

TESE DE DOUTORADO

CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS
NÃO-EXTENSIVOS DE BAIXA
DIMENSIONALIDADE

Garín Fedor Janampa Añaños

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, 2004

Caracterização de Sistemas Dinâmicos
Não-Extensivos de Baixa Dimensionalidade

Tese de Doutorado submetida ao Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas sob orientação do
Professor **Dr. Constantino Tsallis**
para a obtenção do título de
Doutor em Física por **Garín Fedor Janampa Añaños**.

Março de 2004

A Pedro e Nery
Minha gratidão a eles.

Agradecimentos

- Minha gratidão a meu orientador, Constantino Tsallis pela amizade e prestativa orientação.
- Gostaria de agradecer a Ernesto, Fulvio, Ugur, Jeferson, Silvio, Luis, Nemesio, Celia, Rômulo, Rafael pelo apoio, valiosas discussões e bom ambiente de trabalho.
- Um agradecimento especial ao Prof. Luis Maseri (in Memoriam), Diretor do Centro Latinoamericano de Física, pela oportunidade brindada de fazer estudos de doutorado.
- Agradeço a Luzia, Vanda, Myriam, Almério e demais funcionários do CBPF que me ajudaram durante este período.
- Agradeço a Claudia, Raquel, Nivea, Nilia, Neila, Nidia, Nadia, Eliane, Bela, Viky, Gaucho, Vitinho, Belo, Miguel, Juan, German, André, Raphael... pela amizade.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.
- Finalmente, sou particularmente agradecido a meus irmãos Gustavo, Gino, Emir, Zislo, Janio, Alberto, Anabel, Nerybel, minha mulher Matilde e meu filho Garin, pois sem eles eu não poderia ter levado adiante este esforço. A paciência, o amor e a compreensão deles sustentaram-me.

Call it entropy. It is already in use under that name and besides, it will give you a great edge in debates because nobody knows what entropy is anyway.

J. von Neumann to C. Shannon
(Denbigh and Denbigh, 1985, p. 104)

Resumo

Esta tese está organizada como segue: No Capítulo 1 apresenta-se as motivações que conduziram os trabalhos desenvolvidos nesta tese. No Capítulo 2 calculamos numericamente, no limiar do caos, a evolução temporal da entropia não-extensiva para a família dos mapas logísticos. Verificamos a existência de um e só um valor de $q \equiv q_{sen} \leq 1$, tal que a produção de entropia por unidade de tempo é finita. Desta maneira, generalizamos a entropia de Kolmogorov-Sinai (em sua versão de ensemble), que corresponde ao valor $q = 1$ no presente formalismo. No Capítulo 3 verificamos a natureza dual do índice entrópico para os mapas z -logísticos, uma ($q_{sen} < 1$) relacionada a suas propriedades da sensibilidade às condições iniciais e a outra ($q_{rel} > 1$), relacionada a sua dinâmica de relaxação ao estado estacionário de seu atrator. Obtivemos uma nova escala finita que estabelece quantitativamente, pela primeira vez, a relação entre os conceitos da sensibilidade às condições iniciais e da relaxação. No Capítulo 4 são estudadas numericamente, por meio de médias de ensembles, a sensibilidade às condições iniciais $\xi(t)$ e a produção de entropia por unidade de tempo: (i) de uma *nova* família de mapas dissipativos unidimensionais, $x_{t-1} = 1 - ae^{-1/|x_t|} (z > 0)$, (ii) dos já conhecidos mapas z -logísticos e (iii) do mapa de Kaplan-Yorke para os casos do caos forte e fraco (limiar do caos). Em todos os casos verificamos que as propriedades da sensibilidade e a produção de entropia são relacionadas a um e só um valor de q_{sen}^{av} : para o caos forte, $q_{sen}^{av} = 1$, no entanto, no limiar do caos, $q_{sen}^{av}(z) < 1$. Também verifica-se numericamente a generalização da identidade de Pesin. No Capítulo 5 analisamos numericamente a sensibilidade às condições iniciais e a produção de entropia de dois mapas padrão simpleticamente acoplados focalizando a transição do comportamento regular ao caótico, onde o sistema exhibe caos fraco. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões gerais da tese.

Abstract

This thesis is organized as follows: In chapter 1 we present the motivations that lead to develop the works exposed in this thesis. In chapter 2 we numerically calculate, at the edge of chaos, the time evolution of the nonextensive form of entropy S_q for logistic-like maps. We verify that one and only one value $q \equiv q_{sen} \leq 1$ exists such that the entropy production per unit time of these maps is *finite*, thus generalizing the (ensemble version of) Kolmogorov-Sinai entropy, which corresponds to $q = 1$ in the present formalism. In chapter 3 we verify the dual nature of the z -logistic maps, one ($q_{sen} < 1$) related to its sensitivity to initial conditions properties, and the other, ($q_{rel} > 1$), related to its relaxation dynamics towards its stationary state attractor. We exhibit a new finite-size scaling that establishes quantitatively, for the first time, a long pursued relation between sensitivity to the initial conditions and relaxation, concepts which play central roles in nonextensive statistical mechanics. In chapter 4, ensemble averages of the sensitivity to initial conditions and the entropy production per unit time of (i) a *new* family of one-dimensional dissipative maps, $x_{t+1} = 1 - ae^{-1/|x_t|^z}$ ($z > 0$), (ii) of the known logistic-like maps and (iii) of the Kaplan-Yorke map, are numerically studied, both for *strong* and *weak* (chaos threshold) chaotic cases. In all cases we verify that sensitivity and entropy production properties are related to one and same value of $q_{sen}^{uv} \leq 1$: for strong chaos, $q_{sen}^{uv} = 1$, whereas at the edge of chaos, $q_{sen}^{uv}(z) < 1$. We also numerically verify the generalization of Pesin identity. In chapter 5, we analyze numerically the sensitivity to initial conditions and entropy production of two symplectically coupled standard maps, focusing on the transition from regular to chaotic behavior, where the system displays weak chaos. Finally, in chapter 6 we present general conclusions of thesis.

Índice

1	Introdução	1
2	Generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai: Mapas z-logísticos	6
2.1	Introdução	6
2.2	Entropia de Kolmogorov-Sinai	10
2.3	Conclusões	15
3	Dinâmica de relaxação nos mapas z-logísticos	21
3.1	Introdução	21
3.2	Mapas z -logísticos e a não-extensividade no limiar do caos	23
3.3	A sensibilidade e a relaxação dos mapas logísticos	25
3.4	Conclusões	28
4	Médias de ensembles e não-extensividade no limiar do caos: Mapas dissipativos	32
4.1	Introdução	32
4.2	Os mapas z -logísticos e z -exponenciais	33
4.3	Sensibilidade às condições iniciais	37
4.4	A generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai e da identidade de Pesin	48
4.5	Mapa de Kaplan-Yorke	64
4.5.1	introdução	64
4.5.2	Não-ergodicidade e Mixing do tipo lei de potência	68
4.6	Conclusões	69
5	Sensibilidade anômala às condições iniciais e produção de entropia em mapas padrão: Uma versão não-extensiva	70
5.1	Introdução	70
5.2	Sensibilidade às condições iniciais e produção de entropia	73
5.3	Discussões	80
5.4	Conclusões	83
6	Conclusões	102

Lista de Figuras

2.1	Número total de janelas ocupadas como função do índice de janelas para $z = 2$	13
2.2	Número total de janelas ocupadas como função do índice de janelas para $z = 1.75$ e $z = 3$	14
2.3	A evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para $z = 2$ com $a = 2.0$	17
2.4	A evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para $z = 2$ com $a = a_c = 1.401155189\dots$	18
2.5	A evolução temporal da curva $\langle S_q \rangle$ para $Z = 1.75$ no limiar do caos ($a_c = 1.35506075$).	19
2.6	A evolução temporal da curva $\langle S_q \rangle$ para $Z = 3$ no limiar do caos ($a_c = 1.52187879\dots$).	20
3.1	Evolução temporal da entropia $S_{q_{sen}}$ para o mapa logístico $z = 2$	27
3.2	Relaxação de $\Delta S_{q_{sen}}(t) \equiv S_{q_{sen}}(t) - S_{q_{sen}}(\infty)$	29
3.3	Evolução temporal da entropia S_q , com a “melhoria” numérica na regra de iteração	30
3.4	W -dependência do índice entrópico q_{rel} de relaxação para valores típicos de z	31
4.1	Atrator do mapa logístico	34
4.2	Iteradas assintóticas do mapa exponencial $z = 0.5$	35
4.3	Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para o mapa logístico ($z = 2$) com $a = 2$	40
4.4	Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para o mapa logístico ($z = 2$), com $a = 1.401155189$	41
4.5	Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com $a_c = 1.4828024$	43
4.6	$\langle \ln \xi \rangle(t)$ para o mapa logístico com $a_c = 1.631018$	44
4.7	Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$. Mapa logs. $z = 2$, $a_c = 1.7798164\dots$	45
4.8	Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa exponencial ($z = 0.5$) com $a = 4$	46
4.9	Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa exponencial $z = 0.5$ com $a = a_c$	47
4.10	Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle $a = 2$	52
4.11	Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.401155189$	53
4.12	Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico com $a_c = 1.4828024$	54

4.13	$\langle S_q \rangle(t)$ para o mapa logístico com $a_c = 1.631018$	55
4.14	Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico com $a_c = 1.7798164$. . .	56
4.15	Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa exponencial, $z = 0.5$, $a = 4$. . .	57
4.16	Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa exponencial, $z = 0.5$ com $a = a_c$. . .	58
4.17	A dependência de q versus z^{-1}	59
4.18	Identidade de Pesin, mapa logístico ($z = 2$).	60
4.19	Identidade de Pesin, mapas z -logístico: $z = 1.10$, $z = 1.25$, $z = 1.50$ e $z = 1.75$	61
4.20	Identidade de Pesin, mapa z -logístico: $z = 2.0$, $z = 2.50$, $z = 3.0$ e $z = 5.0$. . .	62
4.21	Identidade de Pesin, mapas z -exponenciais: $z = 0.40$, $z = 0.50$, $z = 0.75$. $z = 1.0$ e $z = 1.25$	63
4.22	$\langle \ln_q \xi \rangle(t)$, $\langle S_q \rangle(t)$ para o mapa de Kaplan-Yorke com $a = 2$	66
4.23	$\langle \ln_q \xi \rangle(t)$, $\langle S_q \rangle(t)$ para o mapa de Kaplan-Yorke com $a = a_c$	67
5.1	Retrato de fases $a = 0$, $a = 0.2$, $a = 2$	76
5.2	Evolução dinâmica do mapa (5.3) com $a = 2$ e $b = 0.5$	77
5.3	Evolução dinâmica do mapa (5.3) com $a = 0.2$ e $b = 0.5$	78
5.4	Evolução dinâmica do mapa (5.3) com $a = 0$, $b = 0.5$ e $b = 1$	82
5.5	$\langle \ln \xi \rangle$ com $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $b = 0.50$	85
5.6	$\langle S_q \rangle(t)$, para $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $b = 0.5$	86
5.7	$\langle \ln \xi \rangle(t)$ para $b = 0.2$ com diferentes valores de a	87
5.8	$\langle \ln \xi \rangle(t)$ para $b = 0.5$ com diferentes valores de a	88
5.9	$\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para $b = 0.2$ com $0 < a < 1$	89
5.10	$\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para $b = 0.5$ com $0 < a < 1$	90
5.11	$\langle S_q \rangle(t)$, para $a = 2.0$ e $b = 0.5$	91
5.12	$\langle S_q \rangle(t)$, $a = 0.2$ e $b = 0.2$	92
5.13	$\langle S_q \rangle(t)$, para $a_1 = a_2 = a = 0.4$ e $b = 0.2$	93
5.14	$\langle S_q \rangle(t)$, para $a_1 = a_2 = 0.2$ e $b = 0.5$	94
5.15	Índice entrópico versus a com $b = 0.2$ e $b = 0.5$	95
5.16	Inclinações K_e^{av} , λ_{sen}^{av} versus a	96
5.17	$\langle S_q \rangle(t)$, para $a_1 = a_2 = a = b = 0$	97
5.18	Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para $a_1 = a_2 = a = 0$ com $b = 0.2$	98
5.19	Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para $a_1 = a_2 = a = 0$ e $b = 1$	99
5.20	q_{sen}^{av} , q_c^{av} versus b com $a_1 = a_2 = a = 0$	100
5.21	Fator α versus a	101

Lista de Tabelas

2.1	Mapas z -Logísticos [34]	11
3.1	Índices entrópicos da sensibilidade e da relaxação	28
4.1	Mapas z -Logísticos: um ensemble na vizinhança de $x = 0$	42
4.2	Mapas z -Logísticos: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$	42
4.3	Mapas z -Exponenciais: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$	48
4.4	Mapas z -Logísticos: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$	64
4.5	Mapas z -Exponenciais: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$	64

Capítulo 1

Introdução

Uma grande variedade de fenômenos naturais mostra um comportamento complexo, imprevisível e aparentemente aleatório. Os exemplos comuns incluem o fluxo turbulento de um córrego da montanha, a variação climática, os redemoinhos do creme, agitados lentamente, em um copo de café. O paradigma para esta classe de fenômenos macroscópicos é o problema do fluxo turbulento nos fluídos. Exemplos adicionais do comportamento complexo, irregular ocorrem na dinâmica das moléculas e dos átomos em um gás ou partículas carregadas em um plasma. Estes sistemas microscópicos definem uma outra classe de problemas físicos importantes que levam a uma pergunta: Como os movimentos determinísticos e reversíveis de partículas individuais podem causar o comportamento irreversível do sistema, como descrito pela mecânica estatística e termodinâmica?

Embora a física tenha feito grandes avanços nos últimos cem anos, as descrições teóricas destes fenômenos complexos apresentam problemas ainda por resolver. A dificuldade encontra-se por exemplo, no caráter não-linear das equações de Navier-Stokes para os fluídos e as equações de Newton para três ou mais partículas que interagem. Como estas equações geralmente não admitam soluções analíticas exatas, a construção de teorias úteis que possam predizer, por exemplo, as fricções na asa de um avião ou o limite de validade da mecânica estatística, são muito difíceis. A disseminação do uso do computador, em meados do século XX, marcou uma linha divisória no estudo de sistemas dinâmicos. Com o computador, pode-se experimentar com equações, calculando suas soluções a partir das condições iniciais e dos valores dos parâmetros desejados. A coleção de resultados

numéricos obtidos ajuda a desenvolver uma intuição sobre os possíveis comportamentos que essas equações apresentam. Como consequência, nos últimos vinte anos foi feito um progresso considerável usando uma síntese única de simulações numéricas e da aproximação analítica. Esta nova aproximação, que combina “experimentos” numéricos com a análise matemática, deu origem a uma nova área interdisciplinar dentro do quadro da dinâmica não-linear. O trabalho feito neste campo foi aplicado não somente aos problemas da física, mas também a uma grande variedade de problemas não-lineares em outras áreas científicas, como a evolução de reações químicas, do controle da geração de circuitos elétricos, da interação de populações biológicas, da resposta de células cardíacas aos impulsos elétricos e da ascensão e queda de preços na bolsa de valores.

Os especialistas em dinâmica não-linear usam a palavra “caos” como um termo técnico com um significado matemático preciso para definir um comportamento irregular, imprevisível do sistema que é determinístico e não-linear. Issac Newton acreditava que as equações da mecânica clássica envolviam apenas um universo ordenado e regular, no entanto, hoje já se sabe que tal afirmação não é verdadeira.

Tradicionalmente, os problemas fundamentais associados com as origens do caos em fluxos turbulentos (com os fundamentos microscópicos da mecânica estatística e com surgimento do comportamento aleatório em uma variedade de outras áreas) vinham sendo evitados, utilizando-se o argumento de que não seria humanamente possível descrever estes fenômenos pela existência de muitas partículas e graus de liberdade. Não é surpreendente que sistemas complicados, como a dinâmica atmosférica ou a variação do preço de uma ação na bolsa de valores, exibam comportamentos complexos, já que a evolução desses sistemas é influenciado por um número enorme de fatores. Entretanto, descobria-se que sistemas extremamente simples podem exibir comportamento caótico como aqueles exemplos padrões.

Com efeito, o processo iterativo não-linear mais simples possível, o mapa logístico padrão,

$$x_{t-1} = 1 - ax_t^2 \quad , (0 < a \leq 2, -1 \leq x_t \leq 1) \quad (1.1)$$

exibe já um comportamento dinâmico complexo, bastante rico conforme se varia o valor

do parâmetro de controle a [1]. Muitos matemáticos foram inspirados por este e, desde então, um córrego contínuo de trabalhos sobre mapas iterativos está surgindo no mundo matemático.

Os gráficos desenhados pela dinâmica irregular dos mapas logísticos, mapas padrão e muitos outros, fornecem um retrato do caos. Como muitos sistemas não-lineares na natureza, estes modelos matemáticos exibem um comportamento que parece ser aleatório apesar do fato de suas equações de movimento ser inteiramente determinísticas. Mas se os movimentos são completamente determinados e os sistemas relativamente simples, de onde vem os comportamentos complexos que eles mostram? Quais são os sintomas que nos permitem identificar o caos quando o vemos?

Desde a descoberta da imprevisibilidade nos sistemas determinísticos, os quais conduziram ao estudo de sistemas dinâmicos, muitos trabalhos foram desenvolvidos para encontrar as propriedades do caos que poderiam dar uma classificação destes sistemas. Por exemplo, indicadores dinâmicos como a sensibilidade às condições iniciais, os expoentes de Lyapunov, a entropia de Kolmogorov-Sinai (KS) [2] e outros foram desenvolvidos. Assim por exemplo, aparecem a classe dos chamados “sistemas-K” ou sistemas de Kolmogorov que apresentam um alto grau de irregularidade, suficiente para justificar uma descrição estatística. Os sistemas-K exibem uma propriedade matemática conhecida como “mixing”, ou seja, uma entropia de Kolmogorov-Sinai positiva. Isto significa que os sistemas em questão são extremamente sensíveis às condições iniciais, de modo que duas trajetórias inicialmente próximas divergem segundo uma taxa exponencial. Esta taxa é medida pelos expoentes de Lyapunov, que são equivalentes à entropia KS, por meio da identidade de Pesin [3], e podem facilmente ser calculados.

Entretanto, recentemente verificou-se a existência de sistemas dinâmicos naturais e artificiais para os quais todos os indicadores conhecidos não detectam a presença do caos, mas os resultados numéricos mostram uma ordem elevada de imprevisibilidade para órbitas destes sistemas. Este comportamento foi chamado, na literatura como caos “fraco”, para distingui-lo do caos “forte” (entropia KS positiva). O estudo da dinâmica do caos *fraco* mostrou ser importante para aplicações práticas. Hoje em dia são conhecidas

conexões com muitos fenômenos físicos, biológicos, e econômicos: auto-organização crítica, o denominado limiar do caos, a dinâmica intermitente, processos anômalos da difusão e muitos outros. Nestes exemplos da dinâmica do caos fraco, os indicadores dinâmicos, tais como a sensibilidade às condições iniciais e a entropia de KS, são nulos. Estes indicadores dinâmicos não podem distinguir os comportamentos anômalos destes sistemas daqueles que têm uma dinâmica trivial. Este fenômeno conduziu à necessidade de generalizar estes indicadores dinâmicos. Porém, na última década tem-se verificado um grande desenvolvimento no estudo dos fenômenos não-lineares com a introdução de novas abordagens e conceitos no tratamento de sistemas dinâmicos conservativos e dissipativos. Além disso, há sistemas dinâmicos caóticos não-lineares que apresentam estruturas fractais no seu espaço de fases. Dois dos indicadores dinâmicos mais empregados para caracterizar tais sistemas são a sensibilidade às condições iniciais (expoentes de Lyapunov) e a entropia KS. Recentemente foram introduzidas generalizações para estes indicadores inspiradas na entropia não-extensiva [4].

Uma das novas abordagens, que promete uma caracterização adequada destes sistemas dinâmicos que apresentam caos fraco, é relacionada à generalização não-extensiva [5] da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG), que nesta última década despertou muito interesse naquelas situações físicas que não satisfazem as condições habituais do equilíbrio de BG, ou seja, aleatoriedade insuficiente e movimento limitado ou não uniforme no espaço de fases pertinente, que resultam em propriedades dinâmicas anômalas, veja [6, 7, 14] entre outros.

Em 1988 C. Tsallis formulou uma proposta de generalização da Mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, baseada na forma entrópica

$$S_q(t) = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W [p_i(t)]^q}{q-1} \quad (q \in \mathcal{R}), \quad (1.2)$$

que recupera a entropia padrão de BG $S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ no limite $q \rightarrow 1$. A beleza desta equação, expressa em sua simplicidade, não seria completa se não falássemos de uma das características importantes (desta nova formulação) contida no significado do índice entrópico q . Esta questão tem de fato relação com as propriedades intrínsecas da

dinâmica microscópica do sistema. Neste ponto, quero enfatizar que, a razão desta tese, é justamente mostrar algumas das características da natureza do parâmetro q , estudando sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade, que apresentam caos fraco para certos valores do parâmetro de controle do sistema: ou seja, situações em que o sistema em questão encontra-se no limiar do caos ou na transição do comportamento regular ao caótico. Nestes estados críticos, não é possível uma descrição quantitativa baseada na estatística de BG.

O objetivo da presente tese é caracterizar, dentro do marco da mecânica estatística generalizada, sistemas dinâmicos dissipativos e conservativos de baixa dimensionalidade nos casos do caos forte e fraco (no limiar do caos) por meio de dois indicadores dinâmicos generalizados: a entropia de Kolmogorov-Sinai e a sensibilidades às condições iniciais em suas versões não-extensivas. Nos capítulos 2, 3 e 4 é analisada a família dos mapas logísticos. No capítulo 4 além dos mapas citados, analisamos uma nova classe de mapas dissipativos de uma dimensão, a qual é chamada de exponencial e que foi proposta por C. Tsallis [8]. Na parte final deste capítulo analisa-se o mapa dissipativo bidimensional de Kaplan-Yorke. No capítulo 5 estudamos um sistema conservativo composto por dois mapas padrão simplecticamente acoplados. Finalmente no capítulo 6, enumeramos as conclusões da presente tese.

Capítulo 2

Generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai: Mapas z -logísticos

2.1 Introdução

Recentemente na área de sistemas dinâmicos não-lineares, inúmeros trabalhos vêm se dedicando ao estudo da sensibilidade às condições iniciais, multifractalidade e ao comportamento da entropia de Kolmogorov-Sinai (KS) destes sistemas. Neste contexto, vale ressaltar que estes estudos incluem sistemas dissipativos (mapas de baixas dimensões [4, 9, 10, 11, 12], dinâmica simbólica [13]) e conservativos (Hamiltonianos de muitos corpos e de longo alcance [14, 15, 16], mapas conservativos [17]). Antes de descrever a finalidade do Capítulo atual, faremos uma pequena revisão sobre a sensibilidade às condições iniciais e a multifractalidade do atrator caótico.

Como já é conhecido na literatura ([4, 9, 10, 11]), para sistemas de uma dimensão é conveniente introduzir a função

$$\xi(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}, \quad (2.1)$$

onde $\Delta x(0)$ é a discrepância das condições iniciais no tempo $t = 0$, e $\Delta x(t)$ é sua dependência temporal. Pode-se mostrar que ξ satisfaz à equação diferencial

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad (2.2)$$

onde λ_1 é o expoente de Lyapunov, assim

$$\xi(t) = \exp(\lambda_1 t). \quad (2.3)$$

Conseqüentemente, se $\lambda_1 < 0$ ($\lambda_1 > 0$) o sistema é fortemente insensível (sensível) às condições iniciais. Por outro lado, se $\lambda_1 = 0$, espera-se que a função ξ satisfaça à equação diferencial

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_q \xi^q, \quad (2.4)$$

cuja solução é

$$\xi(t) = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{1/(1-q)} \quad (q \in \mathcal{R}), \quad (2.5)$$

qual recupera o caso exponencial para $q = 1$, enquanto para $q \neq 1$ obtemos um comportamento segundo uma lei de potências. Se $q > 1$ ($q < 1$) e $\lambda_q < 0$ ($\lambda_q > 0$) o sistema se diz ser fracamente insensível (sensível) às condições iniciais. Embora a forma assintótica da sensibilidade às condições iniciais segundo uma lei de potências tem sido observada nas últimas décadas [18, 19, 20], a equação (2.5) (a qual de fato corresponde ao crescimento do tipo lei de potências do limite superior de $\xi(t)$) fornece em princípio uma descrição mais completa que $\xi(t) \propto t^{1/1-q}$ ($t \gg 1$). No limiar do caos (onde $\lambda_1 = 0$), este limite superior ($\xi \propto t^{1/1-q}$) nos permite estimar o valor do índice entrópico relevante $q \equiv q_{sen}$ para o mapa em questão. O sub-índice "sen" refere-se a palavra sensibilidade (algumas vezes na literatura esse parâmetro é denominado q^*). Este método (sensibilidade às condições iniciais) foi usado com sucesso para uma variedade de mapas: logístico [4], z -logístico [9], circular [10] and z -circular [11]. Com objetivo de elucidar possíveis confusões, vale ressaltar que a sensibilidade às condições iniciais do tipo lei de potências implica que os expoentes padrão de Lyapunov são nulos, mas o oposto não é verdadeiro. Certamente, os expoentes nulos de Lyapunov implicam somente que a sensibilidade às condições iniciais é uma função sub-exponencial, como por exemplo, as funções logarítmicas, as exponenciais esticadas, as leis de potências e inúmeras outras funções.

Agora nós consideramos uma outra propriedade interessante dos sistemas dinâmicos dissipativos: os aspectos geométricos do atrator no limiar do caos. A fim de descrever o comportamento de escala do atrator dinâmico crítico é conveniente introduzir o formalismo multifractal [21, 22]. Neste formalismo, é possível introduzir uma função de partição $\chi_Q(N) = \sum_{i=1}^N p_i^Q$, onde p_i representa a probabilidade na caixa i entre as N caixas da medida (é necessário advertir o leitor que nós usamos Q em vez da notação padrão q da literatura sob multifractais afin evitar a confusão com o índice não-extensivo q). No limite $N \rightarrow \infty$, a contribuição para a função de partição é proporcional a $N^{-\tau(Q)}$, que vem de um subconjunto de todas as caixas possíveis cujo número escala de acordo com $N_Q \propto N^{f(Q)}$, onde $f(Q)$ é a dimensão fractal do subconjunto. O conteúdo de cada caixa contribui para uma lei de escala $P_Q \propto N^{-\alpha(Q)}$ e todos estes expoentes estão relacionados por uma transformação de Legendre $\tau(Q) = Q\alpha(Q) - f(Q)$. Assim, $\tau(Q)$ e $\alpha(Q)$ são caracterizadas pela função multifractal $f(\alpha)$, a qual reflete a dimensão do subconjunto com intensidade singular de α . Nos pontos finais da curva $f(\alpha)$, esta intensidade singular é associada com as regiões mais concentradas (exatamente, $\alpha_{min} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \alpha(Q)$) e mais raras ($\alpha_{max} = \lim_{Q \rightarrow 0} \alpha(Q)$) no atrator. Recentemente [10], os comportamentos de escala destas regiões foram utilizadas no estudo da divergência do tipo lei de potências de trajetórias vizinhas e foi proposto uma nova fórmula de escala

$$\frac{1}{1 - q_{sen}} = \frac{1}{\alpha_{min}} - \frac{1}{\alpha_{max}}. \quad (2.6)$$

Esta fórmula constitui um método completamente diferente para o cálculo do índice q_{sen} . Os trabalhos precedentes [4, 9, 10, 11] evidenciaram, para várias famílias de mapas, que os resultados destes dois métodos acima mencionados para calcular os valores de q_{sen} são os mesmos dentro de uma boa precisão.

Agora nós estamos preparados para descrever a finalidade do Capítulo atual, isto é, uma generalização específica da entropia de Kolmogorov-Sinai K_1 . Para um sistema dinâmico caótico, se pode definir esta entropia como o incremento, por unidade de tempo,

da entropia padrão de Boltzmann-Gibbs

$$S_1 = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (k_B \equiv 1)' \quad (2.7)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, W o número de estados possíveis em um sistema e p_i a probabilidade do sistema ser encontrado no estado i .

Além disso, é bem conhecido que a entropia KS (introduzida na comunidade matemática através de dinâmica simbólica, mas aqui introduzida em termos probabilísticos) está relacionada aos expoentes de Lyapunov desde que a igualdade de Pesin [3] postula: para uma vasta classe de sistemas dinâmicos não-lineares, $K_1 = \lambda_1$ se $\lambda_1 > 0$ e se não, $K_1 = 0$ (K_1 é igual á soma de todos os Lyapunov positivos se a dimensão do sistema for maior que um). Por outro lado, é conhecido que a entropia KS pode ser definida nos termos de uma *única* trajetória no espaço de fases (veja [23] para detalhes), usando a representação simbólica das regiões do espaço de fases particionado. Entretanto, parece que, em quase todos os casos, esta definição pode ser substituída equivalentemente por uma baseada em um *ensemble* de condições iniciais. Esta é a versão que nós usaremos nesta tese.

Os casos marginais, isto é, aqueles para os quais $\lambda_1 = 0$, incluem as bifurcações com período duplo e tangencial, também como o limiar do caos. Para estes casos, uma versão generalizada da entropia Kolmogorov-Sinai K_q foi introduzida [4] como a taxa do incremento da própria entropia não-extensiva

$$S_q(t) = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W [p_i(t)]^q}{q - 1} \quad (k \equiv 1). \quad (2.8)$$

Esta entropia não-extensiva permite uma generalização da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs [5, 24, 25] e recupera a entropia padrão de BG $S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ no limite $q \rightarrow 1$.

Uma revisão geral das propriedades desta entropia e tópicos relacionados e recentes fundamentos teóricos do formalismo estão disponíveis em [26, 27, 28]. Além disso, novas verificações experimentais vêm sendo produzidas em turbulência totalmente desenvolvida [6, 29], colisões de elétron-pósitron e outras partículas em física de altas energias [30], difusão anômala da Hydra viridissima [31]. Recentemente emergiram aplicações de emaranhamento e separabilidade quânticos (vide [32] e suas referências).

Assim, para a versão generalizada da entropia KS, propôs-se[4]

$$K_q \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S_q \rangle(t)}{t} \quad (2.9)$$

onde t é o tempo, W é o número de regiões na partição do espaço de fases e N é o número de pontos (ou seja, as condições iniciais) que evoluem com o tempo. Espera-se que a igualdade de Pesin (para sistemas de uma dimensão) seja generalizada como segue:

$K_q = \lambda_q$ se $\lambda_q > 0$ e se não, $K_q = 0$.

Estas idéias têm sido usadas muito recentemente [33] para construir um terceiro método para o cálculo do valor de q_{sen} . Neste trabalho, conjectura-se que: I) existe um valor especial de q_{sen} tal que K_q é finito para $q = q_{sen}$, desaparece para $q > q_{sen}$ e diverge para $q < q_{sen}$, II) este valor de q_{sen} coincide com aquele obtido usando os outros dois métodos anteriormente descritos (mais exatamente, das equações (2.5) e (2.6)). Em [33] verificaram-se estas conjecturas com os cálculos numéricos para o mapa logístico padrão encontrando que o incremento de $S_q(t)$ é linear quando o valor do índice q coincide com $q_{sen} \simeq 0.2445$ o qual suporta o ponto de vista que todos os três métodos dão um mesmo valor especial do índice q_{sen} . Embora os resultados de Latora e co-autores [33] forneçam uma evidência forte em favor deste cenário, não há nenhuma dúvida quanto a necessidade de estudar outros mapas, com o objetivo de verificar se os resultados deste método de incremento da taxa da entropia (ou seja, a entropia generalizada de Kolmogorov-Sinai) reproduzem os mesmos valores resultantes dos dois métodos supracitados. O objetivo deste Capítulo é aplicar este raciocínio ao estudo de mapas z -logísticos.

2.2 Entropia de Kolmogorov-Sinai

Considere o mapa z -logístico

$$x_{t+1} = 1 - a|x_t|^z, \quad (2.10)$$

onde $1 < z$, $0 < a \leq 2$, $-1 \leq x_t \leq 1$. Estes mapas apresentam uma rota de dobramento de período ao caos e o parâmetro z é a inflexão do mapa em seu ponto extremo. Os valores de a_c no limiar do caos, assim como os valores de q_{sen} calculados segundo as equações (2.5) e (2.6) são indicados na tabela 2.1 para os valores representativos de z [34].

Tabela 2.1: Mapas z -Logísticos [34]

z	a_c	q_{sen}
1.10	1.1249885...	-2.33 ± 0.02
1.25	1.2095137...	-0.78 ± 0.01
1.50	1.2955099...	-0.15 ± 0.01
1.75	1.3550607...	0.11 ± 0.01
2.00	1.40115518909...	0.24 ± 0.01
2.50	1.4705500...	0.39 ± 0.01
3.00	1.5218787...	0.47 ± 0.01
5.00	1.6455339...	0.61 ± 0.01

Agora podemos descrever o procedimento numérico que nós usamos como terceiro método para o cálculo dos índices entrópicos relevantes $q_{sen}(z)$. Este método foi introduzido primeiramente em [17] para sistemas conservativos e usado por Latora e co-autores [33] para o mapa logístico padrão $z = 2$. Nós dividimos o intervalo $-1 \leq x \leq 1$ em W janelas iguais para o mapa z -logístico. Posteriormente escolhemos (aleatoriamente ou não) uma destas janelas e selecionamos (aleatoria ou uniformemente) N valores iniciais de x (todos no interior da janela escolhida) para o mapa z -logístico com um certo valor do parâmetro de controle a . À medida que t evolui, estes N pontos espalham-se tipicamente dentro do intervalo do espaço de fases e este nos fornece um conjunto $\{N_i(t)\}$ com $\sum_{i=1}^W N_i(t) = N$, $\forall t$, que conseqüentemente resulta em um conjunto de probabilidades $\{p_i(t) \equiv N_i(t)/N\}$. Desde que para $t = 0$ todos os N pontos se encontram dentro da janela escolhida, $S_q(0) = 0$ e a medida que o tempo evolui, $S_q(t)$ atravessa gradualmente três regiões sucessivas (ver as Figs. 2.3–2.6) como foi indicado em [17]. Na primeira região, a entropia é aproximadamente constante com o tempo e nenhuma conclusão genérica pode ser feita. Na segunda região, $S_q(t)$ começa aumentar e finalmente na última região S_q tende assintoticamente para seu valor de saturação (o qual não pode exceder o valor de S_q que corresponde à equiprobabilidade, isto é, $(W^{1-q} - 1)/(1 - q)$ para $q \neq 1$, e $\ln W$ para $q = 1$). Assim, espera-se que o aumento linear da entropia apropriada (i.e., com o valor apropriado de $q \equiv q_{sen}$) se encontre na região intermediária. Antecipando nosso resultado principal, diríamos que para N e W cada vez maiores (sempre tendo em vista

que $N \gg W$), na região intermediária, nós observamos, em todos os casos, somente para um valor especial de q , exatamente $q_{sen}(z)$, emerge um crescimento linear de S_q com o tempo. Nós definimos a inclinação correspondente como a entropia generalizada de Kolmogorov-Sinai K_q^* . Com valores de a para os quais $\lambda_1 > 0$ nós verificamos que $q_{sen} = 1$. Mas no limiar do caos, obtemos $q_{sen} < 1$.

No contraste com os casos onde o caos forte existe, para $S_q(t)$ no limiar do caos, aparecem flutuações consideravelmente grandes devido ao fato de que o atrator ocupa somente uma parte minúscula do espaço de fases disponível. As flutuações dificultam a tarefa de determinar o valor de q para o qual se obtém a linearidade. A fim de evitar tais flutuações, nós adotamos um procedimento de média, introduzido em [33], tendo em conta só as condições iniciais “eficientes”. O procedimento é como segue: nós escolhemos a distribuição inicial dos N pontos em uma das W janelas da partição e contamos o número total de janelas ocupadas enquanto o tempo evolui, por exemplo, entre os tempos $t = 1$ e $t = 50$. Este número é uma medida da eficiência de espalhamento dessa janela particular. Após ter estudado cada uma das $W/2$ janelas no intervalo $-1 \leq x \leq 0$ para os mapas z -logísticos, a média é feita sobre as janelas iniciais para as quais o número total de janelas ocupadas entre $1 \leq t \leq 50$ é maior do que um limite fixo, (ver Fig. 2.1 e as Figs. 2.2(A) e (B)). Assim, estaremos dando atenção ao limite superior da dependência temporal de S_q . Nossos resultados para valores típicos de z para os mapas z -logísticos no limiar do caos são mostrados nas Figs. 2.4-2.6. Nós usamos $W = 10^5$, $W = 3.2 \times 10^4$ com $N = 10 \times W$ para os mapas z -logísticos. Os valores usados são suficientemente grandes para tornar a evolução temporal da entropia na região intermediária (após o transiente inicial e antes da saturação) gradualmente independente de W . Nos gráficos, observa-se que os pontos onde começam as saturações das curvas deslocam-se de acordo com o tempo e W : quanto maior o tempo e W , maior o deslocamento das curvas, no entanto, tal afirmativa não é totalmente verdadeira na região temporal intermediária, onde as curvas são praticamente insensíveis ao valor de W .

Em todos os casos, o crescimento de $S_q(t)$ na região intermediária do tempo é linear quando $q = q_{sen}$, embora esta seja côncava para $q < q_{sen}$ e convexa para $q > q_{sen}$, ou seja,

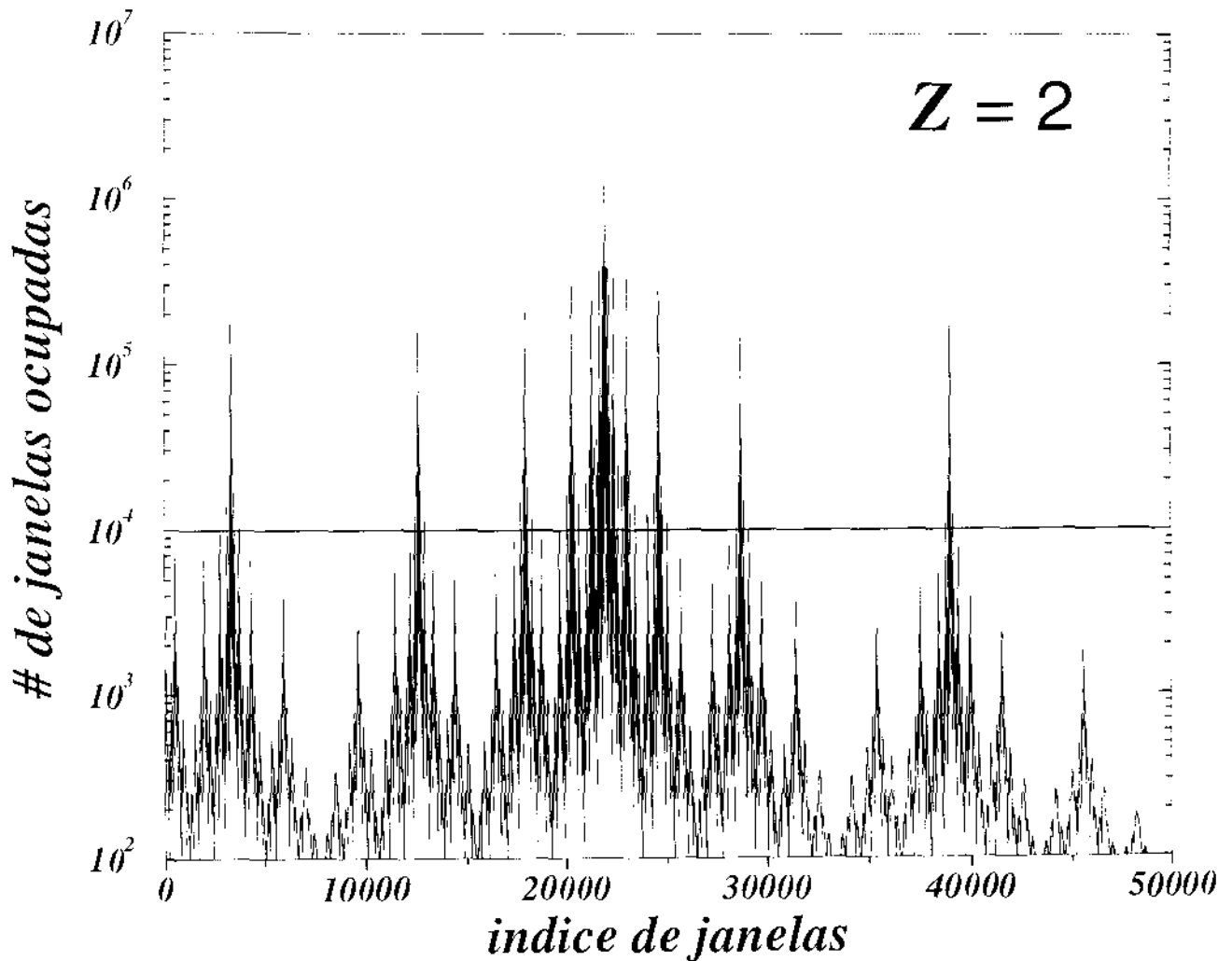


Figura 2.1: Número total de janelas ocupadas como função do índice de janelas (desde o índice 1 até 50000, correspondente a $x = -1$ e $x = 0$ respectivamente) para o mapa logístico ($z = 2$) com $W = 10^5$ e $N = 10 \times W$. A média para $S_q(t)$ é feita sobre as janelas iniciais para as quais o número total de janelas ocupadas entre $1 \leq t \leq 50$ é maior do que um limite fixo. Este limite é indicado pela linha horizontal: 10^4 .

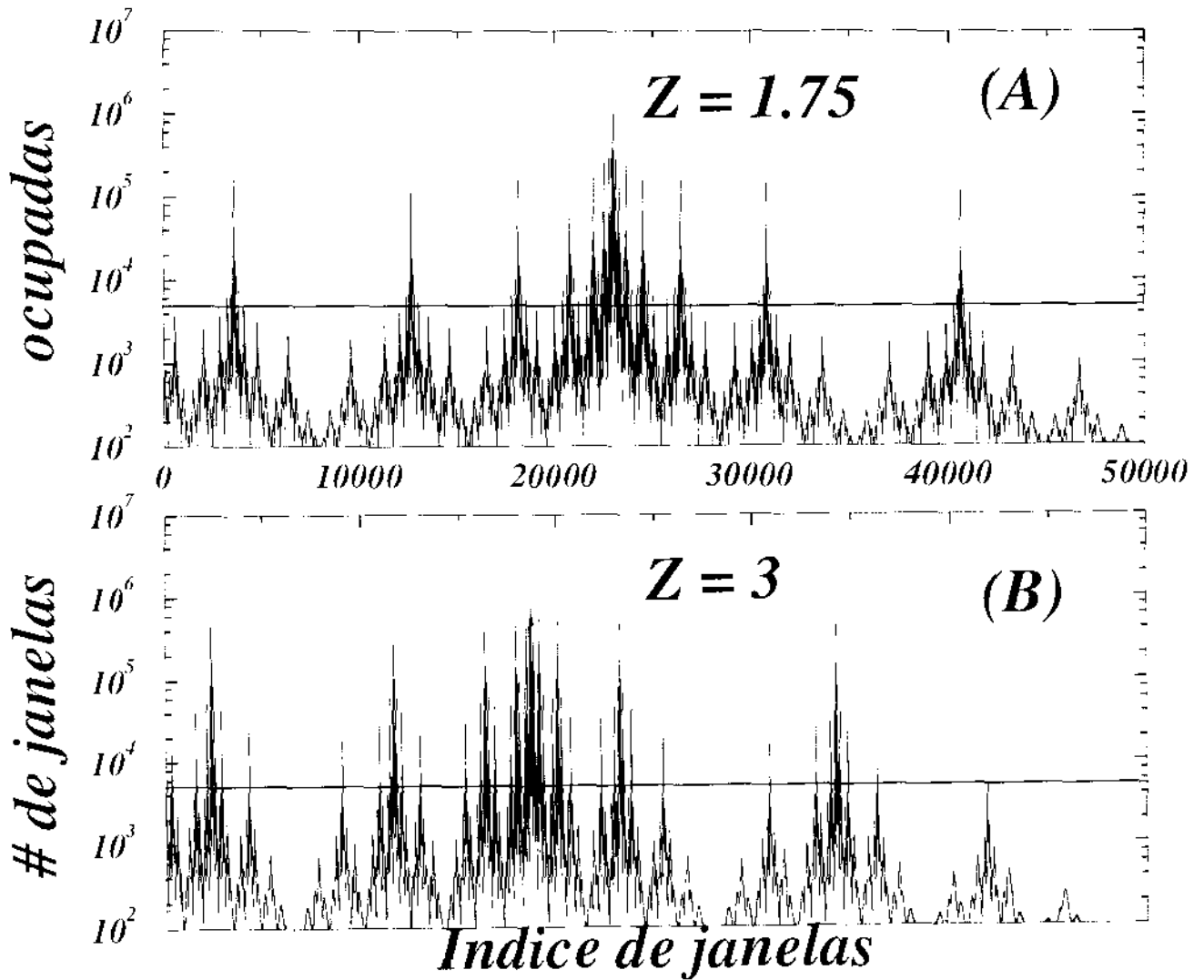


Figura 2.2: Número total de janelas ocupadas como função do índice de janelas (desde o índice 1 até 50000, correspondente a $x = -1$ e $x = 0$ respectivamente) para o mapa logístico (A) $z = 1.75$ e (B) $z = 3$ com $W = 10^5$ e $N = 10 \times W$. A média para $S_q(t)$ é feita sobre as janelas iniciais para as quais o número total de janelas ocupadas entre $1 \leq t \leq 50$ é maior do que um limite fixo. Este limite é indicado pelas linhas horizontais: 5000 para ambos mapas.

K_q é uma grandeza finita para $q = q_{sen}$, diverge para $q < q_{sen}$ e é nula para $q > q_{sen}$. A fim de fornecer uma sustentação quantitativa a este comportamento, nós ajustamos as curvas com o polinômio $S(t) = A + Bt + Ct^2$ no intervalo $[t_1, t_2]$ caracterizando a região intermediária. Nós definimos o coeficiente $R \equiv C(t_1 + t_2)/B$ como uma medida da importância do termo não-linear no ajuste; R é nulo para um ajuste estritamente linear (veja os gráficos inseridos das Figs. 2.4, 2.5 e 2.6). Os tempos t_1 e t_2 são definidos como o extremo do transiente inicial (durante o qual S_q é aproximadamente constante) e o começo da saturação respectivamente. Das figuras inseridas nos gráficos, nós vemos também que os sinais de R em ambos lados de q_{sen} são consistentes com as curvaturas de $S_q(t)$ na região intermediária.

2.3 Conclusões

Faremos algumas considerações gerais afim de resaltar a importância do presente Capítulo e seus resultados. A entropia de Kolmogorov-Sinai K_1 é um conceito importante em sistemas dinâmicos caóticos dissipativos (como os mapas de uma dimensão considerados aqui) e conservativos (como os Hamiltonianos clássicos de muitos corpos que satisfazem o teorema de Liouville). Sua definição é baseada em uma divisão do espaço de fases acessível em um conjunto de W subespaços visitados, ao longo do tempo, com uma certa ordem complexa que parte de um único ponto inicial no espaço de fases. Se associarmos a cada subespaço um símbolo, nos teremos $W^{\mathcal{N}}$ palavras possíveis de comprimento \mathcal{N} . Estas $W^{\mathcal{N}}$ são visitadas ao longo do tempo com probabilidades $\{\pi_l\}$ ($l = 1, 2, \dots, W^{\mathcal{N}}$). Este conjunto das probabilidades permitem o cálculo da entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon $S_1(\{\pi_l\}) = -\sum_l \pi_l \ln \pi_l$. No limite $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, $S_1(\{\pi_l\})$ é proporcional a \mathcal{N} se o sistema mistura-se *exponencialmente* rápido (ou seja, expoentes positivos de Lyapunov), e K_1 é definido como o *supremum* do $\lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} S_1(\mathcal{N})/\mathcal{N}$. Embora nós estejamos cientes de nenhuma prova geral, existe uma opinião comum de que esta definição, que é computacionalmente muito complicada, pode ser convenientemente substituída por aquela que nós usamos aqui, baseado em um ensemble de condições iniciais em vez de uma única trajetória. Em outras palavras, nós escolhemos N condições iniciais dentro de um

dos W subespaços, e ao longo do tempo estudamos o conjunto de probabilidades $\{p_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, W$) associadas com as ocupações daqueles subespaços. O conjunto $\{p_i\}$ permite o cálculo de $S_1(\{p_i\}) = -\sum_i p_i \ln p_i$, esperando-se que K_1 seja o *supremum* do limite $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t)/t$.

O cenário padrão que nós descrevemos é apenas um dos já existentes. O que mostramos aqui é um passo para adiante, embora seja somente para casos simples, à saber os mapas considerados neste Capítulo. Analisando a generalização [4] K_q da entropia KS baseada na entropia não-extensiva S_q , seja em sua formulação da trajetória ou do ensemble, nós mostramos um método que possa ser aplicável a situações muito mais gerais do que os mapas considerados aqui. Mostramos (numericamente) que existe um único valor q_{sen} tal que $K_{q_{sen}}$ é finito, sendo zero para $q > q_{sen}$ e infinito para $q < q_{sen}$. Se o sistema dinâmico não-linear for *fortemente caótico* (mixing exponencial no espaço de fases), então $q_{sen} = 1$, assim o esquema usual é recuperado. Mas se o sistema for só *fracamente caótico* (um mixing do tipo *lei de potências*, isto é, expoentes nulos de Lyapunov, mas com expoentes generalizados de Lyapunov $\lambda_{q_{sen}}$ positivos), então se espera que $q_{sen} < 1$. Espera-se que haja preservação da linearidade ao longo do tempo, no procedimento de média implementado, mas certamente não o *supremum* ou algo análogo a isso.

Como no caso analisado por Latora e co-autores [33], verificamos que o valor de q_{sen} é precisamente o mesmo obtido previamente com dois procedimentos completamente diferentes, exatamente a sensibilidade às condições iniciais segundo uma lei de potências (veja a Eq. (2.5)), e a estrutura multifractal do atrator caótico (veja a Eq. (2.6)). Esta unicidade do valor especial q_{sen} claramente fornece uma consistência sólida ao formalismo não-extensivo.

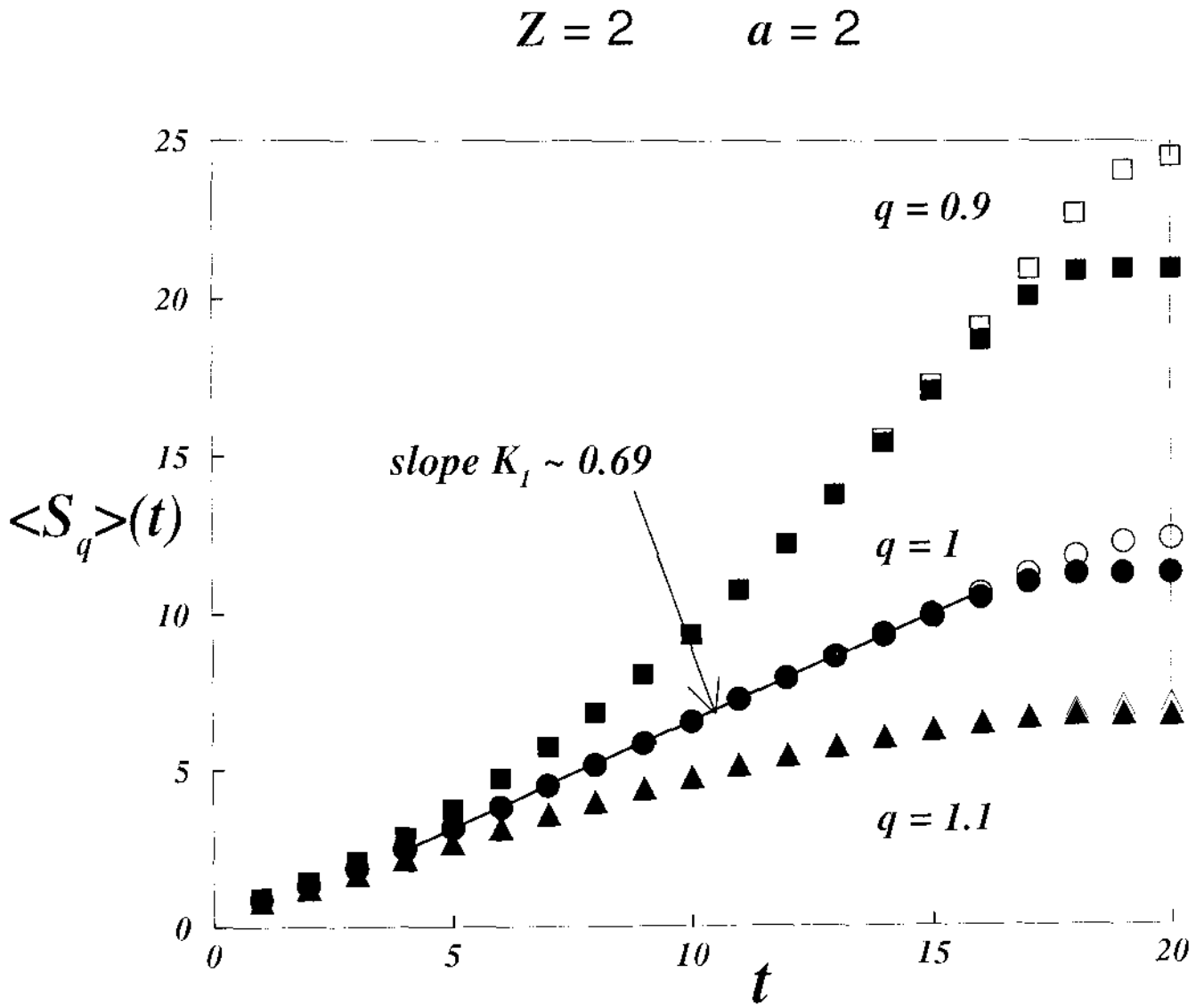


Figura 2.3: A evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para $z = 2$ com $a = 2.0$. Considera-se três valores diferentes de q , $W = 10^5$ (pontos cheios) e $W = 3 \times 10^5$ (pontos vazios) com $N = 10 \times W$. As curvas são o resultado da média sobre 400 (pontos cheios) e 800 (pontos vazios) realizações respectivamente. Neste caso o índice entrópico relevante é $q_{sen} = 1$; a inclinação da curva $\langle S_1 \rangle(t)$ é $K_1 \simeq 0.69$ o que é próximo do valor teórico $\lambda_1 = \ln 2$.

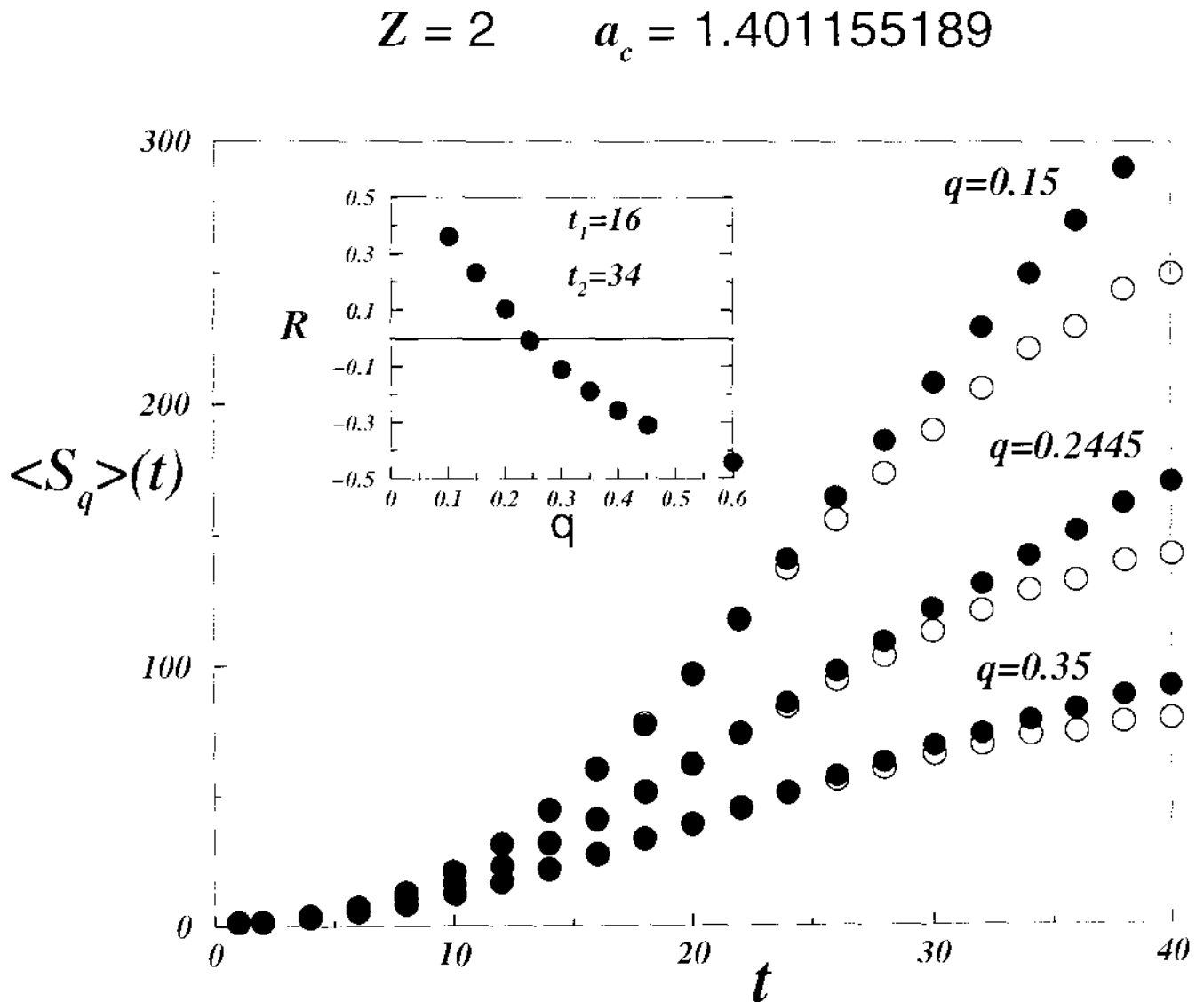


Figura 2.4: A evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para $z = 2$ com $a = a_c = 1.401155189\dots$. Consideramos três valores diferentes de q , $W = 10^5$ (pontos cheios) e $W = 3.2 \times 10^4$ (pontos vazios), com $N = 10 \times W$. As curvas mostradas são o resultado da média sobre 2537 (pontos cheios) e 697 (pontos vazios) realizações respectivamente. A figura inserida apresenta o gráfico do coeficiente de não-linearidade R versus q . Observe que R é próximo de 0 para $q \simeq 0.24$. Este valor foi obtido no intervalo de tempo $[t_1 = 16, t_2 = 34]$. Vale enfatizar-se que, conforme aumenta o número de intervalos W em que é dividido o espaço de fases, cresce o intervalo $[t_1, t_2]$.

$$Z = 1.75 \quad a_c = 1.35506075$$

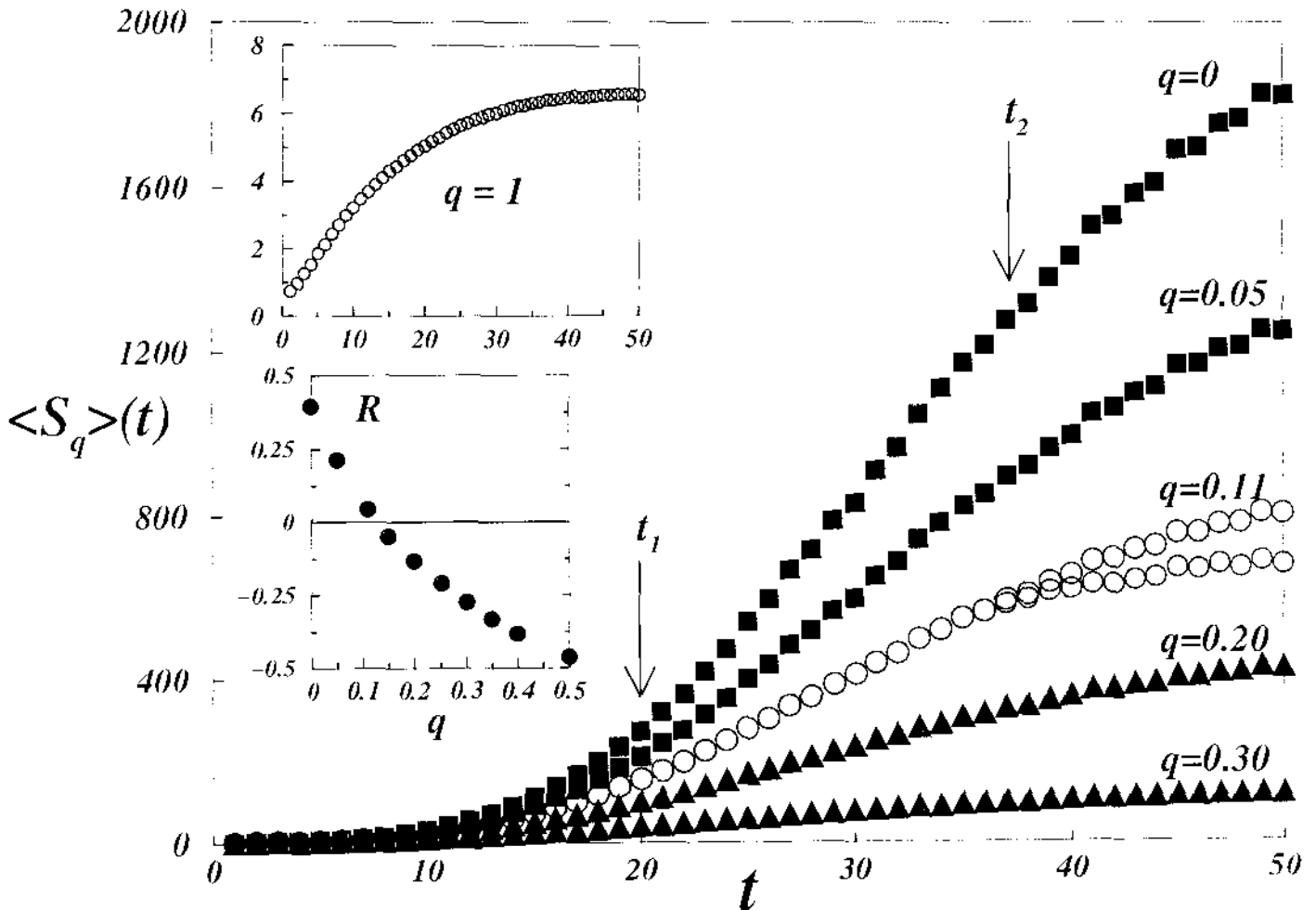


Figura 2.5: A evolução temporal da curva $\langle S_q \rangle$ para $Z = 1.75$ no limiar do caos ($a_c = 1.35506075\dots$). As curvas correspondem a cinco valores diferentes de q com $W = 10^5$ e somente para $q = 11$ consideramos também $W = 3.2 \times 10^4$ ($N = 10 \times W$). As curvas das entropias são o resultado da média sobre 1091 (700) realizações (das “melhores” janelas). As figuras inseridas apresentam (acima) a curva da entropia para $q = 1$ e o gráfico (abaixo) do coeficiente de não-linearidade R versus q . Neste último gráfico, R é próximo de 0 para $q \simeq 0.11$ no intervalo de tempo indicado pelas zetas.

$$Z = 3 \quad a_c = 1.52187879$$

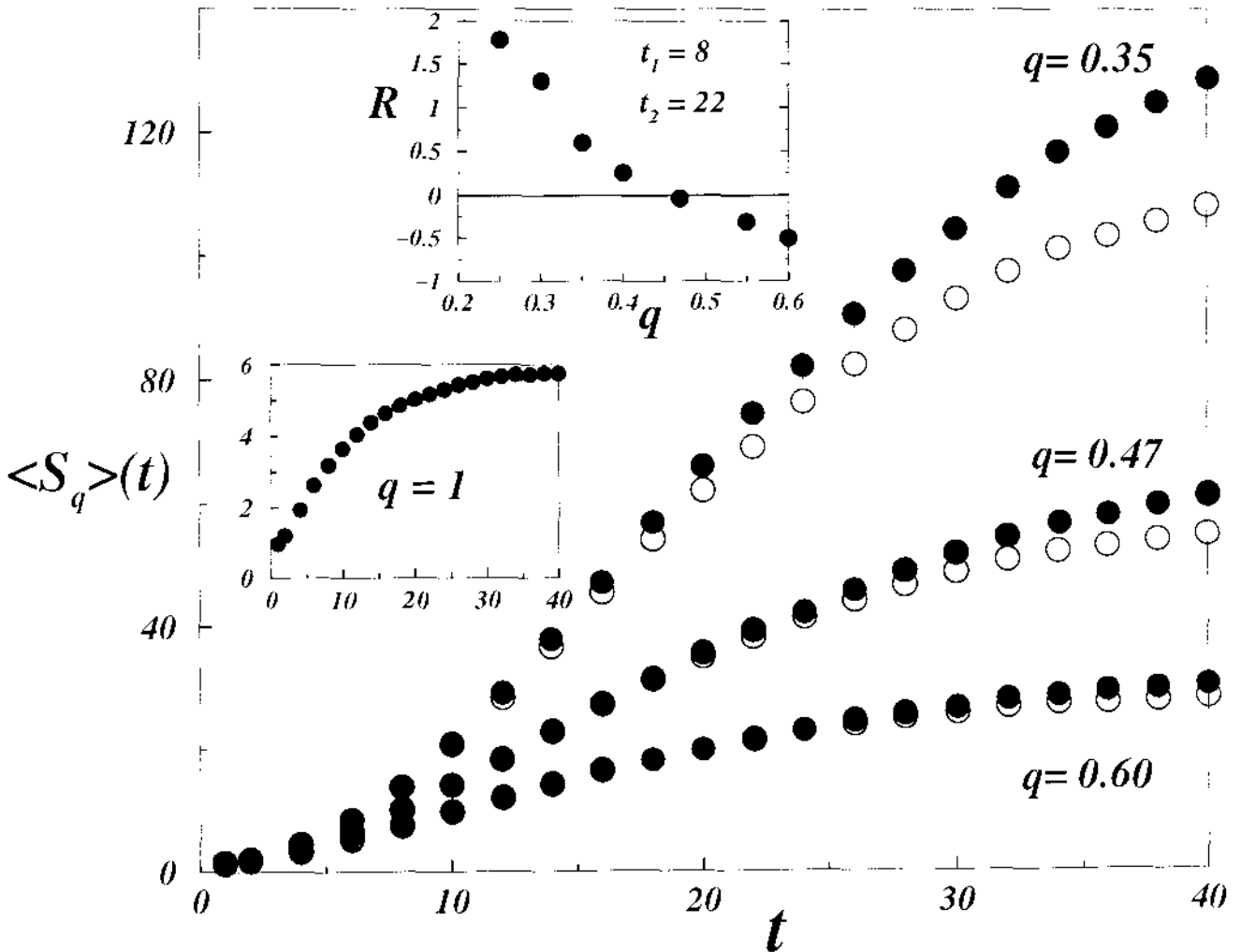


Figura 2.6: A evolução temporal da curva $\langle S_q \rangle$ para $Z = 3$ no limiar do caos ($a_c = 1.52187879\dots$). As curvas são ilustradas para quatro valores diferentes de q (o caso $q = 1$ indicase na figura inserida de abaixo), $W = 10^5$ (pontos cheios) e $W = 3.2 \times 10^4$ (pontos vazios) com $N = 10 \times W$. As curvas das entropias são o resultado da média sobre 1390 e 600 realizações (das “melhores” janelas). A figura inserida de acima, mostra o gráfico R versus q . Neste último, R é próximo de 0 para $q \simeq 0.47$ no intervalo de tempo $[t_1 = 8, t_2 = 22]$.

Capítulo 3

Dinâmica de relaxação nos mapas z -logísticos

3.1 Introdução

Uma das contribuições importantes que vêm do estudo de mapas de baixa dimensionalidade aponta para a compreensão das conexões fundamentais entre a dinâmica e a termodinâmica. De fato, a relação entre estas duas áreas importantes da física não é compreendida inteiramente e existem pontos que merecem investigações adicionais [35]. Devido ao fato de que estes sistemas são de baixa dimensionalidade, é possível investigá-los computacionalmente em seus espaços de fase completos, algo que é difícil (embora não impossível) de realizar para sistemas de alta dimensionalidade.

Como os sistemas complexos vêm sendo estudados intensamente (a complexidade refere-se aqui a presença de ao menos uma das seguintes características: interações de longo alcance entre partículas, memória de longa duração, natureza fractal do espaço de fases relevante, estrutura em rede do tipo mundo pequeno, entre outros), torna-se necessário fazer uma revisão deste tópico fundamental [36]. Atualmente, são conhecidos um número significativo de sistemas, por exemplo, fluxos turbulentos [6, 29], aniquilação elétron-pósitron [37], econômicos [38], o movimento da Hydra viridissima em solução aquosa [31], que não são descritos adequadamente por conceitos oriundos da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Sistemas como esses foram descritos com sucesso dentro do escopo da mecânica estatística não-extensiva. A finalidade deste Capítulo é mostrar numericamente (com um modelo dinâmico simples: a família dos mapas logísticos) que

os conceitos básicos da dinâmica tais como a sensibilidade às condições iniciais e a relaxação ao equilíbrio encontram-se fortemente ligados, obtendo-se assim uma nova conexão analítica de escala.

O fundamento da mecânica estatística não-extensiva encontra-se no postulado da entropia não-extensiva Eq. (2.8), [5], onde o índice entrópico q caracteriza as estatísticas com as quais se trabalha: com $q = 1$ recupera-se a expressão usual de BG, $S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$. Nós podemos interpretar q como um índice que acentua uma tendência: $q < 1$ privilegia eventos raros, enquanto que $q > 1$ privilegia eventos ordinários: $p < 1$ elevado a uma potência $q < 1$ gera um valor maior que p , e o aumento relativo $p^q/p = p^{q-1}$ é uma função decrescente de p , isto é, valores de p mais próximos de zero (eventos raros) são beneficiados. Correspondentemente, para $q > 1$, os valores de p próximos de um (eventos ordinários) são os privilegiados. A estatística de BG ($q = 1$) não tem preferências. Conseqüentemente o formalismo de BG gera distribuições exponenciais no equilíbrio. No entanto, a estatística não-extensiva fornece distribuições do tipo lei de potência. Muitos trabalhos desenvolvidos a respeito deste formalismo estão disponíveis na literatura [24, 26], mas há ainda pontos importantes que merecem atenção especial. Um deles é o concernente aos resultados recentemente obtidos para o fenômeno da turbulência completamente desenvolvida. Uma concordância entre considerações teóricas e dados experimentais foi conseguido através de duas aproximações, ambas baseadas na mecânica estatística não-extensiva, mas, uma delas com $q > 1$ [6] e a outra com $q < 1$ [29]. Um cenário similar (que usa ambos $q < 1$ e $q > 1$) é encontrado também na descrição de sistemas dinâmicos de baixa dimensão, particularmente nos mapas z -logísticos no limiar do caos [4, 7, 9, 39, 40]. Assim, nossa contribuição consiste em esclarecer a natureza dual do índice entrópico, investigando a família dos mapas logísticos, para o caos forte e o limiar do caos, mostrando uma conexão procurada há tempos, entre as aproximações baseadas na sensibilidade e relaxação.

3.2 Mapas z -logísticos e a não-extensividade no limiar do caos

Considere a equação iterativa z -logística $x_{t+1} = 1 - a|x_t|^z$ ($-1 \leq x_t \leq 1$; $0 < a \leq 2$; $z > 1$; $t = 0, 1, 2, \dots$) onde para $z = 2$ recupera-se o mapa logístico padrão. Usamos uma partição do espaço de fase em W janelas de igual medida, sendo p_i a probabilidade associada a janela i . Diversos trabalhos [9, 10, 11, 33, 40] mostraram que a descrição adequada de tais sistemas dinâmicos, no limiar do caos, é obtida usando a entropia não-extensiva, Eq. (2.8), com um valor de q dependente de z .

Principlamente lembremos a aproximação baseada na sensibilidade às condições iniciais, a qual determina um $q_{sen} \leq 1$ (o sub-índice “sen” refere-se a palavra sensibilidade). Até agora foram desenvolvidos três métodos diferentes que fornecem o valor especial de q_{sen} (identificado às vezes como q^*). O primeiro método [9] é baseado na sensibilidade às condições iniciais. No limiar do caos ($a = a_c(z)$), o expoente de Lyapunov λ_1 é nulo porém o sistema é fracamente sensível (caos fraco), isto é, a separação do limite superior entre duas trajetórias muito próximas $\xi(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}$ evoluem com o tempo [4] segundo uma lei de potência:

$$\xi(t) = [1 + (1 - q_{sen})\lambda_{q_{sen}} t]^{\frac{1}{1-q_{sen}}} \quad (\lambda_{q_{sen}} > 0), \quad (3.1)$$

que é solução da equação diferencial não linear $\dot{\xi} = \lambda_{q_{sen}} \xi^{q_{sen}}$ (esta equação recupera, para $q = 1$, a sensibilidade às condições iniciais usual, conhecida como caos forte). O segundo método é baseado na descrição geométrica do atrator multifractal [10, 11]. O valor de q_{sen} é determinado por meio da Eq. (2.6) onde α_{min} e α_{max} são os valores dos pontos finais da função multifractal $f(\alpha)$. Esta bela equação relaciona a dinâmica (lado esquerdo) com a geometria (lado direito). Em outras palavras, conhecida a geometria do atrator, é possível determinar o valor relevante do índice entrópico q_{sen} . Assim, para $z = 2$, este procedimento origina $q_{sen} = 0.2445$.

O terceiro método está relacionado com a generalização do teorema de Pesin, o mesmo que foi proposto nos trabalhos [33, 40]. Em uma das W janelas nas quais o espaço de

fase foi dividido, coloca-se N pontos ($N \gg W$) distribuídos uniformemente ou aleatoriamente. Então analisamos as ocupações $\{N_i(t)\}$ de todas as janelas ($\sum_{i=1}^W N_i(t) = N$), o que conseqüentemente resulta em um conjunto de probabilidades $p_i(t) \equiv N_i(t)/N$, as quais, por sua vez, permitem o cálculo da entropia $S_q(t)$ de acordo com a Eq. (2.8). A seguir pode-se definir a versão não-extensiva da entropia de Kolmogorov-Sinai, a saber, $K_q \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} S_q(t)/t$. O valor especial $q = q_{sen}$, é aquele para o qual a produção da entropia é *finita* (se $q < q_{sen}$, $K_q \rightarrow \infty$, e se $q > q_{sen}$, $K_q \rightarrow 0$). É notável que todos os três métodos dêem um mesmo valor para q_{sen} ($q_{sen} = 0.2445\dots$ para $z = 2$).

Analisemos agora a aproximação baseada na relaxação, para encontrar o índice entrópico relevante, que foi desenvolvida em [39]. Neste caso se começa com um ensemble de condições iniciais uniformemente distribuídos em todo o espaço de fases e não com a análise em uma das W janelas somente, e investiga-se a taxa de convergência no atrator multifractal no limiar do caos. Em $t = 0$ todas as W janelas estão ocupadas, portanto a entropia no tempo inicial é máxima e dada por $S_q(0) = \frac{W^{1-q}-1}{1-q}$, que tem como caso particular, $S_1(0) = \ln W$. Enquanto t aumenta, observa-se a redução no volume ocupado pelos pontos, $W(t)$, redução esta tanto maior quando maior o sistema, ou seja maiores valores de W e N . A evolução temporal de $W(t)$ é dada pela equação [39]

$$W(t) = [W(0)^{1-q_{rel}} + (1 - q_{rel})K_{q_{rel}}t]^{1/q_{rel}}. \quad (3.2)$$

A curva $W(t)$ versus tempo (em escala log-log) tende a um comportamento linear, cuja inclinação permite obter o valor de q_{rel} .

Quando aplicado à região do caos forte (por exemplo, $z = 2$, $a = 2$), todos os métodos dão $q_{sen} = q_{rel} = 1$, de acordo com os conceitos de BG usuais, válidos para sistemas fortemente caóticos, consistentemente com a hipótese do “caos molecular” de Boltzmann [41]. Quando aplicado ao limiar do caos $a_c(z)$ dos mapas z -logísticos, é obtido [39] $q_{rel}(\infty)$ ($q_{rel}(\infty) = 2.4\dots$ para $z = 2$). Como estão relacionados q_{sen} e q_{rel} ?

3.3 A sensibilidade e a relaxação dos mapas logísticos.

Nesta seção pretendemos encontrar uma relação (se ela existe) entre q_{sen} e q_{rel} para os mapas z -logísticos. Assim, procedemos com a distribuição uniforme de N pontos dentro de uma janela específica escolhida segundo o seguinte procedimento: calcula-se $S_{q_{sen}}(t)$ para um valor fixo de W , e verificamos que $S_{q_{sen}}(t)$ atinge assintoticamente ao $S_{q_{sen}}(\infty)$ ($S_{q_{sen}}(\infty) > 0$ aumenta de acordo com uma lei de potência com W). $S_{q_{sen}}(t)$ alcança seu valor para $t \rightarrow \infty$ precedido por um máximo que pode ser muito pronunciado. A janela inicial é escolhida como aquela que apresenta o pico mais elevado. Se nós consideramos o caso fortemente caótico ($a = 2$, $q_{sen} = 1$), $S_1(t)$ se eleva ligeiramente para saturar rapidamente como é ilustrado no gráfico inserido da figura 3.1. Entretanto, no limiar do caos, $S_{q_{sen}}(t)$ apresenta um pico muito elevado, e aproxima-se lentamente a seu valor final $S_{q_{sen}}(\infty)$ (ver a figura 3.1). Em seguida, calculamos para todos os tempos após do pico, $\Delta S_{q_{sen}}(t) \equiv [S_{q_{sen}}(t) - S_{q_{sen}}(\infty)]$. Assim, encontra-se um decaimento que é ditado por uma lei de potência cuja inclinação, em escalas logarítmicas, depende de W . Esta inclinação é identificada com $1/(q_{rel}(W) - 1)$ (como um método alternativo para obter q_{rel}). No limite $W \rightarrow \infty$, observa-se que $q_{rel}(\infty)$ coincide precisamente, para todos os valores de z , com o valor encontrado em [39] (seus valores correspondem a uma partição infinitamente pequena $W \rightarrow \infty$).

A região na qual $\Delta S_{q_{sen}}(t)$ segue uma lei de potência cresce com W (veja a Fig. 3.2). A fim de identificar melhor esta região, consideramos somente aqueles intervalos do tempo cujos coeficientes de correlação são maiores que 0.99. Para aumentar a precisão de $q_{rel}(W)$, calculamos a média de vários possíveis intervalos, mais precisamente, modificando tempos iniciais e finais como é mostrado na figura 3.2. Além disso, para minimizar ainda mais o efeito das oscilações de $S_{q_{sen}}(t)$ no limiar do caos e ao mesmo tempo identificar melhor o atrator (a distribuição invariante) nós introduzimos uma melhoria numérica na regra de iteração que não afeta a dinâmica assintótica do mapa (veja a Fig. 3.3): calcula-se a média da distribuição de x_t com aquela correspondente ao x_{t-1} (os valores atuais de x devem ser preservados ao calcular a média). Este procedimento reduz fortemente as flutuações na distribuição dos pontos em $t \rightarrow \infty$ nos permite identificar o atrator associado

com o mapa (refere-se ao atrator no espaço das distribuições e não no espaço de fase). A execução destes benefícios numéricos no computador exige uma memória adicional e aumento do tempo do processador central. As oscilações, que ainda permanecem, são consideravelmente menores, e podem ser reduzidas ainda mais estendendo este método, levando em conta mais de um passo temporal prévio. Entretanto, para a precisão que se procura neste trabalho, é claramente suficiente calcular a média das distribuições com x_{t-1} e x_t .

Nota-se que este procedimento é justamente um truque para minimizar as flutuações. Se o procedimento não for adotado, os resultados seriam os mesmos mas com menor precisão. Depois que todas estas melhorias numéricas foram executadas, encontramos uma lei notável, a saber

$$q_{rel}(\infty) - q_{rel}(W) \propto W^{-|q_{sen}|} \quad (3.3)$$

(veja a Fig. 3.4). Esta equação é de algum modo parecida com as expressões que aparecem em escalas de tamanho finito [42]. Esta lei é notável pelo fato de relacionar duas propriedades dinâmicas básicas dos sistemas dissipativos, a saber, a relaxação ao equilíbrio e a sensibilidade às condições iniciais. Além disso, a partição ($1/W$ para os mapas z -logísticos) é envolvida acentuadamente da mesma maneira como acontece com os valores de q (aqui denotados por q_{rel}) que aparecem na aproximação de Beck [6] para a turbulência fortemente desenvolvida, onde os índices entrópicos dependem da distância entre dois pontos em que as velocidades do fluxo são medidas. Outros fenômenos onde pode acontecer uma relação de escala similar são a distribuição dos momentos transversais dos jatos hadrônicos produzidos em experiências de aniquilação elétron-pósitron [37], e a dinâmica do ponto de sela do sistema de Henon-Heiles [43]. Nota-se também que a relação de escala, Eq. (3.3), tem uma sensibilidade moderada ao valor usado para q_{sen} (veja o detalhe no gráfico inserido na Fig. 3.4). É importante enfatizarmos que a Eq. (3.3) reflete que os limites $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty}$ (relevante para q_{sen} ; veja, por exemplo [33]) e $\lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty}$ (relevante para q_{rel} , como é exibido aqui) não comutam em geral (ou seja, em geral $q_{sen} \neq q_{rel}$, enquanto que no caos forte $q_{sen} = q_{rel} = 1$). Este resultado é similar aos limites $t \rightarrow \infty$ e $M \rightarrow \infty$ que não comutam no caso das interações de longo alcance para sistemas Hamiltonianos

$$Z = 2$$

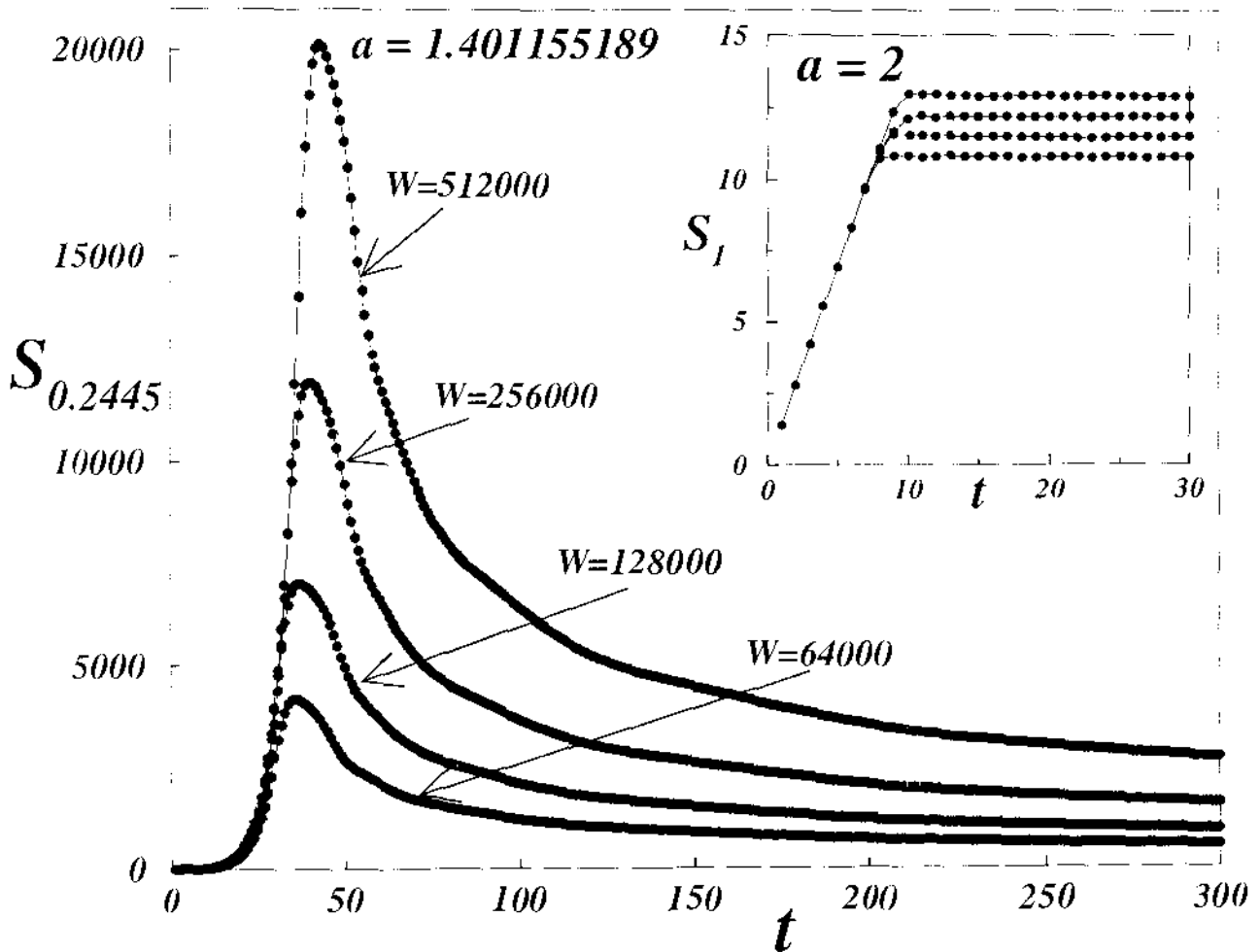


Figura 3.1: Evolução temporal da entropia $S_{q_{sen}}$ para o mapa logístico $z = 2$. No limiar do caos $a_c = 1.401155189$, com $q_{sen} = 0.2445$ (o pico mais alto obtido para $S_{0.2445}$, com um W dado). A figura inserida: mostra o comportamento da entropia na região caótica ($a = 2$), com $q_{sen} = 1$. Observe que neste caso, o equilíbrio é alcançado para valores de t muito menores, quando comparados com os tempos com $a = a_c$, refletindo o fato que a relaxação é exponencialmente mais rápida, no entanto que, no segundo caso é uma relaxação do tipo lei de potência.

de M corpos [7], para os quais os coeficientes nulos de Lyapunov foram já detectados [16] (nota-se que estes limites comutam no caso das interações de curto alcance).

3.4 Conclusões

O cenário que surge é tal que o equilíbrio térmico de todos os sistemas Hamiltonianos (cuja dinâmica é ditada por partículas que não interagem ou simplesmente com interações de curto alcance, é descrita pela mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs e a termodinâmica usual) aplica-se conjuntamente com a relaxação exponencial ao equilíbrio. Mas para sistemas com dinâmica complexa (complexo no sentido previamente descrito), não podemos saber a priori como acontecerá a relaxação ao estado estacionário. Entretanto, para uma vasta classe daqueles sistemas, acontece uma relaxação do tipo lei de potência. Para determinar o expoente associado, devemos analisar ao menos uma vez a dinâmica daquela classe de universalidade não-extensiva, de tal maneira que nos permita conhecer os correspondentes valores de q . Para os mapas z -logísticos, a Eq. (3.3) permite a conexão entre aqueles valores de q . Finalmente, apresentamos a tabela 3.1 que resume os valores obtidos para os índices entrópicos da sensibilidade e a relaxação.

Tabela 3.1: Índices entrópicos da sensibilidade e da relaxação

z	a_c	q_{sen}	q_{rel} (Eq. (3.3))	q_{rel} (vide [39])
1.50	1.29550...	-0.15 ± 0.01	2.04 ± 0.02	2.05 ± 0.01
1.75	1.35506...	0.11 ± 0.01	2.24 ± 0.02	2.25 ± 0.015
2.00	1.40115...	0.24 ± 0.01	2.41 ± 0.02	2.41 ± 0.02
2.50	1.47055...	0.39 ± 0.02	2.73 ± 0.03	2.70 ± 0.02
3.00	1.52187...	0.47 ± 0.02	2.94 ± 0.03	2.94 ± 0.02
5.00	1.64553...	0.61 ± 0.02	3.51 ± 0.03	3.53 ± 0.03

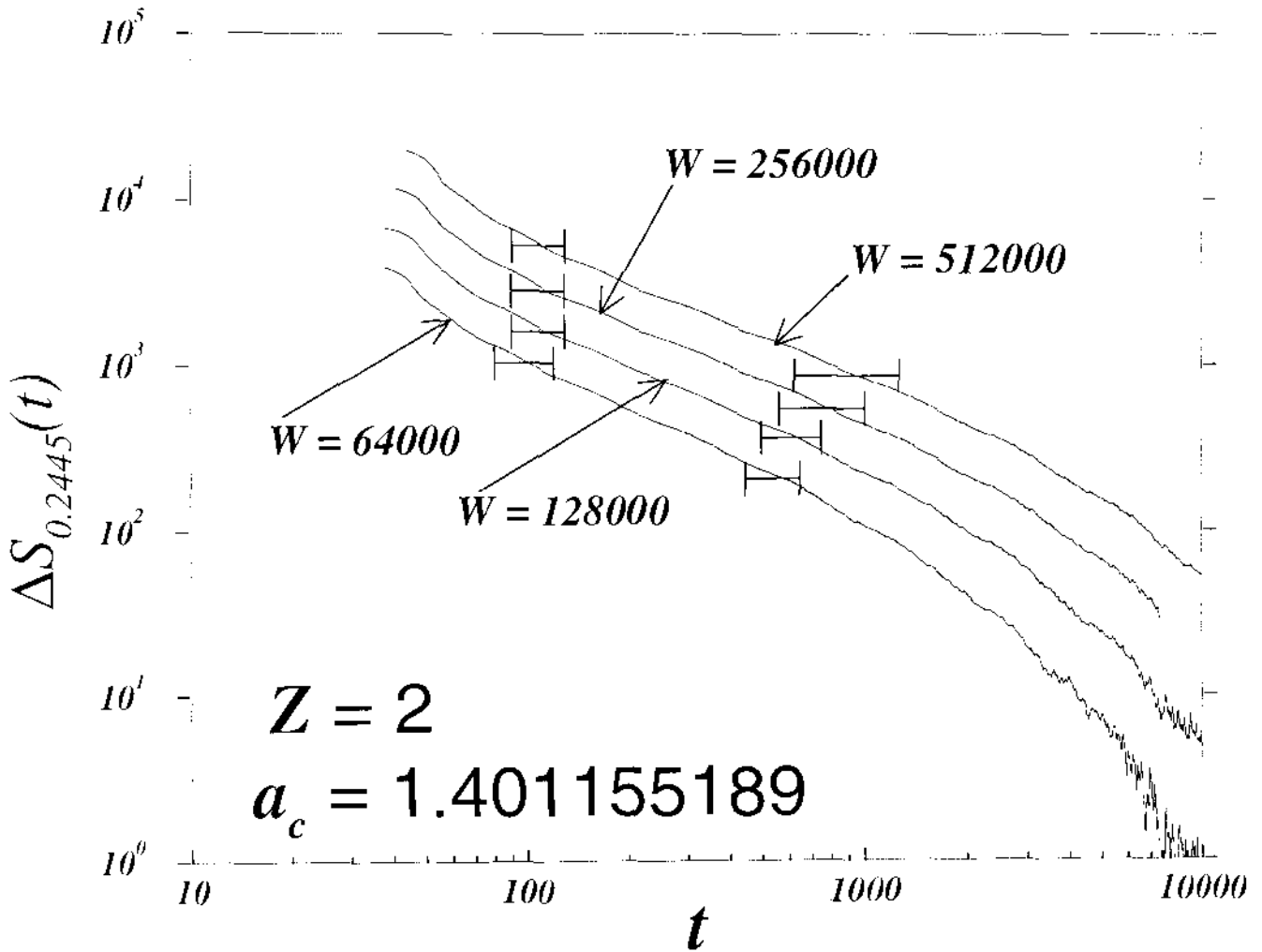


Figura 3.2: Relaxação de $\Delta S_{q_{sen}}(t) \equiv S_{q_{sen}}(t) - S_{q_{sen}}(\infty)$ para $z = 2$ no limiar do caos, para valores típicos de W . Para cada W , mostra-se o intervalo dos tempos inicial e final sobre os quais fazemos as médias para determinar as inclinações em escalas logarítmicas.

$$Z = 2$$

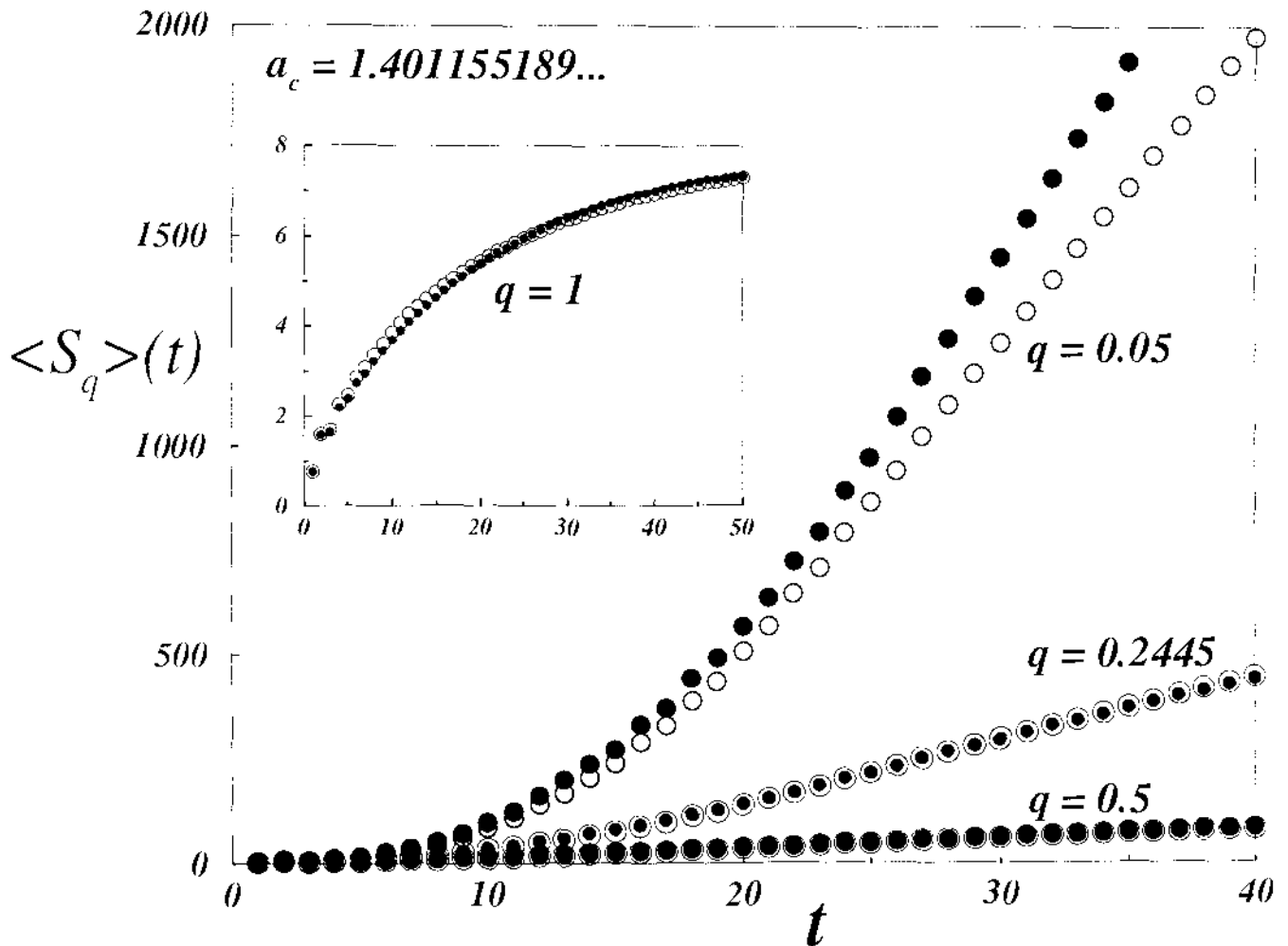


Figura 3.3: Evolução temporal da entropia S_q para o mapa logístico $z = 2$ no limiar do caos $a_c = 1.401155189\dots$. As curvas foram obtidas com a “melhoria” numérica na regra de iteração que não afeta a dinâmica do mapa. $\langle S_q \rangle(t)$ é o resultado da média de 796 e 1391 realizações com $W = 32000$ (pontos vazios) e $W = 64000$ (pontos cheios) respectivamente. $N = 10 \times W$. O crescimento linear da entropia é obtido para $q_{sen} = 0.2445$. Na figura inserida mostramos o caso $q = 1$.

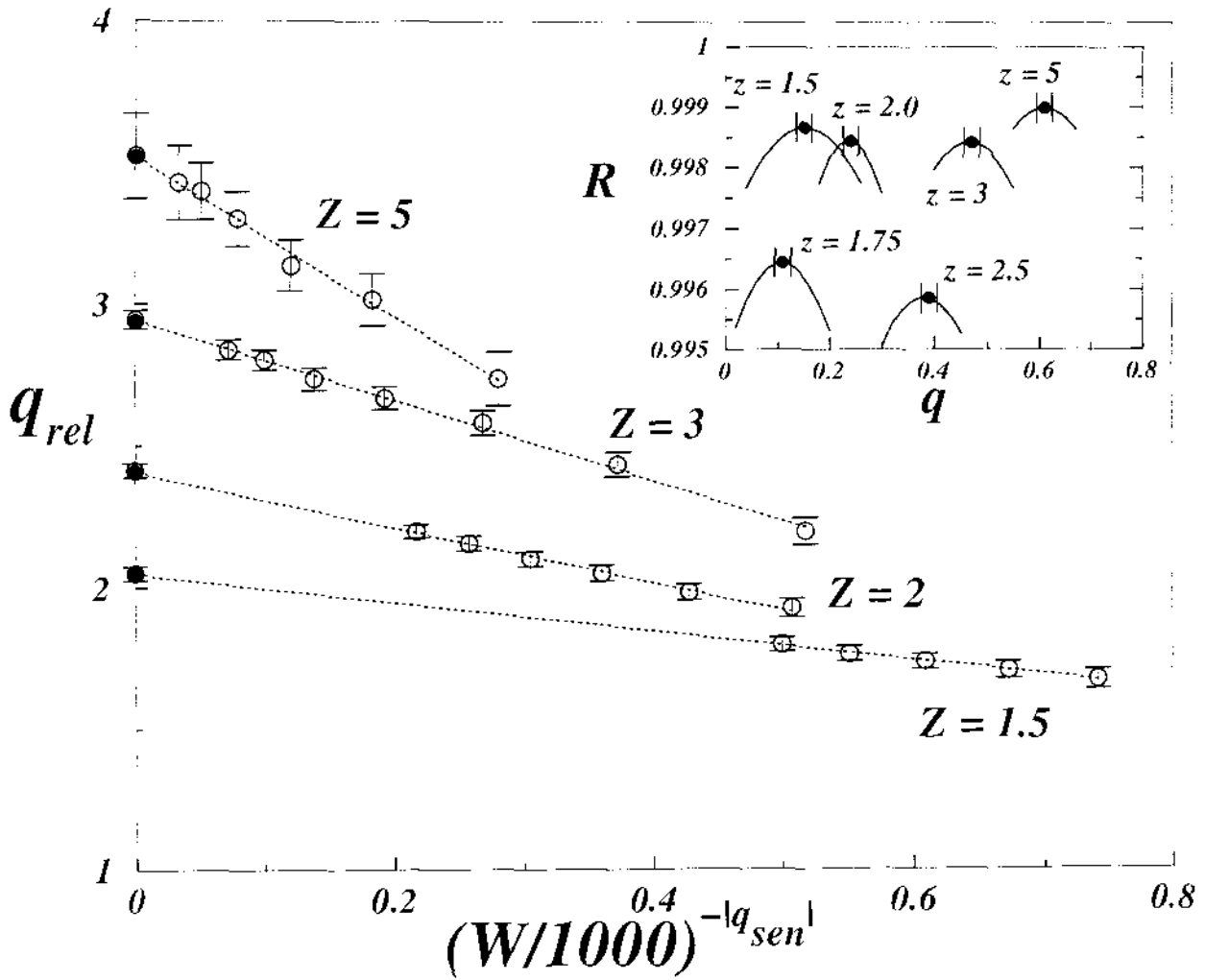


Figura 3.4: W -dependência do índice entrópico q_{rel} de relaxação para valores típicos de z . Os valores limites $W \rightarrow \infty$ extrapolados (linhas pontilhadas) coincidem com os valores (círculos preenchidos) reportados em [39]. A abscisa foi definida como $(W/1000)^{-|q_{sen}|}$ (e não $W^{-|q_{sen}|}$) para visualizar melhor os resultados. Os valores de $z = 1.75$ e $z = 2.5$ não são mostrados por razões de clareza do gráfico (veja a tabela 3.1). A figura inserida mostra o coeficiente de correlação linear R versus q . Este procedimento foi utilizado para verificar os valores dos índices entrópicos $q_{sen}(z)$ da lei de escala Eq. (3.3).

Capítulo 4

Médias de ensembles e não-extensividade no limiar do caos: Mapas dissipativos

4.1 Introdução

Sistemas dissipativos relativamente simples podem apresentar estrutura matemática rica que se traduz numa diversidade de comportamentos físicos que são muitas vezes observados em experimentos. Os mapas não-lineares de baixas dimensões desempenham um papel importante no desenvolvimento da teoria do caos, na física e na matemática. Estes mapas exibem várias rotas ao caos e suas classes métricas de universalidade relacionadas [44]. Em particular, os mapas unidimensionais são modelos paradigmáticos que servem para estudar o aparecimento de comportamentos complexos em sistemas dinâmicos. Nesta área, foram desenvolvidos inúmeros trabalhos com objetivo de encontrar propriedades do caos que poderiam dar uma classificação dos sistemas determinísticos. Em particular, foram desenvolvidos indicadores dinâmicos tais como a sensibilidade às condições iniciais, os expoentes de Lyapunov, a entropia de Kolmogorov-Sinai [3, 2], a entropia topológica e outros [23].

Não obstante, sabemos hoje da existência de sistemas dinâmicos naturais e artificiais para os quais todos os indicadores padrão não detectam a presença do caos, mas os resultados numéricos mostram um comportamento complexo da evolução temporal destes sistemas. Este é o caso típico das manifestações não padrão dos sistemas na fronteira

entre o caos forte e as órbitas regulares. Tal comportamento complexo e determinístico foi denominado caos *fraco*, para distingui-lo do caos *forte*, ou seja, do comportamento dos mapas com entropia métrica positiva ou, equivalentemente, com expoentes de Lyapunov positivos. No caos fraco os expoentes de Lyapunov e a entropia métrica são nulas. Este fenômeno conduziu às tentativas de generalizar estes indicadores [4].

No presente Capítulo, estudaremos numericamente a sensibilidade às condições iniciais e a entropia métrica dos mapas z -logísticos e de uma nova classe de mapas unidimensionais dissipativos, que de agora em diante denominaremos de mapas z -exponenciais. A autoria destes novos mapas é devida única e exclusivamente a C. Tsallis, que também propôs o nome que hoje se emprega: *mapas exponenciais*. A finalidade de introduzir estes novos mapas é de ter mais uma classe de universalidade e poder testar as propriedades básicas relacionadas com os indicadores dinâmicos acima assinalados. Neste sentido, na última parte do presente Capítulo, analisa-se o mapa bidimensional de Kaplan-Yorke.

Em todos cálculos que apresentamos aqui, fazemos médias de ensembles cobrindo o espaço de fases aleatoriamente. Este procedimento não muda em nada o comportamento dos sistemas no caos forte, mas observa-se uma mudança substancial no limiar do caos. Estes resultados conduzem-nos à confirmação numérica, para todos os mapas acima assinalados, da generalização apropriada da identidade de Pesin [3] (ou seja, a coincidência do expoente positivo de Lyapunov e da entropia de KS). Esta generalização foi conjecturada em 1997 [4], e recentemente provada [45] para trajetórias especiais (como foi oportunamente explicada nos Capítulos 1 e 2). Neste Capítulo verifica-se pela primeira vez com o procedimento das médias de ensembles.

4.2 Os mapas z -logísticos e z -exponenciais

Primeiramente, considere-se o mapa z -logístico $x_{t+1} = 1 - a|x_t|^z$ onde $1 < z$, $0 < a \leq 2$, $-1 \leq x_t \leq 1$. O valor crítico $a_c(z)$ (limiar do caos) aumenta monotonamente de 1 a 2 quando z aumenta de 1 a infinito. Para $z = 2$ este mapa é isomorfo à $x_{t+1} \propto x_t(1 - x_t)$. A complexidade do mapa logístico é percebida quando se varia o parâmetro de controle. Conforme se aumenta o valor de a , observa-se uma cascata de bifurcações de duplicação

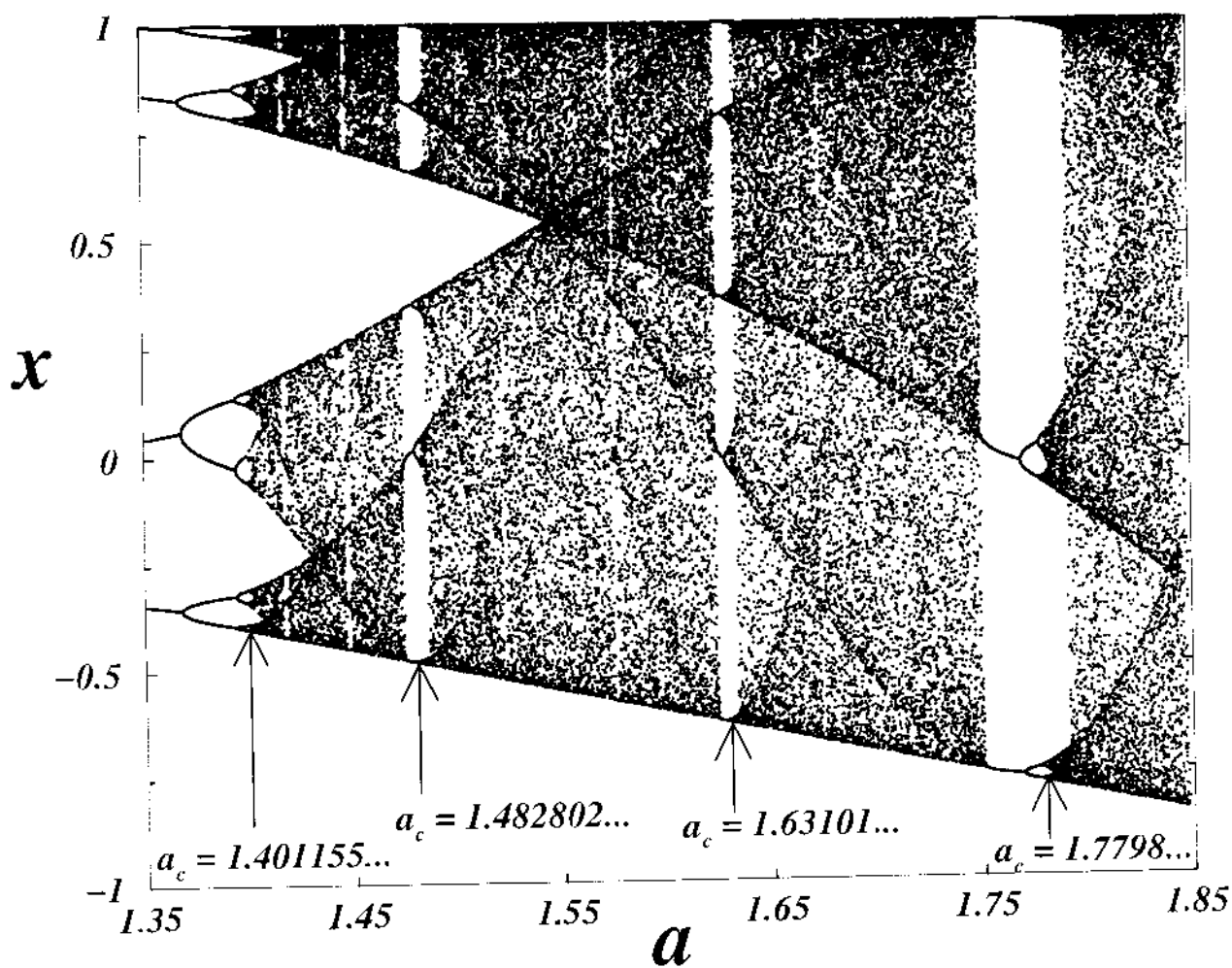


Figura 4.1: Iterações assintóticas do mapa logístico ($z = 2$). Observa-se uma cascata “flip” com duplicações de período até $a_c = 1.401155189\dots$. Além desse valor existem outros valores críticos do parâmetro de controle que indicam o limiar do caos. Na figura mostra-se quatro exemplos daqueles.

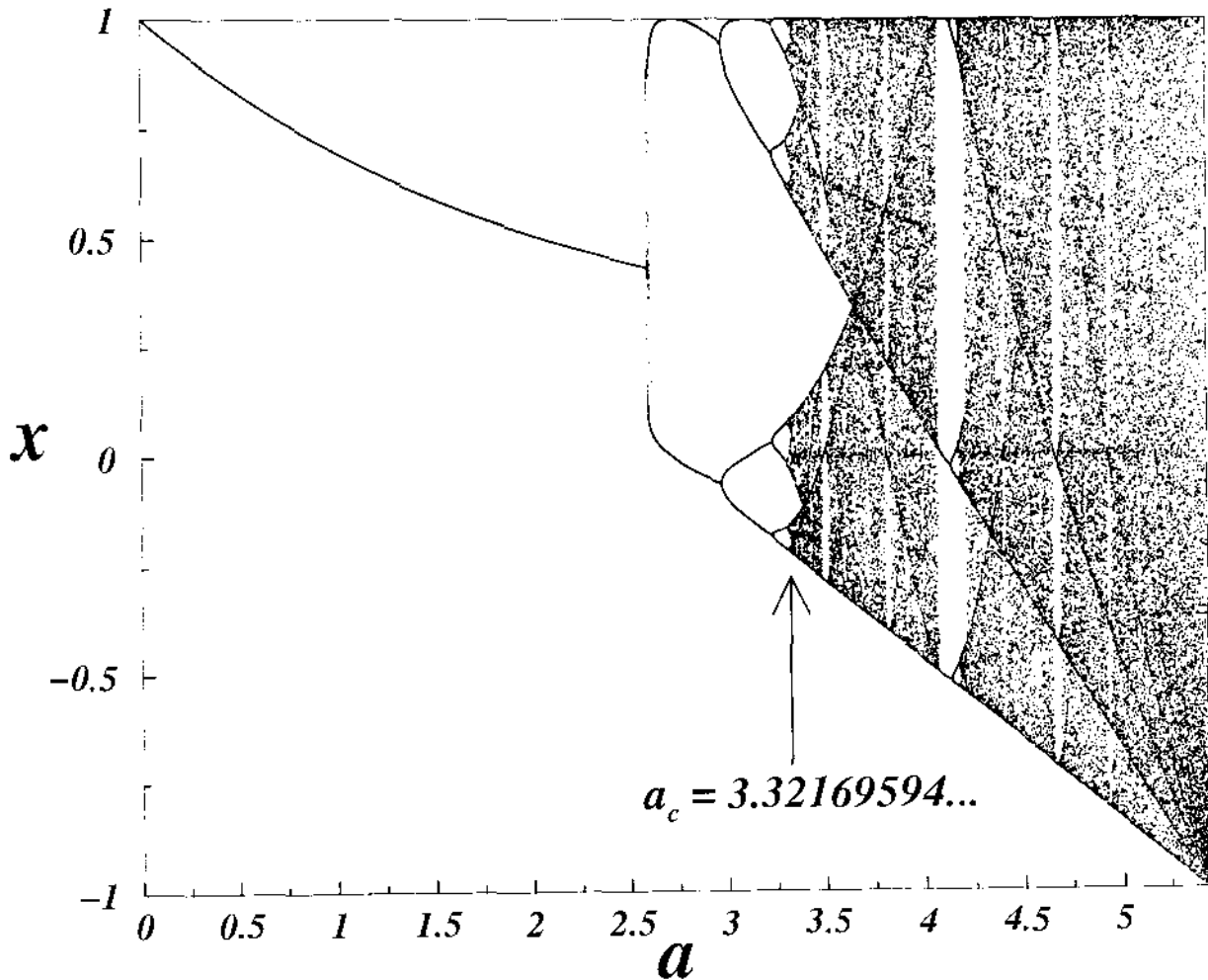


Figura 4.2: Iterações assintóticas do mapa exponencial $z = 0.5$ como função do parâmetro a . Observamos uma série de bifurcações a medida que o parâmetro de controle a cresce, as quais se acumulam em $a_c = 3.32169594\dots$. Além desse valor existe comportamento caótico entremeadado por janelas de periodicidade. O mapa é limitado superiormente por $a \simeq 5.43$; para valores de $a > 5.43$ as órbitas genéricas escapam ao infinito.

de período, em que os valores de a , para os quais as bifurcações acontecem, formam uma seqüência que converge para um ponto de acumulação $a_c = 1.401155189\dots$, conhecido como o limiar do caos. Para $a > a_c$ o mapa logístico apresenta um comportamento bastante complexo que inclui regiões caóticas entremeadas por janelas de periodicidade. A Fig. 4.1 ilustra de maneira clara a dinâmica peculiar que o mapa logístico ($z = 2$) apresenta na região $a_c < a < 2$. Além de $a_c = 1.401155189\dots$, sucedem-se regiões caóticas e periódicas (algumas das janelas de periodicidade são vistas como regiões mais claras). Em particular, pode-se constatar a existência de outros valores críticos do parâmetro de controle maiores que a_c , que indicam o limiar do caos. Certamente, a dinâmica caótica não continua a ser observada para todos os valores $a > a_c$. Existe imerso na região caótica um número infinito de valores de a para os quais a dinâmica volta a apresentar um movimento periódico estável de período P . São as chamadas janelas de periodicidade P . Sejam $\bar{a} = \bar{a}(P)$ os valores de a onde se reinicia o movimento periódico (de período P). quando a é ligeiramente superior a \bar{a} existe uma outra série de bifurcações a partir de cada um dos pontos periódicos P . O ponto de acumulação $a_c(P)$ marca o fim da janela de periodicidade P , ou seja, o limiar do caos. Imediatamente após $a_c(P)$ a dinâmica torna-se novamente caótica. A largura de cada janela é bastante variável, mas, na maior parte das vezes é extremamente pequena, sendo mesmo bastante difícil a visualização na escala utilizada na Fig. 4.1. Nesta figura mostramos quatro exemplos de aqueles valores críticos do parâmetro de controle.

Os mapas z -logísticos são de fato representativos da classe de universalidade dos mapas unimodais de ordem z ; ou seja, dos mapas unidimensionais com um único máximo de ordem z . Para caracterizar o grau de achatamento que não se pode alcançar quando $z \rightarrow \infty$, introduzimos a seguinte família de novos mapas, inspirada na função exponencial de Cauchy (infinitamente diferenciável em $x = 0$ não obstante não-analítica):

$$x_{t+1} = 1 - ae^{-1/|x_t|^z}, \quad (4.1)$$

onde ($z > 0; a \in [0, a^*(z)]; |x_t| \leq 1$). $a^*(z)$ depende levemente de z (por exemplo, $a^*(0.5) \simeq 5.43$). Aqui, analisaremos os mapas com valores de $z \geq z_c \simeq 0.4$, sendo que z_c

é um valor acima do qual os atratores são topologicamente isomorfos aos atratores dos mapas logísticos. De fato, esta afirmação pode ser verificada se observarmos os diagramas de bifurcação. Os resultados numéricos são apresentados na Fig. 4.2 para o caso $z = 0.5$, onde as iterações x_t do mapa (4.1) são traçados como pontos no plano (x, a) . A figura mostra o atrator deste mapa como função do parâmetro de controle a . Observa-se que para $a < a_1 \simeq 2.58\dots$, o atrator é ponto fixo estável. Em $a = a_1 = 2.58\dots$ este ponto fixo perde repentinamente sua estabilidade. Incrementando o valor de a temos que para $a = 2.96\dots$ é criada a órbita de período 2 e de comprimento 4. Conforme se aumenta o valor do parâmetro de controle a , ocorrem sucessivas bifurcações, gerando as órbitas de maior período. Assim, observa-se uma cascata de bifurcações de duplicação de período, em que os valores de a , para os quais as bifurcações acontecem, formam uma seqüência que converge para um ponto de acumulação a_c . O valor de a_c é calculado numericamente. Assim, temos para o caso $z = 0.5$, que o valor crítico do parâmetro de controle é $a_c = 3.32169594\dots$, acima do qual as órbitas caóticas emergem, a exceção de determinadas "janelas", isto é, valores do parâmetro $a > a_c$ onde o comportamento periódico estável é observado outra vez. O mapa exponencial é limitado, para $z = 0.5$, superiormente por $a \simeq 5.43$; para valores de $a > 5.43$ as órbitas genéricas escapam ao infinito.

4.3 Sensibilidade às condições iniciais

Os mapas z -logísticos e diversos outros já têm sido estudados dentro do cenário não-extensivo. Neste contexto, encontra-se que, no limiar do caos, a entropia usual de BG não é apropriada. No lugar desta, a entropia não-extensiva (2.8) deve ser utilizada. Esta última contém o parâmetro q , ou índice entrópico, que deve dar um valor especial q_{sen} característico no limiar do caos do sistema considerado. O mesmo q_{sen} entra também na descrição da sensibilidade às condições iniciais.

Até agora, quatro métodos diferentes foram desenvolvidos para fornecer o valor especial q_{sen} : o primeiro método baseado na sensibilidade às condições iniciais [4, 9], o segundo está relacionado à análise da taxa de crescimento da entropia (Cap.1, [7, 40]); o terceiro método, que nós não consideramos neste trabalho, é baseado na descrição geométrica

do atrator multifractal [10] e o último método está relacionado com as propriedades de relaxação (Cap.3, [46]).

Como já foi assinalado acima, analisaremos numericamente os mapas em questão, fazendo uso dos dois primeiros métodos. Para os mapas z -logísticos, o $q_{sen}(z)$ é conhecido para valores típicos de z [9, 10]: veja a tabela 4.1 e os círculos preenchidos da Fig. 4.17. Nosso objetivo principal aqui é estudar o que acontece quando fazemos a *média* (denotada por $\langle \dots \rangle$) sobre todo o espaço de fases (isto é, $-1 \leq x \leq 1$), em vez de usar uma região especial na vizinhança do ponto $x = 0$ (que é a posição do valor máximo do mapa).

Primeiramente, analisemos o conceito da sensibilidade às condições iniciais. Como é bem conhecido na literatura ([4, 9, 10, 11] e suas referências), para sistemas de uma dimensão é conveniente introduzir a função da sensibilidade $\xi(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}$, onde $\Delta x(0)$ é a discrepância das condições iniciais no tempo $t = 0$, e $\Delta x(t)$ sua dependência temporal. Pode-se mostrar que ξ satisfaz a equação diferencial $d\xi/dt = \lambda_1 \xi$, onde λ_1 é o expoente de Lyapunov, assim $\xi(t) = \exp(\lambda_1 t)$. Conseqüentemente, se $\lambda_1 < 0$ ($\lambda_1 > 0$), o sistema é *fortemente insensível (sensível)* às condições iniciais. Por outro lado, se $\lambda_1 = 0$ (como acontece no limiar do caos), então espera-se que a função $\xi(t)$ satisfaça a equação diferencial $d\xi/dt = \lambda_q \xi^q$ (que contém um coeficiente λ_q , o denominado q -expoente generalizado de Lyapunov), daqui a expressão da q -exponencial Eq. (2.5) foi proposta [4] como a solução para esta equação. A q -exponencial recupera o caso padrão para $q = 1$, enquanto que $q \neq 1$ fornece um comportamento do tipo lei de potência. Se $q < 1$ ($q > 1$) e $\lambda_q > 0$ ($\lambda_q < 0$), o sistema é *fracamente sensível (insensível)* às condições iniciais.

A função inversa da função q -exponencial é o q -logaritmo definido como segue:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}; \quad (4.2)$$

naturalmente $\ln_1 x = \ln x (\forall x)$. Se $x \rightarrow 1$ temos que $\ln_q x \propto x - 1 (\forall x)$.

Para a sensibilidade, procedemos como segue. Consideramos em uma posição inicial de x , dois pontos muito próximos, com uma distância inicial de $\Delta x(0) = 10^{-12}$; logo calcula-se numericamente $\xi(t)$ a partir de sua definição. Fazemos esta operação muitas vezes, partindo de valores de x escolhidos aleatoriamente no intervalo permitido. Finalmente calculamos a média do q -logaritmo da função da sensibilidade $\ln_q \xi$, extraindo

assim, a média global (da ordem de 10^7 condições iniciais) do comportamento, fazendo realizações aleatoriamente em todo o espaço de fases $[-1, 1]$, em lugar de uma única região especial (por exemplo, na vizinhança do ponto $x = 0$ que corresponde ao ponto extremo dos mapas z -logísticos), onde as condições iniciais foram espalhadas. Quando estes experimentos numéricos são executados para os valores críticos do parâmetro de controle a_c , o incremento linear de $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ acontece somente para determinados valores especiais do índice entrópico q e que denotamos como q_{sen}^{av} , onde *av* indica o procedimento das médias. No mesmo intervalo, $\langle \ln \xi \rangle(t)$ é côncavo. Este fato é indicado na Fig. 4.4 para o mapa logístico padrão ($z = 2$) com $a_c = 1.401155189\dots$; visto que na Fig. 4.3 apresenta-se o caso quando o sistema é fortemente caótico: $a = 2$. Neste caso, espera-se que o índice entropico característico seja $q_{sen}^{av} = 1$ com o expoente de Lyapunov conhecido: $\lambda_1 = \ln 2 = 0.69\dots$

Dos resultados numéricos, para o mapa logístico padrão (como ilustração) no limiar do caos, emerge o valor especial do índice entrópico $q_{sen}^{av} = 0.36 \pm 0.01$ em vez do valor $q_{sen} = 0.2445$ obtido a partir de uma única condição inicial em [4, 9, 10]. O valor de q_{sen} foi calculado numericamente observando que o limite superior de $\xi(t)$ se encontra em uma linha que é precisamente uma lei de potência. Além disso, é sabido que o valor $q_{sen} = 0.2445$ pode ser deduzido a partir da constante de Feigenbaum α . Estes resultados foram confirmados recentemente em [45], onde se provou que no limiar do caos o limite superior de $\xi(t)$ tem exatamente a forma (2.5), com $q_{sen} = 0.2445$ e $\lambda_{0.2445} = \ln \alpha / \ln 2 = 1.3236\dots$ Nas tabelas 4.1 e 4.2 mostramos os valores dos $q_{sen}(z)$ e $q_{sen}^{av}(z)$ com seus respectivos valores críticos do parâmetro de controle a_c , obtidos com os dois procedimentos acima assinalados: com um ensemble de condições iniciais e com a média de um grande número de ensembles, respectivamente. Na tabela 4.2 indicamos além dos valores mencionados, os resultados das inclinações das curvas da sensibilidade com q_{sen}^{av} . Estes são os chamados q -coeficientes de Lyapunov.

Para os mapas z -exponenciais, observamos as mesmas características que as dos mapas z -logísticos, mas com diferentes índices entrópicos especiais que dependem de z . Estes mapas também apresentam sensibilidade fraca às condições iniciais, ou seja; duas trajetórias muito próximas no início divergem com o tempo segundo a lei de potência para

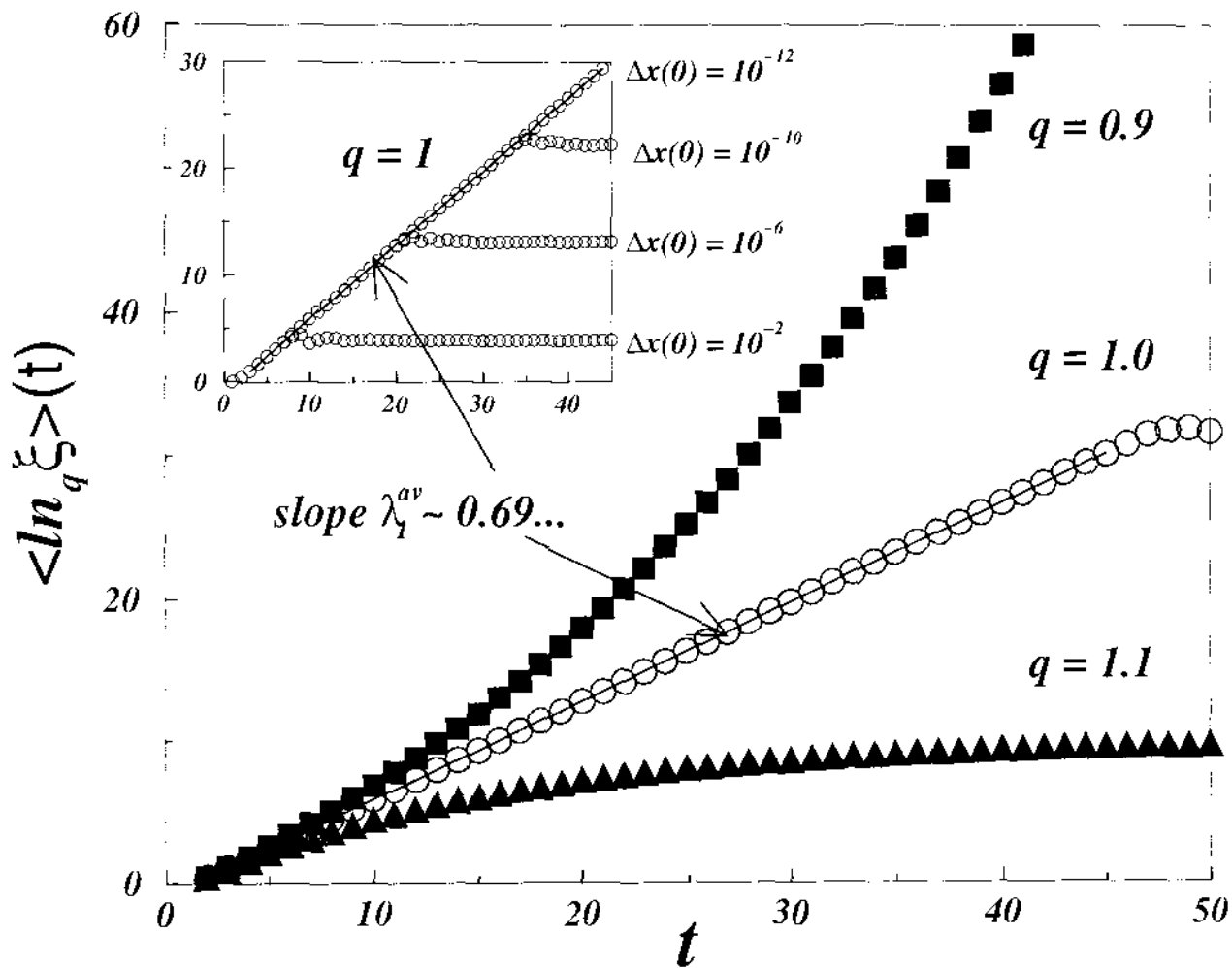


Figura 4.3: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle $a = 2$, ou seja, o caos forte. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 10^5 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-12}$ das condições iniciais em $t = 0$. Na figura inserida mostramos o comportamento linear da função da sensibilidade para $q = 1$ com diferentes valores da discrepância inicial.

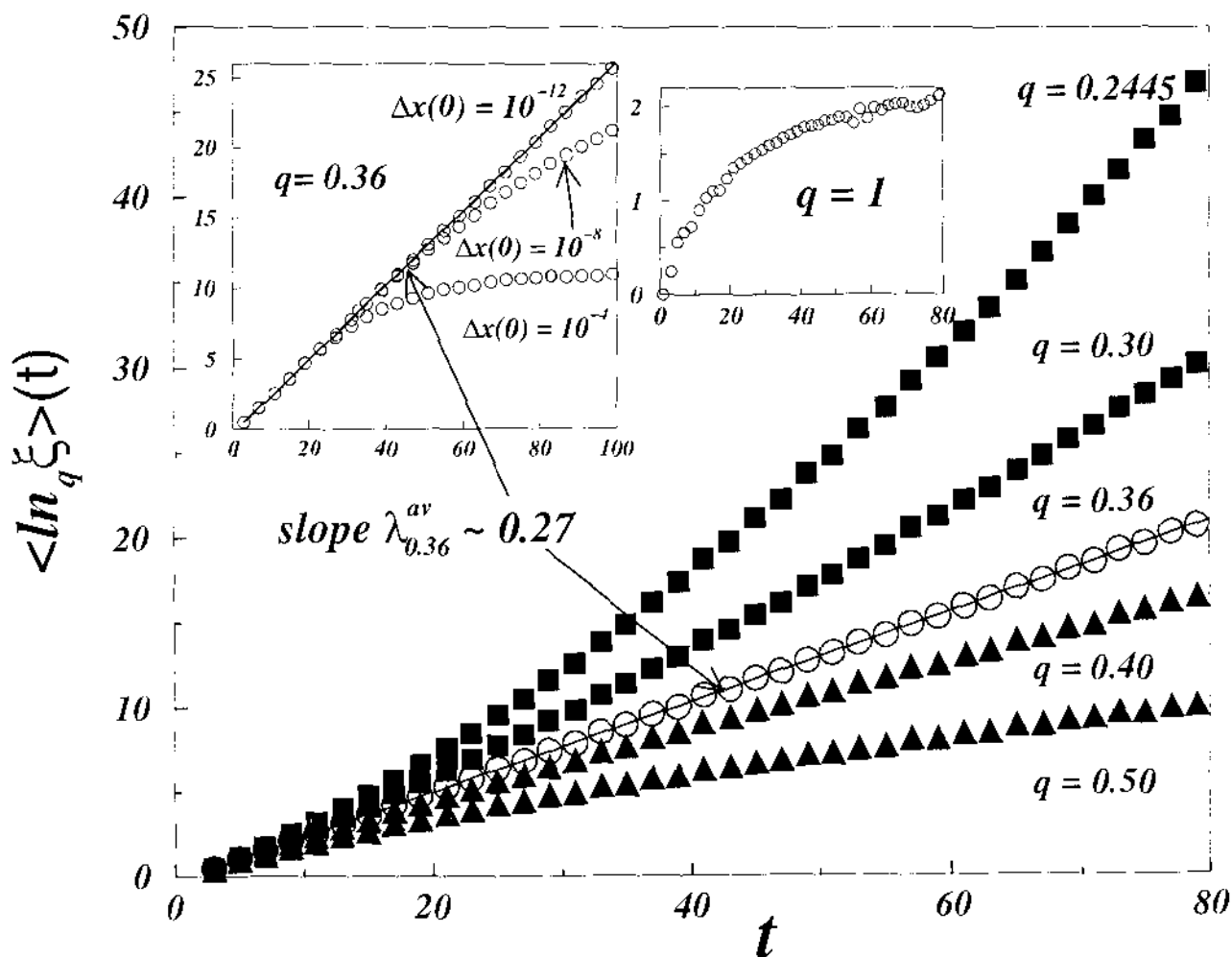


Figura 4.4: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.401155189$, ou seja, no limiar do caos. Consideramos cinco valores diferentes de q (no gráfico inserido da direita mostramos o caso quando $q = 1$). As curvas são os resultados da média sobre 10^7 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-12}$ das condições iniciais em $t = 0$. No gráfico inserido da esquerda, ilustramos a curva da sensibilidade com $q_{sen}^{av} = 0.36$, para diferentes valores da discrepância inicial, mostrando a tendência do comportamento linear de $\langle \ln_{0.36} \xi \rangle(t)$.

Tabela 4.1: Mapas z -Logísticos: um ensemble na vizinhança de $x = 0$

z	a_c	$q_{sen}(Eq. (2.5))$
1.10	1.1249885...	-2.34 ± 0.02
1.25	1.2095137...	-0.78 ± 0.01
1.50	1.2955099...	-0.15 ± 0.01
1.75	1.3550607...	0.11 ± 0.01
2.00	1.401155189...	0.24 ± 0.01
2.50	1.4705500...	0.39 ± 0.01
3.00	1.5218787...	0.47 ± 0.01
5.00	1.6455339...	0.61 ± 0.01

Tabela 4.2: Mapas z -Logísticos: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$

z	a_c	$q_{sen}^{av}(Eq. (2.5))$	$\lambda_{q_{sen}^{av}}$
1.10	1.1249885...	0.43 ± 0.01	0.12 ± 0.01
1.25	1.2095137...	0.42 ± 0.01	0.18 ± 0.01
1.50	1.2955099...	0.40 ± 0.01	0.22 ± 0.01
1.75	1.3550607...	0.37 ± 0.01	0.26 ± 0.01
2.00	1.401155189...	0.36 ± 0.01	0.27 ± 0.01
2.50	1.4705500...	0.34 ± 0.01	0.28 ± 0.01
3.00	1.5218787...	0.32 ± 0.01	0.29 ± 0.02
5.00	1.6455339...	0.28 ± 0.01	0.30 ± 0.02

valores críticos do parâmetro de controle que indicam o limiar do caos. Nas Figs. 4.8 e 4.9 mostramos os resultados numéricos para o caso $z = 0.5$, como ilustração, com valores do parâmetro de controle $a = 4$ e $a_c = 3.32169594\dots$, para o caos forte ($q_{sen}^{av} = 1$) e no limiar do caos ($q_{sen}^{av} = 0.35 \pm 0.01$) respectivamente. A tabela 4.3 resume os valores encontrados na simulação para diferentes valores de z do mapa exponencial: os índices entrópicos relevantes q_{sen}^{av} , os coeficientes $\lambda_{q_{sen}^{av}}$ da inclinação da parte linear de $(\ln_q \xi)(t)$ e os respectivos parâmetros críticos de controle a_c .

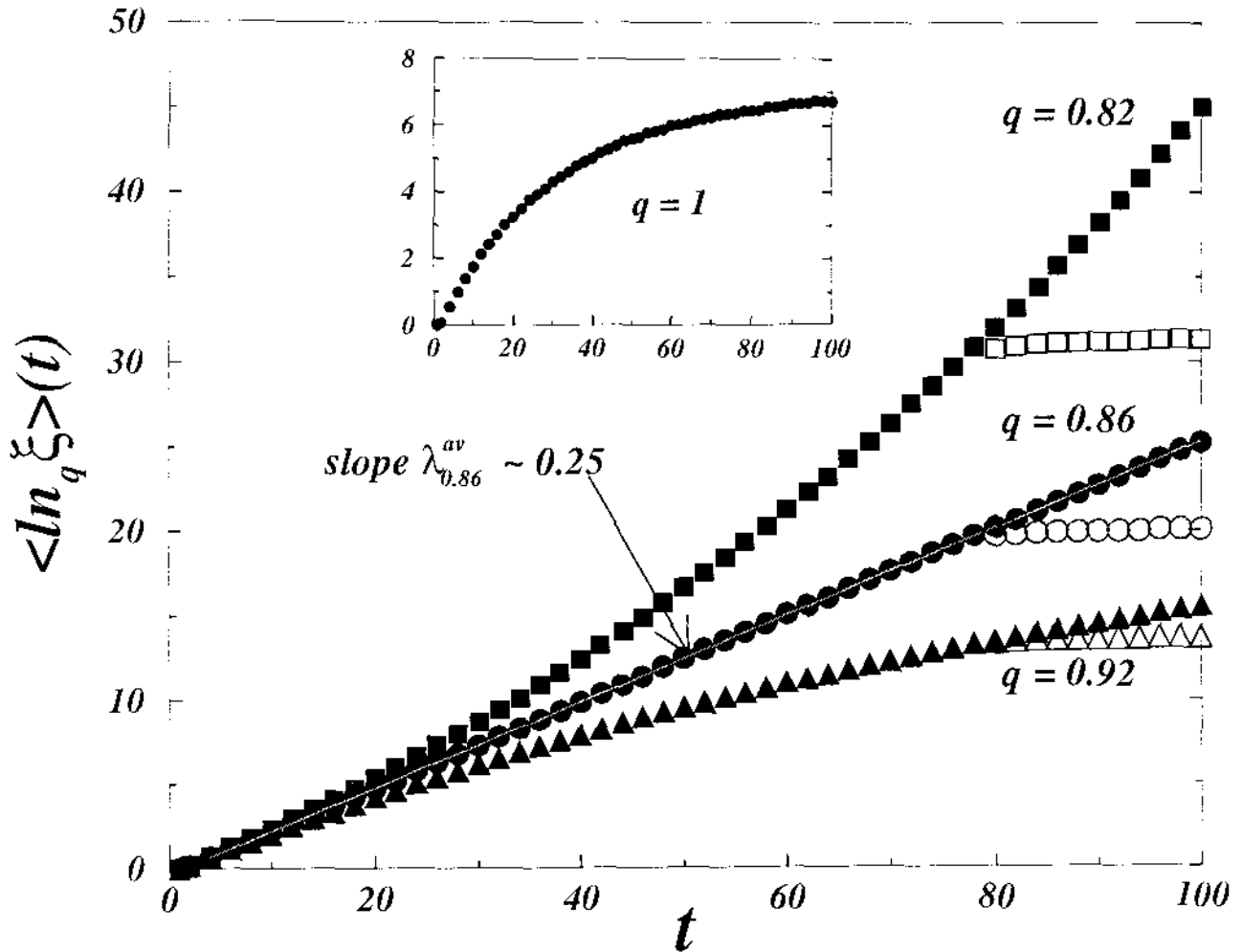


Figura 4.5: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.4828024\dots$, ou seja, no limiar do caos. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 10^7 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-14}$ (símbolos preenchidos) e $\Delta x(0) = 10^{-12}$ (símbolos vazios) das condições iniciais em $t = 0$.

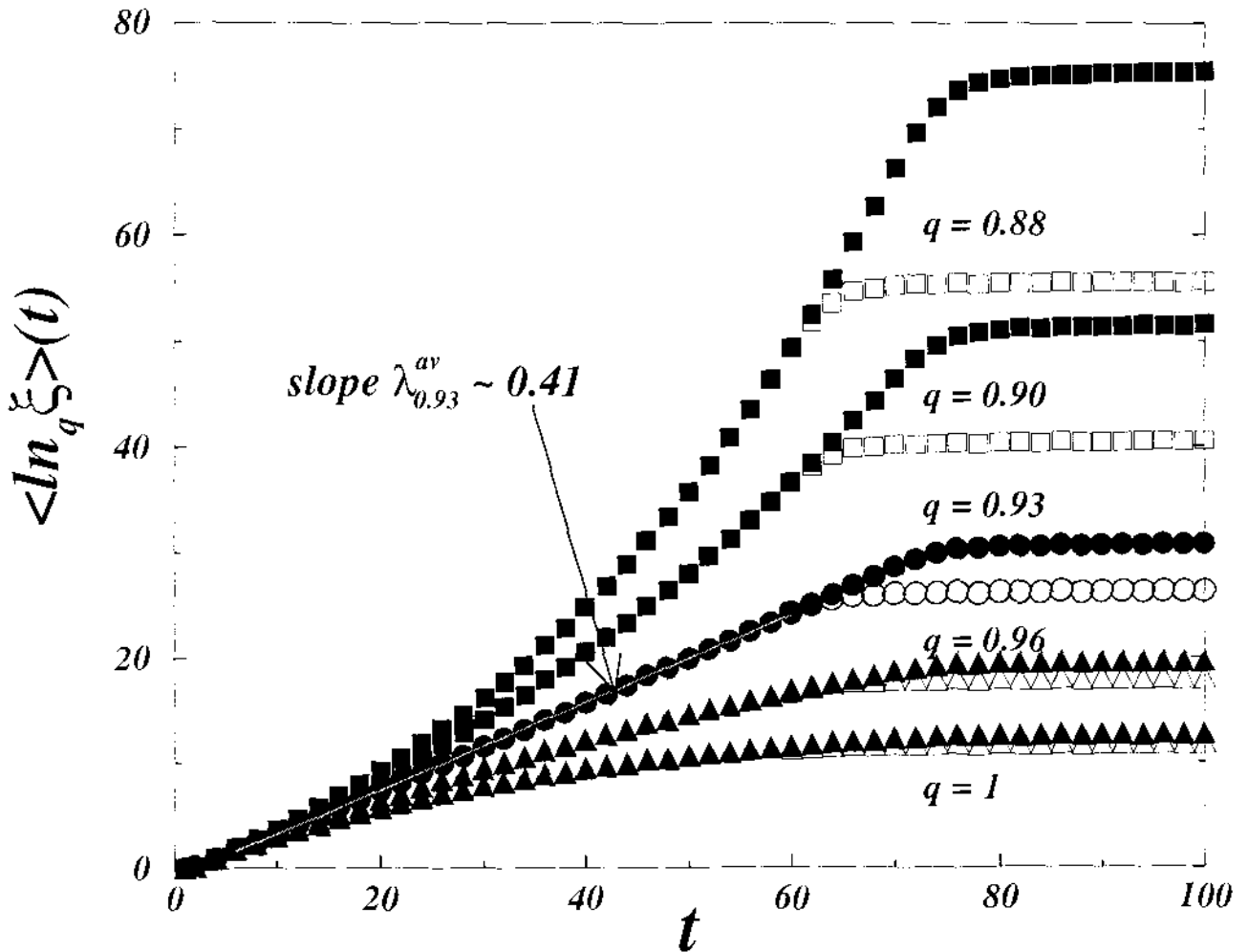


Figura 4.6: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com $a_c = 1.631018\dots$. Consideramos cinco valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 10^6 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-14}$ (símbolos preenchidos) e $\Delta x(0) = 10^{-12}$ (símbolos vazios) das condições iniciais em $t = 0$.

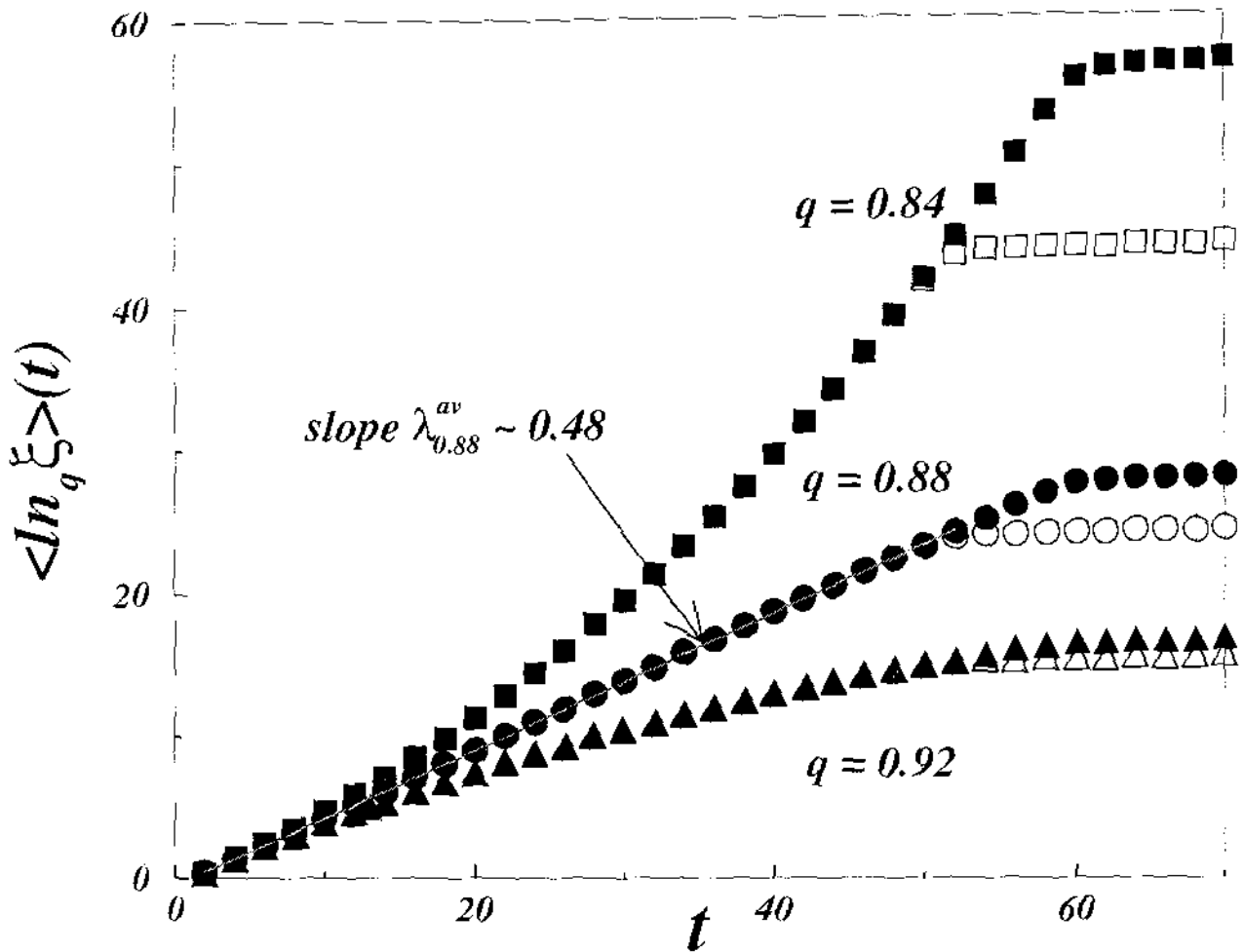


Figura 4.7: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.7798164\dots$, ou seja, no limiar do caos. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 10^6 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-14}$ (símbolos preenchidos) e $\Delta x(0) = 10^{-12}$ (símbolos vazios) das condições iniciais em $t = 0$.

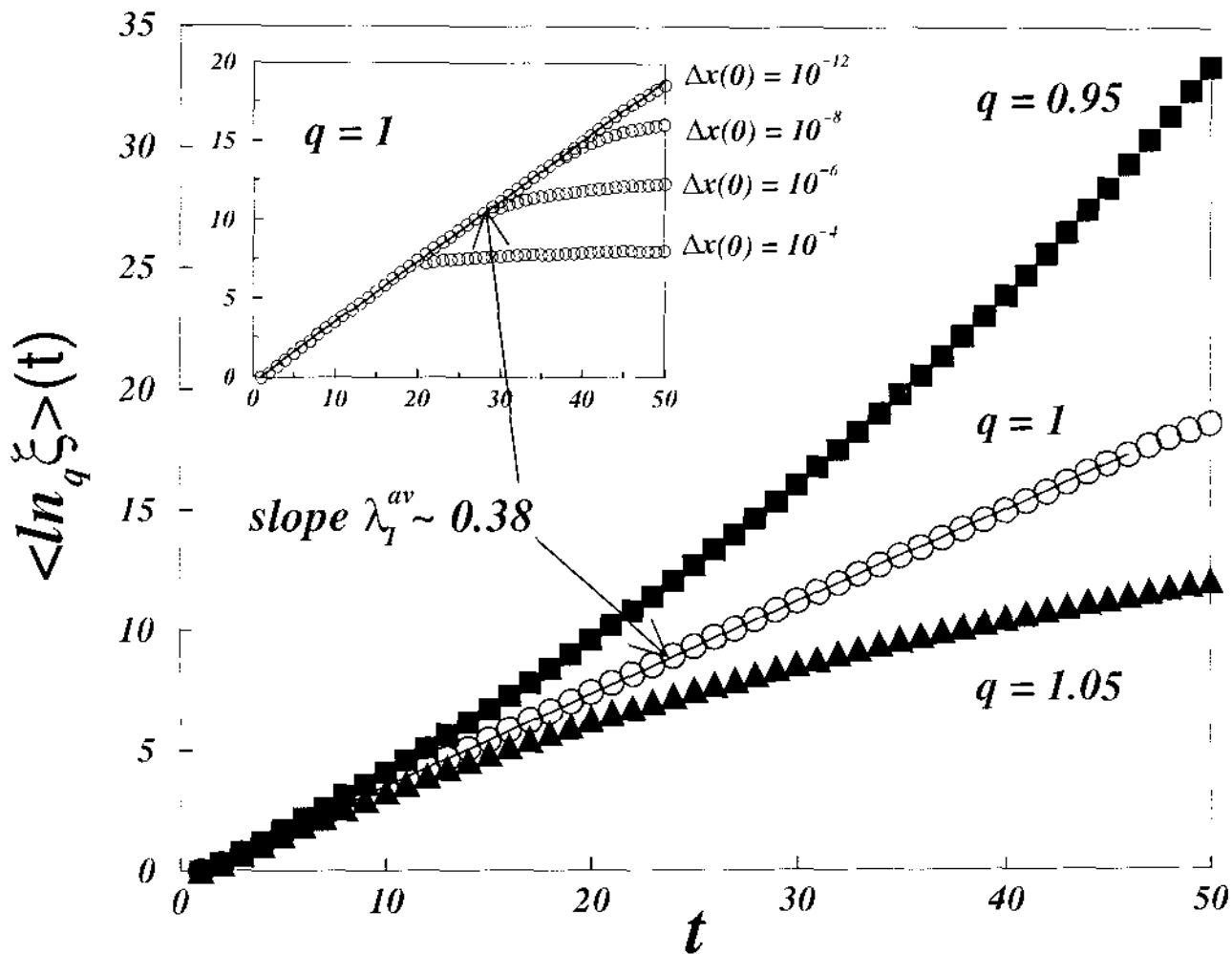


Figura 4.8: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa exponencial ($z = 0.5$) com parâmetro de controle $a = 4$, ou seja, caos forte. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 10^5 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-12}$ das condições iniciais em $t = 0$. Na figura inserida mostramos o comportamento de $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para $q = 1$ com diferentes valores da discrepância inicial.

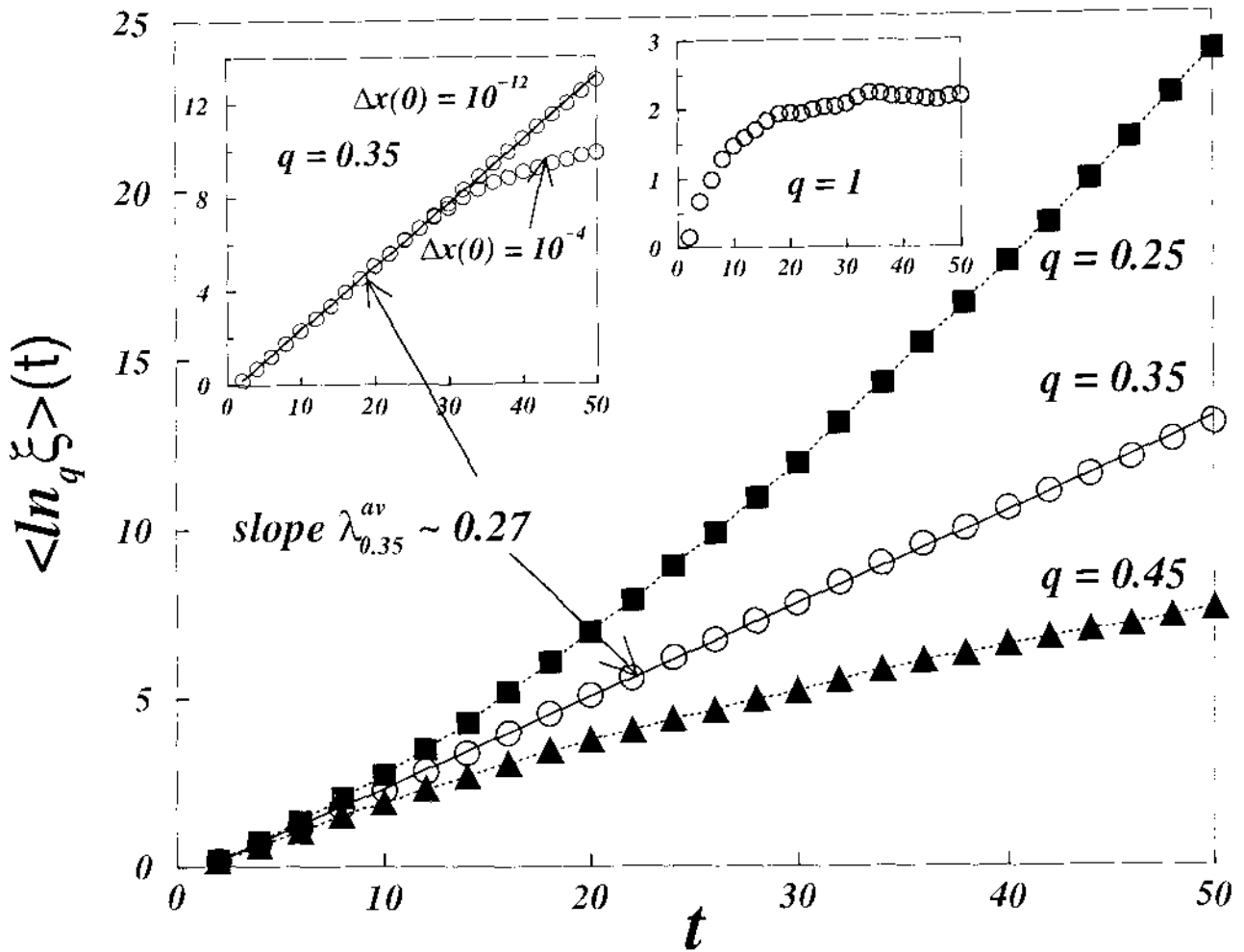


Figura 4.9: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para o mapa exponencial ($z = 0.5$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 3.32169594\dots$ ou seja, no limiar do caos. Consideramos quatro valores diferentes de q , o caso $q = 1$ mostra-se em uma das figuras inseridas. As curvas são os resultados da média sobre 10^7 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-12}$ das condições iniciais em $t = 0$. Na outra figura inserida ilustramos o comportamento de $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ para $q_{sen}^{av} = 0.35$ com diferentes valores da discrepância inicial.

Tabela 4.3: Mapas z-Exponenciais: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$

z	a_c	$q_{sen}^{av}(Eq. (2.5))$	$\lambda_{q_{sen}}^{av}$
0.40	3.059962990...	0.40 ± 0.01	0.25 ± 0.01
0.50	3.32169594...	0.35 ± 0.01	0.27 ± 0.01
0.75	3.68229...	0.30 ± 0.01	0.29 ± 0.02
1.00	3.907050...	0.25 ± 0.01	0.32 ± 0.02
1.25	4.07088307...	0.20 ± 0.01	0.39 ± 0.02
1.50	4.198202...	0.15 ± 0.01	0.43 ± 0.02

4.4 A generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai e da identidade de Pesin

No limiar do caos o expoente de Lyapunov λ_1 é nulo, e a sensibilidade às condições iniciais $\xi(t)$, para um tempo longo de iteração t , não é mais do tipo exponencial. Em seu lugar ela exibe um comportamento segundo uma lei de potência. Além disso, também foram introduzidas [4] as generalizações para a entropia de Kolmogorov-Sinai (KS) $K_{q_{sen}}$ e para a identidade de Pesin $\lambda_{q_{sen}} = K_{q_{sen}}$, $\lambda_{q_{sen}} > 0$ (as expressões padrão são recuperadas quando $q \rightarrow 1$). Para sistemas dinâmicos que apresentam caos, a entropia KS pode ser definida como o incremento por unidade de tempo da entropia padrão de BG $S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$. Além disso, é bem conhecido que a entropia KS está relacionada profundamente aos expoentes de Lyapunov desde que a igualdade de Pesin [3] postule que, $K_1 = \lambda_1$ se $\lambda_1 > 0$ e $K_1 = 0$ para outras variantes (K_1 é igual à soma de todos os expoentes positivos de Lyapunov se a dimensão do sistema for maior que um).

A entropia KS pode ser definida em termos de uma única trajetória [23], usando a representação simbólica das regiões do espaço de fases previamente dividido. Entretanto, parece que, em quase todos os casos, esta definição pode ser substituída equivalentemente por uma baseada em um ensemble de condições iniciais. Esta é a versão que nós usamos nesta tese conforme discutimos nos Capítulos 2 e 3.

Os casos marginais, isto é, aqueles cujo $\lambda_1 = 0$, incluem bifurcações de período duplo e tangenciais assim como o limiar do caos. Para estes casos, as versões generalizadas $K_{q_{sen}}$ da entropia KS foram introduzidas [4] como a taxa de incremento da própria entropia

não-extensiva Eq. (2.8). A entropia não-extensiva permite uma generalização da mecânica estatística BG [5] e recupera a entropia padrão BG $S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ no limite $q \rightarrow 1$. Assim, para a versão generalizada da entropia KS, postula-se [4] a Eq. (2.9), onde t são os passos temporais, W é o número de regiões em que foi dividido o espaço de fases e N é o número de pontos (isto é, condições iniciais) que estão evoluindo com o tempo.

A análise da taxa de crescimento da entropia fornece outra maneira de caracterizar o índice entrópico especial q_{sen} no limiar do caos. O procedimento numérico que nós usamos para calcular q_{sen} foi introduzido pela primeira vez em [17] para sistemas conservativos e usado então por Latora e co-autores [33] para o mapa logístico.

Primeiramente, fazemos uma divisão do intervalo $[-1, 1]$ em W janelas iguais para os mapas (4.2) e (4.1). Colocamos (aleatoriamente ou não) no interior de uma das W janelas um número grande N de condições iniciais de x para os mapas, aqui considerados, com um valor fixo do parâmetro de controle a . Enquanto t evolui, estes N pontos espalham-se tipicamente dentro do intervalo $[-1, 1]$, obtendo-se assim um conjunto $\{N_i(t)\}$ com $\sum_{i=1}^W N_i(t) = N$, $\forall t$, que conseqüentemente fornece um conjunto de probabilidades $\{p_i(t) \equiv N_i(t)/N\}$. Logo, escolhemos um valor para q e calculamos $S_q(t)$ usando Eq. (2.8). Em seguida fazemos uma média $\langle S_q \rangle(t)$ sobre muitas janelas iniciais escolhidas aleatoriamente em todo o espaço de fases para finalmente calcular numericamente $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S_q \rangle(t)}{t}$.

Vale enfatizar que este tipo de média, por um lado, é justamente uma maneira de imitar o procedimento de Gibbs, de ensembles termoestatísticos, mas por outro lado é um método natural de minimizar as consideráveis flutuações que aparecem no limiar do caos, ou seja, quando o parâmetro de controle toma os valores críticos $a = a_c$. Assim, no limiar do caos aquelas flutuações dificultam a caracterização do índice entrópico especial para a qual $\langle S_q \rangle(t)$ tem um crescimento linear.

Sendo assim, calculamos a média de $\langle S_q \rangle(t)$ sobre um grande número de janelas iniciais em lugar de somente as janelas “eficientes” usadas no Capítulo 2 e em [33, 40]. A saber, neste Capítulo e daqui em diante, usaremos um grande número de janelas, tipicamente $W/2$, escolhidas aleatoriamente. As flutuações que ainda existem são consideravelmente

menores. Antes de proseguir é oportuno assinalar-se que, o procedimento desenvolvido em [33, 40] e no Capítulo 2, que implementa uma média “eficiente” sobre as condições iniciais, não permite obter o valor do coeficiente de proporcionalidade entre $S_{q_{sen}}$ e o tempo t , já que este muda o que não permite levar em conta numericamente $K_{q_{sen}}$ [7]. Neste sentido, o procedimento implementado neste Capítulo, é consistente com a análise da sensibilidade às condições iniciais, a saber, os valores dos $q_{sen}^{av}(z)$ obtidos com os dois métodos coincidem, além disso, surpreendentemente os valores de $K_{q_{sen}^{av}}$ e $\lambda_{q_{sen}^{av}}$ também coincidem. Assim, pela primeira vez, com o método da média de ensembles, corrobora-se a *identidade generalizada de Pesin*, a saber $K_{q_{sen}^{av}} = \lambda_{q_{sen}^{av}}$. Estes resultados surpreendentes encontram-se resumidos nas Figs. 4.18-4.21.

Certamente verificamos, para os mapas z -logísticos e z -exponenciais, um resultado muito interessante [33], a saber, $K_{q_{sen}^{av}}$ é *finito* somente para $q = q_{sen}^{av}(z)$, diverge para $q < q_{sen}^{av}(z)$ e anula-se para $q > q_{sen}^{av}(z)$.

De fato, para N e W cada vez maiores (e que sempre satisfazem a condição $N \gg W$), observamos, em todos os casos, que um incremento linear de $\langle S_q \rangle$ com o tempo emerge somente para um valor especial de q a saber $q \equiv q_{sen}^{av}(z)$. Definimos a inclinação correspondente como a entropia generalizada $K_{q_{sen}^{av}}$ de KS. Os resultados numéricos obtidos neste Capítulo, para os dois regimes: caos forte e o limiar do caos; para o mapa logístico ($z = 2$) e para o mapa exponencial ($z = 0.5$), como ilustração, são mostradas nas Figs. 4.10, 4.11, 4.15 e 4.16. No regime caótico, $a = 2$ para o mapa logístico padrão ($a = 4$ para o mapa exponencial com $z = 0.5$), a entropia BG ($q_{sen}^{av} \equiv 1$), exibe um crescimento linear com o tempo antes de atingir a saturação devido ao valor finito do número de partições W . A inclinação da parte linear da entropia, ou seja a taxa de produção da entropia, é numericamente igual a $K_1 = 0.69 \pm 0.01$ ($K_1 = 0.38 \pm 0.02$), que *coincide* com o valor obtido previamente, através da sensibilidade às condições iniciais (expoente de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69 \pm 0.01$ para o mapa logístico e $\lambda_1 = 0.38 \pm 0.01$ para o mapa exponencial $z = 0.5$). Assim corrobora-se a já conhecida identidade de Pesin para o caos forte no caso do mapa logístico padrão ($a = 2$) e pela primeira vez para caso do mapa exponencial com $z = 0.5$ ($a = 4$).

Na Fig. 4.11 (Fig. 4.16) consideramos o caso do limiar do caos para o mapa logístico padrão, $a_c = 1.401155189\dots$ (e $a_c = 3.32169594\dots$ para o mapa exponencial com $z = 0.5$), onde ilustramos a curva $\langle S_q \rangle(t)$ para diferentes valores de q ; a curva é obtida, tipicamente, depois de 5×10^4 realizações implementadas aleatoriamente. Consistentemente com o valor de q_{sen}^{av} extraído do método da sensibilidade às condições iniciais (veja as Figs. 4.4 e 4.9), os resultados para o mapa logístico padrão (para o mapa exponencial com $z = 0.5$) são tais que o crescimento da curva entrópica $\langle S_q \rangle(t)$ é linear quando $q = q_{sen}^{av} \equiv 0.36 \pm 0.01$ ($q = q_{sen}^{av} \equiv 0.35 \pm 0.01$), desaparece para todo $q > 0.36$ ($q > 0.35$) e diverge para qualquer $q < 0.36$ ($q < 0.35$).

A fim de fazer estes resultados mais convincentes (veja o gráfico inserido na Fig. 4.11 para o mapa logístico padrão ($z = 2$), como ilustração), ajustamos a curva $\langle S_q \rangle(t)$ com o polinômio $S(t) = a + bt + ct^2$, no intervalo $[t_1, t_2]$. Então, define-se $R = c \cdot (t_1 + t_2) / b$ como uma medida da importância do termo não-linear no ajuste: se os pontos estiverem em uma linha perfeita, R deveria ser zero. Para o mapa logístico padrão, nós escolhemos $t_1 = 1$ e $t_2 = 30$ para todos os q , de modo que o fator $(t_1 + t_2)$ seja justamente uma constante de normalização. O gráfico inserido da Fig. 4.11 mostra o valor de R perto de zero para $q \equiv q_{sen}^{av} = 0.36 \pm 0.01$. Estes resultados não são sensíveis às mudanças nos valores de $t_2 < 30$. Para valores de $t_2 > 30$, a região do crescimento linear desaparece e começa a saturação que obviamente está presente devido ao valor finito de W como acontece no caos forte $a = 2$.

Nas tabelas 4.4 e 4.5 são indicados os valores críticos do parâmetro de controle $a_c(z)$, assim como os valores de $q_{sen}^{av}(z)$ obtidos através deste método, para os mapas z -logísticos e z -exponenciais respectivamente. Além disso, na Fig. 4.17 mostramos a diferença substancial entre os valores relevantes dos índices entrópicos q obtidos com os dois métodos: de um ensemble e da média de muitos ensembles.

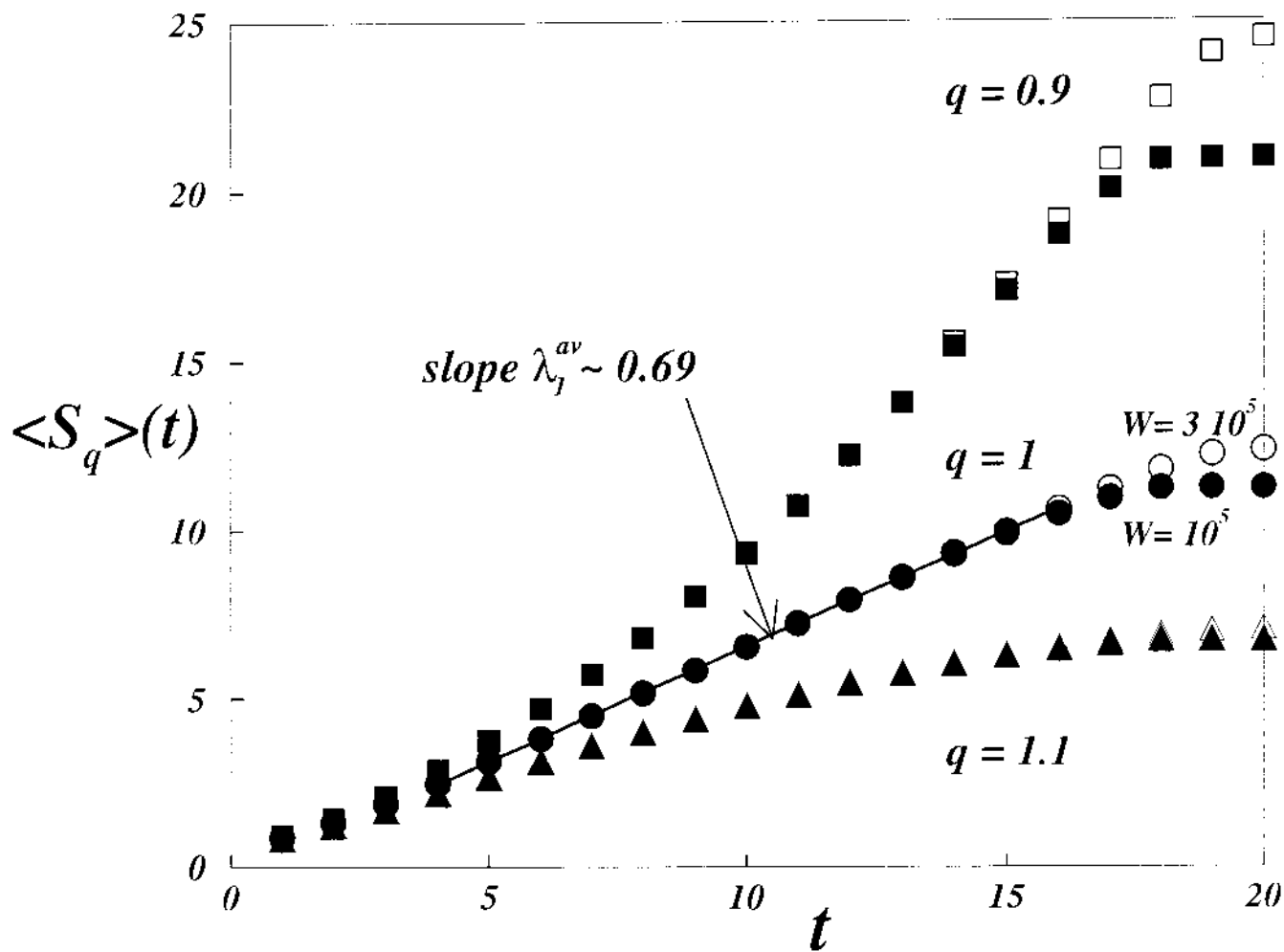


Figura 4.10: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle $a = 2$. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 4000 realizações com $W = 10^5$ (símbolos vazios) e $W = 3 \times 10^5$ (símbolos preenchidos). Consideramos $N = 10 \times W$ condições iniciais para cada realização.

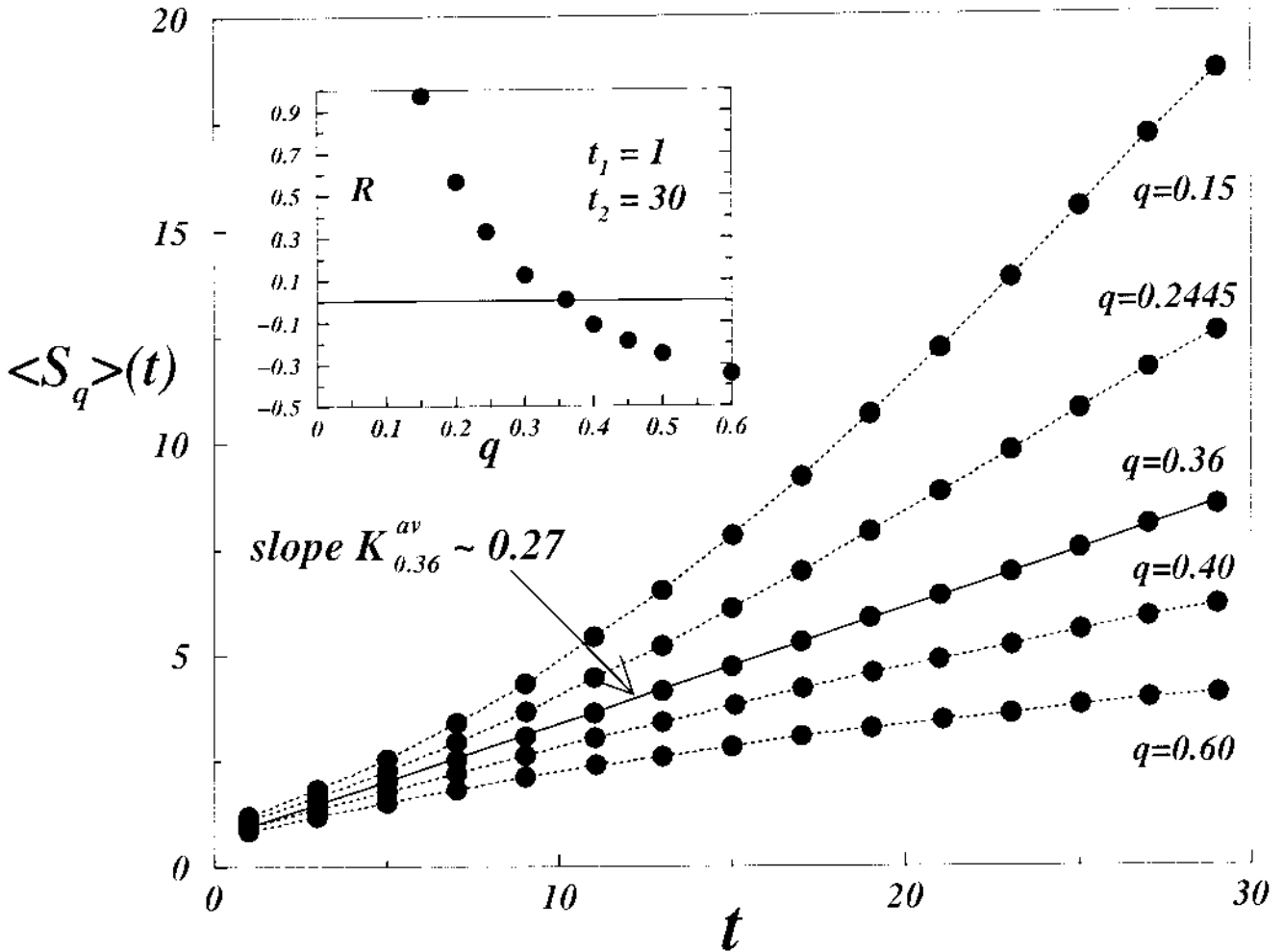


Figura 4.11: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.401155189\dots$. Considera-se cinco valores diferentes de q . As curvas são o resultado da média sobre 50000 realizações com $N = 10^6$ e $W = 10^5$. A figura inserida mostra o gráfico do coeficiente de não-linearidade R versus q . Observe-se que os sinais de R em ambos lados de $q \propto 0.36$ são consistentes com as curvaturas de $\langle S_q \rangle(t)$ na região compreendida no intervalo $[t_1, t_2]$.

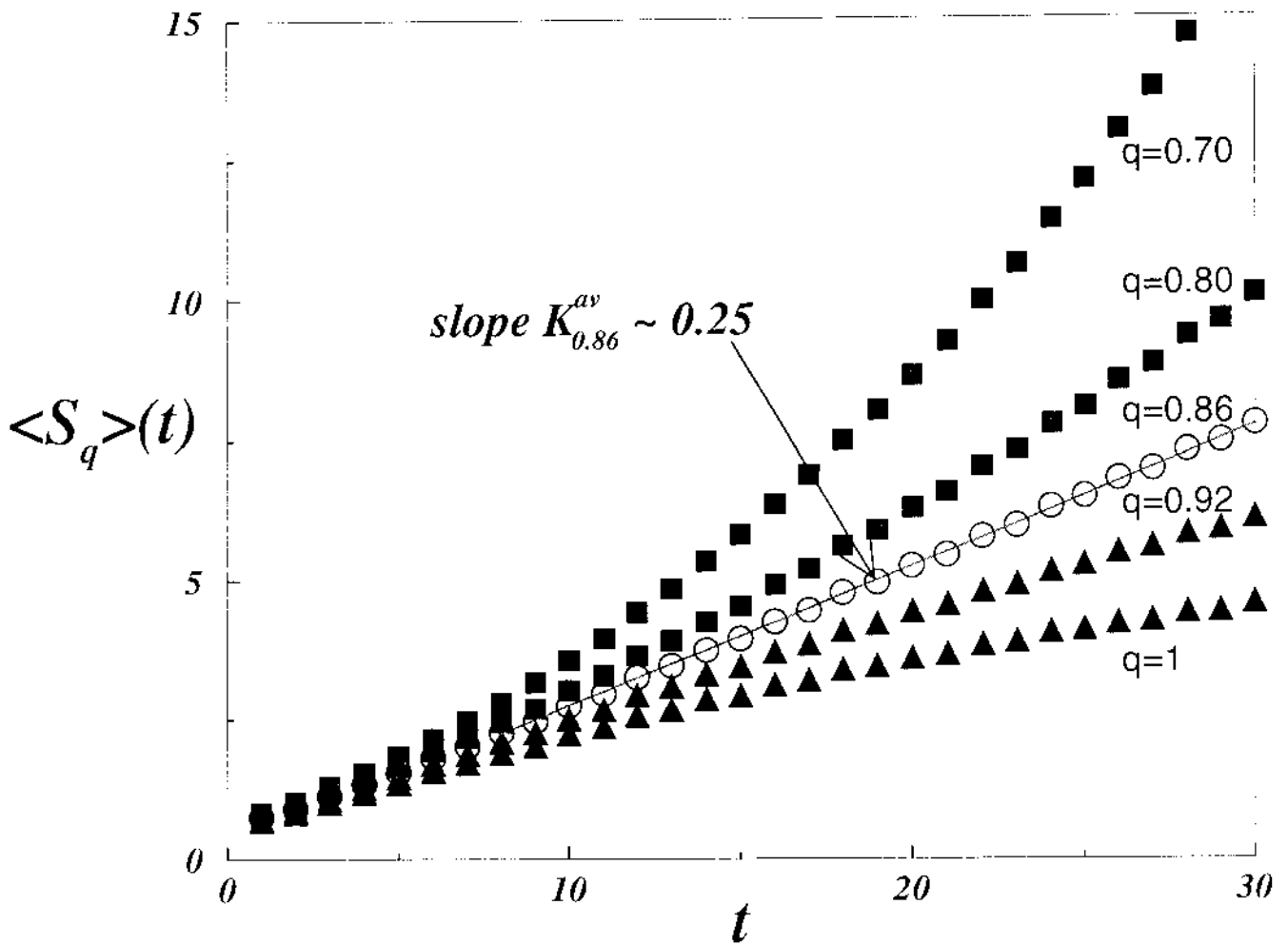


Figura 4.12: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.4828024\dots$. Consideramos cinco valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 5×10^4 realizações com $W = 10^5$ e $N = 10 \times W$.

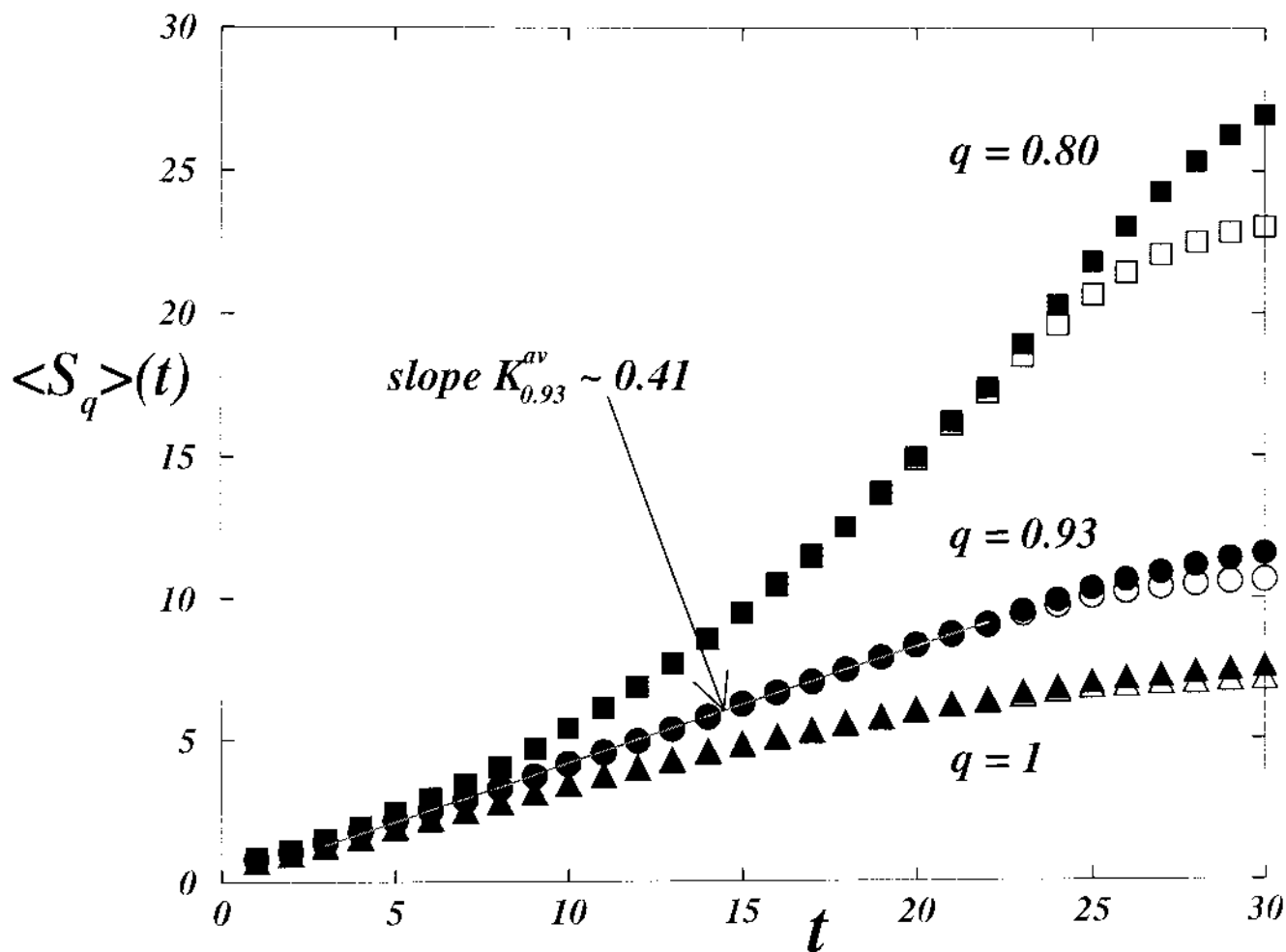


Figura 4.13: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com $a_c = 1.631018\dots$. Consideramos três valores diferentes de q com $W = 3 \times 10^5$ (círculos preenchidos), $W = 10^5$ (círculos vazios) e $N = 10 \times W$. As curvas são os resultados da média sobre 5×10^4 realizações

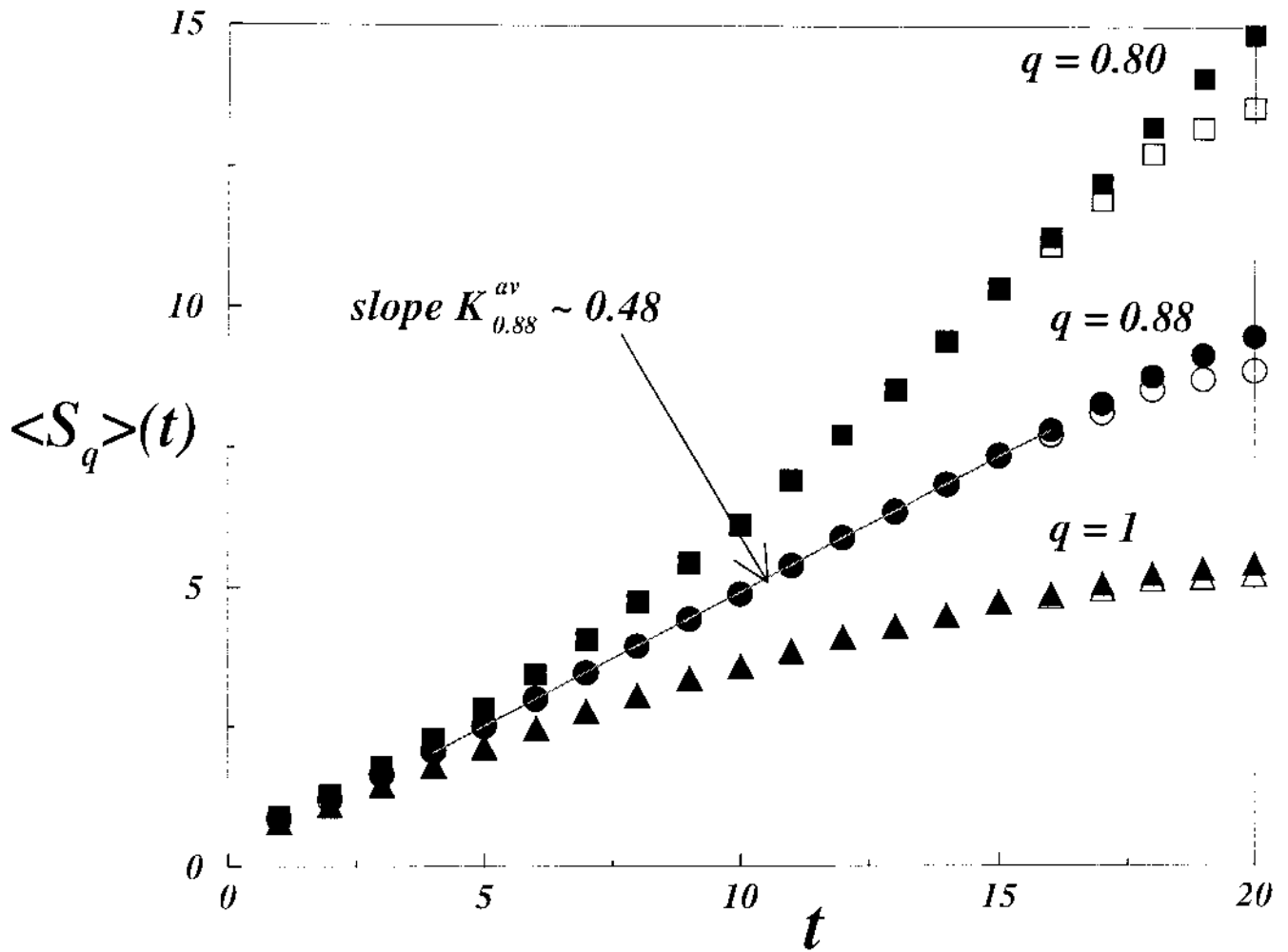


Figura 4.14: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa logístico ($z = 2$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.7798164\dots$. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 5×10^4 realizações com $W = 10^5$ (símbolos preenchidos) e $W = 3.2 \times 10^4$ (símbolos vazios). Consideramos $N = 10 \times W$ condições iniciais para cada realização.

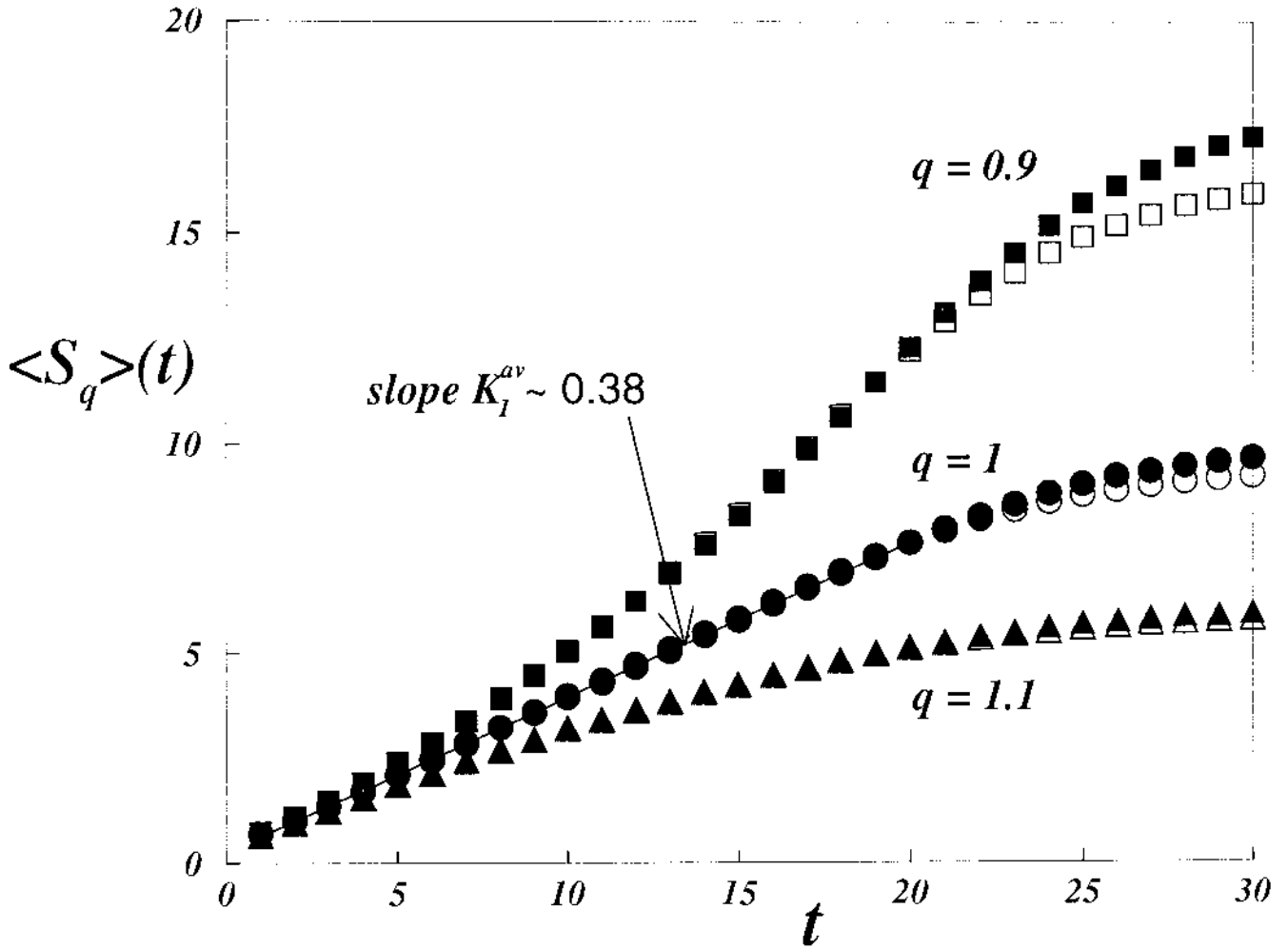


Figura 4.15: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa exponencial ($z = 0.5$) com parâmetro de controle $a = 4$, ou seja, na região do caos forte (com expoente de Lyapunov positivo). Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 3000 realizações com $W = 3^5$ (símbolos preenchidos) e $W = 10^5$ (símbolos vazios). Consideramos $N = 10 \times W$ condições iniciais para cada realização.

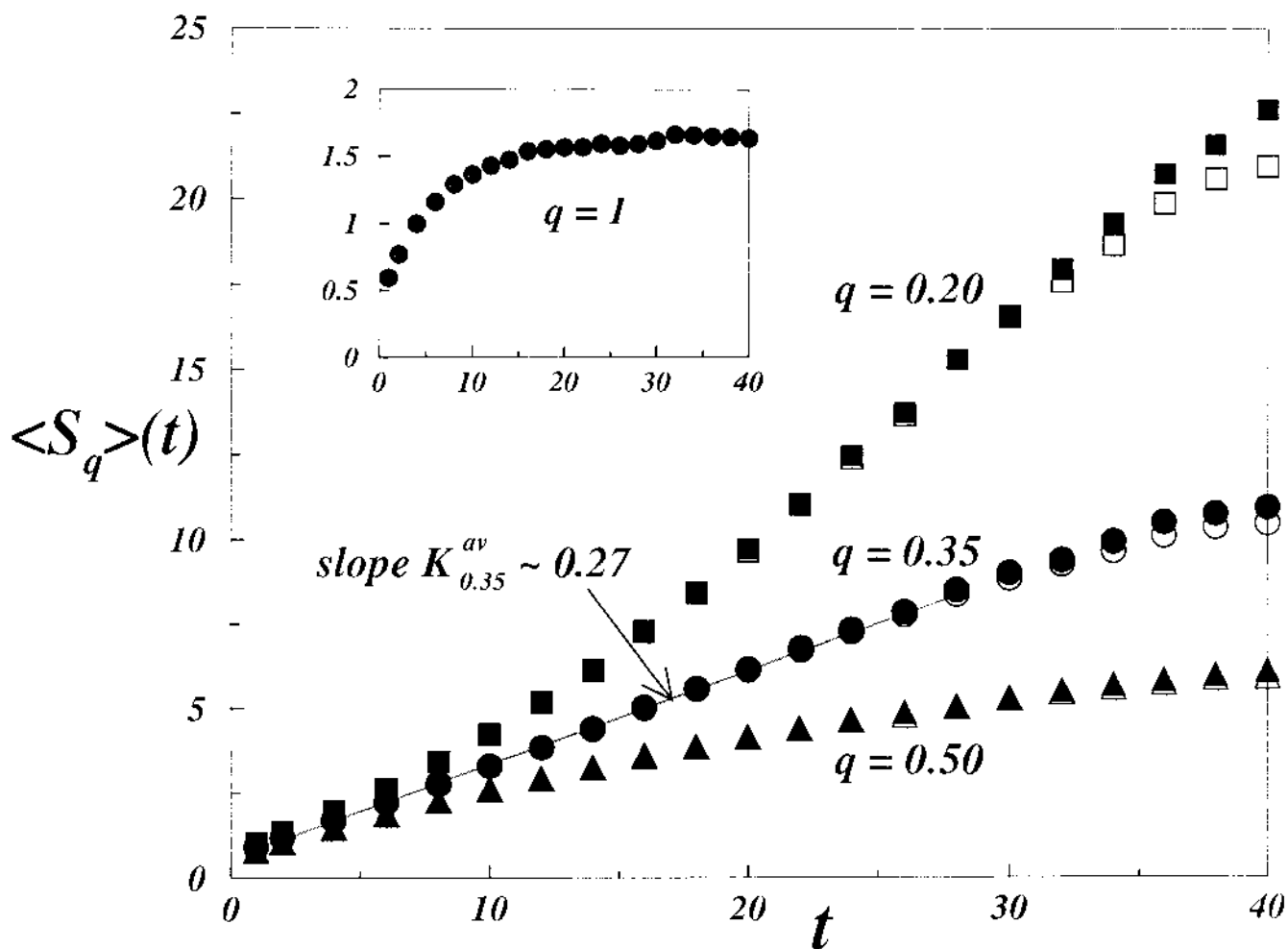


Figura 4.16: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para o mapa exponencial ($z = 0.5$) com parâmetro de controle crítico $a_c = 3.32169594\dots$, ou seja, no limiar do caos. Consideramos quatro valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre 50000 realizações, $W = 3 \times 10^5$ (símbolos preenchidos) e $W = 10^5$ (símbolos vazios); $N = 10 \times W$ condições iniciais para cada realização.

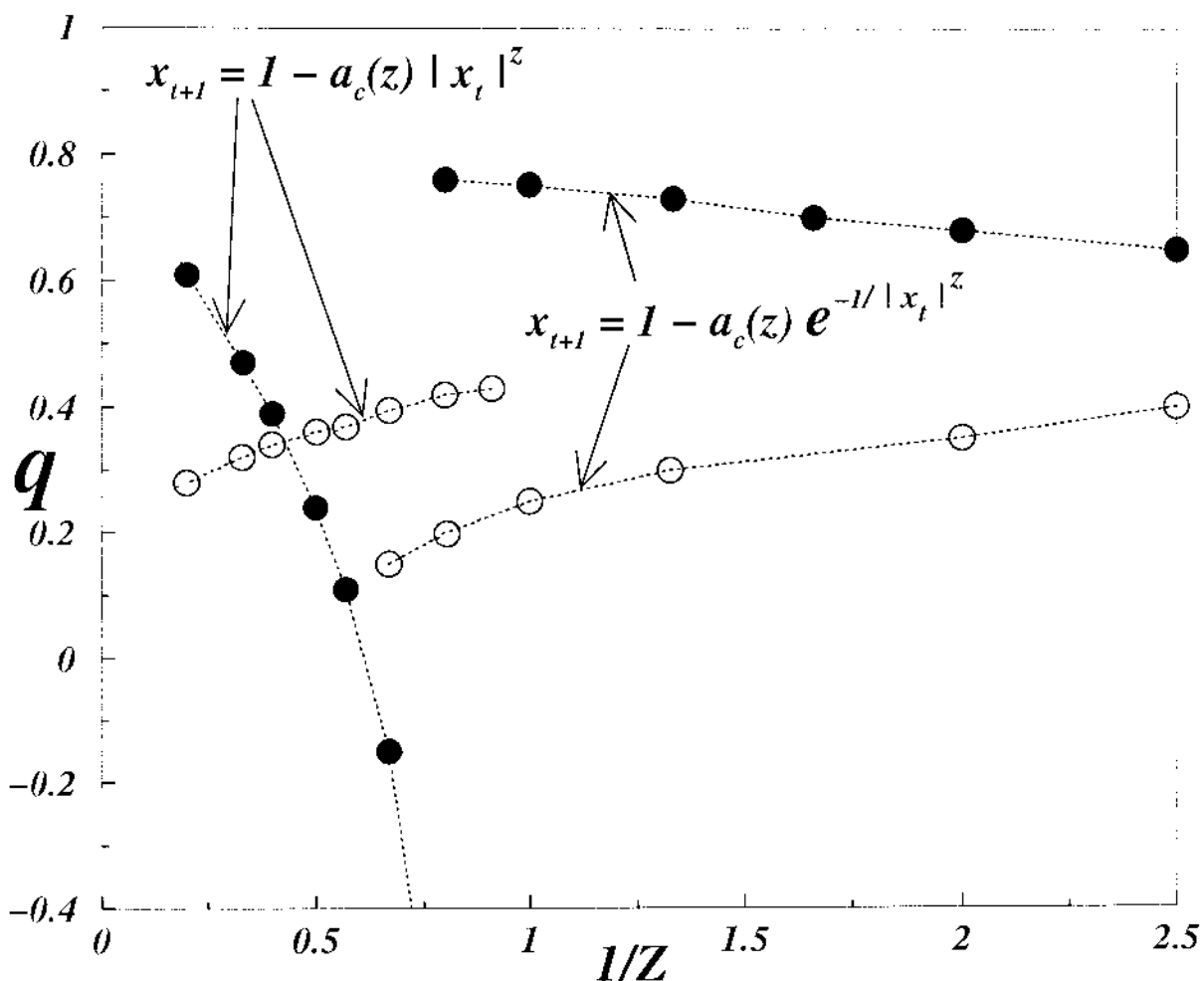


Figura 4.17: A dependência de q versus z^{-1} para as dos variantes: círculos preenchidos com a média sobre as janclas “eficientes” (no caso da entropia) e de uma trajetória especial (no caso da sensibilidade às condições iniciais); círculos vazios: Médias de ensembles . Os resultados referentes ao mapa exponencial, círculos preenchidos, foram obtidos por Ugur Tirnakli [47] baseando-se na descrição geométrica do atrator multifractal.

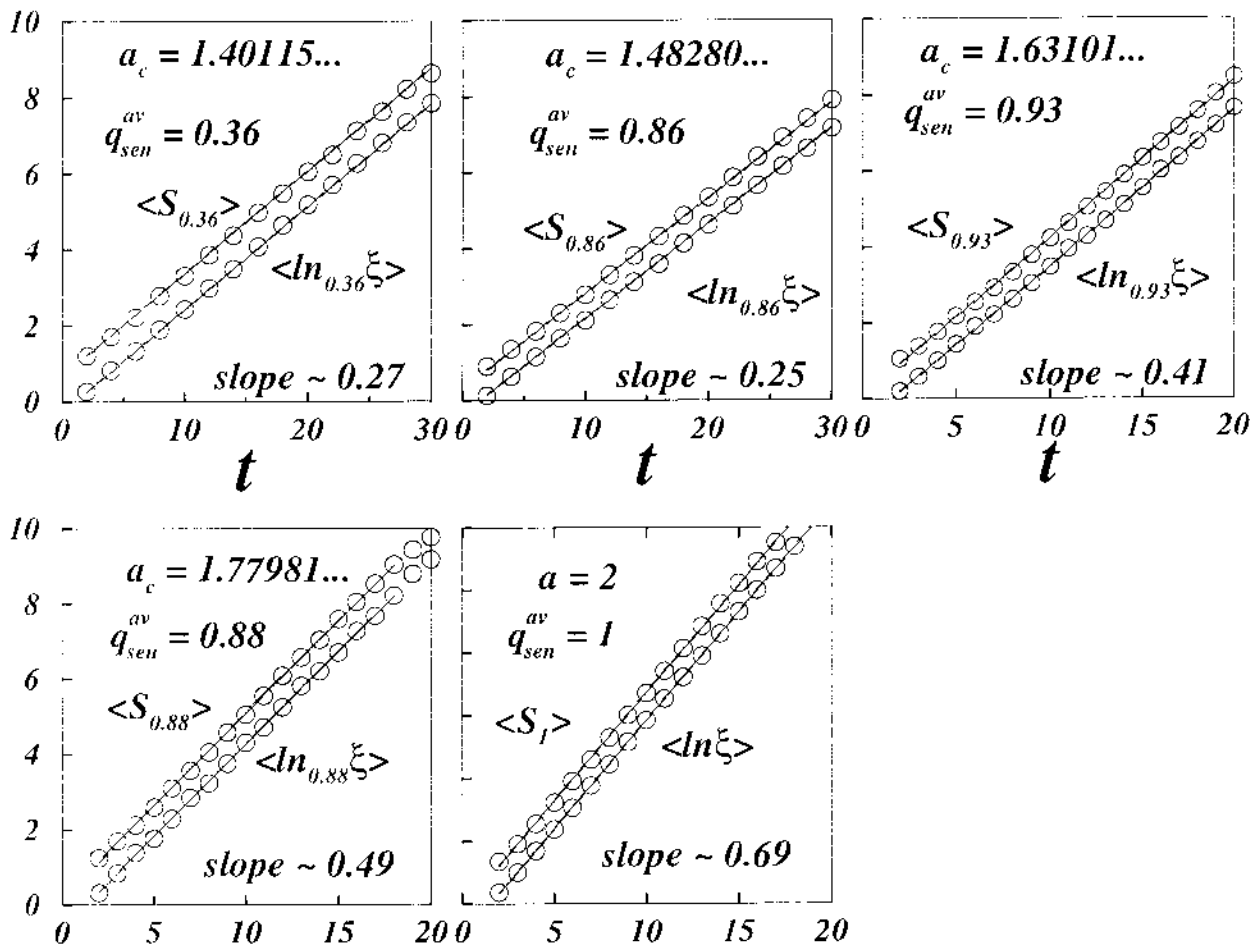


Figura 4.18: A identidade de Pesin, para o mapa logístico ($z = 2$) com valores críticos do parâmetro de controle a_c (limiar do caos) indicados na Fig. 4.1 e com $a = 2$ (caso típico do caos forte).

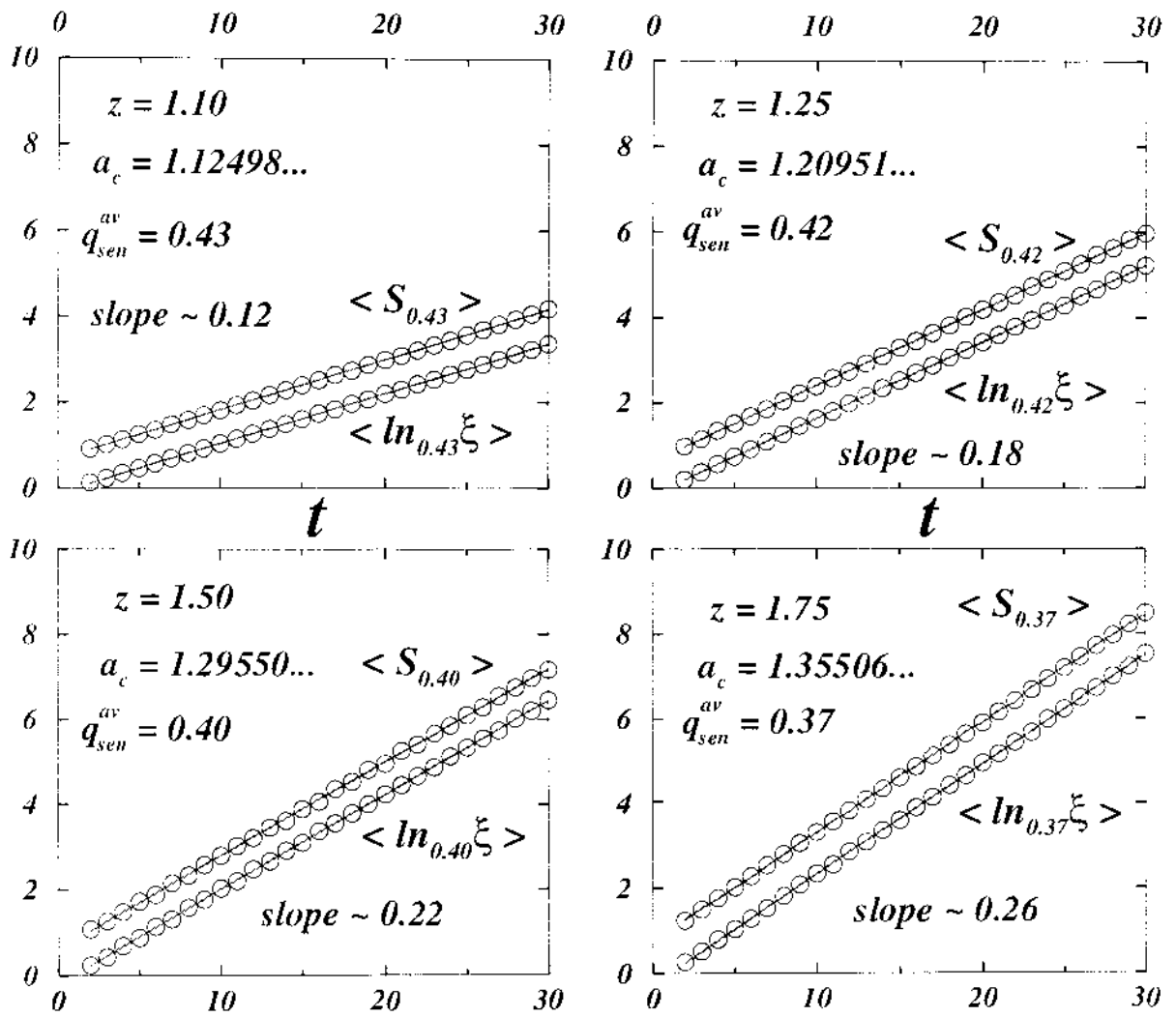


Figura 4.19: A identidade de Pesin, para os mapas z -logísticos no limiar do caos: $z = 1.10$, $z = 1.25$, $z = 1.50$ e $z = 1.75$.

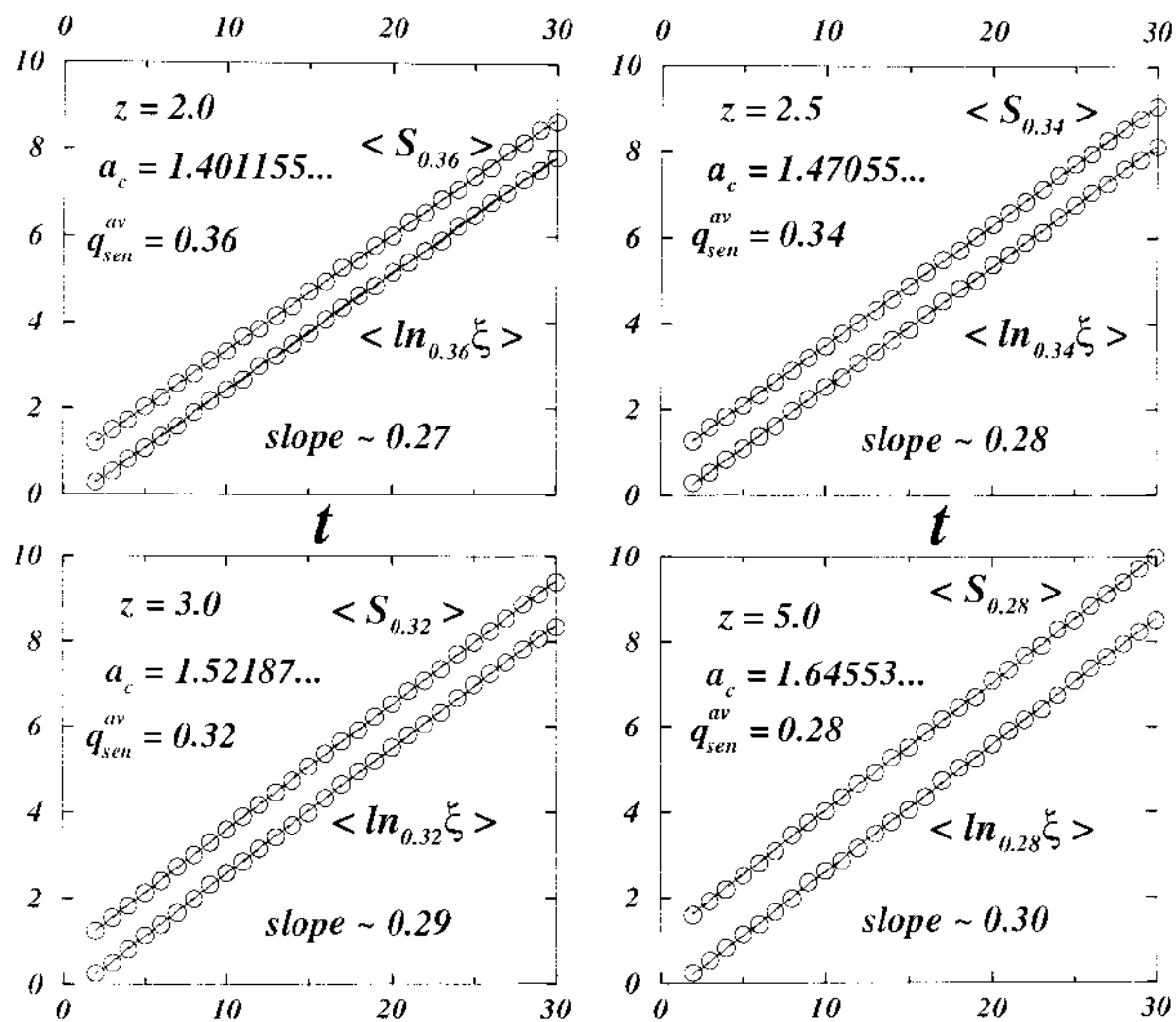


Figura 4.20: A identidade de Pesin, para os mapas z -logísticos no limiar do caos: $z = 2.0$, $z = 2.50$, $z = 3.0$ e $z = 5.0$.

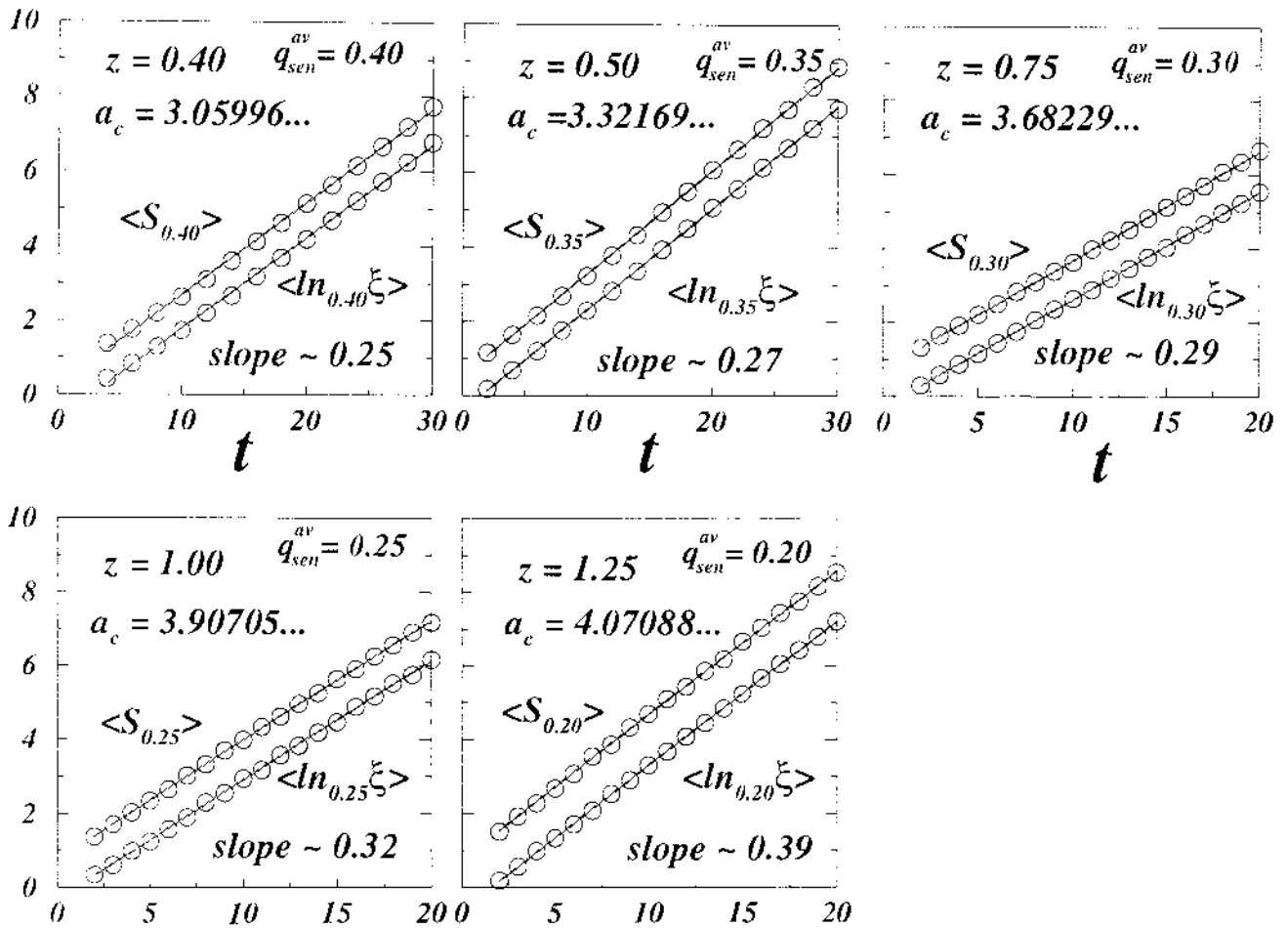


Figura 4.21: A identidade de Pesin, para os mapas z -exponenciais no limiar do caos: $z = 0.40$, $z = 0.50$, $z = 0.75$, $z = 1.0$ e $z = 1.25$.

Tabela 4.4: Mapas z -Logísticos: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$

	z	a_c	q_{sen}^{av}	$K_{q_{sen}^{av}}$
	1.10	1.12498...	0.43 ± 0.01	0.12 ± 0.02
	1.25	1.20951...	0.42 ± 0.01	0.18 ± 0.02
	1.50	1.29550...	0.40 ± 0.01	0.22 ± 0.02
	1.75	1.35506...	0.37 ± 0.01	0.26 ± 0.01
	2.00	1.40115...	0.36 ± 0.01	0.27 ± 0.02
	2.50	1.47055...	0.34 ± 0.01	0.28 ± 0.02
	3.00	1.52187...	0.32 ± 0.01	0.29 ± 0.03
	5.00	1.64553...	0.28 ± 0.01	0.30 ± 0.03

Tabela 4.5: Mapas z -Exponenciais: Média de ensembles no intervalo $[-1, 1]$

	z	a_c	q_{sen}^{av}	$K_{q_{sen}^{av}}$
	0.40	3.05996...	0.40 ± 0.01	0.25 ± 0.02
	0.50	3.32169...	0.35 ± 0.01	0.27 ± 0.02
	0.75	3.68229...	0.30 ± 0.01	0.29 ± 0.02
	1.00	3.90705...	0.25 ± 0.02	0.32 ± 0.01
	1.25	4.07088...	0.20 ± 0.02	0.39 ± 0.03
	1.50	4.19820...	0.15 ± 0.02	0.43 ± 0.03

4.5 Mapa de Kaplan-Yorke

4.5.1 introdução

Esta seção é uma continuação das precedentes. As mesmas notações e definições serão usadas com óbvias generalizações. O seguinte exemplo é uma classe dos mapas dissipativos bidimensionais, conhecidos como mapas de Kaplan-Yorke. Uma característica agradável destes mapas é que têm um significado físico direto. Este fato distingue-os de outros mapas bidimensionais conhecidos tais como o mapa de Henon. É esta a motivação para investigar as propriedades destes sistemas dinâmicos.

Considere uma partícula de massa 1 que se move sob a influência de uma força pontual

$$\vec{L}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \delta(t - n\tau), \quad (4.3)$$

onde τ é a diferença do tempo entre impulsos (nós supomos que os impulsos são equidistantes). η_n é a intensidade do impulso no tempo $n\tau$. Se o movimento da partícula acontece em um meio viscoso, adicionalmente emerge a força de fricção exercida na partícula. Se esta força é proporcional à velocidade da partícula $\vec{Y}(t)$, a equação de movimento é

$$\dot{\vec{Y}}(t) = -\gamma\vec{Y}(t) + \vec{L}_\tau(t), \quad (4.4)$$

onde γ é a viscosidade do líquido. Nós supomos que existe um sistema dinâmico T com tempo discreto: $X \rightarrow X \subset \mathcal{R}^k$ e a função $f: X \rightarrow \mathcal{R}^m$ ($\vec{Y}(t)$ toma valores em \mathcal{R}^m), tal que

$$\eta_n = f(x_{n-1}), \quad (4.5)$$

A solução $\vec{Y}(t)$ da equação (4.4) pode ser apresentada como

$$Y(t) = e^{-\gamma(t-n\tau)}y_n, \quad (n = [t/\tau]), \quad (4.6)$$

$$x_{n+1} = Tx_n. \quad (4.7)$$

onde $[.]$ considera somente a parte inteira e y_n é obtida pela relação de iteração U :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Tx_n, \\ y_{n+1} &= \lambda y_n + f(x_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

e $\lambda = e^{-\gamma\tau}$ é um parâmetro.

Com esta consideração, o sistema dinâmico (4.8) com tempo discreto tem uma interpretação física direta: $y_n = Y(n\tau)$ é a velocidade da partícula com amortização pontual. Considera-se que a velocidade inicial y_0 é fixa. Se além disso fixamos o valor inicial de x_0 , a evolução temporal da velocidade é determinada para todos os tempos. Alternativamente, x_0 pode ser considerado como uma variável aleatória com uma certa distribuição de probabilidades $\mu(x_0)$. Assim, $L_\tau(t)$ é por definição um processo estocástico e a Eq. (4.4) é uma equação diferencial estocástica [48, 49, 50]. De acordo com o teorema da existência de Kolmogorov [50] para todo processo estocástico existe um espaço de fases X , um sistema dinâmico T , um mapa f e uma medida de probabilidade μ tais que $\eta_n = f(T^{n-1}x_0)$. Neste sentido a equação (4.4) e o sistema dinâmico (4.8) são equivalentes.

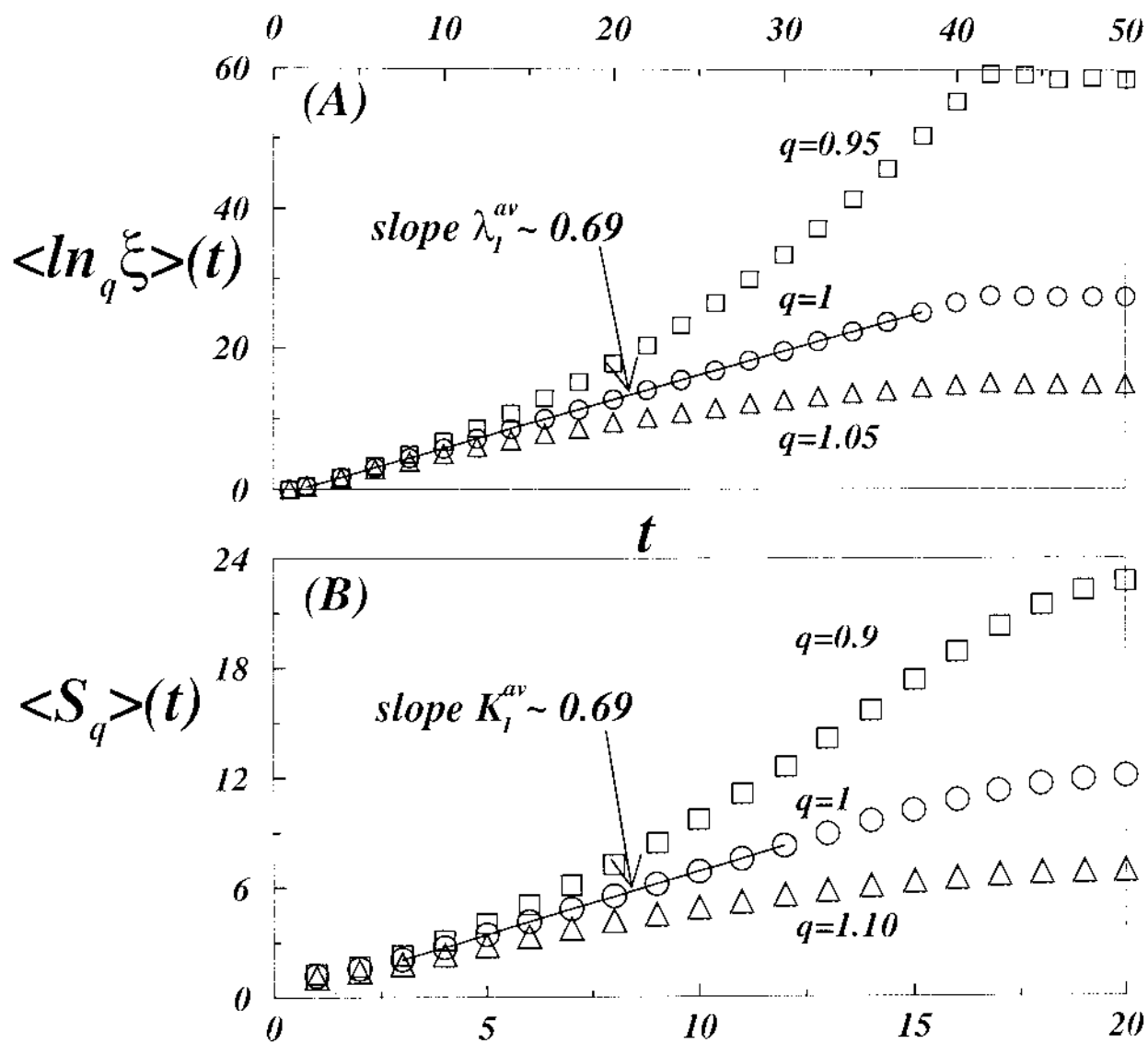


Figura 4.22: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ e $\langle S_q \rangle$ para o mapa de Kaplan-Yorke com parâmetro de controle $a = 2$, $0 < \lambda \leq 1$. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre: em (A) 10^5 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-14}$ das condições iniciais em $t = 0$; em (B) 600 realizações com $W = 800 \times 800$ e $N = 10 \times W$.

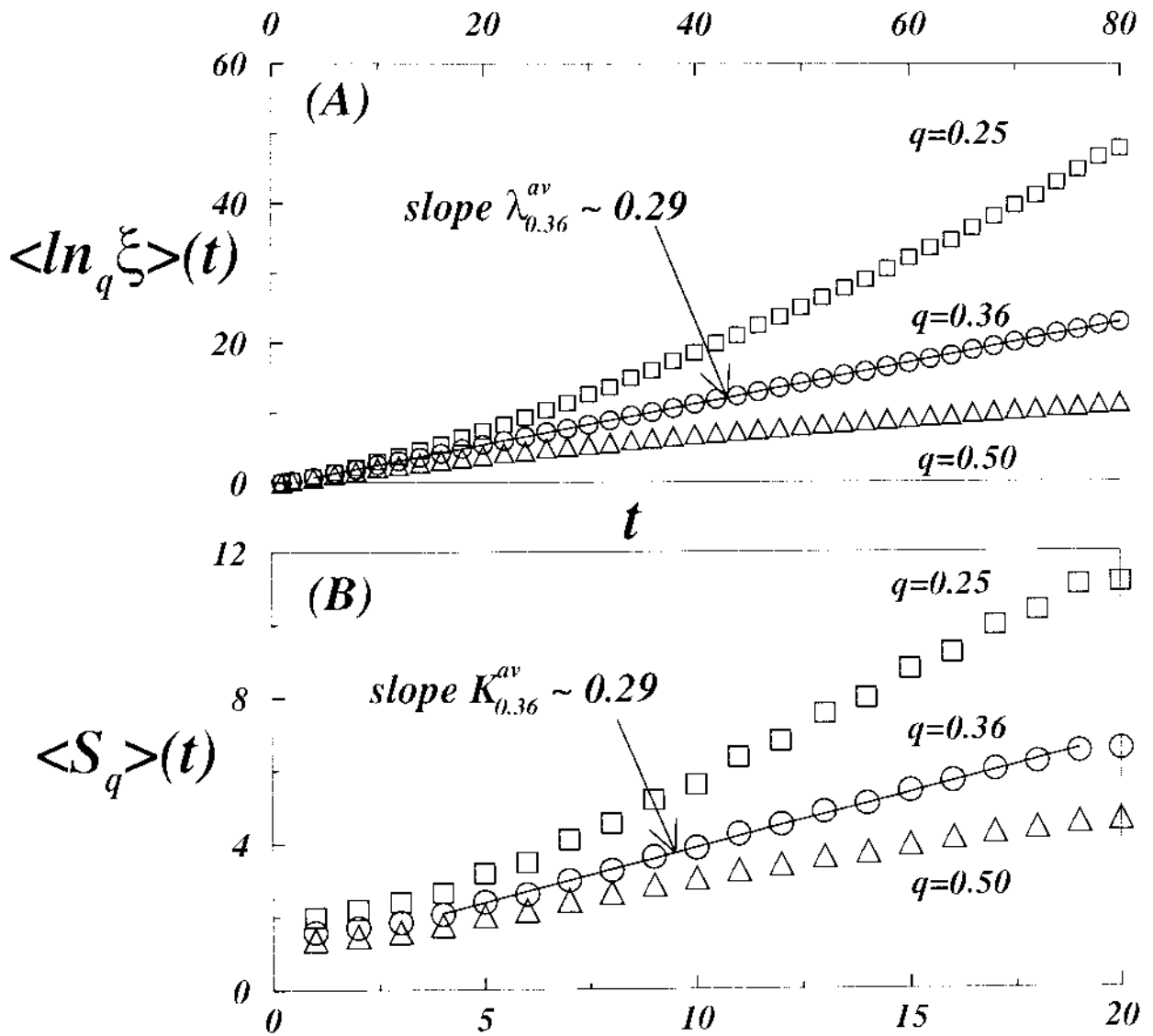


Figura 4.23: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ e $\langle S_q \rangle(t)$ para o mapa de Kaplan-Yorke com parâmetro de controle crítico $a_c = 1.401155189\dots$ e $0 < \lambda \leq 1$. Consideramos três valores diferentes de q . As curvas são os resultados da média sobre: em (A) 10^7 realizações com uma discrepância $\Delta x(0) = 10^{-14}$ das condições iniciais em $t = 0$; em (B) 60000 realizações com $W = 800 \times 800$ e $N = 10 \times W$.

4.5.2 Não-ergodicidade e Mixing do tipo lei de potência

Exemplos de mapas que são ergódicos e que apresentam mixing são o mapa de tent, o mapa logístico (para $a = 2$), assim como os mapas correspondentes ao tipo de Kaplan-Yorke com $|\lambda| < 1$. Exemplos concretos para o caso particular $k = m = 1$, já têm sido estudados por diversos autores. Os primeiros foram Kaplan e Yorke [51]. Os mapas de Kaplan-Yorke são obtidos para uma escolha especial $Tx = 1 - 2x^2$, $f(x) = x$.

Para os mapas (4.8) foram demonstrados os seguintes três teoremas [52]: I) Se o comportamento ao longo do tempo (o suficientemente grande) da força pontual for periódica, isto é se T possuir uma órbita periódica atrativa de comprimento L , a velocidade da partícula torna-se também periódica com período L . II) Se a força pontual que atua sob a partícula é ergódica, a velocidade da partícula também é ergódica. III) Se a força pontual exibe um comportamento do tipo “mixing”, a velocidade da partícula também é da mesma natureza.

Em consequência do teorema I, o sistema de duas dimensões (4.8) mostra bifurcações sub-harmonicas para os mesmos valores do parâmetro a que o sistema T independentemente de λ . Assim, para ambos sistemas, o ponto de acumulação das bifurcações e a constante de Feigenbaum δ são os mesmos. Obviamente os parâmetros a e λ estão desacoplados. Assim, podemos afirmar que o valor crítico do parâmetro a , que indica o limiar do caos, é o mesmo que do mapa logístico, a saber $a = a_c = 1.401155189\dots$

Neste ponto, nós queremos demonstrar numericamente, para o mapa em questão, que a ergodicidade e o mixing exponencial é obtido para valores específicos do parâmetro $a \neq a_c$, em particular para $a = 2$. No entanto, para o limiar do caos, $a = a_c$, a perda da ergodicidade e a aparição do mixing do tipo lei de potência é inevitável. Esta afirmação é corroborada numericamente através do método da sensibilidade às condições iniciais e da entropia métrica KS. Os resultados numéricos são mostrados nas Figs. 4.22 e 4.23. O procedimento desenvolvido é o mesmo que foi utilizado neste Capítulo para os mapas de uma dimensão.

As Figs. 4.22 e 4.23 apresentam a dependência temporal da sensibilidade $\langle \ln_q \xi \rangle$ e da entropia $\langle S_q \rangle$ no caso do caos forte ($a = 2$) e no limiar do caos ($a_c = 1.401155189\dots$)

respectivamente. Em ambos casos, observe-se a similaridade entre o mapa logístico e o mapa de Kaplan-Yorke.

4.6 Conclusões

Os resultados deste Capítulo são: (i) Introduzimos uma nova classe de universalidade para mapas dissipativos unimodais de uma dimensão, equação (4.1), que corresponde a uma caracterização apropriada de mapas extremamente planos (quando $z \rightarrow \infty$ na equação (4.2)); (ii) Para esta família de mapas assim como para os mapas z -logísticos e o mapa bidimensional de Kaplan-Yorke, nós realizamos médias de ensembles *à la Gibbs* para a sensibilidade e a produção da entropia com a finalidade de determinar o índice entrópico $q_{sen}^{av}(z)$, sendo que os valores destes, obtidos baseando-se nos dois métodos, são os mesmos: (iii) Para o caos forte verifica-se que $q_{sen}^{av}(z) = q_{sen}(z) = 1$ e $K_{sen}^{av}(z) = \lambda_{sen}^{av}(z) = K_{sen}(z) = \lambda_{sen}(z)$; (iv) No limiar do caos, para todos os mapas analisados, corrobora-se o teorema de Pesin: $K_{sen}^{av} = \lambda_{sen}^{av}$. Para os mapas z -logísticos e z -exponenciais, verifica-se que $q_{sen}^{av}(z)$ diminui para um achatamento crescente (ou seja para z crescente, em contraste com $q_{sen}(z)$) e que $K_{sen}^{av}(z) = \lambda_{sen}^{av}(z) < K_{sen}(z) = \lambda_{sen}(z)$: assim temos que em geral $q_{sen}^{av}(z) \neq q_{sen}(z)$ como uma consequência direta do fato de que diferentes condições iniciais fornecem trajetórias fortemente flutuantes que seguem virtualmente o caminho de qualquer outra trajetória, mas, deslocada várias vezes [45], o que não acontece no caos forte.

Todos estes resultados fazem uma ligação evidente entre o índice entrópico q das entropias não-extensivas e da sensibilidade às condições iniciais no limiar do caos de tais mapas dissipativos não lineares. Esta conexão fornece uma receita útil para calcular o índice entrópico a partir das regras da dinâmica do próprio sistema em questão.

Capítulo 5

Sensibilidade anômala às condições iniciais e produção de entropia em mapas padrão: Uma versão não-extensiva

5.1 Introdução

Um dos aspectos importantes da dinâmica Hamiltoniana caótica está relacionado à descrição das trajetórias irregulares no espaço de fases [53, 54, 55, 56]. Esta característica é relacionada à instabilidade do sistema e ao crescimento da entropia. Uma situação típica da dinâmica caótica está associada aos expoentes de Lyapunov positivos, que corresponde, através da identidade de Pesin, a uma taxa positiva da entropia de Kolmogorov-Sinai (KS). Entretanto, muitos sistemas físicos, biológicos, econômicos e outros sistemas complexos exibem situações mais intrincadas, associadas ao espaço de fases que revelam estruturas complexas e dinâmica anômala. Em muitos destes casos, os sistemas mostram uma sensibilidade algébrica às condições iniciais e o uso do funcional entrópico clássico, Eq. (2.7), de Boltzmann-Gibbs (BG) para a definição das quantidades tais como a taxa entrópica de KS não fornece informação. Sob estas condições a generalização não-extensiva [5] da forma entrópica clássica, Eq. (2.8), emerge como uma teoria natural para estender estes conceitos. Com efeito, no caso dos mapas dissipativos estudados nos capítulos prévios e outros, provou-se numericamente e analiticamente que o formalismo não-extensivo fornece uma descrição significativa dos estados críticos onde os expoentes de Lyapunov são nulos.

Além disso, nesses casos, com a entropia não-extensiva é possível provar uma generalização notável da identidade de Pesin (o que foi feito no capítulo 4).

Na base destes resultados, apresentamos uma aproximação não-extensiva à descrição dos comportamentos complexos associados aos sistemas Hamiltonianos que satisfazem às exigências do teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) [57]. Neste caso, o espaço de fases consiste em misturas complexas dos toros-KAM invariantes e de regiões caóticas. Uma região caótica está em contato com toros-KAM críticos cujos expoentes de Lyapunov são nulos, e uma órbita caótica atravessa aqueles toros repetidamente com uma distribuição do tipo lei de potência dos tempos em que esta atravessa [58]. Sabe-se que, sob estas circunstâncias, uma característica genérica importante do caos Hamiltoniano é sua não-ergodicidade, devido à existência de uma medida finita da área das ilhas. O conjunto de ilhas, que é fractal, e as tiras finas próximas ao limite das ilhas, que são chamadas de camadas de fronteira [59], desempenham um papel importante na dinâmica do sistema. Além destes processos, há os efeitos que surgem devido unicamente ao número de dimensões do sistema. Estes efeitos são associados à difusão de Arnold, que acontece quando o número de graus de liberdade do sistema é maior que dois. Este é um processo anômalo devido à superposição de estruturas especiais contidas no espaço de fases e que são conhecidas como camadas de ressonância [60, 61, 62].

Recentemente, têm sido investigado o paradigmático modelo do mapa padrão (que exibe uma estrutura tipo KAM) dentro do escopo da mecânica estatística generalizada [63], onde foram detectados comportamentos anômalos da sensibilidade às condições iniciais e da produção de entropia. O objetivo do presente capítulo é caracterizar numericamente, por meio destes indicadores dinâmicos, um sistema de dois mapas padrão simplecticamente acoplados. A escolha do número de mapas acoplados é devido a que esta é a dimensão mais baixa possível de mapas conservativos onde acontece a difusão de Arnold. Este efeito permite analisar as conexões entre a dinâmica não-linear e a mecânica estatística com uma física inteiramente nova.

Na Ref. [63] mostrou-se numericamente, para mapas conservativos de baixa dimensionalidade, que a taxa da entropia métrica (KS) coincide com a produção de entropia

(por unidade de tempo) da evolução dinâmica de um ensemble estatístico de cópias do sistema que se encontra inicialmente longe do equilíbrio. Mais precisamente, considerando um ensemble de N cópias do mapa com uma partição do espaço de fases composta de W (hiper)áreas, em cada etapa da iteração t uma distribuição de probabilidades é definida por meio do número de ocupação n_i de cada área. $p_i \equiv n_i/N$ ($\sum_i p_i = 1$), assim temos a Eq. (2.9) com $q \equiv 1$.

Por outro lado, podemos considerar a sensibilidade às condições iniciais

$$\xi(\mathbf{x}(0), \Delta\mathbf{x}(0), t) \equiv \lim_{\|\Delta\mathbf{x}(0)\| \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\Delta\mathbf{x}(0)\|}, \quad (5.1)$$

que em geral depende da posição inicial $\mathbf{x}(0)$ do espaço de fases e da direção no espaço tangente $\Delta\mathbf{x}(0)$. Se o sistema é caótico, a sensibilidade às condições iniciais do tipo exponencial define um espectro de d expoentes de Lyapunov $\{\lambda^{(k)}\}_{k=1,2,\dots,d}$ acoplados em pares (onde d é a dimensão do espaço de fases), onde cada elemento do par é o oposto do outro (estrutura simplectica). Levando em conta a identidade de Pesin temos que

$$\sum_{\langle \lambda^{(k)} \rangle > 0} \langle \lambda^{(k)} \rangle = K, \quad (5.2)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre diferentes condições iniciais. Este último fato, da média, justifica-se já que na prática trabalha-se sempre com um número finito de condições iniciais. É portanto necessário calcular-se $\lambda^{(k)}$ para diferentes condições iniciais e fazer-se uma média sobre os valores obtidos.

Agora, quando o maior coeficiente de Lyapunov é nulo, a relação previa não fornece informação e não é útil para discriminar o caos fraco do comportamento regular. Para levar em conta este problema, generalizamos os conceitos acima assinalados dentro do escopo de estatística não-extensiva. Exatamente, definimos a generalização não-extensiva da taxa de entropia de Kolmogorov-Sinai segundo a Eq. (2.9), onde a entropia não-extensiva S_q é definida por meio da Eq. (2.8). No caso da equiprobabilidade, $p_i = 1/W \forall i$, a entropia não-extensiva é reescrita da forma $S_q = \ln_q W$, onde $\ln_q x \equiv (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$ é o q -logaritmo que é a inversa da função q -exponencial: $\exp_q x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1 - q)}$.

Nota-se também que estas relações recuperam as relações padrão no limite $q \rightarrow 1$. Neste Capítulo mostraremos que nas situações onde o maior expoente de Lyapunov tende a zero, surge um regime onde a sensibilidade às condições iniciais tem um comportamento do tipo lei de potência, a saber uma q -exponencial (Eq. (2.5)) com um valor específico do parâmetro entrópico $q \equiv q_{sen}^{av} < 1$ (onde av indica o procedimento das médias e sen a sensibilidade) e do expoente generalizado de Lyapunov $\lambda_{q_{sen}^{av}}$. Correspondentemente, existe um único valor $q \equiv q_c^{av} < 1$ para o qual a entropia generalizada (2.8) mostra um crescimento linear. Sob estas circunstâncias, analisamos a relação entre os parâmetros q_{sen}^{av} e q_c^{av} . Mostraremos que, diferentemente a o que acontece no caos forte, estes dois parâmetros em geral não coincidem. Discutimos sob a origem deste fato.

5.2 Sensibilidade às condições iniciais e produção de entropia

Considere-se um sistema dinâmico cuja evolução temporal é dada pelo acoplamento de dois mapas padrão:

$$\begin{aligned}\theta_1(t+1) &= p_1(t+1) + \theta_1(t) + b p_2(t+1) \pmod{1}, \\ p_1(t+1) &= p_1(t) + \frac{a_1}{2\pi} \sin[2\pi\theta_1(t)] \pmod{1}, \\ \theta_2(t+1) &= p_2(t+1) + \theta_2(t) + b p_1(t+1) \pmod{1}, \\ p_2(t+1) &= p_2(t) + \frac{a_2}{2\pi} \sin[2\pi\theta_2(t)] \pmod{1},\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde as variáveis dinâmicas ($\theta_i, p_i \in \mathbb{R}$) podem ser consideradas como a coordenada angular e momentum angular respectivamente; $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ e $t = 0, 1, 2, \dots$. Note que o sistema (5.3) preserva a hiper-área do espaço de fases, já que o determinante $\det(\mathbf{A})$ do jacobiano associado à transformação $(p_1(t), \theta_1(t); p_2(t), \theta_2(t)) \rightarrow (p_1(t+1), \theta_1(t+1); p_2(t+1), \theta_2(t+1))$ vale 1; onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \cos(2\pi\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \cos(2\pi\theta_2) \\ 1 & b & 1 + a_1 \cos(2\pi\theta_1) & b a_2 \cos(2\pi\theta_2) \\ b & 1 & b a_1 \cos(2\pi\theta_1) & 1 + a_2 \cos(2\pi\theta_2) \end{pmatrix}.\tag{5.4}$$

Isso significa que, tomando-se uma hiper-superfície de condições iniciais, obtém-se, a cada iteração, uma nova hiper-superfície de igual hiper-área. Por outro lado, verifica-se a igualdade

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{A} = \mathbf{J}, \quad (5.5)$$

o que garante ao sistema (5.3) ser simplético [64]; onde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

e \mathbf{A}^T é a matriz transposta de \mathbf{A} . Note que, tomando o determinante de (5.5) temos

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1. \quad (5.7)$$

No caso de uma transformação gerada por um movimento Hamiltoniano, $\mathbf{A} = \exp(\mathbf{J} \mathbf{H} t)$, será contínuo em t . Pela condição inicial para $t = 0$ temos

$$\det(\mathbf{A}) = 1, \quad (5.8)$$

que é a forma diferencial do teorema de Liouville. Esta condição é satisfeita pelo sistema (5.3). Assim, fica claro que ele é simplético e conservativo.

Se o parâmetro de acoplamento b desaparecer, os dois mapas padrão serão desacoplados; por outro lado se $a_1 = a_2 = 0$ o sistema é integrável. Por simplicidade, consideramos $a_1 = a_2 = a$ de modo que nossa análise é restringida ao caso onde o sistema é simétrico com respeito à troca $1 \leftrightarrow 2$. Para qualquer valor de b , este sistema é integrável quando $a = 0$ (Fig. 5.1(a)), no entanto, com o incremento de $|a|$, o sistema acrescenta rapidamente sua caoticidade (Fig. 5.1(c)). Para valores intermediários de $|a|$ as trajetórias no espaço de fases definem estruturas complexas (Fig. 5.1(b)). O espaço de fases não é uniforme, está composto de domínios caóticos (mar estocástico, camadas estocásticas, redes estocásticas, etc.) e ilhas cuja dinâmica é regular e quase periódica [59]. Para ilustrar estes comportamentos, mostramos na Fig. 5.1(a-c), com $b = 0.5$, a projeção em vários planos

da evolução dinâmica (para $0 \leq t \leq 50$) de um ensemble de $N = 4^4$ pontos distribuídos no espaço de fases para os casos: $a = 0$ (integrabilidade), $a = 0.2$ (caos fraco) e $a = 2$ (caos forte). A fim de caracterizar com mais detalhe as situações do caos forte e fraco no sistema em questão, mostramos na Fig. 5.2 e na Fig. 5.3. para diferentes tempos fixos, a projeção da evolução de um ensemble (inicialmente fora do equilíbrio) de $N = 5 \times 10^3$ cópias do sistema (5.3), para $a = 2$ e $a = 0.2$ respectivamente. Note que em todas as figuras precedentes fixamos o valor de $b = 0.5$.

As regiões caóticas produzem uma separação exponencial das trajetórias inicialmente próximas, paralelamente, as regiões regulares exibem uma separação linear das mesmas. Na fronteira entre estas regiões emergem estruturas tipo fractal das ilhas em torno de outras ilhas. Ou seja, temos a coexistência de regiões regulares (estabilidade) e caóticas no espaço de fases. Este fato, faz com que o estudo destes sistemas seja complexo [60]. Antes de entrar em detalhes sob os resultados obtidos nesta seção, analisemos como é descrito o caso do caos forte, através da sensibilidade às condições iniciais e da produção de entropia, dentro do formalismo não-extensivo. Para obter o valor médio do maior expoente de Lyapunov e da taxa média da produção de entropia, analisamos os valores da média, sobre diferentes condições iniciais, de $\langle \ln \xi \rangle(t)$ e de $\langle S_q \rangle(t)$ respectivamente. As Figs. 5.5 e 5.6 reproduzem os resultados de [17] quando $q = 1$ para $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $b = 0.5$ (ou seja caos forte). Outro exemplo com $a = 2$ e $b = 0.5$ é mostrado na Fig. 5.11 para o caso da entropia. A média do logaritmo da sensibilidade e da entropia mostram um regime de crescimento linear (antes de acontecer a saturação devido ao valor finito de W) somente para $q = 1$. Se $q < 1$ ($q > 1$), as curvas $\langle \ln \xi \rangle(t)$ e $\langle S_1 \rangle(t)$ são convexas (côncavas). Note que a inclinação do crescimento linear de $\langle \ln \xi \rangle(t)$ é menor do que de $\langle S_1 \rangle(t)$, já que o espaço de fases é de 4 dimensões, existem dois expoentes positivos de Lyapunov a serem considerados na Eq. (5.2).

Voltando nossa atenção para o caos fraco, nas Figs. 5.7 e 5.8 mostramos que, para valores decrescentes de $a_1 = a_2 = a$, com valores fixos de $b = 0.2$ e $b = 0.5$ respectivamente, a média do valor do expoente maior de Lyapunov tende para zero devido ao fato de que a dinâmica do sistema em questão é mais restringida pelas estruturas do espaço

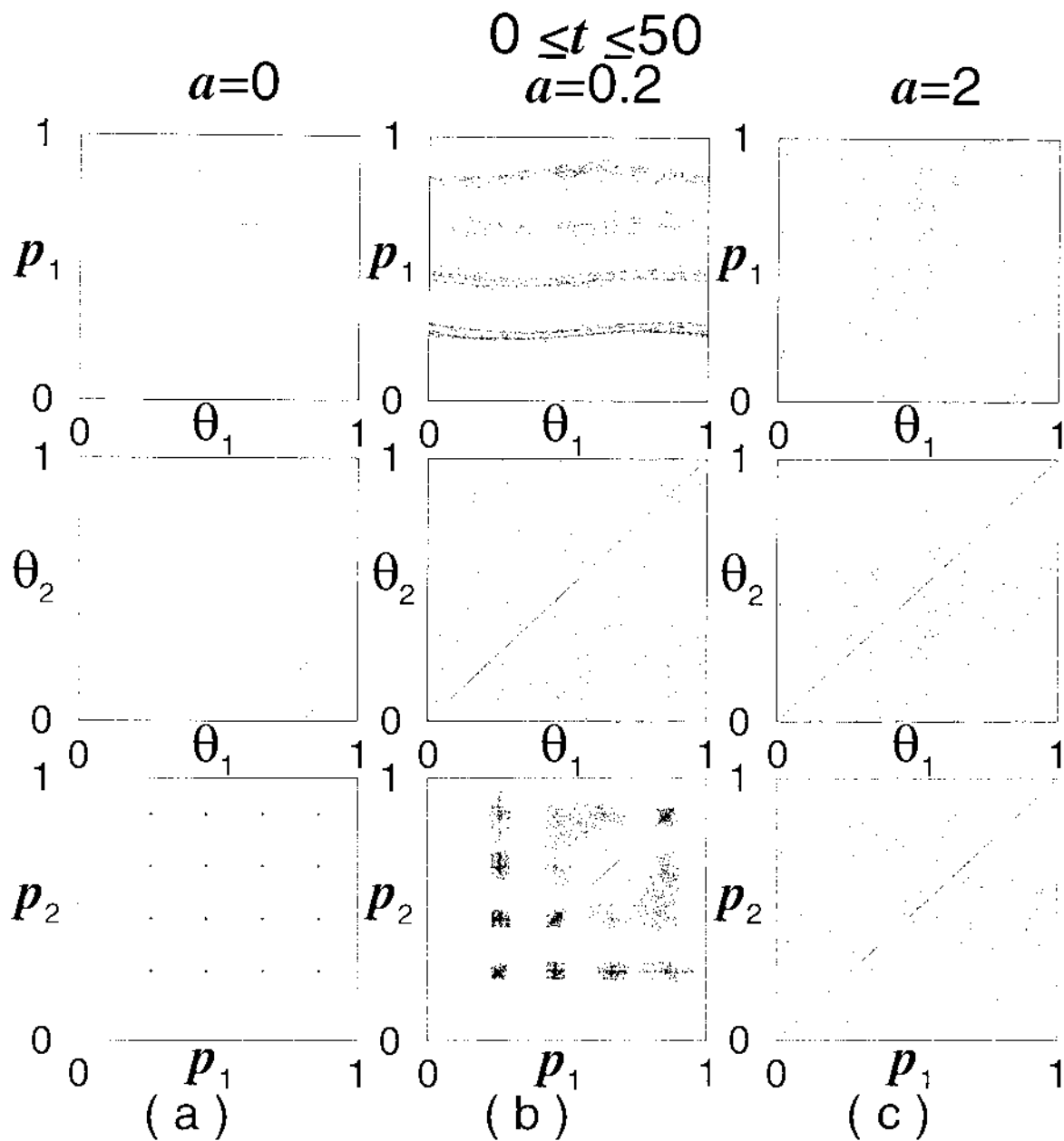


Figura 5.1: Retrato de fases de dos mapas padrão simplesmente acoplados, Eq. (5.3), com $b = 0.5$ e $a_1 = a_2 \equiv a$. Os pontos representam a projeção das trajetórias em diferentes planos. Ilustramos um ensemble de $N = 4^4$ pontos para $0 \leq t \leq 50$. (a) $a = 0$: Integrabilidade; (b) $a = 0.2$: caos fraco; (c) $a = 2$: Caos forte.

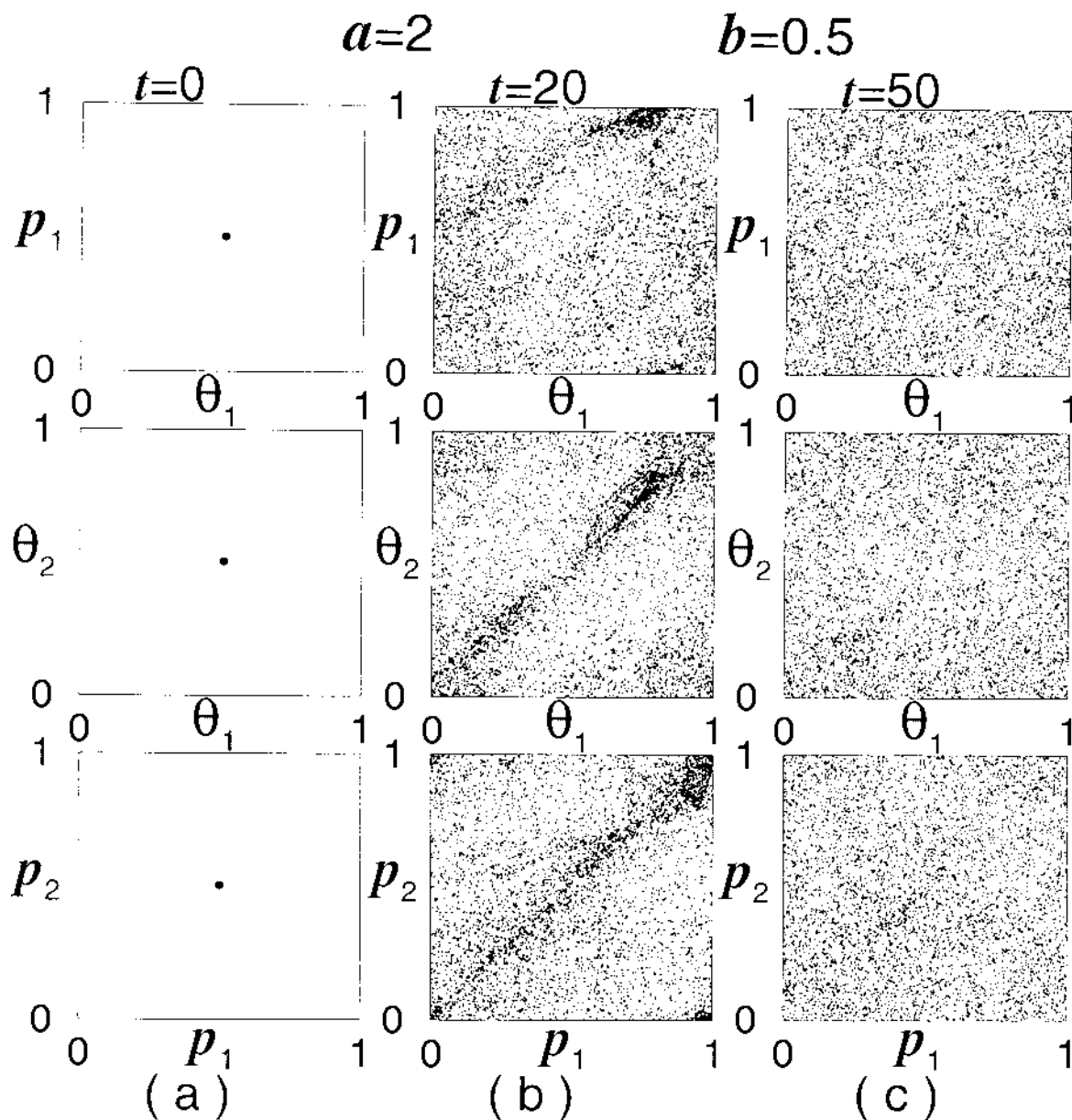


Figura 5.2: Evolução dinâmica de um ensemble fora do equilíbrio de $N = 5 \times 10^3$ cópias do mapa (5.3), para o caso do caos forte: $a = 2$, $b = 0.5$. (a) $t = 0$; (b) $t = 20$; (c) $t = 50$.

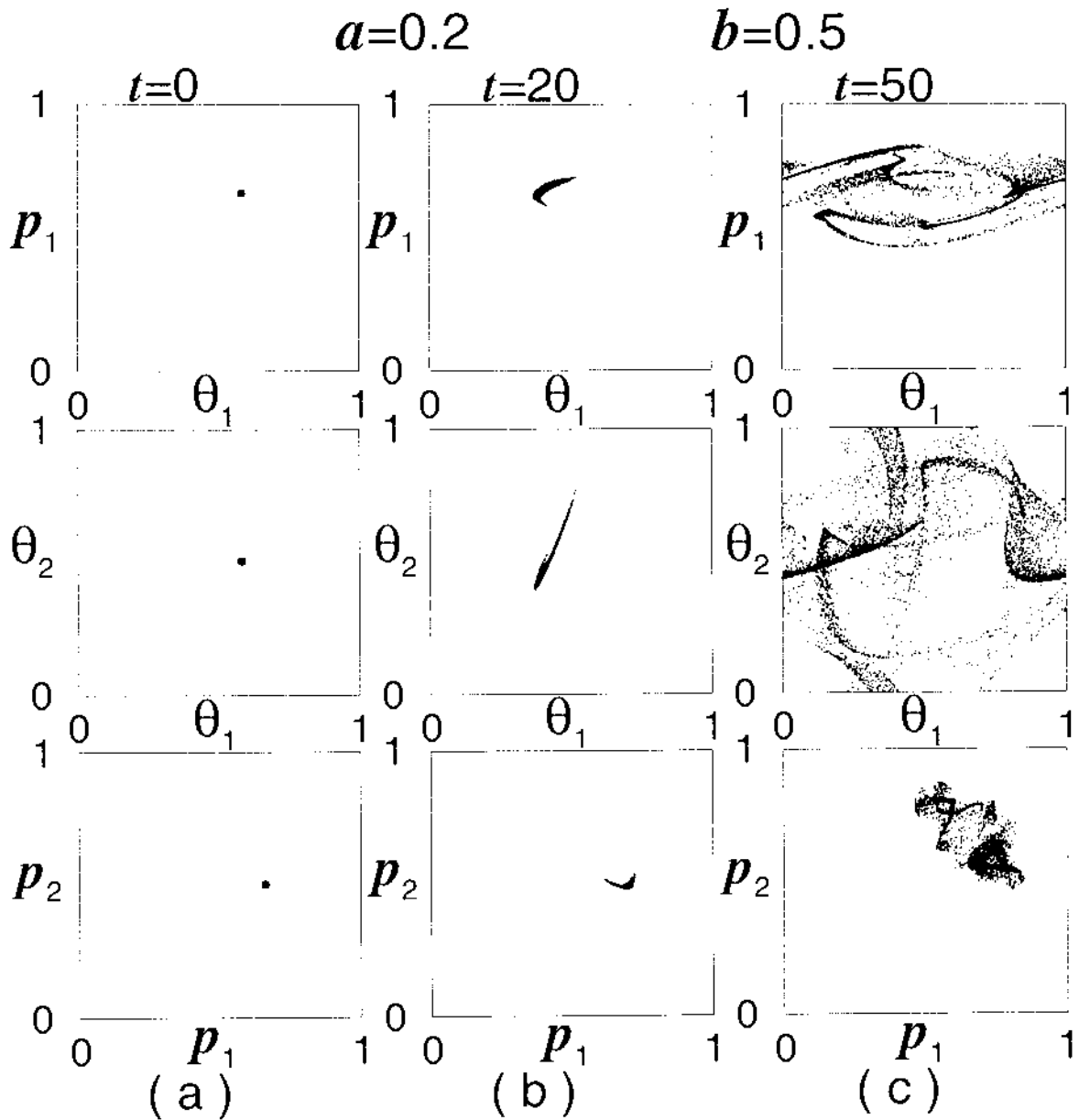


Figura 5.3: Evolução dinâmica de um ensemble fora do equilíbrio de $N = 5 \times 10^3$ cópias do mapa (5.3), para o caso do caos fraco: $a = 0.2$, $b = 0.5$. (a) $t = 0$; (b) $t = 20$; (c) $t = 50$.

de fases. Particularmente, para $0 < |a| < 1$ surge uma fase inicial tal que $\langle \ln \xi \rangle(t)$ não é linear (veja os gráficos inseridos nas Figs. 5.7 e 5.8). Chamaremos a esta fase de *regime de caos fraco*. A medida que $|a|$ tende a zero o tempo de cruzamento, τ_c , entre o regime inicial e aquele caracterizado pelo crescimento linear de $\langle \ln \xi \rangle(t)$ aumenta, de modo que a fase do caos fraco torna-se mais e mais importante. Como consequência a sensibilidade às condições iniciais correspondente à esta fase apresenta um comportamento do tipo lei de potência. Além disso, notamos uma lei de escala relacionando a inversa do tempo de cruzamento e o parâmetro de não-linearidade: $\tau_c^{-1} \propto a^\gamma$, onde $\gamma = 0.66$ para $b = 0.2$ e $\gamma = 0.56$ para $b = 0.5$ (veja os gráficos inseridos nas Figs. 5.9 e 5.10). Por outro lado, a determinação do tempo de cruzamento τ_c , que indica a fronteira entre os dois comportamentos (do tipo lei de potência e exponencial), é cada vez mais difícil de determinar conforme $a \rightarrow 1$, sendo claramente exponencial quando $|a| > 1$ para os dois valores do parâmetro de acoplamento aqui considerados. Nas Figs. 5.9 e 5.10 mostramos que, para valores específicos $q_{sen}^{av}(a) < 1$, $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ cresce linearmente neste regime e torna-se convexa, depois do cruzamento, quando a sensibilidade apresenta crescimento exponencial. Para o caso da integrabilidade, $a = 0$, temos que $q_{av}^{sen}(0) = 0$, como era esperado.

O regime do caos fraco também pode ser detectado através da análise da produção de entropia executado como descrito na introdução do presente capítulo (também ver capítulo 4). O regime do caos fraco é ilustrado na Fig. 5.12 com $a = 0.2$ e $b = 0.2$, Fig. 5.13 com $a = 0.4$ e $b = 0.2$, e a Fig. 5.14 com $a = 0.2$ e $b = 0.5$. Para todos os casos assinalados previamente, os resultados são semelhantes ao resultado da Fig. 5.6, mas o valor do índice relevante q_c^{av} , para a qual $\langle Sq \rangle(t)$ cresce linearmente, e menor do $q_c^{av} = 1$. Nas Figs. 5.15 e 5.16 resumimos os valores dos índices entrópicos relevantes e as correspondentes inclinações, obtidos com a sensibilidade às condições iniciais e a produção de entropia, para diferentes valores de a com dois valores fixos do parâmetro de acoplamento $b = 0.2$ e $b = 0.5$. Ao contrário que acontece no regime do caos forte, no caso do caos fraco os valores de q_{sen}^{av} e q_c^{av} não coincidem. Na seguinte seção discutimos a respeito da origem desta diferença.

5.3 Discussões

Para entender a origem da discrepância, no regime do caos fraco, entre os índices entrópicos relevantes da sensibilidade q_{sen}^{av} e q_e^{av} da entropia são necessárias algumas considerações de caráter geométrico. Primeiramente, observe-se a seguinte propriedade da função q -logarítmo:

$$\ln_q W^\alpha = \alpha \ln_{q'} W, \tag{5.9}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e q, q' estão relacionados por meio de

$$q = 1 - \frac{1 - q'}{\alpha}. \tag{5.10}$$

Em segundo lugar, por simplicidade, considere-se o caso do espaço de fases bidimensional com duas coordenadas simétricas em respeito a sua troca. Denotamos com $W_{(2)}$ o número de áreas composta por $W_{(1)}$ intervalos da partição feita em cada coordenada. Supomos que se tem um ensemble de condições iniciais longe do equilíbrio dentro de uma área e que a evolução de cada trajetória no ensemble implica o espalhamento em todo o espaço de fases. Sejam $W_{(1)}(t)$ e $W_{(2)}(t)$ os números dos intervalos e áreas ocupadas respectivamente no tempo t . A relação entre $W_{(1)}(t)$ e $W_{(2)}(t)$ depende das características da evolução dinâmica. Dois casos limites são

$$W_{(2)}(t) = \text{const.} W_{(1)}(t) \quad \text{e} \quad W_{(2)}(t) = \text{const.} [W_{(1)}(t)]^2. \tag{5.11}$$

O primeiro é realizado por exemplo quando há uma direção predominante ao longo da qual o ensemble se estica, de modo que a evolução dinâmica do ensemble produz filamentos no espaço de fases bidimensional que é essencialmente unidimensional. Este último acontece, por exemplo, quando a evolução dinâmica nas duas coordenadas é desacoplada, de modo que $W_{(2)}(t)$ é simplesmente o produto cartesiano $W_{(1)}(t) \otimes W_{(1)}(t)$. Agora, se supomos que $\ln_{q'} W_{(1)}(t) \propto t$, para um valor específico do parâmetro q' , usando as Eqs. (5.9) e (5.10) temos que $\ln_q W_{(2)}(t) \propto t$ para os valores

$$q = q' \quad \text{e} \quad q = 1 - \frac{1 - q'}{2}, \tag{5.12}$$

respectivamente, para os dois casos indicados em (5.11). Nota-se que $q' = 1 \Rightarrow q = 1$ para ambos casos. Naturalmente, este raciocínio pode ser generalizado para dimensões maiores do espaço de fases.

Esta análise geométrica aplica-se ao problema da produção de entropia, falando estritamente, somente se o ensemble evoluir de acordo com uma distribuição uniforme em todo o espaço de fases (equiprobabilidade). No entanto, veremos que este raciocínio é útil para entender o comportamento dinâmico do modelo em questão. Começamos considerando o efeito do parâmetro de acoplamento b no caso $a = 0$ que corresponde ao caso de integrabilidade. A Fig. 5.20 ilustra o comportamento de q_{sen}^{uv} e q_e^{av} para este caso. Como era esperado com $q_{sen}^{av} = 0$ a sensibilidade às condições iniciais exibe um comportamento linear. Por outro lado, o comportamento de q_e^{av} é compreendido se analisamos com certo detalhe a dinâmica. Temos que p_1 e p_2 se conservam ao longo de qualquer trajetória porém toda a atividade da evolução dinâmica acontece no plano (θ_1, θ_2) com as leis de iteração

$$\begin{aligned}\theta_1(t+1) &= p_1(0) + \theta_1(t) + b p_2(0), \\ \theta_2(t+1) &= p_2(0) + \theta_2(t) + b p_1(0).\end{aligned}\tag{5.13}$$

Como é aparente, as duas coordenadas estão desacopladas e para $b \neq \pm 1$ o crescimento do ensemble é bidimensional como se ilustra na Fig. 5.4 (na primeira fileira) com $b = 0.5$. Sob estas circunstâncias, temos que $W_{(4)}(t) \propto W_{(2)}(t) \propto [W_{(1)}(t)]^2$, de modo que, levando em conta o raciocínio prévio, obtemos $q_e^{av} = 0.5$. Com efeito, as Figs. 5.17 e 5.18 ilustram o comportamento da entropia para estes casos: $a = 0$ com $b = 0$ e $a = 0$ com $b = 0.2$ respectivamente. Para $b = \pm 1$ o mapa é ainda mais degenerado, desde que

$$\theta_1(t+1) \mp \theta_2(t+1) = \theta_1(t) \mp \theta_2(t).\tag{5.14}$$

O que implica que $W_{(4)}(t) \propto W_{(2)}(t) \propto W_{(1)}(t)$, conseqüentemente obtemos que $q_{sen}^{uv} = q_e^{av} = 0$. Na vizinhança de $b = \pm 1$ esperamos a transição de $q_e^{av} = 0.5$ para $q_e^{av} = 0$, o que efetivamente acontece se observamos a Fig. 5.4 (segunda fileira com $b = 1$) onde o

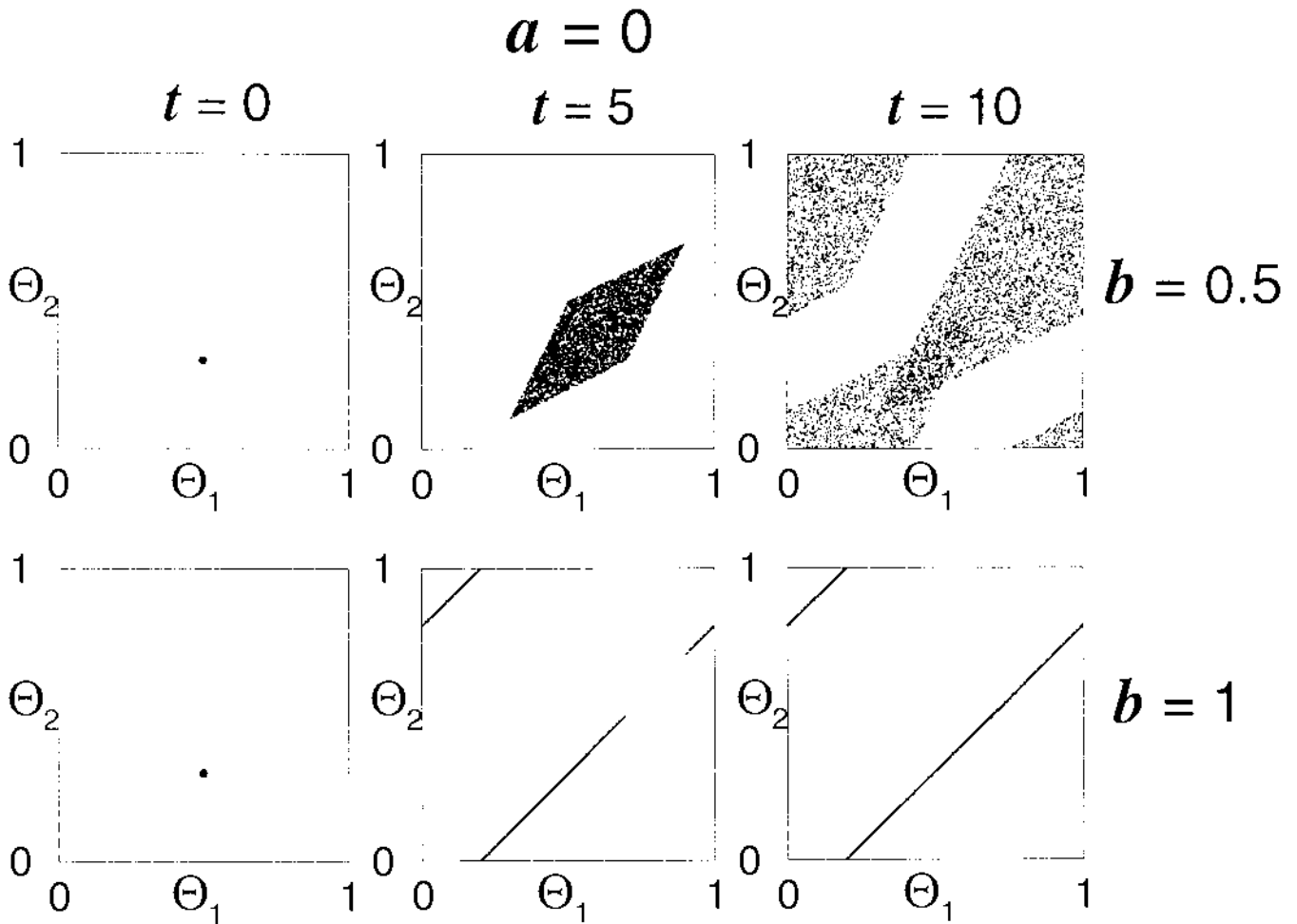


Figura 5.4: Evolução dinâmica de um ensemble, para tempos fixos, fora do equilíbrio de $N = 5 \times 10^3$ cópias do mapa (5.3), para o caso de integrabilidade: $a = 0$ com $b = 0.5$ (primeira fileira) e $b = 1$ (segunda fileira). (a) $t = 0$; (b) $t = 5$; (c) $t = 10$.

crescimento do ensemble é de tipo filamentoso, ou seja unidimensional. Este cenário é confirmado pela Fig. 5.19 onde $\langle S_q \rangle(t)$ cresce linearmente com $q_e^{av} = 0$.

Na Fig. 5.21 estima-se o fator α que conecta o crescimento em quatro dimensões e uma dimensão das hiper-áreas, fixando o valor do parâmetro de acoplamento $b = 0.5$ (círculos preenchidos) e $b = 0.20$ (círculos vazios), por meio da relação (veja a Eq. (5.10), onde $q \equiv q_c^{av}$ e $q' \equiv q_{sen}^{av}$)

$$\alpha = \frac{1 - q_{sen}^{av}}{1 - q_c^{av}}. \quad (5.15)$$

Para valores positivos de $a \leq 0.5$, α é aproximadamente 2 [65]. No entanto, para $0.5 < a < 1$ notamos uma dependência linear do fator α relação ao parâmetro a : $\alpha \simeq 9.2a$ (veja a Fig. 5.21).

5.4 Conclusões

Os sistemas conservativos apresentam propriedades estatísticas completamente diferentes dos dissipativos [66, 67, 68, 69, 70, 71]. Uma destas diferenças consiste em que a transição do comportamento regular para caótico acontece sem o limiar do caos. Os processos induzidos pela dinâmica Hamiltoniana caótica torna-se não trivial devido provavelmente à existência de várias classes de universalidade em vez de somente uma [59, 72]. As possíveis fontes da não-universalidade, seriam os diferentes elementos não-padrão da estrutura do espaço de fases como as ilhas contendo inúmeras órbitas periódicas e quaseperiódicas (superfícies invariantes de KAM) e domínios menores de caos. Cruzando o limite de uma ilha, nós atravessamos de uma órbita regular a uma caótica que se encontra no mar estocástico. A fronteira da ilha pode ser mais ou menos aderente, dependendo dos valores do parâmetro do sistema [60]. Também existem zonas singulares localizadas perto da fronteira das ilhas onde uma trajetória pode ser retida por um tempo finito, porém longo, e o tamanho destas zonas depende dos parâmetros do sistema [72]. Poder-se-ia dizer que a presença e a variedade das regiões singulares faz a dinâmica de cada sistema caótico uma manifestação particular, em um certo sentido. Entretanto, parece que a dinâmica em uma zona singular determina o comportamento dos sistemas em escalas maiores de tempo [58, 72].

A topologia do espaço de fases dos sistemas Hamiltonianos apresentam elementos novos, os chamados de cantoros [73, 74, 75] que mudam drasticamente o padrão dos sistemas dinâmicos. Os cantoros são conjuntos invariantes de cantor, que podem ser vistos como remanescentes das superfícies de KAM que foram destruídas conforme o parâmetro de não-linearidade a aumenta. Por outro lado, como já foi assinalado acima, existem efeitos que surgem devido unicamente à dimensionalidade dos mapas. Para mapas 2-D, a existência das superfícies KAM podem isolar grandes regiões do espaço de fases a partir de órbitas difusivas. Entretanto para sistemas com maior dimensionalidade, as superfícies KAM não estão isoladas, porém as órbitas podem vir arbitrariamente perto de todos os pontos no espaço de fases através dos processos conhecidos como a difusão de Arnold. Assim, para sistemas com 3 ou mais dimensões, as regiões de comportamento caótico se comunicam, formando a teia de Arnold. A existência dessa teia foi provada por Arnold em 1964 [61], para um Hamiltoniano não-linear específico. O movimento de uma trajetória pela teia e chamado de difusão de Arnold. Obviamente, ainda não há prova de que exista uma conexão com o comportamento anômalo da sensibilidade às condições iniciais e da produção de entropia do sistema (5.3). Mas a possibilidade de que exista está aberta.

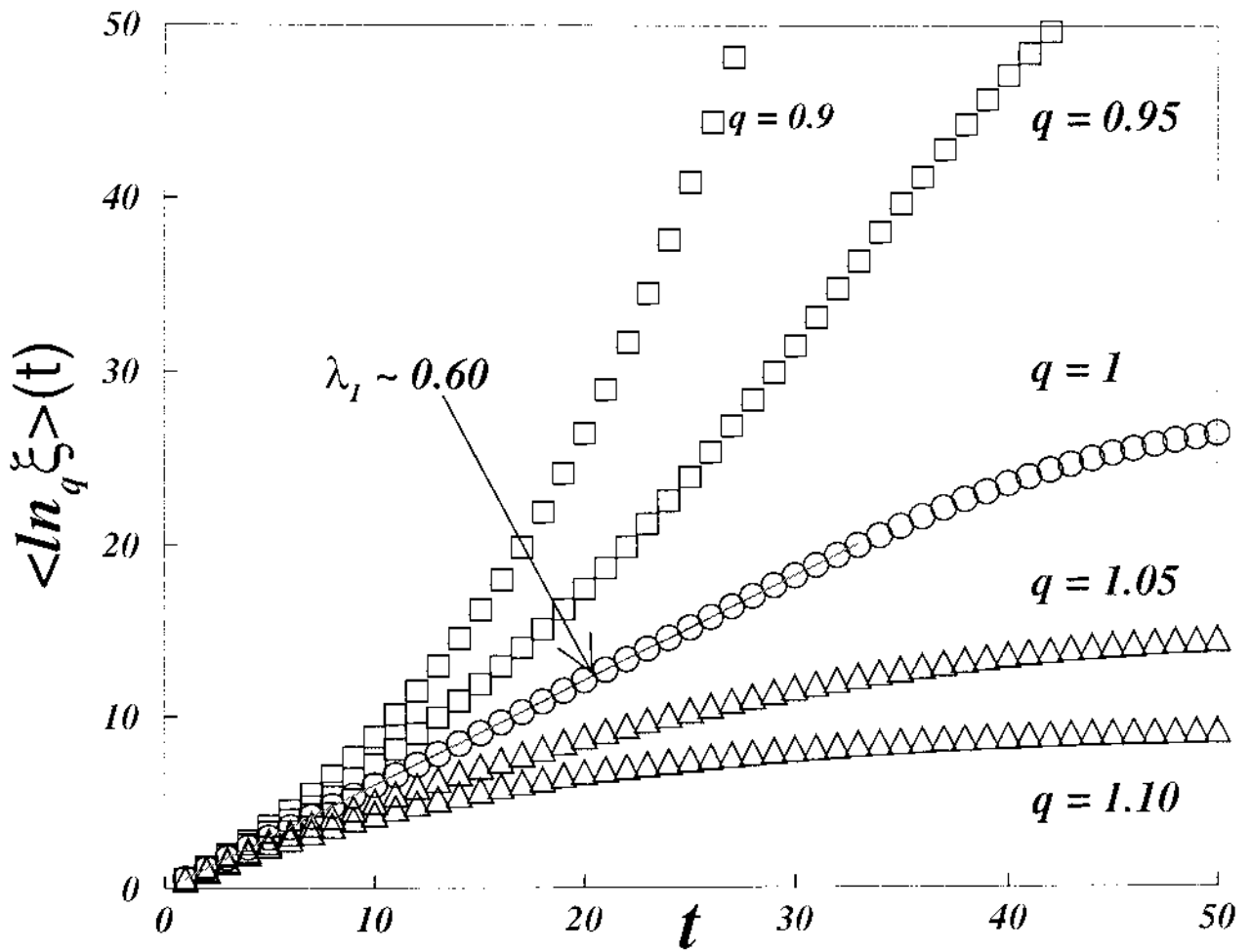


Figura 5.5: Dependência temporal de $\langle \ln \xi \rangle$ no regime do caos forte, ou seja, com valores de $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e o parâmetro de acoplamento $b = 0.50$. As curvas são o resultado da média sobre 10^5 realizações com uma discrepância inicial $\Delta x(0) = 10^{-12}$. Observe que o valor da $\lambda_1 = 0.60 \pm 0.01$ não coincide com a inclinação $K_1 \simeq 0.78$ [17] da Fig. (5.6). K_1 representa a soma dos expoentes positivos de Lyapunov, sendo $\lambda_1 \simeq 0.69$ o maior deles.

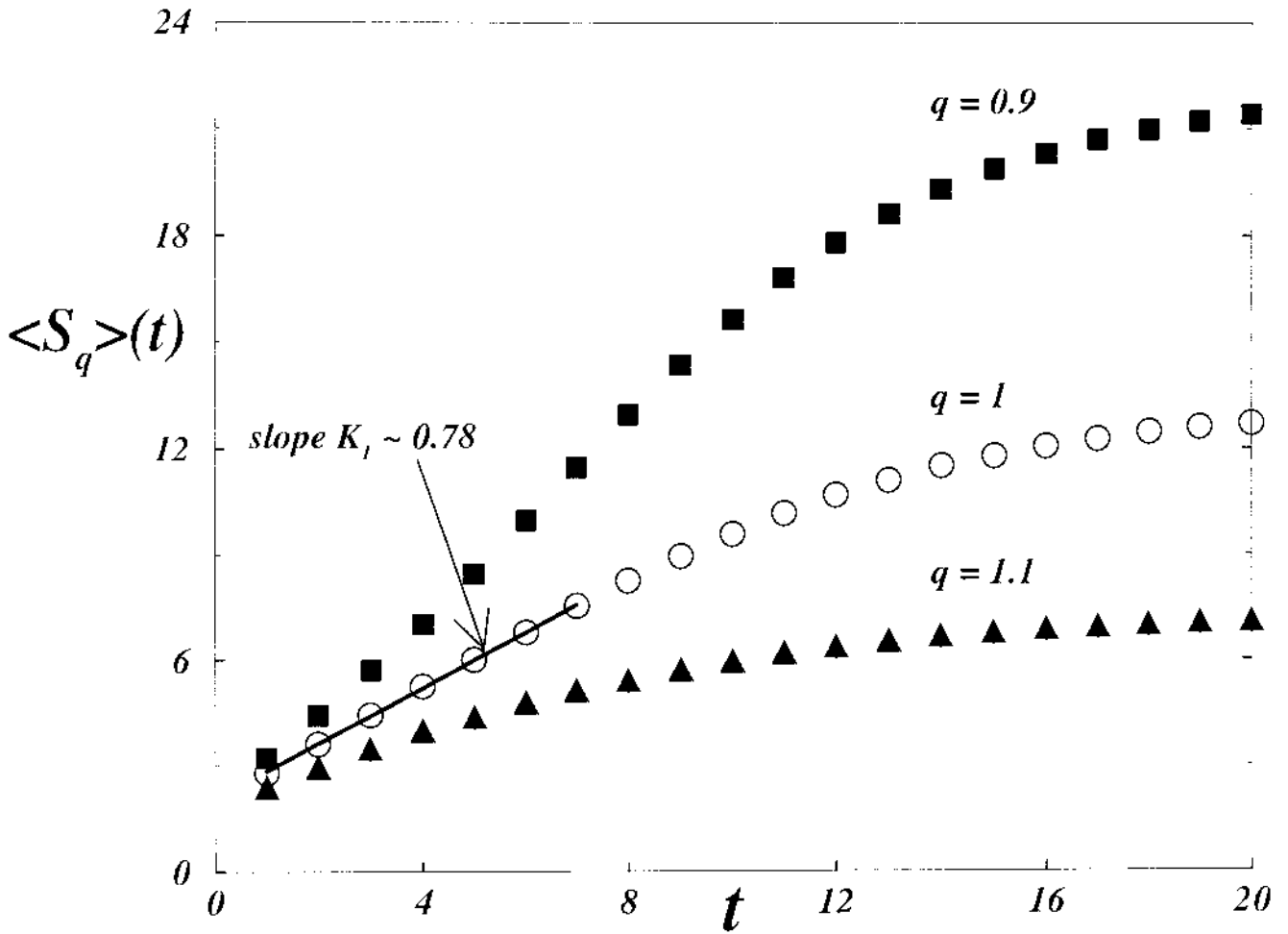


Figura 5.6: Dependência temporal das curvas $\langle S_q \rangle$ para três valores diferentes de q com $a_1 = 3, a_2 = 1$ e $b = 0.5$. Consideramos $W = 8.1 \times 10^5, N = 6 \times 10^6$ e 2×10^3 realizações. Neste gráfico reproduzimos o resultado obtido em [17], onde verificamos o valor da inclinação $K_1 \simeq 0.78$.

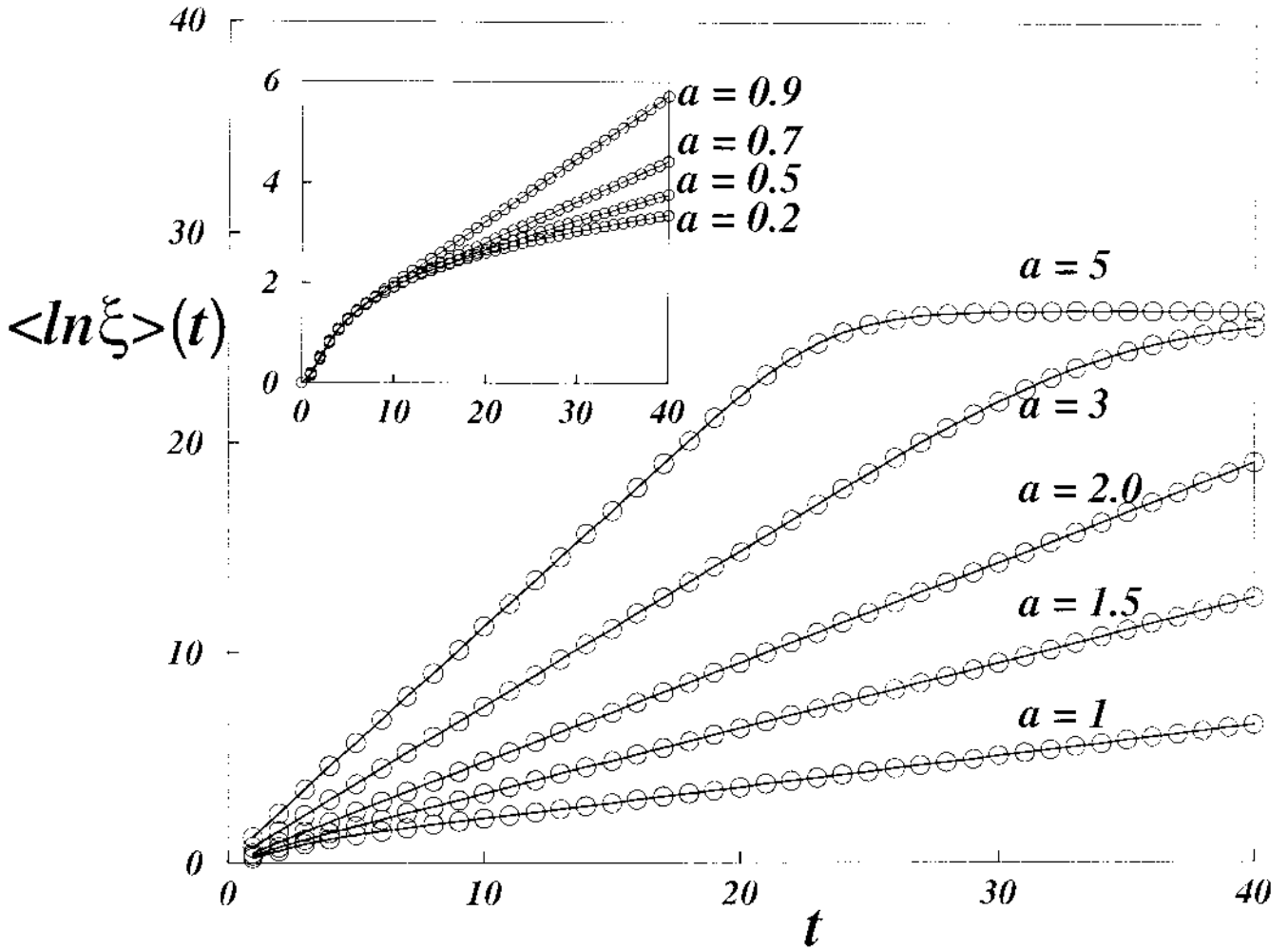


Figura 5.7: Dependência temporal de $\langle \ln \xi \rangle(t)$ para $b = 0.2$ com diferentes valores do parâmetro a . Observe que $\langle \ln \xi \rangle(t)$ exibe um comportamento exponencial para $a > 1$. Na figura inserida (para valores $0 < a < 1$) observamos outro tipo de divergência da sensibilidade no mesmo intervalo de tempo. As curvas são o resultado da média sobre 10^5 realizações com uma discrepância inicial $\Delta x(0) = 10^{-12}$.

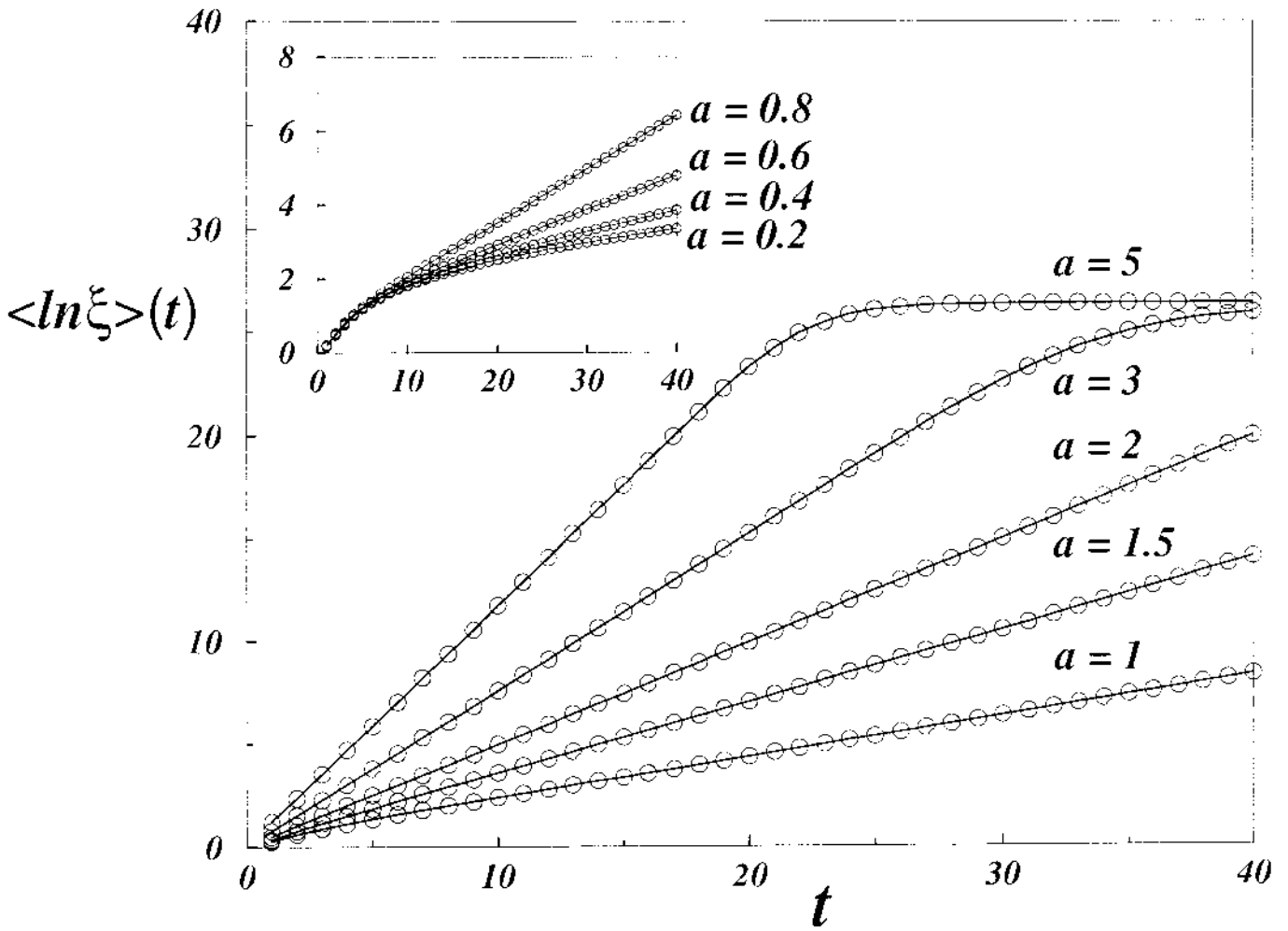


Figura 5.8: Crescimento linear da função $\langle \ln \xi \rangle(t)$ para $b = 0.5$ com diferentes valores do parâmetro de não-linearidade a . Observe que $\langle \ln \xi \rangle(t)$ mostra um comportamento claramente exponencial para $a > 1$. Na figura inserida (para valores de $0 < a < 1$) observamos outro tipo de divergência da sensibilidade no mesmo intervalo de tempo. As curvas são o resultado da média sobre 10^5 realizações com uma discrepância inicial $\Delta x(0) = 10^{-12}$.

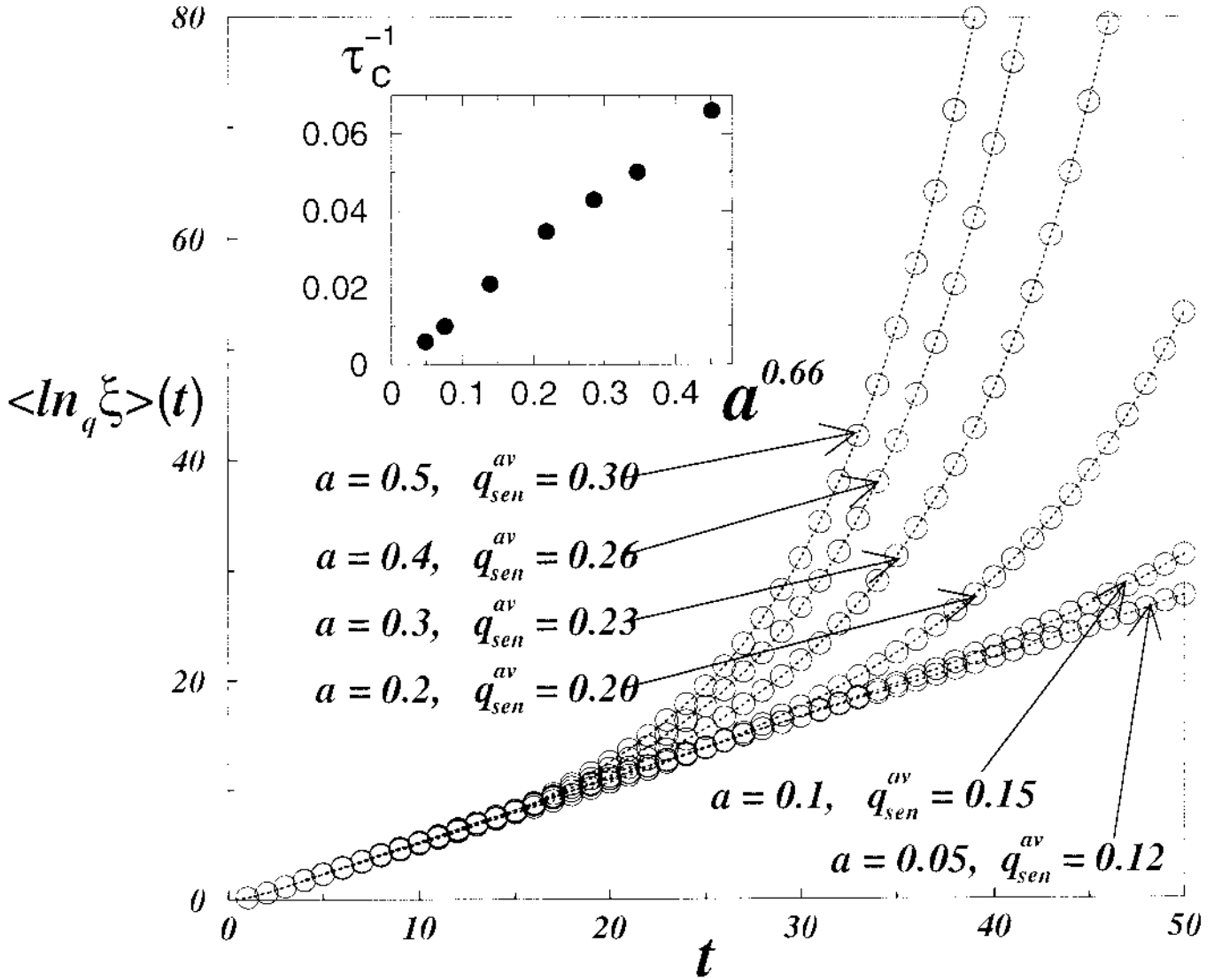


Figura 5.9: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para $b = 0.2$ com $0 < a < 1$. O crescimento linear das curvas mostradas, acontece somente para certos valores de $q \equiv q_{sen}^{av}(a)$ (observe a Fig. (5.15)). As curvas são o resultado da média sobre 10^8 realizações com uma discrepância inicial $\Delta x(0) = 10^{-12}$. No gráfico inserido ilustramos a lei de escala que relaciona a inversa do tempo de cruzamento ao parâmetro de não-linearidade: $\tau_c^{-1} \propto a^{0.66}$.

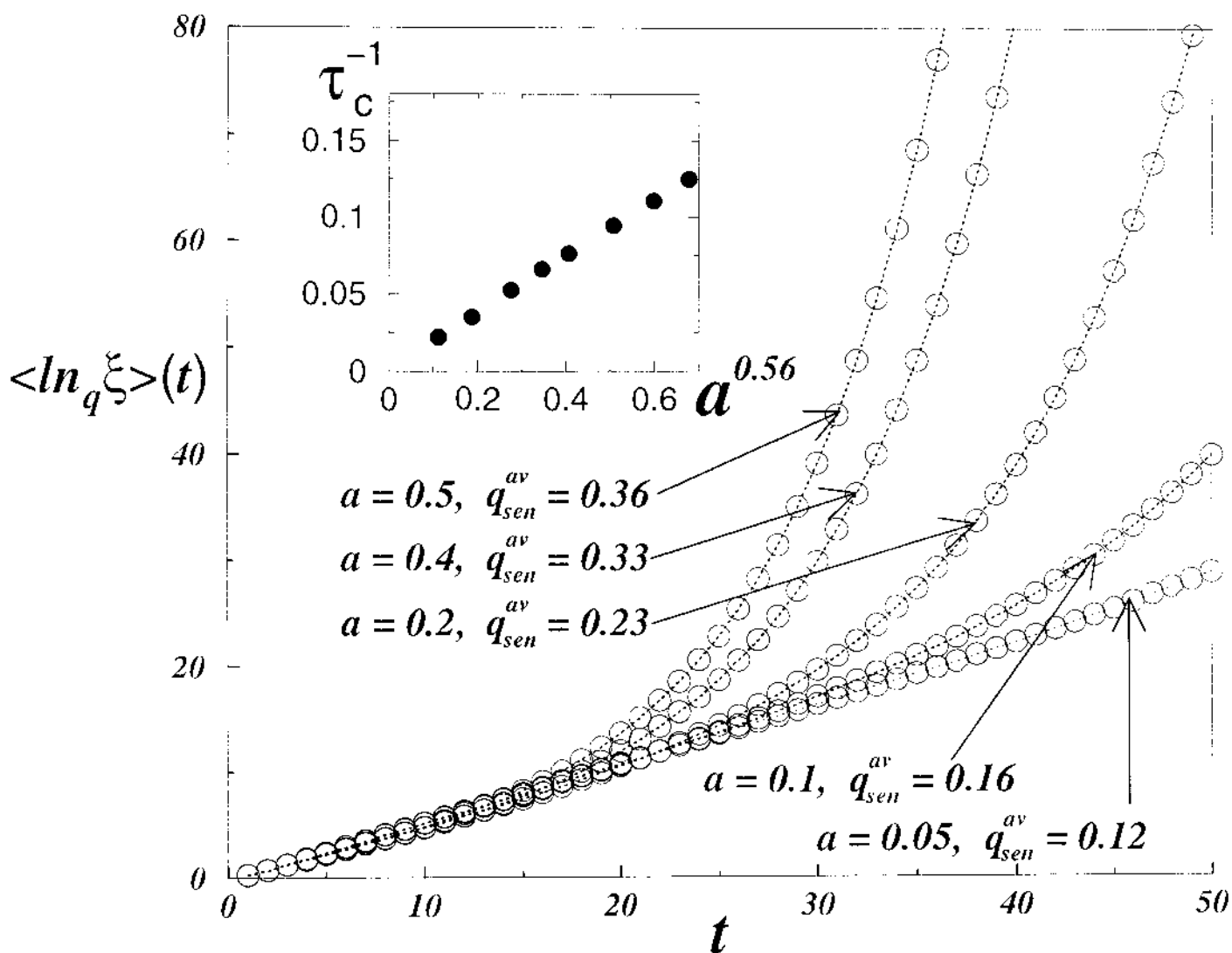


Figura 5.10: Dependência temporal de $\langle \ln_q \xi \rangle$ para $b = 0.5$ com $0 < a < 1$. O crescimento linear desta função acontece somente para certos valores de $q \equiv q_{sen}^{av}(a)$ (veja a Fig. (5.15)). As curvas são o resultado da média sobre 10^8 realizações com uma discrepância inicial $\Delta x(0) = 10^{-12}$. No gráfico inserido ilustramos a lei de escala que relaciona a inversa do tempo de cruzamento ao parâmetro de não-linearidade: $\tau_c^{-1} \propto a^{0.56}$.

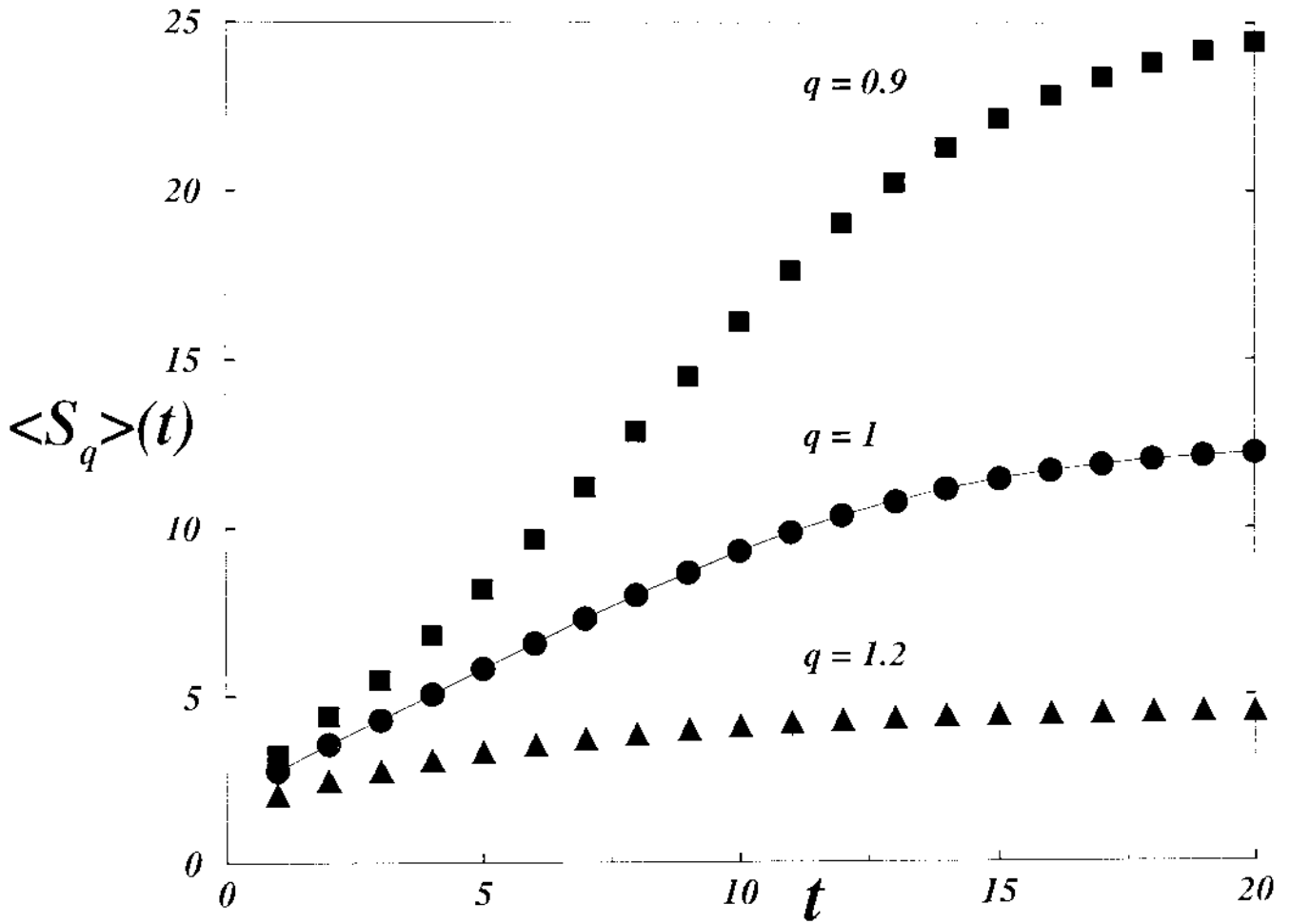


Figura 5.11: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para três valores diferentes de q com $a = 2.0$ e $b = 0.5$. Consideramos $W = 3.9 \times 10^5$, $N = 10 \times W$ e 10^3 realizações. Neste caso do caos forte, o índice relevante $q_{sen}^{av} = 1$.

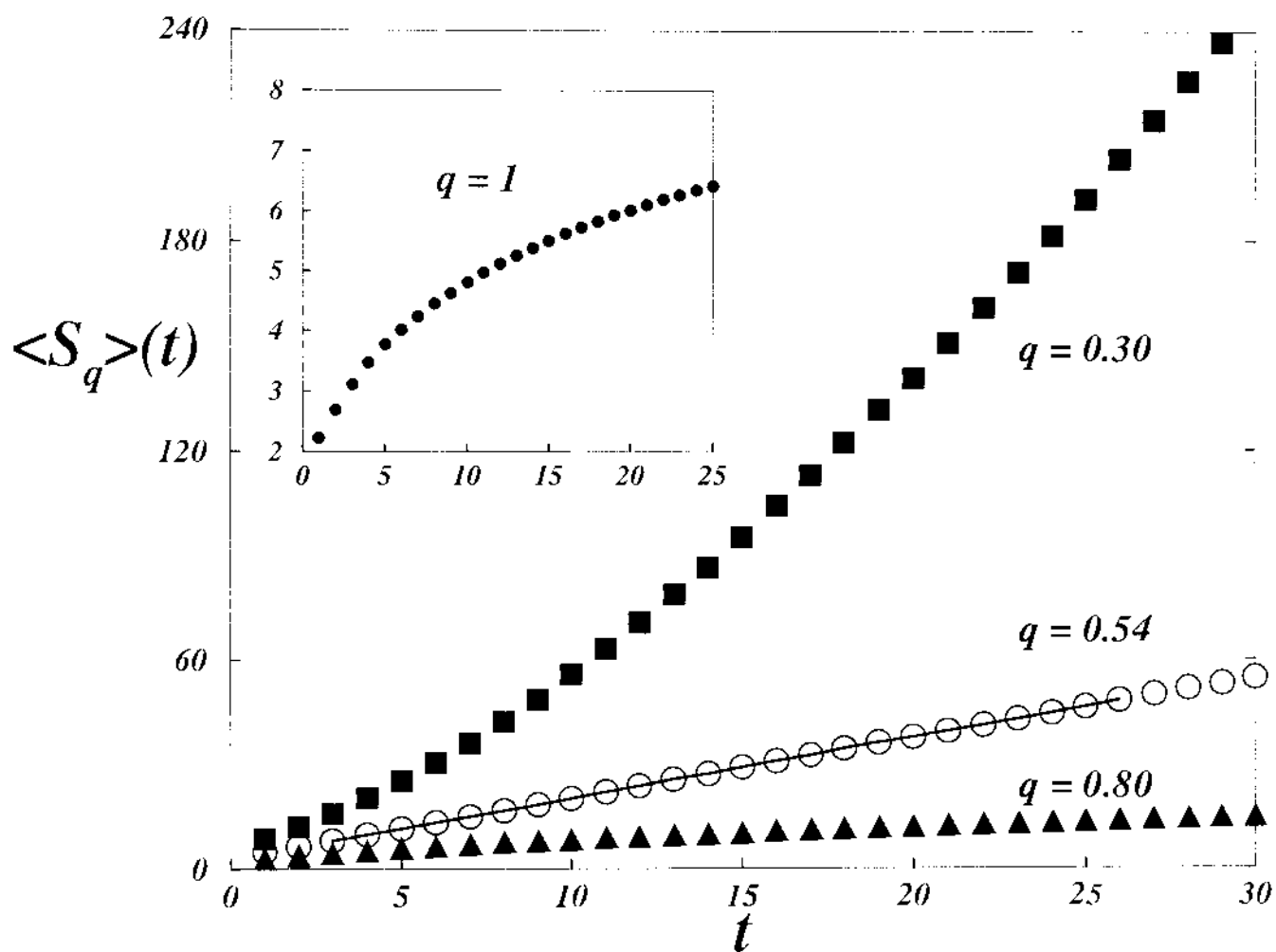


Figura 5.12: Dependência temporal de $\langle S_q \rangle$ para quatro valores de q , com $a = 0.2$ e $b = 0.2$ (caos fraco). Consideramos $W = 8.1 \times 10^5$, $N = 6 \times 10^6$ e 3×10^3 realizações. O caso $q = 1$ é ilustrado na figura inserida.

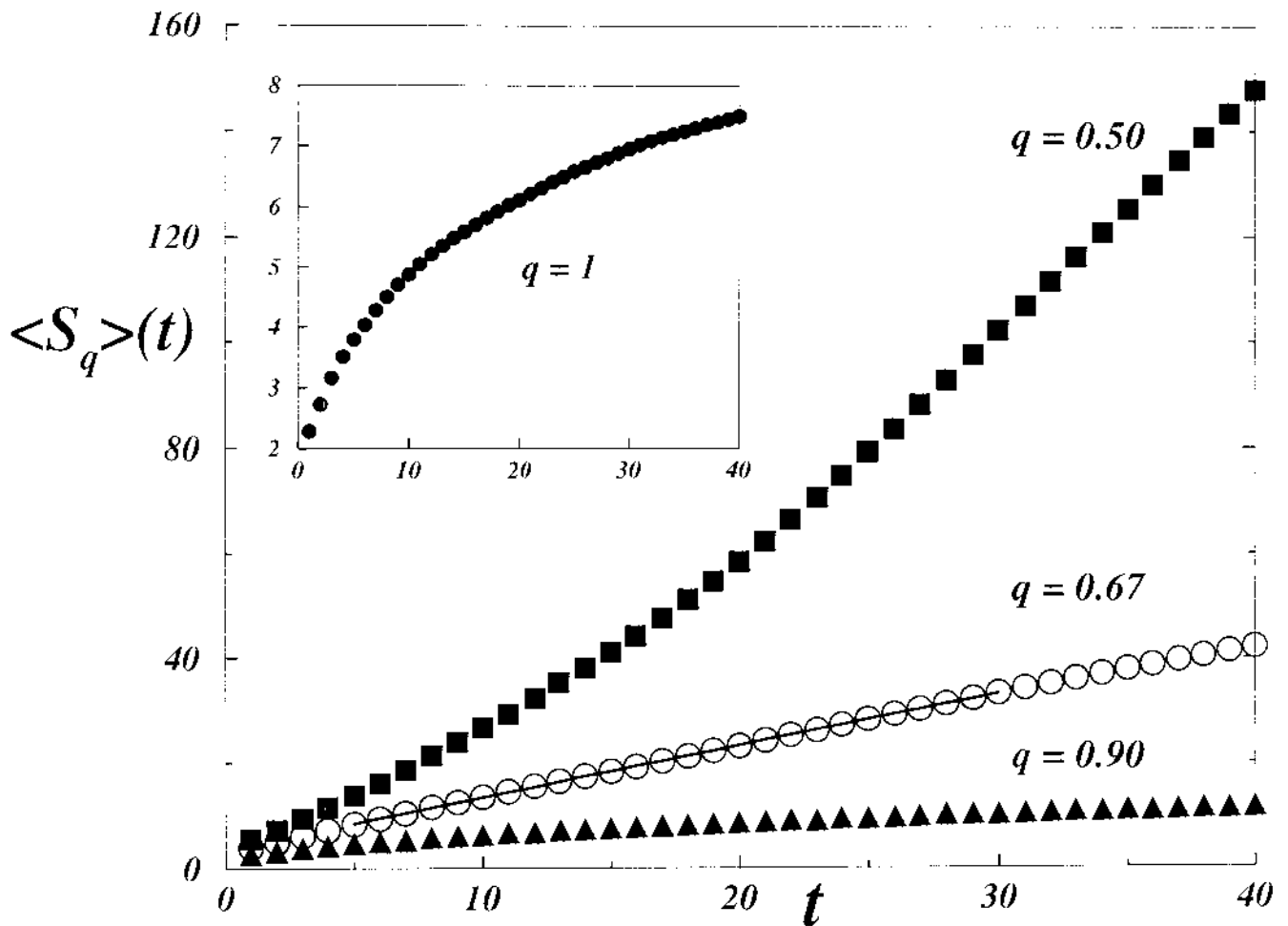


Figura 5.13: Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para quatro valores diferentes de q com $a = 0.4$ e $b = 0.2$ (caos fraco). Consideramos $W = 8.1 \times 10^5$, $N = 6 \times 10^6$ e 3×10^3 realizações. Na figura inserida ilustramos o caso $q = 1$.

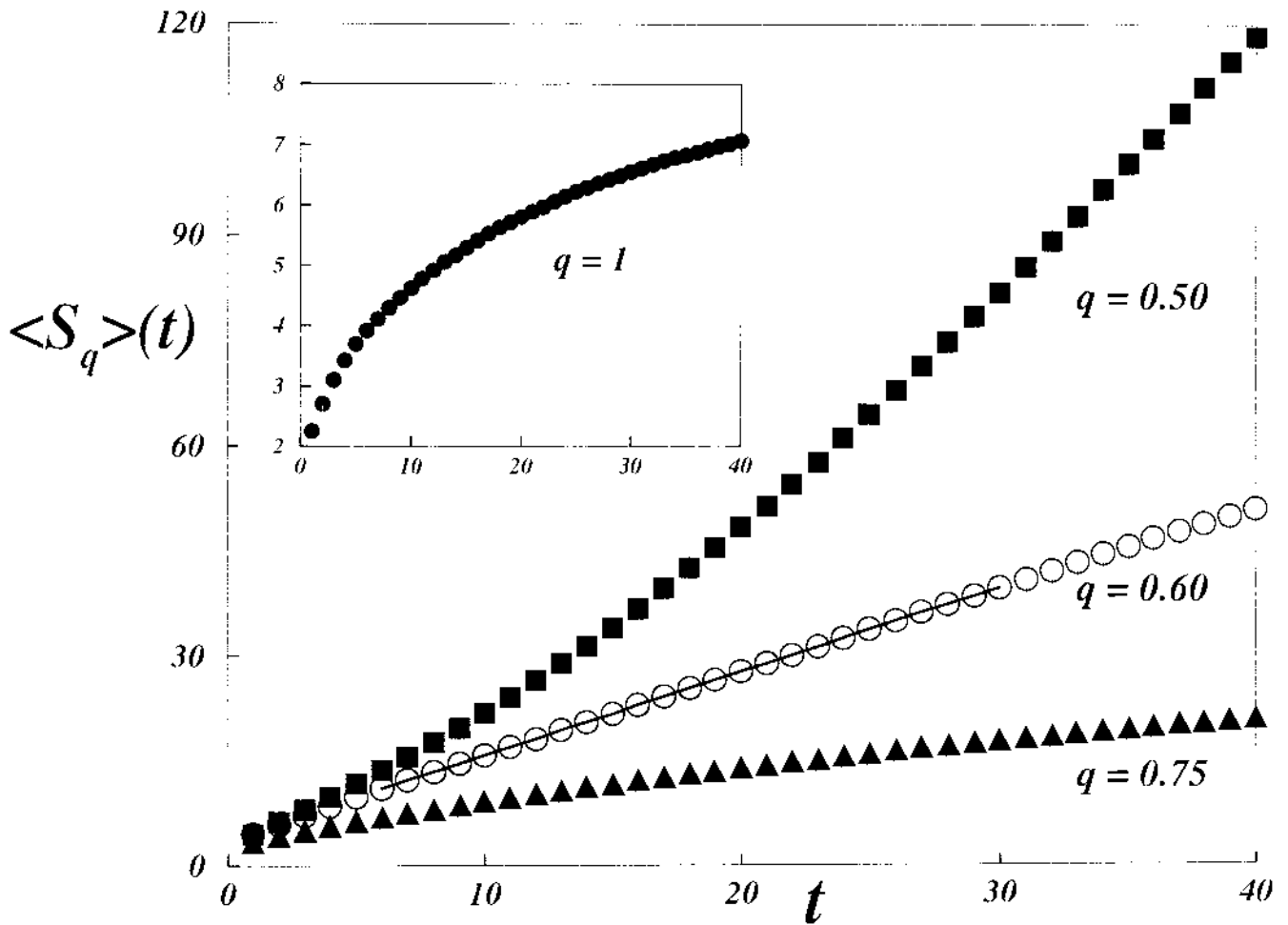


Figura 5.14: Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para quatro valores diferentes de q com $a = 0.2$ e $b = 0.5$ (caos fraco). Consideramos $W = 8.1 \times 10^5$, $N = 6 \times 10^6$ e 3×10^3 realizações. Na figura inserida ilustramos o caso $q = 1$

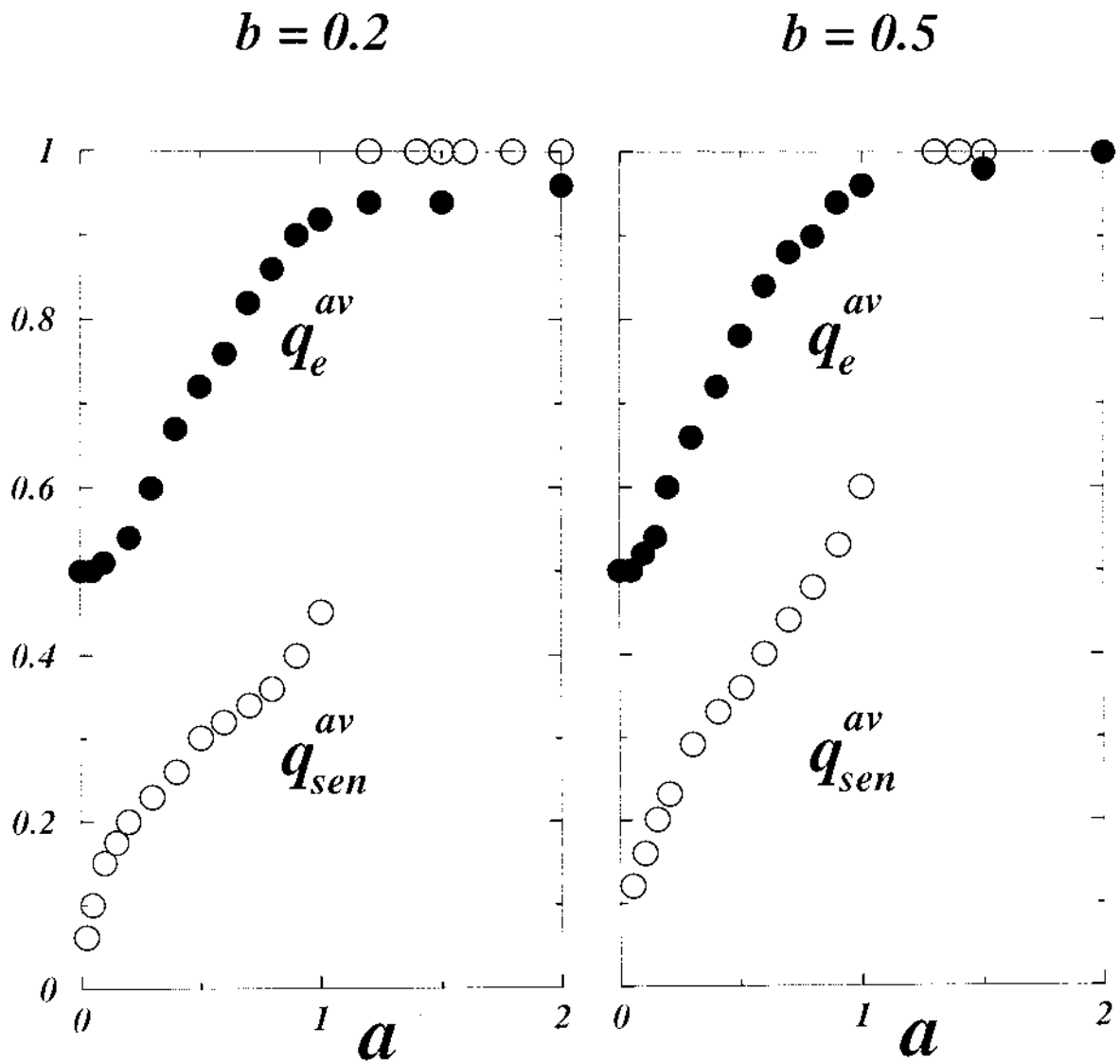


Figura 5.15: Ilustramos a dependência dos índices entrópicos relevantes (para os quais $\langle Sq \rangle(t)$ e $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ crescem linearmente) versus o parâmetro de não-linearidade a . Com círculos preenchidos, mostramos q_e^{av} da entropia; os q_{sen}^{av} da sensibilidade indicamos com círculos vazios.

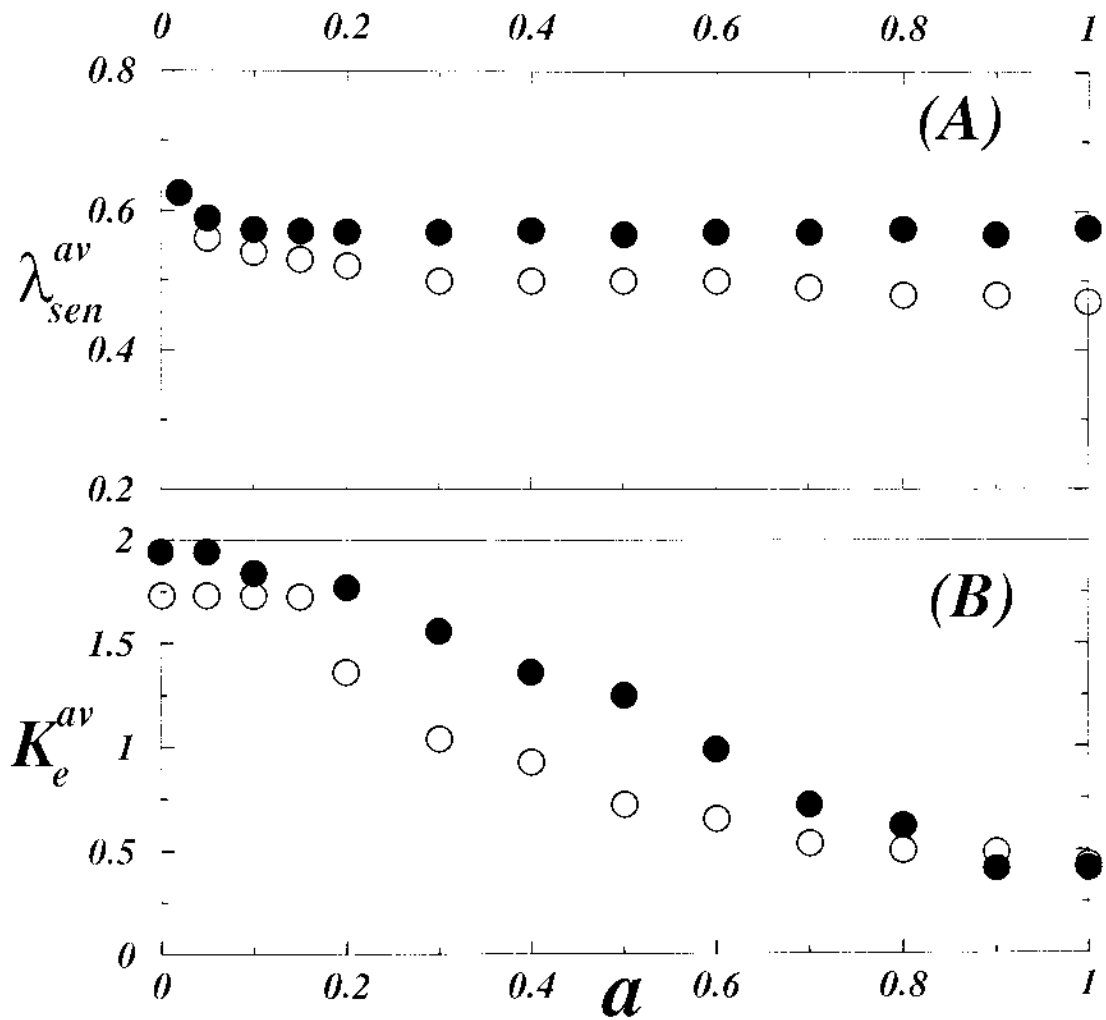


Figura 5.16: Ilustramos a dependência das inclinações do crescimento linear: da sensibilidade λ_{sen}^{av} na figura (A); da q -entropia K_e^{av} na figura (B). Consideramos dois valores do parâmetro de acoplamento: $b = 0.20$ círculos preenchidos e $b = 0.5$ círculos vazios.

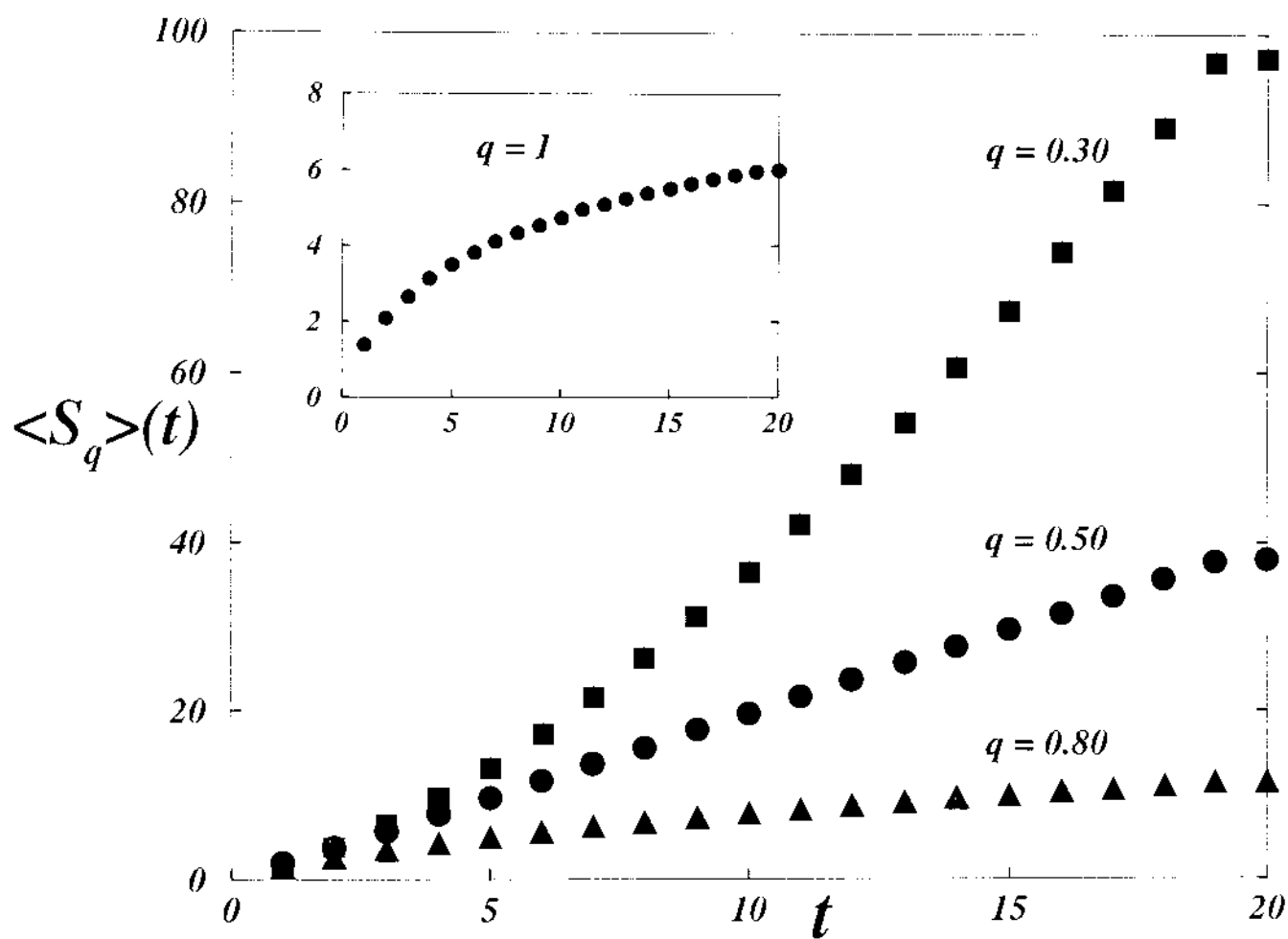


Figura 5.17: Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para quatro valores diferentes de q com $a = 0$ e $b = 0$. Consideramos $W = 1.6 \times 10^5$, $N = 10 \times W$ e 2×10^3 realizações. Na figura inserida ilustramos o caso $q = 1$.

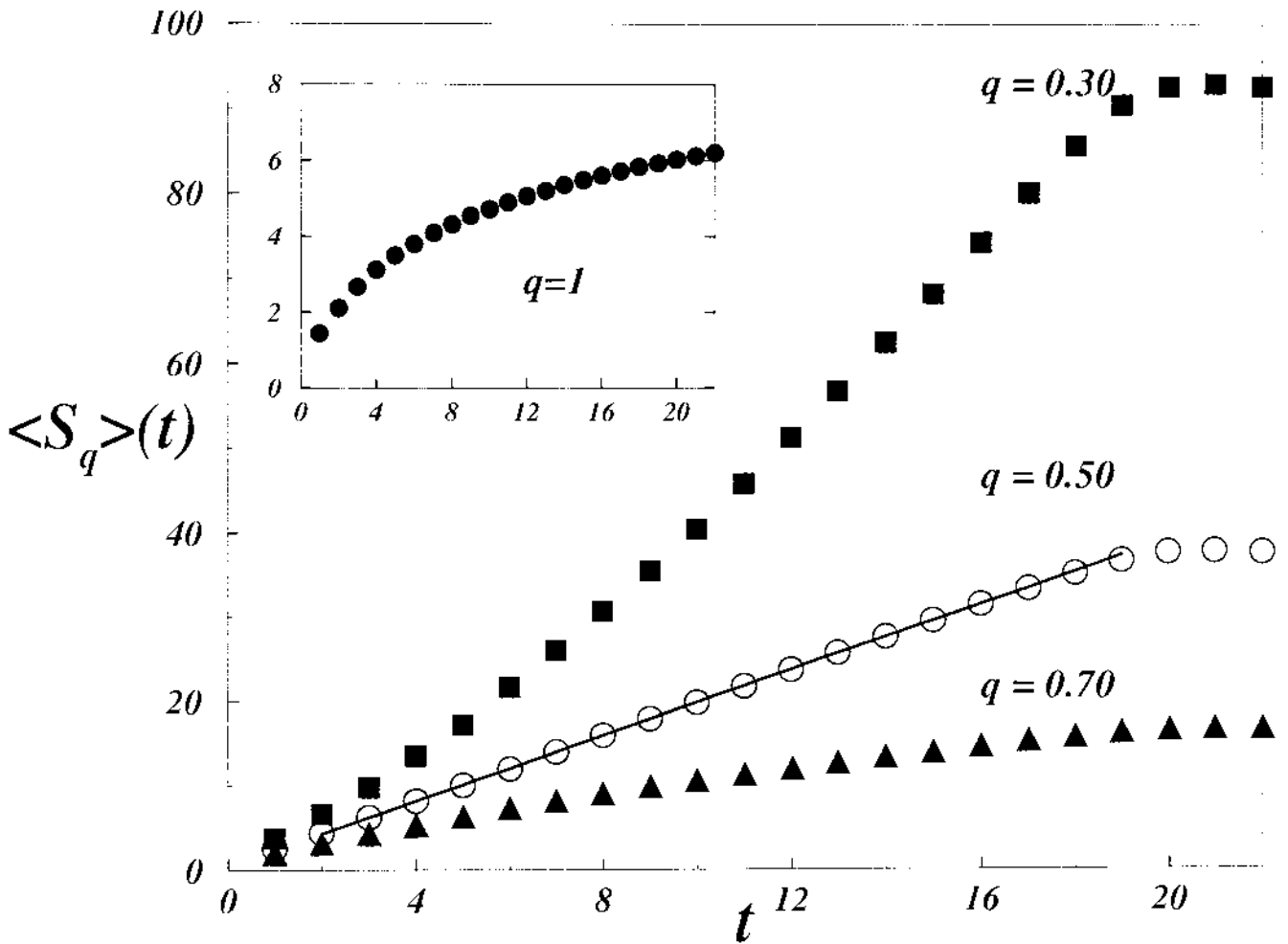


Figura 5.18: Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para quatro valores diferentes de q com $a = 0$ e $b = 0.2$. Consideramos $W = 1.6 \times 10^5$, $N = 10 \times W$ e 3×10^3 realizações. Na figura inserida ilustramos o caso $q = 1$.

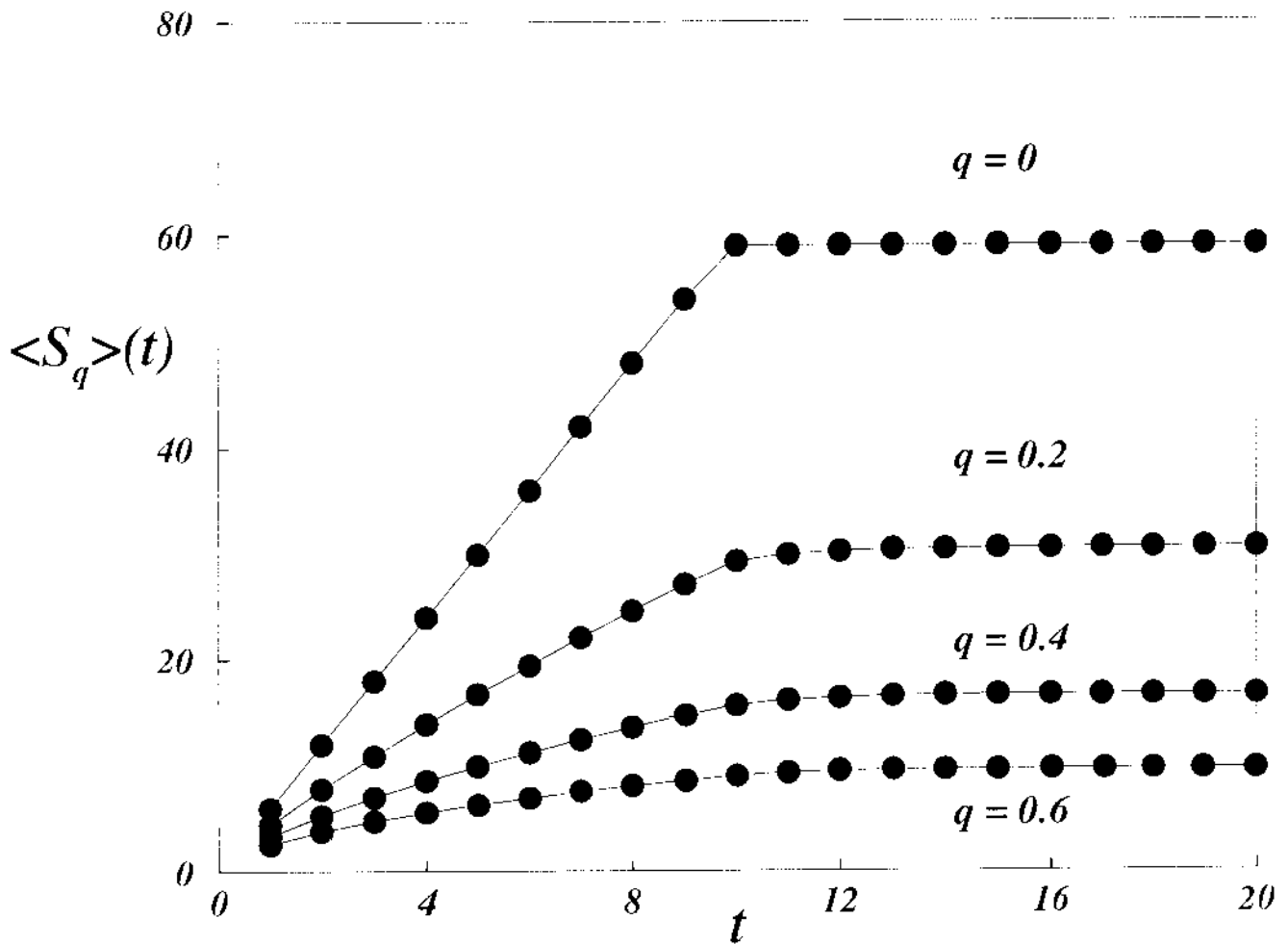


Figura 5.19: Evolução temporal de $\langle S_q \rangle$ para quatro valores diferentes de q com $a = 0$ e $b = 1$. Consideramos $W = 1.6 \times 10^5$, $N = 10 \times W$ e 2×10^3 realizações.

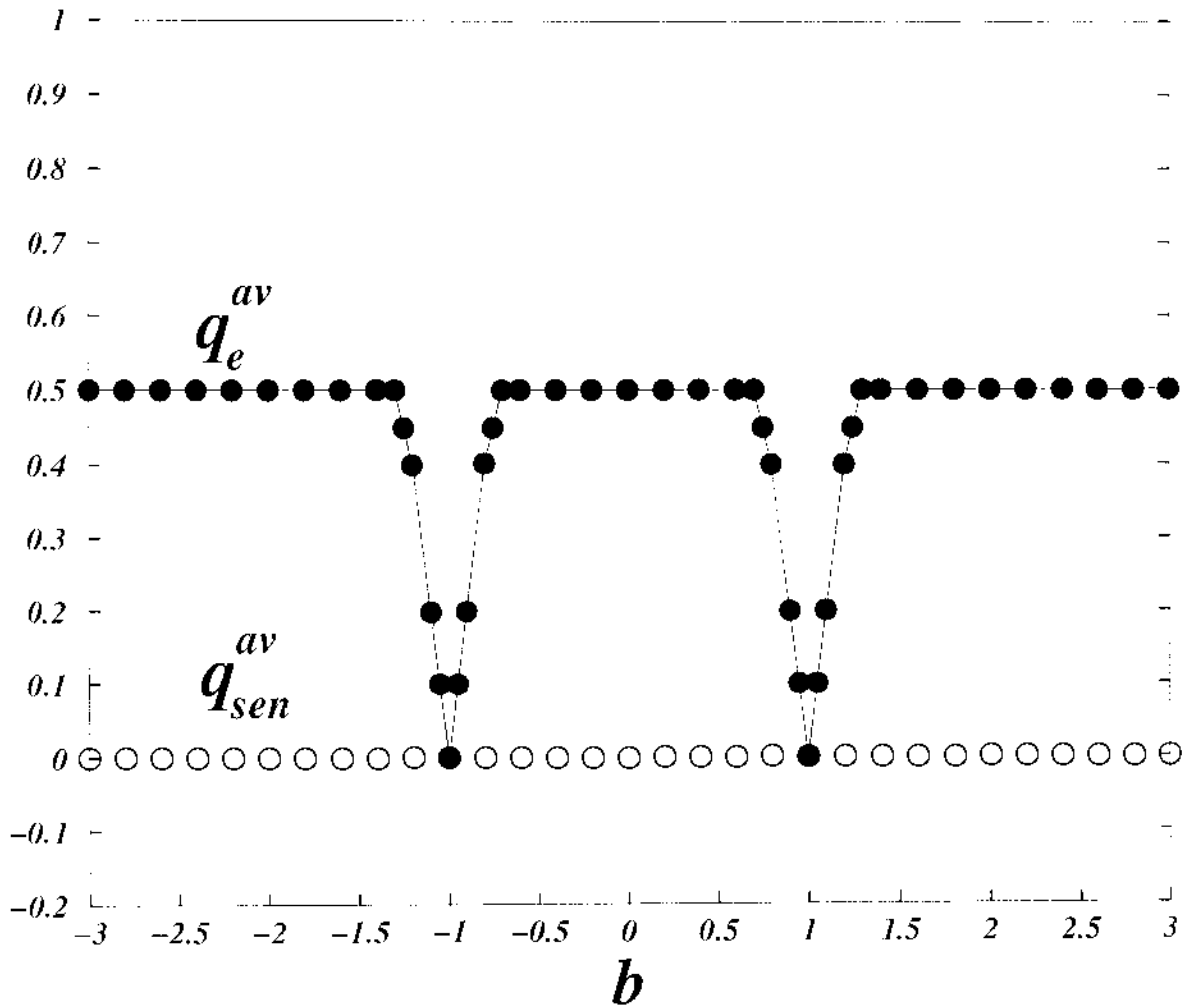


Figura 5.20: Ilustramos a dependência dos índices entrópicos relevantes (para os quais $\langle Sq \rangle(t)$ e $\langle \ln_q \xi \rangle(t)$ crescem linearmente) versus o parâmetro de acoplamento b com $a = 0$. Com pontos cheios, mostramos q_e^{av} da entropia; os q_{sen}^{av} da sensibilidade indicamos com pontos vazios.

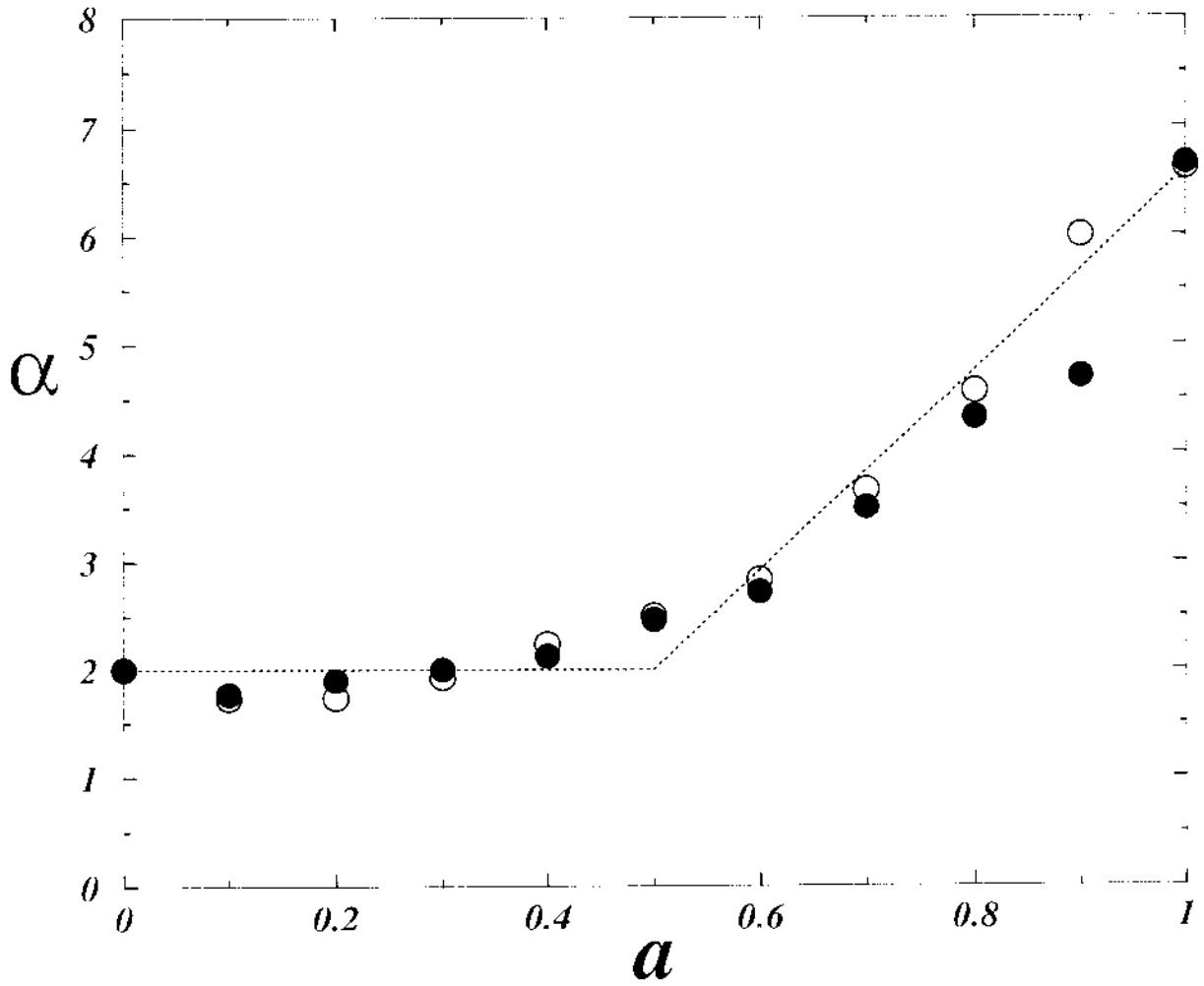


Figura 5.21: O fator α versus a segundo a Eq. (5.10). A linha contínua denota a tendência $\alpha(a) \simeq 2$ para $0 < a < 0.5$ e $\alpha(a) \propto 9.2a$ para $0.5 < a < 1$.

Capítulo 6

Conclusões

Utilizando-se da mecânica estatística não extensiva, os resultados da presente tese mostram que: (i) sempre que o sistema encontra-se num estado de caos forte, surge um único valor do índice entrópico q que caracteriza o sistema: $q_{sen} = q_{rel} = q_{sen}^{av} = q_e^{av} \equiv q = 1$; no entanto, no limiar do caos (mapas dissipativos) ou na transição do comportamento regular ao caótico (mapas conservativos) surgem quatro manifestações diferentes do índice entrópico: $q_{sen} \neq q_{rel} \neq q_{sen}^{av} \neq q_e^{av} \neq 1$, sendo que, $q_{sen}, q_{sen}^{av}, q_e^{av} < 1$ e $q_{rel} > 1$; (ii) a sensibilidade às condições iniciais é dada pela q -exponencial $\xi(t) = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}$, com $q \leq 1$; (iii) a produção de entropia finita acontece somente para a forma entrópica não-extensiva $S_q \equiv [1 - \sum_{i=1}^W p_i^q]/[q - 1]$ com $q \leq 1$.

Desta maneira, verificamos [4] a unificação dos conceitos da sensibilidade às condições iniciais do tipo exponencial e lei de potências, obtendo-se uma generalização significativa da identidade de Pesin que relaciona as generalizações do expoente de Lyapunov e da entropia de Kolmogorov-Sinai. Vale enfatizar-se que a verificação é completa para os sistemas dissipativos aqui caracterizados, e de forma “virtual” para o sistema conservativo composto de dois mapas padrão simplecticamente acoplados. Estes últimos exibem (para a faixa de valores dos parâmetros focalizados nesta tese) um comportamento do tipo lei de potências caracterizados pelos índices entrópicos obtidos com a sensibilidade às condições iniciais, q_{sen}^{av} , e com a entropia, q_e^{av} . A palavra “virtual”, acima assinalada, refere-se ao fato que estes índices entrópicos estão relacionados por meio de uma fórmula $q_e^{av} = 1 - (1 - q_{sen}^{av})/\alpha$ para os mesmos valores dos parâmetros do sistema em questão. A

constante α ($\alpha \simeq 2$ para $0 < |a| \leq 0.5$ e $\alpha \propto 9.2a$ para $0.5 \leq |a| < 1$) possivelmente esteja relacionada com processos típicos de sistemas Hamiltonianos com três ou mais graus de liberdade, por exemplo, a difusão de Arnold [60, 61, 62]. Obviamente, a dimensão do espaço de fases desempenha um papel importante como foi assinalado previamente no capítulo 5. Esperamos, em um futuro próximo, entender melhor a relação entre os índices entrópicos (da sensibilidade e da entropia) e os processos anômalos que acontecem em sistemas Hamiltonianos com dimensões maiores que 2.

A seguir passamos a resumir os resultados da presente tese.

No Capítulo 2 calculamos numericamente, no limiar do caos, a evolução temporal da forma entrópica não-extensiva $S_q \equiv [1 - \sum_{i=1}^W p_i^q]/[q-1]$ (com $S_1 = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$) para os mapas dissipativos z -logísticos com uma inflexão z arbitrário em seu máximo. Em $t = 0$ nós escolhemos N condições iniciais dentro de uma das W janelas pequenas em que o espaço de fases acessível é dividido. Para neutralizar as grandes flutuações nós *convenientemente* fazemos uma média sobre uma certa quantidade de janelas iniciais. Verificamos a existência de um e só um valor de $q_{sen} < 1$ tal que o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} S_q(t)/t$ é finito. De esta maneira, generalizamos a entropia de Kolmogorov-Sinai (em sua versão de ensemble), que corresponde ao valor $q_{sen} = 1$ no presente formalismo. Este valor especial de q_{sen} que depende de z , numericamente coincide (para todos os mapas z -logísticos), com aquele previamente encontrado através de outros dois procedimentos independentes: a sensibilidade às condições iniciais [9] (com um ensemble na vizinhança do ponto $x = 0$) e a função multifractal $f(\alpha)$ [10, 11].

No Capítulo 3 foi considerada a dinâmica probabilística longe do equilíbrio nos mapas z -logísticos $x_{t+1} = 1 - a|x_t|^z$. ($z > 1$) no limiar do caos: (i) Primeiramente, introduzimos um ensemble de condições iniciais dentro de um dos $W \gg 1$ intervalos em que foi dividido o espaço de fases e prestamos especial atenção sob um valor relevante de $q_{sen} < 1$ para qual a forma entrópica $S_q \equiv \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1}$ cresce linearmente com o tempo; (ii) logo, verificamos que $S_{q_{sen}}(t) - S_{q_{sen}}(\infty)$ anula-se segundo $t^{-1/[q_{rel}(W)-1]}$ ($q_{rel}(W) > 1$). Finalmente obtivemos uma nova escala finita, $q_{rel}(\infty) - q_{rel}(W) \propto W^{-q_{sen}}$, onde $q_{rel}(\infty)$ coincide com o valor recentemente obtido [39] por meio de um ensemble inicialmente distribuído em *todo o*

espaço de fases. Este resultado, estabelece quantitativamente, pela primeira vez, a relação procurada por muito tempo, entre a sensibilidade às condições iniciais e a relaxação. Estes conceitos desempenham um papel importante na mecânica estatística não-extensiva.

No Capítulo 4 foram estudadas numericamente, por meio de médias de ensembles, a sensibilidade às condições iniciais $\xi(t)$ e a produção de entropia por unidade de tempo de uma *nova* família de mapas dissipativos unidimensionais, $x_{t+1} = 1 - ae^{-1/|x_t|^z}$ ($z > 0$), dos já conhecidos mapas z -logísticos e do mapa bidimensional dissipativo de Kaplan-Yorke para os casos do caos forte e fraco (limiar do caos). Em todos os casos verificamos que (i) a função $\langle \ln_q \xi \rangle$ [$\ln_q x \equiv (x^{1-q} - 1)/(1 - q)$; $\ln_1 x = \ln x$] e a entropia $\langle S_q \rangle$ [$S_q \equiv (1 - \sum_i p_i^q)/(q - 1)$; $S_1 = -\sum_i p_i \ln p_i$] crescem linearmente com o tempo para (e só para este) um valor especial de q , q_{sen}^{av} , e que (ii) a inclinação de $\langle \ln_q \xi \rangle$ e $\langle S_q \rangle$ *coincidem*; assim, generalizamos a identidade de Pesin. Para o caos forte, $q_{sen}^{av} = 1$, visto que no limiar do caos $q_{sen}^{av}(z) < 1$.

No Capítulo 5 estudamos numericamente a sensibilidade às condições iniciais e a produção de entropia de um sistema de dois mapas padrão simplecticamente acoplados, focalizando em valores dos parâmetros ($|a| < 1$, $|b| < 1$) para os quais o sistema em questão exibe caos fraco. Mostramos que a aproximação não-extensiva fornece uma descrição significativa dos estados críticos onde os expoentes de Lyapunov e a entropia de Kolmogorov-Sinai são nulos. Com efeito, em situações onde o maior expoente de Lyapunov tende a zero, para $|a| < 1$ e $|b| < 1$, surge um regime onde a sensibilidade às condições iniciais tem um comportamento do tipo lei de potência com um e só um valor de $q_{sen}^{av} < 1$. Correspondentemente, verificamos a existência de um único valor $q_e^{av} < 1$ tal que a entropia generalizada mostra um crescimento linear. Mostramos que, diferentemente a o que acontece no caos forte, os índices entrópicos relevantes obtidos com a sensibilidade (q_{sen}^{av}) e a entropia (q_e^{av}) estão relacionados por meio de $q_e^{av} = 1 - (1 - q_{sen}^{av})/\alpha$. Para valores do parâmetro de não-linearidade $0 < |a| \leq 0.5$ e de acoplamento $|b| < 1$, a constante $\alpha \simeq 2$; no entanto para $0.5 \leq a < 1$ temos $\alpha \propto 9.2 a$.

Referências

- [1] May R., Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. *Nature*. **261**, 149 (1976).
- [2] A.N. Kolmogorov, *Dok. Acad. Nauk SSSR* **119**, 861 (1958); Ya. G. Sinai, *Dok. Acad. Nauk SSSR* **124**, 768 (1959).
- [3] Ya. Pesin, *Russ. Math. Surveys* **32**, 55 (1977).
- [4] C. Tsallis, A.R. Plastino and W.-M. Zheng, *Chaos, Solitons and Fractals* **8**, 885 (1997).
- [5] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479-87 (1988).
- [6] C. Beck, G. S. Lewis and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **63**, 035303 (2001); C. Beck, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 180601 (2001).
- [7] V. Latora, A. Rapisarda and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **64**, 056134 (2001).
- [8] G.F.J Ananos, C. Tsallis. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0401276>.
- [9] U. M. S. Costa, M. L. Lyra, A. R. Plastino and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **56**, 245 (1997).
- [10] M. L. Lyra and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53 (1998).
- [11] U. Tirnakli, C. Tsallis and M. L. Lyra, *Eur. Phys. J. B* **11**, 309 (1999).
- [12] U. Tirnakli, *Phys. Rev. E* **62**, 7857 (2000).
- [13] M. Buiatti, P. Grigolini and L. Palatella, *Physica A* **268**, 214 (1999).
- [14] A. Campa, A. Giansanti, D. Moroni and C. Tsallis, *Phys. Lett. A* **286**, 251 (2001).
- [15] V. Latora, A. Rapisarda and S. Ruffo, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 692 (1998); **83**, 2104 (1999).
- [16] C. Antencodo and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5313 (1998).
- [17] V. Latora and M. Baranger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 520 (1999).

- [18] P. Grassberger and M. Scheunert, *J. Stat. Phys.* **26**, 697 (1981).
- [19] T. Schneider, A. Politi and D. Wurtz, *Z. Phys. B* **66**, 469 (1987); G. Arrania and A. Politi, *Europhys. Lett.* **7**, 119 (1988).
- [20] H. Hata, T. Horita and H. Mori, *Progr. Theor. Phys.* **82**, 897 (1989).
- [21] T.C. Halsey et al, *Phys. Rev.* **A33**, 1141 (1986).
- [22] C. Beck and F. Schlogl, *Thermodynamics of chaotic systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [23] R.C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [24] E. M. F. Curado and C. Tsallis, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, L69-72 (1991); Corrigenda: **24**, 3187 (1991) e **25**, 1019 (1992).
- [25] C. Tsallis, R. S. Mendes and A. R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [26] S.R.A. Salinas and C. Tsallis, *Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*, *Braz. J. Phys.* **29**, No. 1 (1999) [http://www.sbf.if.usp.br/WWW_pages/Journals/BJP/Vol29/Num1/index.htm].
- [27] S. Abe and Y. Okamoto, *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, *Series Lecture Notes in Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [28] S. Abe and A.K. Rajagopal, *Phys. Lett. A* **272**, 341 (2000); S. Abe and A.K. Rajagopal, *J. Phys. A* **33**, 8733 (2000); S. Abe and A.K. Rajagopal, *Europhys. Lett.* **52**, 610 (2000); J.A.S. Lima, R. Silva and A.R. Plastino, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2938 (2001).
- [29] T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Physica A* **305**, 218 (2002).
- [30] D.B. Walton and J. Rafelski, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 31 (2000); G. Wilk and Z. Włodarczyk, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **75A**, 191 (1999); G. Wilk and Z. Włodarczyk, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2770 (2000); D.B. Walton and J. Rafelski, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 31 (2000); M.L.D. Ion and D.B. Ion, *Phys. Lett. B* **482**, 57 (2000); I. Bediaga, E.M.F. Curado and J. Miranda, *Physica A* **286**, 156 (2000); C. Beck, *Physica A* **286**, 164 (2000).
- [31] A. Upadhyaya, J.-P. Rieu, J.A. Glazier and Y. Sawada, *Physica A* **293**, 549 (2001).
- [32] C. Tsallis, S. Lloyd and M. Baranger, *Phys. Rev. A* **63**, 42104 (2001).
- [33] V. Latora, M. Baranger, A. Rapisarda, C. Tsallis, *Phys. Lett. A* **273**, 97 (2000).
- [34] C. R. da Silva, H. R. da Cruz, M. L. Lyra, *Braz. J. Phys.* **29**, 144 (1999) [http://www.sbf.if.usp.br/WWW_pages/Journals/BJP/Vol29/Num1/index.htm].

- [35] E.G.D. Cohen, *Physica A* **305**, 19 (2002).
- [36] M. Baranger, *Physica A* **305**, 27 (2002).
- [37] I. Bediaga, E. M. F. Curado and J. Miranda, *Physica A* **286**, 156 (2000).
- [38] L. Borland, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 098701 (2002).
- [39] F.A.B.F. de Moura, U. Tirnakli and M.L. Lyra, *Phys. Rev. E* **62**, 6361 (2000)
- [40] U. Tirnakli, G. F. J. Ananos, C. Tsallis, *Phys. Lett. A* **289**, 51 (2001).
- [41] J. A. S. de Lima, R. Silva and A. R. Plastino, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2938 (2001).
- [42] M. N. Barber, *Finite-size Scaling*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 8, eds. C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, London, 1983).
- [43] H. P. de Oliveira, I. D. Soares and E. V. Tonini, *Physica A* **295**, 348 (2001).
- [44] P. Cvitanović, *Universality in Chaos* (A. Hilger, Bristol, 1984).
- [45] F. Baldovin and A. Robledo, *Phys. Rev. E* **66**, 045104 (2002); *Europhys. Lett.* **60**, 518 (2002) and [cond-mat/0304410].
- [46] Ernesto. P. Borges, C. Tsallis, Garín F. J. Añaños, and Paulo Murilo C. de Oliveira. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 254103 (2002).
- [47] U. Tirnakli and G.F.J Ananos, (2004) unpublished.
- [48] Van Kampen, N.G.: *Stochastic processes in physics and chemistry*. Amsterdam: North-Holland 1981.
- [49] Schuss, Z.: *Theory and applications of stochastic differential equations*. New York: Wiley 1980.
- [50] Friedman, A.: *Stochastic differential equations and applications*. New York: Academic Press 1975.
- [51] Kaplrau, J.L., Yorke, J.A.: *Lecture notes in Mathematics* **730**, p. 204. Berlin. Heidelberg, New York: Springer 1979.
- [52] Christian Beck, *Ergodic Properties of a Kicked Damped Particle*. *Commun. Math. Phys.* **130**, 51-60 (1990).
- [53] Hedlund G. A. and Morse, M. *Symbolic dynamics*. *Am. J. Math.* **60**,815-866 (1938).
- [54] Tikhomirov, V. M., *Usp. Mat. Nuk* **18**, 55 (1963).
- [55] Kolmogorov, A.N. and Tikhomirov, V. M. *e-entropy and e-capacity of sets in functional spaces*, *Usp. Mat. Nauk* **14**, 3-86 (1959).

- [56] Bowen, R. *Topological entropy for noncompact sets*, Trans. AMS **84**, 125-136 (1973).
- [57] V.I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*. Springer, New York, (1978).
- [58] G. M. Zaslavsky, M. Edelman, *Weak mixing and anomalous kinetics along filamented surfaces*. Chaos, **11** N 2 (2001).
- [59] G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov and A. A. Chernikov. *Weak chaos and quasi-regular patterns*, Cambridge University Press, 1991.
- [60] Chirikov, B. V., Phys. Rep., **52**, 263 (1979).
- [61] V. I. Arnold. Russian Math. Surveys **18**, 85 (1964).
- [62] J. E. Howard, A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, R. H. Cohen. Physica **20D**, 259-284 (1986).
- [63] F. Baldovin, Numerical analysis of conservative maps: a possible foundation of nonextensive phenomena , in "Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications", eds. M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford University Press, New York, 2003). Baldovin F, Tsallis C, and Schulze B. cond-mat/0203348. Fulvio Baldovin. Physica A, **305**, 124 (2002).
- [64] J.D. Farmer, Z. Naturforsch **37a**, 1304 (1982); G. Benetin, L.Galgani, and J.-M. Strelcyn, Phys. Rev. **A14**, 2338 (1976); P. Grassberger and I. Procaccia, Phys. Rev. **A28**, 2591 (1983); A.M.Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization*. Cambridge University Press (1988).
- [65] Garín F.J. Añaños, Fulvio Baldovin. Constantino Tsallis. arXiv:cond-mat/0403656.
- [66] C. F. F. Karney, Physica **8D**, 360 (1983).
- [67] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, Physica **13D**, 395 (1984).
- [68] J. D. Meiss and E. Ott, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), 2741; Physica **20D**, 387 (1986).
- [69] E. Ott, *Chaos in dynamical system* (Cambridge University Press, 1993).
- [70] I. C. Percival, *Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction*, edited by M. Month and J. C. Herrera, AIP Conf. Proc. 57 (American Institute of Physics, New York, 1979), p. 302.
- [71] V.V. Beloshapkin and G.M. Zaslavsky, Phys. Lett. A **97**, 121 (1983).
- [72] G. M. Zaslavsky, Chaos **5**, 653 (1995).
- [73] K.S. Mackay, J.D. Meiss and I.C. Percival, Physica **13D** (1984).

“Caracterização de Sistemas Dinâmicos Não-Extensivos de baixa dimensionalidade”

Garin Fedor Janampa Añaños

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Constantino Tsallis – Presidente

Jason Alfredo Carlson Gallas – UFRGS

Paulo Murilo Castro de Oliveira – UFF

Célia Beatriz Anteneodo – CBPF

Ronald Cintra Shellard - CBPF

Rio de Janeiro, 12 de abril de 2004