara que produz uma extensão $N = 8$ da álgebra de Virasoro. Esta álgebra coincide com a ASC não-associativa.

Assim, iniciamos este Capítulo mostrando explicitamente as ASC $N = 8$. Na seção seguinte, revisamos as equações $N = 2, 4$ SuperKdV e construímos o domínio fundamental para o espaço paramétrico das $N = 4$ SuperKdV inequivalentes. Tudo isto baseado na "ASC $N = 4$ minimal". Finalmente, apresentamos o primeiro exemplo de uma extensão supersimétrica N=8 da equação KdV. Este último é de grande utilidade no Capítulo 4.

2.1 A Álgebra Divisional e a Álgebra Superconforme $N = 8$ Não-Associativa

Nesta seção reescrevemos as propriedades básicas da álgebra divisional dos octônions, que serão usadas na construção da Álgebra Superconforme (ASC) $N = 8$ (veja [13],[36]).

Lembramos, que um octônion genérico X é expresso como $X = x_a \tau_a$ $(a = 0, 1, \ldots, 7)$, $\tau_0 = 1$ sendo a identidade e os τ_α, para $\alpha = 1, 2, \ldots, 7$ sendo os octônions imaginários.

A multiplicação octoniônica (introduzida no Capítulo 1) é

$$\tau_\alpha \cdot \tau_\beta = -\delta_{\alpha\beta}\tau_0 + C_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma \tag{2.1.1}$$

$C_{\alpha\beta\gamma}$ é um tensor constante totalmente anti-simétrico, que foi definido na equação (1.1.5).

A álgebra dos octônions admite também 7 involuções

$$\tau_0 \mapsto \tau_0, \quad \tau_p \mapsto \tau_p, \quad \tau_q \mapsto -\tau_q,$$

onde "p" é uma das 7 entradas (1.1.5)e "q" assume os 4 valores complementáres.

A estensão $N = 8$ da álgebra de Virasoro (ASC $N = 8$ não-associativa) envolve 8 campos bosônicos e 8 campos fermiônicos e é construída em termos das constantes de estrutura octoniônica.

Além do campo de Virasoro de spin-2 denotado como T, os oito campos fermiônicos de spin-$\frac{3}{2}$ Q, Q_α e 7 correntes bosônicas de spin-1 J_α. A ASC $N = 8$ não-associativa é dada explicitamente pelos seguintes colchetes de Poisson

$$\begin{aligned}
\{T(x), T(y)\} &= -\frac{1}{2}\partial_y{}^3\delta(x-y) + 2T(y)\partial_y\delta(x-y) + T'(y)\delta(x-y), \\
\{T(x), Q(y)\} &= \frac{3}{2}Q(y)\partial_y\delta(x-y) + Q'(y)\delta(x-y), \\
\{T(x), Q_\alpha(y)\} &= \frac{3}{2}Q_\alpha(y)\partial_y\delta(x-y) + Q_\alpha{}'(y)\delta(x-y), \\
\{T(x), J_\alpha(y)\} &= J_\alpha(y)\partial_y\delta(x-y) + J_\alpha{}'(y)\delta(x-y), \\
\{Q(x), Q(y)\} &= -\frac{1}{2}\partial_y{}^2\delta(x-y) + \frac{1}{2}T(y)\delta(x-y), \\
\{Q(x), Q_\alpha(y)\} &= -J_\alpha(y)\partial_y\delta(x-y) - \frac{1}{2}J_\alpha{}'(y)\delta(x-y), \\
\{Q(x), J_\alpha(y)\} &= -\frac{1}{2}Q_\alpha(y)\delta(x-y), \\
\{Q_\alpha(x), Q_\beta(y)\} &= -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\partial_y{}^2\delta(x-y) + C_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma(y)\partial_y\delta(x-y) + \\
&\quad + \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}T(y) + C_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma{}'(y))\delta(x-y), \\
\{Q_\alpha(x), J_\beta(y)\} &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta}Q(y) - C_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma(y))\delta(x-y), \\
\{J_\alpha(x), J_\beta(y)\} &= \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\partial_y\delta(x-y) - C_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma(y)\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

É importante ressaltar a presença do termo central (δ'''), que é essencial para obter as equações supersimétricas KdV. Devido à não-associatividade dos octônions, a constante de estrutura em (2.1.2) não satisfaz a identidade de Jacobi. Para uma discussão mais detalhada veja [36].

2.2 Revisão da $N = 2$ e $N = 4$ SuperKdV

Uma pergunta natural que pode ser feita é se a ASC (2.1.2) (e suas subálgebras) podem ser aceitas como estruturas dos colchetes de Poisson para o hamiltoniano supersimétrico estendido da equação de KdV.

Restringindo os índices Gregos a tomar os valores 1 ou $1, 2, 3$, recuperamos da equação (2.1.2) as álgebras superconformes $N = 2$ e $N = 4$ respectivamente (no caso $N = 4$ a correspondente álgebra é conhecida como a "ASC $N = 4$ minimal"). Podem ser considerados como os colchetes de Poisson para $N = 2$ e $N = 4$ KdV's.

Estas equações não-lineares podem ser construídas procurando o hamiltoniano mais geral com a dimensão certa (isto é aquele hamiltoniano de dimensão 4) que seja invariante sob as cargas globais supersimétricas dadas por $\int dxQ(x)$ e $\int dxQ_\alpha(x)$. Esta aproximação foi usada para construir a $N = 2$ KdV em [25], enquanto a $N = 4$ foi obtido em termos do formalismo do superespaço harmônico.

Aqui nós estendemos a análise de [25] para o caso $N = 4$ KdV. Em particular, podemos determinar totalmente o espaço dos modulos das $N = 4$ KdV's inequivalentes. Entre eles o ponto especial de integrabilidade de Delduc-Ivanov [26]. Nossos resultados completos aparecem em [36].

Para conseguir esses resultados usamos a computação algébrica (no Mathematica e com o pacote de Thielemans para a computação dos OPEs clássicos). O hamiltoniano supersimétrico mais geral para o $N = 4$ KdV depende de 5 parâmetros. De qualquer modo, se supõe também que o hamiltoniano é invariante sob involução do ASN $N = 4$ minimal, o que faz com que 3 dos parâmetros sejam agora nulos.

É bom lembrar que as involuções da ASC $N = 4$ minimal, são induzidas pelas involuções da álgebra quaterniônica.

Assim, obtemos o hamiltoniano mais geral (invariante sobre supersimetria $N = 4$ e as álgebras de involuções),

$$\begin{aligned} H &= \int dx[-2T^2 - 2Q'Q - 2Q'_\alpha Q_\alpha + 2J''_\alpha J_\alpha + \\ & x_\alpha T J_\alpha{}^2 + 2x_\alpha Q Q_\alpha J_\alpha - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma Q_\alpha Q_\beta J_\gamma + \\ & \frac{1}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(x_\beta - x_\alpha) J_\alpha J_\beta J_\gamma{}'], \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

onde $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$.

A supersimetria global $N = 4$ requer que os três parâmetros x_α satisfaçam a seguinte condição

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

o que mostra que só dois deles são independentes. Considerando dois deles podemos traçar o plano real $x - y$ e mostrar que o espaço dos modulos do domínio fundamental das equações inequivalentes $N = 4$ KdV pode ser escolhido como sendo a região do plano compreendida entre o eixo real $y = 0$ e a linha $y = x$ (incluíndo as fronteiras). Há 5 outras regiões no plano (todas as regiões são relacionadas pelo grupo de transformações S_3) que poderia ser igualmente bem escolhidas como domínio fundamental.

Na região de nossa escolha a linha $y = x$ corresponde a uma invariância global extra $U(1)$. Já a origem , $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, é o ponto de máxima simetria (isto corresponde a uma invariância global $SU(2)$ associada aos geradores $\int dx J_\alpha$).

A involução associada a cada quatérnion imaginário permite reduzir consistentemente a equação $N = 4$ KdV, fazendo simultaneamente iguais a zero todos os campos associados com os τ que mudam de sinal, isto é os campos $J_2 = J_3 = Q_2 = Q_3 = 0$ para a primeira involução (e similarmente para os outros pares de valores 1,3 e 1,2). Depois desta redução recuperamos a equação $N = 2$ KdV, que depende do parâmetro livre x_1 (ou x_2, x_3 respectivamente).

É sabido que a integrabilidade para $N = 2$ KdV é assegurada para três valores específicos $a = -2, 1, 4$ do parâmetro livre a. Isto foi descoberto por Mathieu [25]. Nós estamos, portanto, em posição de determinar para quais pontos do domínio fundamental a $N = 4$ KdV é mapeada depois da redução, sendo a um dos três $N = 2$ KdV integrável de Mathieu. No domínio fundamental são produzidos apenas dois desses pontos. Ambos ficam na linha $y = x$. Um deles produz as $N = 2$ KdV inequivalentes depois da redução da $N = 4$ KdV. Assim, obtemos $a = -2$ e $a = 4$ das hierarquias $N = 2$ KdV e, neste caso, $N = 4$ KdV é também integrável. O segundo ponto, que produz $a = 1$ e $a = -2$ das equações $N = 2$ KdV, ainda que seja integrável neste nível, não é mais no nível $N = 4$ KdV. Isto foi explicitamente provado por nós em [36]. O tratamento em [36] é mais completo do que foi feito em [26] já que está baseado numa exaustiva análise em campos-componentes, em vez de usar o formalismo de supercampo estendido.

As equações de movimento mais gerais da $N = 4$ KdV são obtidas do hamiltoniano (2.2.3) junto com os colchetes de Poisson (2.1.2).

2.3 A $N = 8$ KdV

Uma análise similar pode ser estendida ao caso $N = 8$ baseado na ASN $N = 8$ não-associativo completa, depois de construir o hamiltoniano mais geral com a dimensão certa (dimensão 4). Alguns vínculos tem que ser impostos, e serão descritas em seguida.

O primeiro conjunto de vínculos é a invariância sob as 7 involuções da álgebra. As sete involuções são definidas assim. Os campos T, Q não mudam assim como também os 6 campos Q_α, J_α para α's tomando valores numa das sete entradas da relação (1.1.5). Os 8 campos restantes Q_β, J_β com β rotulando os quatro valores complementáres, terão então o sinal trocado ($Q_3 \rightarrow -Q_3$, $J_3 \rightarrow -J_3$). Depois de ter construído o Hamiltoniano mais geral, invariante sob o conjunto das sete involuções, começamos impondo a invariância sob as transformações de supersimetria global $N = 8$, que é dada por

$$\{\int dx \cdot Q_a(x), H\} = 0,$$

para $a = 0, 1, 2 \ldots, 7$ (aqui $Q_0 = Q$), enquanto $\{\star, \star\}$ denota os colchetes de Poisson generalizados dado pela ASC $N = 8$ não-associativa (2.1.2).

O resultado final destes vínculos é o seguinte: existe um único hamiltoniano que é invariante sob o conjunto de supersimetrias globais $N = 8$. Este não admite parâmetro livre (além do fator de normalização trivial) e é quadrático nos campos. É dado explicitamente por

$$H = \int dx[-2T^2 - 2Q'Q - 2Q'_\alpha Q_\alpha + 2J''_\alpha J_\alpha],$$

O hamiltoniano obtido corresponde à origem das coordenadas (veja a seção anterior) que também é, como o caso $N = 4$, o ponto de máxima simetria. Isto significa que o hamiltoniano é invariante sob o conjunto total das sete cargas globais $\int dx \cdot J_\alpha(x)$, obtidas por integração das correntes J_α's.

Devido à sua aparente simplicidade e ao fato de que é quadrático nos campos, o hamiltoniano (2.3.4) gera uma estensão supersimétrica $N = 8$ da KdV que não é integrável. Ou seja, mesmo sua redução para $N = 4$ KdV não corresponde a um ponto de integrabilidade do $N = 4$ KdV. Dito de outra forma, não se reduz aos 3 valores de integrabilidade de Mathieu.

Não obstante é um fato altamente não trivial a existência de una extensão $N = 8$ da equação KdV que seja única. As equações de movimento são obtidas através

$$\dot{\Phi}_i = \{\Phi_i, H\},$$

onde Φ_i denota coletivamente os campos em (2.1.2).

Explicitamente:

$$
\begin{aligned}
\dot{T} &= -T''' - 12T'T - 6Q''_a Q_a + 4J''_\alpha J_\alpha, \\
\dot{Q} &= -Q''' - 6T'Q - 6TQ' - 4Q''_\alpha J_\alpha + 2Q_\alpha J''_\alpha - \\
& \quad 2Q'_\alpha J'_\alpha, \\
\dot{Q}_\alpha &= -Q_\alpha''' - 2QJ''_\alpha - 6TQ'_\alpha - 6T'Q_\alpha + 2Q'J'_\alpha + \\
& \quad 4Q''J_\alpha - 2C_{\alpha\beta\gamma}(Q_\beta J''_\gamma - Q'_\beta J'_\gamma - 2Q''_\beta J_\gamma), \\
\dot{J}_\alpha &= -J_\alpha''' - 4T'J_\alpha - 4TJ'_\alpha + 2QQ'_\alpha + 2Q'Q_\alpha - \\
& \quad C_{\alpha\beta\gamma}(4J_\beta J''_\gamma + 2Q_\beta Q'_\gamma).
\end{aligned}
$$

É importante ressaltar nosso último resultado: o fato de construir o primeiro exemplo de uma KdV $N = 8$ usando uma álgebra superconforme $N = 8$ não-associativa. Pelo que foi discutido acima, não é possível construir uma $N = 8$ KdV fundamentado no $N = 8$ associativo já que é impedido pelo teorema no-go. Este resultado, a construção de uma $N = 8$ KdV baseado na ASC $N = 8$ não-associativa, é um bom exemplo da inequivalência entre realizações associativas e não-associativas para $N = 8$. No Capítulo 4 apresentaremos estes resultados como exemplo de um sistema dinâmico que só admite invariância sob a realização octoniónica da supersimetria estendida $1D$, depois de "congelar"a dependência temporal.

2.4 Conclusões Preliminares

Neste Capítulo apresentamos alguns resultados novos a respeito de uma conexão explícita das álgebras divisionais e das supersimetrizações estendidas da equação KdV. Nesse sentido revisamos a $N = 4$ SuperKdV baseado numa ASC "minimal"$N = 4$ e construímos o domínio fundamental para suas supersimetrizações inequivalentes. Foi também investigada a possibilidade de uma $N = 8$ SuperKdV baseada numa $N = 8$ ASC não-associativa.

O resultado é um único hamiltoniano que é invariante sob o conjunto de supersimetrias globais $N = 8$, não admitindo parâmetro livre, sendo assim o ponto de máxima simetria.

Capítulo 3

A Classificação de Sistemas de Mecânica Quântica Supersimétrica N-Estendida

Neste Capítulo estudaremos a classificação das representações irredutíveis da supersimetria $1D$ N-estendida, que encontram aplicações na construção de sistemas de Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS). Recentemente tem despertado novo interesse a Mecânica Quântica Supersimétrica e Superconforme devido a diferentes motivações físicas [17]. Estes modelos supersimétricos descrevem com sucesso, por exemplo, a dinâmica efetiva em baixa energia de certa classe de buracos negros. Outros cenários que envolvem (MQS) são a quantização do cone de luz de teorias supersimétricas, como também na aplicação para testar a correspondência AdS/CFT no caso do AdS_2. Tendo isto em mente, vemos que a pesquisa de tais modelos da MQS N-estendida é muito importante. Porém, não se tem prestado muita atenção a tais modelos e somente resultados parciais são conhecidos [18], [21]. A razão é clara: $N = 4$ é a maior supersimetria estendida para o qual o formalismo do supercampo é conhecido. Pesquisar o caso $N > 4$ requer o uso de campos componentes e a computação vem a ser extremamente complexa.

Neste Capítulo, estudaremos os modelos da MQS N-estendida de um ponto de vista diferente. É possível classificar os multipletos irredutíveis das representações da supersimetria N-estendida. Inicialmente, provaremos que tais multipletos são associados aos multipletos curtos fundamentais nos quais todos os bósons e todos os férmions são acomodados em apenas dois estados de spin. A seguir, forneceremos também a classificação completa dos multipletos curtos e mostraremos que todos os multipletos irredutíveis desta espécie estão em correspondência um-a-um com a classificação das matrizes-Γ de Clifford do tipo-Weyl a valores reais.

3.1 Mecânica Quântica Supersimétrica N-Estendida

É bem conhecido que a MQS é um exemplo simples de uma teoria que inclui simultaneamente variáveis comutantes e anticomutantes. O grupo de simetria que realiza isto é a supersimetria 1-dimensional. Em geral esta supersimetria é gerada por N supercargas Q_i, $i = 1, 2, ..., N$ e o Hamiltoniano,

$$H = -i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.1.1}$$

com a seguinte álgebra

$$\{Q_i, Q_j\} = \omega_{ij} H, \tag{3.1.2}$$

onde o tensor constante ω_{ij} tem "p"valores próprios positivos e "q"valores próprios negativos.

Usualmente, todos os valores próprios são positivos e a álgebra (3.1.2) é chamada de supersimetria 1-dimensional N-estendida. De qualquer modo existem razões para deixar o tensor ω_{ij} indefinido [27]. Sem perda de generalidade, a álgebra de supercargas Q_i pode ser convenientemente diagonalizada e normalizada de modo que o tensor ω_{ij} seja expresso como

$$\omega_{ij} = \eta_{ij}, \tag{3.1.3}$$

onde η_{ij} é a métrica pseudo-euclideana com assinatura (p, q).

A representação da álgebra (3.1.2) é formada por variáveis comutantes (bosônicas) e anti-comutantes (fermiônicas). Algumas delas são variáveis físicas verdadeiras e as outras desempenham um papel auxiliar. Usualmente todas as variáveis são consideradas componentes do supercampo irredutível.

O modo mais simples de construir um lagrangeano clássico para MQS em D dimensões é considerar os supercampos $(A = 1, 2. ..., D)$

$$\begin{aligned} \Phi_A(\tau, \eta^\alpha) &= \Phi_A^0(\tau) + \eta^\alpha \Phi_{A\alpha}^1(\tau) + \eta^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2}\Phi_{A\alpha_1\alpha_2}^2(\tau) + ... + \\ &+ \eta^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2}...\eta^{\alpha_N}\Phi_{A\alpha_1\alpha_2...\alpha_N}^N(\tau), \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

no superespaço (τ, η^α) com uma coordenada bosônica τ e N coordenadas grasmannianas η^α. Tais supercampos, para N geral, são altamente redutíveis e somente para valores baixos de N foram examinados em detalhe. As primeiras componentes do supercampo são usualmente coordenadas bosônicas $\Phi_A^0(\tau)$ e a que segue $\Phi_{A_\alpha}^1(\tau)$ são coordenadas grasmannianas.

Todas as outras componentes dos supercampos são auxiliares. Assim, o lagrangiano clássico da MQS descreve a evolução dos graus de liberdade bosônico e do grasmanniano adicional, que depois da quantização se transformam em geradores da álgebra de Clifford. Este fato naturalmente permite a realização matricial do hamiltoniano e as supercargas da MQS [19], [28], [29].

A dimensionalidade de tal realização vai depender do número total de variáveis grasmannianas. No caso do supercampo escalar (3.1.4) a dimensionalidade é $2^{[\frac{DN}{2}]}$.

Assim, vai aumentar rapidamente para supersimetrias estendidas. A saída desta dificuldade é usar representações mais complicadas para as supersimetrias estendidas [30]-[35]. A mais simples destas é dada pelo supercampo quiral, que tem um campo bosônico complexo e $\frac{N}{2}$ campos grasmannianos complexos. O lagrangiano para tal supercampo naturalmente descreve a MQS 2-dimensional. A relação dos números (férmion/boson) neste caso é $(\frac{N}{2})$ em lugar de N para o supercampo escalar. Para representações mais complicadas, esta relação cresce mais lentamente [31]-[35].

Este fato tem uma influência essencial na dimensionalidade da realização matricial da hamiltoniana e das supercargas (elas são menores para o mesmo número de coordenadas bosônicas $\Phi^0_A(\tau)$). A característica que distingue tais representações é o fato de que todas as componentes mais baixas $\Phi^0_A(\tau)$ $(A = 1, 2, ..., D)$ do supercampo (3.1.4), juntas, formam uma representação irredutível de algum subgrupo do grupo de automorfismos da álgebra (3.1.2). As correspondentes ações são também invariantes sob transformação deste subgrupo que faz o papel de rotações do espaço (o espaço-tempo). Em particular, a inclusão da coordenada temporal $t(\tau)$ juntamente com as espaciais $x^a(\tau)$ numa representação irredutível $\Phi^0_A(\tau)$ de tal subgrupo significa que o subgrupo, assim como o grupo de automorfismos da álgebra (3.1.2), é pseudo-Euclideano. Em conseqüência o tensor métrico η_{ij} (3.1.3) é pseudo-Euclideano também.

3.2 Relações de Equivalência

Nesta seção vamos analisar a estrutura dos supermultipletos da supersimetria N-estendida no espaço 1-dimensional. Mostra-se, neste sentido, que todas as representações irredutíveis são equivalentes a representações com uma estrutura definida dos multipletos.

Seja N o número de supersimetrias estendidas e $2d$ (d bósons e d férmions) a dimensionalidade do correspondente multipleto (pode ser redutível) da representação da supersimetria N-estendida. Em geral, tal multipleto pode ser representado na forma de uma cadeia.

$$\Phi^0_{a_0}, \quad \Phi^1_{a_1}, \quad ..., \quad \Phi^{M-1}_{a_{M-1}}, \quad \Phi^M_{a_M}, \tag{3.2.5}$$

As componentes $\Phi^I_{a_I}$ $(a_I = 1, 2, ..., d_I)$ são reais. Todas as componentes com I par tem a mesma paridade grasmanniana que a componente $\Phi^0_{a_0}$, enquanto que as componentes com valores de I ímpares tem paridade oposta. Tais estruturas dos multipletos estão intimamente relacionados com a representação dos supercampos; o índice superior numera os elementos da cadeia, que corresponde ao lugar na expansão do supercampo (3.1.4). Temos também

$$dim(\tau) = 1 \quad , \quad dim(\eta) = \tfrac{1}{2}. \tag{3.2.6}$$

O número $M+1$ é o comprimento do supermultipleto. M está submetido ao vínculo $M \leq N$ visto que, por exemplo, no caso da representação irredutível, nem todas as componentes do supercampo (3.1.4) são independentes - algumas das componentes de ordem superior são expressas em termos das derivadas temporais de componentes de ordem mais baixa.

Para o multipleto (3.2.5) usamos uma notação mais compacta $\{\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_M}\}$. Como exemplo, no caso $N = 2$ podemos considerar a representação irredutível $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}\}$ (supercampo real)

$$\Phi = \Phi(\tau, \eta_1, \eta_2) = \Phi^0(\tau) + i\eta^\alpha \Phi^1_\alpha(\tau) + i\eta^1\eta^2\Phi^2(\tau), \tag{3.2.7}$$

e $\{\mathbf{2}, \mathbf{2}\}$ supercampo quiral

$$\widetilde{\Phi}(\tau, \eta, \overline{\eta}) = \widetilde{\Phi}^0(\tau) + \eta\widetilde{\Phi}^1(\tau) + \frac{i}{2}\overline{\eta}\eta\dot{\widetilde{\Phi}}^0(\tau), \tag{3.2.8}$$

onde $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, $\overline{\eta} = \eta_1 + i\eta_2$ são coordenadas grasmannianas complexas.

A última componente da expressão (3.2.8) é proporcional à derivada temporal da primeira componente. Tanto $\widetilde{\Phi}^0(\tau)$ e $\widetilde{\Phi}^1(\tau)$ são complexas. Obviamente, em ambos as equações (3.2.7) e (3.2.8), $\sum_I d_I = 2$ separadamente para as componentes bosônicas e fermiônicas reais.

Devido a argumentos de dimensionalidade, a lei de transformação de supersimetria para as componentes $\Phi^I_{a_I}$ tem a seguinte forma (ε^i parâmetro infinitesimal grasmanniano)

$$\delta_\varepsilon \Phi^I_{a_I} = \varepsilon^i (C^I_i)_{a_I}{}^{a_{I+1}} \Phi^{I+1}_{a_{I+1}} + \varepsilon^i (\widetilde{C}^I_i)_{a_I}{}^{a_{I-1}} \frac{d}{d\tau} \Phi^{I-1}_{a_{I-1}}. \tag{3.2.9}$$

Para $I = 0$, obtemos

$$\delta_\varepsilon \Phi^0_{a_0} = \varepsilon^i (C^0_i)_{a_0}{}^{a_1} \Phi^1_{a_1}, \tag{3.2.10}$$

Para $I = M$, obtemos

$$\delta_\varepsilon \Phi^M_{a_M} = \varepsilon^i (\widetilde{C}^M_i)_{a_M}{}^{a_{M-1}} \frac{d}{d\tau} \Phi^{M-1}_{a_{M-1}}. \tag{3.2.11}$$

A última componente do multipleto se transforma por uma derivada total. Isto é uma propriedade muito importante, devido ao fato de que a integral desta componente é invariante sob a transformação da supersimetria e pode ser usada para construir ações invariantes.

Uma outra conseqüência importante da lei de transformação da última componente está presente só em uma dimensão. Apenas neste caso pode-se redefinir esta componente

$$\Phi^M_{a_M} = \frac{d}{d\tau} \Psi^{M-2}_{a_M}, \tag{3.2.12}$$

em termos de alguma função $\Psi^{M-2}_{a_M}$. Esta correspondência é exata a menos de uma constante $C^M_{a_M}$, que descreve a representação trivial da álgebra da supersimetria. A dimensionalidade das novas componentes $\Psi^{M-2}_{a_M}$ coincide com a das componentes $\Phi^{M-2}_{a_{M-2}}$. Além disso, sua lei de transformação é do mesmo tipo. Usando as equações (3.2.11) e

(3.2.12) obtemos

$$\delta_\varepsilon \Psi^{M-2}_{a_M} = \varepsilon^i (\widetilde{C}^M_i)_{a_M}{}^{a_{M-1}} \Phi^{M-1}_{a_{M-1}}, \tag{3.2.13}$$

Assim, nós mostramos que até representações triviais da álgebra da supersimetria do supermultipleto $\{\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_{M-2}}, \mathbf{d_{M-1}}, \mathbf{d_M}\}$ são equivalentes ao supermultipleto $\{\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_{M-2}} + \mathbf{d_M}, \mathbf{d_{M-1}}, \mathbf{0}\}$. Isto significa que o supermultipleto inicial de comprimento $M+1$ é equivalente ao multipleto mais curto de comprimento M.

É evidente que o número total de componentes bosônicas e fermiônicas são iguais. Este procedimento pode-se repetir $M-1$ vezes de modo que no final temos um multipleto de dimensão 2: $\{\mathbf{d}, \mathbf{d}\}$

Assim

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_{M-3}}, \mathbf{d_{M-2}}, \mathbf{d_{M-1}}, \mathbf{d_M}\} \\ &= \{\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_{M-3}}, \mathbf{d_{M-2}} + \mathbf{d_M}, \mathbf{d_{M-1}}, \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, ..., \mathbf{d_{M-3}} + \mathbf{d_{M-1}}, \mathbf{d_{M-2}} + \mathbf{d_M}, 0, 0\} \\ &\vdots \\ &= \{\mathbf{d}, \mathbf{d}\} \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Voltando ao exemplo $N=2$ apresentado acima, mostraremos explicitamente a equivalença das cadeias $\{\mathbf{2}, \mathbf{2}\}$ e $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}\}$. Seja $\tau_L = \tau + (\frac{i}{2})\overline{\eta}\eta$, $\tau_R = \tau - (\frac{i}{2})\overline{\eta}\eta$

Definimos; supercampo quiral como

$$\widetilde{\Phi}(\tau_L, \eta) = \widetilde{\Phi}^0(\tau_L) + \eta\widetilde{\Phi}^1(\tau_L) = \widetilde{\Phi}^0(\tau) + \eta\widetilde{\Phi}^1(\tau) + \tfrac{i}{2}\overline{\eta}\eta\dot{\widetilde{\Phi}}^0(\tau) \tag{3.2.15}$$

e o supercampo antiquiral, ou conjugado,

$$\overline{\widetilde{\Phi}}(\tau_R, \eta) = \overline{\widetilde{\Phi}}^0(\tau_R) - \overline{\eta}\overline{\widetilde{\Phi}}^1(\tau_R) = \overline{\widetilde{\Phi}}^0(\tau) - \overline{\eta}\overline{\widetilde{\Phi}}^1(\tau) - \tfrac{i}{2}\overline{\eta}\eta\dot{\overline{\widetilde{\Phi}}}^0(\tau) \tag{3.2.16}$$

onde:

$$\widetilde{\Phi}^0 = \tfrac{1}{2}(\Phi^0 + i\Psi^0) \quad , \quad \overline{\widetilde{\Phi}}^0 = \tfrac{1}{2}(\Phi^0 - i\Psi^0)$$

$$\widetilde{\Phi}^1 = \frac{1}{2}(\Phi_2^1 + i\Phi_1^1) \quad , \quad \overline{\widetilde{\Phi}}^1 = \frac{1}{2}(\Phi_2^1 - i\Phi_1^1)$$

Obtemos o supercampo real

$$\Phi(\tau, \eta^\alpha) = \widetilde{\Phi}(\tau_L, \eta) + \overline{\widetilde{\Phi}}(\tau_R, \eta)$$

Em componentes

$$\Phi(\tau, \eta^\alpha) = \Phi^0 + i(\eta^\alpha \Phi_\alpha^1) + \eta^1\eta^2(-\dot{\Psi}^0) \tag{3.2.17}$$

ou

$$\Phi(\tau, \eta^\alpha) = Re\widetilde{\Phi}^0 + \eta\widetilde{\Phi}^1 - \overline{\eta}\overline{\widetilde{\Phi}}^1 - \frac{1}{2}\overline{\eta}\eta Im\widetilde{\Phi}^0$$

A equação (3.2.17) é idêntica à equação (3.2.7) depois de fazer $\Phi^2(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\Psi^0$ que satisfaz à redefinição (3.2.12). Este é um exemplo explícito da equivalência entre os supermultipletos $\{2, \mathbf{2}\}$ e $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}\}$. Exemplos mais complicados são fornecidos pela representação dos multipletos $N = 4$, $\{\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3}\}$, $\{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2}\}$ e $\{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{1}\}$ que foram usados em [31],[32],[20] para MQS 1-d, [35] para MQS 2-d e [33],[34] para MQS 3-d respectivamente. As correspondentes componentes dessas representações são interconectadas pela transformação (3.2.12).

Em princípio, pode-se considerar o procedimento inverso, o alongamento do multipleto, que começa em $\{\mathbf{d}, \mathbf{d}\}$. Só o primeiro passo é trivial. A transição do multipleto $\{\mathbf{d}, \mathbf{d}\}$ ao multipleto $\{\mathbf{d} - \mathbf{d_1}, \mathbf{d}, \mathbf{d_1}\}$ pode ser feita com ajuda da transformação inversa da equação (3.2.12) aplicada em algum número arbitrário $d_1 \leq d$ da primeira componente do multipleto inicial.

A possibilidade de alongamentos adicionais deve ser analisada separadamente em cada caso particular.

Deve-se observar que o caso $d_1 = d$ é permitido. Mostramos a seguir a correspondente transformação que une dois multipletos de comprimento 2. No primeiro caso, os bósons tem o spin mais elevado e no outro caso são férmions os que tem o spin mais elevado.

Explicitamente temos para $\{\mathbf{d},\mathbf{d}\}$, usando as equações (3.2.9) , (3.2.10) e (3.2.11) e fazendo: $\Phi^0_{a_0} = \Phi_a$; $\Phi^1_{a_1} = \Psi_b$

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \Phi_a &= \varepsilon^i (C_i)_a{}^b \Psi_b \\ \delta_\varepsilon \Psi_b &= \varepsilon^i (\widetilde{C}_i)_b{}^a \frac{d}{d\tau} \Phi_a, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Logo, no caso $\{\mathbf{0},\mathbf{d},\mathbf{d_1}=\mathbf{d}\}$, usando também as equações (3.2.9),(3.2.10) e (3.2.11) e fazendo: $\Phi^1_{a_1} = \frac{d}{d\tau}\Psi_a$, $\Phi^2_{a_2} = \Phi_b$

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon (\frac{d}{d\tau}\Psi_a) &= \varepsilon^i (C_i)_a{}^b \Phi_b \\ \delta_\varepsilon \Phi_b &= \varepsilon^i (\widetilde{C}_i)_b{}^a \frac{d}{d\tau} (\frac{d}{d\tau}\Psi_a), \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

ou $(\Sigma_a = \frac{d}{d\tau}\Psi_a)$

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \Sigma_a &= \varepsilon^i (C_i)_a{}^b \Phi_b \\ \delta_\varepsilon \Phi_b &= \varepsilon^i (\widetilde{C}_i)_b{}^a \frac{d}{d\tau} \Sigma_a, \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Para verificar que (3.2.18) e (3.2.19) estão relacionadas, vamos fazer a transformação: $\{\mathbf{0},\mathbf{d},\mathbf{d_1}=\mathbf{d}\} \longrightarrow \{\mathbf{d},\mathbf{d}\}$, usando (3.2.20); fazendo $\Phi_b = \frac{d}{d\tau}\Upsilon_b$

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \Sigma_a &= \varepsilon^i (C_i)_a{}^b \frac{d}{d\tau} \Upsilon_b \\ \delta_\varepsilon \Upsilon_b &= \varepsilon^i (\widetilde{C}_i)_b{}^a \Sigma_a. \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Estas são as componentes do multipleto $\{\mathbf{d},\mathbf{d}\}$ e tem a mesma forma que a (3.2.18).

Assim, podemos concluir que, pelas considerações prévias, a classificação de todos os supermultipletos de comprimento 2 fornece a classificação de todos os supermultipletos de comprimento 3.

3.3 Supersimetria Estendida e as Álgebras de Clifford Reais

O resultado principal da seção anterior é que o problema de classificar todos os sistemas da mecânica quântica supersimétrica N-estendida se reduz ao problema de classificar as representações irredutíveis (3.2.5) de comprimento 2. Simplificando a notação $a, \alpha = 1, ..., d$ é o número de elementos bosônicos (e fermiônicos respectivamente) no multipleto supersimétrico.

Todos eles dependem da coordenada temporal τ ($X_a \equiv X_a(\tau)$, $\theta_\alpha \equiv \theta_\alpha(\tau)$). Sem perda de generalidade consideramos os elementos bosônicos como os primeiros da cadeia $\{\mathbf{d}, \mathbf{d}\}$, que pode ser representada como um vetor coluna.

$$\Psi = \begin{pmatrix} X_a \\ \theta_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.3.22}$$

Então (3.2.9) se reduz ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon X_a &= \varepsilon^i (C_i)_a{}^\alpha \theta_\alpha \equiv i(\varepsilon^i Q_i \Psi)_a, \\ \delta_\varepsilon \theta_\alpha &= \varepsilon^i (\widetilde{C}_i)_\alpha{}^b \frac{d}{d\tau} X_b \equiv i(\varepsilon^i Q_i \Psi)_\alpha, \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

onde, usando (3.1.2) obtemos

$$C_i \widetilde{C}_j + C_j \widetilde{C}_i = i\eta_{ij}, \tag{3.3.24}$$

e

$$\widetilde{C}_i C_j + \widetilde{C}_j C_i = i\eta_{ij}. \tag{3.3.25}$$

Já que $\varepsilon_i, X_a, \theta_\alpha$ são reais, então as matrizes $C_i, \widetilde{C}_i$ são imaginário e real respectivamente.

Normalizando

$$C_i = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_i$$
$$\widetilde{C}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{\sigma}_i, \tag{3.3.26}$$

e ordenando numa matriz

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \widetilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.27}$$

Eles formam um conjunto de matrizes-Γ de Clifford, de valor real do tipo Weyl (blocos fora da diagonal) que obedecem as relações de anticomutação pseudo-Euclideanas

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\eta_{ij}. \tag{3.3.28}$$

Inversamente, dado um conjunto de matrizes-Γ de Clifford de valores reais do tipo Weyl, pode-se inverter o procedimento e construir as supercargas Q_i

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \widetilde{\sigma}_i H & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.29}$$

com base da equação (3.3.22).

Além das matrizes-Γ^i de (3.3.27), no espaço de vetores (3.3.22) existe uma matriz Γ^{N+1}, que anticomuta com as supercargas e os correspondentes números fermiônicos

$$\Gamma_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.30}$$

Em conjunto as matrizes (3.3.27) e (3.3.30) formam a representação de valores reais Γ_I da álgebra (pseudo)-Euclideana com assinatura $(p+1, q)$.

No lugar da equação(3.3.26) pode-se tomar

$$C_i = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_i$$
$$\widetilde{C}_i = -\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{\sigma}_i, \tag{3.3.31}$$

e ordenando σ_i, $\widetilde{\sigma}_i$ dentro das matrizes (3.3.27), vemos que agora elas obedecem relações de anticomutação (pseudo)-Euclideanas

$$\{\widetilde{\Gamma}_i, \widetilde{\Gamma}_j\} = -2\eta_{ij}, \qquad (3.3.32)$$

com um sinal oposto no lado direito. Junto com a matriz número fermiônico (3.3.30) a nova matriz $\widetilde{\Gamma}_i$ forma a representação a valores reais da álgebra de Clifford (pseudo)-Euclideana com assinatura $(q+1, p)$. Este fato significa que a representação de $C_{p+1,q}$ e $C_{q+1,p}$ podem ser conectadas uma a outra. De fato, esta conexão é estabelecida pela correspondência

$$\widetilde{\Gamma}_i = \Gamma_{N+1}\Gamma_i, \qquad (3.3.33)$$

Assim, a representação da álgebra da supersimetria (p, q)-estendida (3.1.2) está em correspondência um-a-um com a representação da álgebra de Clifford de valores reais $C_{p-1,q} \sim C_{q+1,p}$.

Em geral as álgebras de Clifford reais foram classificadas em [24] (para o caso compacto q=0) e em [25] (no caso não compacto).

A construção das representações do tipo $\{\mathbf{d}, \mathbf{d}\}$ (ao longo das equações (3.3.23)-(3.3.30)) no caso de assinaturas do tipo (p, q)=$(N, 0)$ foi efetuada em [22] (veja também [24]) onde a dimensionalidade assim como a realização das matrizes-Γ (3.3.27), foi descrita. No Apêndice A mostramos um exemplo explícito das representações para as supercargas no caso $(p, q) = (4, 0)$.

No caso da métrica pseudo-Euclideano com assinatura (p, q) tal construção usa extensivamente as considerações das referências [11]. Os resultados serão apresentados na seção seguinte.

3.4 Classificação das Representações Irredutíveis

De acordo com os resultados da seção anterior, a classificação das representações dos multipletos irredutíveis de uma supersimetria (p, q)-estendida está em correspondência um-a-um com a classificação das álgebras de Clifford $C_{p,q}$ reais com a propriedade adicional de que as matrizes-Γ podem ser realizadas na forma de Weyl.

No que se refere à representação matricial real das álgebras de Clifford reescrevemos os resultados do capítulo 1 [11].

Três casos podem-se distinguir para as representações reais. Estas estão especificadas pelo tipo de solução permitida (a mais geral) para uma matriz S real que comuta com todas as matrizes-Γ^i de Clifford.

Assim temos

i) Caso normal: neste caso S é múltiplo da identidade.

ii) Caso quase complexo: S é uma combinação linear da identidade e da matriz real J, onde $J^2 = -\mathbf{1}$.

iii) Caso quaterniônico: neste caso S é uma combinação linear das matrizes E_i, que satisfazem à álgebra quaterniônica.

A representação irredutível real do tipo normal existe ao satisfazer a condição $p - q = 0, 1, 2 \; mod 8$ (A dimensionalidade é dada por $2^{[\frac{N}{2}]}$, onde $N = p + q$).

No caso da representação tipo quase complexa a condição de existência é $p - q = 3, 7 \; mod 8$.

No caso quaterniônico a condição de existência é $p - q = 4, 5, 6 \; mod 8$. Nas duas últimas representações a dimensionalidade é: $2^{[\frac{N}{2}]+1}$.

Ademais, vamos exigir uma condição extra para a representação real: esta deve admitir uma realização antidiagonal por blocos para as matrizes-Γ de Clifford. Esta condição é satisfeita no caso normal para $p - q = 0\ mod8$ (que corresponde à exigência de uma estrutura de Majorana-Weyl standard). No caso quase-complexo é $p - q = 7\ mod8$ e, no caso quaterniônico, a condição é $p - q = 4, 6\ mod8$. Em todos estes casos a representação real é irredutível e única.

Os resultados anteriores podem ser resumidos do seguinte modo. Expressamos a dimensionalidade da representação irredutível da álgebra (3.1.2) (independente do comprimento $M + 1$ da cadeia (3.2.5)) em função da assinatura (p, q).

Seja $q = 8k + m$, $0 \leq m \leq 7$ e $p = 8l + m + n$, $1 \leq n \leq 8$ ($l = -1$, quando $k = 0$ e $p \leq q$). Então a dimensionalidade do espaço bosônico (fermiônico) é dada pela expressão

$$d = 2^{4k+4l+m} G(n), \tag{3.4.34}$$

onde a chamada função Radon-Hurwitz $G(n)$ é definida com ajuda da tabela que é encontrada em [24]

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$G(n)$	1	2	4	4	8	8	8	8

(3.4.35)

onde $G(n) = 2^r$, r sendo o inteiro mais próximo que é igual ou maior que o $\log_2 n$.

Uma segunda tabela útil mostra quais os tipos de assinatura (p, q) são possíveis de obter numa dimensionalidade dada dos espaços bosônico e fermiônico. Para fazer isto é conveniente introduzir a noção de supersimetria maximalmente estendida. A representação real $C_{p,q}$ ($p - q = 6\ mod8$) para o caso quaterniônico pode ser recuperado da representação quase-complexa $C_{p+1,q}$ $7\ mod8$, eliminando uma das matrizes-Γ. Deste mesmo, modo a última representação é recuperada da representação normal de Majorana-Weyl $C_{p+2,q}$ apagando outra matriz Γ. A seguinte tabela mostra estes resultados

$C_{p,q}$	$\subset$	$C_{p+1,q}$	$\subset$	$C_{p+2,q}$
$6\ mod8$		$7\ mod8$		$0\ mod8$
Quaternionica		*Quase − complexa*		*Normal*

(3.4.36)

As dimensionalidades das três representações dadas acima são as mesmas. A representação normal de Majorana-Weyl realiza as possíveis extensões máximas da supersimetria. compatíveis com a dimensionalidade da representação.

Tentando descobrir a extensão máxima da supersimetria podemos, portanto, limitar-nos a considerar a representação normal de Majorana-Weyl e uma quaterniônica que satisfaça a condição $p - q = 4 \; mod 8$.

Generalizando estes resultados, seja $p = 8l + m + 8 + 4\epsilon$ e $q = 8k + m$, onde a faixa dos valores k, l, m é a mesma a anterior, enquanto ϵ assume dois valores, distinguindo o caso Majorana-Weyl ($\epsilon = 0$) e o caso quaterniônico ($\epsilon = 1$). Um espaço de $d = 2^t$ estados bosônicos e $d = 2^t$ estados fermiônicos podem carregar o seguinte conjunto de supersimetrias maximalmente estendidas

$$(p = t - 4z + 5 - 3\epsilon \; , \; q = t + 4z + \epsilon - 3), \tag{3.4.37}$$

onde o inteiro $z = k - l$ deve assumir valores no intervalo

$$\frac{1}{4}(3 - t - \epsilon) \leq z \leq \frac{1}{4}(t + 5 - 3\epsilon), \tag{3.4.38}$$

para garantir que $p \geq 0$ e $q \geq 0$.

É cômodo também apresentar as respostas na seguinte tabela

d	(p, q)
2^{4l}	$(8l - 4k + 1, 4k + 1), (8l - 4k - 2, 4k + 2)$
2^{4l+1}	$(8l - 4k + 2, 4k + 2), (8l - 4k - 1, 4k + 3)$
2^{4l+2}	$(8l - 4k + 3, 4k + 3), (8l - 4k + 4, 4k)$
2^{4l+3}	$(8l - 4k + 8, 4k), (8l - 4k + 5, 4k + 1)$

(3.4.39)

onde k é inteiro com a única condição: $p \geq 0$, $q \geq 0$

Para valores baixos da dimensionalidade d a soluções são dadas na tabela

d	(p,q)
1	$(1,1)$
2	$(2,2)$
4	$(4,0),(3,3),(0,4)$
8	$(8,0),(5,1),(4,4),(1,5),(0,8)$
16	$(9,1),(6,2),(5,5),(2,6),(1,9)$
32	$(10,2),(7,3),(6,6),(3,7),(2,10)$

(3.4.40)

Obviamente, a representação (p',q') com $p' \leq p$, $q' \leq q$ também existe para a mesma dimensionalidade d. Essas representações são também irredutíveis a menos que p' ou q' sejam muito pequenos. Por exemplo, as representações d=16-dimensional são irredutíveis não só para a assinatura (p,q)=$(5,5)$, mas também para os pares (5,4),(5,3),(5,2),(4,5),(3,5),(2,5), enquanto as representações para as assinaturas (5,1),(4,4),(1,5) são encontradas em d=8 dimensões.

3.5 Conclusões Preliminares

Ao longo deste terceiro capítulo apresentamos alguns resultados relativos à teoria das representações para multipletos irredutíveis da supersimetria N-estendida $1D$. Um aspecto peculiar das álgebras supersimétricas $1D$ consiste no fato de que os supermultipletos formados pelos d graus de liberdade bosônicos e os d graus de liberdade fermiônicos, acomodados numa cadeia com $M+1$ ($M \geq 2$) estados de spin diferentes determina excepcionalmente un multipleto 2-cadeia da forma $\{\mathbf{d},\mathbf{d}\}$ que carrega uma representação da supersimetria N-estendida. Além disso, mostra-se que todos os multipletos irredutíveis 2-cadeia da supersimetria (p,q) estendida são totalmente classificados; quando, por exemplo, a condição $p-q=0\ mod 8$ é satisfeita, sua classificação é equivalente a uma de espinores de Majorana-Weyl em algum espaço-tempo dado. O número $p+q$ da supersimetria estendida é associado à dimensionalidade D do espaço-tempo quando a dimensionalidade do supermultipleto $2d$ é a dimensionalidade das correspondentes matrizes-Γ. No seguinte capítulo faremos uma extensão dos resultados deste capítulo e apresentaremos a classificação das realizações não-associativas da supersimetria estendida $1D$, que são baseadas na álgebra divisional dos octônions.

Capítulo 4

Realizações Octoniônicas da Supersimetria Estendida $1D$

Neste Capítulo, estenderemos os resultados do Capítulo 2 [37], e apresentaremos a classificação das realizações não-associativas da supersimetria estendida $1D$ que são fundamentadas na álgebra divisional dos octônions.

A classificação da supersimetria octoniônica obtem-se ao achar uma correspondência um-a-um com a classe de realizações tipo-Weyl das álgebras de Clifford onde as matrizes tem entradas octoniônicas.

Começamos este Capítulo apresentando a classificação das realizações octoniônicas das álgebras de Clifford. Isto é um ingrediente necessário para introduzir na próxima seção a classificação das realizações octoniônicas da supersimetria estendida $1D$. A seguir discutimos alguns exemplos de sistemas dinâmicos que admitem realizações octoniônicas da supersimetria estendida. Ao fim do Capítulo, faremos alguns comentários adicionais de nossos resultados, mencionando entre outros, a possível relevância da classificação da supersimetria octoniônica $1D$ na redução dimensional da corda e da teoria-M octoniônica.

4.1 As Álgebras de Clifford Octoniônicas

A classificação das supersimetrias estendidas $1D$ é baseada, como foi dito na introdução deste Capítulo, na classificação das álgebras de Clifford [11].

No Capítulo 1, foi apresentada a classificação e construção explícita das álgebras de Clifford. Na Tabela 1 mostramos as álgebras de Clifford maximais construídas a partir das chamadas "álgebras de Clifford maximais primitivas". Estas, podem ter representações reais, quaterniônicas ou octoniônicas. Nesta seção vamos reescrever a realização das álgebras de Clifford da série $C(0, 7+8n)$ chamada "série octoniônica". Esta série tem duas representações, real ou octoniônica. No caso real, temos que construir primeiramente as matrizes 8×8 que realizam a álgebra de Clifford $C(0, 7)$ (1.2.19). A construção do resto das álgebras de Clifford reais da série $C(0, 7+8n)$ foi apresentada no Capítulo 1, equação (1.2.21).

No que se refere a realização octoniônica, denotamos por $C_{\mathbb{O}}(0, 7)$ a realização octoniônica da álgebra de Clifford euclideana 7-dimensional. Esta realização alternativa para a álgebra de Clifford $C(0, 7)$ é obtida identificando os 7 geradores com os 7 octônions imaginários (τ_i) que satisfazem à relação algébrica

$$\tau_i \cdot \tau_j \quad = \quad -\delta_{ij} + C_{ijk}\tau_k, \tag{4.1.1}$$

para $i, j, k = 1, \cdots, 7$ com C_{ijk} sendo a constante de estrutura octoniônica totalmente anti-simétrica dado por

$$C_{123} = C_{147} = C_{165} = C_{246} = C_{257} = C_{354} = C_{367} = 1 \tag{4.1.2}$$

Devido ao caráter não-associativo do produto octoniônico (4.1.1) (a condição fraca da alternatividade é satisfeita, veja [47]), a relação octoniônica não pode ser representada pelo produto de matrizes ordinárias e é, portanto, uma realização distinta e inequivalente desta álgebra de Clifford euclideana com respeito ao caso $C(0, 7)$.

Observamos que, numa aplicação iterativa dos algoritmos eq(1.2.14) e (1.2.15) na $C_{\mathbb{O}}(0,7)$, obtemos realizações matriciais com entradas octoniônicas para as séries das álgebras de Clifford maximais $C(m,7+m)$ e $C(8+m,m-1)$, para valores inteiros positivos de m ($m=1,2,\ldots$). Estas realizações são denotadas por $C_{\mathbb{O}}(m,7+m)$ e $C_{\mathbb{O}}(8+m,m-1)$ respectivamente. A dimensionalidade das correspondentes matrizes-Γ, $dim-\Gamma_{\mathbb{O}}$ com valores octoniônicos são $2^m\times 2^m$, veja a Tabela abaixo.

$dim-\Gamma_{\mathbb{O}}$:	1×1	$*$	2×2	$*$	4×4	$*$	8×8	$\cdots$	$2^m\times 2^m$
			(1,8)	$\longrightarrow$	(2,9)	$\longrightarrow$	(3,10)	$\cdots$	$C_{\mathbb{O}}(m,7+m)$
		$\nearrow$							
	(0,7)								
		$\searrow$							
			(9,0)	$\longrightarrow$	(10,1)	$\longrightarrow$	(11,2)	$\cdots$	$C_{\mathbb{O}}(8+m,m-1)$

Em conseqüência, todo o conjunto das álgebras de Clifford maximais e primitivas $C_{\mathbb{O}}(0,7+8n)$ ($n=0,1,2,\ldots$) e seus descendentes, são representados com matrizes com entradas octoniônicas, agindo em espinores, que agora vamos interpretar como vetores coluna tomando valores octoniônicos.

Podemos construir em forma explícita as realizações das álgebras $C_{\mathbb{O}}(1,8)$ e $C_{\mathbb{O}}(9,0)$. Assim, temos para $C_{\mathbb{O}}(1,8)$

$$C_{\mathbb{O}}(1,8) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E, para $C_{\mathbb{O}}(9,0)$,

$$C_{\mathbb{O}}(9,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.1.3)$$

onde $i = 1, \cdots, 7$.

O caso $C_{\mathbb{O}}(9,0)$ será de utilidade na construção da representação $C_{\mathbb{O}}(8,0)$ que será usado na seção 4.3 deste Capítulo. Assim de (4.1.3) ao apagar a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ obtemos a realização $C_{\mathbb{O}}(8,0)$.

4.2 A Supersimetria Estendida Octoniônica $1D$

O objetivo desta seção é fornecer a classificação da Supersimetria Estendida Octoniônica $1D$ [38]. Mais precisamente apresentamos a lista das supersimetrias octoniônicas maximais suportada por multipletos pequenos de "n" campos bosônicos e "n" campos fermiônicos. Este resultado é baseado no trabalho de Toppan e Pashnev [37] e nos resultados dos capítulos anteriores. Pode-se recuperar a extensão octoniônica fazendo uma adequada restrição das fórmulas de classificação de uma representação real da supersimetria estendida $1D$ [37].

De fato, a realização octoniônica das álgebras de Clifford maximais são obtidas considerando a série $C_{\mathbb{O}}(0, 7+8n)$ (veja seção 4.1). Não existe contraparte octoniônica nas séries $C(1,0)$ e $C(0,3+8n)$.

Relembrando o Capítulo 3, a correspondência um-a-um da supersimetria $1D$ estendida e as álgebras de Clifford tipo Weyl de valores reais é obtida ao considerar que os geradores da supersimetria Q_i satisfazem a seguinte álgebra de supersimetria.

$$\{Q_i, Q_j\} = \eta_{ij} H, \quad (4.2.4)$$

Os geradores com métrica pseudo-Euclideana generalizada η_{ij} de assinatura (p, q) são

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i H & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2.5}$$

onde H é o hamiltoniano e podemos escolher

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.6}$$

satisfazendo

$$\Gamma_i\Gamma_j + \Gamma_j\Gamma_i = 2\eta_{ij}. \tag{4.2.7}$$

Logo, para construir os geradores da supersimetria Q_i só é necessário conhecer as álgebras de Clifford.

Pode-se recuperar a realização octoniônica considerando as matrizes σ_i, $\tilde{\sigma}_i$ com entradas octoniônicas, em lugar de matrizes com entradas reais.

Da seção anterior, sabemos que as matrizes Γ_i tipo-Weyl com entradas octoniônicas satisfazem à equação (4.2.7), e estas são recuperadas da álgebra de Clifford maximal derivada da série $C_{\mathbb{O}}(0, 7+8n)$ depois de eliminar a matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Isto nos deixa duas séries de supersimetrias octoniônicas maximalmente estendidas de assinatura (p, q) isto é:

$$(m, 8+8n+m) \tag{4.2.8}$$

e

$$(8+8n+m, m), \tag{4.2.9}$$

para valores inteiros $n, m \geq 0$

Em ambos os casos o número de componentes bosônicas octoniônicas, assim como as fermiônicas é dado por 2^{n+m}. Notemos a equivalência de (4.2.8) e (4.2.9) sob a troca de $p \leftrightarrow q$.

Estes resultados podem ser resumidos como segue: as classes inequivalentes de realizações octoniônicas irredutíveis da supersimetria maximalmente estendida atuando em multipletos octoniônicos de $d = 2^k$ bósons (igual ao número de férmions) são dadas por

$$(x + 8\varepsilon(k + 1 - x), x + 8(1 - \varepsilon)(k + 1 - x)), \tag{4.2.10}$$

para o valor inteiro $0 \leq x \leq k$ e $\varepsilon = 0, 1$.

Para valores de menor ordem pode-se construir a seguinte Tabela:

	(p, q)
$d = 1$	$(8, 0), (0, 8)$
$d = 2$	$(16, 0), (9, 1), (1, 9), (0, 16)$
$d = 4$	$(24, 0), (17, 1), (10, 2), (2, 10), (1, 17), (0, 24)$
$d = 8$	$(40, 0), (33, 1), (26, 2), (19, 3), (12, 4), (4, 12), (3, 19), (2, 26), (1, 33), (0, 40)$

Naturalmente, realizações irredutíveis da supersimetria estendida octoniônica não-maximal são recuperadas desta última tabela para valores (p', q'), com $p' \leq p$ e $q' \leq q$, desde que p', q' não sejam muito pequenos. Por exemplo, a realização irredutível $2 + 2$ dos octônions $(8, 1) \subset (9, 1)$ é encontrada, enquanto a realização irredutível $(8, 0)$ já está presente na última tabela no caso $d = 1$.

4.3 Sistemas Dinâmicos com Supersimetria Octoniônica

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos que admitem invariância sob supersimetrias estendidas $1D$ octoniônicas.

O primeiro exemplo de uma realização não-associativa octoniônica de uma supersimetria $1D$ é dado pela realização octoniônica $N = 8$. Esta é associada, de acordo com os resultados das seções anteriores, ou [38, 12], a $C_{\mathbb{O}}(8,0)$ e está expressa em termos de matrizes 2×2 com entradas octoniônicas. Explicitamente, os oito geradores da supersimetria Q_0, Q_i, para $i = 1, 2, \ldots, 7$ são,

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ H & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i H & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.11}$$

onde τ_i são os octônions imaginários e H é o hamiltoniano.

A supersimetria anterior pode também ser expressa numa linguagem octoniônica. Isto corresponde ao caso mais simples (para $D = 1$) de uma classe de supersimetria octoniônica generalizada de dimensões elevadas estudadas nas teorias de supercordas, teorias-M e etc (veja [39]). Podemos, de fato, introduzir a supercarga octoniônica $\mathcal{Q}$ e seu conjugado octoniônico $\mathcal{Q}^*$ através de

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= Q_0 + \frac{1}{\sqrt{7}} \sum_{i=1,\ldots 7} Q\tau_i, \\ \mathcal{Q}^* &= Q_0 - \frac{1}{\sqrt{7}} \sum_{i=1,\ldots 7} Q\tau_i, \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

com

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.13}$$

Em conseqüência, a realização octoniônica $N = 8$ pode-se escrever assim

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\} = \{\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*\} = 2H, \\ \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^*\} = 0. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Já indicamos que o caso octoniônico $N = 8$ é uma realização inequivalente da supersimetria $1D$ $N = 8$ com respeito ao caso padrão $N = 8$, obtido trocando os sete octônions imaginários τ_i na equação (4.3.11) com as 7 matrizes 8×8 (associativas) dadas em (1.2.19)

O modo mais conveniente de nos convencermos da inequivalência entre as realizações associativas e as não-associativas para $N = 8$, consiste em apresentar um sistema dinâmico que só admite invariância sob a realização octoniônica $N = 8$. Um exemplo disto é dado pelo KdV $N = 8$. Devido a ausência da extensão central para as álgebras superconformes N-estendidas com $N > 4$ [40], as equações superKdV só existem para $N \leq 4$. De fato, a extensão central de Virasoro é necessária para produzir o termo de derivada de ordem 3 que entra na equação KdV. Por outro lado, o teorema no-go que impedia a construção de equações superKdV para $N > 4$ pode ser superado,

construíndo uma álgebra superconforme não-Jacobiana como a ASC $N = 8$ não-associativa, introduzida em [13]. Esta álgebra pode apresentar extensão central e é considerada como a generalização dos colchetes de Poisson para uma extensão supersimétrica não-associativa da KdV. Em [36] provamos que existe só uma de tais extensões, a $N = 8$ KdV invariante sob uma supersimetria octoniônica $N = 8$ global.

Das considerações apresentadas acima, é claro que não existe superKdV $N = 8$ fundamentados no $N = 8$ associativo, já que este é impedido pelo teorema no-go.

As equações da superKdV $N = 8$ são explicitamente dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= -T''' - 12T'T - 6Q_a''Q_a + 4J_i''J_i, \\
\dot{Q} &= -Q''' - 6T'Q - 6TQ' - 4Q_i''J_i + 2Q_iJ_i'' - 2Q_i'J_i', \\
\dot{Q}_i &= -Q_i''' - 2QJ_i'' - 6TQ_i' - 6T'Q_i + 2Q'J_i' + 4Q''J_i - \\
&\quad 2C_{ijk}(Q_jJ_k'' - Q_j'J_k' - 2Q_j''J_k), \\
\dot{J}_i &= -J_i''' - 4T'J_i - 4TJ_i' + 2QQ_i' + 2Q'Q_i - C_{ijk}(4J_jJ_k'' + 2Q_jQ_k'). \qquad (4.3.15)
\end{aligned}$$

(o ponto e a prima denotam a derivada temporal e espacial respectivamente). Eles envolvem oito campos bosônicos T,J_i e oito campos fermiônicos $Q_0 \equiv Q$, Q_i ($i = 1, \ldots, 7$). Note a presença das constantes de estrutura octoniônicas C_{ijk}.

Logo, as transformações de supersimetria global $N = 8$ que deixam o sistema de equações (4.3.15) invariantes são geradas por $\int dxQ_a(x)$, para $a = 0, 1, \ldots, 7$, sob os colchetes de Poisson da ASC não-associativa $N = 8$ [36]. Eles coincidem com a transformação (4.3.11) já que o hamiltoniano é definido como $H = i\frac{\partial}{\partial x}$. Note que, devido ao fato dos campos da superKdV $N = 8$ dependerem das coordenadas espaciais e temporais, e as transformações de supersimetria $N = 8$ só dependerem da coordenada espacial x, a dependência temporal será "congelada". Podemos ler essas transformações diretamente dos geradores da supersimetria octoniônica $N = 8$ $1D$ mostrados acima.

Outro exemplo de um sistema dinâmico que é invariante sob supersimetria octoniônica envolve as "spinning particles" octoniônicas. A generalização octoniônica das "spinning particles" com valores reais é descrita por campos bosônicos com valores octoniônicos: $x = x_0 + \sum_i x_i\tau_i$ e campos fermiônicos também octoniônicos: $\psi = \psi_0 + \psi_i\tau_i$. As supercoordenadas x_i, ψ_i (associadas aos octônions imaginários) podem ser consideradas como as supercoordenadas associadas com a 7-esfera S^7 [41], já que esta última pode ser descrita pelos octônions imaginários.

A ação livre é dada por

$$S = \frac{1}{2}\int dt \cdot tr\{(x^*, \psi^*)\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}\}, \qquad (4.3.16)$$

onde tr denota o traço da matriz e a projeção sobre a identidade octoniônica Tr [42], enquanto "$*$" denota a conjugação octoniônica ver (4.3.12).

Esta ação livre é invariante sob supersimetria octoniônica $N = 8$. As transformações que atuam nos campos componentes são dadas por (Veja Apêndice B)

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_0\delta_0 x_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\psi_0, & \varepsilon_0\delta_0 x_i = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\psi_i, \\ \varepsilon_0\delta_0\psi_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\dot{x}_0, & \varepsilon_0\delta_0\psi_i = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\dot{x}_i, \\ \varepsilon_i\delta_i x_0 = -\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\psi_i, & \varepsilon_i\delta_i x_j = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\delta_{ij}\psi_0 - \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}C_{ijk}\psi_k, \\ \varepsilon_i\delta_i\psi_0 = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\dot{x}_i, & \varepsilon_i\delta_i\psi_j = -\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\delta_{ij}\dot{x}_0 + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}C_{ijk}\dot{x}_k, \end{array} \qquad (4.3.17)$$

onde $\varepsilon_0, \varepsilon_i$ são parâmetros grasmannianos.

A classificação das "spinning particles", é invariante sob supersimetria (p, q) generalizada. Isto é uma conseqüênria imediata das fórmulas da classificação para as supersimetrias octoniônicas apresentadas na seção anterior.

A construção das "spinning particles"octoniônicas segue diretamente do caso aqui apresentado para $N = 8$, isto, é a supersimetria octoniônica $(p = 8, q = 0)$.

4.4 Conclusões Preliminares

Ao longo deste terceiro capítulo, estudamos a classificação da supersimetria estendida $1D$ octoniônica, fornecendo sua classificação que atua num multipleto pequeno de "n"campos bosônicos e "n"campos fermiônicos.

A observação chave, que permite a classificação da supersimetria octoniônica, consiste em observar que elas estão numa correspondência um-a-um com a classe de realizações tipo-Weyl das álgebras de Clifford, expressas através de matrizes com entradas octoniônicas. "Tipo-Weyl"significa simplesmente uma sub-classe de matrizes na álgebra de Clifford que pode ser "promovida"para ser elementos fermiônicos na superálgebra.

A classificação das supersimetrias octoniônicas pode ser extraída da classificação das álgebras de Clifford octoniônicas. Tabelas explícitas foram construídas, expressando o número de supersimetrias generalizadas (p, q) (para p valores próprios positivos e q valores próprios) suportado pelos multipletos de campos $n + n$.

Mencionamos também que a realização octoniônica pode ser posta em correspondência com uma sub-classe da representação associativa de uma supersimetria estendida $1D$. Basicamente, isto pode ser feito substituíndo os sete octônions imaginários por sete matrizes antisimétricas produzindo a álgebra de Clifford Euclideana $C(0, 7)$. As realizações da supersimetria não-associativa e associativa permanecem, não obstante, inequivalentes. Este ponto pode ser melhor compreendido observando que sistemas com invariância $N = 8$-octoniônica, como o $N = 8$ KdV, de fato existem, enquanto, por outro lado, é conhecido (devido ao teorema no-go discutido neste capítulo) que não pode ser construída uma KdV $N = 8$ estendida baseada numa supersimetria $N = 8$ associativa.

Apresentamos também um outro exemplo explícito de um sistema dinâmico que é invariante sob a supersimetria octoniônica, no caso as "spinning particles" octoniônicas.

Capítulo 5

Simetrias Residuais Centralmente Estendidas em Presença de um Background E.M. Constante

A construção da Teoria Quântica de Campos (TQC) em presença de um background Electromagnetico (E.M.) externo (constante), tem ganhado muito interesse com a observação de Seiberg-Witten [49], que mostra que a teoria, num background E.M. pode reformular-se como uma teoria de gauge não-comutativa.

Por outro lado a observação de Seiberg-Witten pode inspirar um ponto de vista complementar e mais "conservador", isto é a pesquisa de uma TQC em algum background constante imerso numa estrutura do espaço-tempo com a comutação padrão. É este ponto de vista que vamos seguir neste Capítulo. A pergunta que faremos é: quais simetrias sobreviverão no caso livre, para um sistema descrito pela TQC num background constante? Aquelas álgebras de simetria que sobrevivem são chamadas "simetrias residuais"[48]. O termo "residual"poderia ser enganoso, já que parece sugerir que tais simetrias formam uma subálgebra da álgebra de simetrias originais. Prova-se que este não é o caso.

O problema de determinar a álgebra de simetrias de uma TQC em presença de um background E.M. foi resolvido, em um caso muito específico, num modelo bosônico complexo massivo livre bi-dimensional acoplado a um campo de gauge externo [50]. Provou-se nesse trabalho que sua álgebra de simetrias coincide com a álgebra de Poincaré centralmente estendida em (1+1) dimensões, previamente pesquisados na série de artigos [51], [52].

Neste capítulo nós estendemos os resultados do [50]. Usando unicamente álgebras de Lie e um método independente do modelo, computamos a álgebra de simetrias de diferentes classes de TQC acoplada a um background E.M. externo. Vale a pena enfatizar, que devido à presença das extensões centrais , as simetrias residuais *não são* subálgebras da álgebra de simetrias originais, na ausência de um background E.M. (tal álgebra é dada pela soma direta da álgebra de Poincaré com a carga global $U(1)$).

Mais especificamente, mostramos neste capítulo que a álgebra de simetria residual de uma TQC $D = 3$ invariante de Poincaré num background E.M. constante genérico ($|E| \neq |B|$) é dada por uma álgebra de Lie 5-dimensional $u(1) \oplus \mathcal{P}_c(2)$, onde $\mathcal{P}_c(2)$ é a álgebra de Poincaré em $D = 2$ centralmente estendida cuja assinatura, Minkowskiana ou Euclideana, é determinada pela intensidade relativa do campo elétrico externo constante v.s. o campo magnético (o caso especial em que o campo elétrico é igual ao campo magnético também é computado explicitamente).

Além disso, estendemos estes resultados para computar a superálgebra residual numa teoria supersimétrica, na presença de um background E.M. constante.

Computa-se também a simetria residual para uma TQC invariante de Poincaré em $D = 4$ num background E.M. genérico constante. A simetria resultante é uma álgebra de Lie 7-dimensional.

A álgebra de simetria residual na presença de um background E.M. não-constante também foi computada, nesta tese.

Na primeira parte ilustramos o método algébrico de Lie que permite, numa maneira independente do modelo, determinar os geradores das simetrias residuais e a correspondente álgebra. Depois apresentamos a álgebra de simetria residual resultante para uma TQC em $D = 3$ na presença do campo E.M. constante. Na seção 3 o caso supersimétrico é tratado, para o caso especial de uma teoria livre em $(2 + 1)$ dimensões minimamente acoplada a um campo externo A_μ que descreve o background E.M. constante. Na seção 4 é tratado o caso das álgebras de simetria residual para uma TQC num espaço-tempo de Minkowski ordinário $D = 4$ em presença de um background E.M. constante. Finalmente, na última seção, o caso de um background E.M. não constante é tratado para alguns casos especificos.

5.1 As Simetrias Residuais e seus Geradores

Por simplicidade vamos discutir o caso de simetria residual para uma teoria de campos genérica invariante de Poincaré em $(2 + 1)$ dimensões, acoplada a um background E. M. externo constante. A generalização para dimensões maiores é direta e imediato.

Assim, em ausência de campo electromagnético externo, a ação S é invariante sob simetria de 7-parâmetros, dos quais 6 são geradores de Poincaré que ao atuar no campo escalar são representadas por

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu, \\ M_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu). \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

(a assinatura escolhida é $+--$)

O restante gerador de simetria corresponde a Carga global interna $U(1)$, que denotamos como Z.

Além disso, sopomos que, na ação $\mathcal{S}$, a dependência no campo de background clássico é expressa em termos de derivadas covariantes.

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,$$

sendo e a carga elétrica.

Na presença de campos elétrico e magnético externos e constantes, o tensor de intensidade de campo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é vinculado a satisfazer

$$F^{0i} = E^i, \qquad F^{ij} = \epsilon^{ij} B, \tag{5.1.2}$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2$ e $i, j = 1, 2$. Os campos E^i e B são constantes. Sem perda de generalidade os eixos espaciais x^1,x^2 podem ser rodados de modo que $E^1 = E$, $E^2 = 0$.

Para recuperar (5.1.2), o campo de gauge A_μ deve depender, quando muito, linearmente nas coordenadas $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv x$ e $x^2 \equiv y$. Explicitamente, pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha_1 t + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ A_1 &= \beta_1 t + \beta_2 x + \beta_3 y \\ A_2 &= \gamma_1 t + \gamma_2 x + \gamma_3 y \end{aligned}$$

A transformação de gauge:

$$A_\mu \mapsto {A_\mu}' = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x^\nu) \tag{5.1.3}$$

permite escolher convenientemente o gauge-fixing para A_μ

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_i &= E_i t - \frac{B}{2}\epsilon_{ij} x^j. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

A escolha acima é um bom gauge-fixing no sentido de que fixa completamente o gauge. Será logo evidente que as simetrias residuais são certamente simetrias físicas, independentemente da escolha do gauge-fixing.

Devido a (5.1.4), a ação S depende explicitamente das coordenadas x^μ, que A_μ incorpora. O modo mais simples de computar as propriedades de simetria de uma ação como S, que depende explicitamente das coordenadas, consiste em efetuar o seguinte truque. No início A_μ é considerado na mesma base que os outros campos que S incorpora e supomos que se transforma como um campo vetorial padrão sob a transformação de Poincaré global, isto é,

$$A_\mu{}'(x^{\rho\prime}) \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x^\rho), \tag{5.1.5}$$

para $x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$.

De qualquer modo, para uma transformação de Poincaré infinitesimal genérica, o campo de gauge A_μ, sob a condição de gauge-fixing (5.1.4), não é mais invariante sob Poincaré. Lembrando do ponto de vista de uma transformação ativa, só os campos são transformados e não as coordenadas espaço-tempo. A_μ é, no fundo, um campo fictício, inserido na ação para levar em conta a dependência da S nas coordenadas espaço-tempo devido à presença do background não-trivial. Portanto, a transformação infinitesimal total δA_μ pode-se anular. Este resultado pode ser alcançado ao encontrar uma transformação de gauge infinitesimal (5.1.3) $\delta_g(A_\mu)$ para compensar a transformação de Poincaré infinitesimal $\delta_P A_\mu$, isto se a seguinte condição é satisfeita,

$$\delta(A_\mu) = \delta_P(A_\mu) + \delta_g(A_\mu) = 0. \tag{5.1.6}$$

Só aqueles geradores de Poincaré que admitem uma transformação de gauge de compensação, satisfazendo (5.1.6) fornecem a simetria da ação S (e incorporam, conseqüentemente, a álgebra de simetrias residuais). Esta é uma conseqüência da suposição original da invariância manifesta de gauge e Poincaré para a ação S acoplada a um campo de gauge A_μ.

Observe-se que os geradores de Poincaré originais são deformados pela presença de termos extraa associados às transformações de gauge de compensação. Denotamos por p o gerador de (5.1.1) que "sobrevive"como uma simetria na presença de um background externo. O gerador efetivo da simetria residual é

$$\hat{p} \;=\; p + (\ldots),$$

onde $(\ldots)$ denota os termos adicionais que surgem das transformações de gauge de compensação associadas a p. Tais termos adicionais $(\ldots)$ dependem do gauge-fixing.
O "gerador de simetria residual" $\hat{p}$ só pode ser expresso num modo que depende do gauge. De qualquer modo, duas escolhas do gauge-fixing são relacionadas por uma transformação de gauge $\mathbf{g}$. O gerador de simetria residual no novo gauge-fixing, denotado como $\tilde{p}$, está relacionado ao precedente por uma transformação adjunta

$$\tilde{p} \;=\; \mathbf{g}\hat{p}\mathbf{g}^{-1}. \tag{5.1.7}$$

Portanto a álgebra de simetria residual não depende da escolha do gauge-fixing e é uma caracterização verdadeiramente física da ação S.

Os termos adicionais $(\ldots)$ são necessariamente lineares nas coordenadas espaço-tempo quando associados a um gerador de traslação, e bilineares quando são associados ao gerador de Lorentz sobrevivente (para um background E.M.). Sua presença implica o surgimento do termo central no comutador dos geradores de traslação deformados.

5.2 As Simetrias Residuais Para Poincaré em $(2+1)D$

A álgebra de simetrias residuais de uma teoria de Poincaré em $(2+1)D$ envolve, além do gerador Z da $U(1)$ global, três translações deformadas e apenas um gerador de Lorentz deformado (os dois geradores restantes são quebrados).

Com a escolha do gauge-fixing (5.1.4), translações deformadas são explicitamente dadas por

$$\begin{aligned} P_0 &= -i\partial_t + eEx, \\ P_1 &= -i\partial_x - \frac{e}{2}By, \\ P_2 &= -i\partial_y + \frac{e}{2}Bx. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

O gerador deformado da simetria residual de Lorentz (M) é explicitamente dado, no mesmo gauge-fixing, para $E \neq 0$, por

$$\begin{aligned} M &= i(x\partial_t + t\partial_x) - i\frac{B}{E}(y\partial_x - x\partial_y) - \\ & \quad \frac{e}{2}(Et^2 + Ex^2 - Bty). \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Assim, a álgebra de simetria residual é:

$$\begin{aligned} [P_0, P_1] &= -iEZ, \\ [P_0, P_2] &= 0, \\ [P_1, P_2] &= iBZ, \\ [M, P_0] &= -iP_1, \\ [M, P_1] &= -iP_0 + i\frac{B}{E}P_2, \\ [M, P_2] &= -i\frac{B}{E}P_1. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

A carga Z da $U(1)$ não está mais desacoplada dos outros geradores de simetria. Ele agora aparece em (5.2.10) como uma carga central.

Notar que a álgebra de simetria residual em $(1+1)$ dimensões (computada em [50], para um modelo específico) é recuperada da subálgebra P_0, P_1, M, Z. Isto corresponderá a álgebra de Poincaré $2D$ centralmente estendida, completamente estudada em [52].

Os cinco geradores da álgebra de Lie não-simples das simetrias residuais admitem uma apresentação mais conveniente. O gerador

$$\tilde{Z} \equiv BP_0 - EP_2 \tag{5.2.11}$$

comuta com todos os outros geradores $*$

$$[\tilde{Z}, *] \;=\; 0, \tag{5.2.12}$$

de modo que a álgebra de simetrias residuais é dada pela soma direta de $u(1)$ e da álgebra de 4-geradores. Esta última álgebra é isomorfa à álgebra de Poincaré $D = 2$ centralmente estendida. Esta álgebra é do tipo Minkowskiana ou Euclideana dependendo se $|E| > |B|$ ou $|E| < |B|$ respectivamente (o caso $|E| = |B|$ é degenerado). Este ponto pode ser intuitivamente compreendido devido à predominância do efeito elétrico ou magnético (na ausência do campo elétrico a teoria é manifestamente invariante rotacional, de maneira que o gerador de Lorentz é associado com a simetria Euclideana). Nós temos para $|B| > |E|$ que a álgebra

$$\begin{aligned}
[S_1, S_2] &= i\overline{Z}, \\
[\overline{M}, S_1] &= iS_2, \\
[\overline{M}, S_2] &= -iS_1
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

é reproduzida por

$$\begin{aligned}
\overline{M} &= -\frac{E}{\sqrt{B^2 - E^2}}M, \\
S_1 &= P_0 - \frac{B}{E}P_2, \\
S_2 &= -\frac{\sqrt{B^2 - E^2}}{E}P_1,
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

quando, para $|E| > |B|$ a álgebra

$$[T_1, T_2] \;=\; i\hat{Z}.$$

$$
\begin{aligned}
[\tilde{M}, T_1] &= iT_2, \\
[\tilde{M}, T_2] &= iT_1,
\end{aligned}
\tag{5.2.15}
$$

é reproduzida por

$$
\begin{aligned}
\tilde{M} &= -\frac{E}{\sqrt{E^2 - B^2}} M, \\
T_1 &= P_0 - \frac{B}{E} P_2, \\
T_2 &= \frac{\sqrt{E^2 - B^2}}{E} P_1,
\end{aligned}
\tag{5.2.16}
$$

onde $\overline{Z}$ e $\hat{Z}$ são proporcionais a Z.

A álgebra de simetrias residuais do caso $(2+1)$D, para valores genéricos de E e B (o caso especial degenerado $|E| = |B|$ é discutido depois) é dada, conseqüentemente, pela soma direta

$$
u(1) \oplus \mathcal{P}_c(2).
\tag{5.2.17}
$$

Pode-se facilmente provar que (5.2.10) são as álgebras de simetria residuais mesmo para $E = \pm B$. Como antes, o gerador (5.2.11) $\tilde{Z} \equiv BP_0 - EP_2$ (agora $\tilde{Z} \propto P_0 - P_2$) comuta com todos os outros geradores. De qualquer modo ele aparece no lado direito dos comutadores. A álgebra de simetria residual resultante não é mais a soma direta de $u(1)$ e dos quatro geradores da álgebra. É uma álgebra de 5 geradores que admite duas cargas centrais distintas Z e $\tilde{Z}$. Apresentamos isto em forma explícita, em termo dos 5 geradores P_0, P_1, M, Z, $\tilde{Z}$, satisfazendo às relações de comutação

$$
\begin{aligned}
[P_0, P_1] &= -iEZ, \\
[M, P_0] &= -iP_1, \\
[M, P_1] &= -\frac{i}{E}\tilde{Z},
\end{aligned}
\tag{5.2.18}
$$

5.3 A Supersimetria Residual

Vale a pena investigar o papel da supersimetria residual para uma teoria supersimétrica acoplada a um background E.M. constante. Em princípio, isto pode ser conseguido estendendo o método discutido na seção 2 na aplicação aos supercampos. Em particular, a teoria de gauge poderia ser descrita por um supercampo vetorial, veja [53]. O fato de termos que trabalhar nas componentes e na presença de campos auxiliares, torna a computação mais complicada do que no caso puramente bosônico. Um ponto de vista muito mais pragmático será adotado aqui. As características da supersimetria residual podem já ser conseguidas ao investigar um modelo específico, gerado por um espinor ψ complexo livre e por um bóson ϕ complexo livre, suplementados por um campo auxiliar F_μ complexo e morando, como antes, em $(2+1)$ dimensões.

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\Gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \sqrt{2}(\partial_\mu\phi^* F^\mu + \partial_\mu\phi F^{\mu *}) + F_\mu F^{\mu *}. \tag{5.3.19}$$

Quando esses campos são minimamente acoplados por um backgound E.M. ($\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$), o novo lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\Gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi + \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi - \sqrt{2}(\mathcal{D}_\mu\phi^* F^\mu + \mathcal{D}_\mu\phi F^{\mu *}) + F_\mu F^{\mu *}. \tag{5.3.20}$$

Em ausência de um background E.M. externo a ação é invariante off-shell sob as transformações de supersimetria

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \overline{\epsilon}\psi, \\ \delta\overline{\psi} &= \overline{\epsilon}\Gamma^\mu\partial_\mu\phi^*, \\ \delta F_\mu &= \sqrt{2}\overline{\epsilon}\partial_\mu\psi, \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

e suas conjugadas hermitianas.

As transformações acima fecham on-shell, obtendo-se a álgebra da supersimetria

$$[\delta_1, \delta_2] = [\overline{\epsilon}_2\Gamma^\mu\epsilon_1 - \overline{\epsilon}_1\Gamma^\mu\epsilon_2]\partial_\mu. \tag{5.3.22}$$

Na presença do background E.M. constante, ambas (5.3.21) e (5.3.22) são respectivamente invariantes off-shell e a superálgebra on-shell, substituíndo ∂_μ pela derivada covariante $\mathcal{D}_\mu$, em termos do campo de background externo A_μ.

Vale a pena indicar que as "translações deformadas" P_μ em (5.2.8) ($iP_\mu = \partial_\mu - ieK_\mu$, com $K_0 = -Ex$, $K_1 = \frac{B}{2}y$, $K_2 = -\frac{B}{2}x$) não coincidem com as derivadas covariantes. Mas podem ser considerados como as derivadas covariantes para os campos invertidos $E \to -E$, $B \to -B$. Entretanto, sob uma inversão do espaço ($x \to -x$, $y \to -y$) acrescentado por uma transformação de gauge conveniente com o gauge-fixing (5.1.4) (veja também (5.1.7), com uma transformação de gauge α dado explicitamente por $\alpha = \frac{eE}{2}tx$), podemos identificar as "translações deformadas" com as derivadas covariantes. Visto que as transformações de supersimetria em diferentes gauge-fixings são relacionados pela transformação adjunta (5.1.7), (5.3.22) garante que os geradores da superálgebra são relacionados pela adjunta, não obstante o gauge-fixing escolhido.

O resultado principal pode ser expresso como a indicação de que os geradores da supersimetria residual na presença de um background constante podem ser considerados como as "raizes quadradas" das translações deformadas correspondentes.

5.4 A Simetria Residual em 4D

Em $D = 4$ dimensões, para valores genéricos do campo elétrico e magnético constante, um gauge-fixing conveniente é fornecido por

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= E_1 t, \\ A_2 &= E_2 t + Bz, \\ A_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

Sem perda de generalidade vamos supor que o campo magnético externo $\overrightarrow{B}$ constante seja paralelo ao eixo x, enquanto E_1, E_2 denotam as componentes do campo elétrico externo, respectivamente paralelo e transverso ao $\overrightarrow{B}$. No que segue, consideramos o caso $E_1, E_2, B \neq 0$.

Assim, (5.4.23) gera os campos

$$\begin{aligned} \overline{E} &= (E_1, E_2, 0), \\ \overline{B} &= (B, 0, 0). \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

Os geradores de translação deformados são

$$\begin{aligned} P_0 &= -i\partial_t - e(E_1 x + E_2 y), \\ P_1 &= -i\partial_x, \\ P_2 &= -i\partial_y, \\ P_3 &= -i\partial_z - eBy. \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

No que diz respeito aos geradores de Lorentz, só 2 deles sobrevivem no background externo. Eles são dados por

$$\begin{aligned} M &= i\frac{B}{E_1}y\partial_t - iz\partial_x + i\frac{B}{E_1}t\partial_y + i(\frac{E_1^2 + B^2}{E_1E_2})z\partial_y + ix\partial_z - i(\frac{E_1^2 + B^2)}{E_1E_2})y\partial_z + \\ &\quad eB(\frac{-E_1^2 + E_2^2 - B^2}{2E_1E_2})y^2 + eB(\frac{E_1^2 + B^2}{2E_1E_2})z^2 + e\frac{B^2}{E_1}tz + eBxy + e\frac{E_2B}{2E_1}t^2. \\ N &= ix\partial_t + i\frac{E_2}{E_1}y\partial_t + it\partial_x + i\frac{E_2}{E_1}t\partial_y + i\frac{B}{E_1}z\partial_y - i\frac{B}{E_1}y\partial_z + \\ &\quad \frac{e}{2E_1}(E_1^2 + E_2^2)t^2 + \frac{e}{2}E_1x^2 + \frac{e}{2E_1}(E_2^2 - B^2)y^2 + \frac{e}{2E_1}B^2z^2 + eB\frac{E_2}{E_1}tz + eE_2xy. \end{aligned}$$

Normalizando

$$T_1 = (1/\sqrt{E_2})P_0,$$

$$
\begin{aligned}
T_2 &= (1/\sqrt{E_2})P_2, \\
S_1 &= (\sqrt{E_2}/E_1)P_1, \\
S_2 &= -(\sqrt{E_2}/B)P_3.
\end{aligned}
$$

A álgebra de simetria residual resultante é uma álgebra de Lie não-simples, dada pelos comutadores

$$
\begin{aligned}
[T_i, S_j] &= i\delta_{ij}Z, \\
[T_i, T_j] &= i\epsilon_{ij}Z, \\
[S_i, S_j] &= 0, \\
[M, T_1] &= -i\frac{B}{E_1}T_2, \\
[M, S_1] &= i\frac{B}{E_1}S_2, \\
[M, T_2] &= -i(\frac{E_1^2+B^2}{E_1E_2})\frac{B}{E_2}S_2 - i\frac{B}{E_1}T_1, \\
[M, S_2] &= i(\frac{E_1^2+B^2}{E_1B})T_2 - i\frac{E_1}{B}S_1, \\
[N, T_1] &= -i\frac{E_1}{E_2}S_1 - i\frac{E_2}{E_1}T_2, \\
[N, S_1] &= -i\frac{E_2}{E_1}T_1, \\
[N, T_2] &= -i\frac{B^2}{E_2E_1}S_2 - i\frac{E_2}{E_1}T_1, \\
[N, S_2] &= i\frac{E_2}{E_1}T_2, \\
[M, N] &= 0.
\end{aligned} \tag{5.4.26}
$$

Tal álgebra permite dois operadores de Casimir independentes de ordem 2, dados por

$$
\begin{aligned}
C_1 &= T_1T_1 + 2\frac{B^2}{E_2^2}T_1S_2 - 2\frac{E_1^2}{E_2^2}S_1T_2 + (-1+\frac{B^2}{E_2^2}+\frac{E_1^2}{E_2^2})T_2T_2 + \\
&\quad (\frac{B^4}{E_2^4}+\frac{B^2E_1^2}{E_2^4})S_2S_2 - 2i\frac{BE_1}{E_2^2}E_1MZ + 2i\frac{E_1}{E_2}NZ, \\
C_2 &= 2\frac{B^2}{E_1^2}T_1S_2 + S_1S_1 - 2S_1T_2 + (1+\frac{B^2}{E_1^2})T_2T_2 +
\end{aligned}
$$

$$(\frac{B^2}{E_1^2} + \frac{B^2}{E_2^2} + \frac{B^4}{E_1^2 E_2^2}) S_2 S_2 - 2i\frac{B}{E_1} MZ. \tag{5.4.27}$$

5.5 Simetrias Residuais em Presença do Background EM não Constante

No caso de um background E.M. não-constante, os geradores de simetria que sobrevivem são também vinculados. Alguns exemplos serão mostrados a seguir.

Campo E.M. linear externo em (1+1)D.

Para o campo E, dado por

$$E = E_1 x + E_2 t, \tag{5.5.28}$$

um gauge-fixing conveniente é:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= \frac{E_2}{2} t^2 + E_1 x t. \end{aligned} \tag{5.5.29}$$

só existe um gerador de simetria, dado por

$$P = -i\partial_t + i\frac{E_2}{E_1}\partial_x - \frac{e}{2} E_2 x^2. \tag{5.5.30}$$

Campo E.M. quadrático em (1+1)D.

Para o campo externo

$$E = E_1 x^2 + E_2 t^2 + E_{12} x t,$$

o gauge-fixing é fornecido por

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= E_1 x^2 t + \frac{E_2}{3} t^3 + \frac{E_{12}}{2} x t^2. \end{aligned} \tag{5.5.31}$$

Todas as simetrias são quebradas a menos que a condição:

$$E_{12} = 2\sqrt{E_1 E_2}$$

seja satisfeita. Neste caso particular, existe um só gerador de simetria

$$P = -i\partial_t + i\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\partial_x - \frac{e}{3}E_1 x^3. \tag{5.5.32}$$

Campo EM linear externo em (2+1)D.

No caso mais geral do gauge-temporal, duas translações deformadas independentes sobrevivem como geradores da simetria (todos os geradores de Lorentz são quebrados), se o campo E.M. externo for vinculado para satisfazer

$$\begin{aligned} E_1 &= \rho^2 x + \rho D y + F, \\ E_2 &= \rho D x + D y + G, \\ B &= B_1 t + \rho B_2 x + B_2 y + B_3. \end{aligned} \tag{5.5.33}$$

(ρ arbitrário).

O gauge-fixing é

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= \rho^2 D t x + \rho D t y + F t, \end{aligned} \tag{5.5.34}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \rho \frac{B_2}{2} x^2 + \rho D x t + D t y + B_2 x y + \\ &\quad B_3 x + G t. \end{aligned} \tag{5.5.35}$$

Os geradores de simetria

$$\begin{aligned} P_0 &= -i\partial_t - \frac{e}{2}\rho^2 D x^2 - \frac{e}{2} D y^2 - e\rho D x y - \\ &\quad eFx - eGy, \\ P_1 &= -i\partial_x + i\rho\partial_y - \frac{e}{2} B_2 y^2 - e B_3 y. \end{aligned} \tag{5.5.36}$$

satisfazem a álgebra centralmente estendida

$$[P_0, P_1] = -iZ(F - \rho G). \tag{5.5.37}$$

5.6 Conclusões Preliminares

Ao longo deste último Capítulo estendemos os resultados obtidos em [50]. Mostramos, usando um método que é independente do modelo, que as álgebras de Lie que surgem dos resultados de [50] (computado originalmente para o caso bosônico complexo massivo livre em (1 + 1) dimensões, acoplado a um background E.M. externo). Nomeamos de "simetria residual" esta álgebra de Lie que caracteriza as invariâncias de um sistema em presença de um background E.M. não nulo externo.

Para um background constante, no caso genérico $|E| \neq |B|$ a simetria residual de uma teoria $D = 3$ corresponde à álgebra $u(1) \ominus \mathcal{P}_c(2)$, onde $\mathcal{P}_c(2)$ é a álgebra de Poincaré $2D$ centralmente estendida. Esta última álgebra em [51] foi usada na construção de teorias de gravidade linear em 1 + 1 dimensões.

Provamos também que, no caso supersimétrico, a álgebra de supersimetria residual na presença de um background E.M. externo fecha as translações de Poincaré deformadas.

As álgebras de simetrias residuais como aquelas computadas acima desempenham o mesmo papel que as álgebras ordinárias de Poincaré caso as TQCs morem em algum background E.M. (clássico) constante.

Conclusões

Nesta tese, investigamos as Álgebras de Simetria na Física em dois contextos diferentes. Vamos agora resumir nossos resultados e apresentar alguns aspectos que podem vir a ser desenvolvidos no futuro.

No Capítulo 1, apresentamos um algoritmo para a classificação e construção explícita das álgebras de Clifford associadas às álgebras divisionais. Esta construção é de grande utilidade, já que permitiu a classificação das realizações octoniônicas da supersimetria estendida $1D$, assim como também é util na construção da álgebra-M associada à teoria-M octoniônica, sendo esta um caso particular das álgebras supersimétricas generalizadas nas diversas dimensões.

O Capítulo 2, é dedicado ao estudo das álgebras divisionais e da superKdV estendida, após a construção da ASC $N = 8$ não-associativa. A não-associatividade nos permite construir generalizações supersimétricas da KdV para $N > 4$ (com o teorema no-go só é possível introduzir carga central para $N \leq 4$). Após uma restrição apropriada, construímos as $N = 2, 4$ KdV e obtemos que o caso $N = 4$ KdV só é integrável nos pontos de integrabilidade $a = -2$ e $a = 4$. Já o resultado mais importante deste capítulo é a construção do primeiro exemplo de uma $N = 8$ superKdV. Este sistema em consideração envolve 8 campos bosônicos e 8 campos fermiônicos na ASC $N = 8$ não-associativa.

O Capítulo 3 é uma revisão da teoria das representações para multipletos irredutíveis da supersimetria N-estendida $1D$ no caso real. Verifica-se que qualquer supermultipleto contendo $2d$ (d bósons e d férmions) partículas em M estados de spin diferentes, pode ser reduzido a um multipleto 2-cadeia da forma $\{\mathbf{d}, \mathbf{d}\}$, que carrega a supersimetria N-estendida. Verifica-se também que a classificação destes supermultipletos na representação irredutível está em correspondência um-a-um com a classificação das matrizes-Γ de Clifford tipo-Weyl reais.

No Capítulo 4, estudamos a classificação da supersimetria estendida $1D$ octoniônica, fornecendo sua classificação, que atua num multipleto pequeno de "n"campos bosônicos e "n"campos fermiônicos.

A observação chave que permite a classificação da supersimetria octoniônica consiste em observar que elas estão numa correspondência um-a-um com a classe de realizações tipo-Weyl das álgebras de Clifford, expressas através de matrizes com entradas a valores octoniônicos. "Tipo-Weyl"significa simplesmente uma sub-classe de matrizes na álgebra de Clifford que podem ser "promovidas"para ser elementos fermiônicos na superálgebra.

A classificação das supersimetrias octoniônicas pode ser extraída da classificação das álgebras de Clifford octoniônicas. Tabelas explícitas foram construídas, expressando o número de supersimetrias generalizadas (p, q) (para p valores próprios positivos e q valores próprios) suportado pelos multipletos de campos $n + n$.

Mencionamos também que a realização octoniônica pode ser posta em correspondência com uma sub-classe da representação associativa de uma supersimetria estendida $1D$. Basicamente, isto pode ser feito substituindo os sete octônions imaginários por sete matrizes anti-simétricas, produzindo a álgebra de Clifford Euclideana $C(0, 7)$. As realizações da supersimetria não-associativa e associativa permanecem, não obstante, inequivalentes. Este ponto pode ser melhor compreendido observando que sistemas com invariância $N = 8$-octoniônica, como o $N = 8$ KdV, de fato existem, enquanto que por outro lado é conhecido (devido ao teorema no-go discutido neste capítulo) que não pode ser construída uma KdV $N = 8$ estendida baseada numa supersimetria $N = 8$ associativa.

Apresentamos também um outro exemplo explícito de um sistema dinâmico que é invariante sob a supersimetria octoniônica, no caso as "spinning particles" octoniônicas.

Vale à pena mencionar as possíveis aplicações físicas dos sistemas supersimétricos estudados nesta tese. É bem conhecido o trabalho [3] no qual as álgebras divisionais são associadas com as supersimetrias estendidas, e é perfeitamente compreensível devido às complicações que suscitam as realizações não-associativas, que estas realizações octoniônicas tenham recebido menos atenção que as álgebras divisionais associativas. Não obstante, os octônions continuam sendo investigados como, por exemplo em [43],[44] no contexto da teoria de supercorda. Mais recentemente, em [39], foi indicada a existência de uma versão octoniônica da teoria-M com características surpreendentes (entre outras a equivalência do setor da (5-brana) $M5$ com os setores $M1$ e $M2$). Em geral, teorias octoniônicas em altas-dimensões tem uma peculiar característica: não são mais invariantes sob o grupo de Lorentz completo, mas sob seu coset G_2, já que este é o grupo dos automorfismos dos octônions.

No que diz respeito ao nosso estudo $D = 1$, podemos mencionar que, na estrutura de Jordan, e ao menos na classe restrita das álgebras de Jordan (veja a ref [45]), é possível construir uma mecânica quântica octoniônica consistente. Por outra parte, é claro que teorias supersimétricas octoniônicas de dimensões elevadas, tais como supercordas ou a teoria-M mencionadas acima, podem ser reduzidas dimensionalmente a $1D$. Nesta passagem obtemos sistemas de mecânica quântica octoniônica, como no caso associativo padrão [46], estendendo o número de supersimetrias. Tais sistemas devem ser construídos em termos dos multipletos octoniônicos aqui classificados, permitindo-nos promissoras aplicações dos resultados e das técnicas apresentadas nesta tese.

Uma outra aplicação que está em andamento é o estudo da Trialidade (veja [57]).

construída com nossas álgebras de Clifford associadas às álgebras divisionais estudadas no Capítulo 1, com ênfase na construção da versão octoniônica da Trialidade.

Finalmente no Capítulo 5, sempre no contexto das álgebras de simetria na Física, estendemos os resultados obtidos em [50]. Mostramos, usando um método que é independente do modelo, as álgebras de Lie que surgem dos resultados de [50] (computado originalmente para o caso bosônico complexo massivo livre em $(1+1)$dimensões, acoplado a um background E.M. externo). Nomeamos "simetria residual"esta álgebra de Lie que caracteriza as invariâncias de um sistema em presença de um background E.M. não nulo externo.

Para um background constante, no caso genérico $|E| \neq |B|$, a simetria residual de uma teoria $D = 3$ corresponde aà álgebra $u(1) \oplus \mathcal{P}_c(2)$, onde $\mathcal{P}_c(2)$ é a álgebra de Poincaré $2D$ centralmente estendida. Esta última álgebra foi usada em [51] na construção de teorias de gravidade linear em $(1 + 1)$ dimensões.

Provamos também que, no caso supersimétrico, a álgebra de supersimetria residual na presença de um background E.M. externo fecha as translações de Poincaré deformadas. Finalmente, as álgebras de simetria residual também foram computadas para exemplos específicos em backgrounds E.M. não-constantes.

As álgebras de simetrias residuais como aquelas computadas acima jogam o mesmo papel que as álgebras ordinárias de Poincaré, caso as TQCs morem em algum background E.M. (clássico) constante.

Vale a pena mencionar a conexão de tais álgebras de simetria residuais com o surgimento de estruturas não-comutativas, devido à presença do termo central nos comutadores dos momentos (deformados). O correspondente retrato dual pode ser dado de forma que manifeste a não-comutatividade no nível das coordenadas do espaço-tempo. A conexão entre dois de tais retratos duais foi amplamente explorada em [54] (veja também

[55]). Em [56] teorias não relativistas em $(2+1)$ dimensões num campo de background foram estudadas.

Uma outra linha de pesquisa que parece muito promissora para futuras investigações consiste em ligar explicitamente o papel dos "geradores deformados de Poincaré", como aqueles computados na seção 5.5 na presença de um background E.M. não-constante, com o fenômeno de produção de pares, observado para backgrounds E.M. lineares específicos tais como campos elétricos externos no cone de luz. Isto visaria uma caracterização Lie-algébrica do fenômeno de produção de pares.

Apêndice A

Exemplos de Representações para Supercargas

Usando o algoritmo (1.2.15) podemos construir o caso $(p,q) = (4,0)$. Após eliminarmos a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ do caso $(p,q) = (5,0)$ as seguintes matrizes realizarão as quatro supercargas

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.0.1}$$

Estas supercargas atuam num espaço com 4 coordenadas bosônicas e 4 fermiônicas formando assim a representação $\{\mathbf{4}, \mathbf{4}\}$. O grupo de automorfismo $SO(p, q)$ da álgebra (3.1.2) é agora $SO(4)$. Além da transformação do grupo de automorfismos $Q_i' = \Lambda_i^j Q_j$ a álgebra das supercargas é invariante sob a mais geral transformação do tipo

$$Q_i' = UQ_iU^{-1} \tag{A.0.2}$$

onde a matriz U 8×8 é diagonal. Quando a matriz U é não singular e real, a transformação (A.0.2) significa simplesmente uma mudança da base nos setores bosônicos e fermiônicos. Por outro lado, esta transformação muda drasticamente a representação quando U depende do operador $H = -id/d\tau$. Neste caso, a transformação (A.0.2) é em geral não-local. Não obstante, existem transformações que não conduzem a nenhuma transformação não-local. Em particular, na estrutura do exemplo (A.0.1) podemos tomar

$$U_1 = diag\{1, 1, 1, H, 1, 1, 1, 1\} \tag{A.0.3}$$

e assim obtemos a nova realização para os operadores Q_i

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.0.4}$$

Observa-se que todos os elementos da última coluna do bloco esquerdo off-diagonal dos operadores Q_i perderam o multiplicador H. Por outro lado todos os elementos da última fileira do bloco direito off-diagonal ganharam o multiplicador H. Assim, esta representação de supercargas corresponde ao supermultipleto irredutível $\{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{1}\}$ que foi usada em [33, 34] para construir uma MQS $N = 4$ estendida 3-dimensional. Os supermultipletos $\{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2}\}$ e $\{\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3}\}$ são derivados com a ajuda das seguintes matrizes

$$U_2 = diag\{1, 1, H, H, 1, 1, 1, 1\}, \quad U_3 = diag\{1, H, H, H, 1, 1, 1, 1\} \tag{A.0.5}$$

seguindo na mesma seqüência

$$U_4 = diag\{H, H, H, H, 1, 1, 1, 1\}. \tag{A.0.6}$$

Obtemos novamente o supermultipleto $\{\mathbf{4}, \mathbf{4}\}$ porém com o subespaço fermiônico no início da cadeia. Isto completa a classificação dos supermultipletos irredutíveis da MQS $N = 4$ estendida.

Apêndice B

As "Spinning Particles" Octoniônicas Supersimétricas

O objetivo inicial deste apêndice é construir as variações dos campos que transformam férmions em bósons e vice-versa no contexto da supersimetria octoniônica das "spinning particles". Isto é feito usando os geradores da supersimetria Q_0, Q_i fornecidos por (4.3.11).

Depois verificamos explicitamente a invariância da ação livre das "spinning particles" octoniônico eq(4.3.16). Então, construímos as variações dos campos.

Seja a variação: $\widehat{\delta}$

$$\widehat{\delta} = \varepsilon_0 Q_0 + \varepsilon_i Q_i \tag{B.0.1}$$

onde ε_0, ε_i são parâmetros grasmannianos ($i = 1, 2, \ldots, 7$).

Usando (4.3.16) e definindo o supercampo $V = \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}$.

Obtemos

$$\widehat{\delta} V = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_0 + \psi_j \tau_j \\ H x_0 + H x_j \tau_j \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_0 \tau_i - \psi_i + C_{ijk} \psi_j \tau_k \\ -H x_0 \tau_i + H x_j - C_{ijk} H x_j \tau_k \end{pmatrix} \tag{B.0.2}$$

Por outro lado $\widehat{\delta} = \varepsilon_0\delta_0 + \varepsilon_i\delta_i$

$$\widehat{\delta}V = \begin{pmatrix} \varepsilon_0\delta_0 x_0 + \varepsilon_0\delta_0 x_j\tau_j + \varepsilon_i\delta_i x_0 + \varepsilon_i\delta_i x_j\tau_j \\ \varepsilon_0\delta_0\psi_0 + \varepsilon_0\delta_0\psi_j\tau_j + \varepsilon_i\delta_i\psi_0 + \varepsilon_i\delta_i\psi_j\tau_j \end{pmatrix} \tag{B.0.3}$$

Assim de (B.0.2) e (B.0.3), ($H = \frac{\partial}{\partial t}$) obtemos

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0\delta_0 x_0 = \tfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\psi_0, \quad && \varepsilon_0\delta_0 x_i = \tfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\psi_i, \\
&\varepsilon_0\delta_0\psi_0 = \tfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\dot{x}_0, \quad && \varepsilon_0\delta_0\psi_i = \tfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\dot{x}_i, \\
&\varepsilon_i\delta_i x_0 = -\tfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\psi_i, \quad && \varepsilon_i\delta_i x_j = \tfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\delta_{ij}\psi_0 - \tfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}C_{ijk}\psi_k, \\
&\varepsilon_i\delta_i\psi_0 = \tfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\dot{x}_i, \quad && \varepsilon_i\delta_i\psi_j = -\tfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\delta_{ij}\dot{x}_0 + \tfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}C_{ijk}\dot{x}_k,
\end{aligned} \tag{B.0.4}$$

Estas são as transformações da supersimetria.

Agora verificaremos que a ação S é invariante sob as transformações mostradas acima. Então

$$\widehat{\delta}S = \widehat{\delta}\int dt \cdot \underbrace{\frac{1}{2}Tr\{x^*\ddot{x} + \psi^*\dot{\psi}\}}_{\mathcal{L}}. \tag{B.0.5}$$

Assim

$$\widehat{\delta}\mathcal{L} = \frac{1}{2}Tr\{\widehat{\delta}x^*\ddot{x} + x^*\widehat{\delta}\ddot{x} + \widehat{\delta}\psi^*\dot{\psi} + \psi^*\widehat{\delta}\dot{\psi}\}. \tag{B.0.6}$$

Usando a eq(B.0.4), a relação para os octônions (4.1.1) e a projeção sob a identidade Tr, obtemos

$$\widehat{\delta}\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}[x_0\dot{\psi}_0 + x_i\dot{\psi}_i] + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}[x_i\dot{\psi}_0 - x_0\dot{\psi}_i - C_{ijk}x_j\dot{\psi}_k], \tag{B.0.7}$$

que é uma derivada total. Isso implica que a ação é invariante sob as transformações da supersimetria (B.0.4).

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, *Clifford Algebras. Topology (Suppl. 1)*. **3** (1964) 3.

[2] I. Porteous, *Topological Geometric.*, van Nostand Rh, London, 1969.

[3] T. Kugo and P. Townsend. *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357.

[4] L. Sorgsepp and J. Lõhmus. *J. Hadranic.* **2** (1979) 1388.

[5] R. D. Schafer, *An Introduction to Noassociative Algebras.*, Academic Press, New York, 1966.

[6] Jörg. Schray and Corinne A. Manogue: "Octonionic representations of Clifford algebras and triality", [*hep-th/9407179*].

[7] C. W. Curtis, *The four eight square problem and algebra in Studies in Modern Algebra.*, ed. A. A. Albert (Mathematical Association of America), 1963.

[8] J. Lukierski and P. Minnaert, *Phys. Lett.* **B 129** (1983) 392; Z. Hasiewicz and J. Lukierski. *Phys. Lett.* **B 145** (1984) 65.

[9] John C. Baez, "The octonions", [*arXiv:math.RA/0105155*]

[10] M. Günaydin e F. Gürsey, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1651.

[11] S. Okubo. *J. Math. Phys.* **32** (1991) 1657; ibid.1669.

[12] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *JHEP.* **04** (2003) 040.

[13] F. Englert, A. Sevrin, W. Troost, A. van Proeyen and P. Spindel, *J. Math. Phys.* **29** (1988) 281.

[14] P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.* **254** (1995) 1.

[15] Z. Popowicz, *Phys. Lett.* **A194** (1994) 375; *J. Phys.* **A 29** (1996) 1281: ibid. **A39** (1997) 7935: *Phys. Lett.* **B 459** (1999) 150.

[16] F. Toppan, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 895.

[17] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P Townsend and A. van Proeyen. *Phys. Rev. Lett.* **81**: (1998) 4553.

[18] M. Claudson and M. B. Halpern, *Nucl. Phys.* **B250**: (1985) 689.

[19] E. Witten. *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

[20] E. A. Ivanov. S. O. Krivonos and A. I. Pashnev. *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 19.

[21] M. De Crombrugghe and V. Rittenberg, *Ann. of Phys.* **B151** (1983) 99.

[22] B. de Wit A. K. Tollsten and H. Nicolai, *Nucl. Phys.* **B392** (1993) 3.

[23] R. A. Coles and G. Papadopoulos, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 427.

[24] S. James Gates, Jr. and Lubna. Rana, *Phys. Lett.* **B352** (1995) 50; ibid. **B369** (1996) 262.

[25] P. Mathieu, *Phys. Lett.* **B203** (1988) 65; C. A. Laberge and P. Mathieu, *Phys. Lett.* **B215** (1988) 718; P. Labelle and P. Mathieu, *J. Math. Phys.* **89** (1991) 923.

[26] F. Delduc and E. Ivanov, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 312; F. Delduc, E. Ivanov and S. Krivonos, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 1356.

[27] A. I. Pashnev, "Noncompact Extension of One-Dimensional Supersymmetry and Spinning Particle", Preprint E2-91-536, Dubna, (1991).

[28] R. Casalbuoni, *Nuovo. Cim.* **33A**: (1976) 115.

[29] F. A. Berezin and M. S. Marinov, *Ann. of Phys.* **104** (1977) 336.

[30] V. P. Akulov and A. I. Pashnev, *Theor. Math. Phys.* **65** (1985) 1027.

[31] E. A. Ivanov, S. O. Krivonos and V. Leviant, *J. Phys.* **A: Math. Gen. 22** (1989) 4201.

[32] V. P. Berezovoj and A. I. Pashnev, Preprint KFTI 91-20, Kharkov, (1991).

[33] E. A. Ivanov and A. I. Smilga, *Phys. Lett.* **B257** (1991) 79.

[34] V. P. Berezovoj and A. I. Pashnev, *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 2141.

[35] V. P. Berezovoj and A. I. Pashnev, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 1699.

[36] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *J. Phys.* **A: Math. Gen. 36** (2003) 3809.

[37] A. Pashnev and F. Toppan, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 5257.

[38] H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, *Mod. Phys. Lett.* **A 18** (2003) 787.

[39] J. Lukierski and F. Toppan, *Phys. Lett.* **B539** (2002) 266.

[40] P. Grozman, D. Leites and I. Shchepochkina: "Lie superalgebras of string theories", [*hep-th/9702120*].

[41] M. Cederwall and C. Preitschopf, *Commun. Math. Phys.* **167** (1995) 373.

[42] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *Phys. Letts.* **A291** (2001) 95.

[43] D. B. Fairlie and C. Manogue, *Phys. Rev* **D34** (1986) 1832.

[44] K. W. Chung and A. Sudbery, *Phys. Lett* **B198** (1987) 161.

[45] M. Günaydin, C. Piron and H. Ruegg, *Commun. Math. Phys.* **167** (1978) 69.

[46] M. De Crombugghe and V. Rittenberg, *Ann. Phys.* **151** (1983) 99; M. Claudson and M. B. Halpern, *Nucl.Phys.* **B250** (1985) 689.

[47] M. Günaydin and S. V. Ketov, *Nucl. Phys.* **B 467** (1996) 215.

[48] H. L. Carrion, M. Rojas, F. Toppan, *Mod. Phys. Lett.* **A 18** (2003) 629.

[49] N. Seiberg and E. Witten, *JHEP.* **032** (1999) 9909.

[50] E. Karat, *Phys. Lett.* **B 445** (1999) 337.

[51] D. Cangemini and R. Jackiw, *Phys. Lett.* **B 299** (1993) 24; ibid. **B337** (1994) 271.

[52] D. Cangemini and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **225** (1993) 229.

[53] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press, 1983.

[54] R. Jackiw, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **180** (2002) 30.

[55] J. Lukierski, P. C. Stichel and W. J. Zakrzewski, *Ann. Phys.* **260** (1997) 224.

[56] R. Jackiw and S. Y. Pi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **107** (1992) 1; *Nucl. Phys B (Proc. Suppl).* **C 33** (1993) 104.

[57] M. A. de Andrade, M. Rojas and F. Toppan, *Int. J. Mod. Phys.* **A16** (2001) 4453.

Apêndice C

Trabalhos publicados

1- "An N=8 superaffine Malcev algebra and its N=8 Sugawara", H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *Phys. Letts.* **A291** (2001) 95.

2- "Division Algebras and Extended N= 2,4,8 superKdVs", H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *J. Phys.* **A: Math. Gen 36** (2003) 3809.

3- "Residual Symmetries in the Presence of an EM Background", H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *Mod. Phys. Lett.* **A 18** (2003) 629.

4- "Octonionic Realization of One-Dimensional Extended Supersymmetries. A Classification", H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *Mod. Phys. Lett.* **A 18** (2003) 787.

5- "Quaternionic and octonionic spinors. A Classification", H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *JHEP.* **04** (2003) 040.

"Sobre as Álgebras de Simetrias da Física Teórica: Supersimetria Octoniônica e Simetrias Residuais"

Moisés Porfírio Rojas Leyva

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Francesco Toppan – Presidente

Nelson Ricardo de Freitas Braga – UFRJ

Sílvio Paolo Sorella – UERJ

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Nelson Pinto Neto - CBPF

Suplente: Sebastião Alves Dias – CBPF

Rio de Janeiro, 12 de fevereiro de 2004