

Histórias Consistentes em modelos de Cosmologia Quântica Dominados por Radiação

Clécio Roque De Bom

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto-Neto

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPERJ e
CAPES

Rio de Janeiro, Março de 2013

Ao pai mais orgulhoso do mundo hoje, Clésio De Bom
À minha avó Cléia da Cruz Roque

Agradecimentos

Agradecer é tão somente fazer justiça e lembrar daqueles sem os quais talvez não fosse possível ser e fazer. Não tentarei aqui seguir nenhuma ordem de importância pois esta é, na maioria das vezes, imponderável.

Agradeço ao insondável que chamamos de Deus pelo privilégio da vida e a todos que em nome dele colaboraram mesmo sem o meu conhecimento visíveis ou invisíveis.

A meus pais Denise e Clésio que que fornecerem condições físicas e intelectuais para seguir adiante e sempre me estimularam a carreira científica pelo menos desde a minha mais antiga memória.

Aos que estimularam minha curiosidade científica e o desejo de fazer ciência antes mesmo de que eu soubesse ler e escrever, como Manoel Gonhi, Antonio Fitipaldi, Alfredo Gomes Brasil e Cesarina De Bom. A Cléia da Cruz Roque e Lucy Peres de Lima De Bom que liam a enciclopédia com frequência para mim.

A Octávio Roque que em curto tempo se tornou uma presença marcante, a Ana Maria Peres que mesmo distante me acompanhou com entusiasmo, ao meu padrinho Marcio da Cruz Roque que transformou em mim o sentimento de ser Vascaíno em um valor de Família, e a Adir da Cruz Silva e aos seus que sempre tinham uma palavra de estímulo para aquele que queria conhecer os mistérios do cosmo.

A exemplos na academia como Dr. Odir Clécio da Cruz Roque, ao paciente amigo Dr. Martin Makler, Dr. Antares Kléber que me ouvia quando eu era um ingênuo estudante de ensino médio, à quem me despertou o espírito crítico em relação ao Modelo Padrão da Cosmologia Dr. Nelson Pinto-Neto e ao exemplo de cientista de espírito crítico, criativo e jovial que é o septuagenário e emérito Dr. Dr. h.c. Mario Novello.

À professores inesquecíveis como minha professora Adriane, meu professor de filosofia Dr. Aldir Carvalho. E também ao Colégio Pedro II que foi responsável pela minha educação durante 12 anos, da alfabetização ao ensino médio e que me legou amigos para sempre e grandes memórias.

À grandes amigos(as) que transformaram a minha existência e me ajudaram a construir parte de mim mesmo: Dr. Marcelo Portes de Albuquerque, Rodrigo de Souza Couto, João Guilherme Cardoso Paulo, Gabriel de Almeida Barros, Marcela Meirelles, Renata Cereja, Thalita Moraes, Marcela França, Me. Ricardo Vieira, Pedro Jerônimo da Costa, Felipe Macedo, Thiago Maia, Atilé Alberto Muniz, Maíra Ribeiro, Sonia Domont, Cinthya Langué Blois.

Ao meu irmão Leandro Roque De Bom cuja importância transcende essa vida.

À meus colegas de Departamento e pesquisadores do ICRA que tanto perturbei com minhas incessantes dúvidas, queixumes e inquietações acadêmicas tais como: Dra. Grasielle Santos, Me. Maria Elidaiana, Me. Gabriel Caminha, Dr. Sandro Vittenti, Dr. Bruno Moraes, Dra. Mariana Penna Lima, Dr. Felipe Tovar Falciano, Dr. Habib Duméd-Montoya, Thiago Carneiro e Dra. Cristina Furlanetto e Arthur Scardua.

Por fim, agradeço à aquela que, mesmo aparecendo por último, em tão pouco tempo já me tornou um homem melhor: Patrícia Apicelo. Não é só por mim, mas também por todos vocês que sou.

Resumo

Bom, C. R. **Histórias Consistentes em modelos de Cosmologia Quântica Dominados por Radiação**. 2013. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2013.

A questão da singularidade primordial no universo é um dos temas centrais na construção de um panorama global científico que almeja uma descrição da totalidade da realidade física à qual compete a Cosmologia moderna responder. Recentemente diversos trabalhos tem afirmado que modelos de cosmologia quântica, construídos a partir da equação de Wheeler-DeWitt, são sempre singulares. Entretanto, para determinar precisamente o significado do termo singulares se vê necessário avaliar não só os valores médios das quantidades observáveis, mas também estabelecer qual interpretação da mecânica quântica é utilizada para solucionar o problema da medida. Diversos modelos que utilizam a interpretação de Broglie-Bohm não singulares já são conhecidos, mas até o presente momento o mesmo não foi demonstrado para nenhum modelo que utilize a interpretação de histórias consistentes. Essa interpretação, ao contrário da teoria de Broglie-Bohm por exemplo, visa manter o arcabouço mínimo da interpretação de Copenhague aplicado aos modelos cosmológicos.

Para o caso de modelos de Friedmann com campo escalar sem massa utilizando a interpretação de histórias consistentes foi concluído, de maneira precisa, que esse tipo de modelo sempre encontra uma singularidade quando avaliado em dois momentos no tempo embora nada se possa concluir quando avaliado em 3 momentos de tempo. Já para a teoria de Broglie-Bohm tais modelos não são singulares.

Nesta dissertação exploramos modelos de Friedmann dominados por radiação na interpretação de histórias consistentes para tentar responder a questão da singularidade e mostramos que estes não são singulares nos casos de curvatura espacial $k = -1$ e $k = 0$. Para o caso de $k = 1$ demonstramos analiticamente que não é possível atribuir probabilidades consistentes nos momentos do tempo considerados.

Palavras-chave: Cosmologia Quântica, Histórias Consistentes.

Abstract

Bom, C. R. **Histórias Consistentes em modelos de Cosmologia Quântica Dominados por Radiação**. 2013. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Cosmologia Relatividade e Astrofísica, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2013.

In recent years several papers had claimed that Friedmann Wheeler-deWitt Quantum models are always singular. In order to make this assertion one must to choose a specific interpretation of quantum mechanics. Nowadays several nonsingular models using the Broglie-Bohm quantum theory are known. However for a more conservative Consistent Histories approach this was never proved. The aim of this work is to study Friedmann-Lemâitre-Roberson-Walker quantum models filled with radiation using the consistent histories approach and state if there is a consistent probability associated to the question whether those universes models can avoid a singularity. We consistently proved that the quantum radiation filled universes never reaches a singularity in the $k = 0$, $k = -1$ cases evaluated in the infinity past and the infinity future. Differently of the Broglie-Bohm result we have shown analytically that there is not a consistent probability associated in the $k = 1$ case.

Keywords: Quantum Cosmology, Consistent Histories.

Sumário

Lista de Abreviaturas	xi
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
2 Histórias Consistentes	7
2.1 Problema da Medida e Cosmologia	7
2.2 Interpretação de Histórias Consistentes	9
2.3 Teoria de Broglie-Bohm	14
3 Quantização Canônica da Gravitação	19
3.1 Separação 3+1	20
3.2 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral	25
3.3 Quantização Canônica e Equação de Wheeler-DeWitt	30
3.3.1 Problemas da Equação de Wheeler-DeWitt	32
4 Modelos de Cosmologia Quântica	33
4.1 Modelo com Campo Escalar	34
4.1.1 Quantização canônica do modelo com campo escalar	36
4.2 Modelos com Fluido de Radiação	37
4.2.1 Quantização Canônica de Modelos Cosmológicos com Radiação	41
4.2.2 Evolução do Modelo	42
5 Historias Consistentes em Modelos Cosmológicos	45
5.1 Singularidade em Histórias Consistentes	46
5.2 Singularidade em universos quânticos com campo escalar não massivo	48
5.3 Modelos FRW com Fluido de Radiação	50
5.3.1 Universo plano ($k = 0$)	53
5.3.2 Universo aberto ($k = -1$)	56
5.3.3 Universo fechado ($k = 1$)	58
5.3.4 Comparação com resultados obtidos pela teoria de Broglie-Bohm	60

6 Conclusões e Perspectivas	69
Referências Bibliográficas	71

Lista de Abreviaturas

FLRW	Friedmann-Lemâitre-Roberson-Walker
LQC	<i>Loop Quantum Cosmology</i>
LQG	<i>Loop Quantum Gravity</i>
RCF	Radiação Cosmica de Fundo
RG	Relatividade Geral

Lista de Figuras

2.1	Trajetoórias Bohmianas para um experimento de fenda dupla. Figura retirada da referência (Philippidis <i>et al.</i> 1979).	16
5.1	Parte Real e Imaginária, respectivamente, de $A_0(t_1, t_2)$ utilizando $R_\star = 200$, $p = 0$ e $\sigma = 15$	56
5.2	Parte Real e Imaginária, respectivamente, de $A_{-1}(t_1, t_2)$ utilizando $R_\star = 200$, $p = 0$ e $\sigma = 15$	58
5.3	$\langle \Psi P_{\Delta R^\star}(t_2) \Psi \rangle$ utilizando $R_\star = 200$, $p = 0$ e $\sigma = 15$	59
5.4	Campos para as famílias de trajetórias das eq. (5.46) e (5.47). Podemos distinguir dois tipos de trajetórias representadas pelas linhas, a linha superior mostra um Universo que encontra um ricochete e a inferior um universo singular em $\phi \rightarrow \pm\infty$. Esta figura foi retirada da referência (Pinto-Neto <i>et al.</i> 2012).	62
5.5	Trajetoária quântica para o fator de escala $R(t)$ (linha sólida) e potencial quântico $Q(R, t)$, para o caso $k = -1$. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros <i>et al.</i> 1998b).	65
5.6	Trajetoária quântica para o fator de escala $R(t)$ (linha sólida) e potencial quântico $Q(R, t)$, para caso $k = 0$. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros <i>et al.</i> 1998b).	66
5.7	Trajetoária quântica para o fator de escala $R(t)$, em para diferentes valores de σ para $k = 1$, quando σ cresce, a amplitude das oscila�es crescem. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros <i>et al.</i> 1998b).	67
5.8	Potencial quântico para $k = 1$ correspondente às trajetórias da figura 5.7. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros <i>et al.</i> 1998b).	68

Capítulo 1

Introdução

P. O universo foi criado, ou existe de toda eternidade, como Deus?

R. É fora de dúvida que ele não pode ter feito a si mesmo. Se existisse, como Deus, de toda eternidade, não seria obra de Deus

Livro dos Espíritos, pergunta de nº 37

Quanto mais falamos do Universo,

menos o compreendemos.

O melhor é ascoltá-lo em silêncio.

trecho de Tao Te Ching, poema 5, Lao-tsé traduzido por Humberto Rohden

A questão da gênese, ou se ocorreu uma, é um ponto de interesse quase universal e recorrente nas mais diversas culturas, muito antes de ser estabelecido um discurso científico sobre ela. Mesmo neste contexto já são perceptíveis diversos padrões e visões sobre um possível início e algumas poucas vezes a noção de eternidade desta totalidade do mundo sensível, identificada aqui como Universo (Mello 1991). Posteriormente, esta questão foi novamente formulada em um contexto teológico que motivou intenso debate acadêmico durante séculos (Rowe 1975; Craig 2000).

A partir do início do séc XX, este cenário seria alterado com o desenvolvimento da Re-

latividade Geral (RG) (Adler *et al.* 1975; Misner *et al.* 1973). Foi possível então estabelecer um discurso científico sobre a totalidade sensível. Em grandes escalas a interação gravitacional é dominante e a gravitação Newtoniana se mostrou inconsistente para formular um modelo sobre a totalidade. Neste sentido, a RG promoveu um alargamento de horizontes de conhecimento científico, sendo possível tratar a questão de origem do universo, se houve uma origem, discussão esta que estava apenas no âmbito da Metafísica e da Teologia. Contudo, foi necessário estabelecer algumas hipóteses de trabalho bastantes simplificadoras na RG (Adler *et al.* 1975):

1. A existência de um tempo global.
2. O conteúdo do Universo pode ser modelado como um fluido perfeito.
3. O Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas

A primeira hipótese impõe que podemos identificar 3 dimensões espaciais e 1 temporal de maneira separada, recuperando assim uma noção de tempo usual. A segunda é uma simplificação para deixar os modelos mais tratáveis. A terceira é uma reafirmação do princípio de Copérnico, no qual não estamos em algum referencial privilegiado. A partir daí o primeiro modelo de universo eterno foi desenvolvido, o universo de Einstein (Adler *et al.* 1975), no qual não há dinâmica. A partir das observações da expansão do Universo, a dinâmica foi incluída e o modelo de Friedmann-Lemâitre-Roberson-Walker (FLRW) começou sua caminhada rumo ao domínio do cenário cosmológico.

Este último admitia a presença de singularidades, isto é, regimes nos quais quantidades como a curvatura e a densidade de energia tendem ao infinito. Em especial, este modelo mudou o paradigma do Universo Eterno de Einstein, introduzindo um início singular que ficou conhecido como “Big Bang”. A presença da singularidade se tornou tema de debate, era possível argumentar que as singularidades resultavam das simetrias impostas ao problema e que não representavam, de fato, uma solução fisicamente aceitável. Esse debate foi, por parte da comunidade, colocado em segundo plano pelos teoremas da singularidade de Pen-

rose (Hawking & Ellis 1973), nos quais foi mostrado que singularidades ocorrem na RG em condições bastante genéricas e que são inerentes à teoria.

Todavia, pouco era compreendido sobre o que acontecia em escalas próximas a singularidade e é possível argumentar que não é uma atitude cientificamente coerente admitir que existiu um momento no tempo, um início, no qual toda informação nos é privada. Entretanto, é possível também que estejamos diante de uma barreira na natureza que seja intransponível para o conhecimento científico, mas ainda que este seja o caso, o paradigma científico nos induz a formular novas abordagens e teorias para tentar transpor-la. Uma perspectiva seria considerar que a singularidade é fruto da aplicação da RG fora dos seus limites de validade. Neste caso a RG seria o limite de baixas energias de uma teoria mais completa, seja uma teoria de Gravitação Quântica ou uma teoria de RG modificada. Sobre estas últimas destacamos as que fazem correções na ação de Einstein-Hilbert com potências do escalar de curvatura, ou contrações do tensor de Riemann, as teorias $f(R)$ (Sotiriou & Faraoni 2010).

No contexto mais específico da singularidade do Big Bang, o modelo FLRW e seu desenvolvimento, que ficou conhecido como Modelo Padrão da Cosmologia, por exemplo descrito em (Peebles 1993; Mukhanov 2005; Weinberg 2008; Peter & Uzan 2009), obteve grande sucesso ao explicar a Radiação Cósmica de Fundo (RCF), a abundância de elementos leves e expansão do Universo. Ficou estabelecido que o Universo passou por uma fase mais densa e quente no passado onde era dominado por um fluido de radiação, e o problema da singularidade inicial passou a ser compreendido como um regime além desse modelo. Uma abordagem para este regime foram os chamados modelos inflacionários (Guth 1981; Linde 1982). Esses modelos tentavam explicar algumas escolhas de condições iniciais do Universo, a planeza observada e o problema do horizonte, além de explicarem as perturbações de densidade, que são elemento essencial para formação de estruturas. As perturbações são construídas a partir de flutuações quânticas que teriam ocorrido em um período de expansão acelerada, ou seja, inflação. Entretanto, estes modelos também encontraram limitações. Foi demonstrado que modelos inflacionários não são capazes de evitar a singularidade inicial (Borde *et al.* 2003) e a homogeneidade prevista por este cenário necessita da que pelo menos uma pequena parte causalmente conexa seja homogênea no Universo primordial, portanto, não soluciona por completo esta questão. Desta maneira os resultados do cenário inflacionário estão re-

lacionados às previsões à respeito das condições iniciais do Universo, e por consequência qualquer outro modelo, como por exemplo, de Universo Eterno com ricochete que se propõe a solucionar estes problemas são propostas válidas. Esta proposta teria, por construção, a vantagem de solucionar o problema da singularidade.

Diversos modelos com fase de contração em $t \rightarrow -\infty$ e com expansão em $t \rightarrow +\infty$, intercalados com uma fase de transição não singular que chamamos de ricochete foram propostos, alguns no contexto das teorias $f(R)$ já citadas ou em modelos quânticos. No caso desses últimos surgiu a necessidade de quantizar a Gravitação. Uma proposta para isso seriam os modelos de Cosmologia Quântica construídos via *Loop Quantum Gravity* (LQG)(Ashtekar & Lewandowski 2004; Rovelli 2011), conhecidos como modelos de *Loop Quantum Cosmology* (LQC)(Ashtekar *et al.* 2006a; Ashtekar *et al.* 2006b; Ashtekar & Singh 2011a) nos quais a gravitação se torna uma interação repulsiva no regime quântico próximo a singularidade. Da mesma forma, também foram propostos modelos quânticos construídos através da Quantização Canônica via equação de Wheeler-DeWitt (Wheeler 1965; DeWitt 1967) ou utilizando o formalismo Arnowitt-Deser-Misner(ADM)(R. Arnowitt *et al.* 1962), por exemplo.

Alguns autores tem alegado que os modelos de Cosmologia Quântica via Wheeler-DeWitt são sempre singulares (Ashtekar *et al.* 2008a; Craig & Singh 2010; Ashtekar & Singh 2011a) a medida que outros afirmam ter evitado a singularidade (Lemos 1996a; de Barros *et al.* 1998b; de Barros *et al.* 1998a; Pinto-Neto & Jr. 2001; Lemos 1996b; Pinto-Neto *et al.* 2012). Entretanto, quando se tratando de uma teoria quântica nos vemos diante de outras questões que não se colocavam nos modelos clássicos e se vê necessária uma definição precisa do que significa evitar a singularidade em um contexto quântico. Na Mecânica Quântica na sua interpretação mais usual, conhecida como interpretação de Copenhague, os observadores clássicos tem um papel dinâmico ao colapsar a função de onda para um determinado estado durante o processo de medida, de forma que a pergunta se um determinado Universo quântico é singular pressupõe um mundo clássico externo no qual o sistema quântico está envolvido. Isso faz com que esta interpretação não seja adequada. Portanto, é necessária a utilização de outras interpretações ou teorias da Mecânica Quântica para que este tipo de pergunta seja formulada de maneira precisa. Neste contexto surgiram diversas propostas, como a te-

oria de Broglie-Bohm (Holland 1995), Vários Mundos (Dewitt & Graham 1973), Colapso Espontâneo (Pearle) e Histórias Consistentes (Omnes 1994; Gell-Mann & Hartle 1990a), sendo esta última é a interpretação mais conservadora. Investigações em modelos FLRW plano com campo escalar mostraram que a interpretação de Histórias Consistentes e a teoria de Broglie-Bohm chegam a conclusões discrepantes a cerca da questão da singularidade (Craig & Singh 2010; Pinto-Neto *et al.* 2012) onde o sistema foi quantizado utilizando apenas as frequências positivas da equação de Klein-Gordon. Neste modelo a interpretação das Histórias Consistentes conclui que a singularidade é inevitável se considerados dois momentos no tempo, $t \rightarrow \pm\infty$ a medida de Broglie-Bohm admitia soluções não singulares. Esta discrepância pode estar relacionada ao fato de que a equação dinâmica neste modelo é uma equação tipo Klein-Gordon e não uma equação tipo Schrödinger. Além disso, diferentes esquemas de quantização podem levar a resultados distintos nestas duas interpretações, por exemplo em (Pinto-Neto *et al.* 2012), a quantização Klein-Gordon induzida admite soluções com ricochete em Broglie-Bohm e é inconclusiva na abordagem das Histórias Consistentes.

Nesta dissertação, discutimos a interpretação de Histórias Consistentes no contexto de dois modelos de universo quântico FLRW com dois tipos de conteúdo, um campo escalar livre com massa nula minimamente acoplado e um fluido de radiação. Formulamos um critério para responder de maneira clara e precisa a pergunta se um dado modelo é ou não singular no contexto das Histórias Consistentes. Este é posteriormente aplicado aos modelos apresentados, no caso do campo escalar obtivemos o resultado de (Craig & Singh 2010). Para os modelos com fluido de radiação concluímos que estes evitam a singularidade nos caso plano e hiperbólico, já para caso esférico obtivemos que a família de histórias não é consistente para os momentos do tempo considerados. Por fim foi feita uma comparação com os resultados obtidos com a abordagem da teoria de Broglie-Bohm para os mesmos modelos.

A dissertação está dividida como se segue: no capítulo (2) introduziremos o problema da medida em Cosmologia Quântica e a necessidade de interpretação alternativas da Mecânica Quântica. A seguir na seção (2.2) apresentaremos a Interpretação de Histórias Consistentes, e para efeito de comparação na seção (2.3) apresentaremos sucintamente a Teoria de Broglie-Bohm. No capítulo (3) aplicaremos quantização canônica na RG. Para isto na seção (3.1) introduziremos a separação do espaço tempo em espaço e tempo. A seguir, na seção

(3.2), construiremos o formalismo hamiltoniano para a RG e na seção (3.3) enfim aplicaremos a quantização canônica e obteremos a equação de Wheeler-DeWitt. Na subseção (3.3.1) faremos um breve comentário dos problemas desta equação. No capítulo (4) discutiremos os modelos cosmológicos que serão abordados na dissertação, na seção (4.1) será apresentado o modelo com um campo escalar clássico e posteriormente na subseção (4.1.1) o modelo quântico. À seguir, na seção (4.2) apresentaremos o modelo dominado pelo fluido de radiação clássico e exploraremos sua contrapartida quântica em (4.2.1) e (4.2.2). No capítulo (5) discutiremos a interpretação de Histórias Consistentes destes modelos. Na seção (5.1) discutiremos o critério para que um dado Universo Quântico seja singular e em (5.2) aplicaremos este critério para o modelo com campo escalar. Na seção (5.3), aplicaremos este critério ao modelo com fluido de radiação. Finalmente, na seção (5.3.4) faremos uma comparação com os resultados obtidos para os mesmos modelos em Broglie-Bohm. O capítulo (6) apresenta nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Histórias Consistentes

2.1 Problema da Medida e Cosmologia

No decorrer do século passado, a Mecânica Quântica se tornou uma grande conquista da ciência moderna, não só pelo nível de precisão de suas previsões, mas também por ter caráter universal. Era possível enfim explorar a natureza a um nível mais fundamental. O impacto de seu desenvolvimento transcendeu a academia, atingiu profundamente a sociedade pelas tecnologias desenvolvidas a partir dela e por causar estranheza ao senso comum e à todos sejam eles cientistas, filósofos, historiadores da ciência ou leigos que tentavam entender seus conceitos (Cushing & McMullin 1989). Neste contexto, uma das grandes dificuldades sobre os fundamentos dessa teoria passa por entender o que é, ou o que significa o ato de observar e o papel do observador.

A Mecânica Quântica, que aqui chamaremos de convencional, por exemplo descrita em (Pauli *et al.* 1955; Cohen-Tannoudji *et al.* 1986; Sakurai 1985), possui duas leis dinâmicas. Dado um estado $|\Psi(t)\rangle$, são elas:

1. A evolução de um estado quântico $|\Psi(t)\rangle$, enquanto um experimento não é realizado, é dada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

2. Após uma medida ser efetuada, com um autovalor a_n , a função de onda colapsa para o estado:

$$|\Phi\rangle = \frac{P_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | P_n | \Psi \rangle}}, \quad (2.2)$$

onde P_n é o projetor que, atuando em $|\psi(t)\rangle$, vai transformá-lo em um autovetor cujo autovalor é a_n . Nesta formulação o papel do observador se torna fundamental na evolução do sistema. Ela também assume a existência de um Universo clássico no qual o sistema quântico está contido e que uma ação clássica é a responsável pelo colapso descrito em (2.2).

Quando se trata da totalidade da realidade sensível estudada na Cosmologia, isto é, um sistema fechado como Universo e, considerando que a Mecânica Quântica seja a teoria universal e mais fundamental que a física clássica, e não o contrário estes pressupostos se tornam não só incômodos mas até mesmo inaceitáveis para aqueles que buscaram alternativas na formulação da Mecânica Quântica, sejam eles motivados para tratar esse problema no âmbito da Cosmologia ou como um problema de fundamentos da teoria (Holland 1995; Pinto-Neto 2010; Omnes 1994; Dewitt & Graham 1973).

Uma alternativa a esse tipo de problema seria considerar que a Mecânica Quântica é uma teoria de variáveis escondidas, como por exemplo, o caso da da teoria de Broglie-Bohm (Holland 1995) que assume que a posição de um determinado sistema quântico possui realidade objetiva, isto é, que a posição e a trajetória existem em si mesmos, independentes da ação ou existência do observador. Este tipo de teoria impõe que certas informações na natureza, por exemplo a distribuição de posições iniciais da partícula, que são inacessíveis ao conhecimento do discurso científico no regime quântico. No caso desta teoria, a função de onda seria responsável por “guiar” a partícula, por isto também é conhecida como Teoria da Onda Piloto. Esta visão faz frente a idéia da interpretação convencional, ou de Copenhague, que assume que o valor medido dos observáveis não estavam definidos, ou seja, que não existiam em si mesmos e seriam apenas potencialidades, antes do processo de medida clássico ser realizado. A interpretação dá um passo além ao afirmar que, como os observáveis são potencialidades, a função de onda $\Psi(t)$ é a descrição mais completa possível de um sistema físico e contém toda informação passível de ser conhecida.

Sem dúvida que cada teoria deve impor seus próprios limites de validade e aplicabilidade, mas com o surgimento da Mecânica Quântica é a primeira vez que uma teoria física de grande

relevância e impacto se propõe a discutir, através da interpretação de seus fundadores, limites do que se pode saber e perguntar sobre a realidade física. Isso significa que cada visão, a realista de Broglie-Bohm e a não-realista de Copenhague concorrem para criar limites epistemológicos distintos na própria realidade sensível, mas sempre é possível argumentar que essa discussão seja, de fato, um indício de que estamos diante de uma teoria incompleta e ainda em desenvolvimento e que esses tipos de limites epistemológicos estejam além do escopo do discurso científico.

Uma visão mais conservadora que a perspectiva de variáveis escondidas, mas ainda sim, compatível com o contexto da cosmologia moderna é a interpretação das Histórias Consistentes (Omnes 1994), e seus desdobramentos, algumas vezes referidos como Mecânica Quântica Generalizada (Gell-Mann & Hartle 1990a). Esta última tenta ampliar o arcabouço ideológico básico da interpretação de Copenhague. Tratando-se de uma teoria de sucesso como a Mecânica Quântica tradicional, isso pode ser entendido como uma vantagem. Nas próximas seções apresentaremos a perspectiva das Histórias Consistentes que norteará o desenvolvimento desta dissertação no contexto da Cosmologia Quântica e, como um contraponto, apresentaremos a seguir a teoria de Broglie-Bohm.

2.2 Interpretação de Histórias Consistentes

Esta interpretação, como referida na seção anterior, é uma tentativa de generalizar as idéias da Interpretação de Copenhague, visando eliminar a necessidade do observador clássico, sem que para isso seja necessária uma nova teoria, como no caso de Broglie-Bohm, ou precisar de conceitos ainda mais estranhos que as noções da Mecânica Quântica usual como no caso da Teoria de Vários Mundos (Dewitt & Graham 1973). Nossa abordagem seguirá a formulação de (Omnes 1994)(outras versões da mesma são possíveis como, por exemplo, (Gell-Mann & Hartle 1990a)). Nesta dissertação iremos apresentar os aspectos gerais da Interpretação de Histórias Consistentes que será posteriormente aplicada ao problema da Cosmologia Quântica. O aspecto fundamental desta interpretação é considerar que existe uma probabilidade associada a uma história, isto é, uma sucessão no tempo de auto-valores de um determinado observável, de maneira independente da ação do observador. Neste sen-

tido, a Interpretação de Histórias Consistentes se propõe a ser realista ao rejeitar a ideia das potencialidades de cada observável da Mecânica Quântica de Copenhague.

Considerando um conjunto de observáveis A^α , com intervalos de autovalores Δa_k^α de um sistema quântico definido no espaço de Hilbert, com Hamiltoniana H , e o propagador

$$U(t_i - t_j) = \exp(-iH(t_i - t_j)), \quad (2.3)$$

onde consideramos $\hbar = 1$, uma história h pode ser representada pelo operador C_h como um produto de projetores $P_{\Delta a_k}^\alpha(t)$, que correspondem aos intervalos de autovalores Δa_k^α , no espaço de Hilbert:

$$C_h = P_{\Delta a_{k_1}}^{\alpha_1}(t_1) \dots P_{\Delta a_{k_{n-1}}}^{\alpha_{n-1}}(t_{n-1}) P_{\Delta a_{k_n}}^{\alpha_n}(t_n), \quad (2.4)$$

onde $P_{\Delta a_k}^\alpha(t) = U^\dagger(t) P_{\Delta a_k}^\alpha U(t)$.

Podemos distinguir dois tipos de histórias: as finamente granuladas, e as granuladas grosseiramente. As primeiras são histórias que tratam com um intervalo mais restrito de autovalores que são a descrição mais precisa possível que um sistema quântico possa ter, desde que as probabilidades definidas por ela sejam consistentes. Mais adiante definiremos precisamente o que significa um conjunto de histórias com probabilidades consistentes e por conseguinte uma família de histórias consistentes. As histórias grosseiramente granuladas são conjuntos de histórias finamente granuladas que tratam de uma descrição fisicamente relevante, isto é, em geral lidam com um intervalo mais amplo de autovalores pois essas histórias são construídas para responder perguntas de interesse físico. No caso da Cosmologia Quântica formularemos uma família de histórias (ver capítulo 5) para responder a pergunta: o Universo é singular?

Uma função de onda que representa o ramo da história h é definida por:

$$|\Psi_h\rangle = C_h^\dagger |\Psi\rangle, \quad (2.5)$$

onde se vê que $|\Psi_h\rangle$ é não normalizada. A função de onda da eq. (2.5) representa o estado inicial $|\Psi\rangle$ evoluindo através de valores t , em geral descontínuos, que substituem a noção do

colapso da interpretação de Copenhagen. Desta forma $|\Psi_h\rangle$ está definida para os momentos $t_1 \dots t_n$ e não depende de t , não satisfazendo a equação de Schrödinger (2.1). Todavia é possível recuperar a função de onda do espaço tempo usual:

$$C_h(t) = C_h U^\dagger(t - t_0), \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= C_h^\dagger(t) |\Psi\rangle \\ &= U(t - t_0) |\Psi_h\rangle \\ &= U(t - t_n) P_{\Delta a_{k_{n-1}}}^{\alpha_{n-1}} U(t_n - t_{n-1}) \dots \\ &\times P_{\Delta a_{k_1}}^{\alpha_1} U(t_1 - t_0) |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A probabilidade de um intervalo de autovalores $\Delta a_{k_i}^{\alpha_i}$, designado pelo projetor $P_{\Delta a_{k_i}}^{\alpha_i}$ para o observável A^{α_i} é dado por (Gleason 1953):

$$p(\Delta a_{k_i}^{\alpha_i}) = \text{Tr}(\hat{\rho} P_{\Delta a_{k_i}}^{\alpha_i}), \quad (2.8)$$

onde Tr é o traço, $\hat{\rho}$ é o operador densidade (para um estado puro $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$). Para produtos de projetores, como no caso de uma história, é possível conjecturar que (Omnes 1994):

$$p = \text{Tr} \left(P_{\Delta a_{k_1}}^{\alpha_1}(t_1) \dots P_{\Delta a_{k_n}}^{\alpha_n}(t_n) \hat{\rho} P_{\Delta a_{k_1}}^{\alpha_1}(t_1) \dots P_{\Delta a_{k_n}}^{\alpha_n}(t_n) \right). \quad (2.9)$$

Para um estado puro, a eq. (2.9) para uma história h se reduz à:

$$\begin{aligned} p &= |P_{\Delta a_{k_1}}^{\alpha_1}(t_1) \dots P_{\Delta a_{k_{n-1}}}^{\alpha_{n-1}}(t_{n-1}) P_{\Delta a_{k_n}}^{\alpha_n}(t_n) |\Psi\rangle|^2 \\ &= |C_h^\dagger |\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi_h | \Psi_h\rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para uma determinada família de histórias, desejamos impor algumas condições para que a probabilidade associada a elas seja dita consistente. Dada uma família de histórias $\{h, h'\}$ disjuntas, ou seja, que $P_{\Delta a_{k_i}}^{\alpha_i}(t_i) P_{\Delta a_{k_j}}^{\alpha_j}(t_j) = 0$ para pelo menos algum par i, j , a história é

consistente se:

$$p(h + h') = p(h) + p(h'), \quad (2.11)$$

e, então, uma probabilidade pode ser atribuída a cada história. Consideramos agora o caso da família de histórias disjuntas $\{h, h'\}$ representadas por $C_h = P_{\Delta a_1}^1(t_1)P_{\Delta a_2}^2(t_2)$ e $C_{h'} = P_{\Delta b_1}^1(t_1)P_{\Delta b_2}^2(t_2)$ com dois momentos no tempo t_1 e t_2 e $P_{\Delta a_1}^1(t_1)P_{\Delta b_1}^1(t_1) = 0$. A eq. (2.11) se torna:

$$\begin{aligned} p(h + h') &= \text{Tr} \{ P_{\Delta a_2}^2(t_2) (P_{\Delta a_1}^1(t_1) + P_{\Delta b_1}^1(t_1)) \hat{\rho} (P_{\Delta a_1}^1(t_1) + P_{\Delta b_1}^1(t_1)) \} \\ &= p(h) + p(h') + \text{Tr} \{ P_{\Delta a_2}^2(t_2) P_{\Delta b_1}^1(t_1) \hat{\rho} \} + \text{Tr} \{ P_{\Delta a_2}^2(t_2) P_{\Delta a_1}^1(t_1) \hat{\rho} P_{\Delta b_1}^1(t_1) \} \end{aligned} \quad (2.12)$$

e, portanto, esta família de histórias é consistente se:

$$\text{Tr} \{ P_{\Delta a_2}^2(t_2) P_{\Delta b_1}^1(t_1) \hat{\rho} \} + \text{Tr} \{ P_{\Delta a_2}^2(t_2) P_{\Delta a_1}^1(t_1) \hat{\rho} P_{\Delta b_1}^1(t_1) \} = 0. \quad (2.13)$$

Considerando que os projetores são operadores hermitianos podemos simplificar a eq. (2.13) para:

$$\text{Re} \{ \text{Tr} [P_{\Delta a_2}^2(t_2) P_{\Delta a_1}^1(t_1) \hat{\rho} P_{\Delta b_1}^1(t_1)] \} = 0, \quad (2.14)$$

sendo Re a parte real. Para histórias com maior número de momentos no tempo as condições de consistência não são tão simples como as da eq. (2.13), e para simplificar o problema, na referência (Gell-Mann & Hartle 1990b) foi sugerido um critério suficiente, mas não necessário. Para isso introduzimos o funcional de descoerência:

$$D(h, h') = \text{Tr} \{ C_h^\dagger \hat{\rho} C_{h'} \}. \quad (2.15)$$

Para um estado puro, que será o caso de interesse nos próximos capítulos, o funcional de descoerência se escreve:

$$D(h, h') = \langle \Psi_{h'} | \Psi_h \rangle. \quad (2.16)$$

Considerando que, para cada observável, $\sum_k P_{\Delta a_k}^\alpha = 1$ temos que

$$\sum_h C_h = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} P_{\Delta a_{k_1}}^{\alpha_1}(t_1) P_{\Delta a_{k_2}}^{\alpha_2}(t_2) \dots P_{\Delta a_{k_n}}^{\alpha_n}(t_n) = 1, \quad (2.17)$$

e, portanto

$$\sum_h |\Psi_h\rangle = \sum_h C_h^\dagger |\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (2.18)$$

Substituindo a eq. (2.18) em (2.16) obtemos que o funcional de descoerência é normalizado:

$$\sum_{h,h'} D(h, h') = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1. \quad (2.19)$$

A condição suficiente para consistência de uma família de histórias é que elas obedeçam, ao menos aproximadamente, à:

$$D(h, h') = 0, \quad h \neq h', \quad (2.20)$$

isto é, não há interferência entre ramos de diferentes histórias. Naturalmente que, quanto mais precisos os auto valores associados às histórias, ou seja, quanto mais finamente granulados, é menos provável que a família de histórias seja consistente. Por outro lado, histórias grosseiramente granuladas definidas em um número menor de momentos no tempo, e considerando o fenômeno da descoerência, podem satisfazer em maior número de casos, mesmo que aproximadamente, a eq. (2.20). Neste caso o funcional de descoerência pode ser escrito como:

$$D(h, h') = \langle \Psi_h | \Psi_{h'} \rangle = p(h) \delta_{h'h}, \quad (2.21)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Portanto, ao se definir uma família de histórias é suficiente verificar se o funcional de descoerência é diagonal para que as probabilidades associadas à cada história façam sentido.

O passo seguinte na interpretação de Histórias Consistentes foi construir uma lógica consistente de maneira a estabelecer os tipos de predicados que podem ser construídos e delimitar o tipo de perguntas à serem formuladas. Seja o conjunto do domínio dos autovalores do observável A^α . Os conectivos lógicos básicos conjunção, disjunção e negação, são associados às operações elementares da teoria de conjuntos interseção (\cup), união (\cap),

e complemento respectivamente. Todavia, para o mesmo sistema físico, diferentes lógicas consistentes associadas à suas respectivas famílias levam a previsões contraditórias (d’Espagnat 1989; Bassi & Ghirardi 2000; Griffiths 2000). Estas lógicas são ditas complementares, isto é, não é possível formular uma lógica mais geral da qual as demais sejam deduzidas e são, portanto, inconsistentes entre si.

O fenômeno da descoerência detalha o processo no qual estados superpostos não são observados em sistemas macroscópicos. Entretanto, ele não responde ao problema da medida ao não explicar porque um determinado autovalor é observado. Neste aspecto, as Histórias Consistentes associam probabilidades a um conjunto de autovalores em instantes no tempo, respondendo, assim, que existem histórias mais prováveis que as demais, caso elas sejam consistentes. Mas para selecionar uma única história, que é a observada, ainda é necessário postular a existência de uma realidade física única. Para enfrentar estas dificuldades, critérios mais restritos e explícitos para construção das famílias de histórias podem ser desenvolvidos.

2.3 Teoria de Broglie-Bohm

Nesta seção apresentaremos sucintamente a Teoria de Broglie-Bohm. Por simplicidade, e por ser um exemplo bastante ilustrativo dos paradigmas propostos pela teoria, nos concentraremos no caso não relativista. Como comentado na seção (2.1), na perspectiva de Broglie-Bohm a posição e trajetória dos objetos quânticos possuem realidade objetiva, no sentido de que são independentes da ação de observadores clássicos. A teoria propõe que a velocidade de uma partícula seja determinada pela função de onda, ou onda piloto, através da equação:

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\vec{j}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t)}{|\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t)|^2}, \quad (2.22)$$

para um sistema de N partículas não relativísticas, onde \vec{x}_i representa o vetor posição da i -ésima partícula, Ψ representa a função de onda que “guia” a partícula e \vec{j}_i é a corrente quântica. Se a Hamiltoniana possui apenas um termo cinético usual $\sum (1/m_i) \nabla_i^2$ e de potencial $V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t)$ a corrente quântica pode ser escrita como:

$$\vec{j}_i(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t) = \frac{1}{m_i} \text{Im} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right) = \frac{1}{m_i} \vec{\nabla} S(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N), \quad (2.23)$$

sendo Im a parte imaginária, $S(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$ a fase da função de onda $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$. Se por um lado a proposta da teoria de Broglie-Bohm elimina o incômodo conceitual gerado pela não existência da posição e trajetória independentes do observador da interpretação convencional, por outro ele propõe algo radical, uma lei dinâmica de primeira ordem em \vec{x}_i , contrariando as noções legadas pelas leis de Newton. No caso relativístico, com N partículas, esse tipo de equação dinâmica tem implicações diretas sobre a invariância de Lorentz que não é respeitada à nível das trajetórias Bohmianas (Berndl *et al.* 1996; Valentini 1997).

Podemos observar da eq. (2.22), e considerando que \vec{x}_i está definida para todo t , que para determinar o sistema completamente é necessária a função de onda inicial e as posições iniciais das partículas. Estas últimas são variáveis adicionais que não existem na interpretação tradicional, sendo consideradas as variáveis escondidas da teoria. Pode-se argumentar, por outro lado, que como as posições das partículas podem ser medidas as variáveis escondidas seriam de fato a onda piloto (Holland 1995; Bell 2004).

Nesta teoria, a função de onda $\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N)$ satisfaz a equação de Schrödinger usual (2.1). Para o caso de Hamiltonianas usuais com o termo cinético e potencial, na representação das coordenadas, podemos escrevê-la como:

$$i\hbar \frac{d\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t)}{dt} = \left[- \sum_{i=1}^N \frac{\hbar}{2m_i} \nabla_i^2 + V(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t) \right] \Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t). \quad (2.24)$$

A eq. (2.22) das trajetórias bohmianas pode ser convenientemente reescrita utilizando (2.23)

$$\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{\nabla}_i S(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t), \quad (2.25)$$

sendo \vec{p}_i os momenta, e se vê a analogia entre a teoria de Hamilton-Jacobi onde $S(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N, t)$ seria a função principal de Hamilton. Um exemplo bastante ilustrativo das trajetórias Bohmianas pode ser visto para um experimento de fenda dupla na figura (2.1). Neste exemplo se nota que, considerando a teoria de Broglie-Bohm, as trajetórias Bohmianas nos permitem afirmar por qual fenda a partícula passou, uma informação que não está presente na

interpretação convencional.

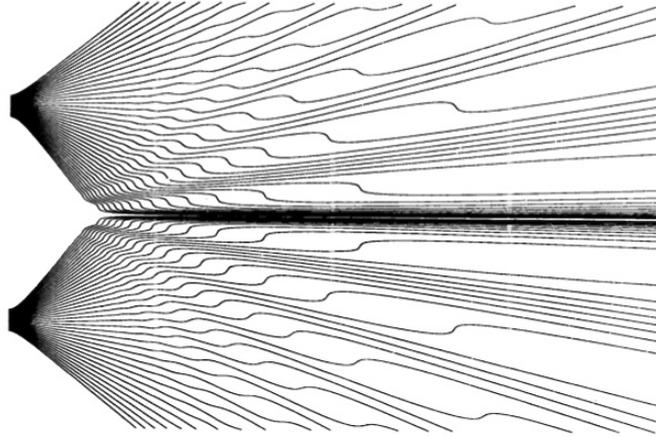


Figura 2.1: *Trajetoórias Bohmianas para um experimento de fenda dupla. Figura retirada da referência (Philippidis et al. 1979).*

Ao considerar $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$, e separar a eq. (2.24) em parte real e imaginária obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{\nabla}_i S) \vec{\nabla}_i S}{2m_i} + V - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 A}{A} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{\nabla}_i)(A^2 \vec{\nabla}_i S)}{m_i} = 0. \quad (2.27)$$

Note que a eq. (2.26) tem a forma de uma equa o de Hamilton-Jacobi com um termo adicional:

$$Q := - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 A}{A}, \quad (2.28)$$

que chamamos de potencial quântico. Essa formula o, novamente, oferece uma vantagem no sentido de que o limite clássico possui uma interpreta o direta: o regime quântico   aquele no qual o termo de potencial quântico não   desprez vel, pois quando $Q = 0$ recuperamos as trajetórias clássicas. Entretanto, o potencial quântico depende da amplitude da fun o de onda A e   um termo de potencial diferente do usual pois o potencial interage com a partícula, mas esta não   fonte do potencial, uma situa o pouco comum em Mecânica Clássica e mesmo na Mecânica Quântica convencional. O limite clássico dessa teoria fica ainda mais evidente se derivarmos (2.25) e utilizarmos (2.26):

$$\frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i V - \vec{\nabla}_i Q. \quad (2.29)$$

A interpretação da eq. (2.27) é dada considerando que os campos de velocidade das partículas satisfazem (2.25), e a distribuição inicial de suas posições é $P_0 = A^2(t_0)$, então (2.27) representa uma equação de continuidade para $A^2(t)$, obtendo assim a regra de Born, $P(t) = A^2(t)$. Entretanto foi demonstrado em (Valentini 1991) que a regra de Born pode ser obtida mesmo sem assumirmos $P_0 = A^2(t_0)$.

No contexto da Cosmologia Quântica, a teoria de Broglie-Bohm responde de maneira eficiente à questão do observador presente na Mecânica Quântica convencional ao assumir o existência das trajetórias sem a presença do experimentador. Com relação a questão sobre se efeitos presentes em uma teoria quântica são capazes de evitar as singularidades dos modelos Cosmológicos clássicos, é preciso analisar como o termo de potencial quântico Q altera as trajetórias clássicas.

Capítulo 3

Quantização Canônica da Gravitação

A partir da RG foi possível construir os primeiros modelos cosmológicos. Porém, o modelo cosmológico padrão prevê uma fase densa e quente, dominada por um fluido de radiação, onde o Universo era pequeno, próxima à suposta singularidade inicial. Neste regime é possível que efeitos quânticos tenham sido importantes. Para investigar estes efeitos seria preciso uma teoria de gravitação quântica. Até os dias de hoje, não existe uma teoria quântica da gravitação bem estabelecida. Compatibilizar a RG e a Mecânica Quântica (MQ) tem se mostrado um trabalho hercúleo para a comunidade científica durante décadas. Uma das questões mais proeminentes é o fato das duas teorias serem formuladas com linguagens conceitualmente diferentes. Enquanto a Mecânica Quântica foi formulada em termos de Hamiltonianas, a Relatividade Geral foi formulada em um contexto covariante no qual o tempo não tem um papel distinto em relação as coordenadas espaciais. Outro fator que contribui para estas dificuldades é a não linearidade inerente da RG.

Assim, uma tentativa de levar a RG a uma linguagem compatível com a Mecânica Quântica é construí-la em um formalismo hamiltoniano (Symon 1960; Lanczos 1970; Goldstein *et al.* 2002). Para isto, se vê necessário separar as quantidades do espaço-tempo em espaço e tempo. Sendo a RG uma teoria invariante por transformações gerais de coordenadas, surgirão vínculos entre as coordenadas e os momenta. Para solucionar estas dificuldades a teoria adequada é o formalismo de Bergmann-Dirac (Dirac 1951; Hanson *et al.* 1976; Sundermeyer 1982) desenvolvido para tratar sistemas hamiltonianos vinculados de maneira consistente. O passo seguinte é quantizar o sistema e, no caso desta dissertação, utilizaremos a quantização canônica e par-

tindo desta última chegaremos a equação de Wheeler-DeWitt (Wheeler 1965; DeWitt 1967). Esta é a equação que define a evolução da função de onda da geometria do espaço-tempo e possui diversos problemas, como o significado do tempo em cosmologia quântica, problemas de ordenamento, a necessidade de imposição de condições de contorno para obter uma solução única para esta equação e até mesmo a própria interpretação da mesma (Halliwell 1990).

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na seção (3.1) apresentaremos a separação 3+1 do espaço e tempo. A seguir em (3.2) construiremos a formulação hamiltoniana da RG, onde será utilizado o algoritmo de Bergmann-Dirac, na seção (3.3) apresentaremos a quantização canônica, a equação de Wheeler-DeWitt e uma breve descrição de seus problemas.

3.1 Separação 3+1

A separação de espaço-tempo em espaço e tempo na lagrangiana de Einstein-Hilbert é uma tentativa de destacar o tempo para que seja possível retomar o arcabouço do formalismo Hamiltoniano. Para um métrica do espaço tempo $g_{\mu\nu}$ definida na 4-variedade M^4 o tensor de curvatura é definido como

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} := \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\mu} \quad , \quad (3.1)$$

sendo que $(,)$ denota a derivada parcial e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ os símbolos de Christoffel. Seja o escalar de curvatura

$$R := g^{\mu\nu} R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad . \quad (3.2)$$

Definimos a ação de Einstein-Hilbert:

$$F_g := \int d^4x \sqrt{-g} R \quad , \quad (3.3)$$

onde $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$, $c = 1$, $16\pi G = 1$, os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3 exceto se dito o contrário.

A seguir escolhemos um parâmetro para definir a evolução dinâmica do sistema. Escolhemos $x^0 = t$ e, portanto, x^0 fará o papel de tempo. Isto implica que folheamos o espaço-tempo

definido na 4-variedade M^4 em hiper superfícies $t = cte$, restringindo a topologia do espaço tempo para $\mathbb{R} \times M^3$, sendo que M^3 poderá ter qualquer topologia. Este procedimento elimina a covariância da RG e ao mesmo tempo não se aplica a topologias de espaço com rotação, como por exemplo, o universo de Gödel (Gödel 1949), onde existem curvas tipo tempo fechadas. Este tipo de restrição parece natural ao tentar aproximar a RG de um formalismo hamiltoniano, onde se espera recuperar uma noção de tempo como um parâmetro dinâmico destacado. Veremos adiante que ainda assim a equação de Wheeler-DeWitt não possui uma noção de tempo clara.

Consideremos um hiper superfície com $x^0 = t = cte$. Podemos descreve-las pelas seguintes equações paramétricas

$$X^\alpha = X^\alpha(x^i) \quad (3.4)$$

Sejam os vetores tangentes às hiper superfícies denotados por $\frac{\partial}{\partial x^i}$ e o vetor normal unitário à esta hiper superfície $\vec{n} = n^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$ escrito na base $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$. Nesta base $\frac{\partial}{\partial x^i} = X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$, onde definimos $X_i^\alpha := X^\alpha_{,i}$. Escrevemos o produto interno do vetor normal e dos vetores tangentes e o normal como

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1, \quad g_{\mu\nu} X_i^\mu n^\nu = 0. \quad (3.5)$$

O conjunto de todas as hiper superfícies com $t = cte$ podem ser escritos como $X^\alpha = X^\alpha(x^i, t)$. O vetor deformação que conecta duas hiper superfícies vizinhas $X^\alpha(x^i, t')$ e $X^\alpha(x^i, t' + dt)$ quaisquer é:

$$N^\alpha = \dot{X}^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Podemos decompor o vetor deformação na base $\{n^\alpha, X_i^\alpha\}$

$$N^\alpha = N n^\alpha + N^i X_i^\alpha, \quad (3.7)$$

onde N é chamada função lapso e N^i função deslocamento. Se nota que o vetor deformação em geral não é ortogonal às hiper superfícies. Na equação (3.7) se vê uma interpretação clara para o lapso N e o deslocamento N^i . O primeiro representa a taxa de variação em relação ao tempo coordenado t do tempo próprio τ de um observador com 4-velocidade n^μ , isto é $\frac{d\tau}{dt}$. O segundo nos fornece a taxa de variação com relação ao tempo coordenado t do deslocamento

dos pontos com coordenadas x^k ao evoluir através da hiper superfície t' até a hiper superfície $t' + dt$.

Para analisar a evolução dinâmica da métrica $g_{\mu\nu}$, projetaremos suas componentes nas direções paralelas e ortogonais às hiper superfícies $t = cte$. Como N^α e X_i^α são os vetores tangentes à t e x^i , respectivamente, obtemos as projeções:

$$h_{ij} := g_{ij} = g_{\alpha\beta} X_i^\alpha X_j^\beta \quad , \quad (3.8)$$

$$N_i = g_{0i} = g_{\alpha\beta} N^\alpha X_i^\beta \quad , \quad (3.9)$$

e

$$g_{00} = g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta = -N^2 + N^i N_i \quad . \quad (3.10)$$

Isto define a métrica $g_{\mu\nu}$ completamente em termos da 3-métrica espacial h_{ij} , do lapso N e do deslocamento N^i . A inversa de $g^{\mu\nu}$ é dada por:

$$g^{ij} = h^{ij} - \frac{N_i N^j}{N^2}, \quad g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}, \quad g^{00} = -\frac{1}{N^2}. \quad (3.11)$$

A partir de $g_{\mu\nu}$ e sua inversa definimos o intervalo

$$\begin{aligned} ds^2 &:= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -N^2 dt^2 + h_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j). \end{aligned} \quad (3.12)$$

O intervalo ds^2 escrito na forma (3.12) é chamado intervalo *ADM* ou 3 + 1.

A 3-superfície, caracterizada pela 3-métrica h_{ij} , pode estar curvada de maneira arbitrária em relação a 4-superfície na qual ela está imersa. Portanto, para descrever univocamente a folheação iremos caracterizar a curvatura das 3-superfícies utilizando a variação do vetor normal ao ser transportado paralelamente ao longo da hiper superfície. Assim, definimos o tensor de curvatura extrínseca

$$K_{\mu\nu} = -\zeta_\mu^\alpha \zeta_\nu^\beta n_{(\alpha||\beta)} \quad , \quad (3.13)$$

onde $\zeta_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu$ é o projetor sobre as hiper superfícies na qual n^μ é normal, $n_{(\alpha||\beta)} = n_{\alpha||\beta} + n_{\beta||\alpha}$ e $n_{\alpha||\beta} := n_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon n_\epsilon$ é a derivada covariante de n_α . As componentes da curvatura extrínseca são:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}n_{(i||j)} = -\frac{1}{2}n_{(i,j)} + \Gamma_{ij}^\epsilon n_\epsilon = -N\Gamma_{ij}^0 \quad , \quad (3.14)$$

e

$$K_{0i} = N^j K_{ij} \quad , \quad K_{00} = N^i N^j K_{ij} \quad , \quad (3.15)$$

onde utilizamos $n^\alpha = \frac{1}{N}N^\alpha - \frac{N^i}{N}X_i^\alpha$ e se vê que as componentes relevantes são as da eq.(3.14).

O tensor de curvatura extrínseca pode ser escrito de maneira mais conveniente

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) + \frac{1}{2}g^{0k}(g_{kl,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) \\ &= \frac{1}{2N^2} \left[\dot{h}_{ij} - N_{i,j} - N_{j,i} + N_l h^{ml}(h_{mi,j} + h_{mj,i} - h_{ij,m}) \right] \\ &= \frac{1}{2N^2} \left(\dot{h}_{ij} - N_{i,j} \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde definimos os símbolos de Christoffel da 3-métrica ${}^3\Gamma_{ij}^a := \frac{1}{2}h^{ak}(h_{ki,j} + h_{kj,i} - h_{ij,k})$ e a derivada covariante na 3-superfície $N_{i;j} = N_{i,j} - {}^3\Gamma_{ij}^a N_a$. Portanto a curvatura extrínseca é

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \left(\dot{h}_{ij} - N_{(i;j)} \right) \quad . \quad (3.17)$$

A seguir iremos descrever lagrangiana de Einstein-Hilbert (3.3) em termos das quantidades que construímos para separar o espaço-tempo em espaço e tempo. Sejam os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha := \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\mu} + g_{\lambda\mu,\beta} - g_{\mu\beta,\lambda}) \quad . \quad (3.18)$$

Podemos escrevê-los em termos da curvatura extrínseca K_{ij} , do lapso N e do deslocamento N^i :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{N^i N_{,i}}{N} - \frac{N^i N^j}{N} K_{ij} \quad , \quad (3.19a)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{N_{,i}}{N} + \frac{N^j}{N} K_{ij} \quad , \quad (3.19b)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{K_{ij}}{N} \quad , \quad (3.19c)$$

$$\Gamma_{00}^i = N h^{ij} \frac{\dot{N}_j}{N} + \frac{1}{2} h^{ij} (N^2 - N^m N_m)_{,j} - \frac{N_{,j} N^i N^j}{N} + \frac{N^i N^j N^l}{N} K_{jl} \quad , \quad (3.19d)$$

$$\Gamma_{j0}^i = N \left(-k_{ij} + \left(\frac{N^i}{N} \right)_{,j} + \frac{N^i N^m}{N^2} K_{jm} \right) \quad , \quad (3.19e)$$

$$\Gamma_{jl}^i = {}^3 \Gamma_{jl}^i + \frac{N^i}{N} K_{jl} \quad . \quad (3.19f)$$

Considerando o tensor de Ricci $R_{\beta\mu} := R_{\beta\lambda\mu}^\lambda$ escrevemos o escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ a partir das eqs. (3.19):

$$R = -2 \frac{\dot{K}}{N} - 2 \frac{N_{,j}^j}{N} + K_{lm} K^{lm} + K^2 + {}^3 R \quad , \quad (3.20)$$

onde ${}^3 R$ é o escalar de curvatura construído com h_{ij} e ${}^3 \Gamma_{ij}^l$, e $K := h^{ij} K_{ij}$. A partir de (3.17) utilizamos a relação

$$h^{lm} \dot{K}_{lm} = \dot{K} - 2N K^{lm} K_{lm} + 2N^{l;m} K_{lm} \quad . \quad (3.21)$$

Consideremos o termo $\sqrt{-g}$ da ação da eq. (3.3)

$$\sqrt{-g} = N h^{1/2}, \quad (3.22)$$

usando que

$$2\dot{h}^{1/2} = -2h^{1/2}(NK + N_{,i}^i) \quad , \quad (3.23)$$

e que $h^{1/2}V_{;i}^i = (h^{1/2}V^i)_{,i}$ podemos escrever a ação

$$\begin{aligned} F_g &:= \int d^4x \sqrt{-g} R \\ &= \int d^4x N h^{1/2} (K^{ij} K_{ij} - K^2 + {}^3R) - 2 \int d^3x (h^{1/2} K) \\ &+ 2 \int d^4x (h^{1/2} K N^i - h^{1/2} h^{mi} N_{,m})_{,i} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

em três integrais. A última integral da eq. (3.24) não contribui se fixarmos $\delta h_{ij} = 0$ para $t = cte$ nas seções espaciais fechadas. O penúltimo termo pode contribuir, mas pode gerar inconsistências (Gibbons & Hawking 1993) e portanto será desconsiderado. Este termo se anulará se a variação da métrica e suas derivadas na direção normal à hiper superfície se anularem. Na próxima seção desenvolveremos o formalismo Hamiltoniano para a ação definida em (3.24).

Observamos que apesar da separação 3+1 poder ser considerada um grande avanço para a construção de uma teoria hamiltoniana e por sua vez para a quantização da gravitação, a restrição imposta por ela, na topologia da 4-variedade é uma ruptura radical com o espírito covariante da teoria RG. Este é o custo por aproximar a linguagem de um formalismo, da RG, e de outro, hamiltoniano.

3.2 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

Consideramos a ação

$$F_g = \int d^4x N h^{1/2} (K^{ij} K_{ij} - K^2 + {}^3R) , \quad (3.25)$$

onde foram desconsiderados os termos de superfície. Definimos os momenta canonicamente conjugados:

$$P := \frac{\partial L_g}{\partial \dot{N}} = 0 , \quad (3.26a)$$

$$P_i := \frac{\partial L_g}{\partial \dot{N}^i} = 0 , \quad (3.26b)$$

$$\pi^{ij} := \frac{\partial L_g}{\partial \dot{h}_{ij}} = -h^{1/2}(K^{ij} - h^{ij}K) \quad . \quad (3.26c)$$

Os momentos das eq. (3.26a) e (3.26b) não são escritos em termos das velocidades generalizadas \dot{N} e \dot{N}^i respectivamente e representam vínculos, nos indicando que estamos lidando com um sistema parametrizado. Para tratar este tipo de sistema físico utilizaremos o algoritmo de Bergmann-Dirac (Dirac 1951; Hanson *et al.* 1976; Sundermeyer 1982).

A densidade hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_c = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_g \quad , \quad (3.27)$$

onde \mathcal{L}_g é a densidade lagrangiana da gravitação. Podemos escrever o Hamiltoniano canônico da seguinte maneira

$$H_c = \int d^3x \mathcal{H}_c = \int d^3x (N\mathcal{H}_0 + N_i\mathcal{H}^i) \quad , \quad (3.28)$$

onde definimos

$$\mathcal{H}_0 := G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - h^{1/2}({}^3R) \quad , \quad (3.29)$$

a super métrica

$$G_{ijkl} := \frac{1}{2}h^{1/2}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \quad , \quad (3.30)$$

Também definimos

$$\mathcal{H}^i := -2\pi_{;j}^{ij} \quad . \quad (3.31)$$

A ação canônica fica

$$S_c := \int d^4x [\pi^{ij}\dot{h}_{ij} - (N\mathcal{H}_0 + N_i\mathcal{H}^i)] \quad , \quad (3.32)$$

onde foram utilizados (3.26). A variação da eq. (3.32) em relação a N e N_j nos fornece os vínculos

$$\mathcal{H}_0 \approx 0 \quad , \quad (3.33)$$

$$\mathcal{H}_i \approx 0 \quad , \quad (3.34)$$

onde ≈ 0 significa fracamente igual a 0 (Sundermeyer 1982), indicando que os parênteses de Poisson dos vínculos com uma função arbitrária das variáveis canônicas não são necessariamente nulas. Estes vínculos são chamados vínculo super hamiltoniano e vínculo super momento respectivamente. Estes podem ser associados a uma interpretação geométrica: (Teitelboim 1973; Kuchar 1973; Sundermeyer 1982) são os geradores das deformações nas hiper superfícies. O primeiro representa uma deformação de uma hiper superfície em t' para a hiper superfície $t' + dt$ e o segundo o gerador de transformações de coordenadas em uma dada hiper superfície representada por $X^\alpha(x^i, t_\star)$ para $X^\alpha(x'^i, t_\star)$ onde t' e t_\star são constantes.

Considerando os vínculos (3.26a), (3.26b), (3.33) e (3.34), neste formalismo, a Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = \int d^3x (N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}^i + \lambda P + \lambda^i P_i) \quad , \quad (3.35)$$

onde se vê que o lapso N , o deslocamento N^i , λ e λ^i são multiplicadores de Lagrange. Para que a Hamiltoniana seja consistente é necessário que os vínculos se conservem no tempo.

Sejam os pares de variáveis canônicas q^i e p_i . Os parênteses de Poisson entre os funcionais $A(x)$ e $B(x')$ são

$$\{A(x), B(x')\} := \int d^3z \left(\frac{\partial A(x)}{\partial q^i(z)} \frac{\partial B(x')}{\partial p_i(z)} - \frac{\partial A(x)}{\partial p_i(z)} \frac{\partial B(x')}{\partial q^i(z)} \right). \quad (3.36)$$

Dado um vínculo $\Phi(q^i, p_j) \approx 0$, para que este seja conservado no tempo é suficiente que $\dot{\Phi} = \{\Phi, H_T\} \approx 0$. Caso $\Phi(q^i, p_j)$ seja um novo vínculo, será necessário verificar se este é conservado no tempo, o que pode nos levar a novos vínculos que precisam, por sua vez, ser avaliados quanto a sua conservação no tempo. Avaliando os vínculos (3.26a), (3.26b) obtemos

$$\dot{P}(x^i, t) = \{P(x^i, t), H_T(y^i, t)\} = -\mathcal{H}_0 \approx 0 \quad , \quad (3.37)$$

e

$$\dot{P}^i(x^i, t) = \{P^i(x^i, t), H_T(y^i, t)\} = -\mathcal{H}_0 \approx 0 \quad , \quad (3.38)$$

onde se utilizou

$$\{N_i(x^i, t), P^i(y^i, t)\} = \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (3.39a)$$

$$\{N(x^i, t), P(y^i, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (3.39b)$$

$$\{h_{ij}(x^i, t), \pi^{lm}(y^i, t)\} = \delta_{ij}^{lm} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (3.39c)$$

\vec{x} e \vec{y} são 3-vetores, e definimos a delta de Dirac

$$\int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \quad . \quad (3.40)$$

Todos os demais parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas e os momenta se anulam. Observamos que os vínculos (3.26a) e (3.26b) chamados vínculos primários nos levam à dois vínculos $\mathcal{H}_0 \approx 0$, $\mathcal{H}_i \approx 0$ chamados secundários. Os parênteses de Poisson entre estes vínculos podem ser escritos como (DeWitt 1967; Teitelboim 1973):

$$\{\mathcal{H}_0(x^j), \mathcal{H}_0(y^j)\} = \mathcal{H}^i(x^j) \delta_{,j}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}^i(y^j) \delta_{,j}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (3.41a)$$

$$\{\mathcal{H}_i(x^j), \mathcal{H}_0(y^j)\} = \mathcal{H}_0(x^j) \delta_{,j}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}^i(y^j) \delta_{,j}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (3.41b)$$

$$\{\mathcal{H}_i(x^j), \mathcal{H}_k(y^j)\} = \mathcal{H}_k(x^j) \delta_{,j}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}_i(y^j) \delta_{,j}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (3.41c)$$

onde utilizamos 3.39 e as identidades:

$$\frac{\delta h_{ij}(x^k)}{\delta h_{lm}(y^k)} = \delta_{ij}^{lm} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{\delta \pi^{lm}(x^k)}{\delta \pi^{ij}(y^k)} \quad , \quad (3.42a)$$

$$\frac{\delta (h_{ij,a}(x^k))}{\delta h_{lm}(y^k)} = \delta_{ij}^{lm} \delta_{,a}^3(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{\delta (\pi_{,a}^{lm}(x^k))}{\delta \pi^{ij}(y^k)} \quad , \quad (3.42b)$$

$$\delta [h^{1/2}({}^3R)] = h^{1/2} h^{ij} h^{lm} (\delta h_{il;j;m} - \delta h_{ij;l;m}) - h^{1/2} [{}^3R^{ij} - (1/2)h^{ij}({}^3R)] \delta h_{ij} \quad (3.42c)$$

onde $\frac{\delta}{\delta q^i(x^j)}$ denota a derivada funcional em relação à variável canônica $q^i(x^j)$. Também utilizamos propriedades elementares da delta de Dirac.

A partir de (3.41) e (3.35) concluimos que

$$\dot{\mathcal{H}}_0 = \{\mathcal{H}_0, H_T\} = 0 \quad , \quad (3.43)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_i = \{\mathcal{H}_i, H_T\} = 0 \quad . \quad (3.44)$$

Isto significa que (3.35) representa uma hamiltoniana consistente para a gravitação para seções espaciais fechadas e possui as seguintes equações de movimento

$$\dot{N} = \{N, H_T\} = \lambda \quad , \quad (3.45a)$$

$$\dot{P} = \{P, H_T\} = -\mathcal{H}_0 \quad , \quad (3.45b)$$

$$\dot{N}^i = \{N^i, H_T\} = \lambda^i \quad , \quad (3.46a)$$

$$\dot{P}_i = \{P_i, H_T\} = -\mathcal{H}_i \quad , \quad (3.46b)$$

$$\dot{h}_{ij} = \{h_{ij}, H_T\} = h^{1/2} N [2\pi_{ij} - h_{ij}\pi] + N_{(i;j)} \quad , \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ij} &= \{\pi^{ij}, H_T\} = -Nh^{1/2}\left({}^3R^{ij} - \frac{{}^3Rh^{ij}}{2}\right) \\
&+ \frac{Nh^{-1/2}h^{ij}}{2}\left(\pi^{lm}\pi_{lm} - \frac{\pi^2}{2}\right) - 2Nh^{-1/2}\left(\pi^{ia}\pi_a^j - \frac{\pi\pi^{ij}}{2}\right) \\
&+ h^{1/2}\left(N^{;ij} - h^{ij}N_{;a}^a + h^{1/2}(h^{-1/2}N^k\pi^{ij})_{;k} - 2\pi^{ki}N_{;k}^j - 2\pi^{kj}N_{;k}^i\right) \quad , \quad (3.47b)
\end{aligned}$$

onde se vê que N e N^i são multiplicadores de Lagrange. Estando o formalismo hamiltoniano bem estabelecido iremos, na seção seguinte, quantizar o sistema canonicamente.

3.3 Quantização Canônica e Equação de Wheeler-DeWitt

Para estabelecer a quantização canônica do sistema apresentado na seção anterior, procederemos associando cada par canônico p^i e q_i operadores quânticos \hat{p}^i e \hat{q}_i definidos no espaço de Hilbert. Sejam $A(p^i, q_i)$ e $B(p^i, q_i)$ funções das variáveis canônicas e $\hat{A}(\hat{p}^i, \hat{q}_i)$ e $\hat{B}(\hat{p}^i, \hat{q}_i)$ sua contrapartida quântica. Elas devem satisfazer a seguinte correspondência

$$\{A(p^i, q_i), B(p^i, q_i)\} \rightarrow i\hbar[\hat{A}(\hat{p}^i, \hat{q}_i), \hat{B}(\hat{p}^i, \hat{q}_i)] \quad , \quad (3.48)$$

onde $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ é o comutador entre \hat{A} e \hat{B} . Para o par (π^{ij}, h_{ij}) temos

$$\{h_{ij}(x^i, t), \pi^{lm}(y^i, t)\} = \delta_{ij}^{lm}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \rightarrow [\hat{h}_{ij}(x^i, t), \hat{\pi}^{lm}(y^i, t)] = i\hbar\delta_{ij}^{lm}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad (3.49)$$

Para uma estado $|\Psi\rangle$ o vínculo clássico $\Phi(p^i, q_i)$ com correspondente operador quântico $\Phi(\hat{p}^i, \hat{q}_i)$ deve satisfazer

$$\Phi(\hat{p}^i, \hat{q}_i)|\Psi\rangle = 0 \quad . \quad (3.50)$$

Escolhemos a representação das coordenadas tal que

$$\hat{h}_{ij} = h_{ij}(x^k), \quad \pi^{ij} = -i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \quad , \quad (3.51)$$

$$\hat{N}_i = N_i(x^k), \quad P^i = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N_i(x^k)} \quad , \quad (3.52)$$

e

$$\hat{N} = N(x^k), \quad P = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N(x^k)} \quad . \quad (3.53)$$

A partir de (3.50), e sendo Ψ a função de onda nesta representação, obtemos

$$\frac{\delta \Psi}{\delta N_i(x)} = 0 \quad , \quad (3.54)$$

e

$$\frac{\delta \Psi}{\delta N(x)} = 0 \quad , \quad (3.55)$$

o que nos indica que a função de onda não depende de N e de N_i , sendo as variáveis canônicas relevantes as h_{ij} . Nos resta, então analisar os termos restantes da Hamiltoniana total da eq. (3.35), isto é, os vínculos super hamiltoniano e super momento que fornecem, nesta representação, as equações:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi = \hbar^2 G_{ijkl} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + h^{1/2} ({}^3R) \Psi = 0 \quad , \quad (3.56)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_i \Psi = \left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}} \right)_{;j} = 0 \quad , \quad (3.57)$$

onde se vê o significado do operador $\hat{\mathcal{H}}_i$ como um gerador de transformações de coordenadas espaciais. A eq. (3.56) é conhecida como equação de Wheeler-DeWitt. Da mesma forma que seu correspondente clássico, o operador $\hat{\mathcal{H}}_0$ é responsável pelo conteúdo dinâmico da teoria governando, assim, a evolução da função de onda da RG. Nela, uma das variáveis contidas em h_{ij} faria o papel de tempo, entretanto esta escolha não é trivial. A dificuldade na definição de um tempo nos leva a outras, como por exemplo, a definição de um produto interno que se conserve no tempo. A eq. (3.56) também deixa claro o nome super métrica atribuída ao tensor G_{ijkl} , onde esta é interpretada como uma métrica no espaço das métricas chamado superespaço. A equação de Wheeler-DeWitt tem diversos problemas que iremos

comentar brevemente na próxima subseção. Sua estrutura complexa nos restringe a soluções particulares. Uma das maneiras de tratar o problema é restringir o espaço das métricas possíveis impondo simetrias, limitando o espaço de fase e restringindo o problema ao que chamamos de minisuperespaço. Este tipo de abordagem, apesar de transformar o problema em tratável faz com que ao evoluir uma determinada hiper superfície não estaremos integrando a ação em todo espaço de fase, mas apenas em uma parte dele.

3.3.1 Problemas da Equação de Wheeler-DeWitt

A equação de Wheeler-DeWitt (3.56) possui diversos problemas. Nesta subseção comentaremos alguns deles. A referência (Halliwell 1990) possui uma discussão detalhada deles.

De imediato surge um problema de ordenamento. Apesar do ordenamento proposto em (3.56) parecer o mais razoável evidenciando o significado do físico do vínculo super hamiltoniano quântico análogo ao significado do vínculo super hamiltoniano clássico, esta questão ainda está em aberto. Como citado na seção anterior não há um tempo claramente definido em (3.56). Uma proposta para solucionar este problema seria encontrar uma transformação canônica que nos permitisse escrever a equação de Wheeler-DeWitt na forma de uma equação de Schrödinger (Teitelboim 1975; Pinto-Neto & Velasco 1993), mas ainda não foi encontrada uma solução definitiva. A variável de tempo pode estar associada a graus de liberdade do conteúdo de matéria, como veremos adiante.

De maneira mais fundamental, o significado da função de onda da equação de Wheeler-DeWitt não é clara. É preciso definir um produto interno, conservado no tempo, e seria desejável construir quantidades que caracterizassem a dinâmica do sistema. Entretanto, a necessidade deste produto interno aparece apenas em interpretações da Mecânica Quântica que são probabilísticas, o que não é o caso da teoria de Broglie-Bohm. Outra questão é a necessidade de impor condições de contorno para obter uma solução única. Condições de contorno também são necessárias para garantir que as funções de onda serão quadrado integráveis.

Capítulo 4

Modelos de Cosmologia Quântica

A partir do advento da relatividade geral (Adler *et al.* 1975; Misner *et al.* 1973), foi possível desenvolver um discurso científico, apesar de diversas resistências e intempéries ao longo da história recente (Novello ; Novello 2006), à respeito da totalidade do universo. Em particular a partir da segunda metade do séc. XX a comunidade científica passou a trabalhar com a hipótese de que o universo teria tido um início, uma fase inicial onde efeitos quânticos seriam dominantes próxima à escala de Planck. A dificuldade em desenvolver uma teoria consistente de gravitação quântica adequada impulsionou, então, o desenvolvimento da cosmologia quântica, um problema mais tratável devido as diversas simetrias impostas aos modelos Friedmann-Lemâitre-Roberson-Walker (FLRW). Apesar de não ser uma teoria de gravitação quântica completa, espera-se, que esse tipo de teoria possa ser uma aproximação de teorias mais completas em certas escalas como no caso de *Loop Quantum Gravity* (Ashtekar & Singh 2011b) ou mesmo que desenvolva alguma intuição ou restrições de como deverá ser uma teoria completa. Diversos formalismos e métodos de quantização surgiram sem que ficasse claro qual seria o melhor (Kuchar 1973), dos quais destacamos a quantização canônica, um dos mais conservadores e que utilizaremos ao longo do desenvolvimento dos modelos aqui apresentados.

Para construir os modelos de cosmologia quântica deste capítulo procederemos “congelando” diversos graus de liberdade da teoria da relatividade geral através da imposição de simetrias de uma métrica específica, neste caso FLRW. A partir daí estabeleceremos a quantização canônica em modelos preenchidos com dois conteúdos específicos, de interesse nesta

dissertação: campo escalar e fluido de radiação. O primeiro por se tratar de um caso mais simples e com resultados bem conhecidos (Blyth & Isham 1975; Lemos 1987; Hu & Wu 1987; Lemos 1996b) e também já explorado pelas interpretações de Broglie-Bohm e histórias consistentes (Pinto-Neto & Jr. 2001; Craig & Singh 2010; Falciano & Pinto-Neto 2009). O segundo por se tratar de um modelo um pouco mais sofisticado, também extensivamente discutido (Lapchinskii & Rubakov 1977; Narlikar & Padmanabhan 1983; Tipler 1986; Lemos 1996a; de Barros *et al.* 1998b), e também porque esperamos que em uma escala na qual a cosmologia quântica poderia ser aplicável, isto é, algumas dezenas ou centenas de comprimentos de Planck, o universo pode ter sido dominado por fluido de radiação (Peebles 1993; Peter & Uzan 2009). Para efeito de ilustração, partiremos de duas abordagens diferentes em ambos os casos. Para o campo escalar quantizaremos o modelo via equação de Wheeler-DeWitt (DeWitt 1967), já no caso do modelo preenchido com fluido de radiação a quantização canônica partirá do formalismo quantização canônica no formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) (R. Arnowitt *et al.* 1962) no qual resolveremos os vínculos ainda no modelo clássico e escolheremos a variável que definimos como tempo, no contexto desse modelo, essa abordagem é equivalente a quantização Wheeler-DeWitt como foi mostrado em (Lapchinskii & Rubakov 1977).

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na seção (4.1) apresentaremos o modelo FLRW para um campo escalar e na subseção (4.1.1) analisaremos o caso quântico. Na seção (4.2) apresentaremos o modelo de Universo preenchido com fluido de radiação, na subseção (4.2.1) será apresentado o caso quântico.

4.1 Modelo com Campo Escalar

Nesta seção introduziremos um modelo de universo homogêneo e isotrópico plano contendo apenas um campo escalar sem massa e minimamente acoplado. Trata-se de um modelo simples, bastante ilustrativo que será posteriormente resolvido no capítulo (5) de forma analítica na interpretação de histórias consistentes. A quantização deste modelo foi, recentemente, desenvolvida no contexto de Loop Quantum Cosmology (LQC) (Ashtekar *et al.* 2006c; Ashtekar *et al.* 2006d).

Consideramos um elemento de linha da métrica FLRW, com curvatura espacial nula:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2(t) dt + R(t)^2 \Sigma_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.1)$$

sendo $N(t)$ a função lapso, $R(t)$ o fator de escala e Σ_{ij} é a métrica do 3-espaco plano. Os índices latinos variam de 1 a 3 e os índices gregos 0 a 3. Para a métrica da eq. (4.1) a parte gravitacional da ação $F_g = \int dt L_g$ dada por (3.24) se torna:

$$F_g = 6 \int dt (-R\dot{R}^2), \quad (4.2)$$

onde os termos de superfície não foram considerados, \dot{R} é a derivada em relação ao tempo do fator de escala, $16\pi G = 1$ e escolhemos a função lapso igual a unidade. Definimos o momento canonicamente conjugado a R :

$$p_R := \frac{\partial L_g}{\partial \dot{R}} = -12(R\dot{R}). \quad (4.3)$$

A partir de (4.3) e (4.2) escrevemos a Hamiltoniana da gravitação \mathcal{H}_g :

$$\mathcal{H}_g = -\frac{1}{24} \frac{p_R^2}{R}. \quad (4.4)$$

Consideramos agora a ação do campo escalar de massa nula e minimamente acoplado:

$$F_s = \int dt L_s = \int dt \left(-R^3 \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right). \quad (4.5)$$

Definindo $p_\phi := \frac{\partial L_s}{\partial \dot{\phi}}$ e sendo \mathcal{H}_s a hamiltoniana da matéria, o vínculo super hamiltoniano total (Sundermeyer 1982) pode ser escrito como:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}_s = -\frac{1}{24} \frac{p_R^2}{R} + \frac{p_\phi^2}{2R^3} \approx 0. \quad (4.6)$$

A partir de (4.6) encontramos a solução das equações de movimento para ϕ :

$$\phi - \phi_0 = \pm \sqrt{4/3} \ln \left| \frac{R}{R_0} \right|, \quad (4.7)$$

como $\dot{p}_\phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0$, p_ϕ é uma constante de movimento. Os sinais + e - da eq. (4.7) representam um universo se expandindo ou se contraindo, respectivamente. Observamos que

ϕ é monotônica, portanto, é uma boa variável para representar o tempo. Na solução da eq. (4.7) o universo encontra a singularidade quando $\phi \rightarrow -\infty$ para o universo em expansão e $\phi \rightarrow +\infty$ para o universo em contração, correspondendo a singularidade $R \rightarrow 0$. Nos limites de R pequeno, efeitos quânticos podem ser importantes. Estes efeitos estão além do escopo desse modelo clássico. Na próxima subseção desenvolveremos a versão quântica desse modelo para enfim responder à questão da singularidade no contexto das histórias consistentes no capítulo (5).

4.1.1 Quantização canônica do modelo com campo escalar

Para quantizar o modelo do campo escalar é necessário transformar as variáveis canônicas em operadores quânticos, isto é:

$$\{\phi, p_R\} = 1 \rightarrow [\hat{R}, \hat{p}_R] = i\hbar, \quad (4.8)$$

sendo $\{, \}$ o parêntese de Poisson e $[,]$ o comutador, \hat{R}, \hat{p}_R os operadores posição e momento respectivamente. Na representação de R , $\hat{p}_R = -i\frac{d}{dR}$. Por simplicidade, e para evitar carregar a notação, omitiremos o $\hat{}$ dos operadores, desde que não atrapalhe a compreensão do texto, e consideraremos $\hbar = 1$.

Para construir a equação de Wheeler-DeWitt utilizaremos o vínculo super hamiltoniano clássico da eq. (4.6). Realizando a mudança de variáveis $\alpha := \log R$, a eq. (4.6) pode ser reescrita como:

$$H = \frac{e^{-3\alpha}}{2} \left(-\frac{1}{12} p_\alpha^2 + p_\phi^2 \right). \quad (4.9)$$

E a equação de Wheeler-DeWitt $H\Psi = 0$ se torna

$$\left(\partial_\phi^2 - \frac{1}{12} \partial_\alpha^2 \right) \Psi(\alpha, \phi) = 0. \quad (4.10)$$

Vê-se que a forma da equação (4.10) é análoga à equação de Klein-Gordon. Portanto, seguindo esta analogia, procedemos separando as frequências positivas e negativas e quantizando-as de forma independente. Tirando a raiz quadrada da equação 4.10 obtemos

$$\pm i\partial_\phi \Psi(\alpha, \phi) = \sqrt{\Theta} \Psi(\alpha, \phi), \quad (4.11)$$

onde definimos o operador Θ como

$$\Theta := -\frac{1}{12} \partial_\alpha^2. \quad (4.12)$$

Selecionando a frequência positiva, podemos definir então o operador evolução temporal como sendo

$$U(\phi - \phi_0) = e^{i\sqrt{\Theta}(\phi - \phi_0)}, \quad (4.13)$$

onde a variável ϕ foi escolhida como tempo por se tratar de uma variável monotônica (ver 4.7). O produto escalar entre duas funções de onda $\Psi(\alpha, \phi)$ e $\Phi(\alpha, \phi)$ é dado por:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \bar{\Phi}(\alpha, \phi) \Psi(\alpha, \phi). \quad (4.14)$$

A solução para função de onda $\Psi(\alpha, \phi)$ é:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \Psi(k) e^{ik\alpha} e^{i\omega\phi} \\ &\propto \int_{-\infty}^0 dk \Psi(k) e^{ik(\alpha - \phi)} + \int_0^{\infty} dk \Psi(k) e^{ik(\alpha + \phi)} = \\ &:= \Psi_R(v_-) + \Psi_L(v_+), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde foram definidas $v_- := \alpha - \phi$, $v_+ := \alpha + \phi$ e $\omega := \sqrt{1/12}|k|$. Para responder se esse modelo quântico é singular, ou em que circunstâncias ele é singular discutiremos um critério no capítulo 5 no contexto das histórias consistentes. Esse critério, enfim, será aplicado ao presente modelo na seção (5.2).

4.2 Modelos com Fluido de Radiação

Consideramos o elemento de linha homogêneo e isotrópico da métrica de FLRW:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2(t)dt + R(t)^2\sigma_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.16)$$

onde a função $N(t)$ é a função lapso, $R(t)$ é o fator de escala, como na eq. (4.1), e σ_{ij} é a métrica do 3-espço para curvatura $k = -1, 0, 1$ que correspondem a uma 3-métrica esférica, plana ou hiperbólica respectivamente e $c = 1$, a velocidade da luz no vácuo.

O conteúdo de matéria considerado será de um fluido perfeito, com equação de estado $p = w\rho$ sendo ρ a densidade de energia, p a pressão isotrópica e w uma constante que dependerá do fluido. No caso da radiação tomaremos $w = 1/3$. O fluido será descrito pelo formalismo desenvolvido por (Schutz 1970; Schutz 1971) para hidrodinâmica relativística de fluidos perfeitos no qual o fluido é descrito por 5 potenciais escalares de velocidade, $\alpha, \beta, \Theta, \Phi, S$. Os potenciais α e β estão relacionados com movimentos de vórtices, e portanto, são nulos em modelos FLRW devido a simetria do último. O potencial S representa a entropia específica e Θ e Φ não possuem uma interpretação física direta. A 4-velocidade do fluido é descrita por:

$$U_\nu = h^{-1}(\Phi_{,\nu} + \Theta S_{,\nu}), \quad (4.17)$$

sendo h a entalpia. No modelo considerado, a 4-velocidade possui apenas uma componente não nula, isto é, $U_\nu = (u_0, 0, 0, 0)$ onde $u_0 = N(t)$ e portanto a entalpia é

$$h = (\dot{\Phi} + \Theta\dot{S})/N, \quad (4.18)$$

onde $\dot{\Phi}$ e \dot{S} representam as derivadas em relação a coordenada t dos potenciais Φ e S respectivamente. A pressão pode ser escrita em função da entalpia h , da constante w e da entropia S :

$$p = w \frac{h^{1+1/w}}{(1+w)^{1+1/w}} \exp(-S/w). \quad (4.19)$$

Substituindo a eq. (4.18) em (4.19) escrevemos a densidade lagrangiana do fluido:

$$\mathcal{L}_f = \sqrt{-gp} = N^{-1/k} R^3 \frac{(\dot{\Phi} + \Theta\dot{S})^{1+1/\kappa}}{(1+\kappa)^{1+1/\kappa}} \exp(-S/\kappa), \quad (4.20)$$

onde $16\pi G = c = 1$ e $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$. A ação F , considerando os termos da densidade

lagrangiana da gravitação (3.24), fica

$$F = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f) = \int_M d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial M^4} d^3x \sqrt{-h} h_{ij} K^{ij} + \int_M d^4x \sqrt{-g} p, \quad (4.21)$$

sendo K_{ij} a curvatura extrínica (Sundermeyer 1982), h_{ij} a 3-métrica, $h = \text{Det}(h_{ij})$, ∂M^4 a superfície da 4-variedade M^4 . O termo de superfície não foi desprezado. Para a geometria representada por (4.16) temos que $K_{ij} = -\dot{h}_{ij}/2N$.

Sendo a lagrangeana $L := \int d^3x \mathcal{L}$ definimos os momenta canonicamente conjugados

$$p_R := \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}, \quad p_\Theta := \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}}, \quad p_\Phi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}, \quad p_s := \frac{\partial L}{\partial \dot{S}}. \quad (4.22)$$

É possível reescrever a ação (4.21) da seguinte forma:

$$F = \int dt (p_R \dot{R} + p_\Phi \dot{\Phi} + p_\Theta \dot{\Theta} + p_s \dot{S} - N \mathcal{H}), \quad (4.23)$$

com

$$\mathcal{H} = -\frac{p_R^2}{24R} - 6kR + p_\Phi^{w+1} R^{-3w} \exp S, \quad (4.24)$$

onde o lapso $N(t)$ é um multiplicador de Lagrange e $\mathcal{H} = 0$ o vínculo super hamiltoniano. Esta teoria possui vínculos de segundo tipo (Sundermeyer 1982), $p_\Theta = 0$ e $\Theta = p_\Theta/p_\Phi$, o que simplifica a eq. (4.23):

$$F = \int dt (p_R \dot{R} + p_\Phi \dot{\Phi} + p_s \dot{S} - N \mathcal{H}). \quad (4.25)$$

Escrevendo a eq. (4.25) para $w = 1/3$ e fazendo a transformação canônica:

$$T = p_s \exp(-S) p_\Phi^{-4/3}, \quad \pi_T = p_\Phi^{4/3} \exp S, \quad (4.26)$$

e

$$\bar{\Phi} = \Phi - 4p_s/3p_\Phi, \quad \bar{\pi}_\Phi = p_\Phi, \quad (4.27)$$

o vínculo super hamiltoniano se torna

$$\mathcal{H} = -\frac{p_R^2}{24R} - 6kR + \frac{\pi_T}{R}. \quad (4.28)$$

Escolhendo T como a variável que representa o tempo obtemos a hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{ADM} = -\pi_T = -\frac{p_R^2}{24} - 6kR^2. \quad (4.29)$$

Definindo $t = T$, a equação de movimento $\dot{T} = N/R$ se reduz a $N = R$, portanto t representa o tempo conforme. As equações de movimento para o par canônico (R, p_R) são:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{p_R}{12}, \quad \frac{dp_R}{dt} = 12kR, \quad (4.30)$$

e a equação diferencial para coordenada R pode ser escrita como:

$$\ddot{R} + kR = 0. \quad (4.31)$$

Esta equação possui as soluções:

$$R(t) = R_0 \begin{cases} \sinh t & k = -1 \\ t & k = 0 \\ \sin t & k = +1 \end{cases} \quad (4.32)$$

A solução também pode ser escrita em termos do tempo cósmico $\tau = Rdt$:

$$\tau = R_0 \begin{cases} \cosh t - 1 & k = -1 \\ \frac{t^2}{2} & k = 0 \\ 1 - \cos t & k = +1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Em todos os três casos existe um tempo t_s tal que $R(t_s) = 0$. Isto significa que o volume do universo se anula e, por conseguinte, a densidade de energia $\rho(t)$ cresce sem limites, o que caracteriza a singularidade neste modelo clássico. Na seção seguinte quantizaremos esse modelo no intuito de investigar se efeitos quânticos são importantes quando R é pequeno.

4.2.1 Quantização Canônica de Modelos Cosmológicos com Radiação

Nesta seção procederemos com a quantização do modelo clássico apresentado na seção anterior. Apesar da hamiltoniana da eq. (4.29) ser análoga a de um oscilador harmônico, o problema difere deste porque a variável R , o fator de escala, está definido apenas para $R > 0$. Isto significa que na representação R , as funções de onda estarão definidas apenas no espaço de Hilbert $L^2(0, +\infty)$. Para garantir que operadores de interesse, como o hamiltoniano, sejam auto adjuntos, e portanto que o operador evolução temporal seja unitário, se vê necessário impor condições de contorno às funções de onda. A partir de (4.29), e da substituição $p_R \rightarrow -i\frac{d}{dR}$ construímos o operador hamiltoniano \hat{H} :

$$\hat{H} = -\frac{1}{24} \frac{d^2}{dR^2} + 6kR^2, \quad (4.34)$$

onde $\hbar = 1$. A condição necessária para que \hat{H} seja auto adjunto é dada por:

$$\langle \Psi_1 | \hat{H} \Psi_2 \rangle = \langle \hat{H} \Psi_1 | \Psi_2 \rangle. \quad (4.35)$$

Esta condição equivale a:

$$\int_0^\infty dR \Psi^*(R) \frac{d^2 \Psi(R)}{dR^2} = \int_0^\infty dR \frac{d^2 \Psi^*(R)}{dR^2} \Psi(R). \quad (4.36)$$

Integrando por partes duas vezes obtemos:

$$\left(\Psi^*(R)_1 \frac{d\Psi_2(R)}{dR} - \frac{d\Psi_1^*(R)}{dR} \Psi(R)_2 \right) (+\infty) = \left(\Psi^*(R)_1 \frac{d\Psi_2(R)}{dR} - \frac{d\Psi_1^*(R)}{dR} \Psi(R)_2 \right) (0). \quad (4.37)$$

Como desejamos que $\Psi(R)$ e sua derivada primeira sejam quadrado integráveis, o lado esquerdo da eq. (4.37) precisa ser nulo. Isto simplifica (4.37) para:

$$\left(\Psi^*(R)_1 \frac{d\Psi_2(R)}{dR} - \frac{d\Psi_1^*(R)}{dR} \Psi(R)_2 \right) (0) = 0. \quad (4.38)$$

Para satisfazer (4.38), é necessário e suficiente (Neumann 1996) que as funções de onda

obedeçam a condição:

$$\Psi'(0) = \eta\Psi(0), \quad (4.39)$$

estando η no domínio $(-\infty, +\infty)$ e onde $'$ denota a derivada. Por simplicidade utilizaremos a condição $\eta = 0$. Portanto, utilizaremos a condição de contorno:

$$\Psi'(0, t) = 0. \quad (4.40)$$

Seja $G(R, R', t)$ o propagador no espaço de Hilbert $L^2(-\infty, +\infty)$, é possível mostrar que o propagador $G^{(a)}(R, R', t)$ referente à condição de contorno (4.40), no espaço de Hilbert $L^2(0, +\infty)$ pode ser escrito como (Tipler 1986; Clark *et al.* 1980; Farhi & Gutmann 1990):

$$G^{(a)}(R, R', t) = G(R, R', t) + G(R, -R', t), \quad (4.41)$$

onde $G(R, R', t)$ é a função de Green da Hamiltoniana (4.34), análoga ao oscilador harmônico quântico:

$$G(R, R', t) = \left(\frac{6\sqrt{k}}{\pi i \sin \sqrt{kt}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{6i\sqrt{k}}{\sin \sqrt{kt}} \left((R^2 + R'^2) \cos \sqrt{kt} - 2RR' \right) \right\}. \quad (4.42)$$

4.2.2 Evolução do Modelo

Para construir as funções de onda $\Psi(R, t)$, utilizando a condição de contorno (4.40), consideramos como condição inicial um pacote gaussiano:

$$\Psi_0^{(a)}(R) = \sqrt[4]{\frac{8\sigma}{\pi}} \exp(-\beta R^2), \quad (4.43)$$

sendo $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $\beta = \sigma + \nu p$. Calculamos a função de onda $\Psi(R, t)$:

$$\Psi(R, t) = \int_0^\infty dR' \cdot G^{(a)}(R, R', t) \Psi_0^{(a)}(R') = \int_{-\infty}^{+\infty} dR' \cdot G(R, R', t) \Psi_0^{(a)}(R'), \quad (4.44)$$

e obtemos a solução (Lemos 1996a):

$$\begin{aligned} \Psi(R, t) &= \left(\frac{8\sigma}{\pi} \right)^{1/4} \left\{ \frac{6\sqrt{k}}{\cos(\sqrt{k}t)(\beta \tan(\sqrt{k}t) - 6\iota\sqrt{k})} \right\}^{1/2} \\ &\times \exp \left\{ \frac{6\iota\sqrt{k}}{\tan(\sqrt{k}t)} \left(1 + \frac{6\iota\sqrt{k}}{\cos^2(\sqrt{k}t)(\beta \tan(\sqrt{k}t) - 6\iota\sqrt{k})} \right) R^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para efeito de comparação com os modelos clássicos, vamos analisar o que acontece com o valor médio de R para $k = 0, \pm 1$:

$$\langle R(t) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{12(\pi\sigma)^{1/2}} \begin{cases} \sqrt{\sigma^2 \sinh^2 t + (6 - p \tanh t)^2 \cosh^2 t} & k = -1 \\ \sqrt{\sigma^2 t^2 + (6 - pt)^2} & k = 0 \\ \sqrt{\sigma^2 \sin^2 t + (6 - p \tan t)^2 \cos^2 t} & k = +1 \end{cases}. \quad (4.46)$$

Diferentemente do caso clássico o valor médio $\langle R(t) \rangle$ nunca se anula, o que sugere que efeitos quânticos podem evitar a singularidade presente no modelo clássico. Entretanto, para fazer tal afirmação, não é suficiente analisar os valores médios de R . É preciso assegurar que a função de onda $\Psi(R, t)$ nunca assumirá um auto-estado de R com auto valor $R_* \rightarrow 0$. Para definir isso precisamente é preciso estabelecer uma interpretação da mecânica quântica que seja capaz de explicar o que significa assumir um autoestado em um sistema quântico fechado, isto é, sem observador clássico externo, solucionando assim o problema da medida. Esta análise através da interpretação de histórias consistentes será o tópico do próximo capítulo.

Capítulo 5

Historias Consistentes em Modelos Cosmológicos

A partir dos modelos de cosmologia quântica apresentados no capítulo 4 e a interpretação das Histórias Consistentes discutida no capítulo 2, desenvolvemos nesse capítulo um critério para responder a questão da singularidade. Esta discussão partirá do caso apresentado por (Craig & Singh 2010) para enfim ser aplicado ao caso dos modelos com fluido de radiação. Diferentemente da discussão de (Craig & Singh 2010), onde uma mudança de base simplificou os cálculos para aquele modelo específico, optamos por simplificar os critérios de singularidade e consistência da família de histórias tornando-os mais genéricos. O objetivo desta escolha é esboçar uma abordagem aplicável de maneira direta à uma gama maior de modelos.

Na próxima seção apresentaremos o critério para determinar a resposta à questão da existência da singularidade descrito em (Craig & Singh 2010). Na seção seguinte este critério será aplicado a um modelo simples de universo FLRW plano com apenas um campo escalar sem massa. Este resultado também está presente em (Craig & Singh 2010). A seção 5.3 e suas subseções 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4 apresentam o conteúdo inovador da dissertação, onde o critério de singularidade é revisitado para ser aplicado de maneira mais simples ao problema. A questão é discutida no contexto dos universos FLRW com fluidos de radiação para os casos de $k = 0$ (subseção 5.3.1), $k = -1$ (subseção 5.3.2) e $k = 1$ (subseção 5.3.3). Finalmente em 5.3.4 os resultados obtidos são discutidos fazendo um contraponto com os resul-

tados conhecidos da teoria de Broglie-Bohm (de Barros *et al.* 1998b; Pinto-Neto & Jr. 2001; Pinto-Neto *et al.* 2012).

5.1 Singularidade em Histórias Consistentes

Para avaliar se um modelo de universo é ou não singular se vê necessário construir o que significa, neste contexto, ser singular. Na abordagem das Histórias Consistentes, apresentada no capítulo 2, atribuímos um conjunto de medidas a uma determinada história. A suposta singularidade no início do universo é caracterizada pelo autovalor do operador volume se tornar nulo ou, de forma equivalente, o autovalor do operador fator de escala se anular. Para tanto, construímos uma família de histórias, que contém dois tipos fundamentais de histórias, a primeira, chamamos história do ricochete é caracterizada pelo operador $C_b(t_1, \dots, t_n)$ definido no instante de tempo t_1 até t_n onde em todos os momentos t_i o universo tinha o valor do fator de escala R dentro de um intervalo $[R_*, +\infty)$, onde R_* é um valor fiducial. O operador C_b é escrito da seguinte forma:

$$C_b(t_1, \dots, t_n) = P_{\overline{\Delta R_*}}(t_n) P_{\overline{\Delta R_*}}(t_{n-1}) \dots P_{\overline{\Delta R_*}}(t_1), \quad (5.1)$$

onde $P_{\overline{\Delta R_*}}(t_i)$ são os projetores nos subespaços de autoestados de R com autovalores no intervalo $\overline{\Delta R_*} = [R_*, +\infty)$, que não compreendem a singularidade. De maneira análoga, definimos o intervalo de singularidade como sendo $\Delta R_* = [0, R^*)$. O intervalo sem singularidade é simplesmente o complemento do intervalo de singularidade. Uma história singular representada por $C_s(t_1, \dots, t_n)$, por conseguinte, é uma história na qual em pelo menos um dos momentos t_i o universo se encontrava no intervalo singular.

É importante salientar que essas histórias não são necessariamente consistentes, isto é, que em geral:

$$\langle \Psi | C_b(t_1, \dots, t_n) C_s^\dagger(t_1, \dots, t_n) | \Psi \rangle \neq 0, \quad (5.2)$$

conforme o critério da eq. (2.20), e nestes casos não é possível afirmar nada sobre o sistema. A resposta sobre a existência de singularidades em modelos cosmológicos depende não só

do modelo em si, como também da particular família de histórias que será construída. Por exemplo em (Craig & Singh 2010) utilizando dois específicos momentos no tempo o universo é sempre singular e em (Pinto-Neto *et al.* 2012) com histórias envolvendo três momentos de tempo a resposta obtida é que não é possível associar probabilidade ao mesmo modelo.

Por simplicidade, iremos nos concentrar em dois momentos distintos t_1 e t_2 e eventualmente avaliá-los nos limites do passado distante $t \rightarrow -\infty$ e no futuro distante $t \rightarrow +\infty$. O operador $C_s(t_1, t_2)$ pode ser escrito como:

$$C_s(t_2, t_1) = P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) + P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1) + P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1), \quad (5.3)$$

que são somas de vários produtos de projetores. Podemos notar também que a soma das histórias em que o universo é singular e do universo em ricochete é igual a soma de todas as possíveis combinações de pares de projetores (no caso das histórias com dois momentos de tempo) em subespaços complementares e, portanto, são iguais ao operador identidade. Então podemos escrever:

$$C_s(t_2, t_1) + C_b(t_2, t_1) = 1. \quad (5.4)$$

Utilizando que $P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1) + P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) = P_{\Delta R_\star}(t_2)$, a equação (5.3) pode ser escrita de forma mais simples como:

$$\begin{aligned} C_s(t_2, t_1) &= \\ &= P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) + P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1) + P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1) \\ &= P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\overline{\Delta R_\star} \cup \Delta R_\star}(t_1) + P_{\Delta R_\star \cup \overline{\Delta R_\star}}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1) - P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

portanto,

$$C_s(t_2, t_1) = P_{\Delta R_\star}(t_2) + P_{\Delta R_\star}(t_1) - P_{\Delta R_\star}(t_2)P_{\Delta R_\star}(t_1). \quad (5.6)$$

A partir desses operadores é possível, dado um modelo de Universo quântico, formular de forma precisa e responder à diversas perguntas de interesse sobre a questão da singularidade. Também podemos calcular se as probabilidades atribuídas às histórias sin-

gulares e de ricochete são significativas, avaliando a condição de consistência necessária $\langle \psi | C_b(t_1, \dots, t_n) C_s^\dagger(t_1, \dots, t_n) | \psi \rangle = \langle \psi_s | \psi_b \rangle = 0$, onde $|\psi_s\rangle$ e $|\psi_b\rangle$ representam os estados projetados pela história da singularidade e do ricochete, respectivamente. Se o universo é não singular, ou por completeza, se ele é singular será decidido caso a probabilidade de singularidade p_s for nula ou se a probabilidade de ricochete p_b for nula, respectivamente, onde p_s e p_b são definidos por:

$$p_s = \langle \psi_s | \psi_s \rangle, \quad (5.7)$$

e

$$p_b = \langle \psi_b | \psi_b \rangle. \quad (5.8)$$

5.2 Singularidade em universos quânticos com campo escalar não massivo

Para o modelo de universo quântico construído via equação de Wheeler-DeWitt utilizando como conteúdo somente um campo escalar não massivo, como descrito no capítulo 4 para a variável $\alpha = \log R$ com a solução 4.15, os intervalos $\overline{\Delta R_\star}$ e ΔR_\star se tornam $(-\infty, \alpha_\star]$ e $[\alpha_\star, +\infty)$, respectivamente.

Para obter a probabilidade de singularidade calculamos o estado projetado

$$\begin{aligned} P_{\Delta\alpha_\star}(\phi) |\Psi^L\rangle &= U^\dagger(\phi) P_{\Delta\alpha_\star} |\Psi^L(\phi)\rangle \\ &= U^\dagger(\phi) \int_{\Delta\alpha} d\alpha |\alpha\rangle \Psi^L(\alpha, \phi) \\ &= U^\dagger(\phi) \kappa \int_{\Delta v_+} dv_+ |v_+\rangle \Psi^L(v_+), \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde introduzimos $\kappa := \sqrt{1/12}$, e a base $|v_\pm\rangle \equiv |v = \exp(\pm\kappa(v_\pm - \phi))\rangle$, que satisfazem $\langle v'_\pm | v_\pm \rangle = \kappa^{-1} \delta(v'_\pm - v_\pm)$ e $1 = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} dv_\pm |v_\pm\rangle \langle v_\pm|$.

Avaliando a equação (5.9) no intervalo de singularidade nos limites de $\phi \rightarrow \pm\infty$ obtemos:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} P_{\Delta\alpha_*}(\phi) |\Psi^L\rangle = \lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} U^\dagger(\phi) \kappa \int_{-\infty}^{\phi + \kappa^{-1}\alpha_*} dv_+ |v_+\rangle \Psi^L(v_+), \quad (5.10a)$$

$$= \lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} U(-\phi) \begin{cases} |\Psi^L(\phi)\rangle \\ 0 \end{cases} \quad (5.10b)$$

$$= \begin{cases} |\Psi^L\rangle & \phi \rightarrow +\infty \\ 0 & \phi \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad (5.10c)$$

já que o termo $\phi \rightarrow \pm\infty$ domina o limite superior da integral. De forma análoga, para um estado $|\Psi^L\rangle$ no intervalo de ricochete temos

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} P_{\overline{\Delta\alpha_*}}(\phi) |\Psi^L\rangle = \begin{cases} 0 & \phi \rightarrow +\infty \\ |\Psi^L\rangle & \phi \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad (5.11)$$

e para o estado $|\Psi^R\rangle$,

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} P_{\Delta\alpha_*}(\phi) |\Psi^R\rangle = \begin{cases} 0 & \phi \rightarrow +\infty \\ |\Psi^R\rangle & \phi \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad (5.12)$$

e finalmente

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} P_{\overline{\Delta\alpha_*}}(\phi) |\Psi^R\rangle = \begin{cases} |\Psi^R\rangle & \phi \rightarrow +\infty \\ 0 & \phi \rightarrow -\infty \end{cases}. \quad (5.13)$$

Com as expressões para os estados projetados é possível calcular $\lim_{\substack{\phi_1 \rightarrow -\infty \\ \phi_2 \rightarrow +\infty}} C_b^\dagger(\phi_1, \phi_2) |\Psi\rangle$ e também $p_b = \langle \Psi_b | \Psi_b \rangle$:

$$|\Psi_b\rangle = \lim_{\substack{\phi_1 \rightarrow -\infty \\ \phi_2 \rightarrow +\infty}} P_{\overline{\Delta\alpha_*}}(\phi_2) P_{\Delta\alpha_*}(\phi_1) |\Psi\rangle = 0, \quad (5.14)$$

portanto $p_b=0$. A partir deste resultado também é possível afirmar que a história é consistente pois $\langle \Psi_s | \Psi_b \rangle = 0$. Por completeza calculamos também a probabilidade de singularidade p_s e o ket $|\Psi_s\rangle$

$$|\Psi_s\rangle = C_s^\dagger(\phi_1, \phi_2) |\Psi\rangle \quad (5.15)$$

$$= |\Psi^L\rangle + |\Psi^R\rangle \quad (5.16)$$

$$= |\Psi\rangle, \quad (5.17)$$

de onde concluímos que $p_s = \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ portanto um universo FLRW com curvatura $k = 0$ quantizado via equação de Wheeler-DeWitt utilizando uma das frequências da equação de Klein-Gordon e com um campo escalar não massivo como fonte de matéria é sempre singular para uma família com duas histórias e dois momentos no tempo, $\phi \rightarrow \pm\infty$ na interpretação de histórias consistentes. Entretanto, quando se adicionam mais momentos no tempo (Pinto-Neto *et al.* 2012) este resultado não é mais válido.

5.3 Modelos FRW com Fluido de Radiação

Analisaremos nesta seção um modelo um pouco mais realista do que o modelo anterior. No modelo padrão da Cosmologia o Universo passou por uma fase mais densa e dominada por um fluido da radiação. Motivados por este fato, analisaremos o caso de modelos dominados por radiação e se este tipo de modelo quântico é capaz evitar a singularidade.

No caso da seção 5.2 o cálculo das probabilidades foi facilitado pela dependência simples de $|\Psi(\phi)\rangle$ com o tempo ϕ e como consequência obtivemos o ket $|\Psi_b\rangle = 0$ nos limites desejados. Para modelos mais complexos isso não ocorrerá, de forma que abordaremos o problema de forma diferente calculando as probabilidades diretamente. Esse procedimento será facilitado por propriedades dos projetores e sua vantagem é que podem ser aplicados diretamente à qualquer modelo.

Inicialmente escrevemos a probabilidade de singularidade:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | C_s(t_1, t_2) C_s^\dagger(t_1, t_2) | \Psi \rangle &= - \langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t_1) P_{\Delta R_*}(t_2) P_{\Delta R_*}(t_1) | \Psi \rangle + \\ &+ \langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t_2) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t_1) | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde usamos que $P_{\Delta R_\star}(t)P_{\Delta R_\star}(t) = P_{\Delta R_\star}(t)$. Portanto precisamos de fato calcular somente esses três produtos. A expressão para a consistência da família de histórias também pode ser calculada de maneira análoga

$$\begin{aligned} \langle \Psi | C_b(t_1, t_2) C_s^\dagger(t_1, t_2) | \Psi \rangle &= \langle \Psi | P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle \\ &+ \langle \Psi | P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_2) | \Psi \rangle \\ &- \langle \Psi | P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Entretanto, os dois últimos termos da expressão (5.19) se anulam já que

$$\begin{aligned} P_{\overline{\Delta R_\star}}(t) P_{\Delta R_\star}(t) &= U^\dagger(t) P_{\overline{\Delta R_\star}} U(t) U^\dagger(t) P_{\Delta R_\star} U(t) \\ &= U^\dagger(t) \int_{\overline{\Delta R_\star}} |R\rangle \langle R| dR \int_{\Delta R_\star} |R'\rangle \langle R'| dR' U(t) \\ &= U^\dagger(t) \int_{\overline{\Delta R_\star}} \int_{\Delta R_\star} dR dR' |R\rangle \delta(R - R') \langle R'| U(t) = 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

isto é, são projetores em subespaços ortogonais. Isto simplifica (5.19) para

$$\langle \Psi | C_b(t_1, t_2) C_s^\dagger(t_1, t_2) | \Psi \rangle = \langle \Psi | P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_1) P_{\overline{\Delta R_\star}}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle. \quad (5.21)$$

$$(5.22)$$

A expressão para a consistência da família de histórias também pode ser escrita somente em função dos projetores $P_{\Delta R_\star}(t)$ ou em função de C_s se considerarmos a eq. (5.4) obteremos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | (1 - C_s) C_s^\dagger | \Psi \rangle &= \langle \Psi | C_s^\dagger | \Psi \rangle - \langle \Psi | C_s C_s^\dagger | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \Psi_s \rangle - \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle \\ &= - \langle \Psi | P_{\Delta R_\star}(t_1) P_{\Delta R_\star}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R_\star}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (5.23)$$

A equação (5.23) se torna útil já que uma vez calculada a probabilidade de singularidade $p_s = \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle$ é necessário avaliar apenas mais $\langle \Psi | \Psi_s \rangle$. Podemos também escrever a probabilidade de ricochete em termos de C_s :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | (1 - C_s(t_1, t_2))(1 - C_s^\dagger(t_1, t_2)) | \Psi \rangle &= \langle \Psi | \Psi \rangle - \langle \Psi | \Psi_s \rangle - \langle \Psi_s | \Psi \rangle + \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle \\ &= 1 - 2RE(\langle \Psi | \Psi_s \rangle) + \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

de maneira que as duas probabilidades, de singularidade p_s e de ricochete p_b , além da consistência da história podem ser caracterizadas por $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle$ e $\langle \Psi | \Psi_s \rangle$.

Para calcular $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle$, vamos considerar o segundo e o terceiro termo da eq. (5.18) para um intervalo ΔR qualquer:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | P_{\Delta R}(t) | \Psi \rangle &= \langle \Psi | U^\dagger(t) \int_{\Delta R} dR' |R'\rangle \langle R' | U(t) | \Psi \rangle \\ &= \int_{\Delta R} dR' |\Psi(R', t)|^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Assim os dois últimos termos de (5.18) podem ser calculados apenas integrando o módulo das funções de onda $\Psi(R, t)$ do capítulo 4. Já para o primeiro termo da eq. (5.18), para um intervalo ΔR qualquer, temos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_1) P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle &= \langle \Psi | U^\dagger(t_1) \int_{\Delta R} dR |R\rangle \langle R | U(t_1) \\ &\times U^\dagger(t_2) \int_{\Delta R} dR' |R'\rangle \langle R' | U(t_2) \\ &\times U^\dagger(t_1) \int_{\Delta R} dR'' |R''\rangle \langle R'' | U(t_1) | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_1) P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle &= \int_{\Delta R} dR \int_{\Delta R} dR' \int_{\Delta R} dR'' \Psi^*(R, t_1) G^{(a)}(R, R', t_1 - t_2) \\ &\times G^{(a)}(R', R'', t_2 - t_1) \Psi(R'', t_1), \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde $\Psi^*(R, t_1)$ é o complexo conjugado da função $\Psi(R, t_1)$. As eqs. (5.27) e (5.25) permitem

escrever a probabilidade de singularidade em termos das funções de onda dos modelos de universos FLRW dominados por radiação descritos no capítulo 4, e serão analisados caso a caso nas próximas subseções. De forma análoga vamos analisar os termos de $\langle \Psi | \Psi_s \rangle$:

$$\langle \Psi | \Psi_s \rangle = \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2) | \Psi \rangle - \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2)P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle \quad (5.28)$$

Os dois primeiros termos são idênticos aos da eq. (5.25) e o último pode ser escrito em termos de $\Psi(R, t)$ e do propagador $G^{(a)}(R, R', t)$:

$$\langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2)P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle = \int_{\Delta R} dR \int_{\Delta R} dR' G^{(a)}(R, R', t_2 - t_1) \Psi(R', t_1) \cdot \Psi^*(R, t_1) \quad (5.29)$$

À seguir analisaremos os casos de curvatura $k = 0, -1, 1$ respectivamente, ao serem avaliados nos momentos $t_1 \rightarrow -\infty$ e $t_2 \rightarrow +\infty$ e calcularemos se a família de histórias é consistente ou não, p_s e p_b .

Para uma família de histórias consistentes e um modelo não singular a condição necessária é:

$$\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = 0 = \langle \Psi | \Psi_s \rangle. \quad (5.30)$$

E por completeza, se a família de histórias é consistente o modelo é singular teremos $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = 1 = \langle \Psi | \Psi_s \rangle$.

Em qualquer outro resultado ou não é possível atribuir probabilidades ao problema ou existe uma probabilidade finita e menor que 1 na qual o universo pode encontrar a singularidade em $t \rightarrow \pm\infty$.

5.3.1 Universo plano ($k = 0$)

Para um universo dominado pela radiação com curvatura $k = 0$, com condição inicial $\Psi_0(R) = \sqrt[4]{\frac{8\sigma}{\pi}} \exp(-\beta R^2)$ descrita na seção (4.2.1) o segundo e o terceiro termo da eq. (5.18), que descreve a probabilidade de singularidade $p_s = \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle$, pode ser avaliado de

forma simples como:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | P_{\Delta R^*}(t) | \Psi \rangle &= \int_0^{R^*} dR |\Psi(R, t)|^2 \\
&= \int_0^{R^*} dR \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi}} \sqrt{\frac{36}{\sigma^2 t^2 + (6-pt)^2}} \exp\left(-\frac{72\sigma}{\sigma^2 t^2 + (6-pt)^2} R^2\right) \\
&= \int_0^{X'} dx \Phi(x) = \int_0^{X'} dx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2). \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Onde utilizamos a eq. (5.25), fizemos a substituição $x = \sqrt{\frac{72}{\sigma^2 t^2 + (6-pt)^2}} R$ e definimos $X' = \sqrt{\frac{72}{\sigma^2 t^2 + (6-pt)^2}} R^*$. Nos dois momentos no tempo considerados temos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^{X'} dx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) = 0, \tag{5.32}$$

pois o limite superior $X' \rightarrow 0$ nesse limite. Analisamos o primeiro termo de $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle$, utilizando a eq. (5.27) temos:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t_1) P_{\Delta R_*}(t_2) P_{\Delta R_*}(t_1) | \Psi \rangle &= \frac{\sigma R_*}{\sqrt{2\pi^3} |\beta|^2} \times \frac{1}{t_1(t_1 - t_2)} \\
&\times \left(12R_* \operatorname{sgn}(t_1 - t_2) + \sqrt{3\pi|t_1 - t_2|} \right)^2 \\
&\times \left| \left(\operatorname{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{3} \cdot 4R_*}{\sqrt{\pi|t_1 - t_2|}}\right) \operatorname{sgn}(t_1 - t_2) \right. \right. \\
&\left. \left. + i \operatorname{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{3} \cdot 4R_*}{\sqrt{\pi|t_1 - t_2|}}\right) \right) \right|^2, \tag{5.33}
\end{aligned}$$

sendo $\operatorname{FresnelS}(y) = \int_0^y dt \sin \frac{\pi t^2}{2}$ e $\operatorname{FresnelC}(y) = \int_0^y dt \cos \frac{\pi t^2}{2}$ as funções de Fresnel seno e cosseno respectivamente, e $\operatorname{sgn}(x)$ a função degrau. Para calcular p_s avaliamos a eq. (5.33) nos limites de $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$ e obtemos:

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_1) P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle = \begin{cases} 0 & t_1 \rightarrow +\infty \\ 0 & t_1 \rightarrow -\infty \\ 0 & t_2 \rightarrow +\infty \\ 0 & t_2 \rightarrow -\infty \end{cases}. \tag{5.34}$$

Com auxílio das eq. (5.18),(5.32) e (5.34) podemos escrever p_s como:

$$\begin{aligned}
p_s &= \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} p_s(t_1, t_2) \\
&= \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} - \langle \Psi | P_{\Delta R_\star}(t_1) P_{\Delta R_\star}(t_2) P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle + \\
&+ \langle \Psi | P_{\Delta R_\star}(t_2) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R_\star}(t_1) | \Psi \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Assim, a probabilidade de singularidade em um universo FLRW com curvatura $k = 0$ dominado pela radiação é nula nesses limites. Todavia, precisamos ainda mostrar que a família de histórias é consistente para que essa conclusão faça sentido.

Para isso precisamos analisar o termo $\langle \Psi | \Psi_s \rangle = \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2) | \Psi \rangle - \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle$ da eq. (5.23). Como os dois primeiros termos já foram avaliados em (5.32) precisamos considerar apenas a integral da eq. (5.29). Não foi possível uma solução analítica para a mesma, de forma que a avaliamos numericamente. Utilizando o *Mathematica* (Wolfram Research 2010) construímos o gráfico (5.1) da função $A_0(t_1, t_2) := \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle$ para as partes real e imaginária. Escolhemos o fator de escala da ordem de centena de comprimentos de Plank, $R_\star = 200$. O valor da constante σ que tem dimensão de inverso da coordenada R ao quadrado foi atribuído um valor compatível com centenas de comprimentos de Planck, no gráfico apresentado $\sigma = 15$, por simplicidade, e porque a constante p pode ser anulada por uma translação no tempo, escolhemos $p = 0$. Outros conjuntos de parâmetros foram testados: $(R_\star = 300, \sigma = 20, p = 0), (R_\star = 500, \sigma = 15, p = 0)$ sem qualquer alteração significativa no gráfico nos limites de t_1, t_2 muito pequenos e grandes, respectivamente. Observamos que nos limites $t_1 \rightarrow -\infty$ e $t_2 \rightarrow +\infty$ existe uma tendência para função $A_0(t_1, t_2) \rightarrow 0$ e, portanto a história é consistente.

A partir da eq. 5.24, e considerando que $\lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = 0$ e $\lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \langle \Psi | \Psi_s \rangle = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} A_0(t_1, t_2) = 0$ concluímos de forma consistente que $p_b = \langle \Psi_b | \Psi_b \rangle = 1$, isto é, para este modelo o universo encontra um ricochete.

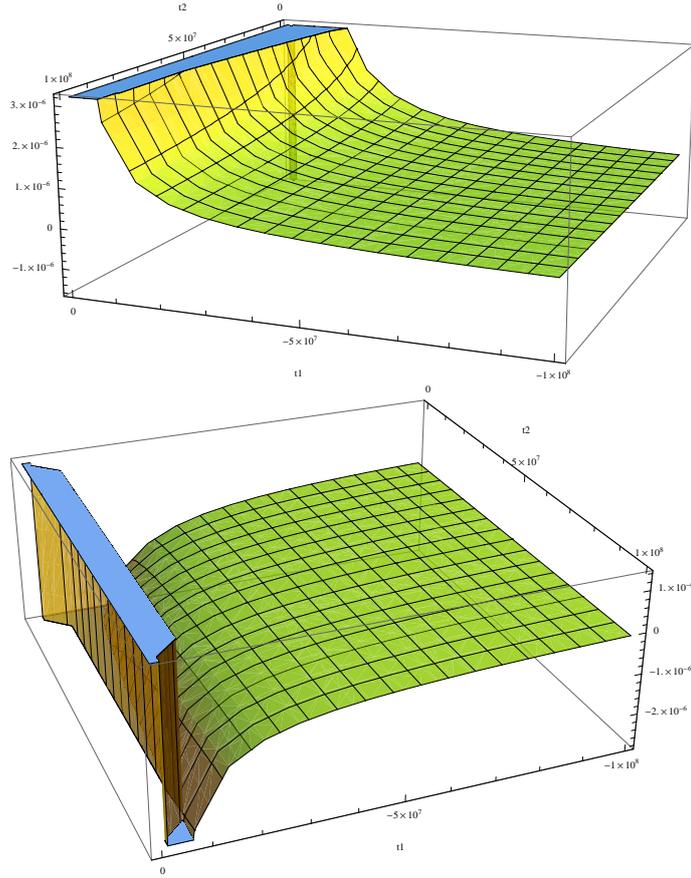


Figura 5.1: Parte Real e Imaginária, respectivamente, de $A_0(t_1, t_2)$ utilizando $R_\star = 200$, $p = 0$ e $\sigma = 15$.

5.3.2 Universo aberto ($k = -1$)

Para curvatura espacial negativa procedemos de forma análoga ao caso plano. Para calcular p_s analisamos os dois últimos termos de $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = -\langle \Psi | P_{\Delta R^\star}(t_1) P_{\Delta R^\star}(t_2) P_{\Delta R^\star}(t_1) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R^\star}(t_2) | \Psi \rangle + \langle \Psi | P_{\Delta R^\star}(t_1) | \Psi \rangle$ da eq. (5.18):

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi | P_{\Delta R^\star}(t) | \Psi \rangle &= \int_0^{R^\star} dR |\Psi(R, t)|^2 \\
 &= \int_0^{R^\star} dR \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi}} \sqrt{\frac{36}{\cosh^2 t (\sigma^2 \tanh^2 t + (6 - p \tanh t)^2)}} \\
 &\times \exp\left(-\frac{72\sigma}{\cosh^2 t (\sigma^2 \tanh^2 t + (6 - p \tanh t)^2)} R^2\right) \\
 &= \int_0^{X'} dx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2), \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

onde foram definidas $x := \frac{\sqrt{72\sigma}}{\cosh t(\sigma^2 \tanh^2 t + (6-p \tanh t)^2)^{1/2}} R$ e $X' := \frac{\sqrt{72\sigma}}{\cosh t(\sigma^2 \tanh^2 t + (6-p \tanh t)^2)^{1/2}} R_*$.

Quando $t \rightarrow \pm\infty$ temos que $X' \rightarrow 0$ e podemos escrever:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^{R_*} dR |\Psi(R, t)|^2 = 0. \quad (5.37)$$

Utilizando a eq. (5.27) avaliamos o termo restante de $\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t_1) P_{\Delta R_*}(t_2) P_{\Delta R_*}(t_1) | \Psi \rangle &= \sqrt{3}/2\lambda \left| \sqrt{\frac{-i \cosh(t_1)}{\beta - 12i \tanh(t_1/2)}} \right|^2 \cosh(t_1 - t_2) \\ &\times \left(\text{FresnelC}(\lambda \sqrt{\coth(\frac{t_1 - t_2}{2})}) \right)^2 + \\ &+ \frac{2 \text{FresnelC}(\lambda \sqrt{\coth(\frac{t_1 - t_2}{2})}) \text{FresnelC}(\lambda \sqrt{\tanh(\frac{t_1 - t_2}{2})})}{|\tanh(\frac{t_1 - t_2}{2})|} \\ &+ \coth^2(\frac{t_1 - t_2}{2}) (\text{FresnelC}(\lambda \sqrt{\tanh(\frac{t_1 - t_2}{2})}))^2 \\ &+ \text{FresnelS}(\lambda \sqrt{\tanh(\frac{t_1 - t_2}{2})})^2 \\ &+ \text{FresnelS}(\lambda \sqrt{\coth(\frac{t_1 - t_2}{2})})^2 \text{sgn}(\coth(\frac{t_1 - t_2}{2})) \\ &+ 2 \coth^{3/2}(\frac{t_1 - t_2}{2}) \text{FresnelS}(\lambda \sqrt{\coth(\frac{t_1 - t_2}{2})})^2 \\ &\times \text{FresnelS}(\lambda \sqrt{\tanh(\frac{t_1 - t_2}{2})}) \text{sgn}(\coth(\frac{t_1 - t_2}{2})) \\ &\times \sqrt{\tanh(\frac{t_1 - t_2}{2})} \tanh(\frac{t_1 - t_2}{2}), \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde definimos $\lambda := 2R_* \sqrt{\frac{6}{\pi}}$. Avaliamos os limites da eq. (5.38) para $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_1) P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle = \begin{cases} 0 & t_1 \rightarrow +\infty \\ 0 & t_1 \rightarrow -\infty \\ 0 & t_2 \rightarrow +\infty \\ 0 & t_2 \rightarrow -\infty \end{cases}. \quad (5.39)$$

Que é um resultado idêntico ao da eq. (5.34). Portanto, a probabilidade de singularidade $p_s = 0$.

Como no caso anterior, avaliamos numericamente a consistência da família de histórias,

utilizando eq. (5.29). Nos gráficos da fig. 5.2 apresentamos, utilizando os mesmos parâmetros utilizados no caso $k = 0$, $A_{-1}(t_1, t_2) := \langle \Psi | P_{\Delta R}(t_2) P_{\Delta R}(t_1) | \Psi \rangle$ e verificamos que $A_{-1} \rightarrow 0$ quando t_1 decresce e t_2 cresce. Os outros dois conjuntos de parâmetros ($R_\star = 300, \sigma = 20, p = 0$), ($R_\star = 500, \sigma = 15, p = 0$) também não apresentaram diferenças significativas. A partir dos gráficos (5.2) concluímos que a história é consistente e pelas eq. (5.39) e (5.37) nos limites $t_1 \rightarrow -\infty$ e $t_2 \rightarrow +\infty$, podemos concluir utilizando (5.24) que $p_b = \langle \Psi_b | \Psi_b \rangle = 1$.

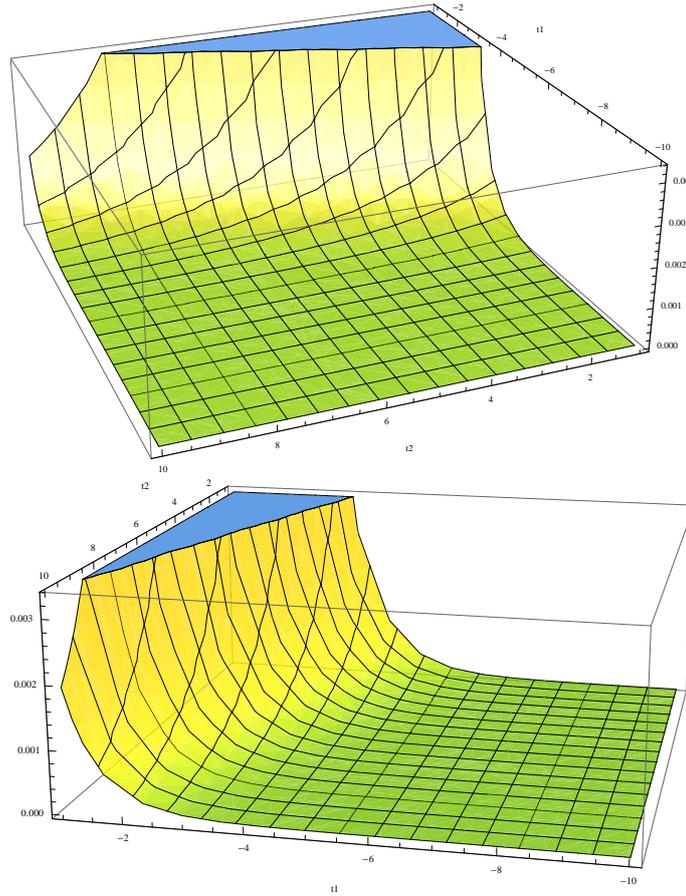


Figura 5.2: *Parte Real e Imaginária, respectivamente, de $A_{-1}(t_1, t_2)$ utilizando $R_\star = 200, p = 0$ e $\sigma = 15$.*

5.3.3 Universo fechado ($k = 1$)

Consideremos, no caso $k = 1$, o termo $\langle \Psi | P_{\Delta R^\star}(t) | \Psi \rangle$ da eq. (5.18):

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t) | \Psi \rangle &= \int_0^{R_*} dR |\Psi(R, t)|^2 \\
&= \int_0^{R_*} dR \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi}} \sqrt{\frac{36}{\cos^2 t (\sigma^2 \tan^2 t + (6 - p \tan t)^2)}} \\
&\times \exp\left(-\frac{72\sigma}{\cos^2 t (\sigma^2 \tan^2 t + (6 - p \tan t)^2)} R^2\right) \\
&= \int_0^{X'} dx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \\
&= \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{72\sigma}}{\cos t (\sigma^2 \tan^2 t + (6 - p \tan t)^2)^{1/2}}\right). \tag{5.40}
\end{aligned}$$

De forma diferente dos dois outros casos apresentados $\langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t) | \Psi \rangle$ oscila nos limites $t \rightarrow \pm\infty$. No gráfico da fig. 5.3 observamos o comportamento de $\langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t) | \Psi \rangle$ utilizando os mesmos parâmetros ($R_* = 200, \sigma = 15, p = 0$).

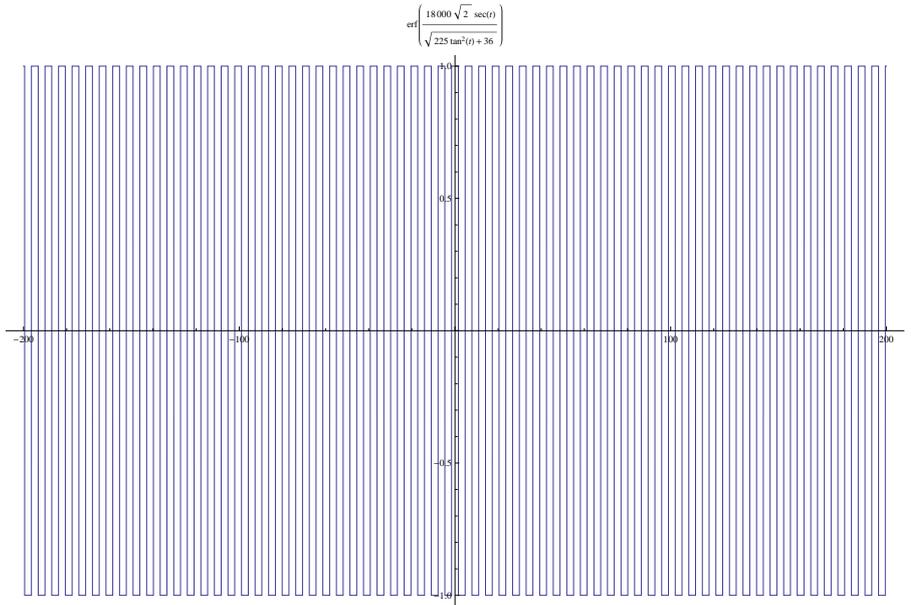


Figura 5.3: $\langle \Psi | P_{\Delta R_*}(t_2) | \Psi \rangle$ utilizando $R_* = 200, p = 0$ e $\sigma = 15$.

Este resultado sugere que p_s também oscila.

Ao calcular o termo com três projetores restante obtivemos uma função $A_1(t_1, t_2)$ análoga à de $A_{-1}(t_1, t_2)$ da eq. (5.38) fazendo a substituição $\cosh y \rightarrow \cos y$ e $\tanh y \rightarrow \tan y$. Esta função também oscila nos limites considerados.

Para calcular a consistência da família de histórias iremos avaliar a eq. (5.22), com auxílio da eq. (5.27) obtivemos uma expressão analítica:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_b | \Psi_s \rangle &\propto \frac{\csc t_1 \csc t_1 - t_2}{|\sqrt{\beta + 12\iota \tan(t_1/2)}|^2} \\
&\times \left(\left(\frac{1}{C} \text{FresnelC}(\lambda C) + \iota \text{FresnelS}(C) \text{sgn}(C') \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{B} \text{FresnelC}(\lambda B) - \iota \text{FresnelS}(B) \text{sgn}(B') \right) \right) \\
&\times \left(\left(\frac{1}{C} (1 - 2 \text{FresnelC}(\lambda C) + \iota(-1 + 2 \text{FresnelS}(\lambda C)) \text{sgn}(C')) \right) \right. \\
&+ \left. \left. \left(\frac{1}{B} (1 - 2 \text{FresnelC}(\lambda B) - \iota(-1 + 2 \text{FresnelS}(\lambda B)) \text{sgn}(B')) \right) \right) \right) \quad (5.41)
\end{aligned}$$

onde definimos $C := \cot^{1/4}(t_1 - t_2/2)^2$, $C' := \cot(t_1 - t_2/2)$ e $B := \tan^{1/4}(t_1 - t_2/2)^2$, $B' := \tan(t_1 - t_2/2) = 1/C'$. A eq. (5.41) assim como $A_1(t_1, t_2)$ não converge em $t_1 \rightarrow -\infty$ e $t_2 \rightarrow +\infty$ e portanto a família de histórias não é consistente e não podemos atribuir probabilidades ao problema.

5.3.4 Comparação com resultados obtidos pela teoria de Broglie-Bohm

Nesta seção discutiremos alguns resultados, para o universo preenchido com campo escalar e dominados pela radiação, para a Teoria de Broglie-Bohm. Considerando a eq. de Wheeler-DeWitt para o campo escalar

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad . \quad (5.42)$$

onde redefinimos por conveniência $4/3\pi G = 1$ e aplicando o mesmo procedimento descrito na seção 2.3, escrevemos a função de onda $\Psi(t)$ na forma polar $\Psi = A \exp \iota S$ e obtemos:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + Q(\alpha, \phi) = 0 \quad , \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(A^2 \frac{\partial S}{\partial \phi} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A^2 \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad , \quad (5.44)$$

sendo a primeira equação referente à parte real e a segunda à parte imaginária e onde o potencial quântico é

$$Q(\alpha, \phi) := \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} \right] . \quad (5.45)$$

As equações guias de onda são:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = - \frac{e^{3\alpha} \dot{\alpha}}{N} , \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{e^{3\alpha} \dot{\phi}}{N} . \quad (5.47)$$

Considerando a solução da função de onda 4.15, escrita na forma:

$$\Psi(v_l, v_r) = \int_0^\infty dk \Psi(k) e^{ikv_l} + \int_{-\infty}^0 dk \Psi(k) e^{ikv_r} . \quad (5.48)$$

E utilizando (5.48), (5.47) e (5.46), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\phi} &= - \frac{\partial S / \partial \alpha}{\partial S / \partial \phi} \\ &= - \left\{ \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' \left[\Psi(k) \Psi^*(k') e^{v_l(k-k')} - \Psi(-k) \Psi^*(-k') e^{-v_r(k-k')} \right] (k+k') \right. \\ &\quad \left. - \left[\Psi(-k) \Psi^*(k') e^{-v_r k} e^{-v_l k'} - \Psi(k) \Psi^*(-k') e^{v_l k} \right] e^{v_r k'} (k-k') \right\} / \\ &\quad \left\{ \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' \left[\Psi(k) \Psi^*(k') e^{v_l(k-k')} + \Psi(-k) \Psi^*(-k') e^{-v_r(k-k')} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi(-k) \Psi^*(k') e^{-v_r k} e^{-v_l k'} + \Psi(k) \Psi^*(-k') e^{v_l k} \right] e^{v_r k'} (k+k') \right\} . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Na eq. (5.49) podemos observar que nos limites em que $v_r \rightarrow \pm\infty$ os termos $\int_0^\infty dk \Psi(k) e^{v_r k}$, $\int_0^\infty dk \Psi(k) e^{v_r k}$ correspondem às transformadas de Fourier de funções quadrado integráveis em $v_r \rightarrow \pm\infty$ e portanto:

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -1 \Rightarrow \alpha + \phi = \text{const} . \quad (5.50)$$

Analogamente para $v_l \rightarrow \pm\infty$ temos

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = 1 \Rightarrow \alpha - \phi = \text{const} . \quad (5.51)$$

Onde se vê que nestes limites recuperamos as soluções das trajetórias clássicas da eq. (4.7).

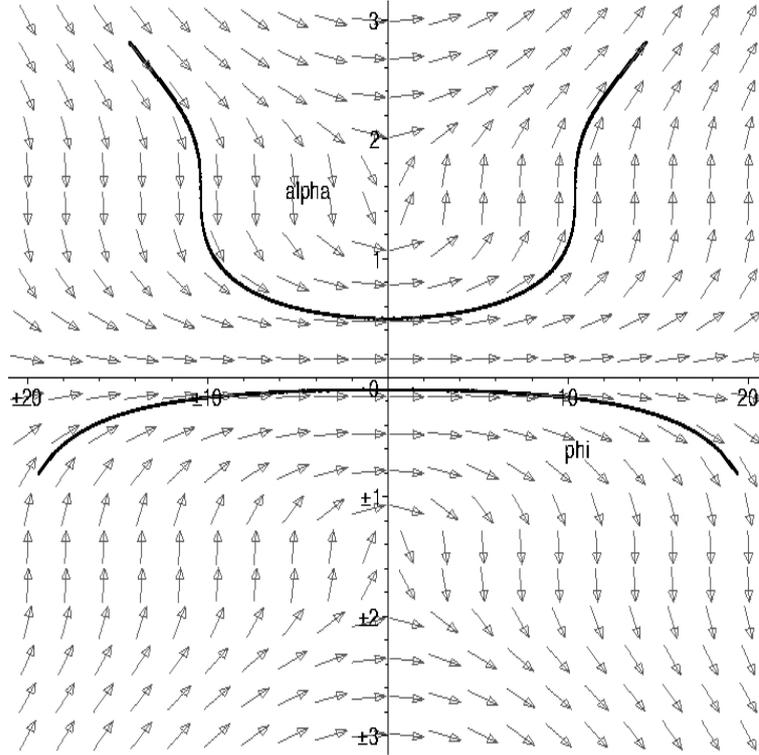


Figura 5.4: Campos para as famílias de trajetórias das eq. (5.46) e (5.47). Podemos distinguir dois tipos de trajetórias representadas pelas linhas, a linha superior mostra um Universo que encontra um ricochete e a inferior um universo singular em $\phi \rightarrow \pm\infty$. Esta figura foi retirada da referência (Pinto-Neto et al. 2012).

Para solucionar (5.51) e obter as trajetórias Bohmianas na região próxima à singularidade clássica para efeito de comparação com os resultados obtidos pelas Histórias Consistentes consideramos $\Psi(k)$ um pacote gaussiano

$$\Psi(k) = \exp\left(\frac{-(|k| - d)^2}{b}\right), \quad (5.52)$$

onde $b \ll 1$ e $d > 1$. As soluções para estas trajetórias estão representadas na figura 5.4 tirada da referência (Pinto-Neto et al. 2012). Podemos observar que existem duas famílias de trajetórias para a condição (5.52), uma delas atinge um ricochete próxima à singularidade clássica, e a outra é singular nos limites $\phi \rightarrow \pm\infty$. Esta conclusão difere da encontrada no contexto das Histórias Consistentes na seção 5.2 e na referência (Craig & Singh 2010), onde foi demonstrado que para qualquer escolha de $\Psi(k)$ a probabilidade de singularidade em pelo menos um dos dois momentos no tempo considerados é 1.

Vamos analisar o caso do Universo dominado pelo fluido de radiação da seção 5.3. No

modelo apresentado temos a equação diferencial para a trajetória

$$p_R = 12\dot{R} = \frac{\partial S(R, t)}{\partial R}, \quad (5.53)$$

onde $S(R, t)$ é a fase da função de onda da eq. (4.45)

$$S(R, t) := \text{Arg}(\Psi(R, t)), \quad (5.54)$$

onde $\text{Arg}(y)$ é o argumento de uma função y . As soluções para as trajetórias são

$$R(t) = R_0 \begin{cases} \sqrt{\sigma^2 \sin^2 t + (6 - p \tan t)^2 \cos^2 t} & k = 1 \\ \sqrt{\sigma^2 t^2 + (6 - pt)^2} & k = 0 \\ \sqrt{\sigma^2 \sinh^2 t + (6 - p \tanh t)^2 \cosh^2 t} & k = -1 \end{cases}, \quad (5.55)$$

onde se vê a semelhança com os valores médios $\langle R(t) \rangle$ da eq. (4.46), que é idêntica exceto pela constante de integração. Este resultado não é particularmente surpreendente pois os valores médios da teoria de Broglie-Bohm satisfazem (4.46). O potencial quântico para este modelo é:

$$Q = 3\sigma \begin{cases} \frac{[\sigma(\sigma \sin^2(t) - 72R^2) + (6 - p \tan(t))^2 \cos^2(t)]}{[(6 - p \tan(t))^2 \cos^2(t) + \sigma^2 \sin^2(t)]^2} & k = 1 \\ \frac{[\sigma(\sigma t^2 - 72R^2) + (6 - pt)^2]}{[(6 - pt)^2 + \sigma^2 t^2]^2} & k = 0 \\ \frac{[\sigma(\sigma \sinh^2(t) - 72R^2) + (6 - p \tanh(t))^2 \cosh^2(t)]}{[(6 - p \tanh(t))^2 \cosh^2(t) + \sigma^2 \sinh^2(t)]^2} & k = -1 \end{cases}. \quad (5.56)$$

O potencial quântico pode ser reescrito de forma mais simples

$$Q = \frac{3\sigma R_0^2(1 - 72\sigma R_0^2)}{R^2(t)}, \quad (5.57)$$

sendo $R(t)$ as trajetórias da eq. (5.55). As soluções para trajetória e o potencial quânticos podem ser visualizadas nos gráficos das figuras 5.6 e 5.5 para os casos $k = -1$ e $k = 0$ respectivamente. Na figura 5.7 e 5.8 apresentamos o fator de escala e o potencial para o caso $k = +1$ para diferentes escolhas de σ . Para as curvaturas $k = 0, \pm 1$ estes modelos não atingem a singularidade em nenhum momento do tempo. Em todos os casos, podemos observar que o potencial quântico Q se torna grande quando o fator de escala é pequeno, demonstrando assim, que efeitos quânticos são importantes nesse regime e desviam as trajetórias

clássicas.

As conclusões sobre os modelos $k = -1$ e $k = 0$ são as mesmas em ambas abordagens, Histórias Consistentes e de Broglie-Bohm, o Universo não é singular. Entretanto, na interpretação das Histórias Consistentes obtemos uma resposta diferente para a questão da singularidade em $k = +1$. A Teoria de Broglie-Bohm afirma que este modelo não é singular, enquanto as Histórias Consistentes não são capazes de atribuir uma probabilidade significativa. No caso do Universo com campo escalar observamos uma discordância entre as duas análises, Histórias Consistentes afirmam que, qualquer que seja a função $\psi(k)$ o universo sempre encontra a singularidade no em $\phi \rightarrow \pm\infty$, enquanto foi mostrado, que com $\psi(k)$ sendo um pacote gaussiano, existem trajetórias não singulares.

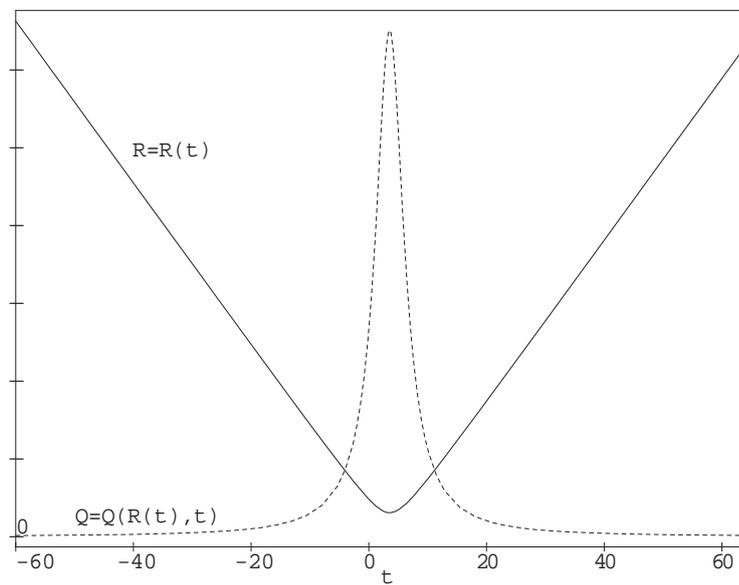


Figura 5.5: Trajetória quântica para o fator de escala $R(t)$ (linha sólida) e potencial quântico $Q(R, t)$, para o caso $k = -1$. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros et al. 1998b).

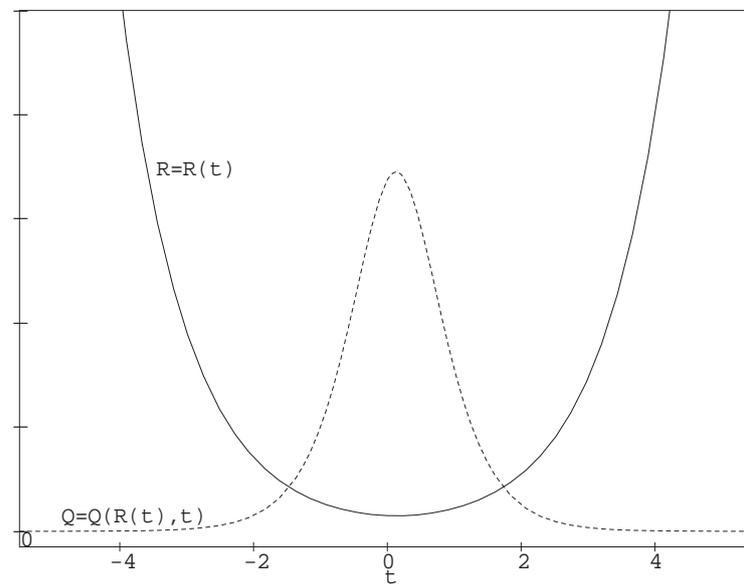


Figura 5.6: Trajetória quântica para o fator de escala $R(t)$ (linha sólida) e potencial quântico $Q(R, t)$, para caso $k = 0$. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros et al. 1998b).

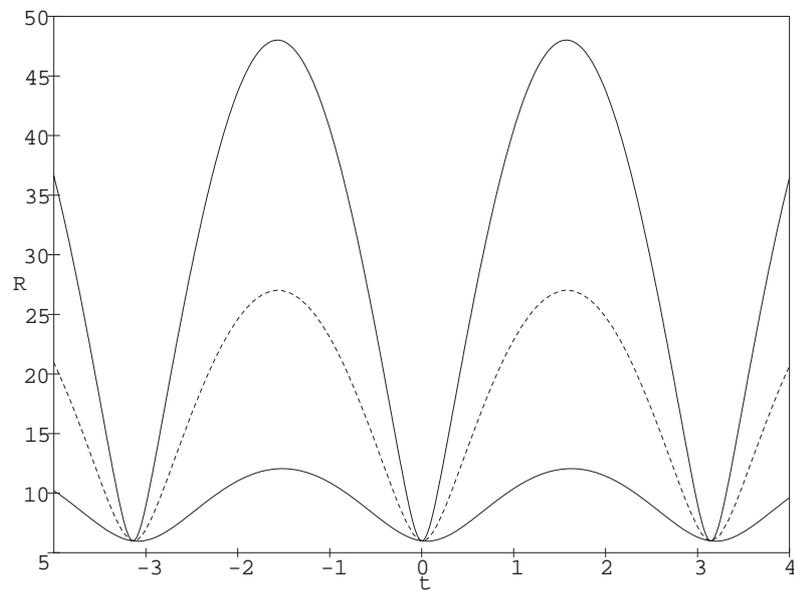


Figura 5.7: Trajetória quântica para o fator de escala $R(t)$, em para diferentes valores de σ para $k = 1$, quando σ cresce, a amplitude das oscilações crescem. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros et al. 1998b).

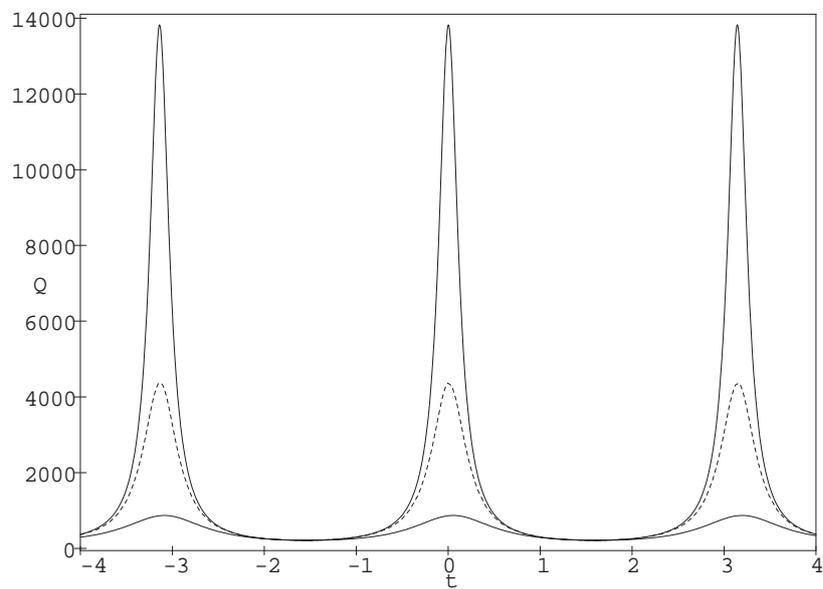


Figura 5.8: Potencial quântico para $k = 1$ correspondente às trajetórias da figura 5.7. Esta figura foi adaptada da referência (de Barros et al. 1998b).

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação abordamos o problema da singularidade inicial presente em modelos cosmológicos clássicos em um contexto quântico tentando responder de maneira precisa e consistente se estes modelos são singulares. Para isto foi necessário abordar questões de fundamentos da Mecânica Quântica convencional, que não é aplicável a um sistema quântico fechado. Exploramos a interpretação das Histórias Consistentes como uma das possibilidades, a mais conservadora, para lidar com a questão. Por fim comparamos nossos resultados com o de outra abordagem possível, a teoria de Broglie-Bohm.

A comparação entre essas duas perspectivas mostrou diferenças importantes. Em especial para o caso específico do campo escalar em FLRW plano a perspectiva de Broglie-Bohm resulta que estes modelos podem ser singulares ou não, enquanto que para a Interpretação de Histórias Consistentes, sobre condições bastante genéricas, foi demonstrado que esses Universos são sempre singulares. É possível mostrar (Holland 1995) que a Teoria de Broglie-Bohm recupera os resultados estatísticos da mecânica quântica de Copenhagen, mas para isso se pressupõe uma equação dinâmica tipo Schrödinger, o que não acontece no caso do campo escalar que possui uma equação do tipo Klein-Gordon.

Para o caso mais sofisticado de Universos dominados por radiação, demonstramos, através das Histórias Consistentes, que o Universo não é singular nos casos $k = 0$ e $k = -1$, o que também está de acordo com a abordagem de Broglie-Bohm. Sendo assim, este é, o primeiro caso conhecido de Universo não singular demonstrado na perspectiva de Histórias Consistentes. Este resultado desmistifica a idéia de que modelos de Cosmologia Quân-

tica, numa perspectiva consistente e sem lançar mão de teorias alternativas com a de Broglie-Bohm, não evitam a singularidade ao contrário do que sugeriam alguns trabalhos (Ashtekar *et al.* 2008a; Craig & Singh 2010; Ashtekar & Singh 2011a). Entretanto, para o universo fechado, com curvatura $k = +1$ as Histórias Consistentes foram inconclusivas quando avaliadas em dois momentos do tempo $t_1 \rightarrow -\infty$ e $t_2 \rightarrow +\infty$. Já a teoria de Broglie-Bohm conclui que estes Universos não são singulares. A falta de resposta da interpretação de Histórias Consistentes pode estar relacionada ao fato de que a função de onda $\Psi(R, t)$ oscila nos limites que foram considerados, $t \rightarrow \pm\infty$, já que neste modelo o Universo oscila entre fases de contração e expansão e que portanto a escolha destes instantes não tenha sido eficaz.

As duas perspectivas, a de Broglie-Bohm e Histórias Consistentes, concorrem para se estabelecer como alternativa viável à Mecânica Quântica de Copenhague, possuindo diversas particularidades. Nos modelos analisados foi possível observar que a noção de probabilidade é perdida em de Broglie-Bohm, apesar de ser possível recupera-la em modelos mais sofisticados (Falciano & Pinto-Neto 2009). Também ressaltamos que sistemas nos quais estas duas perspectivas possuam conclusões distintas são de interesse para que seja possível elaborar testes para as mesmas. Recentemente, por exemplo, foram investigadas como as trajetórias Bohmianas se comportam em um modelo cosmológico perturbado (Falciano & Pinto-Neto 2009; Vitenti *et al.* 2012). Espera-se que seja possível investigar como efeitos quânticos poderiam, em princípio, alterar observáveis cosmológicos como o espectro de perturbações da Radiação Cósmica de Fundo. De maneira que o Universo primordial apresenta um palco interessante para tentar distinguir estas teorias e interpretações.

No presente trabalho, para os casos de um Universo dominado por radiação, nos concentramos em uma condição de contorno específica $\Psi'(0) = \eta\Psi(0)$ para $\eta \rightarrow 0$. Existe outra condição de contorno de interesse, $\eta \rightarrow +\infty$, a investigação para esta condição está sendo realizada no presente momento. Também é de interesse o estudo de modelos mais sofisticados para investigar se a conclusão de que estes modelos não são singulares se sustenta.

Referências Bibliográficas

- [Adler *et al.* 1975] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer. Introduction to general relativity. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1975.
- [Ashtekar & Lewandowski 2004] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. *Background independent quantum gravity: a status report*. Classical and Quantum Gravity, vol. 21, no. 15, page R53, 2004.
- [Ashtekar & Singh 2011a] A. Ashtekar and P. Singh. *Loop quantum cosmology: a status report*. Classical and Quantum Gravity, vol. 28, no. 21, page 213001, November 2011.
- [Ashtekar & Singh 2011b] Abhay Ashtekar and Parampreet Singh. *Loop quantum cosmology: a status report*. Classical and Quantum Gravity, vol. 28, no. 21, page 213001, 2011.
- [Ashtekar *et al.* 2006a] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh. *Quantum Nature of the Big Bang*. Physical Review Letters, vol. 96, no. 14, page 141301, April 2006.
- [Ashtekar *et al.* 2006b] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh. *Quantum nature of the big bang: Improved dynamics*. Phys. Rev. D, vol. 74, no. 8, page 084003, October 2006.
- [Ashtekar *et al.* 2006c] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski and Parampreet Singh. *Quantum nature of the big bang: Improved dynamics*. Phys. Rev. D, vol. 74, page 084003, Oct 2006.
- [Ashtekar *et al.* 2008a] A. Ashtekar, A. Corichi and P. Singh. *Robustness of key features of loop quantum cosmology*. Phys. Rev. D, vol. 77, no. 2, page 024046, January 2008.
- [Ashtekar *et al.* 2008b] Abhay Ashtekar, Alejandro Corichi and Parampreet Singh. *Robustness of key features of loop quantum cosmology*. Phys. Rev. D, vol. 77, page 024046, Jan 2008.
- [Bassi & Ghirardi 2000] Angelo Bassi and GianCarlo Ghirardi. *Decoherent Histories and Realism*. Journal of Statistical Physics, vol. 98, pages 457–494, 2000.
- [Bell 2004] J.S. Bell. Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy. Collected papers on quantum philosophy. Cambridge University Press, 2004.
- [Berndl *et al.* 1996] Karin Berndl, Detlef Dürr, Sheldon Goldstein and Nino Zanghì. *Non-locality, Lorentz invariance, and Bohmian quantum theory*. Phys. Rev. A, vol. 53, pages 2062–2073, Apr 1996.
- [Blyth & Isham 1975] W. F. Blyth and C. J. Isham. *Quantization of a Friedmann universe filled with a scalar field*. Phys. Rev. D, vol. 11, pages 768–778, Feb 1975.

- [Borde *et al.* 2003] Arvind Borde, Alan H. Guth and Alexander Vilenkin. *Inflationary Spacetimes Are Incomplete in Past Directions*. Phys. Rev. Lett., vol. 90, page 151301, Apr 2003.
- [Clark *et al.* 1980] T. E. Clark, R. Menikoff and D. H. Sharp. *Quantum mechanics on the half-line using path integrals*. Phys. Rev. D, vol. 22, pages 3012–3016, Dec 1980.
- [Cohen-Tannoudji *et al.* 1986] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe. Quantum Mechanics, Volume 1. June 1986.
- [Craig & Singh 2010] D. A. Craig and P. Singh. *Consistent probabilities in Wheeler-DeWitt quantum cosmology*. Phys. Rev. D, vol. 82, no. 12, page 123526, December 2010.
- [Craig 2000] W.L. Craig. The kalam cosmological argument. Library of philosophy and religion. Wipf & Stock Pub, 2000.
- [Cushing & McMullin 1989] J.T. Cushing and E. McMullin. Philosophical consequences of quantum theory: reflections on bell’s theorem. Studies in science and the humanities from the Reilly Center for Science, Technology, and Values. University of Notre Dame Press, 1989.
- [de Barros *et al.* 1998a] J. A. de Barros, N. Pinto-Neto and M. A. Sagiuro-Leal. *The causal interpretation of dust and radiation fluid non-singular quantum cosmologies*. Physics Letters A, vol. 241, pages 229–239, May 1998.
- [de Barros *et al.* 1998b] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto and M.A. Sagiuro-Leal. *The causal interpretation of dust and radiation fluid non-singular quantum cosmologies*. Physics Letters A, vol. 241, pages 229 – 239, 1998.
- [d’Espagnat 1989] B. d’Espagnat. *Are there realistically interpretable local theories?* Journal of Statistical Physics, vol. 56, pages 747–766, 1989.
- [Dewitt & Graham 1973] B. S. Dewitt and N. Graham, editores. The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics, 1973.
- [DeWitt 1967] Bryce S. DeWitt. *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*. Phys. Rev., vol. 160, pages 1113–1148, Aug 1967.
- [Dirac 1951] P. A. M. Dirac. *The Hamiltonian form of field dynamics*. Canadian Journal of Mathematics, vol. 3, pages 1–23, 1951.
- [Falciano & Pinto-Neto 2009] F. T. Falciano and N. Pinto-Neto. *Scalar perturbations in scalar field quantum cosmology*. Phys. Rev. D, vol. 79, page 023507, Jan 2009.
- [Farhi & Gutmann 1990] Edward Farhi and Sam Gutmann. *The functional integral on the half-line*. International Journal of Modern Physics A, vol. 05, no. 15, pages 3029–3051, 1990.
- [Gell-Mann & Hartle 1990a] M. Gell-Mann and J.B. Hartle. Physical Society of Japan, 1990.
- [Gell-Mann & Hartle 1990b] M. Gell-Mann and J.B. Hartle. Santa Fe Institute Studies in the Science of Complexity. Addison-Wesley, The Advanced Book Program, 1990.
- [Gibbons & Hawking 1993] G.W. Gibbons and S.W. Hawking. Euclidean quantum gravity. World Scientific, 1993.

- [Gleason 1953] A.M. Gleason. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 6, page 895, 1953.
- [Gödel 1949] Kurt Gödel. *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation*. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, pages 447–450, Jul 1949.
- [Goldstein *et al.* 2002] H. Goldstein, C. P. Poole Jr and J. L. Safko. *Classical mechanics*, 3/e. Pearson Education, 2002.
- [Griffiths 2000] Robert B. Griffiths. *Consistent histories, quantum truth functionals, and hidden variables*. *Physics Letters A*, vol. 265, pages 12 – 19, 2000.
- [Guth 1981] A. H. Guth. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. *Phys. Rev. D*, vol. 23, pages 347–356, January 1981.
- [Halliwell 1990] J. J. Halliwell. *Introductory lectures on quantum cosmology*. March 1990.
- [Hanson *et al.* 1976] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim. *Constrained hamiltonian systems*. *Contributi C. linceo inter. sc. mat. Accademia Naz. dei Lincei*, 1976.
- [Hawking & Ellis 1973] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1973.
- [Holland 1995] P. R. Holland. *The Quantum Theory of Motion*. January 1995.
- [Hu & Wu 1987] Xing Hu and You Lin Wu. *Quantum cosmological model with a scalar field as source*. *Physics Letters A*, vol. 125, no. 8, pages 362 – 364, 1987.
- [Kuchar 1973] K. Kuchar. *Canonical Quantization of Gravity*. In *Relativity, Astrophysics and Cosmology*. Springer, 1973.
- [Lanczos 1970] C. Lanczos. *The variational principles of mechanics*. *Mathematical expositions*. Dover Publications, 1970.
- [Lapchinskii & Rubakov 1977] V. G. Lapchinskii and V. A. Rubakov. *Quantum gravitation: Quantization of the Friedmann model*. *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 33, pages 1076–1084, December 1977.
- [Lemos 1987] Nivaldo A. Lemos. *Conservation of probability and quantum cosmological singularities*. *Phys. Rev. D*, vol. 36, pages 2364–2367, Oct 1987.
- [Lemos 1996a] N. A. Lemos. *Radiation-dominated quantum Friedmann models*. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 37, pages 1449–1460, March 1996.
- [Lemos 1996b] Nivaldo A. Lemos. *Singularities in a scalar field quantum cosmology*. *Phys. Rev. D*, vol. 53, pages 4275–4279, Apr 1996.
- [Linde 1982] A. D. Linde. *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. *Physics Letters B*, vol. 108, pages 389–393, February 1982.
- [Mello 1991] E. C. C. Mello. *Um Estudo Sobre o Mito Cosmogônico: um Paralelo com a Criação da Consciência em um Enfoque de Psicologia Analítica*. Master's thesis, Fundação Getúlio Vargas, Instituto Superior de Estudos e Pesquisas Psicossociais, 1991.

- [Misner *et al.* 1973] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Número pt. 3 de Physics Series. W. H. Freeman, 1973.
- [Mukhanov 2005] V.F. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [Narlikar & Padmanabhan 1983] J. V. Narlikar and T. Padmanabhan. *Quantum cosmology via path integrals*. *Phys. Rep.*, vol. 100, pages 151–200, 1983.
- [Neumann 1996] John Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics Series. Princeton University Press, 1996.
- [Novello] M. Novello. *Do big bang ao universo eterno*. Zahar.
- [Novello 2006] M. Novello. *O que é cosmologia?* Jorge Zahar Editor Ltda, 2006.
- [Omnes 1994] R. Omnes. *The interpretation of quantum mechanics*. 1994.
- [Pauli *et al.* 1955] W. Pauli, L. Rosenfeld and V. Weisskopf. *Niels Bohr and the Development of Physics*. 1955.
- [Pearle] P. Pearle. *Open systems and measurement in relativistic quantum theory: Proceedings of the workshop held at the istituto italiano per gli studi filosofici, napoli, april 3-4, 1998*.
- [Peebles 1993] P.J.E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton Series in Physics Series. Princeton University Press, 1993.
- [Peter & Uzan 2009] P. Peter and J.P. Uzan. *Primordial cosmology*. Oxford graduate texts. Oxford University Press, 2009.
- [Philippidis *et al.* 1979] C. Philippidis, C. Dewdney and B.J. Hiley. *Quantum interference and the quantum potential*. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, vol. 52, pages 15–28, 1979.
- [Pinto-Neto & Jr. 2001] P. Pinto-Neto and R. Colistete Jr. *Graceful exit from inflation using quantum cosmology*. *Physics Letters A*, vol. 290, pages 219 – 226, 2001.
- [Pinto-Neto & Velasco 1993] N. Pinto-Neto and A.F. Velasco. *The search for new representations of the Wheeler-DeWitt equation using the first order formalism*. *General Relativity and Gravitation*, vol. 25, pages 991–1007, 1993.
- [Pinto-Neto *et al.* 2012] N. Pinto-Neto, F. T. Falciano, R. Pereira and E. S. Santini. *Wheeler-DeWitt quantization can solve the singularity problem*. *Phys. Rev. D*, vol. 86, no. 6, page 063504, September 2012.
- [Pinto-Neto 2010] N. Pinto-Neto. *Teorias e Interpretações da Mecânica Quântica*. 2010.
- [R. Arnowitt *et al.* 1962] R. R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner. *Gravitation: an introduction to current research*, chapitre *The Dynamics of General Relativity*. Wiley, 1962.
- [Rovelli 2011] C. Rovelli. *Zakopane lectures on loop gravity*. ArXiv e-prints, February 2011.
- [Rowe 1975] W.L. Rowe. *The cosmological argument*. Fordham University Press, 1975.

- [Sakurai 1985] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. 1985.
- [Schutz 1970] B. F. Schutz. *Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle*. *Phys. Rev. D*, vol. 2, pages 2762–2773, December 1970.
- [Schutz 1971] Bernard F. Schutz. *Hamiltonian Theory of a Relativistic Perfect Fluid*. *Phys. Rev. D*, vol. 4, pages 3559–3566, Dec 1971.
- [Sotiriou & Faraoni 2010] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. *$f(R)$ theories of gravity*. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pages 451–497, Mar 2010.
- [Sundermeyer 1982] K. Sundermeyer, editeur. *Constrained Dynamics*, volume 169 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1982.
- [Symon 1960] K.R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley world student series. Addison-Wesley, 1960.
- [Teitelboim 1973] Claudio Teitelboim. *How commutators of constraints reflect the spacetime structure*. *Annals of Physics*, vol. 79, no. 2, pages 542 – 557, 1973.
- [Teitelboim 1975] C. Teitelboim. *Many-time hamiltonian gravitation theory*. *Physics Letters B*, vol. 56, no. 4, pages 376 – 378, 1975.
- [Tipler 1986] F. J. Tipler. *Interpreting the wave function of the Universe*. *Phys. Rep.*, vol. 137, pages 231–275, 1986.
- [Valentini 1991] Antony Valentini. *Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem. I*. *Physics Letters A*, vol. 156, pages 5 – 11, 1991.
- [Valentini 1997] Antony Valentini. *On Galilean and Lorentz invariance in pilot-wave dynamics*. *Physics Letters A*, vol. 228, pages 215 – 222, 1997.
- [Vitenti *et al.* 2012] S. D. P. Vitenti, F. T. Falciano and N. Pinto-Neto. *Quantum Cosmological Perturbations of Generic Fluids in Quantum Universes*. ArXiv e-prints, June 2012.
- [Weinberg 2008] S. Weinberg. *Cosmology*. Cosmology. OUP Oxford, 2008.
- [Wheeler 1965] J. A. Wheeler. *Relativity, groups and topology: Lectures delivered at les houches during the 1963 session of the summer school of theoretical physics*. Gordon and Breach Science Publishers, 1965.
- [Wolfram Research 2010] inc. Wolfram Research. *Mathematica Edition: Version 8.0*. Wolfram Research, inc., Champaign, Illinois, 2010.