Dissertação de Mestrado

Sobre a presença de um setor de radiação escura na Eletrodinâmica Clássica.

DENIS COCUROCI

Orientador: Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Setembro de 2009

*Dedico este trabalho a meu avô,
Antônio Ferreira Martins, o melhor
avô do mundo.*

Agradecimentos

Ao professor Helayël, por me fazer voltar a acreditar em meus sonhos mais profundos na física e por me inspirar a me tornar uma pessoa excelente;

Aos colegas que se tornaram grandes amigos Alan Espinosa Maicá e Guillermo Avendano Franco, pelas infindáveis discussões e pela parceria em tudo;

Aos Professores Constantino Tsallis e Sebastião Alves Dias, pelas aulas super legais e pela amizade;

Aos colaboradores do CBPF: Beth, Cristina e Almério pela amizade e pelos "favorzinhos" de sempre;

Aos colaboradores da CFC e seus diretores por seus dedicados trabalhos;

A minha querida companheira, Érika, pela dedicação, pelo carinho e pela felicidade de compartilhar a vida a seu lado;

Aos meus sogros, Sr. Mário e Dona Teca por me permitirem cuidar de um de seus maiores tesouros;

Aos meus tios adotivos do Rio, Tia Dália e Tio Paulo cujos cuidados foram equivalentes aos de verdadeiros pais;

Aos meus pais, Oreste e Márcia, cuja dedicação a mim chega a ser comovente;

Aos meus avós maternos, Vovô Tónio e Vovó Lita pelo enorme carinho;

Aos meus irmãos Lorie e Rodrigo pela amizade e pela paciência com o irmão mais velho;

Por fim, agradeço ao Povo Brasileiro, através do CNPq, pela Bolsa de Mestrado.

Resumo

Formulamos teorias eletrodinâmicas em (1+4) dimensões e as apresentamos em termos de estruturas tensoriais do espaço-tempo 4-dimensional. Investigamos a possibilidade de que o Eletromagnetismo de Maxwell seja a manifestação de um fenômeno mais fundamental no mundo das 5 dimensões. A motivação para esta abordagem é a concepção de que nosso Universo possa ser descrito como uma hipersuperfície de uma 5-brana. Descrevemos um campo tensorial de gauge em 5 dimensões e mostramos que é possível estabelecer uma equivalência entre as descrições de Maxwell e Kalb-Ramond, no caso da radiação eletromagnética no vácuo. Constatamos que a estrutura de correntes que a formulação de Kalb-Ramond produz é uma descrição mais geral para a interação eletromagnética. Propomos um cenário 4-dimensional em que o Eletromagnetismo de Maxwell seja acompanhado, como consequência das 5 dimensões, de um setor extra desacoplado da matéria, puramente energético: um setor de radiação escura que acompanha a radiação eletromagnética que percebemos em 4 dimensões.

Abstract

We formulate electrodynamical theories in (1+4) dimensions, and we present them in terms of tensor structures of 4-dimensional Minkowski space. We investigate the possibility that Maxwell´s Electromagnetism be a manifestation of a more fundamental phenomenon in the world of 5 dimensions. This is motivated by the hypothesis that our Universe may be described as a hypersurface of a 5-brane. We describe a 2-form gauge field in 5 dimensions and demonstrate that it is possible to establish an equivalence between the descriptions by Maxwell and Kalb-Ramond in the situation the fields are free. We point out that the current structure of the Kalb-Ramond formulation yields a more general description for the electromagnetic interaction. We suggest a particular scenario such that Maxwell´s Electromagnetism brings about, as a consequence of the 5-dimension origin, an extra sector decoupled from matter, essentially made up of energy: a sector of dark radiation that accompanies electromagnetic waves in our 4-dimensional world.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização do nosso trabalho

A possibilidade de nosso Universo ter mais do que três dimensões espaciais tem atraído continuado interesse por muitos anos. As motivações para considerar o espaço como algo multidimensional são fortes e vêm de teorias que incorporam a gravidade de uma maneira confiável sendo que quase todas suas versões são naturalmente ou consistentemente formuladas num espaço-tempo de mais do que quatro dimensões [1]. Como exemplo citamos – as teorias de cordas [2] e a teoria-M [3] . Em paralelo a desenvolvimentos na teoria fundamental, estudos acerca de linhas mais fenomenológicas têm recentemente conduzido a novas percepções com relação a como as dimensões extra poderiam se manifestar, e como elas poderiam ajudar a resolver problemas antigos da teoria de partículas tais como o problema da hierarquia e o problema da constante cosmológica [4].

Um ponto importante nas teorias multidimensionais é o mecanismo através do qual as dimensões extra ficam ocultas, tal que o espaço-tempo seja efetivamente 4-dimensional considerando que a física conhecida seja estabelecida. Até recentemente, a ênfase principal era posta essencialmente em teorias do tipo de Kaluza-Klein [1], onde as dimensões extra são compactificadas e essencialmente homogêneas. Nesse cenário, é a compacticidade das dimensões extra que assegura que o espaço-tempo é efetivamente 4-dimensional a distâncias que excedem a escala de compactificação (o tamanho da dimensão extra). Mais recentemente, entretanto, a enfase tem mudado para um cenário de branas [5] que considera que a matéria ordinária (a exceção do graviton e outras partículas, hipotéticas, que interagem muito fracamente como a matéria) está aprisionada em uma subvariedade 3-dimensional incrustada em um espaço multidimensional fundamental, a chamada brana. No cenário de branas, as dimensões extra podem ser extensas ou mesmo infinitas; e pode-se constatar [6] que elas podem ter efeitos experimentais observáveis.

O conjunto das várias teorias em física de partículas e cosmologia motivada pela teoria de supercordas e teoria-M é referida como Cosmologia de branas [7, 8, 9] e tem como idéia central o fato do universo 4-dimensional (visível) estar restrito a uma brana dentro de um espaço de mais alta dimensão a qual costuma-se chamar de *bulk* (volume principal, em português). No modelo de *bulk*, outras branas podem estar se movendo através do *bulk*. Interações com o *bulk*, e possivelmente com outras branas, podem influenciar nossa brana e assim introduzir efeitos não vistos em modelos cosmológicos mais padrão.

Como uma de suas características atraentes, o modelo pode explicar a fraqueza da gravidade em relação a outras forças fundamentais da natureza, portanto resolvendo o assim chamado problema da hierarquia. No cenário de branas, as outras três forças (eletromagnetismo e força nuclear fraca e forte) são localizadas na brana, mas a gravidade não tem tal restrição e parte considerável de sua capacidade atrativa "vaza" pelo *bulk*. Como consequência, a força da gravidade é significantemente mais intensa em escalas menores[1], onde menos força gravitacional tenha "vazado". Vários experimentos estão sendo feitos para testar esses efeitos [2].

O modelo cosmológico de branas pode ser útil no estudo de uma questão importante da Cosmologia que avalia a causa do Universo estar acelerando sua expansão, fato descoberto em 1998 [10]. Convencionou-se chamar aquilo que vem a ser a o responsável pela aceleração da expansão do Universo de energia escura porém, não se sabe até hoje o que venha a ser de fato tal energia. A energia escura é uma forma hipotética de energia que estaria distribuída por todo espaço e tende a acelerar a expansão do Universo. A principal característica da energia escura é

[1] subatômico ou pelo menos sub-milimétrico

[2] Testes Experimentais de Gravitação de Curto Alcance - *Experimental Tests of Short Range Gravitation* [http://flux.aps.org/meetings/YR04/APR04/baps/abs/S690.html]

ter uma forte pressão negativa. De acordo com a teoria da relatividade, o efeito de tal pressão negativa seria semelhante, qualitativamente, a uma força que age em larga escala em oposição à gravidade. Tal efeito hipotético é frequentemente utilizado, por diversas teorias atuais que tentam explicar as observações que apontam para um universo em expansão acelerada.

1.2 Delimitação de nosso problema de pesquisa.

Adotamos uma descrição de nosso Universo e das interações fundamentais como se dando numa brana 4-dimensional, fronteira de um mundo 5-dimensional [5]. O que pretendemos expor é a possibilidade de que o Eletromagnetismo de Maxwell seja a manifestação de um fenômeno mais fundamental no mundo das 5-dimensões.

Vamos estabelecer, com os nossos estudos, que a Eletrodinâmica de Maxwell em 4D seja parte de um sistema mais completo, com um setor extra constituído por campos de pura radiação que não se acoplam a correntes de matéria, e cujo tensor de energia-momentum pode indicar a existência de uma pressão negativa. Isto nos induz a pensar num Eletromagnetismo que traz consigo, como efeito de uma dinâmica que se processa em 5D, um setor de radiação escondida, que pretendemos identificar como possível candidato a uma parcela da energia escura [11, 12, 13, 14, 15] do Universo.

Procurando compreender o aspecto mais fundamental do Eletromagnetismo em 5D, organizamos a nossa investigação através do estudo dos campos de Maxwell e de Kalb-Ramond [16] (uma 2-forma de gauge) no mundo 5-dimensional, partindo do fato de que ambos, em 5-D, podem descrever um quantum com 3 graus de liberdade físicos. Buscamos entender qual dos dois deve ser mais fundamental do ponto-de-vista das interações eletromagnéticas no mundo das 4 dimensões.

Para apresentar os resultados de nosso trabalho de pesquisa, organizamos este texto de acordo com a seguinte divisão: no Capítulo 2, formulamos a Eletrodinâmica em 5D e já a apresentamos em termos de estruturas tensoriais do mundo 4-dimensional. No Capítulo 3, procedemos ao estudo do campo de Kalb-Ramond e chegamos às equações de campo para o mesmo, também já formuladas em notação tensorial em 4D. Concluímos este capítulo discutindo uma possível equivalência entre as Eletrodinâmicas de Maxwell e Kalb-Ramond no vácuo. Os resultados dos Capítulos 2 e 3 são a base para o material apresentado no Capítulo 4, onde a nossa principal tarefa é decidir sobre qual das duas Eletrodinâmicas em 5D pode ser mais interessante na descrição do Eletromagnetismo em 4D.

Concluímos, como será visto, por propor que seja o campo de Kalb-Ramond o objeto realmente fundamental para a descrição do eletromagnetismo em 5D e com consequências mais ricas no mundo 4-dimensional.

No Capítulo 5, tecemos as nossas Considerações Finais e delineamos possíveis encaminhamentos futuros, necessários como testes para a nossa proposta de existência de um setor de radiação escura que acompanha a radiação eletromagnética que percebemos em nosso mundo das 4 dimensões.

Seguem-se dois Apêndices. No Apêndice A, coletamos simplesmente relações algébricas úteis para os desenvolvimentos feitos em (1+4)D.

No Apêndice B, apresentamos de forma sucinta, a fim de ajudar a leitura do Capítulo 3 e 4, a formulação da Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em 4D.

Uma nota: os trabalhos e a redação foram concluídos em meados de Julho de 2009. Imediatamente após a conclusão de nosso trabalho, três interessantes papers foram colocados no arXiv, em 20/JUL [17] , 22/JUL [18] e 6/AGO [19] abordando a questão que estamos estudando.

Capítulo 2

A Eletrodinâmica Clássica em (1+4)Dimensões.

O objetivo deste capítulo é formular a Eletrodinâmica em 5D e já a apresentar em termos de estruturas tensoriais do mundo 4-dimensional. O estudo pretende investigar a possibilidade de que o Eletromagnetismo de Maxwell seja a manifestação de um fenômeno mais fundamental no mundo das 5-dimensões. A razão disso vem da concepção de que nosso Universo seja melhor descrito por uma hipersuperfície de uma 5-brana.

O leitor deverá observar, ao longo desta tese, que em grande parte do trabalho optamos por formular as equações de campo em termos de vetores e tensores de $SO(3)$. O propósito é deixar de maneira bem clara o paralelo que sempre procuramos estabelecer com a Eletrodinâmica de Maxwell expressa explicitamente em termos dos campos $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$. A notação covariante, muito propícia para uma descrição manifestamente relativististica, para algumas finalidades mascara as relações entre os campos em termos dos quais se formula um dado modelo. Poder-se-á perceber que faremos sempre o esforço de transcrever as equações covariantes no espaço de Minkowski em termos dos campos com caráter tensorial no espaço euclidiano 3-dimensional.

Esperamos que em nosso mundo 4-dimensional possamos encontrar aspectos provenientes de uma teoria física fundamental formulada em 5D.

2.1 Eletromagnetismo clássico.

O eletromagnetismo clássico e as equações de Maxwell podem ser derivados da ação:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^5 x \tag{2.1}$$

onde d^5x é sobre o espaço e tempo. Isso quer dizer que o Lagrangiano $\mathcal{L}$ é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Podemos inserir este Lagrangiano na equação de Euler-Lagrange e assim a equação de movimento sem fontes obtida é $\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$. O termo entre parenteses $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é definido como o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ ou *tensor intensidade de campos* como nos referiremos daqui para frente e, portanto, a equação de movimento do campo sem fontes fica assim:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.3}$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.4}$$

Na próxima seção, obteremos as componentes do field strength $F^{\mu\nu}$ por meio de identificações e na sequência as utilizaremos para escrever as equações de movimento do campo de Maxwell em (1+3) e em (1+4)D, um de nossos focos nesse capítulo .

2.2 Tensor campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$.

O tensor eletromagnético é um objeto matemático que descreve o campo eletromagnético de um sistema físico na teoria de Maxwell do eletromagnetismo. Tal tensor permite que algumas leis físicas sejam escritas em uma forma muito concisa e independente da dimensionalidade considerada. Aqui faremos uso desse tensor a fim de obter uma formulação 5-dimensional do eletromagnetismo de Maxwell.

O tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ tem sua formulação em termos do 5-vetor potencial A_μ sendo que tal vetor, o 5-vetor potencial, é dado por $A^\mu = (\frac{\Phi}{c}, A_x, A_y, A_z, \psi) = (\frac{\Phi}{c}, \overrightarrow{A}, \psi)$ e em sua forma covariante é encontrado multiplicando o pela métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ que nesse caso tem a seguinte assinatura (+ - - - -). Assim, $A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu = (\frac{\Phi}{c}, -\overrightarrow{A}, -\psi)$ onde, $\overrightarrow{A}$ é o potencial vetor e (A_x, A_y, A_z) são suas componentes; Φ é o potencial escalar, c é a velocidade da luz e ψ é um novo potencial escalar que estamos definindo e posteriormente faremos sua interpretação.

A fim de fixar a notação nós precisamos definir o operador derivada covariante:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^4}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla, \frac{\partial}{\partial s}).$$

Aqui também, para obter o operador derivada em sua forma contravariante multiplicamos pela métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ de modo que a expressão final fica:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial x_0}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_3}, -\frac{\partial}{\partial x^4}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla, -\frac{\partial}{\partial s}).$$

2.2.1 Derivação do tensor

Para derivar todas as componentes do tensor eletromagnético utilizamos a sua definição expressa em função dos potenciais Eq. (2.4) e fazemos em seguida as devidas identificações com o campo propriamente dito. Em outras palavras, $-(\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} + \nabla\Phi)$ é identificado com $\overrightarrow{E}$ e $\nabla \times \overrightarrow{A}$ é identificado com $\overrightarrow{B}$ conforme se faz comumente num cenário (1+3)D , ou seja:

$$\begin{array}{lcl} -(\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} + \nabla\Phi) & \longmapsto & \overrightarrow{E} \\ \nabla \times \overrightarrow{A} & \longmapsto & \overrightarrow{B} \end{array} . \tag{2.5}$$

Entretanto, em (1+4)D precisaremos definir ainda mais dois campos, sendo um escalar b e o outro vetorial $\overrightarrow{e}$ no intuito de expressar o tensor $F^{\mu\nu}$ completamente. Portanto, esses dois novos campos são identificados da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} (\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\partial}{\partial s}\Phi) & \longmapsto & b \\ -\nabla\psi + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{A} & \longmapsto & \overrightarrow{e} \end{array}. \tag{2.6}$$

Desse modo, o resultado final dessas identificações, quando expresso matricialmente, $F^{\mu\nu}$ fica igual a :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}A_x + \frac{\partial}{\partial x}\Phi) & \frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}A_y + \frac{\partial}{\partial y}\Phi) & \frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}A_z + \frac{\partial}{\partial z}\Phi) & -\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\partial}{\partial s}\Phi) \\ -\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}A_x + \frac{\partial}{\partial x}\Phi) & 0 & -(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x) & -(\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x) & -(\frac{\partial}{\partial x}\psi - \frac{\partial}{\partial s}A_x) \\ -\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}A_y + \frac{\partial}{\partial y}\Phi) & (\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x) & 0 & -(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y) & -(\frac{\partial}{\partial y}\psi - \frac{\partial}{\partial s}A_y) \\ -\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}A_z + \frac{\partial}{\partial z}\Phi) & (\frac{\partial}{\partial x}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_x) & (\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y) & 0 & -(\frac{\partial}{\partial z}\psi - \frac{\partial}{\partial s}A_z) \\ \frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\partial}{\partial s}\Phi) & (\frac{\partial}{\partial x}\psi - \frac{\partial}{\partial s}A_x) & (\frac{\partial}{\partial y}\psi - \frac{\partial}{\partial s}A_y) & (\frac{\partial}{\partial z}\psi - \frac{\partial}{\partial s}A_z) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Ao final, após as devidas identificações, obtemos a seguinte matriz:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & \frac{b}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y & e_x \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x & e_y \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 & e_z \\ -\frac{b}{c} & -e_x & -e_y & -e_z & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

De uma maneira mais sucinta também podemos reescrever as componentes do tensor $F^{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} F^{0i} & = & -\frac{E_i}{c} \\ F^{ij} & = & -\varepsilon_{ijk}B_k \\ F^{04} & = & \frac{b}{c} \\ F^{i4} & = & \overrightarrow{e_i} \end{array} \tag{2.9}$$

2.2.2 Equações de movimento do campo

Se expressarmos as equações de movimento com fonte $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ assim como as equações homogêneas $\partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^{\kappa}{}_{\mu} + \partial^\kappa F_{\mu}{}^{\nu} = 0$ conhecidas como identidades de Bianchi em termos de suas componentes no cenário habitual das (1+3)D obteremos as quatro equações de Maxwell. Ou seja, esquematicamente, teriamos:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c}(\nabla \cdot \overrightarrow{E}) = c\rho \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} + \nabla \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{j} \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^{\kappa}{}_{\mu} + \partial^\kappa F_{\mu}{}^{\nu} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} + \nabla \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Ao passo que se essas mesmas equações de movimento do campo, forem consideradas num cenário (1+4)D, nós teriamos ao invés de quatro mas sim sete equações, sendo que dessas três têm fontes enquanto que as outras quatro são homogêneas[1]. Enfim, nesse caso, teriamos:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c}[(\nabla \cdot \overrightarrow{E}) - \frac{\partial b}{\partial s}] = c\rho \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} + \nabla \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{e} = \overrightarrow{j} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + \nabla \cdot \overrightarrow{e} = j_s \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^{\kappa}{}_{\mu} + \partial^\kappa F_{\mu}{}^{\nu} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} + \nabla \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\ \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\ \nabla \times \overrightarrow{e} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Nesse contexto, foi necessário definir um 5-vetor de correntes j^νque é escrito da seguinte forma $j^\nu = (c\rho, j_x, j_y, j_z, j_s) = (c\rho, \overrightarrow{j}, j_s)$.

[1] Prezado leitor, guarde bem esses números (3 equações não-homogêneas e 4 equações homogêneas) pois esta estrutura nos será útel no Capítulo 4.

Na próxima seção, faremos uma avaliação de quantos graus de liberdade físicos efetivamente constituem a formulação 5-dimensional da Eletrodinâmica de Maxwell.

2.3 Propagação dos Campos

Para avaliar a propagação no vácuo (sem fontes) teríamos, então, o seguinte conjunto de equações a considerar:

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \overrightarrow{E}) - \frac{\partial b}{\partial s} = 0, \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} + \nabla \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + \nabla \cdot \overrightarrow{e} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} + \nabla \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}, \\ \nabla \times \overrightarrow{e} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Passando essas equações para o espaço dos momenta ficaríamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{k} - k_s b = 0, \\ \frac{1}{c^2}\omega\overrightarrow{E} - \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{k} - k_s\overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{1}{c^2}(-\omega b) + \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{e} = 0, \\ \omega\overrightarrow{B} + \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}, \\ -\omega\overrightarrow{e} + \overrightarrow{k}b + k_s\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{e} \times \overrightarrow{k} + k_s\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{k} = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $|\overrightarrow{\kappa}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + k_s^2}$ ou $\overrightarrow{\kappa}^2 = \overrightarrow{k}^2 + k_s^2$.

Pode-se mostrar que tal conjunto de expressões, na verdade, descrevem um sistema físico com 3 graus de liberdade físicos por meio do vetor $\overrightarrow{E}$. Em outras palavras, basta termos a informação dada pelo vetor $\overrightarrow{E}$ que poderiamos obter os outros campos, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{e}$ ou b.

2.4 Tensor de Energia-momentum

Seja a equação de Maxwell com fontes, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Podemos saturar o índice livre multiplicando por $F_{\nu\kappa}$ de ambos os lados e após alguns desenvolvimentos obtemos a seguinte expressão:

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\kappa = j^\nu F_{\nu\kappa}. \tag{2.16}$$

onde $\Theta^\mu{}_\kappa = F^{\mu\alpha}F_{\alpha\kappa} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\kappa F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

Esta equação expressa de forma condensada as Leis de Conservação aos quais os campos da teoria estão sujeitos. Mas antes de verificarmos tais Leis de Consevação de uma forma mais clara, vamos explicitar os componentes do tensor $\Theta^\mu{}_\kappa$ considerando em cada caso sua interpretação física.

Partindo de $\Theta^\mu{}_\kappa = F^{\mu\alpha}F_{\alpha\kappa} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\kappa F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, e avaliando cada conjunto de componentes em separado, ou seja:

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_0 &= F^{0\nu}F_{\nu 0} + \tfrac{1}{4}\delta^0_0 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^0{}_0 &= \tfrac{1}{2}[(\tfrac{E^2}{c^2}) + B^2 + (\tfrac{b^2}{c^2}) + e^2], \end{aligned} \tag{2.17}$$

que é interpretada como a "*Densidade de energia*" contida nos campos.

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = i$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_i &= F^{0\nu}F_{\nu i} + \tfrac{1}{4}\delta^0_i F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^0{}_i &= -\tfrac{1}{c}[(\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e}]_i, \end{aligned} \tag{2.18}$$

que é interpretada como a "*Densidade de Momentum*" ou "*Fluxo de energia*". O fluxo de energia relativistica através da superfície correspondente à direção de i é equivalente a densidade de momentum linear da i-ésima componente.

- quando $\mu = i$ e $\kappa = j$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^i{}_j &= F^{i\nu}F_{\nu j} + \tfrac{1}{4}\delta^i_j F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^i{}_j &= \tfrac{1}{c^2}E_iE_j + B_iB_j - e_ie_j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j(\tfrac{E^2}{c^2} + B^2 + \tfrac{b^2}{c^2} - e^2), \end{aligned} \tag{2.19}$$

que é interpretado como um "Tensor de tensões" dos campos e representa, em geral, o fluxo de momentum na direção de i através da superfície j . Em outras palavras, os termos de índices diferentes $(i \neq j)$ medem a tensão de "cisalhamento" no campo; já os termos com índices iguais $(i = j)$ medem a pressão em cada uma das direções. Note, na expressão geral do tensor, a presença do termo $-e_ie_j$ que pode agregar uma pressão negativa ao sistema. Isso será importante no capítulo 4.

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_4 &= F^{0\nu}F_{\nu 4} + \tfrac{1}{4}\delta^0_4 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^0{}_4 &= \tfrac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{e}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

que é interpretada como um novo tipo de "*Densidade de momentum-s* " dos campos na direção da dimensão extra.

- quando $\mu = i$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^i{}_4 &= F^{i\nu}F_{\nu 4} + \tfrac{1}{4}\delta^i_4 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \\ \Theta^i{}_4 &= -[\tfrac{1}{c^2}b\vec{E} + \vec{e}\times\vec{B}]_i, \end{aligned} \tag{2.21}$$

que é interpretada como um novo termo de tensão entre os campos mas agora considerando o fluxo de momentum na direção de i através da superfície 4, referente a nossa dimensão extra a qual batizamos de s.

- quando $\mu = 4$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^{4}{}_{4} &= F^{4\nu}F_{\nu 4} + \tfrac{1}{4}\delta^{4}_{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ \Theta^{4}{}_{4} &= -\tfrac{1}{2}[(\tfrac{E^2}{c^2}) - B^2 + e^2 - (\tfrac{b^2}{c^2})] \end{aligned} \tag{2.22}$$

que é interpretada como uma nova "*densidade de pressão*" na direção de nossa dimensão extra s.

2.4.1 Forma Matricial de $\Theta^{\mu}{}_{\kappa}$

Apresentamos a seguir, a título de ilustração, a expressão matricial do tensor $\Theta^{\mu}{}_{\kappa}$.

$$\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = \begin{bmatrix} \Theta^{0}{}_{0} & \Theta^{0}{}_{1} & \Theta^{0}{}_{2} & \Theta^{0}{}_{3} & \Theta^{0}{}_{4} \\ \Theta^{1}{}_{0} & \Theta^{1}{}_{1} & \Theta^{1}{}_{2} & \Theta^{1}{}_{3} & \Theta^{1}{}_{4} \\ \Theta^{2}{}_{0} & \Theta^{2}{}_{1} & \Theta^{2}{}_{2} & \Theta^{2}{}_{3} & \Theta^{2}{}_{4} \\ \Theta^{3}{}_{0} & \Theta^{3}{}_{1} & \Theta^{3}{}_{2} & \Theta^{3}{}_{3} & \Theta^{3}{}_{4} \\ \Theta^{4}{}_{0} & \Theta^{4}{}_{1} & \Theta^{4}{}_{2} & \Theta^{4}{}_{3} & \Theta^{4}{}_{4} \end{bmatrix}.$$

$$\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = \begin{bmatrix} u & -S_x & -S_y & -S_z & -\frac{\xi}{c} \\ -S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & -\chi_x \\ -S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} & -\chi_y \\ -S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} & -\chi_z \\ -\frac{\xi}{c} & -\chi_x & -\chi_y & -\chi_z & \Omega \end{bmatrix}.$$

Na próxima seção apresentaremos como as leis de conservação se revelam no cenário (1+4)D do Eletromagnetismo de Maxwell com importantes relações como os análogo 5-dimensional do Teorema de Poynting, da Força de Lorentz além de expressões que não possuem nada semelhante na formulação 4-dimensional.

2.5 Leis de Conservação.

O tensor de energia-momentum, como vimos no ínicio da seção anterior permite escrever as leis de conservação do eletromagnetismo de Maxwell de uma forma bastante compacta como na eq.(2.16).

2.5.1 "*Teorema de Poynting*"

O teorema de Poynting é uma afirmação sobre a conservação de energia para o campo eletromagnético de Maxwell. Ele relaciona a taxa de variação temporal da densidade de energia ao fluxo de energia e à razão na qual os campos realizam trabalho. No nosso estudo do Eletromagnetismo 5-D esse teorema é sumarizado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial s}\xi = -\vec{j} \cdot \vec{E} + j_s b, \tag{2.23}$$

onde S é o "Vetor de Poynting" representando o fluxo de energia, $\overrightarrow{j}$ é a densidade de corrente e $\overrightarrow{E}$ é o campo elétrico, além de u que é a densidade de energia eletromagnética.

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}[(\tfrac{E^2}{c^2}) + B^2 + (\tfrac{b^2}{c^2}) + e^2], \\ \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e}, \\ \xi &= -\vec{E} \cdot \vec{e}. \end{aligned}$$

2.5.2 *"Força de Lorentz" e Conservação de Momento*

A "Força de Lorentz" é a força em uma carga pontual devido ao campo eletromagnético. Ela é extraída, em nosso mundo 5-dimensional, da seguinte lei de conservação:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma + \frac{\partial \overrightarrow{\chi}}{\partial s} = -\rho\overrightarrow{E} - \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{B} + j_s \overrightarrow{e}, \tag{2.24}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e}, && \text{"Vetor de Poynting"} \\
\sigma &= \Theta^{i}{}_{j}, && \text{"tensor de tensões"} \\
\vec{\chi} &= (\tfrac{1}{c^2} b\vec{E} + \vec{e} \times \vec{B}).
\end{aligned}
$$

Nesse nosso cenário, 5-D, surge uma terceira expressão que congrega a conservação de momentos escalares.

$$
-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} + \frac{\partial}{\partial s}\Omega = -\rho b + \vec{j} \cdot \vec{e} \tag{2.25}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\xi &= -\vec{E} \cdot \vec{e}, \\
\Omega &= -\tfrac{1}{2}[(\tfrac{E^2}{c^2}) - B^2 - (\tfrac{b^2}{c^2}) + e^2].
\end{aligned}
$$

2.6 Conclusões Preliminares

Neste capítulo, pudemos verificar que o conteúdo do campo de Maxwell está no vetor $\overrightarrow{E}$. Além disso, pudemos obter as expressões das Leis de Conservação que a teoria nos fornece.

No Capítulo 3, trabalharemos a Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em 5D, ou seja, faremos a formulação do Eletromagnetismo considerando que os potenciais sejam descritos por tensores de rank-2 $B^{\mu\nu}$ (ao invés do potencial de rank-1 A^{μ}) e poderemos contabilizar também 3 graus de liberdade físicos para a 2-forma de gauge.

Capítulo 3

A Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em (1+4)Dimensões

Nesse capítulo faremos a formulação do Eletromagnetismo considerando que os potenciais sejam agora descritos por tensores de rank-2 $B^{\mu\nu}$ ao invés do potencial de rank-1 A^{μ} que utilizamos no capítulo anterior.

Como motivação principal desse capítulo constata-se, em 5D, que o campo vetorial e o campo tensorial (de rank-2) de gauge descrevem ambos 3 graus de liberdade físicos. No capítulo anterior, através das equações de Maxwell em 5D, pudemos verificar que o conteúdo do campo de Maxwell está no vetor $\overrightarrow{E}$. Neste capítulo, trabalharemos a Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em 5D e poderemos contabilizar também 3 graus de liberdade físicos para a 2-forma de gauge.

A questão que se abre é se estes dois campos são, ou não, equivalentes do ponto-de-vista da descrição do fenômeno eletromagnético. Isto nos proporciona a possibilidade de uma discussão referente à melhor maneira de se descrever o Eletromagnetismo num universo 5-dimensional.

Descreveremos o campo tensorial de gauge em 5-D e concluiremos o capítulo mostrando-se que é possível estabelecer uma equivalência entre as descrições de Maxwell e Kalb-Ramond, no caso da radiação eletromagnética no vácuo. A coincidência de se ter o mesmo número de graus de liberdade físicos é apenas a ponte-de-partida que motiva o estudo pois, na verdade, o campo vetorial de gauge possui $(D-2)$ graus de liberdade físicos em D dimensões ao passo que um campo tensorial (de rank-2) de gauge apresenta $\frac{1}{2}(D-2)(D-3)$ de modo que esses números se igualam apenas quando $D=5$. Com isso em mente, procuramos evidenciar que existe um mapeamento de uma teoria para outra; é isto que nos comprometemos a fazer neste capítulo.

3.1 Eletromagnetismo de Kalb-Ramond.

O campo de Kalb-Ramond [16, 20, 21, 22] é um campo que se transforma como uma 2-forma i.e., um tensor antisimétrico de dois índices. Ele generaliza o potencial eletromagnético A^μ e tem dois índices ao invés de um. A diferença está relacionada ao fato de que o potencial eletromagnético é integrado sobre as linhas de mundo 1-dimensional de partículas para obter sua contribuição à ação enquanto o campo de Kalb-Ramond deve ser integrado sobre as superfícies de mundo 2-dimensional da corda. O eletromagnetismo de Kalb-Ramond pode ser derivado da ação:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^5x \tag{3.1}$$

onde d^5x é sobre o tempo e espaço considerando também a dimensão extra. Onde o Lagrangiano $\mathcal{L}$ é:

$$\mathcal{L} \;=\; \tfrac{1}{6} G^{\mu\nu\kappa} G_{\mu\nu\kappa} \tag{3.2}$$

Podemos inserir este Lagrangiano na equação de Euler-Lagrange para os campo e assim a equação de movimento sem fontes obtida é $\partial_\mu(\partial^\mu B^{\nu\kappa} + \partial^\nu B^{\kappa\mu} + \partial^\kappa B^{\mu\nu}) = 0.$

O termo entre parenteses $\partial^\mu B^{\nu\kappa} + \partial^\nu B^{\kappa\mu} + \partial^\kappa B^{\mu\nu}$ é definido como $G^{\mu\nu\kappa}$ *field strength* ou intensidade de campo e, portanto, a equação de movimento do campo sem fontes fica assim:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = 0 \tag{3.3}$$

Na próxima seção, obteremos as componentes do field strength $G^{\mu\nu\kappa}$ por meio de identificações e na sequência as utilizaremos para escrever as equações de movimento do campo de movimento de Kalb-Ramond em (1+4)D, um de nossos focos nesse capítulo .

3.1.1 Campo de Kalb-Ramond.

Conforme visto na seção anterior, o field strength $G^{\mu\nu\kappa}$ tem sua formulação em termos do tensor anti-simétrico de rank-2, $B^{\mu\nu}$ de modo que antes de obtermos as equações de movimento devemos conhecer as componentes de $B^{\mu\nu}$. Tal tensor tem como componentes não-nulas B^{0i},B^{ij}, e B^{i4}. A essas componentes tensoriais associamos[1] três vetores e um escalar:

- $B^{0i} \sim \overrightarrow{X}$,
- $B^{ij} = \varepsilon^{ijk} Y^k \sim \overrightarrow{Y}$,
- $B^{i4} \sim \overrightarrow{R}$,
- $B^{04} \sim S$.

Também podemos representar matricialmente o tensor:

$$B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^{01} & B^{02} & B^{03} & B^{04} \\ B^{10} & 0 & B^{12} & B^{13} & B^{14} \\ B^{20} & B^{21} & 0 & B^{23} & B^{24} \\ B^{30} & B^{31} & B^{32} & 0 & B^{34} \\ B^{40} & B^{41} & B^{42} & B^{43} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & X_x & X_y & X_z & S \\ -X_x & 0 & Y_z & -Y_y & R_x \\ -X_y & -Y_z & 0 & Y_x & R_y \\ -X_z & Y_y & -Y_x & 0 & R_z \\ -S & -R_x & -R_y & -R_z & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

3.1.2 Derivação das componentes do tensor $G^{\mu\nu\kappa}$.

Para derivar todas as componentes do tensor eletromagnético utilizamos a sua definição expressa em função dos potenciais $G^{\mu\nu\kappa} = \partial^\mu B^{\nu\kappa} + \partial^\nu B^{\kappa\mu} + \partial^\kappa B^{\mu\nu}$ e fazemos em seguida as devidas identificações[2], ou seja:

[1] $\sim$ significa "está associado a"
[2] $\longmapsto$ significa "é identificado com"

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{Y} - \nabla \times \overrightarrow{X} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{R} - \nabla S + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{X} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{Z}} \\
\nabla \times \overrightarrow{X} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{Y} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{W}} \\
\nabla \cdot \overrightarrow{Y} & \longmapsto & \mathcal{B}
\end{array} . \tag{3.5}
$$

Assim como se fez no Capítulo 2, aqui precisou-se definir quatro campos, sendo um escalar $\mathcal{B}$ e os outros três vetoriais $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\overrightarrow{\mathcal{Z}}$ e $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ no intuito de expressar o tensor $G^{\mu\nu\kappa}$ completamente. De uma maneira mais sucinta também podemos reescrever as componentes não nulas do tensor $G^{\mu\nu\kappa}$ da seguinte forma:

$$
\begin{array}{rcl}
G^{0ij} & = & \varepsilon^{ijk}\mathcal{E}^k \sim \overrightarrow{\mathcal{E}} \\
G^{0i4} & = & -\mathcal{Z}^i \sim -\overrightarrow{\mathcal{Z}} \\
G^{ij4} & = & \varepsilon^{ijk}\mathcal{W}^k \sim \overrightarrow{\mathcal{W}} \\
G^{ijk} & = & \varepsilon^{ijk}\mathcal{B} \sim \mathcal{B}
\end{array} \tag{3.6}
$$

Nesse contexto, é necessário definir um tensor de correntes $j^{\nu\kappa}$ que é exibido em sua forma matricial a seguir:

$$
\begin{pmatrix}
0 & l_x & l_y & l_z & \zeta \\
-l_x & 0 & q_z & -q_y & m_x \\
-l_y & -q_z & 0 & q_x & m_y \\
-l_x & q_y & -q_x & 0 & m_z \\
-\zeta & -m_x & -m_y & -m_z & 0
\end{pmatrix} \tag{3.7}
$$

3.1.3 Equações de movimento do campo

Se expressarmos as equações de movimento com fonte $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$, assim como as equações homogêneas $\partial_\mu \widetilde{G}^{\mu\nu} = 0$ em termos de suas componentes no cenário das (1+4)D, obteremos sete equações de Kalb-Ramond. Portanto, temos:

$$\partial_\mu \widetilde{G}^{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{B} = 0, \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \nabla \times \overrightarrow{Z} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} + \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{Z}} - \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{m}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}} + \nabla\mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{Q}, \\ \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \overrightarrow{l}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{Z}} = \zeta. \end{cases} \tag{3.9}$$

Note que, conforme era de se esperar, obtivemos sete equações, sendo que destas, agora quatro têm fontes, enquanto que as outras três são homogêneas. De modo que obtivemos exatamente a estrutura "inversa"[3] obtida no Capítulo 2, quatro equações não-homogêneas e três equações homogêneas.

Vale observar que a estrutura de correntes obtida no caso de Maxwell, discutido no capitulo 2, é menos rica que a do caso de Kalb-Ramond uma vez que ρ e $\overrightarrow{j}$ constituem um 4-vetor no mundo de $(1+3)D$, com j_s uma fonte escalar. Enquanto que, no caso de Kalb-Ramond, há uma corrente 4-vetorial $(j_s; \overrightarrow{m})$ e um tensor de rank-2 $(\overrightarrow{l}; \overrightarrow{Q})$.

Na próxima seção, faremos uma avaliação de quantos graus de liberdade físicos efetivamente constituem a formulação 5-dimensional da Eletrodinâmica de Kalb-Ramond.

3.2 Propagação dos Campos

Para avaliar a propagação no vácuo (sem fontes) teríamos, nesse caso, o seguinte conjunto de equações a considerar:

[3]Prezado leitor, guarde bem essa estrutura pois ela nos será útil no Capítulo 4.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{B} = 0, \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{Z}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} + \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} = 0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{Z}} + \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}} + \nabla\mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{0}, \\ \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \overrightarrow{0}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{Z}} = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Passando essas equações para o espaço dos momenta ficaríamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{W}} \cdot \overrightarrow{k} - k_s\mathcal{B} = 0, \\ \frac{1}{c^2}\omega\overrightarrow{\mathcal{W}} - \overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{k} - k_s\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{0}, \\ \frac{1}{c}(-\omega\mathcal{B}) + \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} = 0, \\ \omega\overrightarrow{\mathcal{Z}} + \overrightarrow{\mathcal{W}} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}, \\ -\frac{\omega}{c}\overrightarrow{\mathcal{E}} + \overrightarrow{k}\mathcal{B} + k_s\overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{k} + k_s\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{\mathcal{Z}} \cdot \overrightarrow{k} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Pode-se mostrar que tal conjunto de expressões, na verdade, descreve um sistema com 3 graus de liberdade físicos por meio do vetor $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Em outras palavras, basta termos apenas a informação contida no vetor $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ que poderíamos obter os outros campos, $\overrightarrow{\mathcal{Z}}$, $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ ou $\mathcal{B}$.

3.3 Tensor de Energia-momentum

Seja a equação de Kalb-Ramond com fontes, $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$. Podemos saturar o índice livre multiplicando por $G_{\mu\nu\lambda}$ de ambos os lados e após alguns desenvolvimentos obtemos a seguinte expressão:

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\kappa \quad = \quad j^{\mu\nu} G_{\mu\nu\lambda} \ , \tag{3.12}$$

onde $\Theta^\mu{}_\kappa = G^{\mu\nu\kappa} G_{\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{6}\delta^\mu_\lambda G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}$.

Esta equação expressa de forma condensada as Leis de Conservação às quais os campos da teoria estão sujeitos. Mas antes de verificarmos tais Leis de Consevação de uma forma mais clara, vamos explicitar os componentes do tensor $\Theta^\mu{}_\kappa$ considerando em cada caso sua interpretação física.

Partindo de $\Theta^\mu{}_\kappa = G^{\mu\nu\kappa} G_{\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{6}\delta^\mu_\lambda G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}$, e avaliando cada conjunto de componentes em separado:

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_0 &= G^{0\nu\kappa} G_{\nu\kappa 0} - \tfrac{1}{6}\delta^0_0 G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}, \\ \Theta^0{}_0 &= \mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

que é interpretada como a "*Densidade de energia*" contida nos campos pois, mede quanta energia há em cada ponto.

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = i$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_i &= G^{0\nu\kappa} G_{\nu\kappa i} - \tfrac{1}{6}\delta^0_i G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}, \\ \Theta^0{}_i &= 2[(\overrightarrow{\mathcal{W}} \times \overrightarrow{\mathcal{Z}}) + \mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}}], \end{aligned} \tag{3.14}$$

que é interpretada como a "*Densidade de Momentum*" ou "*Fluxo de energia*". O fluxo de energia relativistica através da superfície correspondente à direção-i é equivalente a densidade de momentum linear da i-ésima componente.

- quando $\mu = i$ e $\kappa = j$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^i{}_j &= G^{i\nu\kappa}G_{\nu\kappa j} - \tfrac{1}{6}\delta^i_j G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} \\ \Theta^i{}_j &= 2\mathcal{W}^i\mathcal{W}^j + 2\mathcal{Z}^i\mathcal{Z}^j - 2\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \delta^i_j[\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] \end{aligned} \tag{3.15}$$

que é interpretado como um "Tensor de tensões" dos campos e representa, em geral, o fluxo de momentum na direção-i através da superfície-j. Em outras palavras, os termos de índices diferentes $(i \neq j)$ medem a tensão de "cisalhamento" do campo; já os termos com índices iguais $(i = j)$ medem a pressão em cada uma das direções. Note, na expressão geral do tensor, a presença do termo $-\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j$ que pode agregar uma pressão negativa ao sistema. Isso será importante no capítulo 4.

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_4 &= G^{0\mu\kappa}G_{\mu\kappa 4} - \tfrac{1}{6}\delta^0_4 G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma}, \\ \Theta^0{}_4 &= 2\overrightarrow{\mathcal{W}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

que é interpretada como um novo tipo de "*Densidade de momentum-s* " dos campos, pois mede quão rápido o campo se move na direção da quinta coordenada, $x^4 \equiv s$.

- quando $\mu = i$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^i{}_4 &= G^{i\mu\kappa}G_{\mu\kappa 4} - \tfrac{1}{6}\delta^i_4 G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma}, \\ \Theta^i{}_4 &= -2(\mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

que é interpretada como um novo termo de tensão entre os campos mas agora considerando (o fluxo de momentum na direção-i através da superfície-4, referente a nossa dimensão extra, $x^4 \equiv s$.

- quando $\mu = 4$ e $\kappa = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^4{}_4 &= G^{4\mu\kappa}G_{\mu\kappa 4} - \tfrac{1}{6}\delta^4_4 G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma}, \\ \Theta^4{}_4 &= -(\mathcal{W}^2 - \mathcal{Z}^2 - \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2), \end{aligned} \tag{3.18}$$

que é interpretada como uma nova "*densidade de pressão*" na direção de nossa dimensão extra, $x^4 \equiv s$.

Na próxima seção, apresentaremos como as leis de conservação o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond em (1+4)D se revelam em nosso mundo com importantes relações como os análogo 5-dimensional do Teorema de Poynting, da Força de Lorentz além de expressões que não possuem nada semelhante na formulação 4-dimensional do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond.[4].

3.4 Leis de Conservação.

O tensor de energia-momentum, como vimos no ínicio da seção anterior, permite escrever as leis de conservação do eletromagnetismo de uma forma bastante compacta como na eq.(3.12) e desta expressão podemos extrair três relações que se seguem:

3.4.1 "*Teorema de Poynting*"

O teorema de Poynting é uma afirmação sobre a conservação de energia para o campo eletromagnético. Ele relaciona a taxa de variação temporal do densidade de energia ao fluxo de energia e à razão na qual os campos realizam trabalho. No nosso estudo do Eletromagnetismo 5-D de Kalb- Ramond esse teorema é sumarizado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial s}\xi = -\overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} - \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{\mathcal{Z}}, \tag{3.19}$$

onde S é o "Vetor de Poynting" representando o fluxo de energia, $\overrightarrow{m}$ é uma densidade de corrente e $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ e $\overrightarrow{\mathcal{Z}}$ são os campos que definimos anteriormente, além de u que é a "densidade de energia" eletromagnética. Onde esses são dados por:

$$\begin{aligned}
u &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2), \\
\vec{S} &= -[(\overrightarrow{\mathcal{W}} \times \overrightarrow{\mathcal{Z}}) + \mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}}], \\
\xi &= -\overrightarrow{\mathcal{W}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}, \\
Q^k &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}q^{ij}.
\end{aligned}$$

[4]ver Apêndice B

3.4.2 *"Força de Lorentz" e Conservação de Momento*

A "Força de Lorentz" é a força em uma carga pontual devido ao campo eletromagnético. Ela é extraída, em nosso mundo 5-dimensional, da seguinte lei de conservação:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma + \frac{\partial \overrightarrow{\chi}}{\partial s} = \overrightarrow{l} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} - \zeta \overrightarrow{Z} + \overrightarrow{Q}\mathcal{B} + \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{\mathcal{W}}, \tag{3.20}$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= -[(\overrightarrow{\mathcal{W}} \times \overrightarrow{\mathcal{Z}}) + \mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}}]^i && \text{"Vetor de Poynting"} \\
\sigma &= \mathcal{W}^i\mathcal{W}^j + \mathcal{Z}^i\mathcal{Z}^j - \mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j[\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] && \text{"Tensor de Tensões"} \\
\vec{\chi} &= (\mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}})
\end{aligned}$$

Nesse nosso cenário, 5-D, surge uma terceira expressão que congrega a conservação de momentos escalares.

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} + \frac{\partial}{\partial s}\Omega = -\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{\mathcal{Z}} - \overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{\mathcal{W}} \tag{3.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
\xi &= -\overrightarrow{\mathcal{W}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} \\
\vec{\chi} &= (\mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \overrightarrow{\mathcal{Z}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}) \\
\Omega &= -\tfrac{1}{2}[(\mathcal{W}^2 - \mathcal{Z}^2 - \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2)]
\end{aligned}$$

3.5 Comparação

Comparando as representações matriciais de $\widetilde{G}_{\mu\nu}$ e de $F_{\mu\nu}$, percebemos uma correspondência direta, sem mudanças de sinais, em qualquer um dos campos considerados ($\mathcal{B}$,$\overrightarrow{\mathcal{Z}}$,$\overrightarrow{\mathcal{E}}$,$\overrightarrow{\mathcal{W}}$) conforme pode se observar a seguir.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} & F_{04} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{40} & F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & -\frac{b}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y & e_x \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x & e_y \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 & e_z \\ \frac{b}{c} & -e_x & -e_y & -e_z & 0 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$\widetilde{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{G}_{01} & \widetilde{G}_{02} & \widetilde{G}_{03} & \widetilde{G}_{04} \\ \widetilde{G}_{10} & 0 & \widetilde{G}_{12} & \widetilde{G}_{13} & \widetilde{G}_{14} \\ \widetilde{G}_{20} & \widetilde{G}_{21} & 0 & \widetilde{G}_{23} & \widetilde{G}_{24} \\ \widetilde{G}_{30} & \widetilde{G}_{31} & \widetilde{G}_{32} & 0 & \widetilde{G}_{34} \\ \widetilde{G}_{40} & \widetilde{G}_{41} & \widetilde{G}_{42} & \widetilde{G}_{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{W}_x & \mathcal{W}_y & \mathcal{W}_z & -\mathcal{B} \\ -\mathcal{W}_x & 0 & -\mathcal{Z}_z & \mathcal{Z}_y & \mathcal{E}_x \\ -\mathcal{W}_y & \mathcal{Z}_z & 0 & -\mathcal{Z}_x & \mathcal{E}_y \\ -\mathcal{W}_x & -\mathcal{Z}_y & \mathcal{Z}_x & 0 & \mathcal{E}_z \\ \mathcal{B} & -\mathcal{E}_x & -\mathcal{E}_y & -\mathcal{E}_z & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Em suma, se verifica um "*matching*" entre os campos das duas teorias. Esquematicamente, queremos dizer o seguinte:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{W}} &\leftrightarrow \frac{\vec{E}}{c} \\ \mathcal{B} &\leftrightarrow \frac{b}{c} \\ \overrightarrow{\mathcal{Z}} &\leftrightarrow \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{\mathcal{E}} &\leftrightarrow \overrightarrow{e} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Também, quando se faz as correspondências entre as equações das duas teorias percebe-se o mesmo padrão. Na primeira tabela, podemos verificar uma correlação exata entre o lado esquerdo das equações de *Kalb-Ramond com fontes* com o lado esquerdo das equações de *Maxwell homogêneas*.

Tabela 3.1:

$$\begin{array}{rcl}
\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa} & \leftrightarrow & \partial_\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^\kappa{}_\mu + \partial^\kappa F_\mu{}^\nu = 0 \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{Z}} - \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{m} & \leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} + \nabla \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}} + \nabla\mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{Q} & \leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\
\nabla \times \overrightarrow{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \overrightarrow{l} & \leftrightarrow & \nabla \times \overrightarrow{e} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \\
\nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{Z}} = \zeta & \leftrightarrow & \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0
\end{array}$$

Na segunda tabela, também verifica-se a mesma correspondência entre o lado esquerdo das equações de *Kalb-Ramond homogêneas* com o lado esquerdo das equações de *Maxwell com fontes*. A razão para essa estrutura vem da equivalência entre o tensor eletromagnético de uma teoria e o dual do tensor eletromagnético da outra teoria, ou seja: $F^{\mu\nu} \sim \widetilde{G}^{\mu\nu}$; $\widetilde{F}^{\mu\nu\kappa} \sim G^{\mu\nu\kappa}$.

Tabela 3.2:

$$\begin{array}{rcl}
\partial_\mu \widetilde{G}^{\mu\nu} = 0 & \leftrightarrow & \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu \\
\nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{B} = 0 & \leftrightarrow & \frac{1}{c}[(\nabla \cdot \overrightarrow{E}) - \frac{\partial b}{\partial s}] = c\rho \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{Z}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{0} & \leftrightarrow & -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} + \nabla \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{e} = \overrightarrow{j} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} + \nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} = 0 & \leftrightarrow & \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + \nabla \cdot \overrightarrow{e} = j_s
\end{array}$$

3.6 Conclusões Preliminares

Neste capítulo, pudemos constatar que, no cenário 5-dimensional, a estrutura de correntes que a formulação do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond nos traz é mais rica que a do Eletromagnetismo de Maxwell.

Também chamamos atenção para uma estrutura de correspondência observadas entre as equações de movimento que as duas teorias nos trazem e que podemos sumarizar da seguinte maneira:

- Kalb-Ramond com fontes $\sim$Maxwell homogêneas;
- Kalb-Ramond homogêneas $\sim$Maxwell com fontes;
- Razão: $F^{\mu\nu} \sim \widetilde{G}^{\mu\nu}$; $\widetilde{F}^{\mu\nu\kappa} \sim G^{\mu\nu\kappa}$.

O próximo capítulo tem como objetivo comparar adotando um esquema de redução dimensional as teorias eletromagnéticas que aparecem em (1+3)D a partir dos modelos apresentados nos capítulos 2 e 3.

Capítulo 4

As Eletrodinâmicas Geradas em (1+3)Dimensões.

O objetivo desse capítulo é comparar as teorias eletromagnéticas que aparecem em (1+3)D a partir dos modelos descritos previamente. Numa primeira abordagem, adotaremos um esquema de redução dimensional conhecido como redução "à la Scherk-Schwarz" [23, 24] onde se considera que todos os potenciais e campos não dependem da quinta coordenada, $x^4 \equiv s$. A idéia é pensar que, no mundo 5-dimensional, a simetria de gauge determina os campos e, num esquema mais simplista, estes campos não dependem da coordenada ortogonal à hipersuperfície 4-dimensional, que é o nosso mundo de (1+3)D. Entretanto, os campos extra à formulação de Maxwell deixam a sua marca nas 4 dimensões e chegamos a formulações estendidas do Eletromagnetismo, buscando identificar a origem do fenômeno eletromagnético em 4D a partir da premissa de que vivemos numa fronteira de um mundo 5-dimensional.

4.1 Redução dimensional

Nessa seção adotaremos um esquema de redução dimensional a fim de comparar a projeção das teorias eletromagnéticas (1+4)D que aparecem em (1+3)D. O procedimento que utilizaremos é conhecido como redução "à la Scherk-Schwarz" e considera que todos os potenciais e campos não dependem da coordenada $x^4 \equiv s$. Em outras palavras, consideramos que $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ em cada uma das equações sendo φ um campo de qualquer ordem.

Nesse esquema de redução dimensional os potenciais assumem a seguinte forma na teoria de Maxwell:

$$\begin{array}{ccc} -(\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} + \nabla\Phi) & \longmapsto & \overrightarrow{E}, \\ \nabla \times \overrightarrow{A} & \longmapsto & \overrightarrow{B}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi & \longmapsto & b, \\ -\nabla\psi & \longmapsto & \overrightarrow{e}. \end{array} \tag{4.1}$$

Ao passo que na teoria de Kalb-Ramond, os potenciais assumem a seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{Y} - \nabla \times \overrightarrow{X} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{E}}, \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{R} - \nabla S & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{Z}}, \\ \nabla \times \overrightarrow{X} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{W}}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{Y} & \longmapsto & \mathcal{B}. \end{array} \tag{4.2}$$

4.1.1 Aplicação da Redução dimensional nas duas teorias.

O sistema de equações que se segue disposto mais a esquerda corresponde ao conjunto de equações de movimento do campo obtido na teoria de Maxwell em (1+4)D e discutido no Capítulo 2 desse texto. Do lado direito, separamos esse conjunto de equações em dois setores após passarem pelo procedimento de redução dimensional que descrevemos no início desta seção.

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \overrightarrow{E}) - \frac{\partial b}{\partial s} = c^2\rho \\ \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} + \nabla \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} + \nabla \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{e} = \overrightarrow{j} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + \nabla \cdot \overrightarrow{e} = j_s \\ \nabla \times \overrightarrow{e} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \\ \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{e} + \nabla b + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Maxwell\_}\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = c^2\rho \\ \nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ \nabla \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} \end{cases} \\ \text{Extra-Maxwell\_}\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{e} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}b + j_s \\ \nabla \times \overrightarrow{e} = \overrightarrow{0} \\ \nabla b = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{e} \end{cases} \end{array}$$

O sistema de equações que se segue disposto a esquerda corresponde ao conjunto de equações de movimento obtido na teoria de Kalb-Ramond em (1+4)D e discutido no Capítulo 3 desse texto. Do lado direito, separamos esse conjunto de equações em dois setores após passarem pelo procedimento de redução dimensional.

$$\begin{cases} \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{W}} - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{B} = 0 \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{Z}} - \nabla\times\overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{m} \\ \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \zeta \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{W}} + \nabla\times\overrightarrow{\mathcal{Z}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{0} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} + \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{E}} = 0 \\ \nabla\times\overrightarrow{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \overrightarrow{k} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}} + \nabla\mathcal{B} + \frac{\partial}{\partial s}\overrightarrow{\mathcal{W}} = \overrightarrow{q} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Extra-K.R.\_}\begin{cases} \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \zeta \\ \nabla\times\overrightarrow{\mathcal{Z}} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{W}} \\ \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{W}} = 0 \\ \nabla\times\overrightarrow{\mathcal{W}} = -\overrightarrow{m} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{Z}} \end{cases} \\ \text{K.R.\_}\begin{cases} \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} \\ \nabla\times\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{k} \\ \nabla\mathcal{B} = \overrightarrow{q} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} \end{cases} \end{array}$$

Como se pode perceber o setor extra da teoria de Kalb-Ramond após passar pelo procedimento de redução dimensional é idêntico ao setor principal da teoria de Maxwell considerando as devidas renomeações ($\overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{\mathcal{Z}}$;$-\overrightarrow{B} \mapsto \overrightarrow{\mathcal{W}}$;$c^2\rho \mapsto \zeta$;$\overrightarrow{m} \mapsto \overrightarrow{j}$).

Similarmente, o setor extra da teoria de Maxwell, após também passar pela redução dimensional, se apresenta idêntico ao setor principal da teoria de Kalb-Ramond considerando que, neste caso, aplica-se um procedimento de truncamento das correntes das duas teorias, ou seja, considera-se simultaneamente $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ e $j_s = 0$. Deve-se observar que tal procedimento não viola a simetria de Lorentz pois, $j^{\nu\kappa}$ é invariante de Lorentz o que significa dizer, em outras palavras, que mesmo sob o ponto-de-vista de observadores diferentes as correntes serão nulas. Como consequência, temos um setor desacoplado da matéria, ou seja, puramente energético.

Pela comparação entre os resultados obtidos, observa-se que a redução do Eletromagnetismo de Maxwell de 5D para 4D reproduz o eletromagnetismo maxweliano ordinário mais um escalar (um Klein-Gordon genuíno) e não gera o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond em (1+3)D (vide Apêndice B). É importante observar que o escalar que aparece em 4D vindo de Maxwell em 5D é um Klein-Gordon genuíno, diferente do Kalb-Ramond em 4D. O Kalb-Ramond em 4D é também um escalar, mas não do tipo Klein-Gordon.

Por outro lado, percebe-se que o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D como uma estrutura mais rica de correntes dadas pelos vetores $\overrightarrow{l}$ e $\overrightarrow{q}$. Soma-se a isso o fato dele englobar seu concorrente direto, o caso do Eletromagnetismo de Maxwell reduzido de 5D para 4D. Sendo, portanto, o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D uma descrição mais geral e que consideramos por esse motivo mais interessante.

4.2 Redução dimensional no tensor de energia-momento.

Se aplicarmos o procedimento de redução dimensional no tensor de energia-momento $\Theta^{\mu}{}_{\kappa}$ das duas teorias obteriamos com o seguinte :

$$\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = \begin{bmatrix} \Theta^0{}_0 & \Theta^0{}_1 & \Theta^0{}_2 & \Theta^0{}_3 & \Theta^0{}_4 \\ \Theta^1{}_0 & \Theta^1{}_1 & \Theta^1{}_2 & \Theta^1{}_3 & \Theta^1{}_4 \\ \Theta^2{}_0 & \Theta^2{}_1 & \Theta^2{}_2 & \Theta^2{}_3 & \Theta^2{}_4 \\ \Theta^3{}_0 & \Theta^3{}_1 & \Theta^3{}_2 & \Theta^3{}_3 & \Theta^3{}_4 \\ \Theta^4{}_0 & \Theta^4{}_1 & \Theta^4{}_2 & \Theta^4{}_3 & \Theta^4{}_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \Theta^0{}_0 & \Theta^0{}_1 & \Theta^0{}_2 & \Theta^0{}_3 \\ \Theta^1{}_0 & \Theta^1{}_1 & \Theta^1{}_2 & \Theta^1{}_3 \\ \Theta^2{}_0 & \Theta^2{}_1 & \Theta^2{}_2 & \Theta^2{}_3 \\ \Theta^3{}_0 & \Theta^3{}_1 & \Theta^3{}_2 & \Theta^3{}_3 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Onde, para o caso do Eletromagnetismo de Maxwell:

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_0 &= \tfrac{1}{2}[(\tfrac{E^2}{c^2}) + B^2 + (\tfrac{b^2}{c^2}) + e^2] \\ \Theta^0{}_i &= -\tfrac{1}{c}[(\vec{E} \times \vec{B}) + b\vec{e}]_i \\ \Theta^i{}_j &= \tfrac{1}{c^2}E_iE_j + B_iB_j - e_ie_j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j(\tfrac{E^2}{c^2} + B^2 + \tfrac{b^2}{c^2} - e^2) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Enquanto que no caso do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} \Theta^0{}_0 & = & \mathcal{W}^2+\mathcal{Z}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{E}^2 \\ \Theta^0{}_i & = & 2[(\overrightarrow{W}\times\overrightarrow{Z})+\mathcal{B}\overrightarrow{E}] \\ \Theta^i{}_j & = & 2\mathcal{W}^i\mathcal{W}^j+2\mathcal{Z}^i\mathcal{Z}^j-2\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j-\delta^i_j(\mathcal{W}^2+\mathcal{Z}^2+\mathcal{B}^2-\mathcal{E}^2) \end{array} \tag{4.5}$$

Agora, aplicando procedimento de truncamento da corrente no 5-vetor corrente j^ν definido no capítulo 2 e nas Leis de Conservação obtidas nesse mesmo capítulo chegamos ao seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}u+\nabla\cdot\vec{S}=-\vec{j}\cdot\vec{E} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{S}}{\partial t}-\nabla\cdot\sigma=-\rho\overrightarrow{E}-\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{B} \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\nabla\cdot\vec{\chi}=-\rho b+\vec{j}\cdot\vec{e} \end{array} \tag{4.6}$$

$$\text{onde}\begin{cases} u \;=\; \frac{1}{2}[(\frac{E^2}{c^2})+B^2+(\frac{b^2}{c^2})+e^2] \\ \vec{S} \;=\; (\vec{E}\times\vec{B})+b\vec{e} \\ \xi \;=\; -\overrightarrow{E}\cdot\vec{e} \\ \sigma=\frac{1}{c^2}E_iE_j+B_iB_j-e_ie_j-\frac{1}{2}\delta^i_j(\frac{E^2}{c^2}+B^2+\frac{b^2}{c^2}-e^2) \\ \vec{\chi} \;=\; (\frac{1}{c^2}b\vec{E}+\vec{e}\times\vec{B}) \\ \Omega \;=\; -\frac{1}{2}[(\frac{E^2}{c^2})-B^2-(\frac{b^2}{c^2})+e^2] \end{cases}$$

Se aplicarmos o procedimento de truncamento de correntes no tensor de correntes $j^{\nu\kappa}$ obteriamos com o seguinte resultado:

$$j^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & l_x & l_y & l_z & \zeta \\ -l_x & 0 & q_z & -q_y & m_x \\ -l_y & -q_z & 0 & q_x & m_y \\ -l_x & q_y & -q_x & 0 & m_z \\ -\zeta & -m_x & -m_y & -m_z & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & l_x & l_y & l_z \\ -l_x & 0 & q_z & -q_y \\ -l_y & -q_z & 0 & q_x \\ -l_x & q_y & -q_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

E em seguida, aplicando a redução dimensional nas Leis de Conservação obtidas no Capítulo 3 obtemos o seguinte conjunto de expressões:

$$\begin{array}{c} \hline \frac{\partial}{\partial t}u + \nabla \cdot \vec{S} = -\overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma = \overrightarrow{l} \times \overrightarrow{E}^{j} + \overrightarrow{Q}\mathcal{B} \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\chi} = -\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{Z} - \overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{W} \\ \hline \end{array} \tag{4.8}$$

$$\text{onde} \begin{cases} u = \frac{1}{2}(\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2) \\ \vec{S} = -[(\overrightarrow{\mathcal{W}} \times \overrightarrow{\mathcal{Z}}) + \mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}}] \\ \xi = -\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ Q^k = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(q)^{ij} \\ \sigma = \mathcal{W}^i\mathcal{W}^j + \mathcal{Z}^i\mathcal{Z}^j - \mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \frac{1}{2}\delta^i_j[\mathcal{W}^2 + \mathcal{Z}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] \\ \vec{\chi} = (\mathcal{B}\overrightarrow{W} + \overrightarrow{Z} \times \overrightarrow{E}) \\ \Omega \ = \ -\frac{1}{2}[(\mathcal{W}^2 - \mathcal{Z}^2 - \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2)] \end{cases}$$

4.3 Conclusões preliminares

Sumarizamos as conclusões desse capítulo pelos seguintes ítens:

- setor extra da teoria de Kalb-Ramond é idêntico ao setor principal da teoria de Maxwell.

- o setor extra da teoria de Maxwell se apresenta idêntico ao setor principal da teoria de Kalb-Ramond considerando que, neste caso, aplica-se um procedimento de truncamento das correntes das duas teorias, ou seja, considera-se simultaneamente $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ e $j_s = 0$. Como consequência, temos um setor desacoplado da matéria, ou seja, puramente energético.

- Pela comparação entre os resultados obtidos, observa-se que a redução do Eletromagnetismo de Maxwell de 5D para 4D reproduz o eletromagnetismo maxweliano ordinário mais um escalar (um Klein-Gordon genuíno) e não gera o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond em (1+3)D.

- percebe-se que o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D fornece uma estrutura mais rica de correntes dadas pelos vetores $\overrightarrow{l}$ e $\overrightarrow{q}$. Soma-se a isso o fato dele englobar seu concorrente direto, o caso do Eletromagnetismo de Maxwell reduzido de 5D para 4D.

- Constatamos que o Eletromagnetismo de Kalb-Ramond reduzido de 5D para 4D é uma descrição mais geral.

Capítulo 5

Considerações Finais e Futuros encaminhamentos

A Cosmologia de branas afirma que o universo 4-dimensional (visível) está restrito a uma brana dentro de um espaço de mais alta dimensão. Em outras palavras, vivemos em 4D, na periferia de um mundo 5D. A nossa argumentação, nesse trabalho, é que o fenômeno eletromagnético em 4D seja o reflexo de alguma física mais fundamental em 5D. Identificamos, então, que o objeto fundamental em 5D é a 2-forma de gauge e esta se manifesta, em nosso mundo 4-dimensional, na teoria eletromagnética usual de Maxwell, como um setor extra, determinado pelos campos $\overrightarrow{E}$ e $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2) \\ \vec{S} &= -\mathcal{B}\overrightarrow{E} \\ \sigma &= -\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j[\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Propomos um cenário em que o Eletromagnetismo de Maxwell seja acompanhado, como consequência das 5 dimensões, de um setor extra, desacoplado da matéria, puramente energético .

Deixamos, como passo imediatamente sucessivo a esta tese, a averiguação da hipótese que levantamos, ou seja, de que o setor extra da teoria de Maxwell em 4D possa descrever alguma parcela daquilo que são os cerca de 74% de energia escura de nosso Universo. Propomos o seguinte encaminhamento:

A partir do tensor de energia-momento do setor extra com $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ e $\mathcal{B}$ (5.1) estudar a sua contribuição às equações de Einstein e verificar se este setor extra pode conduzir a um modelo cosmológico com expansão acelerada. Há uma expectativa positiva em relação a este resultado. Comparando-se a pressão associada ao campo de Maxwell usual, $(\overrightarrow{E},\overrightarrow{B})$, com a pressão obtida do tensor de energia-momento do setor extra, $(\overrightarrow{\mathcal{E}},\mathcal{B})$, vê-se que, neste segundo caso, pode-se ter pressão negativa, o que nos encoraja a ir à frente, esperando se obter uma expansão acelerada.

Apêndice A

Produtos de Épsilons de Levi-Civita de rank-5

Para calcular essas estruturas algébricas, partiremos da seguinte expressão:

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\omega\xi} = \begin{vmatrix} \delta^{\mu}_{\alpha} & \delta^{\mu}_{\beta} & \delta^{\mu}_{\gamma} & \delta^{\mu}_{\omega} & \delta^{\mu}_{\xi} \\ \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi} \end{vmatrix}$$

A seguir apresentamos cada um dos casos de contração de índices do produto de épsilons de Levi-Civita de rank-5 considerando, desde o primeiro caso em que nenhum índice é contraído até o caso em que os cinco índices estão contraídos simultâneamente.

Sem índices contraídos:

Pelo método do desenvolvimento em Menores [1]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\omega\xi} \;=\;& (-1)^{1+1}\delta^{\mu}_{\alpha}\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\ \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\ \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\delta^{\mu}_{\beta}\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi} \end{vmatrix} + \\
+\;& (-1)^{1+3}\delta^{\mu}_{\gamma}\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\delta^{\mu}_{\omega}\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\xi} \end{vmatrix} + \\
+\;& (-1)^{1+5}\delta^{\mu}_{\xi}\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Onde, cada um desses determinantes 4x4 são calculados separadamente abaixo.

[1] escolhemos a linha 1 como a linha de referência

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
\delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\
\delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\
\delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\
\delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi}
\end{vmatrix}
&= \delta^{\nu}_{\beta}[\delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\gamma})]+ \\
&- \delta^{\nu}_{\gamma}[\delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\beta})]+ \\
&+ \delta^{\nu}_{\omega}[\delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta})]+ \\
&- \delta^{\nu}_{\xi}[\delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta})].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
\delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\
\delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\
\delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\
\delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi}
\end{vmatrix}
&= \delta^{\nu}_{\alpha}[\delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\gamma})]+ \\
&- \delta^{\nu}_{\gamma}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\
&+ \delta^{\nu}_{\omega}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\
&- \delta^{\nu}_{\xi}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha})].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
\delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\omega} & \delta^{\nu}_{\xi} \\
\delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\omega} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\
\delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\omega} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\
\delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\omega} & \delta^{\rho}_{\xi}
\end{vmatrix}
&= \delta^{\nu}_{\alpha}[\delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\beta})]+ \\
&- \delta^{\nu}_{\beta}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\
&+ \delta^{\nu}_{\omega}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\
&- \delta^{\nu}_{\xi}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha})].
\end{aligned}
$$

$$\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\xi} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\xi} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\xi} \end{vmatrix} \begin{aligned} = \; & \delta^{\nu}_{\alpha}[\delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta})]+ \\ - \; & \delta^{\nu}_{\beta}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\ + \; & \delta^{\nu}_{\gamma}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\xi} - \delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\xi}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\xi}) + \delta^{\kappa}_{\xi}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\ - \; & \delta^{\nu}_{\xi}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha})]. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\omega} \\ \delta^{\kappa}_{\alpha} & \delta^{\kappa}_{\beta} & \delta^{\kappa}_{\gamma} & \delta^{\kappa}_{\omega} \\ \delta^{\lambda}_{\alpha} & \delta^{\lambda}_{\beta} & \delta^{\lambda}_{\gamma} & \delta^{\lambda}_{\omega} \\ \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\omega} \end{vmatrix} \begin{aligned} = \; & \delta^{\nu}_{\alpha}[\delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta})]+ \\ - \; & \delta^{\nu}_{\beta}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\ + \; & \delta^{\nu}_{\gamma}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\omega} - \delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\omega}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\omega}) + \delta^{\kappa}_{\omega}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha})]+ \\ - \; & \delta^{\nu}_{\omega}[\delta^{\kappa}_{\alpha}(\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta}) + \delta^{\kappa}_{\beta}(\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma}) + \delta^{\kappa}_{\gamma}(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha})]. \end{aligned}$$

Com 1 índice contraído.

Lembrando que $\delta^{\rho}_{\rho} = 5$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\omega\rho} = \; & (-1)^{1+1}\delta^{\mu}_{\alpha}\{\delta^{\nu}_{\beta}(\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\omega} - \delta^{\kappa}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\gamma}) + \delta^{\nu}_{\gamma}(\delta^{\kappa}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\omega}) + \delta^{\nu}_{\omega}(\delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta})\}+ \\ + \; & (-1)^{1+2}\delta^{\mu}_{\beta}\{\delta^{\nu}_{\alpha}(\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\omega} - \delta^{\kappa}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\gamma}) + \delta^{\nu}_{\gamma}(\delta^{\kappa}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\alpha} - \delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\omega}) + \delta^{\nu}_{\omega}(\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\alpha})\}+ \\ + \; & (-1)^{1+3}\delta^{\mu}_{\gamma}\{\delta^{\nu}_{\alpha}(\delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\omega} - \delta^{\kappa}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\beta}) + \delta^{\nu}_{\beta}(\delta^{\kappa}_{\omega}\delta^{\lambda}_{\alpha} - \delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\omega}) + \delta^{\nu}_{\omega}(\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha})\}+ \\ + \; & (-1)^{1+4}\delta^{\mu}_{\omega}\{\delta^{\nu}_{\alpha}(\delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}) + \delta^{\nu}_{\beta}(\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\alpha} - \delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\gamma}) + \delta^{\nu}_{\gamma}(\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha})\}+ \\ + \; & (-1)^{1+5}\{\delta^{\nu}_{\alpha}(\delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}) + \delta^{\nu}_{\beta}(\delta^{\kappa}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\alpha} - \delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\gamma}) + \delta^{\nu}_{\gamma}(\delta^{\kappa}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} - \delta^{\kappa}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha})\}. \end{aligned}$$

Com 2 índices contraídos.

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda\rho} = 2[\delta^{\mu}_{\alpha}(\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\kappa}_{\gamma} - \delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\kappa}_{\beta}) + \delta^{\mu}_{\beta}(\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\kappa}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\kappa}_{\gamma}) + \delta^{\mu}_{\gamma}(\delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\kappa}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\kappa}_{\alpha})].$$

Com 3 índices contraídos.

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\lambda\rho} = 6(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}).$$

Com 4 índices contraídos.

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\nu\kappa\lambda\rho} = 24\delta^{\mu}_{\alpha}.$$

Com 5 índices contraídos.

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda\rho} = 120$$

Apêndice B

Campo de Kalb-Ramond em (1+3)D.

Por definição, o campo de Kalb-Ramond é descrito por um campo tensorial de rank-2 anti-simétrico, ou seja $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$. $B^{\mu\nu}$ é também conhecido na literatura por 2-forma de gauge. Sua estrutura é a seguinte:

$$B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^{01} & B^{02} & B^{03} \\ B^{10} & 0 & B^{12} & B^{13} \\ B^{20} & B^{21} & 0 & B^{23} \\ B^{30} & B^{31} & B^{32} & 0 \end{pmatrix}$$

As componentes não-nulas desse tensor são: B^{0i} e B^{ij}.

Pretendemos formular a Eletrodinâmica de Kalb-Ramond em 4D e já a apresentar em termos de estruturas tensoriais do mundo 4-dimensional. Para tanto, podemos efetuar a seguinte associação das componentes do tensor anti-simétrico de rank-2 com vetores.

- $B^{0i} \;=\; \overrightarrow{X}$
- $B^{ij} \;=\; \varepsilon^{ijk} Y^k \;\sim\; \overrightarrow{Y}$ [1]

[1] $\sim$ significa "está associado a"

Então, obtemos a seguinte estrutura:

$$B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & X_x & X_y & X_z \\ -X_x & 0 & Y_z & -Y_y \\ -X_y & -Y_z & 0 & Y_x \\ -X_z & Y_y & -Y_x & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $B^{\mu\nu} = \{\overrightarrow{X}; \overrightarrow{Y}\}$ reúne dois vetores em um único objeto.

As intensidades de campo estão reunidas no tensor de rank-3 $G^{\mu\nu\kappa}$dado por:

$$G^{\mu\nu\kappa} = \partial^{\mu} B^{\nu\kappa} + \partial^{\nu} B^{\kappa\mu} + \partial^{\kappa} B^{\mu\nu} \tag{B.1}$$

O tensor $G^{\mu\nu\kappa}$ faz o mesmo papel que $F^{\mu\nu}$ faz na eletrodinâmica de Maxwell. Vale ressaltar que $G^{\mu\nu\kappa}$ é totalmente anti-simétrico:

$$G^{\mu\nu\kappa} = G^{\nu\kappa\mu} = G^{\kappa\mu\nu} = -G^{\nu\mu\kappa} = -G^{\mu\kappa\nu} = G^{\kappa\nu\mu}$$

As componentes não-nulas deste tensor são do tipo G^{0ij}e G^{ijk}.

Assim, calculando a intensidade de campo para cada uma dessas componentes, temos:

Para derivar todas as componentes do field strength utilizamos a sua definição expressa em função dos potenciais $G^{\mu\nu\kappa} = \partial^{\mu} B^{\nu\kappa} + \partial^{\nu} B^{\kappa\mu} + \partial^{\kappa} B^{\mu\nu}$ e fazemos em seguida as devidas identificações[2], ou seja:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{Y} - \nabla \times \overrightarrow{X} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \nabla \cdot \overrightarrow{Y} & \longmapsto & \mathcal{B} \end{array} . \tag{B.2}$$

Mais explicitamente:

$$\begin{aligned} G^{0ij} &= \partial^0 B^{ij} + \partial^i B^{j0} + \partial^j B^{0i} \Rightarrow \\ \overrightarrow{\mathcal{E}} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{Y} - \nabla \times \overrightarrow{X} \end{aligned}$$

---

[2] $\longmapsto$ significa "é identificado com"

$$\begin{aligned} G^{ijk} &= \partial^i B^{jk} + \partial^j B^{ki} + \partial^k B^{ij} \Rightarrow \\ \mathcal{B} &= \nabla \cdot \overrightarrow{Y} \end{aligned}$$

onde utilizamos as seguintes identificações:

- $G^{0ij} \;=\; G_{0ij}$
- $G_{0ij} \;=\; \varepsilon_{ijk}\mathcal{E}_k \;\sim\; \overrightarrow{\mathcal{E}}_k$
- $G^{ijk} \;=\; -G_{ijk}$
- $G_{ijk} \;=\; \varepsilon_{ijk}\mathcal{B}$

B.1 As equações de campo

Partindo da equação $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$ de movimento com fontes, temos que:

- quando fazemos $\nu = 0$ e $\kappa = i$

$$\begin{aligned} \partial_\mu G^{\mu 0i} &= j^{0i} \Rightarrow \\ \nabla \times \overrightarrow{\mathcal{E}} &= \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

- quando fazemos $\nu = i$ e $\kappa = j$

$$\begin{aligned} \partial_\mu G^{\mu ij} &= j^{ij} \Rightarrow \\ \nabla \mathcal{B} &= \overrightarrow{Q} - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

onde fizemos as seguintes associações $\begin{array}{ccc} -j_{0i} & \sim & \overrightarrow{k} \\ -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} j_{ij} & \sim & \overrightarrow{Q} \end{array}$.

Agora, partindo da equação $\partial_\mu \widetilde{G}^\mu = 0$, devemos, porém, Iniciamos pelo cálculo do dual de $G^{\mu\nu\kappa}$ que é dado por:

$$\widetilde{G}_\mu \;=\; \tfrac{1}{6}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} G^{\alpha\beta\gamma}$$

Cálculo das componentes de $\widetilde{G}_\mu$ [3]

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_o &= \tfrac{1}{6}\varepsilon_{0ijk} G^{ijk} \\ &= -\mathcal{B} \end{aligned}$$

[3]associando o tensor de Levi-Civita do espaço de Minkowski com o do espaço euclidiano $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_i &= \tfrac{1}{6}\varepsilon_{i\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma}\\ &= -\overrightarrow{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

Resumindo:

- $\widetilde{G}_0 = \widetilde{G}^0 = -\mathcal{B}$
- $\widetilde{G}_i = -\overrightarrow{\mathcal{E}}_i$
- $\widetilde{G}^i = \overrightarrow{\mathcal{E}_i}$

Cálculo da equação de campo homogênea, $\partial_\mu \widetilde{G}^\mu = 0$.

$$\begin{aligned}\partial_\mu \widetilde{G}^\mu &= 0 \Rightarrow\\ \nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{E}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}\end{aligned}$$

Sumarizando, a Eletrodinâmica de Kalb-Ramond:

$$\nabla\times\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{k}$$
$$\nabla\mathcal{B} = \overrightarrow{Q} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}}$$
$$\nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}$$

A primeira equação $\nabla\times\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{k}$ substitui a Lei de Gauss da eletrostática para o caso de Kalb-Ramond. Já a segunda $\nabla\mathcal{B} = \overrightarrow{q} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{E}}$ faz o papel da equação de Ampère-Maxwell da eletrodinâmica. Enquanto a equação $\nabla\cdot\overrightarrow{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}$ é a análoga de Faraday-Lenz da eletrodinâmica.

B.2 Estudo da Propagação dos Campos

Equação de onda para o *field strength* $G^{\mu\nu\kappa}$.

Sendo que $G^{\mu\nu\kappa} = \partial^\mu B^{\nu\kappa} + \partial^\nu B^{\kappa\mu} + \partial^\kappa B^{\mu\nu}$e $B^{\mu\nu}$é o campo tipo_Kalb-Ramond.

Aplicando ∂_μ sobre a identidade de Bianchi, $\partial^\lambda G^{\mu\nu\kappa} + \partial^\nu G^{\kappa\lambda\mu} - \partial^\kappa G^{\lambda\mu\nu} - \partial^\mu G^{\nu\kappa\lambda} = 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\partial^\lambda G^{\mu\nu\kappa} + \partial^\nu G^{\kappa\lambda\mu} - \partial^\kappa G^{\lambda\mu\nu} - \partial^\mu G^{\nu\kappa\lambda} &= 0 \Rightarrow \\
\partial_\mu(\partial^\lambda G^{\mu\nu\kappa} + \partial^\nu G^{\kappa\lambda\mu} - \partial^\kappa G^{\lambda\mu\nu} - \partial^\mu G^{\nu\kappa\lambda}) &= 0 \Rightarrow \\
\partial^\lambda(\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa}) + \partial^\nu(\partial_\mu G^{\kappa\lambda\mu}) - \partial^\kappa(\partial_\mu G^{\lambda\mu\nu}) - \partial^\mu\partial_\mu G^{\nu\kappa\lambda} &= 0 \Rightarrow \\
\partial^\lambda(\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa}) + \partial^\nu(\partial_\mu G^{\mu\kappa\lambda}) - \partial^\kappa(-\partial_\mu G^{\mu\lambda\nu}) - \partial^\mu\partial_\mu G^{\nu\kappa\lambda} &= 0 \Rightarrow \\
-\partial^\mu\partial_\mu G^{\nu\kappa\lambda} &= 0 \Rightarrow \\
\Box G^{\nu\kappa\lambda} &= 0
\end{aligned}
$$

onde usamos a Equação de Campo $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$ no vácuo, ou seja, $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = 0$.

Portanto vemos que $G^{\nu\kappa\lambda}$ obedece uma equação de onda e como consequência, tanto $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ quanto $\mathcal{B}$ têm soluções de onda plana. Numa visão corpuscular da radiação, emerge a idéia do "darkon", quantum de energia do campo $B^{\mu\nu}$. Adotamos essa terminologia porque, vamos tentar modelar uma parcela de energia escura pelo campo de Kalb-Ramond.

Seja $\overrightarrow{\psi}$ um campo genérico que obedeça a equação de onda $\Box\overrightarrow{\psi} = 0$ onde o operador d'Alembertiano é $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Portanto, passando para o espaço dos momenta encontramos a relação de dispersão.

$\Box\overrightarrow{\psi} = 0 \Rightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = 0 \Rightarrow \omega = |\overrightarrow{k}|c \Rightarrow E = |\overrightarrow{p}|c$ (partícula de massa nula)

Logo, podemos escrever uma radiação monocromática (de mesma frequência ω).

Temos portanto as soluções de onda plana para um campo vetorial $\overrightarrow{\psi} = \overrightarrow{\psi_0}e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}-\omega t)}$ ou campo escalar $\phi = \phi_0 e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}-\omega t)}$,

onde $\omega = |k|c$ e $|\overrightarrow{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Antes de considerarmos a propagação para nossos campos $\overrightarrow{E}$ e B temos que calcular as seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\psi} &= -i\omega\overrightarrow{\psi} \\
\nabla\cdot\overrightarrow{\psi} &= i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\psi} \\
\nabla\cdot\overrightarrow{\psi} &= i\overrightarrow{\psi}\cdot\overrightarrow{k} \\
\nabla\times\overrightarrow{\psi} &= -i\overrightarrow{\psi}\times\overrightarrow{k} \\
\nabla\phi &= i\overrightarrow{k}\phi
\end{aligned}
$$

Onde usamos as seguintes identidades vetoriais:

$$\nabla \times (\varphi \overrightarrow{A}) = \varphi \nabla \times \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \times \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot (\varphi \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{A} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \overrightarrow{A}$$

Estudo da propagação da radiação livre.

Passando essas equações para o espaço dos momenta ficaríamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{c}(-\omega \mathcal{B}) + \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} = 0 \\ -\frac{\omega}{c}\overrightarrow{\mathcal{E}} + \overrightarrow{k}\mathcal{B} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Pode-se mostrar que tal conjunto de expressões, na verdade, descreve um sistema com 1 grau de liberdade físicos por meio do vetor $\mathcal{B}$. Em outras palavras, basta termos apenas a informação contida no vetor $\mathcal{B}$ que poderiamos obter os outros campos, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Trata-se portanto de uma radiação escalar.

B.3 Tensor de Energia-momentum

Seja a equação de Kalb-Ramond com fontes, $\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}$. Podemos saturar o índice livre multiplicando por $G_{\mu\nu\lambda}$ de ambos os lados e após alguns desenvolvimentos obtemos a seguinte expressão:

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\kappa = j^{\mu\nu} G_{\mu\nu\lambda}$$

onde $\Theta^\mu{}_\kappa = G^{\mu\nu\kappa} G_{\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{6}\delta^\mu_\lambda G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}$.

Esta equação expressa de forma condensada as Leis de Conservação às quais os campos da teoria estão sujeitos. Mas antes de verificarmos tais Leis de Consevação de uma forma mais clara, vamos explicitar os componentes do tensor $\Theta^{\mu}{}_{\kappa}$ considerando em cada caso sua interpretação física.

Partindo de $\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = G^{\mu\nu\kappa}G_{\nu\kappa\lambda} - \frac{1}{6}\delta^{\mu}_{\lambda}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma}$, e avaliando cada conjunto de componentes em separado:

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^{0}{}_{0} &= G^{0\nu\kappa}G_{\nu\kappa 0} - \tfrac{1}{6}\delta^{0}_{0}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} \\ \Theta^{0}{}_{0} &= \mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2 \end{aligned} \tag{B.3}$$

que é interpretada como a "*Densidade de energia*" contida nos campos pois, mede quanta energia há em cada ponto.

- quando $\mu = 0$ e $\kappa = i$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^{0}{}_{i} &= G^{0\nu\kappa}G_{\nu\kappa i} - \tfrac{1}{6}\delta^{0}_{i}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} \\ \Theta^{0}{}_{i} &= 2\mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{B.4}$$

que é interpretada como a "*Densidade de Momentum*" ou "*Fluxo de energia*" pois, mede quão rápido o campo se move i.e. seu momentum. O fluxo de energia relativistica através da superfície correspondente à direção-i é equivalente a densidade de momentum linear da i-ésima componente.

- quando $\mu = i$ e $\kappa = j$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta^{i}{}_{j} &= G^{i\nu\kappa}G_{\nu\kappa j} - \tfrac{1}{6}\delta^{i}_{j}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} \\ \Theta^{i}{}_{j} &= -2\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \delta^{i}_{j}[\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] \end{aligned} \tag{B.5}$$

que é interpretado como um "Tensor de tensões" dos campos e representa, em geral, o fluxo de momentum na direção-i através da superfície-j. Em outras palavras, os termos de índices diferentes $(i \neq j)$ medem a tensão de "cisalhamento" do campo; já os termos com índices iguais $(i = j)$ medem a pressão em cada uma das direções. Note, na expressão geral do tensor, a presença do termo $-\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j$ que pode agregar uma pressão negativa ao sistema.

B.3.1 Forma Matricial de $\Theta^{\mu}{}_{\kappa}$

$$\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = \begin{bmatrix} \Theta^{0}{}_{0} & \Theta^{0}{}_{1} & \Theta^{0}{}_{2} & \Theta^{0}{}_{3} \\ \Theta^{1}{}_{0} & \Theta^{1}{}_{1} & \Theta^{1}{}_{2} & \Theta^{1}{}_{3} \\ \Theta^{2}{}_{0} & \Theta^{2}{}_{1} & \Theta^{2}{}_{2} & \Theta^{2}{}_{3} \\ \Theta^{3}{}_{0} & \Theta^{3}{}_{1} & \Theta^{3}{}_{2} & \Theta^{3}{}_{3} \end{bmatrix}.$$

$$\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = \begin{bmatrix} u & -S_x & -S_y & -S_z \\ -S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ -S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Na próxima seção, apresentaremos como as leis de conservação do Eletromagnetismo de Kalb-Ramond.

B.4 Leis de Conservação.

O tensor de energia-momentum, como vimos no ínicio da seção anterior, permite escrever as leis de conservação do eletromagnetismo de uma forma bastante compacta.

$$\partial_{\mu}\Theta^{\mu}{}_{\kappa} = j^{\mu\nu}G_{\mu\nu\lambda}$$

Dessa expressão podemos extrair três relações que se seguem:

B.4.1 "*Teorema de Poynting*"

O teorema de Poynting é uma afirmação sobre a conservação de energia para o campo eletromagnético. Ele relaciona a taxa de variação temporal do densidade de energia ao fluxo de energia e à razão na qual os campos realizam trabalho. No nosso estudo do Eletromagnetismo 5-D de Kalb- Ramond esse teorema é sumarizado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nabla \cdot \vec{S} = -\overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

onde S é o "Vetor de Poynting" representando o fluxo de energia, j é a densidade de corrente e E é o campo elétrico, além de u que é a densidade de energia eletromagnetica. Onde,

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2) \\ \vec{S} &= -\mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}} \\ Q^k &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(q)^{ij} \end{aligned}$$

B.4.2 *"Força de Lorentz" e Conservação de Momento*

A "Força de Lorentz" é a força em uma carga pontual devido ao campo eletromagnético. Ela é extraída, em nosso mundo 5-dimensional, da seguinte lei de conservação:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma = (\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\mathcal{E}})^j + Q^j \mathcal{B}$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{S} &= -\mathcal{B}\overrightarrow{\mathcal{E}} && \text{"Vetor de Poynting"} \\ \sigma &= -\mathcal{E}^i\mathcal{E}^j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j[+\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2] && \text{"tensor de tensões"} \\ Q^j &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ikj}(q)^{ik} \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] Salam, Abdus and Strathdee, J. A., On Kaluza-Klein Theory, Annals Phys. (1982), pp. 316-352

[2] de Boer, Jan, String theory: An update, Nucl. Phys. Proc. Suppl. (2003), pp. 353-372

[3] Polchinski, Joseph, M theory: Uncertainty and unification (2002)

[4] Nilles, Hans Peter and Ramos-Sanchez, Saul and Ratz, Michael and Vaudrevange, Patrick K. S., From strings to the MSSM, Eur. Phys. J. (2009), pp. 249-267

[5] Durrer, Ruth, Braneworlds, AIP Conf. Proc. (2005), pp. 202-240

[6] Rubakov, V. A., Large and infinite extra dimensions: An introduction, Phys. Usp. (2001), pp. 871-893

[7] Langlois, David, Brane cosmology: An introduction, Prog. Theor. Phys. Suppl. (2003), pp. 181-212

[8] Randall, Lisa and Sundrum, Raman, A large mass hierarchy from a small extra dimension, Phys. Rev. Lett. (1999), pp. 3370-3373

[9] Randall, Lisa and Sundrum, Raman, An alternative to compactification, Phys. Rev. Lett. (1999), pp. 4690-4693

[10] Riess, Adam G. and others, Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, Astron. J. (1998), pp. 1009-1038

[11] Lukash, V. N. and Rubakov, V. A., Dark energy: myths and reality, Phys. Usp. (2008), pp. 283-289

[12] Sievers, J. L. and others, Cosmological Parameters from Cosmic Background Imager Observations and Comparisons with BOOMERANG, DASI, and MAXIMA, Astrophys. J. (2003), pp. 599-622

[13] Perlmutter, S. and others, Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, Astrophys. J. (1999), pp. 565-586

[14] Turner, Michael S. and Riess, Adam G., Do SNe Ia Provide Direct Evidence for Past Deceleration of the Universe?, Astrophys. J. (2002), pp. 18

[15] Riess, Adam G. and others, The Farthest Known Supernova: Support for an Accelerating Universe and a Glimpse of the Epoch of Deceleration, Astrophys. J. (2001), pp. 49-71

[16] Kalb, Michael and Ramond, P., Classical direct interstring action, Phys. Rev. D (1974), pp. 2273—2284

[17] Perelstein, Maxim and Spray, Andrew, Tensor Reggeons from Warped Space at the LHC (2009)

[18] Koivisto, Tomi S. and Nunes, Nelson J., Three-form cosmology (2009)

[19] Nunes, Tomi S. Koivisto Nelson J., Inflation and dark energy from three-forms (2009)

[20] Cremmer, E. and Scherk, Joel, Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models, Nucl. Phys. (1974), pp. 117-124

[21] Freedman, Daniel Z. and Townsend, P. K., Antisymmetric Tensor Gauge Theories and Nonlinear Sigma Models, Nucl. Phys. (1981), pp. 282

[22] Slavnov, A. A. and Frolov, S. A., QUANTIZATION OF INTERACTING ANTISYMMETRIC TENSOR FIELD

[23] Scherk, Joel and Schwarz, John H., Spontaneous Breaking of Supersymmetry Through Dimensional Reduction, Phys. Lett. (1979), pp. 60

[24] Gliozzi, F. and Scherk, Joel and Olive, David I., Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model, Nucl. Phys. (1977), pp. 253-290