

Condições de junção para duas soluções estáticas e esfericamente simétricas numa esfera S^3

Róbinson José Acosta Díaz
Orientador: Felipe Tovar Falciano

Disertação de Mestrado em física
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, 2014

Condições de junção de duas soluções estáticas e esfericamente simétricas numa esfera S^3

Róbinson José Acosta Díaz

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências Físicas.

Banca examinadora:

Dr. Felipe Tovar Falciano (Orientador)
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Dr. Martín Makler
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Dr. Eduardo Lima Rodrigues
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Suerte...

Agradecimentos

- agradeço ao Felipe Tovar Falciano, pela sua orientação, paciência e amabilidade dada durante esta fase de minha vida acadêmica,
- a minha família por todo o apoio oferecido de forma incondicional,
- aos meus amigos Arthur Cosntantino, Cristofher Zuñiga, Luciano Augusto, Felipe Tolentino, Cesar Diaz, Neileth Stand, Harold Camargo, Cássio Leite Viera por sua grande amizade,
- a todos meus amigos brasileiros, que embora não façam parte do mundo acadêmico, têm-se preocupado e mostrado de uma ou outra forma seu apoio.
- ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e à CAPES.

Resumo

Nesta dissertação, discutimos o procedimento de colagem para dois espaços-tempos cujas fontes, ambas idênticas, estão localizadas nos pólos opostos de uma 3-esfera. Inicialmente, consideramos as soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström, porém, de acordo com as condições de junção de Israel-Darmois, realizar a colagem destas geometrias nas regiões estáticas associadas não é possível sob a configuração assumida. Em geral, isto é válido para qualquer par de soluções estáticas e esfericamente simétricas das equações de Einstein. Dada esta situação, passamos a examinar o caso onde o espaço-tempo é dotado de uma constante cosmológica, especificamente, quando a geometria relativa a cada uma das fontes corresponde às soluções de Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter. Desta vez, a colagem de duas métricas é permitida, tanto num como no outro caso, mas através das regiões não-estáticas situadas além dos respectivos horizontes cosmológicos, dando origem a uma região em expansão com propriedades similares às da solução de Kantowski-Sachs, rodeada por regiões estáticas.

Palavras-chave: relatividade geral, condições de junção, soluções estáticas.

Abstract

In this dissertation, we study the junction conditions of two identical spacetimes with their sources located at the poles of the a 3-sphere. Initially, we consider the Schwarzschild and the Reissner-Nordström solutions. However, according to the Israel-Darmois junction conditions, the matching of these metrics across their statics regions is not possible. In general, this is true for any two statics and spherically symmetric solutions of Einstein's equations. Given this, we study the case in which the spacetime has a cosmological constant, namely, the case where the geometry due to each source is described by the Schwarzschild-de Sitter and the Reissner-Nordström-de Sitter solutions . This time, the matching become possible in both cases but on the non-statics regions located beyond to the respective cosmological horizons. Theses non-static solutions give rise to a expanding region similar to the Kantowski-Sachs sourrender by statics regions.

Keywords: general relativity, junction conditions, statics solutions.

Sumário

Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
2 Princípios da relatividade geral	4
2.1 Variedades diferenciais	4
2.2 Vetores e 1-formas	6
2.3 Tensores	7
2.4 Tensor métrico	10
2.5 Conexão	12
2.6 Curvatura	15
2.7 Equação de campo de Einstein	17
3 Soluções esfericamente simétricas	20
3.1 Espaço-tempo esfericamente simétrico	20
3.1.1 Soluções estacionárias	21
3.1.2 Soluções estáticas	22
3.2 Solução de Schwarzschild	22
3.2.1 Singularidades na solução de Schwarzschild	25
3.2.2 Coordenadas de Eddington-Finkelstein	27
3.2.3 Coordenadas de Kruskal-Szekeres	29
3.2.4 Diagramas conformes de Penrose-Carter	32
3.3 Espaço-tempo de Schwarzschild-de-Sitter	34
3.3.1 Singularidades na solução de Schwarzschild-de Sitter	35
3.3.2 Estutura global da solução de Schwarzschild-de Sitter: $\Lambda m^2 < 1/9$	37
3.4 Solução de Reissner-Nordström	43
3.4.1 Singularidades na solução de Reissner-Nordström	44
3.4.2 Solução de Reissner-Nordström com constante cosmológica	50
4 Hipersuperfícies	53
4.1 Definição	53

4.2	Vetor normal	54
4.3	Métrica induzida	55
4.4	Tensores tangentes à hipersuperfície	55
4.4.1	Derivada covariante intrínseca	56
4.4.2	Curvatura extrínseca	57
4.5	Relações de Gauss-Codazzi	58
4.6	Condições de junção	61
4.6.1	Superfícies de contorno	61
4.6.2	Superfícies singulares	63
5	Junção de dois espaço-tempos esfericamente simétricos	69
5.1	Colagem de duas soluções de Schwarzschild	70
5.1.1	Fronteira estática e esfericamente simétrica	70
5.1.2	Fronteira dinâmica e esfericamente simétrica	73
5.2	Colagem de soluções de Schwarzschild-de Sitter	75
5.2.1	Comparação com o modelo de queijo suíço	78
5.3	Colagem de soluções com carga: Métrica de Reissner-Nordström	81
5.4	Colagem de duas soluções Reissner-Nordström-de Sitter	84
5.5	Colagem de duas soluções estáticas quaisquer: $A(r)$ arbitrário	85
6	Considerações finais	89
	Referências Bibliográficas	91

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica do mapeamento de uma variedade em \mathbb{R}^N	5
3.1	Cones de luz da solução de Schwarzschild nas coordenadas (t, r)	26
3.2	Cones de luz da solução de Schwarzschild nas coordenadas avançadas de Edidington-Finkelstein. A coordenada \hat{t} , eixo vertical, é definida como $\hat{t} = r - v$	28
3.3	Cones de luz da solução de Scharzschild nas coordenadas retardadas de Eddindton-Finkelstein. A coordenada \hat{t} , eixo vertical, é definida como $\hat{t} = r + u$	29
3.4	Diagrama de Kruskal-Szekeres.	31
3.5	Diagrama de Penrose-Carter da solução de Scharzschild.	33
3.6	Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $0 < r < r_2$ no espaço-tempo de Schawrzschild-de Sitter.	40
3.7	Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $r_1 < r < \infty$ no espaço-tempo de Schawrzschild-de Sitter.	42
3.8	Diagrama Penrose-Carter da solução de Schawrzschild-de Sitter.	43
3.9	Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $0 < r < r_2$ no espaço-tempo de Reissner-Nordström.	47
3.10	Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $r_1 < r < \infty$ no espaço-tempo de Reissner-Nordström.	48
3.11	Diagrama de Penrose-Carter da solução de Reissner-Nordström.	49
3.12	Diagrama de Penrose-Carter da solução de Reissner-Nordström-de Sitter.	52
5.1	Diagrama de Penrose-Carter para um único buraco negro na solução de Schwarzschild-de Sitter.	77
5.2	Diagrama de Penrose-Carter para a solução exterior de duas massas no espaço-tempo Schwarzschild-de itter.	77
5.3	Construção de um universo do tipo queijo suíço com dois buracos negros de Schwarzschild-de Sitter imersos no espaço-tempo de FL.	81
5.4	Diagrama de Penrose-Carter para um corpo de radio $r_2 < R_{mq} < r_3$ no espaço-tempo de Reissner- Nordström-de Sitter.	85

5.5	Diagrama de Penrose-Carter para dois corpos de radio $r_2 < R_{mq} < r_3$ no espaço-tempo de Reissner- Nordström-de Sitter.	86
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Uma característica importante do nosso universo é a existência de uma ampla variedade de estruturas as quais são distinguíveis a diferentes escalas. Observações mostram que, apesar do universo ter sido notavelmente homogêneo na época do último espalhamento [1], quando a radiação cósmica de fundo foi desacoplada da matéria, na atualidade a distribuição de massa exibe uma diversidade de estruturas complexas com consideráveis inhomogeneidades que vão pelo menos até os $100h^{-1} Mpc^1$, onde h é um parâmetro adimensional relacionado à constante de Hubble através de $H_0 = 100h \text{ Km sec}^{-1} Mpc^{-1}$. No presente, o universo é dominado em volume por grandes vazios, com galáxias agrupadas em lâminas e filamentos rodeando-os [2, 3]. Nas maiores escalas possíveis podemos ver, por exemplo, estruturas bastantes peculiares como a Grande Muralha de Sloan².

Apesar disso, as propriedades globais do universo são descritas com bastante precisão pelo modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para o qual a matéria está perfeitamente distribuída no espaço de forma homogênea e isotrópica. Complementado com teoria de perturbações, o modelo FLRW demonstra ser um modelo adequado pois goza de grande sucesso na hora de explicar corretamente muitas das observações realizadas até hoje [4]. Contudo, é necessário a introdução de conteúdos de matéria em formas nunca observadas, em torno de 20 – 25% de matéria escura não bariônica, e 70 – 75% de energia escura, com equação de estado $P = \omega\rho$, onde o valor de ω é bem próximo ao da constante cosmológica, $\omega = -1$. A vantagem desta abordagem é manifesta na simplificação dos detalhes, permitindo que estudos cosmológicos sejam implementados em qualquer escala sem termos que nos preocupar com a difícil tarefa de considerarmos as múltiplas estruturas que constituem o universo.

A contradição que surge, a saber, o universo ser extraordinariamente heterogêneo e ainda assim ser fenomenologicamente descrito por uma geometria espacialmente homogê-

¹ $1 Mpc = 3,0857 \times 10^{22} m$.

²A Grande Muralha Sloan (do inglês Sloan Great Wall) é a segunda maior estrutura conhecida no universo. Trata-se de um gigantesco conjunto de galáxias descoberto em 2003 cuja extensão mede 1,37 bilhão de anos-luz e está localizada a aproximadamente um bilhão de anos-luz da Terra.

nea, leva a considerar um problema fundamental na cosmologia moderna relativo ao papel que desempenham as diferentes estruturas em pequenas escalas sobre a dinâmica global do universo. Neste sentido, é possível que uma ou mais das componentes no setor escuro introduzidas para ter concordância com as observações sejam um sinal da falta de entendimento da forma como a gravidade age em grandes escalas. De modo que, enquanto alguns pesquisadores estudam modificações da gravidade, ver [5], outros consideram a possibilidade de haver aspectos da teoria de Einstein que não tem sido levados em conta para todas as escalas. Existe uma grande quantidade de questões em aberto referentes aos problemas das médias [6], "coarse-grained" [7], "fitting" [8] e noções estatísticas de energia e entropia gravitacional [9], as quais inevitavelmente tornam-se relevantes quando se trata com situações complexas que envolvem muitos corpos como as que as observações nos mostram. Estes são realmente problemas difíceis, porém, nas palavras de D. Wiltshire [10], "deveríamos tratar de entender o universo que observamos em lugar de inventar *modelos brinquedos* simplesmente por que são fáceis de resolver".

Em cosmologia heterogênea, diferentes abordagens são implementadas para analisar os diferentes problemas que surgem neste cenário, ver [10, 11, 12] para uma revisão geral dos mesmos. Um dos mais simples modelos corresponde ao modelo de universo discretizado ou em rede dentro do qual ganha grande destaque o modelo de Lindquist-Wheeler [13], que foi recentemente estudado em [14, 15]. Neste tipo de modelo, o espaço é dividido numa rede de maneira que no centro de cada cela é localizada um objeto massivo representando uma galáxia ou agrupamento de galáxias dependendo da massa a este atribuída. A dinâmica do universo é definida pela métrica que descreve o espaço de cada um dos elementos da rede, sendo esta a solução de Schwarzschild. Nenhum tipo de métrica cosmológica é assumida nas equações de Einstein de forma que elas não desempenham papel algum. Em lugar disso, através da colagem das fronteiras esféricamente simétricas das celas em expansão cujas geometrias são descritas pela solução de Schwarzschild para massas iguais, as equações de Friedmann são obtidas [14, 15]. A colagem é realizada de forma precisa unicamente nos pontos onde as esferas se interceptam radialmente e de forma aproximada onde estas se sobrepõem ou onde não se atingem.

Este modelo é análogo ao modelo de queijo suíço [16, 17], mas com a diferença que, no primeiro não existe um espaço-tempo contínuo pre existente dentro do qual sejam separadas e coladas regiões esféricas. A continuidade surge mediante uma descrição aproximada do espaço subjacente o qual é discretizado. Dado que a geometria emergente é aproximadamente contínua como no modelo FLRW, o modelo de Lindquist-Wheeler tem muito em comum com outros modelos como o LTB.

No seu modelo, Lindquist e Wheeler consideraram seções espaciais fechadas com topologia S^3 , divididas numa rede de celas esféricas regulares as quais permitem um número limitado de possibilidades. Considerando N vértices, se estabelece que cada um deste pode ser equidistante dos outros unicamente quando $N = 5, 8, 16, 120, 600$, o que corresponde a

maior homogeneidade na topologia de uma 3-esfera [18].

O objetivo desta dissertação é aplicar as ideias desenvolvidas em [19] onde é considerado o caso mais simples possível do modelo de Lindquist-Wheeler o qual não havia sido analisado anteriormente, isto é, $N = 2$. Em particular iremos generalizar o trabalho citado ao considerar estrelas carregadas, ou seja, iremos descrever as estrelas através da solução de Reissner-Nordström.

Deste modo, no segundo capítulo, iniciaremos apresentando uma breve introdução dos princípios de relatividade geral. No terceiro capítulo, determinaremos algumas soluções esfericamente simétricas e estáticas das equações de Einstein e analisaremos suas propriedades, dando maior ênfase na solução de Schwarzschild pois nos ajudará a entender mais facilmente as outras soluções. No quarto capítulo, introduziremos o conceito de hipersuperfícies e definiremos as diferentes quantidades geométricas que as descrevem, assim como as condições de junção para duas hipersuperfícies temporais ou espaciais. No quinto capítulo, mostraremos o procedimento de colagem de duas soluções esfericamente simétricas e estáticas numa 3-esfera, especificamente consideraremos o caso de Schwarzschild e Reissner-Nordström com e sem constante cosmológica. No último capítulo fecharemos com as considerações finais sobre o assunto abordado.

Capítulo 2

Princípios da relatividade geral

A teoria da relatividade geral foi proposta por Einstein com o objetivo de superar a incompatibilidade existente entre a teoria de gravitação Newtoniana e a teoria da relatividade restrita elaborada por ele alguns anos antes. Esta teoria é uma generalização da relatividade restrita a sistemas de referência não inerciais, onde a gravidade se entende como o efeito da curvatura do espaço-tempo sobre o movimento de partículas imersas num campo gravitacional. A relatividade geral é uma teoria conceitualmente simples superando assim a teoria Newtoniana, mas o formalismo matemático é bem mais complexo. Para conseguir um entendimento adequado do que representa a curvatura do espaço-tempo é necessário entender as ferramentas que nos oferece a geometria diferencial. Neste capítulo, será apresentada uma breve introdução dos princípios básicos da teoria da relatividade geral, definição de tensor, derivada covariante, tensor métrico e as equações de Einstein.

2.1 Variedades diferenciais

Com a teoria da relatividade restrita, Einstein eliminou a noção, prevalecente na física Newtoniana, de espaço e tempo como entidades absolutas e independentes, interconectando-os intimamente numa única estrutura, o espaço-tempo de Minkowski. Este é um espaço plano quadridimensional onde os eventos são caracterizados de forma única por três coordenadas cartesianas, indicando a localização espacial, e uma coordenada temporal. O espaço Minkowskiano é o pano de fundo onde acontecem os fenômenos descritos pela relatividade restrita e cuja geometria permanece inalterada com a ocorrência dos mesmos, é um cenário estático.

Enquanto isso, na relatividade geral a situação é diferente. O espaço-tempo de Minkowski é substituído por um espaço-tempo curvo, tornando-se então uma entidade física e dinâmica que interage de forma recíproca com as diferentes manifestações de energia contidas nele. A presença de objetos curva o espaço-tempo de modo que a geometria não é mais Euclidiana como na relatividade restrita. Como consequência, o que entendemos como

gravidade nada mais é do que a manifestação da curvatura do espaço-tempo. Isto é, a gravidade é geometria. Para obter um adequado entendimento da curvatura do espaço-tempo é necessário entender antes o conceito de variedade diferenciável.

Uma variedade n -dimensional, C^∞ , consiste num conjunto de pontos \mathcal{M} coberto na sua totalidade por subconjuntos enumeráveis U_1, U_2, \dots , tal que cada ponto $P \in \mathcal{M}$ pertence no mínimo a um destes subconjuntos. Se assume que em cada subconjunto U_a é definido um sistema de coordenadas, isto é, a cada ponto $P \in U_a$ lhe é designado de forma única n números reais (x^1, x^2, \dots, x^n) cujo domínio é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n . Em outras palavras, existe uma transformação ϕ que mapeia 1 – 1 cada subconjunto U_a sobre conjuntos abertos em \mathbb{R}^n . Os números x^1, \dots, x^n são as coordenadas de P .

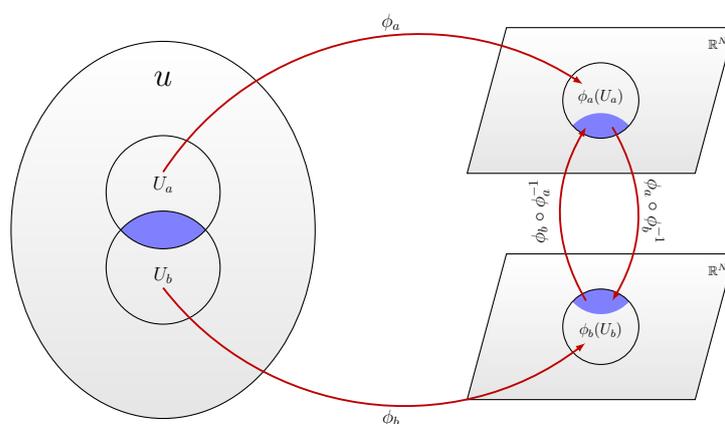


Figura 2.1: Representação gráfica do mapeamento de uma variedade em \mathbb{R}^N .

Se dois conjuntos U_a e U_b quaisquer da variedade se sobrepõem tal que, $U_a \cap U_b$ não vazio, então existe um mapeamento $\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ (onde \circ denota a operação de composição), assumido ser C^∞ , que leva pontos de $\phi_a(U_a) \in \mathbb{R}^n$ para $\phi_b(U_b) \in \mathbb{R}^n$, isto é, um mapeamento entre espaços Euclidianos, conforme (2.1). Em conformidade, podemos então adotar dois sistemas de coordenadas (x^1, \dots, x^n) e (x'^1, \dots, x'^n) relacionados num mesmo ponto $P \in U_a \cap U_b$ através da expressão

$$x'^b = x'^b(x^a), \quad (2.1)$$

com inversa

$$x^a = x^a(x'^b). \quad (2.2)$$

Estas relações representam transformações de coordenadas em $U_a \cap U_b$. É uma forma de escrever $\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ na notação com coordenadas. Portanto as funções em (2.1) e (2.2) são do tipo C^∞ para todo ponto $P \in U_a \cap U_b$.

2.2 Vetores e 1-formas

Estamos acostumados a pensar em vetores como sendo objetos que conectam pontos no espaço. Esta ideia é correta no Espaço Euclidiano \mathbb{R}^N , mas não numa variedade qualquer. Em geral, os vetores são objetos associados com um único ponto na variedade, mais especificamente com o espaço tangente cujo conceito definiremos a seguir.

Começemos considerando o conjunto de curvas que passam através de um ponto P da variedade. Isto é, o espaço de todos os mapas $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ onde P é a imagem de γ . Num sistema de coordenadas qualquer, uma curva é definida pela equação paramétrica $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$. Definimos então o operador derivada direcional ao longo da curva como ¹

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda} \partial_\alpha. \quad (2.3)$$

Este representa um vetor tangente à curva num ponto específico P sobre a mesma. O conjunto de todos os vetores deste tipo localizados todos num mesmo ponto formam o espaço tangente que identificaremos como $T_p(M)$. De acordo com (2.3), as componentes do vetor tangente são $dx^\alpha/d\lambda$ enquanto $\{\partial_\alpha\}$ corresponde à base em $T_p(M)$, conhecida como base coordenada.

O espaço tangente num ponto $P \in \mathcal{M}$ admite mais de uma base, de fato admite infinitas bases o que é possível devido a em geral podemos considerar diferentes sistemas de coordenadas num ponto da variedade. Assim, se x^α e x'^α são dois sistemas de coordenadas definidos num ponto P , as respectivas bases ∂_α e ∂'_α , relacionam-se uma à outra mediante

$$\partial'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \partial_\alpha. \quad (2.4)$$

Como consequência podemos definir uma lei de transformação similar para as componentes dos vetores². Então, se $\mathbf{u} = u^\alpha \partial_\alpha$ é um vetor com componentes u^α no sistema de coordenadas x^α , as componentes u'^β do mesmo no sistema de coordenadas x'^β são dadas por

$$u'^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} u^\alpha. \quad (2.5)$$

A existência de um campo vetorial acarreta por sua vez na existência de um outro campo, que podemos definir conjuntamente, denominado por *espaço vetorial dual*. O espaço dual do espaço tangente T_p é usualmente conhecido na literatura por espaço cotangente, denotado por T_p^* e conformado pelo conjunto de todos os mapeamentos lineares $\hat{\omega} : T_p \rightarrow \mathbb{R}$. Uma 1-forma, denominação para os elementos em T_p^* , toma como argumento um vetor para dar como resultado um escalar. Portanto, se $\hat{\omega} \in T_p^*$ temos que

¹Ao longo do texto consideramos a convenção de soma Einstein, segundo a qual sempre que houver índices repetidos estará implícita uma soma, assim por exemplo, sendo A^α e B^β as componentes de dois vetores, podemos escrever: $\sum_\alpha A_\alpha B^\alpha = A_\alpha B^\alpha$.

²Devemos lembrar que um vetor é um objeto geométrico que por definição é invariante sob transformação de coordenadas.

$$\hat{\omega}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\omega(\mathbf{u}) + b\omega(\mathbf{v}), \quad (2.6)$$

é uma quantidade escalar, onde \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores e a, b números reais.

A natureza vetorial das 1-formas permite defini-las em termos de suas componentes quando consideramos algum sistemas de coordenadas. Em particular como acontece com vetores, se $\hat{\omega}$ representa uma 1-forma então as componentes dela resultam da ação da mesma sobre a base $\{\partial_\alpha\}$ de T_P , a saber

$$\hat{\omega}_\alpha = \omega(\partial_\alpha), \quad (2.7)$$

de onde temos que a ação de uma 1-forma $\hat{\omega}$ sobre um vetor qualquer \mathbf{u} é expressa como

$$\hat{\omega}(\mathbf{u}) = \hat{\omega}(u^\alpha \partial_\alpha) = u^\alpha \hat{\omega}(\partial_\alpha) \equiv u^\alpha \omega_\alpha. \quad (2.8)$$

Para que a ideia de componentes de 1-formas seja completamente consistente, devemos introduzir a base dual $\{\mathbf{d}x^\alpha\}$ em T_P^* . Esta é definida de tal forma que ao agir sobre a base do espaço tangente temos

$$\mathbf{d}x^\alpha(\partial_\beta) \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.9)$$

Deste modo, se $\hat{\omega}$ é uma 1-forma, podemos escrevê-la como

$$\hat{\omega} = \omega_\alpha \mathbf{d}x^\alpha. \quad (2.10)$$

As propriedades de transformação da base dual e das componentes das 1-formas é similar e segue das propriedades de transformação de vetores. Para a base das 1-formas, temos

$$\mathbf{d}x'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{d}x^\beta, \quad (2.11)$$

e para as componentes

$$\omega'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \omega_\beta. \quad (2.12)$$

2.3 Tensores

Após termos definido vetores e 1-formas, prosseguiremos com a definição de tensores. Um tensor, \mathbf{T} , de ordem (m, n) é um mapeamento multilinear de m 1-formas e n vetores em \mathbb{R}

$$\mathbf{T} : \underbrace{T_P^* \times \dots \times T_P^*}_{m \text{ vezes}} \times \underbrace{T_P \times \dots \times T_P}_{n \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

onde \times denota o produto cartesiano. Multilinearidade significa que um tensor age linearmente em todos os seus argumentos, por exemplo, para um tensor de ordem $(1, 1)$ temos

$$\mathbf{T}(a\hat{\omega} + b\hat{\eta}, c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = ac\mathbf{T}(\hat{\omega}, \mathbf{u}) + ad\mathbf{T}(\hat{\omega}, \mathbf{v}) + bc\mathbf{T}(\hat{\eta}, \mathbf{u}) + bd\mathbf{T}(\hat{\eta}, \mathbf{v}). \quad (2.14)$$

Deste ponto de vista se conclui que escalares, vetores e 1-formas são tensores de ordem $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ respectivamente.

O conjunto de todos os tensores de ordem (m, n) formam um espaço vetorial; estes podem ser somados e multiplicados por números reais resultando em tensores da mesma ordem. Para construir uma base para este espaço, é necessário definir antes uma operação entre tensores conhecida como *produto tensorial* denotado por \otimes . Se \mathbf{T} e \mathbf{S} são tensores de ordem (k, l) e (m, n) respectivamente, o tensor $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$ de ordem $(k + m, l + n)$ é definido por

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}(\hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^{k+m}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{l+n}) = \mathbf{T}(\hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^k, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^l) \mathbf{S}(\hat{\omega}^{k+1}, \dots, \hat{\omega}^m, \mathbf{u}^{l+1}, \dots, \mathbf{u}^{l+n}). \quad (2.15)$$

Como podemos ver, o produto tensorial é uma operação cujo resultado é um tensor de ordem maior que os tensores iniciais. Note que em geral $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$.

Deste modo podemos construir tensores a partir do produto tensorial de vetores e 1-formas. Mais especificamente, podemos construir uma base para o espaço de todos os tensores de ordem (m, n) tomando o produto vetorial da base dos vetores e das 1-formas. Se considerarmos especificamente o caso de vetores e 1-formas pertencendo aos espaços tangente e cotangente, a base requerida consistirá de todos os tensores da forma

$$\partial_{(\alpha_1)} \otimes \dots \otimes \partial_{(\alpha_m)} \otimes \mathbf{d}x^{(\beta_1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}x^{(\beta_n)}, \quad (2.16)$$

de modo que em notação de componentes podemos escrever um tensor como

$$\mathbf{T} = T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \partial_{(\alpha_1)} \otimes \dots \otimes \partial_{(\alpha_m)} \otimes \mathbf{d}x^{(\beta_1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}x^{(\beta_n)}, \quad (2.17)$$

onde as componentes são definidas por

$$T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \mathbf{T}(\mathbf{d}x^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{d}x^{\alpha_m}, \partial_{\beta_1}, \dots, \partial_{\beta_n}). \quad (2.18)$$

Usualmente na literatura um tensor é definido através de suas componentes. A ação de tensores sobre um conjunto de vetores e 1-formas, seguindo (2.8), é expressa por

$$\mathbf{T}(\hat{\omega}^{(1)}, \dots, \hat{\omega}^{(m)}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n) = T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \omega_{\alpha_1}^{(1)} \dots \omega_m^{(m)} u_{(1)}^{\beta_1} \dots u_{(n)}^{\beta_n}. \quad (2.19)$$

A ordem dos índices é importante pois o tensor não necessariamente tem que agir da mesma forma sobre os diferentes argumentos. Finalmente, a regra de transformação das

componentes dos tensores segue da mesma regra para vetores e 1-formas. De modo que para as componentes dos tensores temos

$$T_{\beta'_1 \dots \beta'_n}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_m} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_m}}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\beta_n}} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}. \quad (2.20)$$

Vemos então que cada índice superior transforma-se como as componentes de um vetor enquanto cada índice inferior como as componentes de 1-formas.

Além do produto tensorial, existe uma outra operação em tensores, esta é a *contração*, a qual transforma um tensor de ordem (m, n) em outro de ordem $(m - 1, n - 1)$. Então se \mathbf{T} é um tensor de ordem (m, n) definimos a contração em relação ao α_i -ésimo índice superior e o β_j -ésimo índice inferior como tensor \mathbf{S} cujas componentes são

$$\begin{aligned} S_{\beta_1 \dots \beta_{n-j}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-i}} &= T_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_j \beta_{j+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_m} \\ &= T_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \alpha_i \beta_{j+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_m}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

No processo de contração a ordem dos índices é importante de modo que, partindo de um único tensor é possível obter diferentes tensores contraindo os índice de formas diferentes, por exemplo

$$T_{\delta\beta}^{\alpha\beta\gamma} \neq T_{\delta\beta}^{\alpha\gamma\beta}. \quad (2.22)$$

Embora tenhamos definido os tensores como mapeamentos de conjuntos de vetores e 1-formas em números reais, um tensor não necessariamente tem que agir em todos e cada um dos elementos que conformam o seu argumento. É possível agir somente numa parte deles. Assim, um tensor de ordem $(1, 1)$ pode representar um mapeamento de vetores em vetores

$$T_{\beta}^{\alpha} : u^{\beta} \longrightarrow T_{\beta}^{\alpha} u^{\beta}. \quad (2.23)$$

Resulta bem simples mostrar que $T_{\beta}^{\alpha} u^{\beta}$ é um vetor já que cumpre com a lei de transformação (2.5). De forma similar, um tensor pode agir num outro tensor para gerar um terceiro. Por exemplo,

$$U_{\beta}^{\alpha} = T_{\nu}^{\alpha\mu} S_{\mu\beta}^{\nu} \quad (2.24)$$

é um tensor $(1, 1)$ corretamente definido.

Continuando nossa apresentação sobre as propriedades dos tensores, dizemos que um tensor é *simétrico* em alguns dos índices se inalterado sob a troca destes. Então, se

$$S_{\alpha\beta\gamma} = S_{\beta\alpha\gamma}, \quad (2.25)$$

significa que $S_{\alpha\beta\gamma}$ é simétrico nos dois primeiros índices, enquanto que se

$$S_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\gamma\beta} = S_{\gamma\alpha\beta} = S_{\beta\alpha\gamma} = S_{\beta\gamma\alpha} = S_{\gamma\beta\alpha}, \quad (2.26)$$

indica que $S_{\alpha\beta\gamma}$ é simétrico em todos os índices. Similarmente, um tensor é dito *antissimétrico* em alguns de seus índices se ao trocá-los ele muda de sinal. Assim, se

$$S_{\alpha\beta\gamma} = -S_{\gamma\beta\alpha}, \quad (2.27)$$

podemos dizer que $S_{\alpha\beta\gamma}$ é antissimétrico no seu primeiro e terceiro índices.

2.4 Tensor métrico

A métrica, \mathbf{g} , é um tensor de ordem $(0, 2)$ simétrico e não degenerado. Ser simétrico significa que para todo par de vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 em T_P temos que

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{g}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1). \quad (2.28)$$

Pedir que seja não degenerado significa que se $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = 0$ para todo vetor $\mathbf{v} \in T_P$ então $\mathbf{v}_1 = 0$. Esta propriedade garante a existência da inversa da métrica, \mathbf{g}^{-1} , tensor cujos argumentos são elementos do espaço cotangente, a saber, 1-formas.

Definida desta forma, a métrica representa um mapeamento linear $T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$ em cada ponto da variedade. No entanto, como consequência da existência da inversa da métrica podemos estabelecer uma correspondência 1 – 1 entre vetores e 1-formas, ou seja, a métrica permite transformar vetores em 1-formas. Para conseguir isto, é suficiente saturar um dos argumentos de \mathbf{g} na Eq. (2.28) de modo que a 1-forma $\hat{\mathbf{u}}$ associada ao vetor \mathbf{u} é definida por

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \cdot) = \mathbf{g}(\cdot, \mathbf{u}). \quad (2.29)$$

De acordo com isto, podemos reinterpretar a métrica como um mapeamento linear do espaço de vetores para o espaço de 1-formas, $\mathbf{g} : T_P \rightarrow T_P^*$. Por definição a inversa da métrica é o mapeamento inverso $\mathbf{g}^{-1} : T_P^* \rightarrow T_P$, pelo que se $\hat{\mathbf{u}}$ é uma 1-forma definida a partir de um vetor \mathbf{u} através da Eq. (2.29), a inversa é definida por

$$\mathbf{u}() \equiv \mathbf{g}^{-1}(\hat{\mathbf{u}}, \cdot) = \mathbf{g}^{-1}(\cdot, \hat{\mathbf{u}}). \quad (2.30)$$

Dada uma métrica \mathbf{g} , sempre é possível encontrar uma base ortogonal $\{\partial_\alpha\}$ do espaço tangente num ponto P da variedade, isto é, uma base tal que $\mathbf{g}(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0$ se $\alpha \neq \beta$ e $\mathbf{g}(\partial_\alpha, \partial_\alpha) = \pm 1$. Naturalmente, existem muitas outras bases ortogonais em P mas o número de vetores bases com $\mathbf{g} = +1$ e $\mathbf{g} = -1$ são independentes da base usada. O número de sinais $+$ e $-$ é denominado *assinatura* da métrica. Geralmente em geometria diferen-

cial, os problemas considerados correspondem com uma métrica positiva, ou seja, métricas com assinatura $(+ + \dots +)$. Por outro lado, na relatividade geral, onde o espaço-tempo é 4-dimensional, a métrica tem assinatura $(- + + +)$. Variedades com métricas positivas são denominadas *Riemannianas*, enquanto aquelas como o espaço-tempo são denominadas *Lorentzianas*. Métricas com vários sinais negativos são chamadas *pseudo-Riemannianas*.

Na base coordenada, podemos escrever a métrica em termos das componentes $g_{\alpha\beta}$ como

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta. \quad (2.31)$$

A métrica descreve a noção de distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos de modo que a forma mais familiar de escrever a Eq. (2.31) é

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.32)$$

A não degenerescência da métrica se traduz então na não nulidade do determinante $g = |g_{\alpha\beta}|$ de modo que as componentes da inversa são determinados por

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad (2.33)$$

onde δ_γ^α é a delta de Kronecker.

As Eqs. (2.29) e (2.30) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_\alpha &= g_{\alpha\beta} u^\beta, \\ u^\alpha &= g^{\alpha\beta} u_\beta. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A definição da métrica carrega consigo a definição do produto interno entre vetores

$$u_\alpha u^\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta. \quad (2.35)$$

Consequentemente, a norma de um vetor é definida como o produto interno de um vetor consigo mesmo e, diferentemente ao caso do espaço Euclidiano, não necessariamente positivo estabelecendo a seguinte classificação

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta < 0 & \text{vetor tipo-tempo.} \\ g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 & \text{vetor nulo ou tipo-luz.} \\ g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta > 0 & \text{vetor tipo-espaço.} \end{cases} \quad (2.36)$$

A relação definida entre vetores e 1-formas express na Eq. (2.34) pode ser estendida a tensores de ordem arbitrária. Dado um tensor de ordem (m, n) com componentes $S_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, o produto

$$g_{\alpha_1 \mu} S_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = S_{\mu \beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_2 \dots \alpha_m}, \quad (2.37)$$

são as componentes de um tensor de ordem $(m - 1, n + 1)$. Pode-se ver que índice α_1 foi baixado. Similarmente, o índice β_1 pode ser subido através da inversa do tensor métrico

$$g^{\beta_1\mu} S_{\beta_1}^{\alpha_1\cdots\alpha_m} = S_{\beta_2\cdots\beta_n}^{\mu\alpha_1\cdots\alpha_m}, \quad (2.38)$$

de modo que temos as componentes de um tensor de ordem $(m + 1, n - 1)$. Esta operação pode ser estendida para qualquer dos índices repetidamente, por exemplo

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\gamma\cdots}^{\cdots} &= g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\lambda} T^{\mu\nu\lambda\cdots}, \\ S_{\cdots}^{\alpha\beta\gamma\cdots} &= g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\gamma\lambda} S_{\mu\nu\lambda\cdots}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Comparando as Eqs. (2.37) e (2.38) com a Eq. (2.21) vemos que a operação de descer e subir índices corresponde à contração entre dois ou mais índices num tensor quando os dois índices da métrica são iguais com um par qualquer de índices daquele, por exemplo, da Eq. (2.37)

$$\begin{aligned} g_{\alpha_1\alpha_2} S_{\beta_1\cdots\beta_n}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} &= S_{\alpha_2\beta_1\cdots\beta_n}^{\alpha_2\cdots\alpha_m} \\ &= S_{\beta_1\cdots\beta_n}^{\alpha_3\cdots\alpha_m}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

A contração total dos índices de um tensor de ordem arbitrária resulta num escalar

$$g_{\alpha\mu} g^{\beta\nu} T_{\beta}^{\alpha}{}^{\mu}{}_{\nu} = T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = T. \quad (2.41)$$

A contração do tipo

$$g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = T_{\alpha}^{\alpha} \equiv \text{Tr}(T_{\beta}^{\alpha}), \quad (2.42)$$

de um tensor de ordem $(0, 2)$ ou $(2, 0)$ é denominada *traço* do tensor.

2.5 Conexão

Derivada covariante

No espaço Euclidiano, a derivada parcial, $\partial_{\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}$, é um operador linear que transforma um campo tensorial de ordem (m, n) num de ordem $(m, n + 1)$. A situação é diferente em espaços curvos, por exemplo, derivando a Eq. (2.5) em relação às coordenadas $x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta})$ obtemos

$$\frac{\partial u'^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \left(\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right) + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} u^{\beta}. \quad (2.43)$$

Se unicamente aparecer o primeiro termo no lado direito, a expressão corresponderia com a lei de transformação para tensores de ordem (m, n) . No entanto, a presença do segundo termo faz com que $\partial_\alpha x^\mu$ não se comporte como um tensor. Isto obriga definir um novo procedimento de diferenciação que seja independente do sistema de coordenadas usado. Deste modo se prossegue definindo o operador *derivada covariante* ∇ que desempenha o papel da derivada parcial, mas sem depender das coordenadas.

A derivada covariante numa variedade é um operador que ao agir num campo tensorial da ordem (m, n) torna-o em outro da ordem $(m, n + 1)$ e satisfaz as seguintes propriedades

1. Linearidade: $\nabla(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \nabla\mathbf{T} + \nabla\mathbf{S}$.
2. Regra de Leibniz: $\nabla(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) = \nabla\mathbf{T} \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \nabla\mathbf{S}$.

Na notação de índices, se u^α são as componentes de um vetor, o resultado da ação de ∇ sobre \mathbf{T} é escrita como $\nabla_\beta u^\alpha \equiv u^\alpha_{;\beta}$ e definida por

$$\nabla_\beta u^\alpha \equiv u^\alpha_{;\beta} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha u^\gamma, \quad (2.44)$$

onde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ são os coeficientes da *conexão* ou *símbolos de Christoffel*³. Embora, de acordo com a notação usada poderíamos pensar que estes coeficientes são as componentes de um tensor, devemos mencionar que isto é errado o que é claro ao olhar para a forma como se transformam de um sistema de coordenadas para outro

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (2.45)$$

A derivada covariante de uma 1-forma é definida de forma semelhante

$$\nabla_\beta \omega_\alpha \equiv \omega_{\alpha;\beta} = \frac{\omega_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma. \quad (2.46)$$

A expressão geral para a derivada covariante de um tensor de ordem arbitrária é

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} &\equiv T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n; \gamma} \\ &= \partial_\gamma T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \\ &\quad + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha_1} T^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha_2} T^{\alpha_1 \lambda \dots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\gamma\beta_1}^\lambda T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\lambda \beta_2 \dots \beta_n} - \Gamma_{\gamma\beta_2}^\lambda T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \lambda \dots \beta_n} - \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Vemos então que para definir a derivada covariante é necessário introduzir uma conexão dentro da variedade, especificada em algum sistema de coordenadas por um conjunto de

³O termo **símbolos de Christoffel** é reservado especificamente para bases coordenadas.

coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ que se transformam de acordo com a Eq. (2.45). Evidentemente existe um grande número de conexões que poderíamos definir numa variedade e cada uma implicando, é claro, uma noção de derivada covariante diferente. Em relatividade geral esta arbitrariedade não causa preocupação alguma devido ao uso de uma única métrica a qual define por sua vez uma única conexão. Para ver isto, a primeira coisa que devemos notar é que a diferença de duas conexões forma um tensor de ordem (1, 2). Assim, se $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ e $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda$ são os coeficientes de duas conexões distintas, a diferença $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda = T_{\alpha\beta}^\lambda$ é um tensor pois obedece a regra de transformação (2.20). Desta forma qualquer conexão pode ser expressa como a soma de uma conexão de referência mais uma correção tensorial.

Note que dada uma conexão com $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ podemos imediatamente definir uma outra conexão simplesmente trocando os índices inferiores, ou seja, os coeficientes $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ que também transformam sob a Eq. (2.45) especificam uma conexão distinta. Existe então um tensor com uma dada conexão, denominado *tensor de torção*, definido por

$$T_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda. \quad (2.48)$$

É evidente que o tensor de torção é antissimétrico nos dois índices inferiores. Uma conexão simétrica nestes mesmos índices está livre de torção.

Para definir uma única conexão numa variedade com métrica $g_{\alpha\beta}$ é preciso introduzir as seguintes propriedades

- Torção nula: $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$.
- Compatibilidade com a métrica: $g_{\alpha\beta;\lambda} = 0$.

Se diz que a conexão é compatível com a métrica se a derivada covariante desta em relação à primeira é sempre nula. Isto implica a aparição de duas propriedades adicionais. Primeiro, a derivada covariante da inversa da métrica é também nula

$$g_{;\lambda}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.49)$$

Segundo, o procedimento de subir e descer índices comuta com a derivada covariante

$$g_{\mu\lambda} V^\lambda_{;\rho} = \left(g_{\mu\lambda} V^\lambda \right)_{;\rho} = V_{\mu;\rho}. \quad (2.50)$$

Portanto existe uma única conexão livre de torção na variedade na qual a métrica é compatível. Isto faz parte da definição da derivada covariante, simplesmente indicam uma dentro de muitas outras possíveis. Além, permitem definir os coeficientes da conexão em termos da métrica através da expressão

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}). \quad (2.51)$$

Transporte paralelo

A conexão recebe esta denominação pelo fato de ser usada para transportar vetores desde um espaço tangente para outro, ou seja, serve para conectar elementos de espaços vetoriais diferentes, definidos em variedades curvas.

O transporte paralelo consiste em mover um vetor ao longo de uma curva mantendo-o constante, conceito válido também para tensores de rank arbitrário. Dada uma curva $x^\mu(\lambda)$, definimos a derivada covariante ao longo desta pelo operador

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (2.52)$$

Assim um tensor \mathbf{T} é transportado paralelamente ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$ quando

$$\left(\frac{D\mathbf{T}}{d\lambda} \right)_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} = 0. \quad (2.53)$$

Esta é uma equação tensorial bem definida já que tanto $dx^\mu/d\lambda$ como a derivada covariante $\nabla\mathbf{T}$ são tensores e é conhecida como *equação do transporte paralelo*. Para um vetor ela toma a forma específica

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0. \quad (2.54)$$

Vemos então que a equação de transporte paralelo é uma equação diferencial de primeira ordem que define um problema com condições iniciais.

A ideia de transporte paralelo depende da conexão, de modo que diferentes conexões levam para diferentes formas de realizar tal procedimento. Se a conexão é compatível com a métrica, esta última sempre será transportada paralelamente em relação aquela

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.55)$$

2.6 Curvatura

A curvatura numa variedade se manifesta através de processos como o transporte paralelo. Numa variedade plana, mover um vetor ao longo de uma dada curva não modifica de forma alguma as características de tal vetor, este permanece constante. No entanto, numa variedade curva o transporte paralelo depende da trajetória percorrida de modo que o resultado de levar um vetor de um ponto para outro será diferente se for realizado por diferentes caminhos. Para ir um pouco mais a fundo, se a trajetória é fechada, o vetor ou tensor final será diferente do inicial apesar dos pontos de chegada e partida serem os mesmos. Uma outra forma de perceber a curvatura é por meio das geodésicas pois diferentemente da geometria plana, num espaço curvo as geodésicas inicialmente paralelas não permanecem assim.

A definição quantitativa da curvatura numa variedade é feita através do *tensor de Riemann* ou *tensor de curvatura*. Este tensor dá conta de todos os efeitos associados com a curvatura, no caso do transporte paralelo ele mede a variação sofrida por um vetor ou tensor depois de ter percorrido uma curva fechada. Introduzimos o tensor de Riemann, $R_{\alpha\mu\nu}^\lambda$, por meio da expressão

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R_{\alpha\mu\nu}^\lambda V^\alpha, \quad (2.56)$$

onde $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ é o comutador de derivadas covariantes aplicadas no vetor V^λ em duas direções diferentes. Aplicando (2.44) em (2.56), obtemos a expressão para as componentes do tensor de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (2.57)$$

Vemos então que $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ depende da métrica e sua primeira e segunda derivada. Segue imediatamente da definição que o tensor de Riemann é antissimétrico no terceiro e quarto índice

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = -R_{\beta\nu\mu}^\alpha. \quad (2.58)$$

Baixando o primeiro índice com a ajuda da métrica podemos rescrever

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\lambda\alpha} R_{\beta\mu\nu}^\lambda. \quad (2.59)$$

Expresso desta forma, o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois primeiros índices

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (2.60)$$

Adicionalmente temos que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.61)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (2.62)$$

Num espaço n -dimensional, o tensor de Riemann possuiria n^4 componentes. No entanto, o conjunto de simetrias que lhe caracterizam estabelece um número menor de componentes independentes, a saber, $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$. Assim, num espaço de 4 dimensões temos 20 componentes independentes.

Além da Eq. (2.62), o tensor de curvatura satisfaz uma série de identidades diferenciais, denominada *identidade de Bianchi*

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = 0. \quad (2.63)$$

Um objeto importante em relatividade geral, definido a partir do tensor de Riemann, é o *tensor de Ricci* $R_{\alpha\beta}$

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}. \quad (2.64)$$

Como podemos ver, é uma contração entre o primeiro e terceiro índice de $R_{\alpha\nu\beta}^{\mu}$. Em princípio, outras contrações podem ser possíveis entre os diferentes índices, mas devido às simetrias presentes em $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ todas elas são identicamente nulas ou reduzem-se a $\pm R_{\alpha\beta}$. A esse respeito, para um tensor de curvatura formado a partir de uma conexão arbitrária existe um número de contrações independentes que podem ser realizadas, o qual não é nosso caso. O tensor de Ricci é um tensor simétrico, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$.

A aplicação de $g^{\alpha\beta}$ no tensor de Ricci define o *escalar de Ricci* ou *escalar de curvatura* R

$$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (2.65)$$

Contraindo a identidade de Bianchi resulta em

$$\nabla^{\mu} R_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} R = 0. \quad (2.66)$$

Definindo o tensor de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.67)$$

temos que a Eq. (2.66) é equivalente a

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.68)$$

O tensor de Einstein, simétrico graças à simetria do tensor de Ricci e da métrica, é de grande importância na relatividade geral.

Toda informação relacionada com a curvatura do espaço-tempo está contida no tensor de Riemann. Das equações (2.51) e (2.57) vemos que o tensor de Riemann é dado diretamente pela métrica e sua primeira e segunda derivadas. Por causa disso a métrica passa então a determinar completamente a curvatura do espaço-tempo, podemos considerá-la como a variável fundamental da gravitação em relatividade geral.

2.7 Equação de campo de Einstein

Na teoria Newtoniana, uma dada distribuição de matéria de densidade ρ gera um campo gravitacional que age sobre corpos massivos localizados ao redor da mesma. O potencial gravitacional φ originado por esta é dado pela equação

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G_N \rho, \quad (2.69)$$

sendo G_N a constante de gravitação de Newton.

Embora a ideia de corpos massivos servirem como fonte para a gravitação seja válida para ambas as teorias, em relatividade geral, a natureza do campo gravitacional é radicalmente diferente que na concepção Newtoniana. A gravidade deixa de ser uma força à distância para tornar-se um efeito geométrico do espaço-tempo. As grandezas físicas de interesse e as equações que estabelecem as relações entre elas, adquirem essência tensorial de modo que a Eq. (2.69) deixa de ser útil num contexto geral. Seguindo esta ordem de ideias, na relatividade é introduzido o tensor de energia-momento $T^{\alpha\beta}$ o qual origina a curvatura no espaço-tempo e representa uma generalização da distribuição de massa na equação acima, tornando-se esta numa de suas componentes. Uma vez que a densidade de energia e momento são quantidades conservadas localmente, isto é,

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0, \quad (2.70)$$

o tensor mais adequado para descrever a gravitação e em total acordo com a condição anterior é o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, de modo que a equação de campo da relatividade geral é obtida igualando este tensor com tensor $T_{\mu\nu}$. Sendo assim, temos

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (2.71)$$

ou equivalentemente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (2.72)$$

onde $k = 8\pi G_N$ é uma constante de proporcionalidade⁴ cujo valor é fixado de tal forma que o limite Newtoniano seja recuperado corretamente. A equação de campo de Einstein forma um sistema de 10 equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares acopladas, no entanto, a condição $G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ reduz o número de equações para 6.

No vácuo, o conteúdo de energia-momento é nulo, portanto $T_{\mu\nu} = 0$ de modo que a Eq. (2.72) se reduz para

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.73)$$

que pode ser reescrita como

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.74)$$

Esta é a equação de campo de Einstein para o vazio.

Teoricamente é possível adicionar o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ no tensor de Einstein, definido pela

⁴Ao longo do texto consideraremos $G_N = 1$.

Eq.(2.67), onde Λ denota a constante cosmológica. Isto é permitido dado que a derivada covariante do tensor métrico é nula de modo que a validade da condição expressa na Eq. (2.68) se mantém válida. Com isto em mente, as equações de campo de Einstein podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (2.75)$$

como foi proposto por Einstein com o objetivo de descrever um universo estático, de acordo às concepções vigentes na época, embora anos mais tarde abandonara tal ideia pois foi observado que o universo está em expansão, levando-o a pensar que ter incluído a constante cosmológica nas suas equações tinha sido o "pior erro cometido na vida". Fisicamente, este termo pode ser interpretado como a energia do vácuo, o que gera a possibilidade de pressão negativa. Embora, as razões que levaram o Einstein a considerar a constante cosmológica não sejam mais válidas, observações recentes indicam a possibilidade desta ser não nula, o que torna importante considerarmos soluções da Eq. (2.75).

Capítulo 3

Soluções esfericamente simétricas

Soluções das equações de Einstein com simetria esférica são uma das diferentes soluções exatas conhecidas. Sendo relativamente simples, dão uma visão geral das características de campos gravitacionais intensos. Estas soluções representam muito bem alguns sistemas importantes em relatividade geral, objetos astrofísicos compactos e aplicações em cosmologia. Neste capítulo descreveremos brevemente as soluções de Schwarzschild, Schwarzschild-de Sitter, Reissner-Nordström com e sem constante cosmológica.

3.1 Espaço-tempo esfericamente simétrico

Um espaço-tempo é esfericamente simétrico se o seu grupo de isometrias admite um subgrupo isomórfico com o grupo $SO(3)$. Em particular, as orbitas¹ do subgrupo correspondem a esferas bidimensionais S^2 . Assim, o grupo de isometrias $SO(3)$ se interpreta fisicamente como rotações de superfícies esféricas ao redor de um dado ponto de modo que, falando em termos coloquiais, um espaço-tempo esfericamente simétrico é aquele onde a métrica, e qualquer outro campo, permanece invariante sob rotações.

Como sabemos, as simetrias próprias de um espaço-tempo qualquer são caracterizadas através dos diferentes vetores de Killing que possam ser definidos na variedade. Em um espaço 3-dimensional, o grupo $SO(3)$ gera famílias de rotações, as quais lhe são associadas vetores de Killing que em coordenadas polares (θ, φ) são dados por

$$\begin{aligned}K_1 &= \sin \varphi \partial_\theta + \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi, \\K_2 &= -\cos \varphi \partial_\theta + \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \\K_3 &= -\partial_\varphi,\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para estes vetores temos que

$$[K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k,\tag{3.2}$$

¹Conjunto de pontos resultado da ação do grupo $SO(3)$ num ponto dado.

com $(i, j, k = 1, 2, 3)$ sendo considerados ciclicamente. Assim um espaço-tempo esfericamente simétrico pode ser definido como sendo aquele que possui três vetores de Killing que obedecem as relações de comutação de acima.

Num espaço-tempo esfericamente simétrico geral, o elemento de linha, em termos das coordenadas² (t, r, θ, φ) , é escrito na forma

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = -e^{\xi(t,r)} dt^2 + e^{\lambda(t,r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.3)$$

onde $\xi(t, r)$ e $\lambda(t, r)$ são funções desconhecidas, e r é definido como raio da esfera cuja área é $4\pi r^2$.

3.1.1 Soluções estacionárias

Em termos simples, um espaço-tempo é estacionário se não manifesta dependência temporal nas componentes da métrica, isto é, se apresenta simetria sob *translação temporal*. Neste caso, existe um sistema especial de coordenadas³, (t, x^a) , onde

$$g_{\mu\nu,t} \doteq 0, \quad (3.4)$$

sendo t a coordenada temporal. Naturalmente, num sistema de coordenadas arbitrário a métrica provavelmente dependerá explicitamente de todas as coordenadas. Se definirmos um campo vetorial

$$K^\mu \doteq \delta_0^\mu, \quad (3.5)$$

então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\mu\nu} &= K^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\mu 0}K_{,\nu}^0 + g_{\nu,0}K_{,\mu}^0 \\ &\doteq g_{\mu\nu,0}, \\ &\doteq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A derivada de Lie da métrica ao longo do vetor \mathbf{K} , $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\mu\nu}$, é um tensor e portanto se é nulo num sistema de coordenadas específico então será igual em todos os sistemas de coordenadas. Assim, K^μ corresponde a um vetor de Killing. A situação inversa é igualmente válida, dado um vetor de Killing K^μ , existe um sistema de coordenadas compatível com o mesmo para o qual a Eq. (3.5) é legítima de forma que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\mu\nu}, \\ &\doteq g_{\mu\nu,0}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

resultando numa métrica estacionária. Temos então que um espaço-tempo é estacionário se e somente se admite um vetor de Killing tipo-tempo.

²Junto com $G_N = 1$, no texto consideramos $c = 1$ sendo c a velocidade da luz.

³ \doteq denota a igualdade válida somente num sistema especial de coordenadas.

3.1.2 Soluções estáticas

A métrica de um espaço-tempo estacionário, num sistema de coordenadas especial, é independente do tempo, mas o elemento de linha em geral contém termos cruzados $dt dx^a$. Consideremos dois eventos (t, x^1, x^2, x^3) e $(t+dt, x^1+dx^1, x^2, x^3)$ no sistema de coordenadas no qual a métrica é estacionária, temos então

$$ds^2 \doteq g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdx^1 + g_{11}(dx^1)^2, \quad (3.8)$$

onde $g_{\mu\nu}$ depende unicamente de x^a . Sob reversão temporal

$$t \longrightarrow t' = -t, \quad (3.9)$$

as componentes $g_{\mu\nu}$ permanecem inalteradas. No entanto, ds^2 torna-se

$$ds^2 \doteq g_{00}dt^2 - 2g_{01}dtdx^1 + g_{11}(dx^1)^2. \quad (3.10)$$

Numa métrica estática o elemento de linha deve permanecer invariante sob reversão temporal, portanto, nas Eqs. (3.8) e (3.10) as componentes g_{01} devem anular-se (ao igual que as componentes g_{02} e g_{03} num caso geral) o que demanda que o vetor de Killing, dado pela Eq. (3.5), seja ortogonal às superfícies espaciais que geram o espaço-tempo, isto é, o conjunto de pontos cuja "coordenada temporal" tem valor t .

Definimos então um espaço-tempo estático como aquele que, além de estacionário, possui um vetor de Killing tipo-tempo ortogonal às superfícies tipo-espaço.

3.2 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução das equações de campo de Einstein, encontrada pelo físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild no ano de 1916 [20]⁴ poucos meses após a publicação da teoria da relatividade geral por Einstein quem acreditava que suas equações eram tão complicadas que nunca seria possível obter solução exata alguma.

Sendo a solução não trivial mais simples das equações de campo de Einstein, a solução de Schwarzschild tem desempenhado um papel importante na discussão e compreensão conceitual da teoria da relatividade geral, por exemplo, revelando a existência de horizonte de eventos, singularidades no espaço-tempo e aspectos da teoria quântica de campos em espaços curvos. Esta solução forneceu os primeiros passos para entender o fenômeno de colapso gravitacional e tem motivado a elaboração de modelos teóricos para estrelas relativistas.

⁴No ano de 1917, Johannes Droste apresentou uma outra derivação, matematicamente mais elegante, da solução obtida por Schwarzschild um ano antes discutindo as propriedades geométricas da mesma. Portanto seria apropriado denominar a solução em questão como a solução de Schwarzschild-Droste, remitir-se à ref. [21, 22].

Em termos observacionais, a solução de Schwarzschild representa adequadamente o campo gravitacional externo de objetos massivos estáticos ou que giram muito lentamente como estrelas e planetas⁵, particularmente explica com grande sucesso a precessão do periélio de mercúrio e o fenômeno de lente gravitacional.

Esta solução descreve a geometria de um espaço-tempo vazio, estático e esfericamente simétrico ao redor de um objeto de massa m . Conseqüentemente, o elemento de linha correspondente, em termos das denominadas coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ) , é escrito da forma

$$ds^2 = -e^{\xi(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.11)$$

onde $\xi(r)$ e $\lambda(r)$ são funções a determinar e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Para pontos muito distantes da fonte, espera-se que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\xi(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{\lambda(r)} = 1. \quad (3.12)$$

Para resolver as equações de campo de Einstein devemos calcular em primeiro lugar os símbolos de Christoffel Γ para a métrica (3.11). Estes são (não nulos)

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{\xi'}{2} e^{\xi-\lambda}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= r^{-1}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \cot \theta, \\ \Gamma_{tr}^t &= \frac{\xi'}{2}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= r^{-1}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.13)$$

de modo que as componentes do tensor de Ricci não nulas estão dadas por

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{1}{2} e^{\xi-\lambda} (\xi'' + \xi'^2 - \xi' \lambda' + \frac{2}{r} \xi'), \\ R_{rr} &= -\frac{1}{2} (\xi'' + \xi'^2 - \xi' \lambda' - \frac{2}{r} \lambda'), \\ R_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} e^{-\lambda} (r \lambda' - r \xi' - 2) + 1, \\ R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Igualando estas componentes do tensor de Ricci a zero, como exigem as equações de campo de Einstein no vazio, obtemos um sistema de 4 equações diferenciais não lineares, acopladas de duas incógnitas. Resolvendo então este sistema, determinaremos explicitamente as funções $\xi(r)$ e $\lambda(r)$. Então, multiplicando R_{tt} por $e^{-(\xi-\lambda)}$ e somando com R_{rr} obtemos

⁵A geometria do espaço-tempo de objetos massivos em rotação é descrita pela solução de Kerr [23].

$$\begin{aligned} e^{-(\xi-\lambda)} R_{tt} + R_{rr} &= 0, \\ \Rightarrow \xi' + \lambda' &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

portanto $\lambda(r) - \xi(r) = c_0$. Mas, em conformidade com a condição (3.12) concluímos que

$$\xi(r) = -\lambda(r). \quad (3.16)$$

Substituindo esta condição na eq. $R_{\theta\theta} = 0$ temos

$$\frac{1}{2} e^\xi (2r\xi' + 2) - 1 = 0, \quad (3.17)$$

que equivale a

$$(re^\xi)' = 1. \quad (3.18)$$

Integrando chegamos a

$$e^\xi = 1 + \frac{k}{r}, \quad (3.19)$$

e como consequência da igualdade expressa em (3.16)

$$e^\lambda = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}, \quad (3.20)$$

de modo que o elemento de linha (3.11) torna-se

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{k}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.21)$$

onde k é uma constante de integração. Pode se comprovar facilmente que (3.19) e (3.20) satisfazem cada uma das equações $R_{\mu\nu} = 0$. Após termos calculado a métrica que descreve um espaço-tempo estático e com simetria esférica, devemos dar uma interpretação consistente da constante k em termos de algum parâmetro físico. A aplicação de maior importância deste tipo de solução é dada quando representamos a geometria do espaço-tempo da região exterior de estrelas, planetas ou sistemas semelhantes. Neste caso, é natural esperar que o limite de campo fraco ou limite Newtoniano [24] seja reproduzido pela métrica dada pela Eq. (3.11). No limite em questão se estabelece que

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -(1 + 2\Phi), \\ g_{rr} &= (1 + 2\Phi), \end{aligned} \quad (3.22)$$

com $\Phi = -m/r$ sendo o potencial gravitacional Newtoniano gerado por uma distribuição de massa m . Vemos então que $k = -2m$, de modo que a métrica de Schwarzschild finalmente é escrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.23)$$

Para obter a Eq. (3.23) assumimos que o espaço-tempo era estático desde o início do procedimento. Mas na verdade, podemos abrir mão desta propriedade e resolver as equações de Einstein para um espaço-tempo geral simetricamente esférico. Não obstante, como foi demonstrado por Birkhoff no ano 1923, a única solução possível é a métrica de Schwarzschild, ver [25]. Deste modo, todo espaço-tempo vazio com simetria esférica é estático independentemente do fato da fonte sê-lo ou não; esta poderia ser uma estrela em colapso ou explodindo enquanto ao longo do processo tal simetria seja conservada. Este resultado, conhecido como *teorema de Birkhoff*, é análogo ao que acontece no electromagnetismo, onde a solução de Coulomb é única solução esfericamente simétrica às equações de Maxwell no vazio. Como observação, notemos que (3.23) se reduz à solução de Minkowski para $r \rightarrow \infty$.

3.2.1 Singularidades na solução de Schwarzschild

Um olhar rápido sobre a Eq. (3.23) exhibe imediatamente a presença de degenerescências, isto é, pontos onde as componentes da métrica de Schwarzschild são singulares, o que representa um problema já que a curvatura tornar-se-ia infinita neles e além seria inconsistente com a definição dada para o tensor métrico. Como primeiro caso temos que, em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ a componente $g_{\varphi\varphi} = 0$. Porém, isto é consequência da utilização de coordenadas esféricas na descrição do espaço-tempo, qualquer rotação deslocaria tal singularidade para um outro ponto que em princípio é completamente regular. Sendo mais específicos, uma mudança do sistema de coordenadas eliminaria totalmente a singularidade o que indica então que é uma *singularidade de coordenada*.

Outras singularidades presentes são $r = 0$ e $r = 2m$, casos nos quais g_{tt} diverge, g_{rr} se anula e vice-versa. Para saber se estas são singularidades de coordenadas ou realmente representam singularidades na estrutura do espaço-tempo foquemos nossa atenção no invariante de curvatura formado pela contração do tensor de Riemann consigo mesmo⁶. Para a métrica de Schwarzschild temos [25]

$$I \equiv R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48m^2}{r^6}. \quad (3.24)$$

Vemos que o escalar I diverge em $r = 0$ o que significa que neste ponto a geometria do espaço-tempo é singular, efetivamente a curvatura é infinita. Por outro lado, em $r = 2m$ a Eq. (3.24) resulta ser regular, portanto para este valor da coordenada radial temos uma singularidade de coordenada⁷, porém fisicamente relevante ao contrário do caso ($\theta = 0, \pi$).

⁶Em geral não é tarefa fácil determinar a natureza de uma singularidade. De fato, definir a noção de singularidade na geometria de um espaço-tempo não é trivial. Ver o capítulo 9 da ref. [26] para uma discussão detalhada.

⁷Formalmente a regularidade de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ em $r = 2m$ não é suficiente para concluir que se trata de uma singularidade coordenada. O verdadeiro argumento é que sob mudança de coordenadas o invariante de curvatura permanece regular em $r = 2m$.

Estrutura causal na solução de Schwarzschild

Em $r = 2m$ a coordenada r recebe, entre outras, a denominação de raio de Schwarzschild e desempenha um papel importante na física da solução (3.23) cujo entendimento é conseguido ao explorar a estrutura causal, definida através dos cones de luz. Deste modo, considerando geodésicas radiais nulas, para as quais θ e φ são constantes e $ds^2 = 0$, o elemento de linha se reduz a

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (3.25)$$

de onde temos que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (3.26)$$

Esta expressão dá a inclinação dos cones de luz num diagrama de espaço-tempo no plano $t-r$, figura (3.1). Para $r \gg 2m$ vemos que a inclinação destes é ± 1 , o que é completamente lógico e até mesmo esperado pois o espaço-tempo de Schwarzschild tende assintoticamente ao espaço-tempo de Minkowski para $r \rightarrow \infty$. Perto do raio de Schwarzschild a situação é diferente, $dt/dr \rightarrow \pm\infty$ de modo que os cones de luz vão se fechando até se degenerar completamente em $r = 2m$. Dentro do raio de Schwarzschild os cones de luz mudam de orientação apontando na direção da singularidade em $r = 0$. Isto é efeito da reversão do caráter temporal e espacial das coordenadas t e r nesta região. Para $r > 2m$, o vetor $\partial/\partial t$ é tipo-tempo ($g_{00} < 0$) e $\partial/\partial r$ é tipo-espaço ($g_{11} > 0$). Mas na região $r < 2m$, $\partial/\partial t$ é tipo-espaço ($g_{00} > 0$) e $\partial/\partial r$ é tipo-tempo ($g_{11} < 0$).

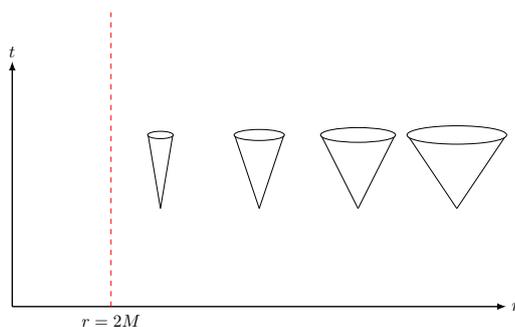


Figura 3.1: Cones de luz da solução de Schwarzschild nas coordenadas (t, r) .

Parece então que raios de luz, originados em $r > 2m$, não atravessariam de forma alguma o raio de Schwarzschild e, dado que o movimento de partículas massivas está restrito ao interior dos cones luz, implica igualmente que nenhuma partícula localizado inicialmente nesta região seria capaz atingi-lo.

A análise de geodésicas radiais tipo tempo de partículas mostra que um observador no infinito percebe que uma partícula levaria um tempo infinito para chegar até o raio de

Schwarzschild. Não obstante, para um observador localizado no referencial da partícula, esta realmente o cruza e alcança a singularidade em $r = 0$ num tempo próprio finito, ver [27]. Em definitivo, o uso das coordenadas de Schwarzschild conduz a uma interpretação errônea de geometria do espaço-tempo ao redor do raio de Schwarzschild que como foi antes mencionado, não corresponde com uma singularidade real. O mais conveniente é considerar um sistema de coordenadas adaptado ao referencial das partículas em movimento.

3.2.2 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Um sistema de coordenadas bem comportado foi inicialmente proposto por Eddington [28] e redescoberto tempos depois por Finkelstein [29]. Este sistema é baseado no movimento de partículas livres locomovendo-se radialmente no espaço-tempo de Schwarzschild através de geodésicas nulas. Particularmente, são introduzidas as coordenadas u e v definidas por

$$\begin{aligned} u &= t - r^*, \\ v &= t + r^*, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$r^* = - \int \frac{dr}{g_{00}} = r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|. \quad (3.28)$$

Partículas sem massa se locomovendo radialmente em direção a $r = 0$ percorrem curvas $v = \text{const}$, entretanto se o deslocamento é em sentido contrário elas percorrem curvas $u = \text{const}$.

Usando o sistema de coordenadas (v, r, θ, φ) , denominado *coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein*, a métrica (3.23) torna-se

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (3.29)$$

Esta expressão em princípio é válida unicamente para $r > 2m$ visto que a coordenada v é definida só nesta região, no entanto é estendida analiticamente para cobrir $r < 2m$. Apesar da componente g_{vv} ser nula no raio de Schwarzschild, os termos cruzados associados a $dvdr$ na métrica (3.29) são completamente regulares, o que mostra mais uma vez o caráter artificial da singularidade da solução (3.23) em $r = 2m$.

Neste sistema de coordenadas o comportamento dos cones de luz é determinado por

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{Part. entrantes (incoming)} \\ 2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} & \text{Part. saindo (outgoing)} \end{cases} \quad (3.30)$$

Como vemos, estes apresentam um bom comportamento em $r = 2m$. Portanto nada impede geodésica nulas o tipo-tempo alcançar e atravessar tal superfície. Embora os cones de luz

não degeneram eles permanecem inclinados de modo que para $r < 2m$ as trajetórias dentro do cone de luz futuro seguidas por qualquer partícula são dirigidas unicamente na direção para a qual r decresce, ver fig. (3.2).

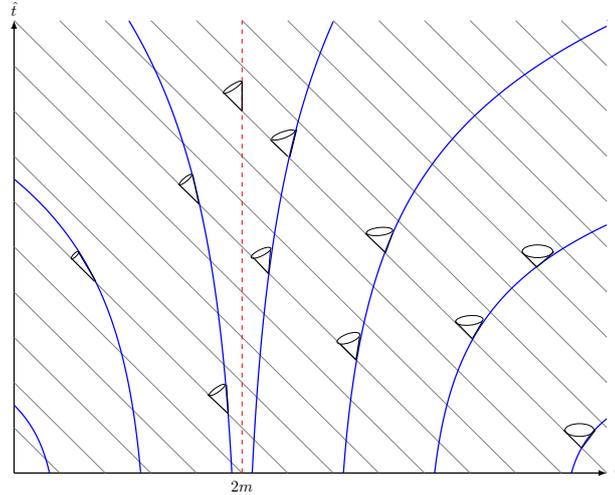


Figura 3.2: Cones de luz da solução de Schwarzschild nas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein. A coordenada \hat{t} , eixo vertical, é definida como $\hat{t} = r - v$.

Localmente o raio de Schwarzschild é completamente regular, mas globalmente funciona como um ponto de não retorno na estrutura do espaço-tempo. Isto é, uma vez que as partículas ingressam na região delimitada por este, não há caminho de volta atrás; eventos ocorridos em $r < 2m$ não podem influenciar nenhum evento ocorrido em $r > 2m$, portanto $r = 2m$ é denominado também de *horizonte de eventos*. Nestas circunstâncias, a solução de Schwarzschild (3.23) define a geometria do espaço-tempo de um *buraco negro*. Nota-se que o horizonte de eventos é uma superfície nula.

No sistema de coordenadas (v, r, θ, φ) a superfície $r = 2m$ funciona como uma membrana unidirecional, pode ser cruzada por geodésicas futuro direcionadas enquanto exclui tal possibilidade para geodésicas direcionadas para o passado. Isto parece não fazer sentido devido à invariância sob reversão temporal das equações de campo de Einstein. No entanto, usando a coordenada u em lugar de v esta incoerência é rapidamente superada.

Em termos das *coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein*, denominação para o sistema de coordenadas (u, r, θ, φ) , a métrica se escreve como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 - 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.31)$$

De forma semelhante à Eq. (3.29), a métrica escrita desta forma é definida inicialmente só para $r > 2m$ mas é analiticamente estendida para ser válida na região $r < 2m$. O raio de Schwarzschild age agora na direção temporal oposta deixando passar unicamente curvas nulas ou tipo-tempo direcionadas para o passado de dentro para fora, fig. (3.3).

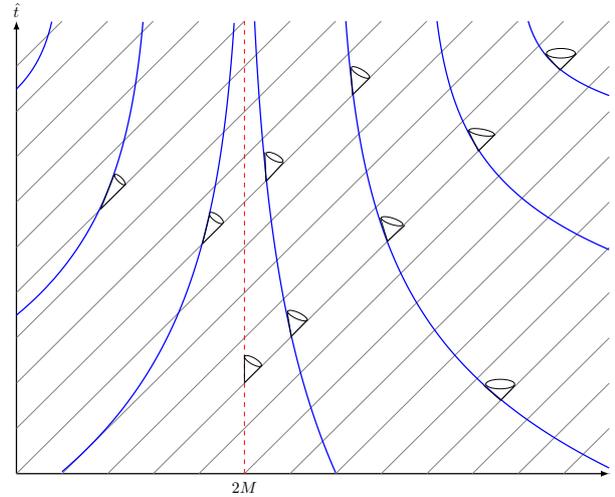


Figura 3.3: Cones de luz da solução de Scharzschild nas coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein. A coordenada \hat{t} , eixo vertical, é definida como $\hat{t} = r + u$.

É preciso ressaltar que, nas coordenadas (u, r, θ, φ) , a região $r < 2m$ não é a mesma que aquela para as coordenadas (v, r, θ, φ) . Como consequência, é possível seguir curvas dirigidas para futuro ou passado através de $r = 2m$ mas os lugares de partida e chegada são distintos em cada caso o que é esperado da definição (3.27) da qual temos que mantendo v e u constantes enquanto r decresce $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$ respectivamente, de modo que o espaço-tempo é estendido em duas direções, uma para o futuro e uma outra para o passado.

3.2.3 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Apesar da utilidade e os importantes resultados que seguem da aplicação das coordenadas avançadas e retardadas de Eddington-Finkelstein, estas não são suficientes para descrever de forma completa a geometria da solução de Schwarzschild além de não eliminar realmente a singularidade nas expressões para a métrica, Eqs. (3.29)-(3.31), sendo então necessário considerar alguma outra alternativa.

Começaremos tomando simultaneamente as coordenadas u e v para reescrever a métrica de Schwarzschild como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega^2, \quad (3.32)$$

onde r é definido em termos de u e v através de

$$\frac{1}{2}(v - u) = r^*. \quad (3.33)$$

No sistema de coordenadas (u, v, θ, φ) a singularidade em $r = 2m$ reaparece no infinito ($v = \infty$ e $u = -\infty$). Para superar este impasse e ter valores finitos nas coordenadas

adotemos a seguinte transformação

$$\begin{aligned} U &= -\exp\left(-\frac{u}{4m}\right), \\ V &= \exp\left(\frac{v}{4m}\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

De modo que a métrica de Schwarzschild passa a ser

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-(r/2m)} dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (3.35)$$

Finalmente a natureza não singular do raio de Schwarzschild se manifesta plenamente, desta forma todos os coeficientes métricos exibem um comportamento adequado em $r = 2m$.

As coordenadas U e V são coordenadas nulas dado que os vetores bases ∂_U , ∂_V são nulos o que não representa problema nenhum, porém às vezes é mais conveniente utilizar sistemas constituídos por coordenadas temporais e espaciais. Portanto, definimos [27]

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(V + U) = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right), \\ R = \frac{1}{2}(V - U) = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right), \end{cases} \quad r > 2m \quad (3.36)$$

e

$$\begin{cases} T = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right), \\ R = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right), \end{cases} \quad r < 2m \quad (3.37)$$

Sob esta mudança de coordenadas o elemento de linha transforma-se

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-(r/2m)} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.38)$$

onde $r = r(T, R)$ é definido implicitamente por

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M}. \quad (3.39)$$

O sistema de coordenadas (T, R, θ, φ) , introduzido por Kruskal [30] e independentemente por Szekeres [31] no ano de 1960, é conhecido como coordenadas de Kruskal-Szekeres. Neste, a singularidade $r = 0$ é localizada em $T^2 - R^2 = 1$, o que significa que em lugar de uma, existem duas singularidades desta natureza cada uma correspondendo a

$$T = \sqrt{1 + R^2}, \quad T = -\sqrt{1 - R^2}. \quad (3.40)$$

Por outro lado, o horizonte de eventos, $r = 2m$, é definido por

$$T = \pm R. \quad (3.41)$$

A região $r > 2m$ é equivalente a $T^2 - R^2 < -1$ de onde podemos concluir que existem igualmente duas regiões exteriores

$$R > |T|, \quad R < -|T|. \quad (3.42)$$

Podemos visualizar isto num diagrama T - R ⁸, fig. (3.4). Nele o espaço-tempo de Schwarzschild aparece dividido em 4 regiões; duas para $r > 2m$ que rotularemos por I e III , e duas para $r < 2m$, II e IV . As Eqs. (3.36) e (3.37) são válidas unicamente em I e II respectivamente. Nas outras duas regiões é possível passar do elemento de linha dado em termo das coordenadas de Kruskal-Szekeres, (3.38), para as coordenadas de Schwarzschild através de transformações similares mas precedidas por um sinal negativo para evitar as mesmas serem imaginárias.

A Eq. (3.39), válida em cada uma das regiões, revela que superfícies $r = \text{constante}$ são hipérbolas cujas assíntotas são definidas pela Eq. (3.41). Enquanto isso, superfícies $t = \text{constante}$ são linhas retas que passam pela origem as quais são dadas por

$$t = \begin{cases} 4m \arctan(T/R) & \text{em } I \text{ e } III. \\ 4m \arctan(R/T) & \text{em } II \text{ e } IV. \end{cases} \quad (3.43)$$

Quando $t \rightarrow \pm\infty$ estas coincidem com o horizonte de eventos.

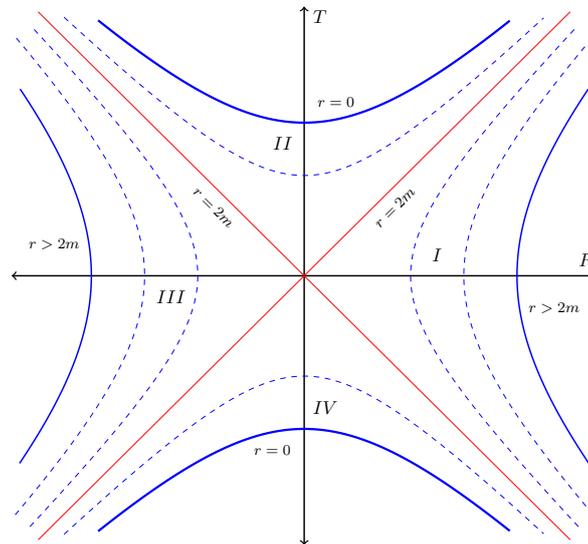


Figura 3.4: Diagrama de Kruskal-Szekeres.

Como se sabe, a região I representa o espaço-tempo de Schwarzschild para $r > 2m$ descrito por coordenadas (t, r) . A região II corresponde à solução de buraco negro. Em conjunto, as duas regiões são descritas pelas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein. A região IV não é mais do que o reverso temporal da região II , partículas ali localizadas

⁸As coordenadas θ e φ foram suprimidas, portanto cada ponto no digrama corresponde a uma 2-esfera.

podem deslocar-se para região I mas não em sentido inverso, por tal motivo comumente é conhecida como *buraco branco*. A superfície $r = 2m$ que lhe limita é denominada *horizonte de eventos passado* enquanto o seu análogo na região II é denominada *horizonte de eventos futuro*. Juntas, estas duas regiões são descritas pelas coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein. Finalmente, a nova região III é geometricamente equivalente à região I , mas desconectados causalmente da mesma.

Mediante a implementação das coordenadas de Kruskal-Szekeres descobrimos a estrutura completa do espaço-tempo de Schwarzschild a qual é bem mas rica e complexa do que se tem ao descrever a geometria deste com as coordenadas (t, r, θ, φ) . Em particular, a aparição regiões III e IV causa intriga e nos leva a questionar o papel que desempenham na física do espaço-tempo de objetos massivos compactos. Todavia, tais regiões são próprias da solução de buracos negros eternos, estas não existem realmente para soluções de buracos negros originados pelo colapso gravitacional de objetos astrofísicos portanto são questões que não devem ser motivo de preocupação.

3.2.4 Diagramas conformes de Penrose-Carter

Os diagramas conformes de Penrose-Carter constituem uma ferramenta muito útil em relatividade geral. Eles são usados para estudar as propriedades assintóticas do espaço-tempo no infinito. Basicamente, a ideia é realizar uma transformação conforme que mapeie todo o espaço-tempo sobre uma região compacta e finita de modo que possamos visualizar a sua estrutura causal completa, a qual é inalterada, de forma simples.

A seguir descrevemos de maneira breve o procedimento para construir o diagrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Schwarzschild⁹. Para este fim, introduziremos as coordenadas (X, Y) definidas a partir das coordenadas de Kruskal-Szekeres (T, R) sob a transformação

$$\begin{aligned} X + Y &= 2 \arctan(T + R), \\ X - Y &= 2 \arctan(T - R). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Os valores que estas coordenadas podem tomar estão determinados por¹⁰

$$\begin{aligned} -\pi &< X + Y < \pi, \\ -\pi &< X - Y < \pi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

O elemento de linha (3.38) é expresso em termos de (X, Y) como

$$ds^2 = \frac{9m^3}{r} e^{-(r/2m)} \left[\cos^2\left(\frac{X+Y}{2}\right) \cos^2\left(\frac{X-Y}{2}\right) \right]^{-1} (-dX^2 + dY^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.46)$$

⁹Os aspectos matemáticos são discutidos em detalhe nas refs. [32, 33]

¹⁰O contradomínio da função $\arctan x$ é o intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$.

e a relação entre r e as novas coordenadas é

$$\left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{r/2m} = \tan\left(\frac{X+Y}{2}\right) \tan\left(\frac{X-Y}{2}\right). \quad (3.47)$$

Conforme a Eq. (3.47) o horizonte $r = 2m$ é identificado com as equações

$$\begin{aligned} X + Y &= 0, \\ X - Y &= 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

e a singularidade em $r = 0$ corresponde a¹¹

$$\begin{aligned} X &= \pi/2, \\ X &= -\pi/2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Quando $T + R \rightarrow \infty$, e $T - R \rightarrow \infty$, temos respetivamente

$$\begin{aligned} X + Y &= \pm\pi, \\ X - Y &= \pm\pi. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Após ter determinado as equações acima, o digrama de Penrose-Carter se obtêm ao realizar o gráfico delas no plano (X, Y) , fig. (3.5).

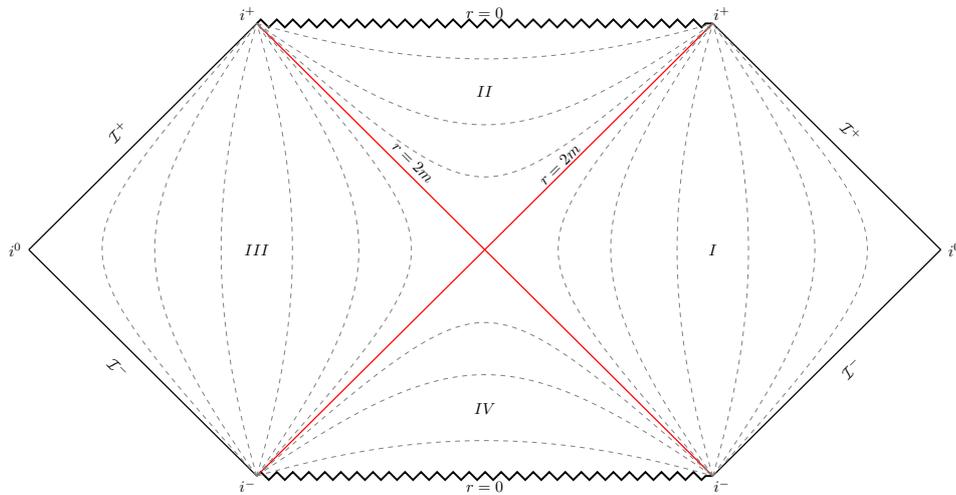


Figura 3.5: Diagrama de Penrose-Carter da solução de Scharzschild.

Desta forma o espaço-tempo é completamente compactado numa região finita do plano (X, Y) . O mecanismo responsável não afeta a aparência dos raios de luz radiais os quais continuam se propagando com 45° de inclinação, o que pode ser corroborado diretamente da Eq. (3.46). O contorno que delimita o diagrama de Penrose-Carter não faz parte do espaço-tempo, ele representa a estrutura conforme no infinito e, como se observa na fig. (3.5), é classificado da seguinte forma

¹¹Para $r = 0$, a Eq. (3.47) se reduz a $\cos(X) = 0$.

$\mathcal{I}^+ \equiv$ *Infinito nulo futuro*: Extremo futuro de geodésicas nulas.

$$(t - r \text{ finito}, t + r \rightarrow \infty)$$

$\mathcal{I}^- \equiv$ *Infinito nulo passado*: Pontos de origem das geodésicas nulas.

$$(t - r \rightarrow -\infty, t + r \text{ finito})$$

$i^0 \equiv$ *Infinito espacial*: Extremo final de geodésica espaciais.

$$(r \rightarrow \infty, t \text{ finito})$$

$i^+ \equiv$ *Infinito temporal futuro*: Extremo futuro de geodésicas temporais.

$$(r \text{ finito}, t \rightarrow \infty)$$

$i^- \equiv$ *Infinito temporal passado*: Pontos de origem das geodésicas temporais.

$$(r \text{ finito}, t \rightarrow -\infty)$$

Como se observa, o digrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Schwarzschild oferece as mesmas informações que o diagrama de Kruskal-Szekeres. Sua real utilidade se evidenciará quando considerarmos outras soluções mais gerais.

3.3 Espaço-tempo de Schwarzschild-de-Sitter

Consideraremos agora uma generalização da solução de Schwarzschild a qual, em adição ao parâmetro de massa m , inclui uma constante cosmológica arbitrária Λ . Este tipo de solução foi encontrada por Kottler [34], Weyl [35] e Trefftz [36] de forma independente.

A solução de Schwarzschild-de Sitter ou de Kottler, como é denominada, é uma solução esfericamente simétrica e estática das equações de Einstein mas levando em consideração a existência de uma constante cosmológica, isto é, uma solução da equação (2.75). Assim, sendo a métrica da forma (3.11), as componentes não nulas do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{00} = \Lambda g_{00}, \tag{3.51}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} (\xi'' + \xi'^2 - \xi'\lambda' + \frac{2}{r}\xi') = -\Lambda,$$

$$R_{11} = \Lambda g_{11}, \tag{3.52}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} (\xi'' + \xi'^2 - \xi'\lambda' - \frac{2}{r}\xi') = -\Lambda,$$

$$R_{22} = \Lambda g_{22}, \tag{3.53}$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} (r\lambda' - r\xi' - 2) + 1 = \Lambda r^2.$$

Subtraindo as Eqs. (3.51) e (3.52) temos

$$\frac{2}{r} (\xi' + \lambda') = 0, \quad (3.54)$$

de modo que $\xi' = -\lambda'$. Substituindo na Eq. (3.53)

$$r (\lambda' e^{-\lambda}) - e^{-\lambda} = \Lambda r^2 - 1, \quad (3.55)$$

ou equivalentemente

$$(r e^{-\lambda})' = 1 - \Lambda r^2. \quad (3.56)$$

Integrando diretamente e dividindo a expressão resultante por r , obtemos

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{C_0}{r}, \quad (3.57)$$

onde C_0 é uma constante de integração. No caso em que a constante cosmológica seja nula, a solução de Schwarzschild-de Sitter se reduz à solução de Schwarzschild de modo que $C_0 = 2m$. Assim, o elemento de linha é escrito na seguinte forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.58)$$

Para pequenos valores de r esta solução apresenta um comportamento semelhante à solução de Schwarzschild pelo que podemos vê-la como uma representação da solução exterior de um buraco negro neste limite. Por outro lado, a mesma tende à solução de Sitter ou anti-de Sitter dependendo do sinal de Λ quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, a Eq. (3.58) pode ser interpretada como o campo exterior de um corpo massivo (ou buraco negro) imerso em um universo de de-Sitter ou anti-de Sitter. No caso de ter $m = 0$, o espaço-tempo de Kottler corresponde ao espaço-tempo de Sitter ou anti-de Sitter em suas formas esfericamente simétricas [37].

3.3.1 Singularidades na solução de Schwarzschild-de Sitter

Da mesma forma que na métrica de Schwarzschild, os valores da coordenada θ para os quais g_{22} e g_{33} se anulam, ($\theta = 0, \pi$), correspondem a singularidades de coordenadas, enquanto em $r = 0$ existe uma singularidade da curvatura. Para vislumbrar a presença de possíveis horizontes devemos centrar nossa atenção na componente g_{00} e determinar os valores de r para os quais se anula, isto é,

$$1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 = 0, \quad (3.59)$$

que se reescreve em forma equivalente como

$$\left(r^3 - \frac{3}{\Lambda}r + \frac{6m}{\Lambda}\right) = 0. \quad (3.60)$$

Esta é uma equação de terceiro grau em r cujas raízes dependem do sinal de Λ . São três os casos para $\Lambda > 0$ dependendo dos valores que $m\Lambda$ possa assumir:

1. $\Lambda m^2 < 1/9$

Neste caso a Eq. (3.60) possui três raízes reais distintas dadas por

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\psi}{3}\right), \\ r_2 &= \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\psi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), \\ r_3 &= \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\psi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde $r_3 = -(r_1 + r_2)$ é negativa e portanto desprovida de sentido físico, e $\cos \psi = -3m\sqrt{\Lambda}$ de maneira que $\pi < \psi < 3\pi/2$. Daqui segue

$$2m < r_1 < 3m < \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} < r_2 < \frac{3}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (3.62)$$

Vemos então que o espaço-tempo é dividido em tres regiões que denotaremos por I , II e III para $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$, e $r > r_2$, respetivamente. O horizonte em r_1 é similar ao horizonte de eventos de um buraco negro e o horizonte em $r = r_2$ equivalente ao horizonte cosmológico do espaço-tempo de de-Sitter.

Expressando a componente g_{00} da métrica como

$$g_{00} = \frac{\Lambda}{3r}(r - r_1)(r - r_2)(r + r_1 + r_2), \quad (3.63)$$

podemos ver que $g_{00} < 0$ nas regiões I e III o que indica que r representa a coordenda temporal enquanto t representa a coordenada espacial, tendo como consequência o espaço-tempo ser dependente do tempo. Ao contrário, na região II o espaço-tempo é estático pois $g_{00} > 0$, nesta região r e t desempenham o papel usual de coordenadas espacial e temporal respectivamente.

2. $\Lambda m^2 = 1/9$

Há três raízes reais, das quais duas são iguais

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = 3m, \\ r_3 &= -6m. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Como consequência, aparece um horizonte de Killing duplamente degenerado em $r = 3m$. Como é apontado em [38], os horizontes de eventos r_1 e cosmológico r_2 do primeiro caso se juntam e formam um só. Assim, $g_{00} > 0$ em todo o espaço. Isto implica que o vetor de Killing é tipo espaço em todos pontos de modo que não existe região estática alguma ainda que o espaço-tempo seja homogêneo. Para mais detalhes consultar [39], o diagrama de Penrose-Cartan é construído em [40].

3. $\Lambda m^2 > 1/9$

Neste caso existe uma única raiz real dada por

$$r_1 = \left(-\frac{3M}{\Lambda} + \sqrt{\frac{9m^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{\Lambda^3}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{3m}{\Lambda} - \sqrt{\frac{9m^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{\Lambda^3}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.65)$$

Nota-se que $r_1 < 0$, como consequência não há horizonte de eventos. Neste caso, r é uma coordenada temporal em todo o espaço-tempo. O diagrama de Penrose-Cartan correspondente é elaborado em [40, 41].

3.3.2 Estrutura global da solução de Schwarzschild-de Sitter: $\Lambda m^2 < 1/9$

A análise do comportamento da solução de Schwarzschild-de Sitter em ambos os horizontes e sua extensão maximal segue o mesmo raciocínio aplicado no caso da solução de Schwarzschild. Isto quer dizer que o uso de sistemas de coordenadas do tipo Eddington-Finkelstein e Kruskal-Zsekeres é igualmente válido:

$$\begin{aligned} (v, r) & \rightarrow (u, v) \rightarrow (U, V) \rightarrow (T, R). \\ (u, r) & \end{aligned} \quad (3.66)$$

A diferença que surge ao termos dois horizontes é que se torna necessário considerar dois sistemas de coordenadas diferentes, um para cada, pois não existe um único que consegue cobrir inteiramente o espaço-tempo. Aquele adaptado para ser regular em r_1 é singular em r_2 e vice-versa.

As coordenadas avançadas e retardadas de Eddington-Finkelstein são definidas igualmente pelas Eqs. (3.27), não obstante a coordenada r^* é redefinida por

$$\begin{aligned} r^* & \equiv - \int \frac{dr}{g_{00}} = - \frac{3}{\Lambda} \int \frac{r dr}{(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)}, \\ & = \frac{3}{\Lambda} [A \ln(r - r_1) + B \ln(r - r_2) + C \ln(r - r_3)], \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde as constantes A, B e C correspondem a

$$A = \frac{r_1}{(r_2 - r_1)(r_1 - r_3)}, \quad B = -\frac{r_2}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)}, \quad C = -\frac{r_3}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}. \quad (3.68)$$

Uma vez que $g_{00} < 0$ em (r_1, r_2) , r^* é uma função monotônica crescente de r nesse intervalo e como consequência da Eq. (3.67) temos

$$\lim_{r \rightarrow r_1} r^* = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow r_2} r^* = +\infty. \quad (3.69)$$

Usando as coordenadas avançadas e retardadas de Eddington-Finkelstein a métrica no caso em questão toma as formas (3.29)-(3.31) as quais são regulares em $r = r_1, r_2$. Não obstante passaremos diretamente a introduzir coordenadas do tipo Kruskal-Szekeres devido a estas darem uma visão mais geral e completa sobre a geometria do espaço-tempo.

Coordenadas tipo Kruskal-Szekeres no horizonte de eventos, r_1 :

Consideremos as coordenadas (U, V) as quais são definidas como [40, 42]

$$\begin{aligned} U_1 &= -\exp\left(-\frac{u}{2k_1}\right), \\ V_1 &= \exp\left(\frac{v}{2k_1}\right), \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde $k_1 = 3r_1/\Lambda(r_2 - r_1)(r_1 - r_3)$.

Em conformidade com a expressão dada para r^* temos então

$$\begin{aligned} U_1 &= -(r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a/2}(r - r_3)^{-b/2} \exp\left(-\frac{t}{2k_1}\right), \\ V_1 &= (r - r_1)^{1/2}(r - r_2)^{-a/2}(r - r_3)^{-b/2} \exp\left(\frac{t}{2k_1}\right), \end{aligned} \quad (3.71)$$

com $a = r_2(r_1 - r_3)/r_1(r_2 - r_3)$ e $b = r_3(r_2 - r_1)/r_1(r_2 - r_3)$.

A métrica, em termos de tais coordenadas, se escreve como

$$ds^2 = \frac{4\Lambda k_1^2}{3r} (r_2 - r)^{(1+a/2)} (r - r_3)^{(1+b/2)} dU_1 dV_1 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.72)$$

Introduzimos então as coordenadas de Kruskal-Szekeres, que na região $r_1 \leq r < r_2$ são expressas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}(V_1 + U_1) = (r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a/2}(r - r_3)^{-b/2} \sinh\left(\frac{t}{2k_1}\right), \\ R_1 &= \frac{1}{2}(V_1 - U_1) = (r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a/2}(r - r_3)^{-b/2} \cosh\left(\frac{t}{2k_1}\right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

e na região $0 < r \leq r_1$ por

$$\begin{aligned} T_1 &= (r_1 - r)^{1/2} (r_2 - r)^{-a/2} (r - r_3)^{-b/2} \cosh\left(\frac{t}{2k_1}\right), \\ R_1 &= (r_1 - r)^{1/2} (r_2 - r)^{-a/2} (r - r_3)^{-b/2} \sinh\left(\frac{t}{2k_1}\right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Note que, quando $r \rightarrow r_2$, as coordenadas T e R tendem ao infinito. A transformação inversa que define r em termos de T e R em ambas as regiões é dada pela equação

$$T^2 - R^2 = -(r - r_1)(r_2 - r)^{-a}(r - r_3)^{-b}, \quad (3.75)$$

enquanto para a coordenada t temos

$$t = \begin{cases} 2k_1 \arctan\left(\frac{R}{T}\right) & 0 < r \leq r_1. \\ 2k_1 \arctan\left(\frac{T}{R}\right) & r_1 \leq r < r_2. \end{cases} \quad (3.76)$$

Neste sistema de coordenadas, a solução de Schwarzschild-de Sitter é reescrita como

$$ds^2 = \frac{4k_1^2}{3r} (r_2 - r)^{(1+a)} (r - r_3)^{(1+b)} (-dT_1^2 + dR_1^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (3.77)$$

Como pode se apreciar, o elemento de linha é completamente regular em $r = r_1$, mas, ainda singular em $r = r_2$. Sendo assim, a Eq. (3.77) é a extensão analítica da métrica na forma (3.58) e descreve o espaço-tempo no intervalo $(0, r_2)$.

No sistema de coordenadas (T_1, R_1) , a singularidade em $r = 0$ é determinada pela equação

$$T_1^2 - R_1^2 = r_1 r_2^{-a} (r_1 + r_2)^{-b}, \quad (3.78)$$

o que implica que existem duas singularidades deste tipo, como no caso do espaço-tempo de Schwarzschild, cada uma dada por

$$T_1 = \pm \sqrt{C_0 + R_1^2}, \quad (3.79)$$

onde $C_0 = r_1 r_2^{-a} (r_1 + r_2)^{-b}$.

Para $r = 2m$ temos

$$T_1 = \pm R_1. \quad (3.80)$$

Em geral, valores arbitrários de r nos intervalos $(0, r_1)$ e (r_1, r_2) definem hipérbolas no plano T - R . Em particular quando $r \rightarrow r_2$ o lado direito da Eq. (3.75) diverge.

Na fig. (3.6), a qual é bem parecida com o diagrama de Kruskal-Szekeres da métrica de Schwarzschild, podemos observar graficamente o comportamento global da métrica de Schwarzschild-de Sitter no intervalo $(0, r_2)$. O espaço-tempo é dividido em 4 regiões. A região I' corresponde à parte estática deste, enquanto a região II' é a solução para um buraco negro cujo horizonte é a assintota $T = R$. As regiões III' e IV' são cópias de I' e II' respectivamente. Estas são definidas igualmente pelas transformações (T, R) das primeiras,

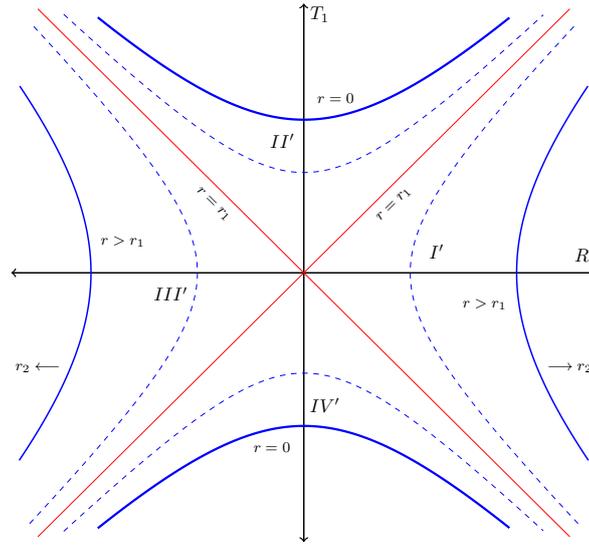


Figura 3.6: Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $0 < r < r_2$ no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

mas com sinal trocado.

Coordenadas tipo Kruskal-Szekeres no horizonte cosmológico, r_2 :

O sistema de coordenadas (T_1, R_1) do tipo Kruskal-Szekeres, definido pelas transformações (3.73) e (3.74), não é regular em $r = r_2$ onde elas tornam-se infinitas. É por isso que devemos lhe redefinir para que a métrica seja bem comportada neste horizonte. Neste caso definimos então as coordenadas (U, V) como [40, 42]

$$\begin{aligned} U_2 &= \exp\left(\frac{u}{2k_2}\right), \\ V_2 &= -\exp\left(-\frac{v}{2k_2}\right), \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde $k_2 = 3r_2/\Lambda(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)$.

Devido a (3.67), temos

$$\begin{aligned} U_2 &= (r - r_1)^{-1/2a} (r_2 - r)^{1/2} (r - r_3)^{b/2} \exp\left(\frac{t}{2k_2}\right), \\ V_2 &= -(r - r_1)^{-1/2a} (r_2 - r)^{-1/2} (r - r_3)^{b/2} \exp\left(-\frac{t}{2k_1}\right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Como consequência a métrica é expressa agora como

$$ds_2^2 = -\frac{4\Lambda k_2^2}{3r} (r - r_1)^{(1+1/a)} (r - r_3)^{1-b} dU_2 dV_2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.83)$$

As coordenadas de Kruskal-Szekeres para a região $r_1 < r \leq r_2$ são definidas então por

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}(V_2 + U_2) = (r - r_1)^{-1/2a}(r_2 - r)^{1/2}(r - r_3)^{b/2} \sinh\left(\frac{t}{2k_1}\right), \\ R_2 &= \frac{1}{2}(V_2 - U_2) = -(r - r_1)^{-1/2a}(r_2 - r)^{1/2}(r - r_3)^{b/2} \cosh\left(\frac{t}{2k_1}\right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

enquanto para região $r \geq r_2$ se tem

$$\begin{aligned} T_2 &= -(r - r_1)^{-1/2a}(r - r_2)^{1/2}(r - r_3)^{b/2} \cosh\left(\frac{t}{2k_1}\right), \\ R_2 &= (r - r_1)^{-1/2a}(r - r_2)^{1/2}(r - r_3)^{b/2} \sinh\left(\frac{t}{2k_1}\right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Observemos que quando $r \rightarrow r_1$, a coordenada $T_2 \rightarrow \infty$ e $R_2 \rightarrow -\infty$.

A transformação inversa das Eqs. (3.84) e (3.85) é determinada pelas equações

$$T_2^2 - R_2^2 = -(r - r_1)^{-1/a}(r - r_2)(r - r_3)^b, \quad (3.86)$$

$$t = \begin{cases} -2k_2 \arctan\left(\frac{T_2}{R_2}\right) & r_1 < r \leq r_2. \\ -2k_2 \arctan\left(\frac{R_2}{T_2}\right) & r_2 \leq r. \end{cases} \quad (3.87)$$

Desta vez o elemento de linha toma a forma

$$ds_2^2 = \frac{4\Lambda k_2^2}{3r} (r - r_1)^{(1+1/a)} (r - r_3)^{1-b} (-dT_2^2 + dR_2^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (3.88)$$

Com o uso das coordenadas (T_2, R_2) a solução de Schwarzschild-de Sitter passa a ser regular em $r = r_2$ mas permanece singular em $r = r_1$ onde g_{TT} e g_{RR} são nulos.

De acordo com a Eq. (3.86) o horizonte $r = r_2$ corresponde a

$$T_2 = \pm R_2. \quad (3.89)$$

Quando $r \rightarrow r_1$, $T_2^2 - R_2^2 \rightarrow \infty$. Por outro lado, $T_2^2 - R_2^2 \rightarrow -1$ quando $r \rightarrow \infty$ pois

$$\begin{aligned} (r - r_1)^{-1/a} (r - r_2) (r - r_3)^b &\approx r^{1+(b-1/a)} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.90)$$

aqui levamos em conta que $1/a - b = 1$.

É assim que a singularidade no infinito é representada por duas hipérbolas

$$T_2 = \pm \sqrt{1 + R_2^2}. \quad (3.91)$$

A extensão analítica da solução de Schwarzschild-de Sitter através de $r = r_2$ é representada na fig. (3.7). A região I'' é exatamente igual à região I' do diagrama de Kruskal-Szekeres correspondente ao horizonte de eventos $r = r_1$, fig. (3.4). Isto decorre do fato dos sistemas de coordenadas (T_1, R_1) e (T_2, R_2) nestas duas regiões, serem representações diferentes

da mesma região do espaço-tempo, e portanto todas as transformações em questão são difeomorfismos em r para intervalo (r_1, r_2) . A região II'' corresponde a parte cosmológica da métrica. A região III'' é imagem análoga da região III' em $0 < r < r_1$, e a região IV'' é uma cópia de II'' .

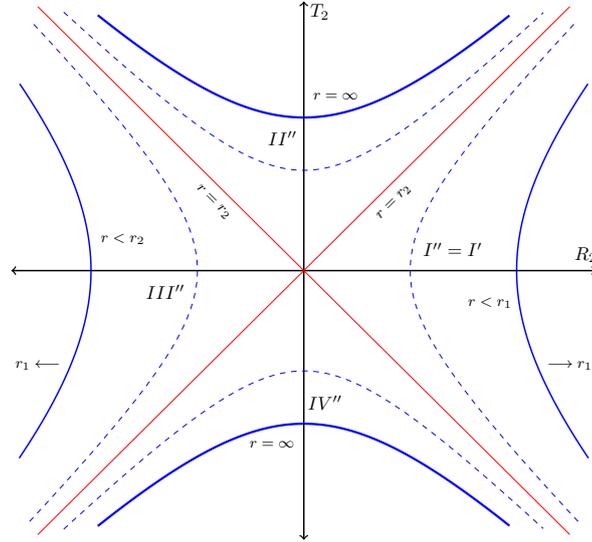


Figura 3.7: Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $r_1 < r < \infty$ no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

Após introduzir sistemas de coordenadas do tipo Kruskal-Szkeres para eliminar o comportamento irregular da métrica em cada um dos horizontes, devemos construir uma extensão analítica completa do espaço-tempo já que como vimos, unicamente é possível usar transformações de coordenadas que permitem suprimir as singularidades de forma exclusiva entre estas. O melhor caminho para fazer isto é considerar o diagrama de Penrose-Carter da solução de Schwarzschild-de Sitter.

Para construir o diagrama de Penrose-Carter procedemos de forma similar ao que fizemos no caso da solução de Schwarzschild. A partir dos sistemas de coordenadas (T_1, R_1) e (T_2, R_2) introduzimos transformações conformes da forma (3.44), de onde obteremos representações compactas das regiões do espaço-tempo exibidas nos diagramas (3.6) e (3.7). Em seguida, combinando-as chegaremos à extensão analítica da variedade através dos dois horizontes r_1 e r_2 a qual revela a estrutura global do espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter. O diagrama de Penrose-Carter para estas solução se ilustra a seguir, fig. (3.8).

A extensão maximal do espaço-tempo mostra que este é constituído por uma sequência infinita de regiões equivalentes aos espaço-tempos de Schwarzschild e de de Sitter, delimitados por singularidades em $r = 0$ e "infinitos" conformes \mathcal{I}^\pm em $r = +\infty$. Nas regiões do tipo Schwarzschild, a singularidade em $r = 0$ é localizada atrás dos horizontes de eventos localizados em $r = r_1$.

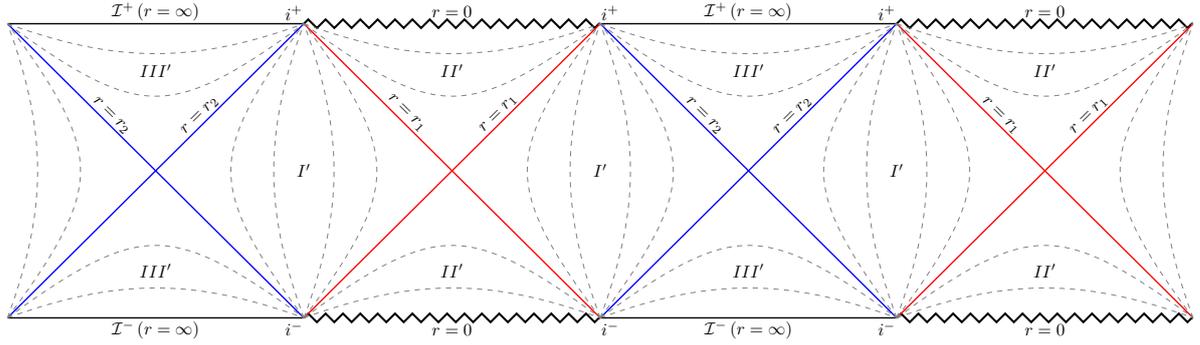


Figura 3.8: Diagrama Penrose-Carter da solução de Schwarzschild-de Sitter.

3.4 Solução de Reissner-Nordström

Consideraremos agora o caso no qual a solução de Schwarzschild é modificada pela adição de uma carga elétrica. Uma solução deste tipo foi obtida independentemente por Reissner (1916) [43], Weyl (1917) [44] e Nordström (1918) [45], embora seja conhecida unicamente pelos nome de dois deles. A solução de Reissner-Nordström descreve a geometria do espaço-tempo estático e esfericamente simétrico ao redor de uma distribuição de massa e carga central.

Para encontrar uma expressão explícita para tal solução devemos resolver as equações de Einstein-Maxwell, isto é, as equações de campo de Einstein (2.72) onde $T_{\mu\nu}$ corresponde com o tensor de energia-momento de Maxwell que é definido nas regiões livres de carga como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \right), \quad (3.92)$$

sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor eletromagnético. Este satisfaz as equações de Maxwell

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{;\mu} &= 0, \\ F_{[\mu\nu,\lambda]} &= 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

A partícula carregada gera um campo elétrico radial $E(r)$ de modo que o tensor eletromagnético particularmente se reduz a

$$F_{\mu\nu} = E(r)(\delta_{\mu r}\delta_{\nu t} - \delta_{\mu t}\delta_{\nu r}). \quad (3.94)$$

A hipótese de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico nos permite expressar o elemento de linha da forma (3.11) de modo que a equação de Einstein-Maxwell, em concordância com as considerações anteriores, conduz a

$$E(r) = \frac{q}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\xi(r)+\lambda(r))}, \quad (3.95)$$

onde q é uma constante de integração. Igualmente a Schwarzschild, a solução de Reissner-Nordström é assintoticamente plana pelo que as funções ξ e λ tendem a zero quando $r \rightarrow \infty$, portanto, neste limite, $E(r) \sim q/r^2$. Este é exatamente o campo de uma carga pontual q situada na origem, em vista do qual interpretamos a constante de integração q como sendo a carga da partícula¹².

Introduzindo a expressão acima para o campo elétrico nas equações de Einstein-Maxwell, encontraremos que $\xi = -\lambda$ e conseqüentemente a seguinte equação diferencial

$$(re^\xi)' = 1 - \frac{q^2}{r^2}, \quad (3.96)$$

que integrando imediatamente resulta em

$$e^\xi = 1 + \frac{c}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (3.97)$$

onde c é uma constante de integração. Quando $q = 0$ a solução de Reissner-Nordström se reduz à solução de Schwarzschild pelo que esta é associada à massa da partícula, especificamente $c = 2m$. A solução de Reissner-Nordström é escrita então como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 \Omega^2. \quad (3.98)$$

Como foi mostrado anteriormente, a solução de Schwarzschild com $m > 0$ pode ser interpretada como o campo gravitacional de um buraco negro. Similarmente, a métrica (3.98) pode ser interpretada como a solução que descreve o espaço-tempo de um *buraco negro carregado*. Por outro lado, existe um análogo do teorema de Birkhoff que estabelece que a solução de Reissner-Nordström é a única solução esfericamente simétrica, estática e assintoticamente plana das equações de Einstein-Maxwell [46]. Portanto, a região exterior de uma distribuição de massa com carga e esfericamente simétrica é definida por esta métrica.

3.4.1 Singularidades na solução de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström possui uma singularidade da curvatura em $r = 0$ como pode ser mostrado calculando $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. As singularidades coordenadas ou horizontes ocorrem, como é sabido, quando $g_{00} = 0$. Portanto devemos resolver a equação

$$r^2 - 2m + e^2 = 0. \quad (3.99)$$

Como bem sabemos, esta é uma equação quadrática, cujas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= m - \sqrt{m^2 - e^2}, \\ r_2 &= m + \sqrt{m^2 - e^2}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

¹²Formalmente tal associação deve ser feita usando a lei de Gauss.

Dependendo da relação entre os valores da massa e da carga, temos três possibilidades:

- $\mathbf{m} > |\mathbf{e}|$: Neste caso há dois horizontes, localizados cada um em r_1 e r_2 . O espaço-tempo é dividido em três regiões: $0 < r < r_1$, $r_1 < r < r_2$, $r_2 < r < \infty$. No limite $e \rightarrow 0$ o horizonte em r_1 colapsa em $r = 0$ enquanto o outro vai para $r = 2m$.
- $\mathbf{m} = |\mathbf{e}|$: As duas raízes são iguais portanto existe um único horizonte localizado em $r_0 = m$. Não se aplica o limite de Schwarzschild.
- $\mathbf{m} < |\mathbf{e}|$: As Eqs. são (3.100) são complexas pelo que não existe horizonte nenhum. Igualmente não se aplica o limite de Schwarzschild.

No primeiro caso podemos escrever o coeficiente métrico g_{00} em termo de r_1 e r_2 como

$$g_{00} = -\frac{1}{r^2}(r - r_1)(r - r_2). \quad (3.101)$$

Vemos então que para $r > r_2$, r desempenha o papel de coordenada radial e t de coordenada temporal. A solução de Reissner-Nordström pode ser considerada então como uma pequena perturbação do espaço-tempo de Schwarzschild nesta região. A singularidade de coordenada em $r = r_2$ se interpretada como um horizonte de eventos. Dentro deste, em $r_1 < r < r_2$, r passa a ser uma coordenada temporal e t espacial de modo que o espaço-tempo deixa de ser estático. De fato, a estrutura do espaço-tempo próximo de $r = 0$ muda drasticamente. Não unicamente pelo fato de ter um horizonte adicional em $r = r_1$, mas também porque na região interior $0 < r < r_1$ é novamente estático, a coordenada r torna-se espacial novamente e t temporal.

Coordenadas do tipo Kruskal-Szekeres no horizonte interno $r = r_1$

A fim de esclarecer a natureza dos horizontes e da estrutura global do espaço-tempo, é apropriado introduzir mais uma vez, coordenadas do tipo Kruskal-Szekeres. Contudo, analogamente ao caso da solução de Schwarzschild-de Sitter, é necessário considerar dois sistemas de coordenadas pois não é possível remover ambas singularidades simultaneamente.

Foquemos nossa atenção no horizonte interno, $r = r_1$. Seguindo o procedimento padrão introduzimos as coordenadas U_1 e V_1 definidas por [40, 47]

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 \exp\left(\frac{u}{\alpha_1}\right), \\ V_1 &= -\alpha_1 \exp\left(-\frac{v}{\alpha_1}\right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

onde $\alpha_1 = 2r_1^2/(r_2 - r_1)$.

Sendo u e v as coordenadas de Eddington-Finkelstein, r^* é dada nesta ocasião por

$$\begin{aligned}
r^* &= - \int \frac{dr}{g_{00}} \\
&= r + \frac{r_2^2}{(r_2 - r_1)} \ln(r - r_2) - \frac{r_1^2}{(r_2 - r_1)} \ln(r - r_1),
\end{aligned} \tag{3.103}$$

tal que

$$\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_1(r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a} e^{(-\frac{r}{\alpha_1})} \exp(\frac{t}{\alpha_1}), \\
V_1 &= -\alpha_1(r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a} e^{(-\frac{r}{\alpha_1})} \exp(-\frac{t}{\alpha_1}),
\end{aligned} \tag{3.104}$$

onde $a = r_1^2/2r_2^2$.

A métrica de Reissner-Norsdröm é então escrita como

$$ds^2 = -\frac{1}{r^2}(r_2 - r)^{(1+2a)} \exp(-2\frac{r}{\alpha_1}) dU_1 dV_1 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.105}$$

Estamos agora em posição de utilizar coordenadas do tipo Kruskal-Szekers, definidas especificamente por

$$\begin{cases} T_1 = \alpha_1(r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a} e^{(-\frac{r}{\alpha_1})} \sinh(\frac{t}{\alpha_1}) \\ R_1 = \alpha_1(r - r_1)^{1/2}(r_2 - r)^{-a} e^{(-\frac{r}{\alpha_1})} \cosh(\frac{t}{\alpha_1}) \end{cases} \quad r_1 \leq r < r_2, \tag{3.106}$$

$$\begin{cases} T_1 = \alpha_1(r_1 - r)^{1/2}(r_2 - r)^{-a} e^{(-\frac{r}{\alpha_1})} \cosh(\frac{t}{\alpha_1}) \\ R_1 = \alpha_1(r_1 - r)^{1/2}(r_2 - r)^{-a} e^{(-\frac{r}{\alpha_1})} \sinh(\frac{t}{\alpha_1}) \end{cases} \quad 0 < r \leq r_1. \tag{3.107}$$

Nestas coordenadas o elemento de linha (3.105) torna-se

$$ds^2 = \frac{1}{r^2}(r_2 - r)^{(1+2a)} e^{(-2\frac{r}{\alpha_1})} (-dT_1^2 + dR_1^2) + r^2 d\Omega^2. \tag{3.108}$$

Escrita desta forma, a métrica é regular em $r = r_1$ mas descontínua em $r = r_2$ e descreve o espaço-tempo na região $0 < r < r_2$.

A equação que define r em termos de (T_1, R_1) é

$$T_1^2 - R_1^2 = (\alpha_1)^2 (r_1 - r)(r_2 - r)^{-2a} e^{(-2\frac{r}{\alpha_1})}. \tag{3.109}$$

Daqui temos que para $r = r_1$

$$T_1 = \pm R_1, \tag{3.110}$$

que divide o espaço-tempo em 4 regiões. Adicionalmente

$$\begin{aligned}
T_1^2 - T_1^2 &= (\alpha_2)^2 r_1 / r_2^{2a} & r = 0, \\
T_1^2 - T_1^2 &\rightarrow -\infty & r \rightarrow r_2.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Na fig. (3.9) é apresentado o diagrama do tipo Kruskal-Szekeres relativo ao horizonte interno da solução de Reissner-Nordström.

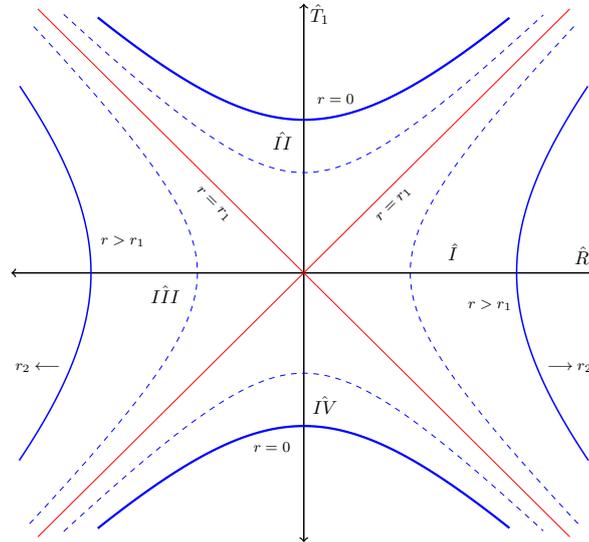


Figura 3.9: Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $0 < r < r_2$ no espaço-tempo de Reissner-Nordström.

Coordenadas do tipo Kruskal-Szekeres no horizonte externo $r = r_2$

Para a estrutura externa, um conjunto alternativo de coordenadas U_2, V_2 pode ser definido por [40, 47]

$$\begin{aligned} U_2 &= -\alpha_2 \exp\left(-\frac{u}{\alpha_2}\right), \\ V_2 &= \alpha_2 \exp\left(\frac{v}{\alpha_2}\right), \end{aligned} \quad (3.112)$$

com $\alpha_2 = 2r_2^2/(r_2 - r_1)$.

De acordo com a expressão para r^* temos

$$\begin{aligned} U_2 &= -\alpha_2(r - r_2)^{1/2}(r - r_1)^{-b} e^{\left(\frac{r}{\alpha_2}\right)} \exp\left(-\frac{t}{\alpha_2}\right), \\ V_2 &= \alpha_2(r - r_2)^{1/2}(r - r_1)^{-b} e^{\left(\frac{r}{\alpha_2}\right)} \exp\left(\frac{t}{\alpha_2}\right), \end{aligned} \quad (3.113)$$

de modo que o elemento de linha é escrito agora como

$$ds^2 = -\frac{1}{r^2}(r - r_1)^{(1+2b)} e^{\left(-\frac{2r}{\alpha_2}\right)} dU_2 dV_2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.114)$$

onde $b = r_2^2/2r_1^2$.

As coordenadas (T_2, R_2) são dadas então por

$$\begin{cases} T_2 = \alpha_2(r - r_2)^{1/2}(r - r_1)^{-b}e^{(\frac{r}{\alpha_2})} \sinh(\frac{t}{\alpha_2}) \\ R_2 = \alpha_2(r - r_2)^{1/2}(r - r_1)^{-b}e^{(\frac{r}{\alpha_2})} \cosh(\frac{t}{\alpha_2}) \end{cases} \quad r \leq r < r_2 < \infty, \quad (3.115)$$

$$\begin{cases} T_2 = \alpha_2(r - r_2)^{1/2}(r - r_1)^{-b}e^{(\frac{r}{\alpha_2})} \sinh(\frac{t}{\alpha_2}) \\ R_2 = \alpha_2(r - r_2)^{1/2}(r - r_1)^{-b}e^{(\frac{r}{\alpha_2})} \cosh(\frac{t}{\alpha_2}) \end{cases} \quad r_1 < r \leq r_2, \quad (3.116)$$

segundo as quais a métrica é expressa por

$$ds^2 = \frac{1}{r^2}(r - r_1)^{(1+2b)}e^{(-\frac{2r}{\alpha_2})}(-dT_2^2 + dR_2^2) + r^2d\Omega^2, \quad (3.117)$$

que é contínua em $r = r_2$. Escrita desta forma, a métrica descreve a região compreendida entre $r = r_1$, passando pelo horizonte externo, até infinitos valores da coordenada radial. Nota-se que no horizonte interno a expressão (3.117) é singular.

Em semelhança ao caso anterior, $r = r_2$ corresponde às retas $T_2 \pm R_2 = 0$ as quais dividem o espaço-tempo em 4 regiões distintas. Também, $T_2^2 - R_2^2 \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow r_1$, e $T_2^2 - R_2^2 \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$, ver fig. (3.10).

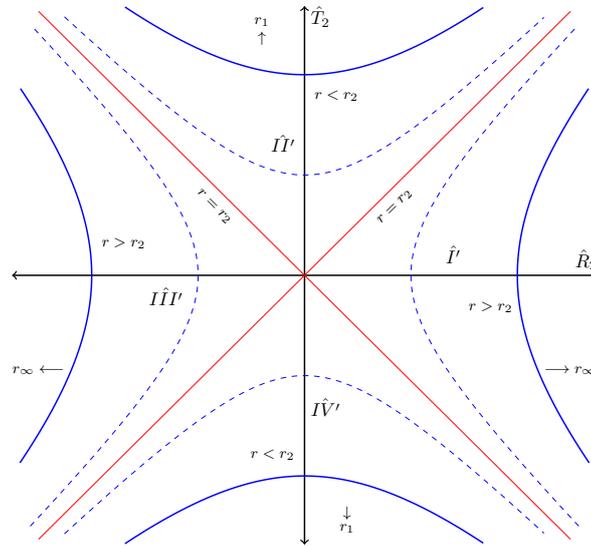


Figura 3.10: Diagrama de Kruskal-Szekeres da região $r_1 < r < \infty$ no espaço-tempo de Reissner-Nordström.

Tendo obtido separadamente extensões das regiões $0 < r < r_2$ e $r_1 < r < \infty$ graças à implementação de coordenadas do tipo Kruskal-Szekeres, podemos então realizar a compactificação destas e construir o diagrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Reissner-Nordström, para $m^2 > e^2$, sob a mesma ideia aplicada para desenhar o diagrama equivalente para a solução de Schwarzschild-de Sitter.

Após a compactificação das coordenadas e a sobreposição das diferentes seções do espaço-tempo resultantes no processo, a parte localizada no exterior de $r = r_2$ pode ser prolongada através de cada horizonte para construir o diagrama conforme para todo o espaço-tempo¹³, fig. (3.11). Nele se revela que a extensão maximal completa do espaço-tempo de Reissner-Nordström consiste em uma sequência infinita de estruturas idênticas cada uma delas contendo duas regiões exteriores e interiores, dois horizontes tanto externos como internos e duas singularidade de curvatura de natureza temporal em $r = 0$.

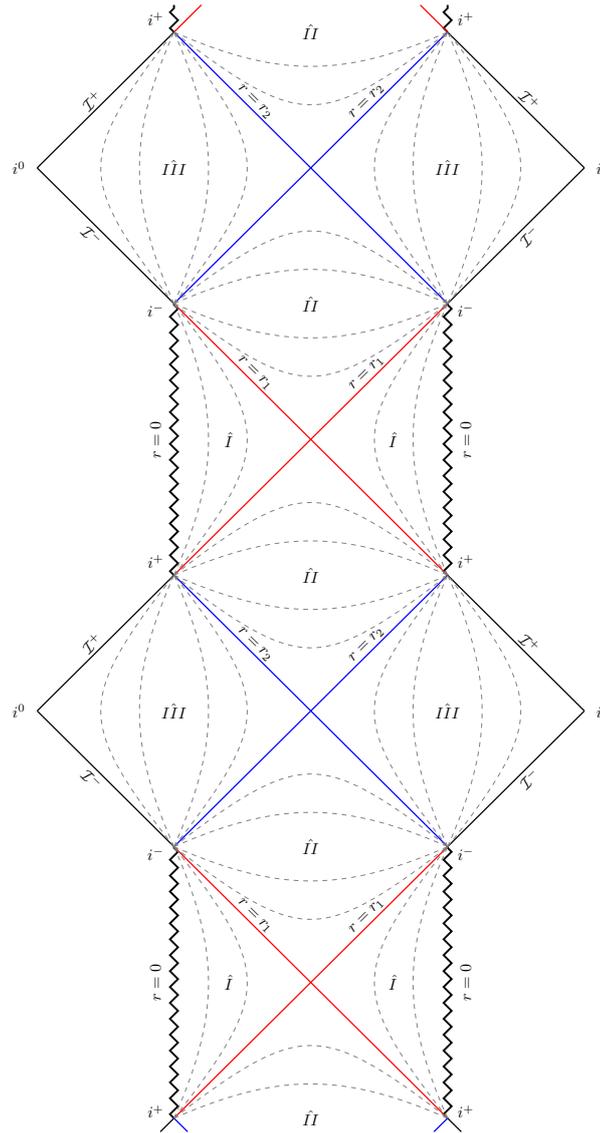


Figura 3.11: Diagrama de Penrose-Carter da solução de Reissner-Nordström.

No diagrama de Penrose-Carter podemos distinguir, na região exterior $r > r_2$, uma estrutura similar à que caracteriza o espaço-tempo de Schwarzschild cujo digrama conforme

¹³Sistemas de coordenadas capazes de cobrir mais de um horizonte foram propostos por Israel [48] e Klösch [49].

é dado na fig. (3.5). As duas regiões externas estão causalmente desconectadas, uma partícula real não poderia ir de uma para outra seguindo curvas tipo tempo. Por outro lado, partículas localizadas numa destas duas regiões podem atravessar o horizonte externo e alcançar qualquer um dos dois horizontes internos em $r = r_1$. Além destes, encontrariam uma região estática contendo uma singularidade nua em $r = 0$. Em princípio, o movimento das partículas poderia acabar na singularidade mas, em vista do caráter repulsivo da mesma isto não é possível. As partículas devem seguir geodésicas que cruzam um outro horizonte interno de modo que emergem, através de um buraco branco externo, numa outra região exterior assintoticamente plana similar àquela de onde se partiu.

Do diagrama de Penrose-Carter vemos também que o horizonte externo corresponde a um horizonte de eventos em relação ao infinito \mathcal{I}^+ e o infinito temporal i^+ , isto é, eventos em $r < r_2$ não podem ser vistos nesses pontos. Para estabelecer o caráter do horizonte interno, em primeiro lugar notemos que a região interior $0 < r < r_1$ é limitada parcialmente por singularidade nua (temporal) em $r = 0$. O passado causal de qualquer evento nesta região pode ser estendido e incluir tanto a região intermédia $r_1 < r < r_2$ como a singularidade em si. Deste modo, a superfície nua em $r = r_1$ pode ser interpretada como um *horizonte de Cauchy* no sentido de que todos os pontos fora dela são determinados unicamente por condições de Cauchy dados previamente em alguma seção espacial através de todo o espaço-tempo.

3.4.2 Solução de Reissner-Nordström com constante cosmológica

A métrica de Reissner-Nordström-de Sitter (anti-de Sitter) é uma solução das equações de Einstein-Maxwell que descreve a geometria do espaço-tempo esfericamente simétrico de um objeto massivo e carregado, que inclui uma constante cosmológica positiva (negativa). Esta métrica representa uma generalização da solução de Reissner-Nordström. Nas coordenadas de Schwarzschild, o elemento de linha correspondente é escrito como [50]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.118)$$

Esta expressão é obtida de forma semelhante a como se obtém a solução de Reissner-Nordström, mas desta vez considerando a equação de campo de Einstein com constante cosmológica, Eq. (2.75). A solução (3.118) é contida num conjunto de soluções mais geral apresentado por B. Carter (1973) [51], Cahem and Defrise (1968) [52], e Kinnorsely (1969) [53].

Quando $e = 0$ a solução (3.118) se reduz à solução de Kottler, enquanto $\Lambda = 0$ se tem a solução de Reissner-Nordström. Por outro lado, para $r \rightarrow \infty$ este espaço-tempo passa a se comportar como o de Sitter ou anti-de Sitter dependendo do sinal da constante cosmológica.

Para obter os horizontes devemos resolver a equação

$$r^4 - \frac{3}{\Lambda}r^2 + \frac{6m}{\Lambda}r - \frac{3q^2}{\Lambda} = 0, \quad (3.119)$$

relativa a $g_{00} = 0$. Temos então uma equação de quarto grau de modo que, em geral são 4 raízes que devem ser determinadas. Agora, para o caso em que $9m^2\Lambda < 1$, de acordo à análise realizada em [54, 55], uma destas é negativa e portanto carente de sentido físico, as outras três sendo reais definem a localização dos horizontes de modo que o espaço-tempo é dividido em quatro regiões, uma a mais em relação à solução de Reissner-Nordström.

Denotando as raízes por r_1, r_2, r_3, r_4 , de forma que

$$0 < r_1 < r_2 < r_3, \quad r_4 < 0, \quad (3.120)$$

onde r_1 designa a localização do horizonte de Cauchy, r_2 a localização do horizonte de eventos e r_3 a localização de um horizonte cosmológico, temos que as regiões *I* e *III*, $0 < r < r_1$ e $r_2 < r < r_3$ respectivamente, o espaço-tempo é estático. Nas regiões *II* e *IV*, $r_1 < r < r_2$ e $r_3 < r$ respectivamente, o espaço-tempo deixa de ser estático e passa a ser dependente do tempo.

Vemos então que a adição de uma constante cosmológica modifica a solução de Reissner-Nordström de forma tal que a região estática que nela variava do horizonte de eventos até o infinito, agora é delimitada entre o mesmo horizonte e um horizonte cosmológico que inicialmente não existia.

O diagrama de Penrose-Carter, construído em [56], é ilustrado na figura (3.12). Como podemos ver, o espaço-tempo é estendido indefinidamente em ambas as direções, espacial e temporal para formar uma grade retangular com fronteiras tipo tempo e tipo espaço em $r = 0$ e $r = \infty$ respectivamente.

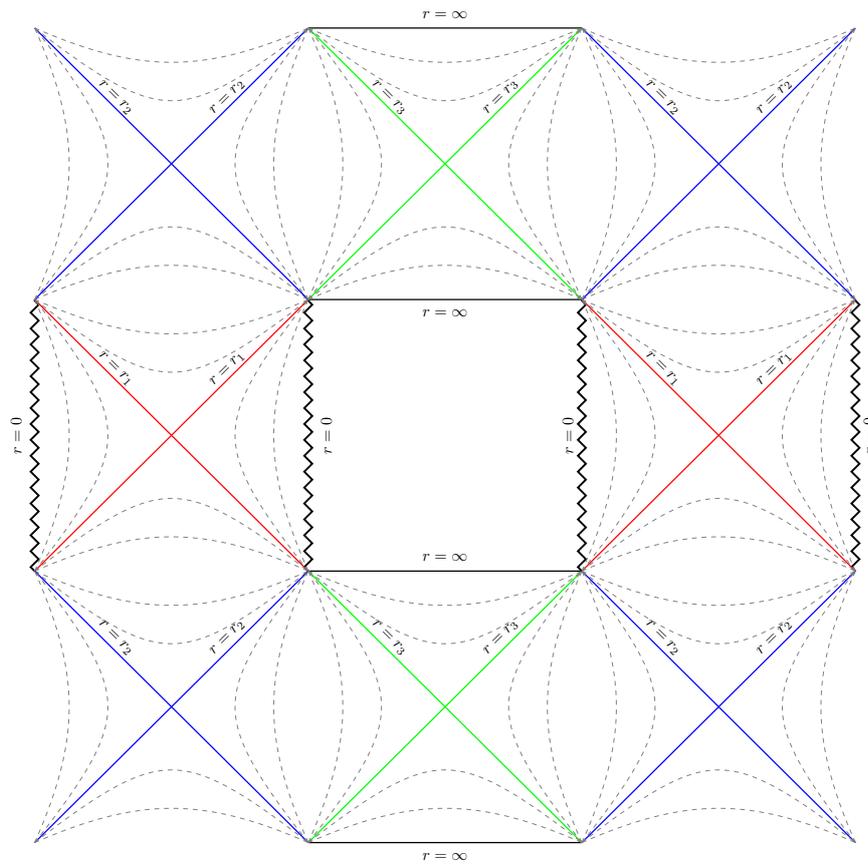


Figura 3.12: Diagrama de Penrose-Carter da solução de Reissner-Nordström-de Sitter.

Capítulo 4

Hipersuperfícies

A noção de hipersuperfície é importante para solucionar diferentes tipos de problemas tratados em relatividade geral. Por exemplo, no formalismo 3+1 o espaço-tempo é foliado em superfícies tridimensionais espaciais o que permite resolver as equações de Einstein como um problema de Cauchy com condições de contorno, base da formulação ADM. Por outro lado, em situações onde é necessário colar soluções diferentes através de superfícies de descontinuidade, devemos considerar hipersuperfícies temporais ou nulas. Dada sua relevância, neste capítulo introduziremos o conceito de hipersuperfície e definiremos os objetos geométricos que determinam as propriedades desta, a saber, a métrica induzida e a curvatura extrínseca. Também formularemos as condições de junção de Israel-Darmois para hipersuperfícies espaciais e temporais unicamente. Este capítulo é baseado nas refs. [57, 58, 59]. Nas refs. [60, 61] são formuladas condições de junção para hipersuperfícies nulas.

4.1 Definição

Uma hipersuperfície é uma variedade m -dimensional, imersa numa outra variedade n -dimensional, sendo $m < n$. Especificamente no caso da relatividade geral, as hipersuperfícies consideradas são 3-dimensionais e definidas em termos de algum sistema de coordenadas do espaço-tempo, por exemplo

$$\Phi(x^\alpha) = c, \tag{4.1}$$

ou, equivalentemente, através de equações da forma

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \tag{4.2}$$

onde y^a são as coordenada intrínsecas da hipersuperfície¹. Estas relações descrevem curvas contidas completamente em Σ .

4.2 Vetor normal

Dada uma hipersuperfície Σ , consideremos dois pontos P e Q infinitesimalmente próximos e localizados nela, com coordenadas x^α e $(x^\alpha + dx^\alpha)$ tal que

$$\Phi(x^\alpha + dx^\alpha) = \Phi(x^\alpha) + \Phi_{,\beta} dx^\beta = c, \quad (4.3)$$

na primeira ordem de expansão. Subtraindo (4.1) desta equação, obtemos que no ponto P

$$\Phi_{,\beta} dx^\beta = 0. \quad (4.4)$$

Definindo então as componentes N_β de uma 1-forma sendo $\Phi_{,\beta}$, temos que

$$N_\beta dx^\beta = g_{\alpha\beta} N^\alpha dx^\beta = 0. \quad (4.5)$$

Isto indica que o vetor N^α é ortogonal ao vetor infinitesimal dx^α . Dado que este último por definição repousa em Σ , N^α é ortogonal à hipersuperfície e portanto denominado *vetor normal*.

O vetor N^α define a única direção normal a Σ , em outras palavras, qualquer vetor V^α normal à hipersuperfície, sendo esta temporal ou espacial, deve ser colinear com N^α , isto é, $V^\alpha = aN^\alpha$. No caso de hipersuperfícies nulas o vetor normal é também um vetor tangente, uma vez que todo vetor deste tipo é ortogonal consigo mesmo.

No caso de Σ ser não nula é preferível renormalizar N^α e adotar um vetor normal unitário. Assim, consideremos

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \frac{\varepsilon N_\alpha}{|N^\alpha N_\alpha|^{\frac{1}{2}}}, \\ &= \frac{\varepsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $\varepsilon = 1$ para hipersuperfícies temporais e $\varepsilon = -1$ para hipersuperfícies espaciais. O vetor n^α é então um vetor unitário

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{se } \Sigma \text{ é espacial.} \\ +1 & \text{se } \Sigma \text{ é temporal.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Quando Σ é uma hipersuperfície nula, tal construção não é possível pois $N^\alpha N_\alpha = 0$, de modo que não existe uma forma natural para escolher um vetor normal neste caso. No entanto existe uma forma alternativa de proceder, ver por exemplo [60].

¹ $a = 1, 2, 3$.

4.3 Métrica induzida

Sendo uma hipersuperfície uma variedade de menor ordem que a do espaço-tempo, a geometria intrínseca da mesma é descrita por um tensor métrico diferente do correspondente a este último, porém dependente dele. Restringindo o elemento de linha a deslocamentos confinados sobre Σ temos

$$\begin{aligned} ds_{\Sigma}^2 &= g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^b} dy^b \right), \\ &= h_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}$ é a *métrica induzida* ou *primeira forma fundamental* da hipersuperfície. Os vetores e_a^{α} são tangentes às curvas contidas em Σ , formando assim uma base para esta.

A classificação de hipersuperfícies em espaciais, temporais e nulas é atribuída de acordo à assinatura da métrica induzida da seguinte forma:

- Hipersuperfícies são espaciais se a métrica induzida é definida positiva, isto é, tem assinatura $(+, +, +)$.
- Hipersuperfícies são temporais se a métrica induzida é Lorentziana, ou seja, tem assinatura $(-, +, +)$.
- Hipersuperfícies são nulas se a métrica induzida é degenerada, isto é, tem assinatura $(0, +, +)$.

Notemos que h_{ab} é um escalar em relação à transformação $x^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha'}$ nas coordenadas do espaço-tempo, mas é um tensor sob transformações do tipo $y^{\alpha} \rightarrow y^{\alpha'}$ nas coordenadas intrínsecas.

4.4 Tensores tangentes à hipersuperfície

Existem campos tensoriais $T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots}$ definidos unicamente na hipersuperfície os quais são puramente tangenciais à mesma. Estes tensores podem ser decompostos da seguinte forma

$$T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots} = T^{ab\cdots}_{cd\cdots} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \cdots e_{\gamma}^c e_{\sigma}^d \cdots, \quad (4.9)$$

onde $T^{ab\cdots}_{cd\cdots} \in \Sigma$. Este tensor é associado a $T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots}$ e suas componentes são dadas em termos das coordenadas intrínsecas. A expressão anterior implica

$$T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots} n_{\alpha} = T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots} n_{\beta} = T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots} n^{\gamma} = T^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\sigma\cdots} n^{\sigma} = 0, \quad (4.10)$$

dado que $n_\alpha e_a^\alpha = 0$, confirmando assim que $T^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\sigma\dots}$ é tangente a Σ . É importante mencionar que, dado um tensor qualquer, $S^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\sigma\dots}$, este pode ser projetado na hipersuperfície de modo tal que a única componente que permaneça seja a tangencial. A grandeza que faz esta operação, o *projetor ortogonal* $h^{\alpha\beta}$, é definido por

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta} &\equiv h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \\ &= g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

sendo então o tensor $h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \cdots h_\eta^\gamma h_\rho^\sigma \cdots S^{\mu\nu\dots}_{\gamma\sigma\dots}$ tangente a Σ .

Em particular, como consequência direta de (4.7), o projetor satisfaz

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta} n_\beta &= (g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta) n_\beta, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.4.1 Derivada covariante intrínseca

De maneira similar ao que ocorre na variedade quadridimensional, na hipersuperfície Σ podemos definir a derivada covariante em relação a uma conexão compatível com a métrica induzida h_{ab} . Para um vetor tangente T^α , temos

$$T^\alpha = T^a e_a^\alpha, \quad T^\alpha n_\alpha = 0, \quad T_a = T_\alpha e_a^\alpha. \quad (4.13)$$

Seguindo [57], a derivada covariante intrínseca do tri-vetor T_a com respeito a y^b é a projeção de $T_{\alpha;\beta}$ sobre a hipersuperfície

$$T_{a|b} = T_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (4.14)$$

Podemos expressá-la na forma usual (2.46), para isto reescrevamos o lado direito da Eq. (4.14) do modo seguinte

$$\begin{aligned} T_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= (T_\alpha e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - T_\alpha e_{a;\beta} e_b^\beta, \\ &= T_{\alpha;\beta} e_b^\beta - T^\gamma e_{\gamma a;\beta} e_b^\beta, \\ &= T_{\alpha;\beta} e_b^\beta - e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta T^c, \\ &= T_{a,b} - \Gamma_{cab} T^c, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde foi definido

$$\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta. \quad (4.16)$$

Então a Eq. (4.14) pode ser reescrita como

$$T_{a|b} = T_{a,b} - \Gamma_{ab}^c T_c, \quad (4.17)$$

que é a expressão familiar para a derivada covariante. Os coeficientes da conexão dados pela Eq. (4.16) são "tridimensionais", próprios da 3-geometria da hipersuperfície e de natureza

similar aos que correspondem ao espaço-tempo. Estes podem ser expressos em termos dos coeficientes métricos através de uma equação análoga a (2.51)

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c}), \quad (4.18)$$

mostrando-se desta forma a compatibilidade com a métrica induzida. Isto também evidencia-se ao calcular a derivada covariante de h_{ab}

$$\begin{aligned} h_{ab|c} &= h_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma, \\ &= (g_{\alpha\beta} - \varepsilon n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma, \\ &= -\varepsilon (n_{\alpha;\gamma} n_\beta + n_\alpha n_{\beta;\gamma}) e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por sua vez, a partir dos coeficientes da conexão podemos calcular o 3-tensor de Riemann que define a curvatura intrínseca da hipersuperfície.

4.4.2 Curvatura extrínseca

Juntamente à curvatura intrínseca, é necessário considerar um outro tipo de curvatura associada à hipersuperfície a qual fornece informação sobre como esta é "dobrada" em relação ao espaço-tempo, isto é, como sua imersão é realizada.

A curvatura extrínseca de uma hipersuperfície, relativa à geometria do espaço-tempo ambiente se manifesta através da variação do vetor normal na medida em que se desloca através de Σ . As componentes do *tensor de curvatura extrínseca* ou *segunda forma fundamental* são definidas então por

$$K_{ab} \equiv -n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (4.19)$$

O sinal negativo é introduzido em concordância com a notação usada na maioria da literatura, porém alguns autores preferem trabalhar com o sinal oposto.

Consideremos agora a quantidade $A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$. Esta quantidade corresponde à componente tangencial do vetor $A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta$. É interessante observar se este vetor possui também uma componente normal. Para tal fim, expressemos $A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta$ como $g_\mu^\alpha A_{;\beta}^\mu e_b^\beta$, e de acordo com a Eq. (4.11) temos

$$\begin{aligned} A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta &= (\varepsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) A_{;\beta}^\mu e_b^\beta, \\ &= \varepsilon (n_\mu A_{;\beta}^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vemos então que o segundo termo é tangente à hipersuperfície, enquanto que o primeiro é normal à mesma. Agora, considerando o fato de A^μ ser ortogonal a n^μ e levando em conta a Eq. (4.14) se obtém

$$\begin{aligned}
A_{;\beta}^{\alpha} e_b^{\beta} &= -\varepsilon(n_{\mu;\beta} A^{\mu} e_b^{\beta}) n^{\alpha} + h^{am} A_{m|b} e_a^{\alpha}, \\
&= A_{|b}^a e_a^{\alpha} - \varepsilon A^a (n_{\mu;\beta} e_a^{\mu} e_b^{\beta}) n^{\alpha}, \\
&= A_{|b}^a e_a^{\alpha} + \varepsilon A^a K_{ab} n^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Notemos que $A_{|b}^a$ representa a parte unicamente tangencial do campo vetorial e $\varepsilon A^a K_{ab}$ a componente normal. Este último termo se anula se e somente se a curvatura extrínseca se anula.

Se A^{α} é substituído por e_a^{α} , então $A^c = \delta_a^c$ e da Eq. (4.17), a expressão (4.21) implica

$$e_{a;\beta}^{\alpha} e_b^{\beta} = \Gamma_{ab}^c e_c^{\alpha} + \varepsilon K_{ab} n^{\alpha}. \tag{4.22}$$

Esta relação é conhecida como *equação de Gauss-Weingarten*.

A curvatura extrínseca é um tensor simétrico, o que pode ser mostrado facilmente levando em conta duas considerações:

- Os vetores n^{α} e e_a^{α} são ortogonais.
- Os vetores bases da hipersuperfície são transportados paralelamente uns com relação aos outros, isto é, $e_{a;\beta}^{\alpha} e_b^{\beta} = e_{b;\beta}^{\alpha} e_a^{\beta}$.

Temos então

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= -n_{\alpha;\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}, \\
&= n_{\alpha} e_{a;\beta}^{\alpha} e_b^{\beta}, \\
&= n_{\alpha} e_{b;\beta}^{\alpha} e_a^{\beta}, \\
&= -n_{\alpha;\beta} e_b^{\alpha} e_a^{\beta}, \\
\Rightarrow K_{ab} &= K_{ba}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

O traço do tensor de curvatura é dada por

$$K \equiv h^{ab} K_{ab} = n_{;\alpha}^{\alpha}. \tag{4.24}$$

A métrica induzida é relacionada com aspectos puramente intrínsecos da geometria da hipersuperfície, em outras palavras, descreve a curvatura intrínseca desta. Enquanto a curvatura extínseca é relacionada com aspectos extrínsecos, a forma como a superfície é imersa na variedade 4-dimensional ambiente. Juntos, estes tensores caracterizam por completo as propriedades da hipersuperfície.

4.5 Relações de Gauss-Codazzi

O tensor de curvatura intrínseco pode ser definido pela relação

$$A^c_{|ab} - A^c_{|ba} = -R^c_{dab}A^d, \quad (4.25)$$

que naturalmente implica

$$R^c_{dab} = \Gamma^c_{db,a} - \Gamma^c_{da,b} + \Gamma^c_{ma}\Gamma^m_{db} - \Gamma^c_{mb}\Gamma^b_{da}. \quad (4.26)$$

A questão agora é se o tensor de Riemann 3-dimensional pode ser expresso em termos de seu equivalente 4-dimensional. Para responder isto, consideremos a identidade

$$(e^{\alpha}_{a;\beta}e^{\beta}_b)_{;\gamma}e^{\gamma}_c = (\Gamma^d_{ab}e^{\alpha}_d + \varepsilon K_{ab}n^{\alpha})_{;\gamma}e^{\gamma}_c, \quad (4.27)$$

a qual é obtida diretamente da Eq. (4.22). Foquemos nossa atenção no lado esquerdo desta expressão e reescrevamo-na como

$$\begin{aligned} (e^{\alpha}_{a;\beta}e^{\beta}_b)_{;\gamma}e^{\gamma}_c &= e^{\alpha}_{a;\beta\gamma}e^{\beta}_b e^{\gamma}_c + e^{\alpha}_{a;\beta}e^{\beta}_{b;\gamma}e^{\gamma}_c, \\ &= e^{\alpha}_{a;\beta\gamma}e^{\beta}_b e^{\gamma}_c + e^{\alpha}_{a;\beta}(\Gamma^d_{bc}e^{\beta}_d + \varepsilon K_{bc}n^{\beta}), \\ &= e^{\alpha}_{a;\beta\gamma}e^{\beta}_b e^{\gamma}_c + \Gamma^d_{bc}(\Gamma^c_{ad}e^{\alpha}_e + \varepsilon K_{ad}n^{\alpha}) + \varepsilon K_{bc}e^{\alpha}_{a;\beta}n^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Agora, considerando o segundo termo do lado direito da Eq. (4.27) podemos escrever

$$\begin{aligned} (\Gamma^d_{ab}e^{\alpha}_d + \varepsilon K_{ab}n^{\alpha})_{;\gamma}e^{\gamma}_c &= \Gamma^d_{ab,c}e^{\alpha}_d + \Gamma^d_{ab}e^{\alpha}_{d;\gamma}e^{\gamma}_c + \varepsilon K_{ab,c}n^{\alpha} + \varepsilon K_{ab}n^{\alpha}_{;\gamma}e^{\gamma}_c, \\ &= \Gamma^d_{ab,c}e^{\alpha}_d + \Gamma^d_{ab}(\Gamma^e_{dc}e^{\alpha}_e + \varepsilon K_{dc}n^{\alpha}) + \varepsilon K_{ab,c}n^{\alpha} + \varepsilon K_{ab}n^{\alpha}_{;\gamma}e^{\gamma}_c. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Igualando os dois membros podemos isolar o termo $e^{\alpha}_{a;\beta\gamma}e^{\beta}_b e^{\gamma}_c$. Subtraindo de desta expressão uma equação similar para $e^{\alpha}_{a;\gamma\beta}e^{\beta}_b e^{\gamma}_c$ obtemos

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}e^{\alpha}_a e^{\beta}_b e^{\gamma}_c = R^{\mu}_{abc}e^{\mu}_m - \varepsilon(K_{ab|c} - K_{ac|b})n^{\mu} + \varepsilon K_{ab}n^{\mu}_{;\gamma}e^{\gamma}_c - \varepsilon K_{ac}n^{\alpha}_{;\beta}e^{\beta}_b, \quad (4.30)$$

projetando ao longo de e^{μ}_d e usando a Eq. (4.19) chega-se a

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha}_a e^{\beta}_b e^{\gamma}_c e^{\delta}_d = R_{abcd} + \varepsilon(K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd}), \quad (4.31)$$

projetando agora ao longo de n_{μ} se tem

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma}n^{\mu}e^{\alpha}_a e^{\beta}_b e^{\gamma}_c = K_{ac|b} - K_{ab|c}, \quad (4.32)$$

As expressões (4.31) e (4.32) são conhecidas como equações de *Gauss-Codazzi*. A primeira oferece uma relação entre os tensores de Riemann 3-dimensional e 4-dimensional. Estas equações mostram que algumas componentes do tensor de curvatura do espaço-tempo podem ser expressas em termos das curvaturas intrínseca e extrínseca da hipersuperfície.

As equações de Gauss-Codazzi podem ser escritas em uma forma contraída, em termos do tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$. Usando a Eq. (4.11), o tensor de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}, \\ &= \varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu, \end{aligned} \quad (4.33)$$

e o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \\ &= 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ é então reescrito como

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \varepsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu - h^{ab} R_{\mu\gamma\nu\delta} n^\mu e_a^\gamma n^\nu e_b^\delta n_\alpha n_\beta \\ &\quad - \varepsilon h^{ab} h^{ij} R_{\mu\gamma\nu\delta} n^\mu e_b^\gamma n^\nu e_b^\delta e_{\alpha i} e_{\beta j} - \frac{\varepsilon}{2} h^{ab} h^{mn} R_{\mu\gamma\nu\delta} e_m^\mu e_a^\gamma e_n^\nu e_b^\delta n_\alpha n_\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} h^{ab} h^{ij} h^{mn} R_{\mu\gamma\nu\delta} e_m^\mu e_a^\gamma e_n^\nu e_b^\delta e_{\alpha i} e_{\beta j}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ao fazer o produto com $n^\alpha n^\beta$, o primeiro termo se anula devido à anti-simetria do tensor de Riemann nos índices $\alpha\mu$, o segundo e terceiro se anulam entre si, o quarto e sexto pela ortogonalidade do o vetor normal com os vetores bases da hipersuperfície. Assim temos

$$G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -\frac{\varepsilon}{2} h^{ab} h^{mn} R_{\mu\gamma\nu\delta} e_m^\mu e_a^\gamma e_n^\nu e_b^\delta. \quad (4.36)$$

Se agora aplicamos $-\frac{\varepsilon}{2} h^{bd} h^{ac}$ na primeira equação de Gauss-Codazzi (4.31), vemos que o lado esquerdo da expressão resultante é igual ao lado direito de (4.36) de modo que

$$-2\varepsilon G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^3R + \varepsilon(K^{ab} K_{ab} - K^2), \quad (4.37)$$

onde ${}^3R = h^{ab} R_{amb}^m$ é o escalar de Ricci 3-dimensional. De forma similar, ao considerar o produto de $G_{\alpha\beta}$ na expressão acima com n^α seguido de e_j^β resulta

$$G_{\alpha\beta} n^\alpha e_j^\beta = -h^{mn} R_{\alpha\mu\nu\beta} n^\alpha e_m^\mu e_n^\nu e_j^\beta. \quad (4.38)$$

O sinal negativo aparece da anti-simetria do tensor de Riemann nos índices $\alpha\mu$. Aplicando h^{ab} na segunda equação de Gauss-Codazzi (4.32), o lado esquerdo da mesma torna-se igual ao lado direito de (4.38). Igualando, temos então

$$G_{\alpha\beta} n^\alpha e_m^\beta = K_{,m} - K_{m|n}^n. \quad (4.39)$$

4.6 Condições de junção

Um problema fundamental em relatividade geral consiste na formulação de condições de junção adequadas para hipersuperfícies com descontinuidades no campo gravitacional. Na teoria Newtoniana, este tipo de situação é facilmente superada pois o espaço é plano. Assim, sempre é possível escolhermos um sistema de coordenadas no qual no mínimo a primeira derivada do potencial gravitacional é contínua.

Esta ideia foi generalizada por Lanczos [62] e Sen [63] os quais foram os primeiros a formular condições apropriadas sobre superfícies de descontinuidade em relatividade geral. No seu trabalho, Lanczos exige que cada componente da métrica e suas primeiras derivadas sejam contínuas através da hipersuperfície. Porém, estas condições podem ser muito restritas pois a continuidade dos potenciais gravitacionais $g_{\mu\nu}$ não depende unicamente da regularidade dos campos físicos, mas também do comportamento das coordenadas usadas para descrever o espaço-tempo, o que resulta ser um problema bem mais complicado. Lichnerowicz num trabalho posterior [64], baseado na proposta de Lanczos, isola o papel das coordenadas introduzindo um sistema especial de coordenadas denominado *admissível*. Porém, existe uma dificuldade relacionada a encontrar uma transformação para passar de um sistema de coordenadas qualquer até o sistema admissível. Uma outra formulação de grande relevância, corresponde às condições de junção propostas por O'Brien e Synge [65] que igualmente apresentam dependência das coordenadas.

Em relatividade geral é sempre desejável termos formulações independentes do sistema de coordenadas. Isto faz com que as condições antes mencionadas sejam pouco úteis, pois elas dependem das coordenadas. Isto foi conseguido por Darmois [66] exigindo continuidade na métrica induzida e na curvatura extrínseca da hipersuperfície em questão. Estas são as condições mais usadas hoje em dia, porém levaram um longo período para ser popularizadas. Não foi até a publicação do influente artigo de Israel [57], vários anos depois, que estas foram amplamente apreciadas.

Existem dois tipos de hipersuperfícies que originam descontinuidades. Estas são:

- Superfícies de contorno, caracterizadas por mudanças súbitas na densidade. O problema de Schwarzschild-Oppenheimer o qual exige a união do campo interno de uma estrela estática ou em colapso à solução exterior que descreve um campo vazio, representa um bom exemplo que deste tipo de superfícies. O conjunto de condições aplicadas neste caso são as devidas a Lichnerowicz, O'Brien e Synge, e Darmois.
- Superfícies singulares, onde a densidade torna-se infinita.

4.6.1 Superfícies de contorno

Considere uma hipersuperfície Σ que divide o espaço-tempo em duas variedades 4-dimensionais diferentes \mathcal{V}^+ e \mathcal{V}^- com as métricas correspondentes $g_{\mu\nu}^+$ e $g_{\mu\nu}^-$, ambas de

classe \mathcal{C}^3 (salvo em Σ). Se Σ satisfaz as condições de Lichnerowicz, existe um sistema de coordenadas x^μ em ela definido, tal que²

$$[g_{\mu\nu}] = 0, \quad (4.40)$$

$$\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right] = 0. \quad (4.41)$$

As coordenadas x^μ são denominadas de *admissíveis*. A hipersuperfície Σ é dita uma superfície de contorno se admite um sistema de coordenadas deste tipo. Infelizmente, não existe um algoritmo geral que possibilite a construção de coordenadas admissíveis a partir de coordenadas arbitrárias.

Como foi ressaltado por Darmois, se faz necessária uma caracterização invariante de Σ o qual foi conseguido considerando a métrica induzida e a curvatura extrínseca associadas. Assim, com y^a sendo as coordenadas intrínsecas de Σ , as condições (4.40) e (4.41) são equivalentes a

$$[h_{ab}] = 0, \quad (4.42)$$

$$[K_{ab}] = 0. \quad (4.43)$$

Estas são as condições de Darmois.

Nas condições de O'Brien e Synge as coordenadas são escolhidas de modo que Σ é definida por $x^0 = \text{constante}$ (x^0 não é necessariamente a coordenada temporal). Então \mathcal{V}^+ e \mathcal{V}^- são colados através de Σ se

$$[g_{\mu\nu}] = 0, \quad \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^4} \right] = 0, \quad [T_\mu^4] = 0, \quad (4.44)$$

onde T_μ^ν é o tensor de energia-momento do espaço-tempo.

Observemos que, das relações de Gauss-Codazzi, (4.37) e (4.39), e das condições (4.42) e (4.43) segue

$$[G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu] = 0, \quad (4.45)$$

$$[G_{\mu\nu} e_a^\mu n^\nu] = 0.$$

Bonnor e Vickers [67] mostraram que as condições de junção de Darmois e Lichnerowicz são equivalentes, enquanto que as condições de O'Brien e Synge não apresentam esta característica com as outras. As condições de junção de O'Brien e Synge formam parte das condições de Lichnerowicz e Darmois [68, 69]. Isto faz com que as últimas sejam muito

²Denotamos por $[A] = A^+ - A^-$ o salto ou descontinuidade de uma quantidade A qualquer através da hipersuperfície Σ , sendo A^+ e A^- os valores que toma em pontos próximos a cada lado desta.

restritivas para aplicá-las em situações físicas razoáveis.

Vemos então que a formulação de maior aplicabilidade em relatividade geral corresponde às condições de junção de Darmois. Sendo claramente covariante e geométrica, é de longe a mais conveniente pois não exige continuidade das coordenadas. Algumas aplicações podem ser encontradas em [70, 71].

4.6.2 Superfícies singulares

Considere-se uma hipersuperfície Σ que divide o espaço em duas regiões $\mathcal{V}^{(+)}$ e $\mathcal{V}^{(-)}$. Na região $\mathcal{V}^{(+)}$ a métrica, expressa nas coordenadas $x_{(+)}^\alpha$, é $g_{\alpha\beta}^{(+)}$. Em $\mathcal{V}^{(-)}$ a métrica, expressa nas coordenadas $x_{(-)}^\alpha$, é $g_{\alpha\beta}^{(-)}$. Devemos então impor condições nas métricas com o objetivo de colar suavemente, na hipersuperfície, as duas regiões de tal forma que uma união de $g_{\alpha\beta}^{(+)}$ e $g_{\alpha\beta}^{(-)}$ represente uma solução válida às equações de campo de Einstein. Em geral, as coordenadas $x_{(\pm)}^\alpha$ são diferentes e pode ser que não seja possível relacionar as duas métricas diretamente. Para alcançarmos isto, é preciso formular condições de junção que gerem tensores definidos de maneira unívoca sobre Σ .

Assumiremos que as coordenadas intrínsecas, $y_{(\pm)}^a$, são as mesmas em ambos os lados da hipersuperfície, e escolhemos o vetor normal à Σ , n^α , apontando desde $\mathcal{V}^{(-)}$ a $\mathcal{V}^{(+)}$. Introduziremos por conveniência um sistema de coordenadas contínuo x^α , diferente de $x_{(\pm)}^\alpha$, em ambos os lados da hipersuperfície. Estas coordenadas coincidem com $x_{(\pm)}^\alpha$ numa região aberta de $\mathcal{V}^{(\pm)}$ que contém Σ .

Imaginemos que Σ é atravessada por uma congruência de geodésicas que a interceptam ortogonalmente. Denominaremos a distância própria (o tempo próprio) ao longo destas por l , de modo que $l = 0$ quando as geodésicas cortam a hipersuperfície; por convenção l é negativo em $\mathcal{V}^{(-)}$ e positivo em $\mathcal{V}^{(+)}$. Podemos considerar l como um campo escalar, um ponto P identificado com as coordenadas x^α é conectado com Σ através de um membro da congruência, e $l(x^\alpha)$ é a distância própria (ou tempo próprio) desde P a Σ ao longo desta geodésica. A presente construção implica que qualquer deslocamento na direção normal à hipersuperfície ao longo de uma geodésica é descrito por

$$dx^\alpha = n^\alpha dl, \quad (4.46)$$

ou equivalentemente

$$n_\alpha = \varepsilon \partial_\alpha l. \quad (4.47)$$

Usaremos a linguagem de distribuições introduzindo a função de Heaviside $\Theta(l)$ definida como

$$\Theta = \begin{cases} 0 & \text{se } l > 0, \\ 1 & \text{se } l < 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

Para $l = 0$ a função $\Theta(l)$ é indeterminada. Desta distribuição serão úteis as seguintes

propriedades

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0, \quad \frac{d}{dl}\Theta(l) = \delta(l), \quad (4.49)$$

donde δ é a distribuição de Dirac. Denotemos, como antes, o salto de uma grandeza tensorial \mathbf{A} , definida em ambos os lados da hipersuperfície, através de Σ como

$$[A] \equiv A(\mathcal{V}^{(+)})|_{\Sigma} - A(\mathcal{V}^{(-)})|_{\Sigma}. \quad (4.50)$$

As coordenadas intrínsecas y^a são as mesmas nos dois lados da hipersuperfície. Além disso, l e x^α são contínuos através da mesma, de modo que

$$[e_a^\alpha] = [n^\alpha] = 0. \quad (4.51)$$

Primeira condição de junção

Iniciamos expressando a métrica $g_{\alpha\beta}$, nas coordenadas x^γ como

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l)g_{\alpha\beta}^{(+)} + \Theta(-l)g_{\alpha\beta}^{(-)}, \quad (4.52)$$

onde $g_{\alpha\beta}^{(\pm)}$ é igualmente expressa nas coordenadas x^γ . Queremos saber se esta métrica, definida como uma distribuição, constitui uma solução das equações de campo de Einstein. Para isto, é necessário verificar se as grandezas geométricas construídas a partir dela, tal como o tensor de Riemann, são também bem definidas. Os possíveis termos singulares que possam aparecer nestas devem ser eliminados, ou no mínimo interpretados adequadamente.

Derivando (4.52) e levando em conta (4.47) temos

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^{(+)} + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^{(-)} + \varepsilon\delta(l)[g_{\alpha\beta}]n_\gamma. \quad (4.53)$$

Os símbolos de Christoffel correspondentes são

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = & \Theta(l)\Gamma_{\alpha\beta}^{(+)\gamma} + \Theta(-l)\Gamma_{\alpha\beta}^{(-)\gamma} + \frac{\varepsilon}{2}\{\Theta(l)\delta(l)g_{(+)}^{\lambda\sigma} \\ & + \Theta(-l)\delta(-l)g_{(-)}^{\lambda\sigma}\}[g_{\alpha\lambda}]n_\beta + [g_{\beta\lambda}]n_\alpha + [g_{\alpha\beta}]n_\lambda, \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^{(\pm)\gamma}$ são os símbolos de Christoffel construídos a partir de $g_{\alpha\beta}^{(\pm)}$. O último termo em (4.53) pode ser singular, e gera termos proporcionais a $\Theta(\pm l)\delta(\pm l)$ em (4.54). Este fator não é bem definido como distribuição, de modo que se o termo em questão é mantido então a conexão não poderia ser definida adequadamente gerando problemas na definição de outras grandezas. Para superar esta inconsistência devemos eliminá-lo impondo continuidade da métrica através da hipersuperfície, isto é, $[g_{\alpha\beta}] = 0$. Esta condição é feita no sistema de coordenadas x^α , mas podemos estender sua validade para as coordenadas intrínsecas da hipersuperfície tal que

$$[g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = 0. \quad (4.55)$$

Em virtude da Eq. (4.51),

$$\begin{aligned} [g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta] &= 0, \\ [h_{ab}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A métrica induzida deve ser a mesma em ambos os lados de Σ , o que é necessário se esperamos uma geometria bem definida na hipersuperfície. A expressão (4.56) constitui a primeira condição de junção e é expressa independentemente das coordenadas x^α ou $x_{(\pm)}^\alpha$.

Aqui estamos assumindo que as coordenadas intrínsecas $y^{(\pm)}$ são iguais em ambos os lados da hipersuperfície, porém nem sempre é possível escolher sistemas de coordenadas que satisfaçam este requerimento. S. Dalia e J. Katz [72] generalizaram a primeira condição de junção para incluir uma situação tal que

$$[h_{ab}dy^a dy^b] = 0. \quad (4.57)$$

Segunda condição de junção

Antes de prosseguir na obtenção da segunda condição de junção, calcularemos o tensor de Riemann. Neste sentido, e conforme ao mencionado acima, vemos que (4.54) se reduz a

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Theta(l)\Gamma_{\alpha\beta}^{(+)\gamma} + \Theta(-l)\Gamma_{\alpha\beta}^{(-)\gamma}. \quad (4.58)$$

Levando em conta as considerações expressa nas Eqs. (4.53), a derivada da Eq. (4.58) é

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^\gamma = \Theta(l)\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{(+)\gamma} + \Theta(-l)\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{(-)\gamma} + \varepsilon\delta(l)[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\lambda]. \quad (4.59)$$

Como consequência, o tensor de Riemann é dado por

$$R_{\alpha\beta\lambda}^\gamma = \Theta(l)R_{\alpha\beta\lambda}^{(+)\gamma} + \Theta(-l)R_{\alpha\beta\lambda}^{(-)\gamma} + \delta(l)A_{\alpha\beta\lambda}^\gamma, \quad (4.60)$$

onde

$$A_{\alpha\beta\lambda}^\gamma = \varepsilon([\Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma]n_\beta - [\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma]n_\lambda). \quad (4.61)$$

Observe que o tensor de Riemann poderia ser definido adequadamente, mas o terceiro termo com a função delta, representa uma singularidade na curvatura quando este tensor é avaliado na hipersuperfície, o que é visto como um problema. Assim, o próximo passo consiste em anulá-lo ou pelo menos dar-lhe sentido e fazê-lo fisicamente aceitável. Para este propósito a segunda condição de junção será necessária, mas antes de estabelecê-la, direjamos nossa atenção para o tensor de energia-momento.

De (4.60) obtemos o tensor de Ricci o qual é dado por

$$R_{\alpha\beta} = \Theta(l)R_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)R_{\alpha\beta}^- + \delta(l)A_{\alpha\beta}, \quad (4.62)$$

onde $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma\beta}^\gamma$.

Contraindo a expressão anterior com $g^{\alpha\beta}$, considerando a forma (4.52), o escalar de Ricci é escrito como

$$R = \Theta(l)R^+ + \Theta(-l)R^- + \delta(l)A, \quad (4.63)$$

sendo $A = A_\alpha^\alpha$.

Assim o tensor de energia-momento, determinado através da equação de Einstein, é expresso da seguinte forma

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(l)T_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)T_{\alpha\beta}^- + \delta(l)S_{\alpha\beta}, \quad (4.64)$$

onde $8\pi S_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Ag_{\alpha\beta}$. O primeiro e o segundo termos do lado direito em (4.64) representam os tensores de energia-momento nas regiões V^+ e V^- , respectivamente. Por outro lado, o termo restante tem uma clara interpretação, este tensor é associado à presença de uma distribuição de matéria muito concentrada em Σ . Esta fina casca de matéria possui um tensor de energia-momento igual a $S_{\alpha\beta}$.

Agora, por motivos de praticidade, e como passo prévio na obtenção da segunda condição de junção, expressemos o tensor $A_{\alpha\beta\lambda}^\gamma$ numa forma explícita.

O fato da métrica ser contínua através de Σ , em termos das coordenadas x^α , implica que a derivada tangencial também é continua. Isto quer dizer que se $g_{\alpha\beta,\gamma}$ é descontínua então sua sua descontinuidade deve estar dirigida ao longo do vetor normal n^α . Portanto deve existir um tensor $\kappa_{\alpha\beta}$ tal que

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = \kappa_{\alpha\beta}n_\gamma. \quad (4.65)$$

Este tensor é dado explicitamente por

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon[g_{\alpha\beta,\gamma}]n^\gamma. \quad (4.66)$$

De (4.65) temos

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] = \frac{1}{2}(\kappa_\alpha^\gamma n_\beta + \kappa_\beta^\gamma n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta}n^\gamma), \quad (4.67)$$

de modo que $A_{\alpha\beta\lambda}^\gamma$ torna-se

$$A_{\alpha\beta\lambda}^\gamma = \frac{\varepsilon}{2}(\kappa_\lambda^\gamma n_\alpha n_\beta + \kappa_{\alpha\lambda}n^\gamma n_\beta - \kappa_\beta^\gamma n_\alpha n_\lambda + \kappa_{\alpha\beta}n_\lambda^\gamma). \quad (4.68)$$

Esta é a parte do tensor de Riemann associada à função delta. Contraindo o primeiro índice com o terceiro obtemos os termos do tensor de Ricci associados à função delta

$$A_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma} = \kappa_{\gamma\alpha} n^{\gamma} n_{\beta} + \kappa_{\gamma\beta} n^{\gamma} n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha} n_{\beta} - \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}, \quad (4.69)$$

onde $\kappa \equiv \kappa_{\alpha}^{\alpha}$. Mais uma contração conduz à parte do escalar de Ricci relacionado com a função delta

$$A \equiv A_{\alpha}^{\alpha} = \varepsilon(\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \varepsilon \kappa). \quad (4.70)$$

Explicitamente o tensor de energia-momento da hipersuperfície, $S_{\alpha\beta}$, é dado por

$$16\pi S_{\alpha\beta} = \kappa_{\gamma\alpha} n^{\gamma} n_{\beta} + \kappa_{\gamma\beta} n^{\gamma} n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha} n_{\beta} - \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} - (\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \varepsilon \kappa) g_{\alpha\beta}. \quad (4.71)$$

Realizando o produto com n^{β} , se mostra que o tensor em questão é tangencial à hipersuperfície, $S_{\alpha\beta} n^{\beta} = 0$, portanto admite a decomposição

$$S^{\alpha\beta} = S^{ab} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}, \quad (4.72)$$

onde $S_{ab} = S_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}$ é um simétrico contido em Σ . Este pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 16\pi S_{ab} &= -\kappa_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} - \varepsilon(\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \varepsilon \kappa) h_{ab}, \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} - \kappa_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - h^{ij} e_i^{\mu} e_j^{\nu}) h_{ab} + \kappa h_{ab}, \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} + h^{ij} \kappa_{\mu\nu} e_i^{\mu} e_j^{\nu} h_{ab}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Por outro lado temos

$$[n_{\alpha;\beta}] = -[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}] n_{\gamma}, \quad (4.74)$$

que de acordo com (4.67) pode ser reescrito como

$$[n_{\alpha;\beta}] = \frac{1}{2}(\varepsilon \kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\gamma\alpha} n_{\beta} n^{\gamma} - \kappa_{\gamma\beta} n_{\alpha} n^{\gamma}), \quad (4.75)$$

a qual, levando em conta a definição da curvatura extrínseca e (4.51), podemos escrever

$$\begin{aligned} [K_{ab}] &= -[n_{\alpha;\beta}] e_a^{\alpha} e_b^{\beta}, \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \kappa_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Comparando com (4.73), obtemos

$$S_{ab} = \frac{\varepsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}). \quad (4.77)$$

Esta é denominada equação de Lanczos introduzida por Israel em [57] para definir o tensor de energia-momento superficial da casca em função da descontinuidade na curvatura extrínseca. Podemos reescrevê-la como

$$[K_{ab}] = \frac{8\pi}{\varepsilon} \left(S_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} S \right), \quad (4.78)$$

onde $S = h^{ab} S_{ab}$. O tensor de energia-momento associado à descontinuidade em Σ é então

$$T_{\Sigma}^{\alpha\beta} = \delta(l) S^{ab} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}. \quad (4.79)$$

Para que uma transição suave através de Σ seja dada, é requerido que $[K_{ab}] = 0$, isto é, a curvatura extrínseca deve ser a mesma em ambos os lados da hipersuperfície. Este requisito faz mais do que remover o termo com a função delta do tensor de Einstein na Eq. (4.64), ela implica que o tensor de Riemann é regular em Σ o qual significa que a hipersuperfície funciona como uma fronteira no sentido exposto na seção (4.6.1) já que $S_{ab} = 0$ como podemos ver da (4.77). Se a condição $[K_{ab}] = 0$ é violada, então o espaço-tempo é singular em Σ de modo que uma casca fina é representada por ela.

Capítulo 5

Junção de dois espaço-tempos esfericamente simétricos

Inspirados no sucesso das ideias de Wigner-Seitz [73] do eletromagnetismo, Lindquist e Wheeler propuseram o seu modelo de universo em rede. Eles arranjaram um conjunto de N massas numa estrutura regular numa hipersfera com curvatura positiva. A localização de cada partícula foi associada com o vértice num poliedro regular, o que leva a considerar um número limitado de possibilidades que representam a topologia de maior homogeneidade numa 3-esfera. Cada cela da rede foi atribuída com uma massa central e aproximada com uma esfera cuja geometria foi definida pela solução de Schwarzschild respectiva à massa correspondente. Mas como Lindquist e Wheeler notaram, esta configuração exige que a influência gravitacional que age entre uma e outra cela seja mínima de forma que possa se manter a simetria esférica em cada região.

Como consequência da simetria esférica, a derivada normal do potencial gravitacional na fronteira da cela é diferente de zero, o que leva à aparição de movimento relativo entre esta e a massa central. Assim, características dinâmicas surgem no espaço-tempo global a partir unicamente da solução de Schwarzschild. De forma semelhante que na cosmologia de FRW, neste modelo é possível calcular o fator de escala o qual é representado pelo tamanho da rede, e a taxa de Hubble que tem que ser substituída pela taxa de variação do tamanho da rede.

Nesta capítulo consideraremos o modelo de Linquist-Wheeler com $N = 2$. Como em [19], consideraremos o caso no qual cada massa m é associada uma geometria descrita pela Solução de Schwarzschild para posteriormente analisarmos a mesma situação quando a métrica corresponde à solução de Reissner-Nordström.

Por simplicidade, assumiremos as seguintes considerações:

- I. as fontes dos campos são esfericamente simétricas.
- II. as fontes estão imersas dentro de soluções exatas de vácuo das equações de campo de

Einstein.

III. as fontes estão suficientemente afastadas entre elas de modo que o espaço-tempo ao redor de cada uma é localmente esfericamente simétrico.

Dada a suposição de simetria esférica ao redor de cada fonte, é importante a validade do teorema de Birkhoff:

IV. a solução ao redor de cada massa é necessariamente estática.

5.1 Colagem de duas soluções de Schwarzschild

5.1.1 Fronteira estática e esfericamente simétrica

Consideremos dois espaço-tempos descritos pela solução de Schwarzschild, Eq. (3.23), e com sistemas de coordenadas $(t_{(\pm)}, r_{(\pm)}, \theta, \varphi)$ em cada um dos hemisférios de uma esfera S^3 . A métrica em ambas as regiões é dada então por

$$ds_{\pm}^2 = -A_{(\pm)} dt_{(\pm)}^2 + A_{(\pm)}^{-1} dr_{(\pm)}^2 + r_{(\pm)}^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

onde, como bem sabemos

$$A_{(\pm)} = 1 - \frac{2m}{r_{(\pm)}}. \quad (5.2)$$

Tentaremos colar estas soluções através de hipersuperfícies tipo tempo definidas por

$$\Sigma_{(\pm)} = \{\varphi_{(\pm)} = r_{(\pm)} - R_{(\pm)}\}, \quad (5.3)$$

com $R_{(\pm)}$ sendo constante e assumindo, de acordo com a simetria do sistema, que $\theta_{(+)} = \theta_{(-)}$ e $\varphi_{(+)} = \varphi_{(-)}$.

No modelo de Lindquist-Wheeler com N massas, as fronteiras de celas adjacentes coincidem ou se juntam entre elas num número limitado de pontos, de tal forma que regiões da hiperesfera ficam fora do domínio do campo de cada massa. Isto representa uma dificuldade na hora de impor as condições de junção. Usar as condições de junção de Israel [] se mostra impossível. Em nosso caso, uma simplificação do modelo de Lindquist-Wheeler, a situação é menos complicada a tal grau que as superfícies das duas celas que constituem o universo, coincidem ponto a ponto em todo seu domínio, permitindo identificar os pontos de uma das hipersuperfícies com os pontos da outra.

Os vetores normais, contínuos através da fronteira e definidos de forma geral pela¹ Eq. (4.6), são dados por

$$n_{\mu}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{A_{(\pm)}}} \delta_{\mu}^{r_{(\pm)}}. \quad (5.4)$$

¹Os vetores normais $n_{\mu}^{(+)}$ e $n_{\mu}^{(-)}$ apontam radialmente para fora e dentro de seus respectivos domínios.

Assumindo as coordenadas intrínsecas das hipersuperfícies serem

$$\begin{aligned} y_{(\pm)}^a &= y_{(\pm)}^a(x^\mu), \\ &= (t_{(\pm)}, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (5.5)$$

a métrica induzida corresponde a

$$h_{ab}^{(\pm)} dx^a dx^b = -A_{(\pm)} dt_{(\pm)}^2 + R_{(\pm)}^2 d\Omega^2. \quad (5.6)$$

Além de determinar $h_{ab}^{(\pm)}$, é necessário calcular a curvatura extrínseca. Para tal fim devemos obter antes a derivada covariante do vetor normal, $n_{\mu;\nu}^{(\pm)}$, definida como

$$n_{\mu;\nu}^{(\pm)} = n_{\mu,\nu}^{(\pm)} - \Gamma_{\mu\nu}^r n_r^{(\pm)}. \quad (5.7)$$

Os símbolos de Christoffel ${}_{(\pm)}\Gamma_{\mu\nu}^r$ não nulos calculados em $r_{(\pm)} = R_{(\pm)}$ a partir dos coeficientes métricos do espaço-tempo em cada hemisfério da hiperesfera, Eq. (5.1), são

$$\begin{aligned} {}_{(\pm)}\Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} A_{(\pm)} A'_{(\pm)}, & {}_{(\pm)}\Gamma_{rr}^r &= -\frac{1}{2} A_{(\pm)}^{-1} A'_{(\pm)}, \\ {}_{(\pm)}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -A_{(\pm)} R_{(\pm)}, & {}_{(\pm)}\Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -A_{\pm} R_{(\pm)} \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (5.8)$$

O vetor normal, que depende da coordenada radial, possui uma única componente não nula, n_r , portanto em (5.7) aparece unicamente a derivada parcial desta componente em relação a r , isto é

$$n_{r,r}^{(\pm)} = \mp A_{(\pm)}^{-\frac{3}{2}} A'_{(\pm)}, \quad (5.9)$$

de modo que, a expressão (5.7) pode ser escrita explicitamente como

$$n_{\mu;\nu}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{2} A_{(\pm)}^{\frac{1}{2}} A'_{(\pm)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp A_{(\pm)}^{\frac{1}{2}} R_{(\pm)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp A_{\pm}^{\frac{1}{2}} R_{(\pm)} \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Por outro lado, lembrando que $e_a^\mu = \partial x^\alpha / \partial y^a$, temos que

$${}_{(\pm)}e_a^\mu = \delta_a^\mu. \quad (5.11)$$

De acordo com (4.19), a curvatura extrínseca nas hipersuperfícies $\Sigma_{(\pm)}$ é dada por

$$K_{ab}^{(\pm)} dy^a dy^b = \pm \sqrt{A_{(\pm)}} \left(-\frac{1}{2} A'_{(\pm)} dt_{(\pm)}^2 + R_{(\pm)} d\Omega^2 \right). \quad (5.12)$$

Aplicando a primeira condições de junção de Israel, Eq. (4.57), temos que

$$\begin{cases} R_+ = R_- \equiv R, \\ A_+(R)dt_+^2 = A_-(R)dt_-^2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Como podemos ver, a primeira condição de Israel impõe que a colagem das soluções seja feita a distâncias radiais iguais dos respectivos centros, isto é, no equador da 3-esfera.

De (5.12) e levando em conta a segunda condição de Israel temos

$$\begin{cases} \sqrt{A_+}A'_+ = -\sqrt{A_-}A'_-, \\ \sqrt{A_+} = -\sqrt{A_-}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Devido a que $\sqrt{A_{\pm}(R)} > 0$, a curvatura extínseca entre as duas hipersuperfícies é continua se

$$A_{\pm}(R) = 0, \quad (5.15)$$

ou equivalentemente

$$R_{(\pm)} = 2m. \quad (5.16)$$

Isto é, para a situação sob consideração a colagem das duas soluções de Schwarzschild deve ser realizada então através dos horizontes de eventos.

Como consequência da utilização das coordenadas de Schwarzschild, a métrica é singular no horizonte, portanto se torna conveniente analisar o processo de colagem considerando as coordenadas nulas (U, V) definidas pelas Eqs. (3.34). Neste sistema de coordenadas, como foi exposto na seção (3.2.3), as Eqs. (5.1) são expressas na forma da Eq. (3.35).

A métrica induzida, por ser um tensor, obedece a regra de transformação (2.20) entres os sistemas de coordenadas

$$\begin{aligned} (t_{(\pm)}, \theta, \varphi) &\longrightarrow (U_{(\pm)}, V_{(\pm)}, \theta, \varphi), \\ h_{ab}^{(\pm)} &\longrightarrow l_{ab}^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

o que nos permite reescrever as Eqs. (5.6) da seguinte forma

$$l_{(\pm)}^2 dz^a dz^b = \frac{32m^3}{r_{(\pm)}(r_{(\pm)} - 2m)} e^{-(r_{(\pm)}/2m)} \left(V_{(\pm)} dU_{(\pm)}^2 - U_{(\pm)} dV_{(\pm)}^2 \right)^2 + r_{(\pm)}^2 d\Omega^2. \quad (5.18)$$

Adicionalmente, as hipersuperfícies $(r_{(\pm)} = R_{(\pm)} = \text{const.})$ correspondem as equações $(U_{(\pm)}V_{(\pm)} = \text{const.})$, de maneira que o vetor normal é definido agora por

$$n_{\mu}^{(\pm)} = 4m^{3/2} B_{(\pm)}^{-(1/2)} \left(V_{(\pm)} \delta_{\mu}^{U_{(\pm)}} + U_{(\pm)} \delta_{\mu}^{V_{(\pm)}} \right), \quad (5.19)$$

onde

$$\begin{aligned} B_{(\pm)} &= -r_{(\pm)}U_{(\pm)}V_{(\pm)}e^{r_{(\pm)}/2m}, \\ &= r_{(\pm)}\left(\frac{r_{(\pm)}}{2m} - 1\right)e^{r_{(\pm)}/2m}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Neste ponto devemos nos lembrar que, nas coordenadas nulas, o horizonte de eventos, $r_{(\pm)} = 2m$, corresponde a $(U_{(\pm)} = 0)$ ou $(V_{(\pm)} = 0)$. Como consequência, as componentes $(l_{UU}^{(\pm)}, l_{UV}^{(\pm)}, l_{VV}^{(\pm)})$ da métrica induzida divergem para as hipersuperfícies em consideração. Enquanto isso, o vetor normal, para o qual $B = 0$, torna-se nulo o que por sua vez implica na impossibilidade de definir a curvatura extrínseca sob tais circunstâncias. Neste contexto, o formalismo de Israel-Darmois não se aplica mais fazendo-se necessário considerar então condições para hipersuperfícies nulas. Todavia, isto levaria à introdução de algum tensor de energia-momento sobre as hipersuperfícies, situação que queremos evitar².

Em conclusão, não é possível colar duas soluções de Schwarzschild através de hipersuperfícies estáticas, mesmo no horizonte sem ter que considerar alguma distribuição de massa delimitando-as.

5.1.2 Fronteira dinâmica e esfericamente simétrica

Após ter visto que não é possível realizar a colagem desejada através de hipersuperfícies estáticas, de raio constante, consideraremos então uma fronteira dinâmica e examinaremos se o procedimento de junção é permitido. Neste caso as hipersuperfícies, sendo igualmente tipo-tempo, são definidas por

$$\Sigma_{(\pm)} = \{r_{(\pm)} - R_{(\pm)}(t_{(\pm)}) = \text{const}\}. \quad (5.21)$$

Neste caso os vetores normais são

$$n_{\mu}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}}}} \left(-\dot{R}_{(\pm)}\delta_{\mu}^{t_{(\pm)}} + \delta_{\mu}^{r_{(\pm)}} \right), \quad (5.22)$$

onde $\dot{R}_{(\pm)} = dR_{(\pm)}/dt_{(\pm)}$. As métricas induzidas, nos sistemas de coordenadas intrínsecas $y_{(\pm)}^a = (t_{(\pm)}, \theta, \varphi)$, estão dadas por

$$h_{ab}^{(\pm)} dy_{(\pm)}^a dy_{(\pm)}^b = -\frac{A_{(\pm)}^2 - \dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} dt_{(\pm)}^2 + R_{(\pm)}^2 d\Omega^2. \quad (5.23)$$

Os símbolos de Christoffel não nulos que aparecem na derivada covariante dos vetores normais (5.22), são

²Em [74] T. Dray aplica condições de junção para hipersuperfícies nulas na colagem de duas soluções de Schwarzschild, porém num contexto diferente do nosso.

$$\begin{aligned}
(\pm)\Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}(\pm)A^{-1}A'_{(\pm)}, & (\pm)\Gamma_{rt}^t &= \frac{1}{2}A_{(\pm)}^{-1}A'_{(\pm)}, & (\pm)\Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}A_{(\pm)}A'_{(\pm)}, \\
(\pm)\Gamma_{rr}^r &= -\frac{1}{2}A_{(\pm)}^{-1}A'_{(\pm)}, & (\pm)\Gamma_{\theta\theta}^r &= -R_{(\pm)}(t_{(\pm)}), & (\pm)\Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -AR_{(\pm)}(t_{(\pm)})\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Consequentemente, as componentes não nulas da derivada covariante do vetor normal correspondem a

$$\begin{aligned}
n_{0;0}^{(\pm)} &= (2A_{(\pm)})^{-1}\dot{R}_{(\pm)}^2 \left(A'_{(\pm)}\dot{R}_{(\pm)}^2 + A_{(\pm)}A'_{(\pm)} - 2\ddot{R}_{(\pm)} \right) \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-3/2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(2\ddot{R}_{(\pm)} + A_{(\pm)}A'_{(\pm)} \right) \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2}, \\
n_{0;1}^{(\pm)} &= (2A_{(\pm)}^2)^{-1}A'_{(\pm)}\dot{R}_{(\pm)} \left(A_{(\pm)}^2 + A'_{(\pm)}\dot{R}_{(\pm)}^2 \right) \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-3/2} \\
&\quad + (2A_{(\pm)})^{-1}A'_{(\pm)}\dot{R}_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2}, \\
n_{1;0}^{(\pm)} &= (2A_{(\pm)}^2)^{-1}\dot{R}_{(\pm)} \left(2A_{(\pm)}\ddot{R}_{(\pm)} - A_{(\pm)}^2A'_{(\pm)} - A'_{(\pm)}\dot{R}_{(\pm)}^2 \right) \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-3/2} \\
&\quad + (2A_{(\pm)})^{-1}A'_{(\pm)}\dot{R}_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2}, \\
n_{1;1}^{(\pm)} &= - (2A_{(\pm)}^2)^{-1}A'_{(\pm)} \left(A_{(\pm)}^2 + \dot{R}_{(\pm)}^2 \right) \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-3/2} \\
&\quad + (2A_{(\pm)})^{-1}A'_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2}, \\
n_{2;2}^{(\pm)} &= -A_{(\pm)}R_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2}, \\
n_{3;3}^{(\pm)} &= -A_{(\pm)}R_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2} \sin\theta.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Por causa da dependência temporal de $\Sigma_{(\pm)}$, o projetor que relaciona $r_{(\pm)}$ com a co-

ordenada intrínseca $t_{(\pm)}$ desta vez será diferente de zero. Especificamente, vai ser igual a $e_0^1 = \dot{R}$. O resto será igual a 1 de modo que as componentes da curvatura extrínseca são dadas por

$$\begin{aligned} K_{00}^{(\pm)} &= - \left(n_{0;0}^{(\pm)} + \dot{R}n_{0;1}^{(\pm)} + \dot{R}n_{1;0}^{(\pm)} + \dot{R}^2 n_{1;1}^{(\pm)} \right), \\ &= \pm \left[2A_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \left(3\dot{R}_{(\pm)}^2 A'_{(\pm)} - 2\ddot{R}_{(\pm)} A_{(\pm)} - A_{(\pm)}^2 A'_{(\pm)} \right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} K_{22}^{(\pm)} &= - n_{2;2}^{(\pm)} \\ &= \pm A_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} K_{33}^{(\pm)} &= - n_{3;3}^{(\pm)}, \\ &= \pm A_{(\pm)} \left(A_{(\pm)} - \frac{\dot{R}_{(\pm)}^2}{A_{(\pm)}} \right)^{-1/2} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aplicando a primeira condição de junção de Israel mais uma vez, obtemos que $R_{(+)}(t_{(+)}) = R_{(-)}(t_{(-)})$. Por outro lado, considerando especificamente as componentes $K_{22}^{(\pm)}$ e $K_{33}^{(\pm)}$ a segunda condição de junção conduz a

$$A_{(+)} \left(A_{(+)} - \frac{\dot{R}_{(+)}^2}{A_{(+)}} \right)^{1/2} = -A_{(-)} \left(A_{(-)} - \frac{\dot{R}_{(-)}^2}{A_{(-)}} \right)^{1/2}. \quad (5.29)$$

A única alternativa para que isto seja correto corresponde a $A_{\pm}[R(t_{\pm})] = 0$ para todo valor de $t_{(\pm)}$. Isto por sua vez implica que $\dot{R} = 0$, de forma que a configuração na que $\dot{R}_{(\pm)} \neq 0$ não pode ser aplicada para colar duas soluções de Schwarzschild através de hipersuperfícies temporais.

5.2 Colagem de soluções de Schwarzschild-de Sitter

Dado que não é possível colar duas regiões estáticas esfericamente simétricas, descritas pela solução de Schwarzschild para $r > 2m$, passemos então a considerar a métrica de Schwarzschild-de Sitter. Como foi mencionado antes, esta é uma solução às equações de Einstein que descreve a geometria de um espaço-tempo esfericamente simétrico e vazio, mas à diferença da solução de Schwarzschild, com constante cosmológica.

A introdução de uma constante cosmológica nas solução de Schwarzschild leva a aparição de um horizonte cosmológico. Assim, o espaço-tempo definido por esta métrica é dividido em três regiões. Nós focaremos a atenção na solução exterior de Schwarzschild-de

Sitter, $r > r_2$. Especificamente, consideramos corpos esféricos cujas massas estão distribuídas na região $0 < r < R_M$, sendo R_M o raio dos mesmos. A ideia é representar o espaço-tempo externo de objetos reais, pelo qual é requerido que $R_M > r_1$ evitando assim a aparição de horizontes em $r = r_1$, ou em outras palavras, o caso de buracos negros. Além desta restrição, consideraremos que $R_M < r_2$ o que garante a existência de uma região estática ao redor dos objetos massivos delimitada pela superfície destes e os horizontes cosmológicos respectivos.

Na região $r > r_2$, as coordenadas temporal e espacial trocam de natureza, ou seja, r passa a ser a coordenada temporal e t a coordenada radial. Isto implica que o espaço-tempo deixa de ser estático sendo agora dinâmico e homogêneo. A existência da constante cosmológica causa nele um processo de expansão ou contração dependendo do seu sinal. Por outro lado, a homogeneidade pode ser entendida ao compararmos a solução exterior de Schwarzschild-de Sitter com os modelos de universo de Kantowski-Sachs [75, 76]. Este último descreve um universo espacialmente homogêneo e anisotrópico onde o elemento de linha é da forma³

$$ds^2 = -d\tau^2 + C(\tau)dr^2 + D(\tau)d\Omega^2, \quad (5.30)$$

onde τ representa o tempo cosmológico e r a coordenada radial. Em referência à solução exterior de Schwarzschild-de Sitter, podemos considerar a transformação ($r \longleftrightarrow t$) na métrica (3.58) de modo que o elemento de linha pode ser escrito, na região em expansão, como

$$ds^2 = -A(t)^{-1}dt^2 + A(t)dr^2 + t^2d\Omega. \quad (5.31)$$

Ao ser um espaço-tempo homogêneo, em lugar de usar o formalismo de Israel, onde as condições de junção são automaticamente satisfeitas⁴, podemos entender as propriedades do mesmo construindo o diagrama de Penrose-Carter para as duas partículas massivas que constituem nosso universo, sendo esta uma forma direta e mais clara.

A fig. (3.8) corresponde ao digrama de Penrose-Carter para a solução de Schwarzschild-de Sitter, nele observamos uma sequência infinita de espaço-tempos em cada um dos quais existe um buraco negro. Contudo, podemos considerar o diagrama de Penrose-Carter para um único buraco negro como é mostrado na fig. (5.1). Mais importante ainda para nosso objetivo, é a possibilidade de construir o digrama que descreve a geometria exterior de um objeto massivo cujo raio esteja localizado na região estática da solução de Schwarzschild-de Sitter. Este seria limitado por uma superfície estática, linha vermelha na fig. (5.1), e uma singularidade no infinito⁵.

³A solução de Schwarzschild para $r < 2m$ é um claro exemplo deste tipo de soluções, ver [77, 78].

⁴Neste caso, as hipersuperfícies espaciais são aquelas definidas por $t = \text{const}$.

⁵Para construir o digrama de Penrose-Carter requerido é necessário considerar a extensão e posterior compactação da solução de Schwarzschild-de Sitter unicamente através do horizonte cosmológico. A exis-

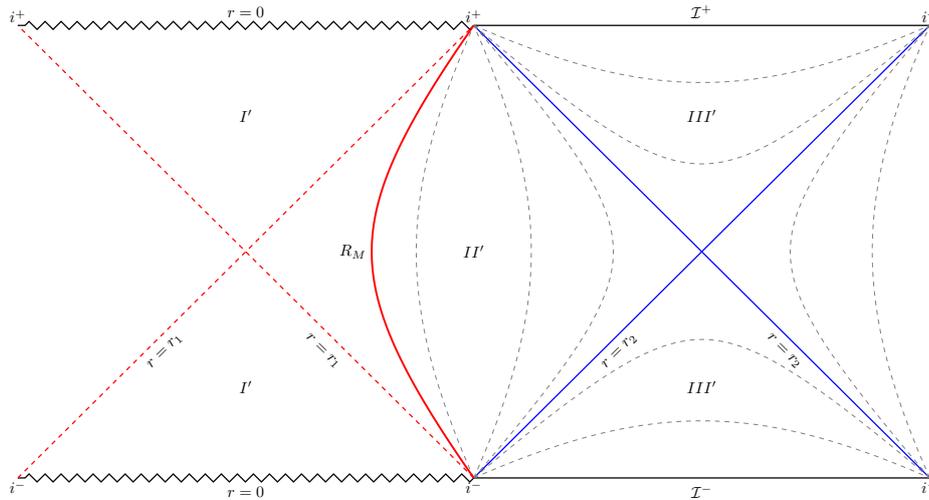


Figura 5.1: Diagrama de Penrose-Carter para um único buraco negro na solução de Schwarzschild-de Sitter.

O procedimento de junção das duas soluções de Schwarzschild-de Sitter é representado através do diagrama de Penrose-Carter relativo à região exterior comum às duas massas. Isto é possível graças à homogeneidade dos respectivos espaços-tempos além do horizonte cosmológico o que permite identificar os pontos de uma variedade como os pontos da outra. Deste modo, o digrama que nos interessa é formado a partir da união dos digramas individuais os quais são cópias exatas um do outro.

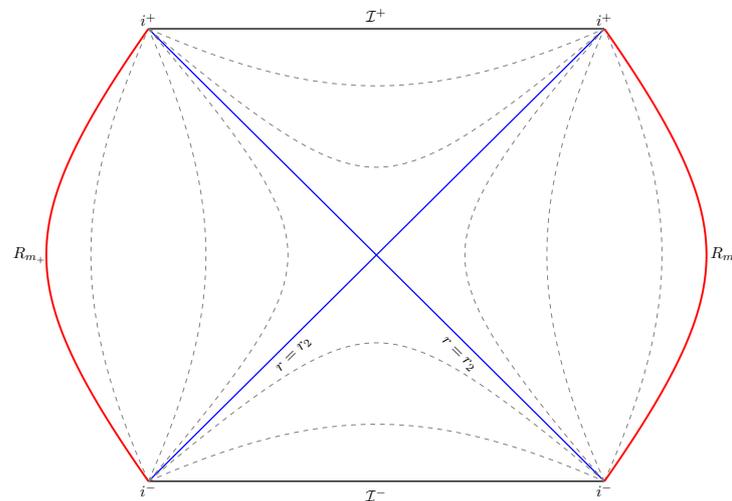


Figura 5.2: Diagrama de Penrose-Carter para a solução exterior de duas massas no espaço-tempo Schwarzschild-de Sitter.

Na fig. (5.2) podemos ver duas regiões estáticas rodeando ambas as massas e limitadas pela presença de uma distribuição contínua de massa impossibilita a aparição da singularidade em $r = 0$ e do horizonte de eventos.

pelos respectivos horizontes cosmológicos. Como foi mostrado antes, estes horizontes não podem ser colados porque existe uma região homogênea entre eles separando-os. Devido à natureza da solução de Schwarzschild-de Sitter para $r > r_2$, os dois corpos estão causalmente desconectados, um raio de luz emitido na região estática em torno de uma das massas eventualmente atravessaria o horizonte cosmológico, a partir do qual o movimento estaria dirigido na direção da singularidade em $\mathcal{I}^{(+)}$ de forma que nunca atingiria nem cruzaria o segundo horizonte.

5.2.1 Comparação com o modelo de queijo suíço

No modelo proposto por Einstein e Strauss [16, 17], regiões vazias e esféricas descritas pela métrica de Schwarzschild são imersas num fluido homogêneo e isotrópico definido pela solução de Friedmann. Na interface entre uma e outra, são impostas condições de contorno de forma que seja possível obter uma solução compatível com as equações de Einstein para um universo em expansão. Por outro lado, em [79] o espaço-tempo nas regiões esféricas é dotado de uma constante cosmológica. Portanto, podemos entender a situação apresentada na seção anterior como um caso de modelo do tipo de queijo suíço, onde massas rodeadas por regiões estáticas e esfericamente simétricas são imersas num universo homogêneo com constante cosmológica.

Seguindo esta linha de pensamento, consideremos então dois espaço-tempos, um descrito pela solução de Schwarzschild, Eq. (3.58), e outro dado por

$$ds^2 = -dT^2 + a(T)^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2), \quad (5.32)$$

descrevendo a geometria do universo de Friedmann-Lemaître com seções espaciais esféricas.

Para colar os dois espaço-tempos, consideremos a hipersuperfície $\Sigma_K = \{r_0(t)\}$, com r_0 no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, e a hipersuperfície $\Sigma_{FL} = \{\chi = \hat{\chi}\}$ no espaço-tempo de Friedmann-Lemaître. Na região de Friedmann-Lemaître a métrica induzida é expressa como

$$ds_{(FL)}^2 = -dT^2 + a^2(T) \sin^2 \chi d\Omega^2. \quad (5.33)$$

O vetor normal, $n_\mu^{(F)}$, é definido por

$$n_\mu^{(FL)} = a(T) \delta_\mu^\chi. \quad (5.34)$$

Os símbolos de Christoffel não nulos que aparecem na derivada covariante do vetor normal são

$$\begin{aligned}\Gamma_{\chi T}^\chi &= \Gamma_{T\chi}^\chi = a^{-1}\dot{a}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^\chi &= \sin\chi \cos\chi, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\chi &= \sin\chi \cos\chi \sin^2\theta,\end{aligned}\tag{5.35}$$

tal que

$$n_{\mu;\nu}^{FL} = - \begin{pmatrix} 0 & -\dot{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \sin\chi \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \sin\chi \cos\chi \sin^2\theta \end{pmatrix},\tag{5.36}$$

levando então a curvatura extrínseca a ser dada por

$$K_{ab}^{(FL)} dy^a dy^b = -a(T) \sin\hat{\chi} \cos\hat{\chi} d\Omega^2.\tag{5.37}$$

Para a região de Schwarzschild-de Sitter a métrica induzida e a curvatura extrínseca são definidas pelas Eqs. (5.23) e (5.26)-(5.28) respectivamente, sendo $R(t) = r_0(t)$. Agora, a continuidade da métrica induzida, primeira condição de Israel, implica

$$r_0 = a(T) \sin\hat{\chi}, \quad \frac{dT}{dt} = \sqrt{\frac{A^2 - \dot{r}_0^2}{A}}.\tag{5.38}$$

Expressemos a segunda das equações como

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 = \frac{A}{A + \dot{a}^2 \sin^2\hat{\chi}},\tag{5.39}$$

para este fim, consideramos a derivada de $r_0(t)$ explicitamente dada por

$$\dot{r}_0 = \dot{a} \sin\hat{\chi} \left(\frac{dT}{dt}\right).\tag{5.40}$$

Por outro lado, em conformidade com a Eq. (4.43) temos⁶

$$\frac{A}{\sqrt{A - \frac{\dot{r}_0^2}{A}}} = -a \sin\chi \cos\chi,\tag{5.41}$$

de onde, junto com (5.39) e (5.40) e depois de um pouco de álgebra chega-se a

$$\cos^2\hat{\chi} = A + \dot{a}^2 \sin^2\hat{\chi}.\tag{5.42}$$

⁶Temos usado as componentes da curvatura extínseca K_{22} e K_{33} nas Eqs. (5.26)-(5.28) com sinal positivo. Não consideramos a componente $K_{00} = 0$ já que não fornece informação útil alguma.

Como consequência, a relação entre as coordenadas temporais T e t , Eq. (5.39), pode ser reescrita como

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) \cos^2 \chi = A. \quad (5.43)$$

Neste ponto, devemos lembrar que na região descrita pela solução de Friedmann-Lemaître o fator de escala satisfaz a equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda_{(FL)}}{3} - \frac{1}{a^2}, \quad (5.44)$$

onde $\Lambda_{(FL)}$ é a constante cosmológica associada à solução de Friedmann-Lemaître e $\rho = \rho_0(a_0/a)^3$ representa a densidade de energia de um fluido sem pressão. Adicionalmente, o termo $A(r_0)$ correspondente ao coeficiente relacionado à solução de Schwarzschild-de Sitter

$$A(r_0) = 1 - \frac{2m}{r_0} - \frac{\Lambda_{(K)}}{3}r_0^2, \quad (5.45)$$

com $\Lambda_{(K)}$ sendo a constante cosmológica do respectivo espaço-tempo. Levando em conta o desenvolvimento anterior, a Eq. (5.42) pode ser reescrita como

$$\left(1 - \frac{2m}{r_0} - \frac{\Lambda_{(K)}}{3}r_0^2\right) + a^2 \left(\frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda_{(FL)}}{3} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \hat{\chi} = 1 - \sin^2 \hat{\chi}, \quad (5.46)$$

que se reduz para

$$\left(\frac{8\pi}{3}a^2\rho - \frac{2m}{a \sin \hat{\chi}}\right) + \frac{a^2 \sin^2 \hat{\chi}}{3} (\Lambda_{(FL)} - \Lambda_{(K)}) = 0. \quad (5.47)$$

Assim, a continuidade da curvatura extrínseca é garantida se

$$\begin{cases} \Lambda_{(FL)} = \Lambda_{(K)}, \\ m = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 \sin^3 \hat{\chi}. \end{cases} \quad (5.48)$$

Portanto, dada uma região cheia de matéria sem interação entre as suas componentes e com constante cosmológica positiva cuja geometria é descrita pela solução de Friedmann-Lemaître, é possível tomar uma região esférica dentro da mesma de modo que no seu centro seja inserida uma partícula com a massa igual à definida na Eq. (5.48). O raio desta região seria então $a(T) \sin \hat{\chi}$ e a geometria representada pela solução de Schwarzschild-de Sitter. Da Eq. (5.43), vemos que no limite $\hat{\chi} \rightarrow \pi/2$ temos que $A \rightarrow 0$, isto é, a massa da partícula é tal que o equador da 3-esfera coincide com o horizonte cosmológico do espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

Continuando com o mesmo raciocínio, podemos então considerar duas regiões vazias e

esfericamente simétricas dentro de um universo de Friedmann-Lemaître e inserir um corpo massivo no centro de cada uma de tal forma que as respectivas geometrias correspondam à solução de Schwarzschild-de Sitter. Para que este procedimento seja possível as massas devem localizar-se nos polos opostos da esfera, se não fosse assim as referidas regiões e suas respectivas fronteiras não seriam equivalentes, a simetria seria quebrada.

Sejam $\Sigma_{(+)}$ e $\Sigma_{(-)}$ as superfícies que delimitam cada uma das regiões de Schwarzschild-de Sitter dentro da hiperesfera, com vetores normais $n_{(+)}$ e $n_{(-)}$ respectivamente. Na região de Friedmann-Lemaître os vetores normais associados às mesmas são $n_{(FL+)}$ e $n_{(FL-)}$, como é representado nas fig. (5.3). Em princípio as esferas estão afastadas uma da outra sem ter contato algum entre elas, mas graças à Eq. (5.48) é possível regular o tamanho destas através da massa das partículas. Incrementando progressivamente o tamanho das duas regiões, chega-se o instante em que as fronteiras entram em contacto mas isso não implica a desapareição da região de Friedmann-Lemaître.

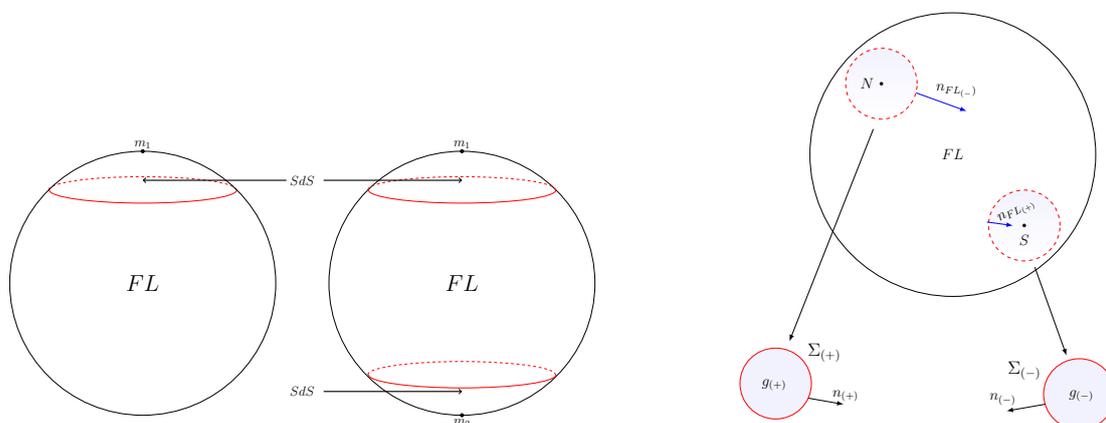


Figura 5.3: Construção de um universo do tipo queijo suíço com dois buracos negros de Schwarzschild-de Sitter imersos no espaço-tempo de FL.

5.3 Colagem de soluções com carga: Métrica de Reissner-Nordström

Na seção (5.1.1) foi mostrado que a colagem de duas soluções de Schwarzschild descrevendo cada uma a geometria do espaço-tempo de um hemisfério numa esfera S^3 não é possível, mesmo se a hipersuperfície de junção for estática ou dinâmica. Nesta seção queremos ver o que acontece se em lugar de Schwarzschild, considerarmos a solução de Reissner-Nordström.

A configuração utilizada é a mesma, isto é, duas partículas localizadas nos pólos opostos de uma hiperesfera com topologia S^3 . No entanto, além de massa, estas estão providas de carga de igual magnitude e sinal diferente⁷. Deste modo e como lembrança, o elemento de

⁷As cargas ao igual que as massas, são iguais para manter a simetria na 3-esfera. O sinal oposto entre

linha em cada um dos hemisférios é dado por

$$ds_{(\pm)}^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r_{(\pm)}} + \frac{q^2}{r_{(\pm)}^2} \right) dt_{(\pm)}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r_{(\pm)}} + \frac{q^2}{r_{(\pm)}^2} \right)^{-1} dr_{(\pm)}^2 + r_{(\pm)}^2 d\Omega^2. \quad (5.49)$$

Novamente tomaremos as hipersuperfícies de junção como sendo $\Sigma_{(\pm)} = \{r_{(\pm)} = R_{(\pm)}\}$, com $R_{(\pm)}$ sendo constante, conseqüentemente os vetores normais vêm a ser

$$n_{\mu}^{(\pm)} = (\pm) \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R_{(\pm)}} + \frac{q^2}{R_{(\pm)}^2} \right)}} \delta_{\mu}^{r_{(\pm)}}. \quad (5.50)$$

Adicionalmente, a métrica induzida é dada por

$$h_{ab}^{(\pm)} dx^a dx^b = - \left(1 - \frac{2m}{R_{(\pm)}} + \frac{q^2}{R_{(\pm)}^2} \right) dt_{(\pm)}^2 + R_{(\pm)}^2 d\Omega^2. \quad (5.51)$$

A curvatura extrínseca neste caso é definida de forma similar que na Eq. (5.12), especificamente como

$$K_{ab}^{(\pm)} dx^a dx^b = (\pm) \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R_{(\pm)}} + \frac{q^2}{R_{(\pm)}^2} \right)} \left[\left(\frac{q^2}{R_{(\pm)}^3} - \frac{m}{R_{(\pm)}^2} \right) dt_{(\pm)}^2 + R_{(\pm)} d\Omega^2 \right]. \quad (5.52)$$

De acordo com a primeira condição de junção de Israel

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2m}{R_{(+)}} + \frac{q^2}{R_{(+) }^2} \right) dt_{(+)}^2 = \left(1 - \frac{2m}{R_{(-)}} + \frac{q^2}{R_{(-)}^2} \right) dt_{(-)}^2, \\ R_{(+)} = R_{(-)}. \end{cases} \quad (5.53)$$

Mais uma vez, a continuidade da métrica induzida impõe para a colagem ser realizada no equador da 3-esfera. Da segunda condição de junção temos

$$\begin{cases} \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R_{(+)}} + \frac{q^2}{R_{(+) }^2} \right)} \left(\frac{q^2}{R_{(+)}^3} - \frac{m}{R_{(+)}^2} \right) = - \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R_{(-)}} + \frac{q^2}{R_{(-)}^2} \right)} \left(\frac{q^2}{R_{(-)}^3} - \frac{m}{R_{(-)}^2} \right), \\ \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R_{(+)}} + \frac{q^2}{R_{(+) }^2} \right)} R_{(+)} = - \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R_{(-)}} + \frac{q^2}{R_{(-)}^2} \right)} R_{(-)}, \end{cases} \quad (5.54)$$

elas é escolhido para evitar a necessidade de supor hipersuperfície possuindo algum tipo de distribuição de carga.

que dado o resultado da primeira condição, se reduz a

$$\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{q^2}{R^2}\right) = 0, \quad (5.55)$$

de onde obtemos

$$R = \begin{cases} r_1 = m - \sqrt{m^2 - q^2}, \\ r_2 = m + \sqrt{m^2 + q^2}. \end{cases} \quad (5.56)$$

Como podemos observar, de igual forma que no caso de Schwarzschild a colagem das soluções de Reissner-Nordström teria que ocorrer nos horizontes o qual como já vimos não é possível. Por exemplo, se focarmos nossa atenção no horizonte externo e fizermos uso das coordenadas nulas (U_2, V_2) , as métricas induzidas são expressadas como

$$l_{ab}^{(\pm)} dz^a dz^b = D_{(\pm)} \left(V_{2(\pm)} dU_{2(\pm)}^2 - U_{2(\pm)} dV_{2(\pm)}^2 \right) + r_{(\pm)}^2 d\Omega^2, \quad (5.57)$$

onde

$$\begin{aligned} D_{(\pm)} &= - \left(\frac{\alpha_{2(\pm)}}{2U_{2(\pm)} V_{2(\pm)}} \right)^2 A_{(\pm)}, \\ &= \frac{1}{\alpha_{2(\pm)}^2 r_{(\pm)}^2} \left(r_{2(\pm)} - r_{(\pm)} \right)^{-1} \left(r_{(\pm)} - r_{1(\pm)} \right)^{4b_{(\pm)}} e^{-2r_{(\pm)}/\alpha_{2(\pm)}}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Entretanto, os vetores normais são definidos por⁸

$$n_{\mu}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{E_{(\pm)}}} \left(V_{2(\pm)} \delta_{\mu}^{U_{2(\pm)}} + U_{2(\pm)} \delta_{\mu}^{V_{2(\pm)}} \right), \quad (5.59)$$

para o qual $E_{(\pm)}$ é dado por

$$\begin{aligned} E_{(\pm)} &= - r_{(\pm)}^2 (r_{(\pm)} - r_{1(\pm)})^{-(1+a)} e^{2r_{(\pm)}/\alpha_{2(\pm)}} U_{2(\pm)} V_{(\pm)}, \\ &= \alpha_{2(\pm)}^2 r_{(\pm)}^2 (r_{(\pm)} - r_{1(\pm)})^{-(1+a+2b)} (r_{(\pm)} - r_{2(\pm)}) e^{4r_{(\pm)}/\alpha_{2(\pm)}}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Quando as hipersuperfícies coincidem com o respectivo horizonte externo, isto é, no caso em que $r_{(\pm)} = r_{2(\pm)}$ as métricas induzidas tornam-se singulares, enquanto os vetores normais viram vetores nulos como podemos concluir a partir das equações anteriores. Desta maneira, vemos que não é possível; como no caso de Schwarzschild, colar duas soluções de Reissner-Nordström através de hipersuperfícies estáticas tipo-tempo, enquanto descrevem a geometria dos hemisférios de uma 3-esfera. Em geral, colar quaisquer duas soluções estáticas e esféricamente simétricas sob a configuração em consideração é irrealizável de acordo com [19] e como também será mostrado na última parte deste capítulo, na seção (5.5). Para hipersuperfícies dinâmicas tipo-tempo a situação é equivalente o qual podemos inferir diretamente da análise apresentada na seção (5.1.2). Tal vez, com o uso de hipersu-

⁸As hipersuperfícies são igualmente definidas por $U_{2(\pm)} V_{2(\pm)} = \text{const.}$

perfícies nulas seria possível o processo de junção, mas como foi antes mencionado teríamos que introduzir um distribuição de massa e carga o qual não estamos interessados⁹.

5.4 Colagem de duas soluções Reissner-Nordström-de Sitter

Em vista da impossibilidade de colar duas soluções de Reissner-Nordström e em analogia com os resultados obtidos ao abordar o mesmo problema com as soluções de Schwarzschild e Schwarzschild-de Sitter, procederemos então a considerar a solução de Reissner-Nordström-de Sitter.

Desta vez assumiremos a presença de dois objetos massivos com carga oposta de igual magnitude e cujas massas estão distribuídas numa região de raio R_{mq} tal que $r_2 < R_{mq} < r_3$, onde r_2 e r_3 são os horizontes de evento e cosmológicos da solução de Reissner-Nordström-de Sitter. Desta forma, temos dois corpos rodeados por regiões estáticas limitadas pelas superfícies destes e as respectivas regiões cosmológicas.

Como sabemos, na região $r_3 < r$ o espaço-tempo não é estático, ali r e t desempenham o papel de coordenadas temporal e radial respectivamente. Considerando tal circunstância, podemos então interpretá-la como uma solução do tipo Kantowski Sachs, na mesma forma como fizemos com a região exterior na solução de Schwarzschild-de Sitter, e escrever o elemento de linha na forma da Eq. (5.31). Por outro lado, um observador localizado nesta região, perceberá um campo elétrico dependente do tempo [80, 81] que nas hipersuperfícies temporais é homogêneo. Isto permite então colar duas soluções deste tipo, descrevendo a geometria dos hemisférios de uma 3-esfera.

Sendo o campo elétrico e o espaço-tempo homogêneos na região sob consideração, as condições de junção são automaticamente satisfeitas pelo que, em semelhança com procedimento de colagem de duas soluções de Schwarzschild-de Sitter, é mais adequado construir o diagrama de Penrose-Carter para a o espaço-tempo resultante.

Para elaborar o diagrama de Penrose-Carter requerido, é necessário nos concentrarmos unicamente na extensão da solução de Reissner-Nordström-de Sitter através do horizonte cosmológico e sua posterior compactação, ver fig. (5.4).

Para cada objeto teremos um digrama igual ao anterior, onde a linha vermelha representa a superfícies dos mesmos. Aproveitando a homogeneidade do espaço-tempo na região $\hat{I}\hat{V}$, podemos construir o diagrama de Penrose-Carter para o espaço-tempo dos dois corpos unindo duas cópias da fig. (5.4) resultando no diagrama da fig. (5.5).

Embora sejam soluções distintas com mais diferenças do que semelhanças, com um rápido olhar sobre a fig. (5.5) notamos a semelhança com a fig. (5.2) e ao igual que acontece na situação descrita nesta última, os dois corpos estão causalmente desconectados na configuração atual, isto é, um raio de luz emitido na região estática ao redor de qualquer

⁹Em [82] T. Dray implementa hipersuperfícies nulas para colar duas soluções de Reissner-Nordström, todavia num contexto diferente do considerado por nós.

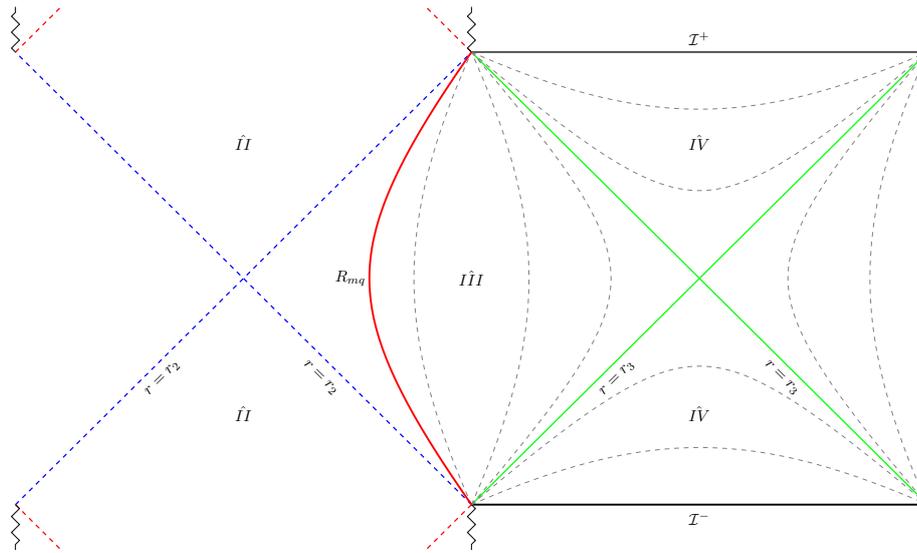


Figura 5.4: Diagrama de Penrose-Carter para um corpo de radio $r_2 < R_{mq} < r_3$ no espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter.

dos dois objetos carregados conseguiria atravessar o respectivo horizonte cosmológico, mas o movimento posterior estaria restrito unicamente na direção da singularidade de modo que não teria a possibilidade de alcançar o outro horizonte. O campo elétrico é constante ao longo das curvas r constante da fig. (5.5), na região entre as retas $r = r_3$ e \mathcal{I} . Por outro lado e de acordo com Mellor e Moss [83] as linhas de campo elétrico se situam sobre superfícies espaciais que conectam ambos os corpos.

5.5 Colagem de duas soluções estáticas quaisquer: $A(r)$ arbitrário

Como vimos, colar duas soluções de Schwarzschild ou Reissner-Nordström numa 3-esfera não é possível. Este resultado pode ser generalizado para qualquer espaço-tempo estático e esfericamente simétrico. O objetivo nesta seção é mostrar este fato.

Numa variedade com topologia S^3 as equações de Einstein podem ter diferentes tipos de soluções, não unicamente a métrica de Schwarzschild. Portanto, é possível pensar que o espaço-tempo dos hemisférios numa 3-esfera pode ser descrito por soluções estáticas esfericamente simétricas quaisquer de modo que os elementos de linha correspondentes são expressos na forma (5.1), onde $A_{(\pm)}(r)$ é uma função arbitrária.

Segundo as condições de junção, a colagem deve ser realizada no equador da 3-esfera e em $A_{(\pm)} = 0$, ou seja, todas as soluções estáticas e esfericamente simétricas devem ser coladas através dos respectivos horizontes.

Com o propósito de mostrar que o anterior é irrealizável sem importar o caso específico

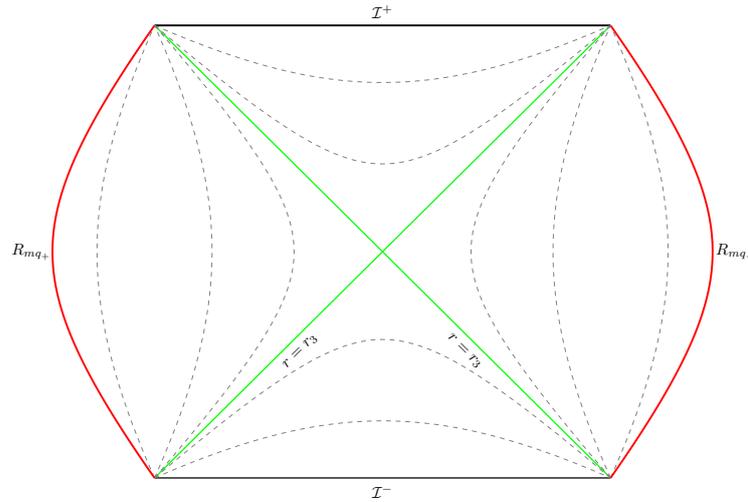


Figura 5.5: Diagrama de Penrose-Carter para dois corpos de raio $r_2 < R_{mq} < r_3$ no espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter.

a tratar-se, assumamos¹⁰ como ponto de partida que em $r = R$ existe um horizonte o que implica $A(R) = 0$. Prossigamos então expandindo $A(r)$ em series de Taylor ao redor de R e tomando unicamente o termo em primeira ordem¹¹, assim temos

$$A(r) = B(r - R), \quad (5.61)$$

onde $B \equiv A'(R) \neq 0$. Usando a coordenada r_* definido no caso em questão como

$$\begin{aligned} r_* &= \int \frac{dr}{A(r)}, \\ &\simeq \frac{1}{B} \ln(r - R). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Podemos reescrever esta expressão como

$$A(r) = Be^{Br_*}. \quad (5.63)$$

Agora, introduzindo as coordenadas de Eddidgton-Finkelstien u e v , podemos escrever

$$A(r) = Be^{\frac{B}{2}(v-u)}. \quad (5.64)$$

Passando às coordenadas $U = e^{-\frac{B}{2}u}$ e $V = e^{\frac{B}{2}v}$ vemos que

$$A = BUV. \quad (5.65)$$

Deste modo, podemos expressar a métrica nas proximidades de $r = R$ em termos das

¹⁰Por enquanto esqueceremos dos índices (\pm) que caracterizam cada hemisfério da 3-esfera.

¹¹Graças à arbitrariedade em $A(r)$ podemos considerar soluções não exatas a modo de generalização.

coordenadas (U, V) como

$$ds^2 = \frac{4}{B} dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (5.66)$$

Queremos então colar dois espaço-tempos descritos por métricas da forma (5.66), correspondendo cada um com um dos hemisférios da 3-esfera.

As hipersuperfícies ($r_{(\pm)} = R_{(\pm)} = \text{const.}$) correspondem nas coordenadas atuais à equação ($U_{(\pm)}V_{(\pm)} = \text{const.}$) de modo que o vetor normal é definido como

$$n_{\mu}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{B_{(\pm)}U_{(\pm)}V_{(\pm)}}} \left(V_{(\pm)} \delta_{(\pm)}^{U_{(\pm)}} + U_{(\pm)} \delta_{\mu}^{V_{(\pm)}} \right). \quad (5.67)$$

Sendo a métrica um tensor, obedece a regra de transformação de tensores

$$(t_{(\pm)}, \theta, \varphi) \longrightarrow (U_{(\pm)}, V_{(\pm)}, \theta, \varphi), \quad (5.68)$$

$$h_{ab}^{(\pm)} \longrightarrow l_{ab}^{(\pm)},$$

que permite expressar a métrica induzida dada por (5.6), em termos nas coordenadas (U, V)

$$l_{ab}^{(\pm)} = \frac{\partial y^c}{\partial z^a} \frac{\partial y^d}{\partial z^b} h_{cd}^{(\pm)}, \quad (5.69)$$

$$l_{ab}^{(\pm)} dz^a dz^b = -\frac{V_{(\pm)}}{B_{(\pm)}U_{(\pm)}} dU_{(\pm)}^2 + \frac{2}{B_{(\pm)}} dU_{(\pm)} dV_{(\pm)} - \frac{U_{(\pm)}}{B_{(\pm)}V_{(\pm)}} dV_{(\pm)}^2 + R_{(\pm)}^2 d\Omega^2, \quad (5.70)$$

$$= -\frac{1}{B_{(\pm)}U_{(\pm)}V_{(\pm)}} (U_{(\pm)} dV_{(\pm)} - V_{(\pm)} dU_{(\pm)})^2 + R_{(\pm)}^2 d\Omega^2.$$

Para calcular a derivada extrínseca podemos seguir dois caminhos, aplicar a regra de transformação de tensores desde o sistema de coordenadas $(t_{(\pm)}, \theta, \varphi)$ para $(U_{(\pm)}, V_{(\pm)}, \theta, \varphi)$ à expressão (5.12), como fizemos com a métrica induzida, ou usar a definição padrão, isto é a projeção da derivada covariante do vetor normal na hipersuperfície. Escolhendo a segunda opção temos que

$$n_{\mu;\nu}^{(\pm)} = n_{\mu,\nu}^{(\pm)} - \Gamma_{\mu\nu}^U n_U^{(\pm)} - \Gamma_{\mu\nu}^V n_V^{(\pm)} \quad (5.71)$$

Os coeficientes de Christoffel $\pm \Gamma_{\mu\nu}^U$ e $\pm \Gamma_{\mu\nu}^V$ não nulos avaliados em $\Sigma_{(\pm)}$ são

$$\begin{aligned} (\pm) \Gamma_{\theta\theta}^U &= -\frac{B}{2} U_{(\pm)} R_{(\pm)}, & (\pm) \Gamma_{\varphi\varphi}^U &= -\frac{B}{2} U_{(\pm)} R_{(\pm)} \sin^2 \theta, \\ (\pm) \Gamma_{\theta\theta}^V &= -\frac{B}{2} V_{(\pm)} R_{(\pm)}, & (\pm) \Gamma_{\varphi\varphi}^V &= -\frac{B}{2} V_{(\pm)} R_{(\pm)} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.72)$$

As componentes ${}^{(\pm)}n_U$ e ${}^{(\pm)}n_V$ dos vetores normais, Eqs. (5.67), dependem das coordenadas (U, V) de modo que as derivadas parciais destas são dadas por

$$\begin{aligned} {}^{(\pm)}n_{U,U} &= -\frac{1}{2} \left(V_{(\pm)} B_{(\pm)}^{-1} U_{(\pm)}^{-3} \right)^{\frac{1}{2}}, & {}^{(\pm)}n_{U,V} &= \frac{1}{2} \left(B_{(\pm)} U_{\pm} V_{(\pm)} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ {}^{(\pm)}n_{V,V} &= -\frac{1}{2} \left(U_{(\pm)} B_{(\pm)}^{-1} V_{(\pm)}^{-3} \right)^{\frac{1}{2}}, & {}^{(\pm)}n_{V,U} &= \frac{1}{2} \left(B_{(\pm)} U_{\pm} V_{(\pm)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

A derivada covariante $n_{\alpha;\beta}^{(\pm)}$ é expressa então como

$$n_{\alpha;\beta}^{(\pm)} = \pm \sqrt{B_{(\pm)} U_{(\pm)} V_{(\pm)}} \begin{pmatrix} -1/2 B_{(\pm)} U_{(\pm)}^2 & 1/2 B_{(\pm)} U_{(\pm)} V_{(\pm)} & 0 & 0 \\ 1/2 B_{(\pm)} U_{(\pm)} V_{(\pm)} & -1/2 B_{(\pm)} V_{(\pm)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{(\pm)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{(\pm)} \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Já que estamos definindo as hipersuperfícies igualmente em termos das coordenadas $(U_{(\pm)}, V_{(\pm)})$ a curvatura extrínseca é dada por $K_{\alpha\beta}^{(\pm)} = -n_{\alpha;\beta}^{(\pm)}$. Explicitamente temos

$$K_{\alpha\beta}^{(\pm)} dz^\alpha dz^\beta = \pm \sqrt{B_{(\pm)} U_{(\pm)} V_{(\pm)}} \left[-\frac{1}{2 B_{(\pm)} U_{(\pm)}^2 V_{(\pm)}^2} \left(V_{(\pm)} dU_{(\pm)} - U_{(\pm)} dV_{(\pm)} \right)^2 + R_{(\pm)} d\Omega^2 \right]. \quad (5.75)$$

Da Eq. (5.65), vemos que para $r_{(\pm)} = R_{(\pm)}$ as hipersuperfícies de junção são definidas pela equação $U_{(\pm)} V_{(\pm)} = 0$ o que implica diretamente que os vetores normais são agora vetores nulos. Além disso, a métrica induzida e curvatura extrínseca tornam-se singulares de modo que o procedimento de colagem é impraticável, pelo menos seguindo o formalismo de Israel-Darmois.

Capítulo 6

Considerações finais

Os modelos de universo em rede onde a matéria é discreta, do tipo Lindquist-Wheeler, constituem uma ferramenta importante na análise das propriedades globais do universo e permitem estabelecer, pelo menos de forma aproximada, a relação existente entre o comportamento de inhomogeneidades a pequenas escalas e modelos espacialmente homogêneos em escalas cosmológicas. Estes modelos podem ajudar entender a geometria dinâmica do universo a partir da geometria do espaço-tempo ao redor das diferentes estruturas que o integram. Neste sentido, analisaremos a estrutura geométrica de um universo hipotético formado por duas partículas massivas localizadas nos pólos opostos de uma 3-esfera.

Vimos que, sob a configuração considerada, não é possível colar duas soluções de Schwarzschild nas regiões estáticas, mas sim através dos horizontes o qual implica introduzir cascas finas as quais não teriam sentido físico algum. Desta forma, nos deparamos com a impossibilidade de construir um universo globalmente estático, análogo ao universo estático de Einstein. Considerando o caso em que a geometria do espaço-tempo em cada um dos hemisférios da 3-esfera é descrita pela solução de Schwarzschild-de Sitter, a colagem das duas métricas é permitida através das respectivas regiões cosmológicas, conseguindo-se assim um universo em expansão.

No caso em que a geometria gerada pelas partículas é descrita pela solução de Reissner-Nordström, a situação é idêntica ao caso anterior, isto é, colar duas soluções deste tipo nas regiões estáticas não é possível. As condições de junção determinam para a colagem ser realizada através dos horizontes, porém, como antes, isto implica supor a existência de cascas finas massivas e carregadas representando hipersuperfícies nulas as quais careceriam de sentido físico em nosso contexto. De modo que, de acordo com o raciocínio seguido ao considerar a solução de Schwarzschild-de Sitter, passamos então a considerar o caso da solução de Reissner-Nordström-de Sitter. Colar duas métricas deste tipo é possível nas respectivas regiões cosmológicas.

O anteriormente mencionado implica na impossibilidade de ter um universo estático constituído por dois corpos carregados cujas respectivas geometrias são definidas pela so-

lução de Reissner-Nordström. Enquanto um universo em expansão é permitido ao considerarmos a solução de Reissner-Nordström-de Sitter.

Estes modelos, universos constituídos por duas partículas cujas geometrias são descritas pelas soluções de Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter, são muito simples. Embora tenhamos conseguido idealizar um universo em expansão a partir de objetos massivos rodeados por regiões estáticas, não é possível levar além a análise das suas propriedades, por exemplo, calcular a taxa de expansão ou contração dos mesmos. Por outro lado, vemos que nas situações consideradas a constante cosmológica desempenha um papel importante, tanto para o caso da solução de Schwarzschild como para a solução de Reissner-Nordström foi necessário introduzi-la para podermos realizar o procedimento de colagem e obter assim universos em expansão.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Clarkson, P. Bull, T. Clifton. Isotropic blackbody cosmic microwave background radiation as evidence for a homogeneous universe. *Physical Review Letters*, 109: 051303, 2012. 1
- [2] M. S. Vogeley, F. Hoyle. Voids in the point source catalogue survey and the updated Zwicky catalog. *The Astrophysical Journal*, 566: 641, 2002. 1
- [3] D. C. Pan, M. S. Vogeley, F. Hoyle, Y. Y. Choi, C. Park. Cosmic voids in Sloan Digital Sky Survey Data Release 7. *MNRAS*, 421: 926–934, 2012. 1
- [4] N. Breton, M. Salgado. The early universe and observational cosmology. *Springer*, Berlin-Germany, 2004. 1
- [5] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis. Modified gravity and cosmology. *Phys. Rep.*, 513: 1–189, 2012. 2
- [6] T. Buchert. Dark energy from structure: a status report. *General Relativity and Gravitation*, 40: 467–527, 2008. 2
- [7] T. Clifton, K. Rosquist, R. Tavakol. An exact quantification of backreaction in relativistic cosmology. *Phys. Rev. D*, 86: 043506, 2012. 2
- [8] J. Larena. The fitting problem in a lattice universe. *ArXiv:1210.2161*, 2012. 2
- [9] D. Wallace. Gravity, entropy, and cosmology: in search of clarity. *British Journal for Philosophy of Science*, 61: 513–540, 2010. 2
- [10] D. L. Wiltshire. What is dust?-physical foundations of the averaging problem in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16): 164006, 2011. 2
- [11] K. Bolejko, M. N. Célérier, A. Krasinski. Inhomogeneous cosmological models: exact solutions and their applications. *Classical and Quantum Gravity*, 28: 164002, 2011. 2
- [12] A. Krasinski. Inhomogeneous cosmological models. *Cambridge University Press*, 2006. 2
- [13] R. W. Lindquist, J. A. Wheeler. Dynamics of a lattice universe by the Schwarzschild-cell method. *Rev. Mod. Phys.*, 29: 432–443, 1957. 2
- [14] T. Clifton. Cosmology without averaging. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16): 164011, 2011. 2

- [15] T. Clifton, P. G. Ferreira. Archipelagian cosmology: dynamics and observables in a universe with discretized matter content. *Phys. Rev. D*, 80: 103503, 2009. 2
- [16] A. Einstein, E. G. Straus. The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. *Rev. Mod. Phys.*, 17: 120–124, 1945. 2, 78
- [17] A. Einstein, E. G. Straus. Corrections and additional remarks to our paper: The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. *Rev. Mod. Phys.*, 18: 148–149, 1946. 2, 78
- [18] E. Gausmann, R. Lehoucq, J. P. Luminet, J. P. Uzan, J. Weeks. Topological lensing in spherical spaces. *Classical and Quantum Gravity*, 18(23): 5155, 2001. 3
- [19] J. P. Uzan, G. R. Ellis, J. Larena. A two-mass expanding exact space-time solution. *General Relativity and Gravitation*, 43: 191–205, 2011. 3, 69, 83
- [20] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *General Relativity and Gravitation*, 35: 951–959, 2003. 22
- [21] J. Droste. The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field. *General Relativity and Gravitation*, 34: 1545–1563, 2002. 22
- [22] T. Rothman. Editor's note: the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field. *General Relativity and Gravitation*, 34: 1541–1543, 2002. 22
- [23] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 237–238, 1963. 23
- [24] R. d'Inverno. Introducing Einstein's relativity. *Clarendon*, Oxford, 2004. 24
- [25] S. Carroll. Spacetime and geometry: introduction to general relativity. *Adisson Wesley*, 2004. 25
- [26] R. M. Wald. General relativity. *University of Chicago Press*, Chicago, EU, 1984. 25
- [27] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. *W. H. Freeman and Company*, San Francisco, EU, 1972. 27, 30
- [28] A.S. Eddington. A Comparison of Whitehead's and Einstein's formulas. *Nature*, 113: 192, 1924. 27
- [29] D. Finkelstein. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110: 965–967, 1958. 27
- [30] M. D. Kruskal. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119: 1743–1745, 1960. 30
- [31] G. Szkeres. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Publ. Mat. Debrecen*, 7: 285–301, 1960. 30
- [32] W. Hawking, Stephen, G. F. R. Ellis. The large scale structure of space-time. *Cambridge University Press*, 1975. 32

- [33] M. Walker. Block diagrams and the extension of timelike two-surfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 11(8): 2280–2286, 1970. 32
- [34] F. Kottler. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitations-Theorie. *Ann. Physik*, 56(361): 401–462, 1918. 34
- [35] H. Weyl. Über die statischen, kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins kosmologischen Gravitationsgleichungen. *Phys. Z.*, 20: 31–34, 1919. 34
- [36] E. Trefftz. Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie. *Mathem. Ann.*, 86: 317–326, 1922. 34
- [37] J. B. Griffiths, J. Podolsky. Exact space-times in Einstein's general relativity. *Cambridge University Press*, 2009. Cambridge Books Online. 35
- [38] S. A. Hayward, T. Shiromizu, K. Nakao. A cosmological constant limits the size of black holes. *Phys. Rev. D*, 49: 5080–5085, 1994. 37
- [39] J. Podolsky. The structure of the extreme Schwarzschild-de Sitter space-time. *General Relativity and Gravitation*, 31(11): 1703–1725, 1999. 37
- [40] K. Lake, R. C. Roeder. Effects of a nonvanishing cosmological constant on the spherically symmetric vacuum manifold. *Phys. Rev. D*, 15: 3513–3519, 1977. 37, 38, 40, 45, 47
- [41] J. Bicak, J. Podolsky. Global structure of Robinson-Trautman radiative space-times with cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 55: 1985–1993, 1997. 37
- [42] S.L. Bazanski, V. Ferrari. Analytic extension of the Schwarzschild-de Sitter metric. *Il Nuovo Cimento B*, Series 11, 91(1): 126–142, 1986. 38, 40
- [43] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9): 106–120, 1916. 43
- [44] H. Weyl. Zur Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 359(18): 117–145, 1917. 43
- [45] G. Nordström. On the energy of the gravitational field in Einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20: 1238, 1917. 43
- [46] P. Ruback. A new uniqueness theorem for charged black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 5(10): L155, 1988. 44
- [47] J. C. Graves, D. R. Brill. Oscillatory character of Reissner-Nordström metric for an ideal charged wormhole. *Phys. Rev.*, 120: 1507–1513, 1960. 45, 47
- [48] W. Israel. New interpretation of the extended Schwarzschild manifold. *Phys. Rev.*, 143: 1016–1021, 1966. 49
- [49] T. Klösch, T. Strobl. Explicit global coordinates for Schwarzschild and Reissner-Nordström solutions. *Classical and Quantum Gravity*, 13(5): 191, 1996. 49
- [50] H. Laue, M. Weiss. Maximally extended Reissner-Nordström manifold with cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 16: 3376–3379, Dec 1977. 50

- [51] B. Carter. Black Holes. *Gordon and Breach Science Publishers*, London, 1973. 50
- [52] M. Cahen, L. Defrise. Lorentzian 4 dimensional manifolds with âlocal isotropyâ. *Communications in Mathematical Physics*, 11(1): 56–76, 1968. 50
- [53] W. Kinnersley. Type d vacuum metrics. *Journal of Mathematical Physics*, 10(7): 1195–1203, 1969. 50
- [54] C. M. Chambers. The Cauchy horizon In black hole-de Sitter space-times. *arXiv:gr-qc/9709025*, 1997. 51
- [55] Z. Stuchlík, S. Hledík. Properties of the Reissner-Nordström space-times with a non-zero cosmological constant. *ArXiv:gr-qc/0803.2685*, 2008. 51
- [56] R. B. Dieter, A. H. Sean. Global structure of a black hole cosmos and its extremes. *Classical and Quantum Gravity*, 11(2): 359, 1994. 51
- [57] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento B Serie*, 44: 1–14, 1966. 53, 56, 61, 67
- [58] R. Mansouri, M. Khorrami. The equivalence of Darmois-Israel and distributional method for thin shells in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 37(11), 1996. 53
- [59] A. H. Taub. Spacetimes with distribution valued curvature tensors. *Journal of Mathematical Physics*, 21(6): 1423–1431, 1980. 53
- [60] C. Barrabès, W. Israel. Thin shells in general relativity and cosmology: the lightlike limit. *Phys. Rev. D*, 43: 1129–1142, 1991. 53, 54
- [61] C. Clarke, T. Dray. Junction conditions for null hypersurfaces. *Classical and Quantum Gravity*, 4(2), 1987. 53
- [62] K. Lanczos. Flächenhafte verteilung der materie in der einsteinschen gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 14 (379): 518–540, 1924. 61
- [63] N.Sen. Über die grenzbedingungen des schwerefeldes an unstetigkeitsflächen. *Annalen der Physik*, 378: 365–396, 1924. 61
- [64] A. Lichnerowicz. Theories relativistes de la gravitation et de l’electromagnétisme. Paris, 1955. 61
- [65] S. O’Brien, L. J. Synge. Jump conditions at discontinuities in general relativity. *Comm. Dublin Inst. Adv. Stud.*, A(9), 1952. 61
- [66] G. Darmois. Mémorial des sciences mathématiques. Paris, 1927. 61
- [67] W.B. Bonnor, P.A. Vickers. Junction conditions in general relativity. *General relativity and gravitation*, 13(1): 29–36, 1981. 62
- [68] W. Israel. Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells of radiation. *Proceeding of the Royal Society A*, 248, 1958. 62

- [69] E. H. Robson. Junction conditions in general relativity theory. *Annales de I'L.H.P.*, XVI(1): 41–50, 1972. 62
- [70] E. Poisson. A relativistic's toolkit: the mathematics of black-holes mechanics. Cambridge, UK, 2004. 63
- [71] N. Sakai, K. Maeda. Junction conditions of Friedmann-Robertson-Walker space-times. *Phys. Rev. D*, 50: 5425–5428, 1994. 63
- [72] G. Dalia, J. Katz. A comment in junction and energy conditions in thin shells. *Class. Quantum Grav.*, 12: 769–777, 1995. 65
- [73] E. Wigner, F. Seitz. On the constitution of metallic sodium. *Phys. Rev.*, 43: 804–810, 1933. 69
- [74] T. Dray, G. Hooft. The effect of spherical shells of matter on the Schwarzschild black hole. *Communications in Mathematical Physics*, 99(4): 613–625, 1985. 73
- [75] R. Kantowski, R. K. Sachs. Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, 7(3): 443–446, 1966. 76
- [76] J. C. López, O. Obregón, S. Zacarías. Towards a supersymmetric generalization of the Schwarzschild-(anti)de Sitter space-times. *Phys. Rev. D*, 84: 024015, 2011. 76
- [77] R. Doran, F.S.N. Lobo, P. Crawford. Interior of a Schwarzschild black hole revisited. *Foundations of Physics*, 38: 160–187, 2008. 76
- [78] O. Obregón, H. Quevedo, M. P. Ryan. Time and "angular" dependent backgrounds from stationary axisymmetric solutions. *Phys. Rev. D*, 70: 064035, 2004. 76
- [79] R. Bergamini, A. Comastri, R. Balbinot. Solution of the Einstein-Strauss problem with a λ term. *Phys. Rev. D*, 38: 2415–2418, 1988. 78
- [80] R. Herman, W. A. Hiscock. Discharge of a Reissner-Nordström black hole within the event horizon. *Phys. Rev. D*, 49: 3946–3950, 1994. 84
- [81] I. D. Novikov, A. A. Estarobinskii. Quantum-electrodynamic effects inside a charged black holes and the problem of Cauchy horizons. *Sov. Phys. JETP*, 51: 1–9, 1980. 84
- [82] T. Dray, P. S. Joshi. Glueing Reissner-Nordstrom space-times along charged shells of matter. *Classical and Quantum Gravity*, 7(1): 41, 1990. 84
- [83] F. Mellor, I. Moss. Black holes and quantum wormholes. *Physics Letters B*, 222(3-4): 361–363, 1989. 85