

*Chung Kai Cheong*

CAPTURA ELETRÔNICA E COLAPSO ESTELAR

Tese de

DOCTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1979-

- Ao Fabio

- À Maria Helena

"O significado da estrela é um problema difícil de se estabelecer. Contudo, podemos estar certos de apenas uma coisa: ou a estrela absolutamente nada representa para a Humanidade ou ela significa algo de importância tão transcendental que está além do alcance e do entendimento de qualquer ser humano".

*Kepler (1604)*

Mas talvez:

"A coisa mais incompreensível acerca do mundo é que ele é compreensível".

*Einstein (1949)*

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. T. Kodama, que me orientou nesta tese;
- Aos colegas e amigos do Departamento de Física Nuclear e Partículas do CBPF; e, em particular, aos companheiros do Grupo de Física Nuclear Teórica e Astrofísica, pelo incentivo;
- Aos membros do "staff" do Núcleo de Processamento de Dados do CBPF, pelo suporte técnico;
- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq, pelo apoio ao meu trabalho;
- À Helena de Souza Ciccarino, por esta belíssima apresentação datilográfica.

## SUMÁRIO

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| AGRADECIMENTOS .....   | iv          |
| RESUMO .....   | v           |
| LISTA DE FIGURAS .....   | vi          |
| LISTA DE TABELAS .....   | vii         |
| <br>   |             |
| <u>INTRODUÇÃO</u> .....  | 1           |
| <br>   |             |
| <u>CAPÍTULO I: COLAPSO GRAVITACIONAL E SUPERNOVAS</u> .....              | 13          |
| 1.1 - EVOLUÇÃO ESTELAR .....   | 13          |
| 1.1.1 - Prê-sequência Principal .....                                    | 15          |
| 1.1.2 - Queima de Hidrogênio: Fase de Sequência Principal .....          | 17          |
| 1.1.3 - Anãs Brancas .....   | 20          |
| 1.1.4 - Queima de Hélio: Fase de Gigante Vermelha..                      | 21          |
| 1.1.5 - Queima de Carbono e Oxigênio e de Outros Elementos Pesados ..... | 22          |
| 1.1.6 - Fase de Prê-supernova .....                                      | 24          |
| 1.1.7 - Supernovas e Curvas de Luz .....                                 | 25          |
| 1.2 - MECANISMOS DE IMPLOSAO .....                                       | 28          |
| 1.2.1 - Fotodissociação de $^{56}\text{Fe}$ .....                        | 29          |
| 1.2.2 - Captura Eletrônica .....   | 30          |
| 1.3 - MECANISMOS DE EXPLOSAO .....                                       | 33          |
| 1.3.1 - Transporte de Momentum por Neutrinos .....                       | 33          |
| 1.3.2 - Transporte de Energia por Neutrinos .....                        | 33          |
| 1.3.3 - Choque de Reflexão .....   | 34          |
| 1.3.4 - Queimas Termonucleares Explosivas .....                          | 34          |
| 1.4 - MODELOS DE PRÊ-SUPERNOVAS .....                                    | 35          |
| 1.4.1 - Modelo de Fowler-Hoyle .....                                     | 38          |
| 1.4.2 - Modelo de Chiu .....   | 40          |
| 1.4.3 - Modelo Homogêneo .....   | 40          |
| 1.5 - EVOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA EM DIREÇÃO AO COLAPSO .....                | 42          |

|  |         |
|--|---------|
| <u>CAPÍTULO II</u> - INTERAÇÃO FRACA .....                                     | 47      |
| 2.1 - FENOMENOLOGIA .....  | 47      |
| 2.2 - FONTES DE NEUTRINO .....   | 51      |
| 2.2.1 - Captura Eletrônica .....   | 52      |
| 2.2.2 - Teoria Grossa .....  | 57      |
| 2.2.3 - Emissão Retardada de Neutrons .....                                    | 63      |
| 2.2.4 - Expressões Aproximadas para as Taxas .....                             | 64      |
| 2.2.5 - Energia Média dos Neutrinos na Captura Eletrônica .....                | 65      |
| 2.2.6 - Taxa de Captura a Temperatura Finita .....                             | 67      |
| 2.3 - OPACIDADE DE NEUTRINOS .....   | 69      |
| 2.3.1 - Média de Rosseland .....   | 73      |
| 2.3.2 - Correntes Neutras .....  | 75      |
| 2.3.3 - Principais Processos de Neutrino .....                                 | 76      |
| 2.3.4 - Seções de Choque .....   | 78      |
| <br><u>CAPÍTULO III</u> - REAÇÕES NUCLEARES .....                              | <br>84  |
| 3.1 - MASSAS NUCLEARES .....   | 84      |
| 3.2 - OUTRAS REAÇÕES NUCLEARES .....   | 88      |
| 3.3 - EQUAÇÕES DE REAÇÃO NUCLEAR .....   | 92      |
| <br><u>CAPÍTULO IV</u> - EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA COM REAÇÕES NUCLEARES ..... | <br>98  |
| 4.1 - HIDRODINÂMICA .....  | 98      |
| 4.2 - MÉTODO DE CÁLCULO .....  | 106     |
| 4.3 - MODELO SIMPLIFICADO .....  | 108     |
| <br><u>CAPÍTULO V</u> - EQUAÇÃO DE ESTADO .....                                | <br>110 |
| 5.1 - ASPECTOS PRINCIPAIS .....  | 110     |
| 5.2 - GÁS DE ELÉTRONS .....  | 113     |
| 5.3 - GÁS SEMI-DEGENERADO .....  | 117     |
| 5.4 - GÁS DE NEUTRONS .....  | 119     |
| 5.5 - EQUAÇÃO DE ESTADO DA MATÉRIA .....                                       | 120     |
| <br><u>CAPÍTULO VI</u> - RESULTADOS E DISCUSSÃO .....                          | <br>124 |
| 6.1 - TAXAS .....  | 124     |
| 6.2 - EQUAÇÃO DE ESTADO E COMPOSIÇÃO QUÍMICA .....                             | 126     |

|   |     |
|---|-----|
| 6.3 - CAPTURA ELETRÔNICA E COLAPSO .....                                    | 130 |
| 6.4 - EVOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA .....   | 134 |
| 6.5 - CONCLUSÕES .....  | 140 |
| <br>  |     |
| <u>APÊNDICE A</u> - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA ..... | 141 |
| A.1 - EQUAÇÕES DIFERENÇAS .....   | 141 |
| A.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO .....   | 146 |
| A.3 - ESTABILIDADE DAS EQUAÇÕES DIFERENÇAS .....                            | 147 |
| <br>  |     |
| <u>APÊNDICE B</u> - TEORIA GROSSA .....                                     | 150 |
| <br>  |     |
| <u>REFERÊNCIAS</u> .....  | 156 |

## LISTA DE FIGURAS

| <u>Fig.</u>  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 1.1.7.1. - Curvas de luz das supernovas de Tycho Brahe e de Kepler   | 28          |
| 1.4.1.2. - Região de fotodissociação e evolução quase-estática   | 39          |
| 1.4.1.3. - Distribuição de densidades no modelo isotérmico (escalas à esquerda e abaixo) e no modelo politrópico (escalas à direita e acima) ..... | 39          |
| 1.4.3.4. - Modelo de Chiu, com caroço isotérmico de Fe e envoltória politrópica de H .....   | 42          |
| 2.1.1. - Decaimento beta nuclear, com três tipos de transições distintos .....   | 48          |
| 2.1.2. - Captura eletrônica pelo núcleo (Z,A) .....  | 50          |
| 2.2.5.3. - Energias relevantes na captura eletrônica .....   | 65          |
| 3.3.1. - Rede de núcleos para reações nucleares .....  | 93          |
| 3.3.2. - Núcleo (Z,A) com seus vizinhos .....  | 94          |
| 5.1.1. - Plano temperatura-densidade para o gás de elétrons ....   | 112         |
| 6.1.1. - Taxas de captura eletrônica do Fe, Mn, Cr, V e Ti .....   | 125         |
| 6.2.2. - Equação de estado semi-degenerado $P_{sd}$ e equação de estado dada pela soma de gás perfeito e gás degenerado ..                         | 127         |
| 6.3.1. - Variações da densidade para 3 valores do parâmetro $\chi$ ..  | 131         |
| 6.3.2. - Abundâncias dos 3 primeiros elementos da família A=56 .   | 132         |



|  |     |
|--|-----|
| 6.3.3. - Plano $\rho$ -T com os percursos correspondentes aos 3 valores de $\chi$ .....                                      | 133 |
| 6.4.1. - Variação de densidade em relação ao tempo para as zonas 1, 11 e 31 .....  | 135 |
| 6.4.2. - Velocidades radiais das zonas 6, 16 e 36 durante a evolução quase-estática .....                                    | 137 |
| 6.4.3. - Oscilações da velocidade para zonas de 0.8% da massa (curva 1), 26% (curva 2), 78% (curva 3) e 100% (curva 4) ..... | 138 |
| 6.4.4. - Distribuições de densidade e de velocidade .....  | 138 |
| 6.4.5. - Distribuições de temperatura e pressão .....  | 139 |
| 6.4.6. - Evolução quase-adiabática no plano $\rho$ -T .....  | 139 |
| B.1. - Os retângulos representam os níveis contínuos do cárcão de protons (p) e de neutrons (n) .....                        | 151 |

LISTA DE TABELAS

| <u>Tab.</u>   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 5.3.1 - Integrais de Fermi para 3 valores diferentes de $\eta$ . Os números entre parênteses denotam potências de 10 .....  | 119         |
| 6.2.1 - Valores de $dE/dV$ e $dE/dT$ para $T_g = 1$ . Os números entre parênteses denotam potências de 10 .....   | 128         |
| 6.4.1 - Valores das energias por partícula para 3 camadas, calculados no instante $t = 0.13$ seg, com $E_c$ , $E_g$ e $E_t$ denotando energias cinética, gravitacional e térmica, respectivamente ..... | 136         |

## RESUMO

A fim de investigar o papel da captura eletrônica no fenômeno de colapso gravitacional de pré-supernovas, foi realizado um cálculo hidrodinâmico, em que se acoplou uma rede de equações de captura, de decaimento e de reações nucleares. Adotou-se um modelo simplificado de estrela (modelo homogêneo) e utilizou-se a aproximação de gás ideal de Fermi para o mar de elétrons e neutrons livres. O problema da transferência de energia dos neutrinos foi curto-circuitado, através da introdução de um parâmetro. Contudo, é apresentado também o tratamento não-simplificado, até o ponto de evolução quase-estática em direção ao colapso, visto que o tratamento mais completo é inexecutável no momento apenas por questão de tempo de cálculo.

As taxas de captura e de decaimento beta, bem como as de emissão retardada de neutrons, foram calculadas pela chamada teoria grossa de decaimento beta, ao passo que as taxas das demais reações foram determinadas pelas teorias usuais.

São apresentados os resultados para uma estrela de  $3.5 M_{\odot}$ , com densidade de  $2 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$  e temperatura de  $10^9 \text{ }^{\circ}\text{K}$ . Resultados preliminares do cálculo não-simplificado também são mostrados, à guisa de comparação.

## INTRODUÇÃO

Colapso gravitacional de caroços estelares, assunto deste trabalho, se enquadra num assunto maior, que é o de Modelos Estelares e Evolução Estelar.

Modelos Estelares e Evolução Estelar constituem hoje objeto importante de pesquisa para dois ramos independentes da Ciência: a Astrofísica Nuclear e a Astronomia. Evidentemente os enfoques são diferentes: a Astrofísica Nuclear utilizando, como ferramenta, a Física Nuclear, e a Astronomia coletando dados observacionais, como luminosidade estelar, massa, espectros, etc. Contudo, não obstante isso (ou graças a isso), elas se completam, da mesmíssima forma como se completam a Física teórica e a Física experimental.

Em termos esquemáticos, temos:

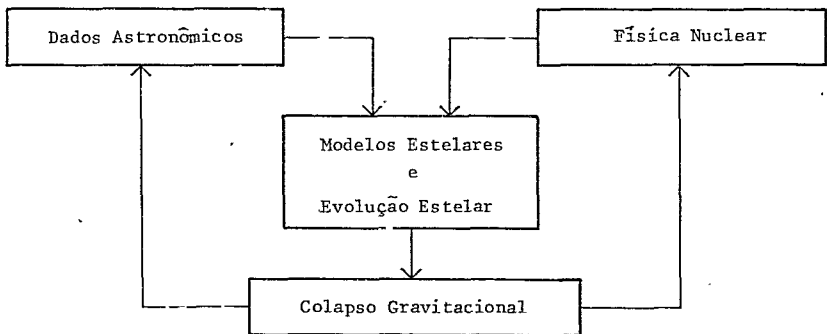


Figura 0.1 - Modelos Estelares e Colapso Gravitacional.

O nosso trabalho se situa no lado direito da Fig. 0.1, dentro do campo da Astrofísica Nuclear. É desnecessário notar que estas investigações, tal como mostra a Fig. 0.1, tem em alguns casos realimentação. Em outras palavras, a partir da Física Nuclear, por exemplo, testam-se modelos estelares e calcula-se a evolução estelar. Os resultados são analisados e podem servir de base para a Física Nuclear ter melhor conhecimento de suas próprias leis e, assim, propor novas teorias. Estas novas teorias conduzem a novos modelos, etc, até chegar a resultados mais próximos da observação.

Convém, em primeiro lugar, levantar, a título de justificação filosófica, uma questão afinal inevitável. As leis físicas, obtidas do estudo de fenômenos do microcosmos (fenômenos nucleares, atômicos e moleculares), serão igualmente aplicáveis aos fenômenos do macrocosmos, inclusive aqueles em que a densidade e a temperatura atingem valores extremos, quase inimagináveis em termos terrestres ?

Em princípio, nada nos garante que sim. Mas, é claro que a Astrofísica em geral e a Astrofísica Nuclear em particular, devido à absoluta falta de experimentação e à quase impossibilidade de medidas e observações diretas, não de ter como ponto de partida um conjunto de extrapolações e modelos. Tais extrapolações e modelos, obviamente, tem que ser feitos tão razoáveis e seguros quanto o conhecimento teórico e observacional possam permitir.

Com efeito, não há outra alternativa senão trabalhar com o que se tem. Por isso, como hipótese de trabalho, postula-se em Astrofísica a validade da extrapolação das leis físicas, tais como nós as conhecemos, para o Universo inteiro.

Esta hipótese não é trivial, como não é trivial que a 2ª lei da Termodinâmica seja aplicável em todos os fenômenos da Natureza, nem que as leis da Mecânica Quântica funcionem a condições extremas (por exemplo, densidade da ordem de  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, temperatura ao redor de  $10^9$  °K, condições essas que são encontradas em estrelas de nêutron, ou ainda densidades maiores, como as encontradas durante o "Big Bang"). Mais especificamente, fazendo a extrapolação e admitindo a sua validade, evitamos discutir problemas complexos como os mencionados acima, bem como outros, a saber: continuidade do espaço-tempo, efeitos quânticos na gravitação, etc<sup>(1)</sup>.

Cabe agora a pergunta: o que é colapso gravitacional? Em resumo, trata-se do seguinte: no estágio final de sua evolução, uma estrela, tendo massa maior que um certo valor crítico, entra em instabilidade gravitacional, e a estrela começa a se contrair rapidamente. Quando a velocidade de contração se torna da ordem da velocidade de queda livre, dizemos então que a estrela está colapsando.

O colapso (em linguagem mais específica, a implosão) marca o início do processo de "morte" catastrófica da estrela, que se completa em geral com uma violenta explosão de suas camadas mais externas. Tais explosões, devido à alta luminosidade, foram batizadas por Baade e Zwicky, em 1934, como sendo supernovas, isto é, estrelas mais brilhantes que as novas.

Segundo teorias correntes, das explosões de supernova podem resultar tanto pulsares (estrelas de nêutron girantes), como buracos negros (singularidades na métrica de Schwarzschild), ou mesmo desintegração completa da estrela, conforme o valor de certos parâmetros, tais como a massa e a densidade central da

estrela, a composição química, etc.

Com efeito, depois da descoberta dos pulsares em 1968 por Hewish et al. (2) (Hewish e Bell ganharam o Nobel de Física de 1976 por causa disso), as pesquisas em torno do colapso gravitacional e das explosões de supernova ganharam em ímpeto e em quantidade, ainda mais, favorecidas com o advento de novas técnicas em Física experimental e em Astronomia, na faixa ótica, rádio, raio-X e infravermelha.

Além destas, existem outras razões também que justificam o grande interesse despertado pelas explosões de supernova. De fato, ao que tudo indica, é nelas que encontramos a realização mais efetiva das condições físicas extremas -- diríamos, autênticos "*laboratórios cósmicos*". E nestes superlaboratórios, há indícios de que ocorrem muitos fenômenos físicos que não são observados normalmente na Terra, tais como a síntese de elementos pesados por captura rápida de neutrons, a produção de raios cósmicos de altíssima energia, a formação de estrelas de neutron, etc, e que podem representar um papel importante para um melhor esclarecimento quanto à abundância de elementos pesados no sistema solar e quanto à distribuição de matéria no Universo, e (por que não ?) para uma compreensão melhor da própria origem do Universo.

A propósito, quanto a este último item, é bem conhecido que a teoria do "*Big Bang*" de Gamow para a origem da matéria primordial, embora consistente com as equações de Einstein (solução de Friedmann, de um Universo em expansão) fica bem mais achegada às posições dos teólogos que às dos cientistas, o que não deixa de ser para estes um pouco desconcertante. A teoria do "*estado estacionário*" de Hoyle, depois da descoberta no Uni-

verso da radiação de fundo de  $2,7 \text{ }^{\circ}\text{K}$  por Penzias e Wilson em 1965<sup>(3)</sup> (o que deu a eles também o Nobel de Física em 1978), confirmando o Universo em expansão de Friedmann, foi praticamente deixada de lado.

Mais recentemente, explosões de supernova foram utilizadas para explicar a origem do sistema solar e a formação de alguns tipos de "clusters" globulares<sup>(4)</sup> (conjunto de estrelas situadas no halo galáctico).

A idéia de estrelas colapsadas data de 1932, com Landau, que levantou a hipótese de que determinadas estrelas, após a queima de seu combustível nuclear, entram em colapso e, vão formar caroços de matéria superdensa fria, espécie de núcleos gigantes.

Mas só em 1939, com Oppenheimer e Volkoff<sup>(5)</sup>, é que se procedeu ao primeiro cálculo de equilíbrio hidrostático da matéria catalizada superdensa. Eles aplicaram, em cima de um gás degenerado de neutrons, as equações de equilíbrio hidrostático, derivadas da Relatividade Geral por Tolman, e encontraram que caroços com massa maior que  $3/4 M_{\odot}$  deveriam se colapsar. Em outras palavras, para caroços com massa além desse limite, a pressão de gás degenerado de neutrons é sempre insuficiente para contrabalançar a pressão gravitacional.

Em 1957, Burbidge, Burbidge, Fowler e Hoyle<sup>(6)</sup> propuseram um mecanismo capaz de provocar a implosão: a fotodissociação do  $^{56}\text{Fe}$ . Levantaram também, neste mesmo trabalho, a idéia de que a própria implosão possa conduzir à explosão de supernova. Anos mais tarde, em 1964, inspirando-se no processo Urca de Gamow e Schoenberg, Bahcall determinou a taxa de captura eletrônica no contínuo, visando à sua aplicação em colapso estelar. A



captura eletrônica passou, então, a ser um forte candidato ao mecanismo de implosão. Em seguida, modelos de pré-supernovas (estrelas no estágio imediatamente anterior à implosão) foram propostos. Fowler e Hoyle, em 1964, lançaram o modelo de gás politrópico, e Chiu, em 1966, o modelo de caroço isotérmico.

Finalmente, o aspecto dinâmico do colapso foi investigado pela primeira vez por Colgate e White, em 1966<sup>(Z)</sup>. É bem sabido que o neutrino, uma vez formado pelos processos de interação fraca que ocorrem no interior da estrela, escapam livremente, graças a seu grande livre percurso médio. Colgate e White, entre outras coisas, tiveram o mérito de propor que a matéria do caroço estelar possa ficar opaca a neutrinos nos instantes finais da implosão.

As principais dificuldades do cálculo hidrodinâmico foram (e algumas continuam sendo) as seguintes:

- 1) - o método numérico de resolver as equações da Hidrodinâmica;
- 2) - a equação de estado da matéria e a composição química;
- 3) - a equação de transporte de energia por neutrinos;
- 4) - as taxas dos processos de interação fraca.

Em relação a estas dificuldades, Colgate e White fizeram, na mesma ordem, o seguinte:

- 1) - utilizar o método de aproximação por equações de diferenças finitas — aproximação linear — tal como desenvolvida por von Neumann e Richtmeyer;
- 2) - pegar uma equação de estado, dada em tabela no plano temperatura-densidade;
- 3) - simular a equação de transporte de neutrinos, através de um processo simples a que chamou de "deposição" de neutrinos

nas camadas mais externas da estrela;

- 4) - lançar mão de expressões aproximadas para as taxas dos processos mais importantes, tal como a captura eletrônica.

Eles chegarão à conclusão de que estrelas, tanto de massas pequenas ( $\geq 1.5 M_{\odot}$ ) quanto de massas grandes ( $\sim 10 M_{\odot}$ ), implodem da mesma forma, quer a causa seja a fotodissociação do ferro, quer seja a captura eletrônica.

Imediatamente após o trabalho pioneiro de Colgate e White, Arnett publicou dois trabalhos, um em 1966 e outro em 1967<sup>(8)</sup>, em que procurou melhorar a aproximação da deposição. Com efeito, ele admitiu que o livre percurso médio dos neutrinos é muito menor que a dimensão linear em que as grandezas macroscópicas tem variações sensíveis, e introduziu a aproximação da difusão para o fluxo de neutrinos, construída em analogia com a difusão de fótons.

Arnett fez também os cálculos, para efeito comparativo, usando o modelo de Chiu. Contudo, na determinação da opacidade média de Rosseland, ele levou em conta apenas o espalhamento elétron-neutrino. Seus resultados mostram que, sem incluir a opacidade de neutrino, não pode haver ejeção da envoltória, o que está em concordância com Colgate e White. Mostrou ainda que implosão só é acompanhada de explosão de supernova, se a massa estelar for suficientemente pequena, da ordem de  $2 M_{\odot}$ . Neste caso, fica um caroço remanescente de neutron, quente (ao contrário do resultado de Colgate e White, que o prevê frio), que, após o esfriamento, pode tornar-se uma estrela de neutron.

Todos os trabalhos citados acima ficaram apenas dentro da aproximação Newtoniana. Em 1967, Schwartz<sup>(9)</sup> fez um tratamento relativístico geral do problema do colapso gravitacio -

nal. Foi mostrado também que; na implosão, o aquecimento do material pelos neutrinos provenientes do caroço de neutron quente é suficiente para explodir a envoltória. Seus resultados mostram que os efeitos relativísticos não são importantes.

Wilson<sup>(10)</sup>, em 1971, tratou também o colapso no contexto da Relatividade Geral, porém investigou o fluxo de neutrinos com mais detalhes (empregou uma equação de transporte de Boltzmann com métrica apropriada). Chegou à conclusão de que a condução de calor por neutrinos não ejeta material em nenhum caso de estrela em colapso.

Ainda à luz da Relatividade Geral, mas sob um enfoque totalmente diferente (de teoria de campo), há trabalhos recentes<sup>(11)</sup> que tratam do colapso gravitacional e da estabilidade de sistemas constituídos de nuvens de partículas, submetidas simultaneamente à gravitação e a um campo escalar neutro, repulsivo, de curto alcance. Estes estudos, contudo, estão mais orientados para a formulação de modelos de partículas elementares.

Quanto ao estudo das explosões de supernova, uma fonte séria de dificuldades provem do fato de que a quantidade de dados observacionais confiáveis é extremamente pequena.

Para se ter uma idéia, a frequência de explosões de supernovas numa "galáxia média" é, por estimativas mais recentes, uma vez em cada 100 anos ! Em nossa galáxia, há registro de apenas 6, com uma taxa de explosão estimada em uma para cada 50 anos<sup>(12)</sup>.

Como se isso não bastasse, existe ainda o problema insanoável da imprecisão que acompanha as medidas das grandezas astronômicas de interesse, a saber: a distância ao Sol, magnitude absoluta, massa, etc.

A baixa estatística e a fraca confiabilidade de algumas medidas essenciais, aliadas às dificuldades computacionais (em termos de tempo de cálculo e precisão das aproximações às equações da Hidrodinâmica), constituem no momento uma das barreiras mais sérias, e impõem um ritmo lento ao avanço da teoria.

Apesar desta gama de dificuldades, convém ressaltar que o estudo e a investigação das explosões de supernova não são simples atividade especulativa ou discussão acadêmica. Muito pelo contrário, representam um esforço válido e muitas vezes recompensado de aproveitar tanto quanto possível estes "laboratórios cósmicos" para (quem sabe?) tentar ampliar o pouco conhecimento que temos do Universo.

Como exemplos de algum progresso nesta área, citamos: a identificação dos pulsares com estrelas de neutron girantes; a origem dos raios cósmicos em explosões de supernova; a explicação da curva de abundância de elementos pesados (além do  $^{56}\text{Fe}$ ) através de nucleosíntese por processo-r (processo de captura rápida de neutrons) em supernovas; estimativas da idade do Universo através da meia-vida de elementos "relógios", como por exemplo, o renio e o ósmio (nucleocosmocronologia)<sup>(13)</sup>; buracos negros como novos e importantes elementos na distribuição de matéria no Universo; identificação dos quasares, etc.

Um ponto relevante que até hoje não recebeu um tratamento adequado é o referente ao papel da interação fraca no processo do colapso. Mais especificamente, qual a importância da captura eletrônica para o colapso estelar?

As conclusões, obtidas por Colgate e White e por Arnett, são no mínimo insatisfatórias, visto que eles trataram a captura eletrônica em bases bastante intuitivas, usando uma es-

pêcie de "simulação" ao processo real. A fim de se conseguir um resultado confiável, é inevitável que se realize um trabalho abrangendo os seguintes pontos:

- 1) seguir, a cada passo do processo hidrodinâmico, as reações de captura eletrônica. Isto implica em calcular as taxas de reação de captura de todos os núcleos envolvidos;
- 2) determinar a taxa de emissão de energia por neutrinos, em cada etapa do cálculo hidrodinâmico;
- 3) calcular o peso molecular médio por elétron como função tanto da Hidrodinâmica quanto da captura eletrônica.

Outro aspecto importante que a literatura deixou ainda aberta é o seguinte: Colgate e White, e Arnett trataram a equação de transporte de energia por neutrinos no limite de opacidade infinita e de opacidade nula (transparência completa), respectivamente. A região de transição entre transparência total (perda de energia local) e opacidade infinita tem que ser investigada com maior cuidado.

Por outro lado, a descoberta recente de correntes neutras na interação fraca obriga que se levem em conta outros processos que dão contribuição para a opacidade, tal como o importante processo de espalhamento coerente dos núcleos.

Sato<sup>(14)</sup>, com efeito, realizou um cálculo à base da teoria de Weinberg de interação fraca e chegou a um resultado que põe em xeque o papel até então incontestável da captura eletrônica no processo de colapso estelar. Segundo seus cálculos, o caroço se torna opaco a neutrinos antes que a captura eletrônica pelos núcleos se processe apreciavelmente, de modo que os neutrinos ficam confinados no caroço. Em consequência, a neutro

nização dos núcleos é fortemente inibida pelo mar degenerado de neutrinos que se forma e pelas capturas de neutrinos ( processo inverso à captura eletrônica).

Entretanto, tudo indica que o problema, longe de ficar esclarecido, está apenas a exigir um cálculo mais apropriado. Diante disso, resolvemos investigar o colapso gravitacional de caroços estelares, à luz das novas teorias em interação fraca e em Física Nuclear, e fazer o acoplamento das equações da Hidrodinâmica com as equações de reação nuclear. Nosso objetivo é discutir o papel da interação fraca em geral e da captura eletrônica em particular no fenômeno de colapso estelar. Infelizmente, surge aqui um problema seríssimo, embora de ordem prática: o acoplamento completo da Hidrodinâmica com equações de reação nuclear requer tempo de cálculo extremamente grande, e isto constitui no momento uma forte condição de contorno.

Como o problema de transporte de neutrinos não tem ainda um tratamento de fácil utilização e tendo em vista as limitações de tempo de cálculo, escolhemos então um "approach" diferente para atacar o problema. Partimos de um modelo simplificado (o chamado modelo homogêneo, de uma só camada), e curto-circuitamos a questão do fluxo de neutrinos, mediante a introdução de um parâmetro apropriado. Graças a isto, tornamos exequível o acoplamento que desejamos. É claro que apenas aspectos qualitativos podem ser discutidos.

Contudo, por questões de unidade e completicidade, apresentamos o tratamento de modo completo, chamando a atenção, quando for o caso, para as simplificações feitas. Por fim, cabe lembrar que esta nossa tese não tem pretensão de dar resultados

definitivos:-- a palavra final -- nos tópicos que resolvemos discutir e investigar. A razão, como já afirmamos em algum ponto acima e vale repetir, é que o campo da Astrofísica é bastante minado de incertezas, de parâmetros ajustáveis, de modelos muitas vezes "ad hoc", de aproximações supersimplistas que talvez deixem escapular algumas alternativas importantes. A nossa intenção é dar uma contribuição no sentido de estreitar estas incertezas, fazendo uma investigação mais detalhada e, tanto quanto as condições atuais nos permitem, com melhor aproximação.

O esquema da tese é o seguinte:

No Capítulo I, começamos com a apresentação do colapso gravitacional como ponto final de evolução estelar e, em seguida, fazemos um breve histórico das supernovas, bem como uma discussão dos mecanismos de implosão e explosão de supernovas. Finalizamos o Capítulo I, discutindo os modelos de pré-supernovas e a evolução quase-estática em direção ao colapso. O tópico importante de interação fraca é tratado no Capítulo II. O Capítulo III é reservado para discutir as equações de reação nuclear. No Capítulo IV, introduzimos as equações da Hidrodinâmica Newtoniana com reações nucleares. A equação de estado é apresentada no Capítulo VI. Alguns apêndices (um sobre métodos numéricos e outro sobre teoria grossa da captura eletrônica) completam o nosso trabalho.

## CAPÍTULO I

### COLAPSO GRAVITACIONAL E SUPERNOVAS

#### 1.1 - EVOLUÇÃO ESTELAR

O colapso gravitacional nada mais é que o princípio do fim de um processo evolutivo estelar. Um fim que é, em geral, caracterizado por uma explosão de supernova. Cabe, então, a pergunta: como uma estrela nasce, cresce e morre? Em outras palavras, quais os processos físicos importantes que determinam a sua linha evolutiva ao longo do ciclo vital?

Antes de ensaiar uma resposta, devemos lembrar que a evolução estelar tem dois parâmetros críticos: a massa da estrela e a composição química. A razão é fácil de se entender. À medida que a estrela evolui, os elementos podem se tornar degenerados e, quando isso acontece (potencial químico > energia térmica), há uma modificação radical na equação de estado, que passa, então, a não depender mais da temperatura, ficando apenas função da densidade. Em consequência, a própria estrutura estelar sofre mudanças.

O ponto importante é que esta degenerescência dos elétrons começa em fase de evolução mais jovem quanto menor é a massa da estrela.

Isto pode ser visto através do seguinte argumento. As



estrelas mais massivas têm um tempo de evolução mais curto (são mais jovens, pertencem à População I), ao passo que as menos massivas apresentam um tempo mais longo (estrelas mais velhas, de População II). Como o tempo de queima de combustível nuclear é dado por  $t \propto M/L$ , onde  $M$  e  $L$  são, respectivamente, a massa e a luminosidade da estrela, então, o fato de as estrelas menos massivas terem um tempo maior de evolução significa que elas têm uma luminosidade relativamente muito mais baixa. E isto implica justamente que o gás se encontra na região degenerada. Assim, por exemplo, para estrelas massivas ( $\geq 15 M_{\odot}$ ), a degenerescência pode ser desprezada em toda a extensão da vida ativa da estrela. O mesmo, entretanto, não pode ocorrer com estrelas menos massivas ( $< 0.5 M_{\odot}$ ), para as quais a degenerescência já se torna apreciável mesmo na fase inicial da sequência principal. Além disso, a pressão de radiação, quando comparada com pressão de gás perfeito, não pode ser desprezada no caso de estrelas com massa maior que  $5 M_{\odot}$ .

Por outro lado, Chandrasekhar <sup>(15)</sup> resolveu uma questão importante para a evolução estelar que é relacionada com a massa. Em essência, é o seguinte: até que valor da massa, o colapso de uma estrela de matéria fria (catalizada) pode ser evitado pela pressão de um gás degenerado de elétrons ?

O resultado que ele obteve foi:

$$M_{Ch} = 5.75 M_{\odot} / \mu_e^2 \quad (1.1.1)$$

onde  $\mu_e$  é o peso molecular médio por elétron e é dado por

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i} \quad (1.1.2)$$

sendo  $X_i$  a fração em massa do elemento  $i$ . Para uma composição química dada por  $^{56}\text{Fe}$  puro,  $\mu_e = 2.15$ , fornecendo  $M_{\text{Ch}} = 1.24 M_{\odot}$ . Havendo predominância de elementos leves, em que neste caso  $\mu_e \rightarrow 2$ , então,  $M_{\text{Ch}} \rightarrow 1.44 M_{\odot}$ .

Deste modo, é evidente que as linhas de evolução vão depender de qual categoria de estrela (em termos de massa) estamos tratando.

Voltando à pergunta inicial, e até onde atualmente se pode responder, as idéias básicas são as seguintes:

Evidentemente, tudo começa com o "Big Bang" — o instante zero do tempo. Após a Grande Explosão, formam-se nuvens de gás difuso, rarefeito, constituído principalmente de hidrogênio, com pequena percentagem de elementos mais pesados, como hélio, carbono, nitrogênio e oxigênio. Tais nuvens são chamadas de proto-estrelas.

### 1.1.1 - Pré-Sequência Principal

O nascimento da estrela ocorre quando não-homogeneidades na distribuição da matéria dão origem a instabilidades gravitacionais que provocam, por sua vez, a condensação do gás. Em seguida, devido à autogravitação, a estrela se contrai. Consequentemente, ela esquentando e, ao mesmo tempo, começa a irradiar energia através das camadas mais externas (tudo isso, às custas da energia gravitacional liberada). Quando a temperatura atinge o valor limiar de ionização do hidrogênio (13 eV), o gás se ioniza e os elétrons livres passam a exercer uma pressão que vai se opor à contração.

Este período de infância da estrela, conhecido também

como estágio de pré-sequência principal, se caracteriza por dois aspectos importantes:

- 1) - gravitação é a única fonte de geração de energia;
- 2) - a temperatura ainda é insuficiente para provocar o início das reações termonucleares.

Durante este estágio, a evolução da estrela se processa como se fosse através de uma sequência de estados de equilíbrio hidrostático. O argumento para isso é o seguinte: a escala de tempo hidrodinâmico, dada por

$$t_h \approx \sqrt{R/g} \quad (1.1.1.3)$$

com  $g = GM/R^2$  onde  $G$  denota a constante gravitacional,  $\bar{e}$  é muito menor que a escala de tempo térmico, dada por:

$$t_t \approx \frac{E_t}{L} \quad (1.1.1.4)$$

No caso do Sol, por exemplo, tomando os respectivos valores para o raio  $R$ , a massa  $M$ , a energia térmica  $E_t$  (energia térmica por partícula  $\approx 3 kT$ , com  $T \approx 10^7$  °K) e a luminosidade  $L$ , obtemos:

$$t_h \sim 10^3 \text{ seg} \quad \text{e} \quad t_t \sim 10^7 \text{ seg}$$

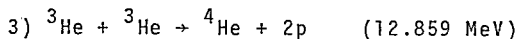
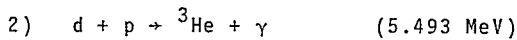
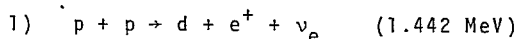
o que justifica, com efeito, a hipótese acima.

A fase de pré-sequência principal tem duração relativamente curta: cerca de  $10^7$  anos para estrelas com massa da ordem da massa do Sol. Ao final desta etapa, a densidade já chega a  $1 \text{ g/cm}^3$  e a temperatura atinge a valores tão elevados ( $\sim 10^7$  °K) que começa a provocar a fusão do hidrogênio.

1.1.2 - *Queima do Hidrogênio: Fase de Sequência Principal*

Começa, agora, um novo período de vida na estrela - a sua adolescência - correspondendo ao estágio de sequência principal no diagrama de Hertzsprung-Russel (luminosidade versus temperatura)<sup>(16)</sup>. A fase de sequência principal é marcada pela queima do hidrogênio, isto é, pela transformação do hidrogênio em hélio.

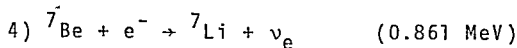
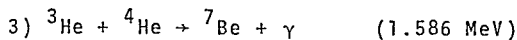
Esta transmutação é feita através das conhecidas cadeias pp. A primeira cadeia pp (chamada de ppI) é dada por<sup>(17)</sup>:



Os números em parêntesis são os valores Q das respectivas reações, calculadas (em massas atômicas) para as condições iniciais apropriadas ao Sol.

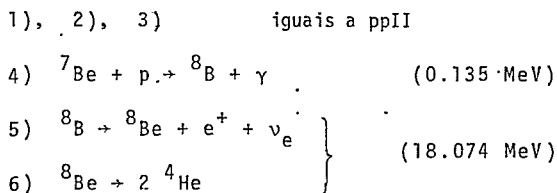
Quando  ${}^4\text{He}$  se torna suficientemente abundante e a temperatura suficientemente alta, a cadeia ppII passa a ser competitiva:

1) e 2) iguais a ppI



Como o  ${}^7\text{Be}$ , dependendo das seções de choque relativas, pode capturar tanto elétron quanto próton, temos mais uma

alternativa, a cadeia ppIII:



Em cada uma destas cadeias de fusão, libera-se uma quantidade de energia extremamente grande ( $\approx 20$  MeV), cerca de 1% da energia de repouso das partículas reagentes.

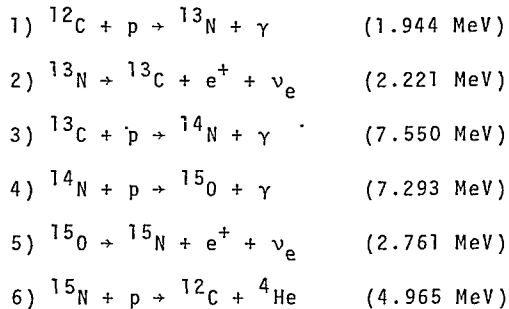
Em relação às cadeias pp, existe um ponto ainda não satisfatoriamente resolvido. Trata-se do seguinte:

Experiências recentes para detectar o fluxo de neutrinos do Sol através da reação  ${}^{37}\text{Cl}(\nu_e, e^-){}^{37}\text{Ar}$ , forneceram resultados bem discrepantes dos valores teóricos, calculados a partir da teoria de evolução solar (o valor teórico para a taxa de contagem de átomos de  ${}^{37}\text{Ar}$  é cerca de  $9 \times 10^{-36}$  átomos por segundo por átomo de  ${}^{37}\text{Cl}$ , o que corresponde a aproximadamente 6 vezes o valor experimental).

A fim de explicar esta discrepância, Fetisov e Kopysov<sup>(18)</sup> sugeriram a existência de uma ressonância no sistema  ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$  (nível  $0^+$  no  ${}^6\text{Be}$  justamente acima do limiar de  ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$ ), de modo que isto poderia aumentar a taxa de reação da cadeia ppI e, em consequência, reduzir o fluxo de neutrinos provenientes das cadeias ppII e ppIII. Contudo, Barker<sup>(19)</sup> apresentou fortes argumentos, mostrando que a existência de tal ressonância é muito improvável. A razão é que, para efetivamente explicar o baixo fluxo de neutrinos solares, seria necessário admitir valores extremos para várias propriedades do nível  $0^+$  do

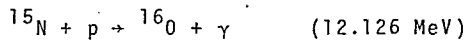
${}^6\text{Be}$  (por exemplo, uma largura extremamente pequena  $\leq 1$  eV).

No caso de estrelas com mistura de elementos mais pesados, como parece ser o caso da maioria das estrelas, deve-se levar também em conta um outro processo, bastante competitivo, de queima de hidrogênio: o chamado ciclo CNO, proposto independentemente em 1938 por Bethe e von Weizsacker <sup>(20)</sup>. O ciclo CNO é dado por:

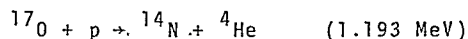
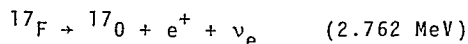
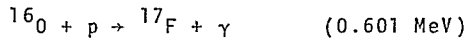


O  ${}^{12}\text{C}$  exerce meramente um papel de catalizador.

Existindo desde o início oxigênio, o que pode acontecer se:



Então:



o que vai aumentar a abundância de  ${}^{14}\text{N}$ .

Convém ressaltar que as cadeias pp e o ciclo CNO operam simultaneamente na maioria das estrelas durante a fase de

sequência principal. A temperatura e as abundâncias relativas de hidrogênio e de núcleos de carbono e nitrogênio é que vão determinar qual será o processo dominante.

Uma rápida estimativa nos fornece o tempo que uma estrela gasta nesta etapa. Admitindo que no caroço é que se encontra temperatura suficientemente alta para reações termonucleares, então, colocando massa do caroço igual a  $0.1 M$ , e energia liberada por reações termonucleares igual a  $0.01 Mc^2$ , o tempo de vida na sequência principal é dado simplesmente por:

$$t \approx \frac{E_N}{L} = 0.01 c^2 \times 0.1 \frac{M}{L} \quad (1.1.2.5)$$

Para o Sol ( $L_0 = 4 \times 10^{33}$  erg/seg), encontramos  $t \sim 10^{10}$  anos.

A sequência principal é a fase mais longa da vida da estrela; no final deste estágio, a estrela apresenta um caroço (com hidrogênio já completamente consumido), que começa a se contrair, e uma envoltória, que ainda queima hidrogênio.

### 1.1.3 - Anãs Brancas

Após a queima de todo o hidrogênio no caroço, a evolução da estrela vai depender criticamente de sua massa.

Vamos discutir, a seguir, o caso em que a massa seja menor que o limite de Chandrasekhar.

O principal papel na evolução da estrela, neste estágio, é exercido:

- 1) - pela degenerescência do gás de elétrons;
- 2) - pelo aparecimento da matéria fria, como resultado do esfri

amento da estrela por perda de energia através da radiação.

Com efeito, na ausência de fontes nucleares de energia, a estrela se contrai. A energia gravitacional liberada serve para manter o fluxo de energia através da superfície da estrela. A contração (um mini-colapso) continua até que os elétrons vão se tornando degenerados, primeiro na região central, depois na envoltória, e vão contribuir com um gradiente de pressão para freiar o colapso e restabelecer o equilíbrio hidrostático. Neste ponto, a temperatura na superfície é  $\sim 10^4$  °K, a densidade central  $\sim 10^6$  g/cm<sup>3</sup>, o raio  $\sim 10^3$  km, e a luminosidade é devida unicamente à energia térmica dos núcleos que ainda se encontram em estado não-degenerado. Esta última fase da vida da estrela — uma morte não-catastrófica — é conhecida como estágio de anã-branca.

O tempo que a anã-branca leva para esfriar depende da temperatura e da composição química. Para  $T = 5 \times 10^6$  °K e  $A = 20$ , por exemplo, leva cerca de  $10^9$  anos. É efetivamente um processo de morte lenta.

#### 1.1.4 - *Queima de Hélio: Fase de Gigante Vermelha*

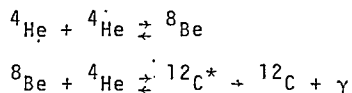
No caso de a massa da estrela ser maior que o limite de Chandrasekhar, a presença de hélio no caroço marca a próxima etapa da evolução estelar, que é a correspondente a de gigante vermelha.

Nesta fase, a estrela tem duas fontes de energia:

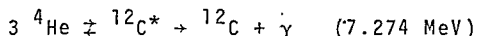
- 1) - queima de hélio, no caroço;
- 2) - queima de hidrogênio, na envoltória.



A queima de h\u00e9lio se processa da seguinte maneira:



Ou, em notação mais compacta:



razão por que \u00e9 conhecida por rea\u00e7\u00e3o de  $3\alpha$ . Neste est\u00e1gio, a temperatura atinge a  $\sim 10^8$  K e a densidade  $\sim 10^5$  g/cm<sup>3</sup>.

Uma vez exaurido o h\u00e9lio do caro\u00e7o, este se contrai. O caro\u00e7o pode ser degenerado ou n\u00e3o, dependendo da massa da estrela. De qualquer maneira, possivelmente devido ao aquecimento causado pelas ondas de choque de rarefa\u00e7\u00e3o que se formam, a envolt\u00f3ria se expande, o que faz cessar a queima de hidrog\u00eanio nas camadas mais externas, devido \u00e0 queda de temperatura. Neste ponto, a estrela se move para gigante vermelha ou supergigante vermelha do diagrama H-R.

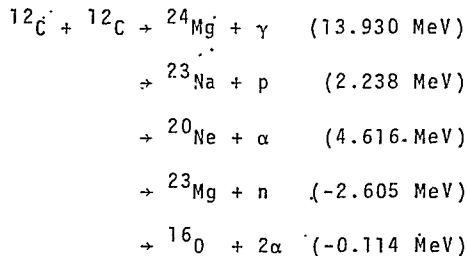
### 1.1.5 - *Queima de Carbono e Oxig\u00eanio e de Outros Elementos Pesados*

Em seguida \u00e0 queima de h\u00e9lio, vem a queima de carbono e oxig\u00eanio, que s\u00e3o agora os elementos mais abundantes.

Contudo, estrelas com caro\u00e7o de massa menor que  $0.7M_{\odot}$  (massa cr\u00edtica para queima de carbono, que corresponde ao limite de Oppenheimer-Volkoff para caro\u00e7os densos) devem simplesmente morrer como an\u00e3s brancas.

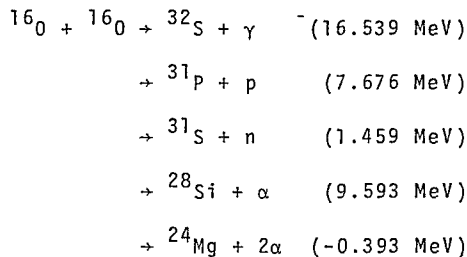
Tratamos aqui de situa\u00e7\u00e3o em que o caro\u00e7o tem massa

maior que aquele limite. Neste caso, ocorre a queima do carbono (17):



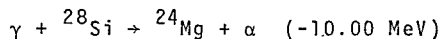
Aqui surge uma dificuldade: o grande número de canais de saída. Experiências com energia mais alta mostram, entretanto, que os canais  ${}^{20}\text{Ne} + \alpha$  e  ${}^{23}\text{Na} + \text{p}$  são os mais prováveis. Cada reação de queima de carbono libera uma energia média de 13 MeV.

Quanto à queima de oxigênio, temos:



Neste caso, o principal núcleo sintetizado é o  ${}^{28}\text{Si}$ .

Além da queima de carbono e oxigênio, encontramos também a queima de neônio, enxofre, magnésio e silício. Da queima de silício,



sucedem-se uma série de reações rápidas que basicamente são apenas de rearranjo: uma partícula é foto-ejetada por um núcleo e capturada por outro. O efeito líquido disso é levar os núcleos presentes às suas formas mais estáveis, que são os da vizinhança do ferro (constituindo o chamado grupo do ferro), porque é aí que existe um máximo para a energia de ligação por partícula. Tais reações são do tipo processo- $\epsilon$  (processo em equilíbrio), discutidos por Hoyle (21).

Durante todo este período de conversão de oxigênio em vizinhos do  $^{56}\text{Fe}$  (cuja duração é controlada pela fotodesintegração do  $^{28}\text{Si}$ ), as estrelas se encontram na fase de gigante vermelha ou de supergigantes.

#### 1.1.6 - Fase de Pré-Supernova

A estrela está agora com a seguinte estrutura:

- 1) - um caroço, todo sintetizado a  $^{56}\text{Fe}$ ;
- 2) - uma envoltória, possivelmente ainda formada por elementos mais leves.

O caroço, tendo massa superior ao limite de Chandrasekhar, se contrai, porque a pressão do gás degenerado de elétrons não é suficiente para contrabalançar a forte pressão gravitacional. Esta contração deixa o sistema em condições propícias para a ocorrência de uma transição de fase e/ou para iniciar reações ultra-rápidas. Dizemos que o sistema está na iminência de colapso. É a configuração a que damos o nome de pré-supernova.

### 1.1.7 - Supernovas e Curvas de Luz

Com o colapso hidrodinâmico da pré-supernova, a evolução estelar se aproxima do fim. Embora neste estágio final as coisas não sejam muito claras ainda, aceita-se que existe um intervalo de massa para pré-supernovas que podem ejetar matéria. Segundo cálculos de Barkat<sup>(22)</sup>, este intervalo é entre 4 e  $8 M_{\odot}$ , mas cremos que estes números variam muito de modelo a modelo. Com massa dentro desses limites, uma pré-supernova, em seguida ao colapso, explode violentamente como supernova, desintegrando-se pura e simplesmente ou ejetando grande parte de sua envoltória e deixando como remanescente um caroço denso. Neste caso, o caroço sofre uma reimplosão e o resultado é uma estrela de neutron (configuração estável), se a massa for suficientemente pequena. Caso contrário, o caroço entra em colapso e continua assim indefinidamente, constituindo-se num buraco negro. É provável que buraco negro seja também o destino de todas as pré-supernovas com massa fora do intervalo crítico. Cameron, por exemplo, acredita que 90% da matéria do Universo esteja concentrada nos buracos negros.

Mas a história da evolução termina aqui? É claro que o material ejetado numa explosão de supernova vai formar o material interestelar, que por sua vez serve de matéria primordial para estrelas de segunda geração. Estas evoluem semelhantemente e dão origem a material para formar estrelas de terceira geração, e assim sucessivamente até o infinito.

Quanto às explosões de supernova, um aspecto dominante: a sua luminosidade fantástica (magnitude média de -18, energia total emitida entre  $10^{50}$  e  $10^{52}$  ergs), o que representa centenas a milhares de vezes superior à irradiada pelas estrelas

conhecidas por novas. Daí por que foram classificadas como supernovas.

Após a classificação das supernovas, muitas delas foram identificadas, tanto galácticas quanto extra-galácticas. Entretanto, em nossa galáxia, há registro de somente seis. Destas, a mais famosa e a mais estudada é a de 1054, que foi observada pelos astrônomos chineses na Constelação do Touro. Sabe-se hoje que a Nebulosa do Caranguejo é o resultado da supernova de 1054, que deixou também um remanescente — o Pulsar do Caranguejo — bastante conhecido por ter sido o primeiro pulsar a ser detetado.

As duas últimas supernovas galácticas observadas foram a de 1572, registrada por Tycho Brahe e que explodiu na Constelação da Cassiopéia, e a de 1604, vista por Kepler na Constelação de Ophiuchus. Graças a essas observações, embora distantes no tempo, foi possível levantar, com grande precisão, as respectivas curvas de luz (diagramas da luminosidade visual contra o tempo). A título de mostrar a confiabilidade de tais curvas, reprodizimos aqui, tal como se encontra em Shylowsky<sup>(23)</sup>, o relato de Tycho Brahe sobre a supernova de 1572, que foi publicado inicialmente no tratado "*De Stella Nova*" em 1573 e, em forma mais detalhada, inclusive discussão das observações realizadas pelos outros astrônomos, no tratado "*Progymnasmata*", em 1602.

Segundo Tycho Brahe:

"... Inicialmente a nova era mais brilhante que qualquer outra estrela fixa, incluindo Sírius e Vega. Era mesmo mais brilhante que Júpiter, que surgia depois do crepúsculo, de modo que sua luminosidade era aproximadamente a de Venus, quando este planeta alcançava seu brilho máximo... Ela manteve approxi

madamente sua luminosidade por quase todo o mês de novembro. Num dia claro, ela pôde ser vista por muitos observadores à luz do dia, mesmo ao meio-dia (o grifo é nosso). À noite, estava frequentemente brilhando através de uma nuvem, cobrindo as outras estrelas. A nova, contudo, não manteve seu brilho incomum através de todo o seu tempo de aparecimento. Ela lentamente enfraquecia e finalmente desaparecia completamente. Os estágios subsequentes de seu declínio tomou o seguinte curso. Como já foi mencionado, em novembro de 1572, a nova era tão brilhante quanto Venus. Em dezembro, era quase igual a Júpiter e, em janeiro de 1573, era ligeiramente mais fraco que Júpiter, mas ainda excedia em luminosidade todas as estrelas de primeira magnitude. Em fevereiro e em março, sua luminosidade era comparável com a de janeiro, e em abril e maio, tão brilhante quanto uma estrela de segunda magnitude. Em julho e agosto, declinou até à terceira magnitude e seu brilho era próximo ao da estrela mais brilhante na Cassiopeia.... No fim de 1573 e em janeiro de 1574, era dificilmente mais brilhante que uma estrela de magnitude 5, e em fevereiro ela alcançou magnitude 6. Finalmente, em março, ela se tornou tão fraca que não pôde mais ser observada".

Com base nestas observações e convertendo-as para valores atualizados das magnitudes visuais, a curva de luz da supernova de 1572 pode ser traçada. O resultado (Fig. 1.1.7.1) mostra que a supernova registrada por Tycho Brahe é do tipo I (supernova do tipo I são associadas com estrelas de População II). A supernova de Kepler é também do tipo I.

As curvas de luz, junto com a velocidade radial da matéria ejetada, constituem um dos poucos dados observacionais de que dispomos sobre as supernovas.

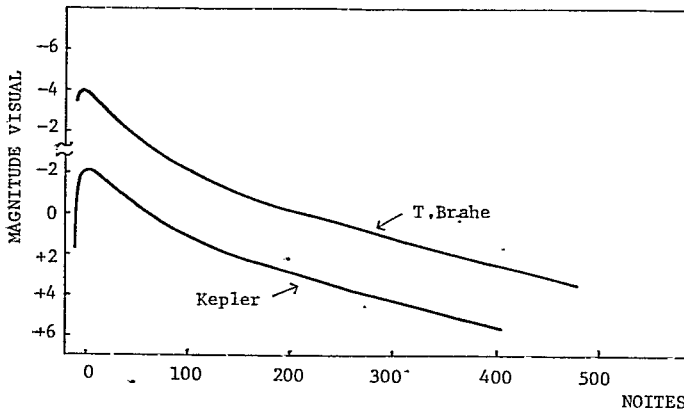


Figura 1.1.7.1 - Curvas de luz das supernovas de Tycho Brahe e de Kepler <sup>(6)</sup>.

### 1.2 - MECANISMOS DE IMPLOSAO

Tal como já dissemos, sō ocorre implosão se a escala de tempo da contração gravitacional for da ordem da escala de tempo de queda livre, que ē dada por

$$t_{q1} \approx \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}$$

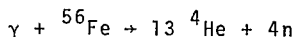
No caso de uma prē-supernova de  $M \approx 2M_0$  e  $R \sim 10^8$  cm, por exemplo, obtemos  $t_{q1} \sim 10^{-3}$  seg. Com efeito, o tempo de colapso nō vai alēm de uns poucos milisegundos.

Agora, quais sō os processos que, atuando em tōo curto intervalo de tempo, podem ser a causa eficiente da implosão? Veremos que, de todos os candidatos possıveis, a fotodis

sociação de  $^{56}\text{Fe}$  e a captura eletrônica são os mais fortes.

### 1.2.1 - Fotodissociação do $^{56}\text{Fe}$

Em 1957, Burbidge, Burbidge, Fowler e Hoyle<sup>(6)</sup> propuseram o seguinte mecanismo para iniciar o colapso estelar:



que é conhecido como fotodissociação do  $^{56}\text{Fe}$ . Trata-se de uma reação endotérmica (tendo, portanto, energia limiar), cujo valor  $Q$  foi calculado como sendo  $Q = -2.1 \times 10^{18}$  erg/g.

É bastante lógico que tenham proposto um processo envolvendo o  $^{56}\text{Fe}$ , uma vez que, no caroço da pré-supernova, o núcleo dominante é justamente o ferro, o elemento ponto final de toda a nucleossíntese nas fases anteriores de evolução.

Basicamente, o argumento que eles usaram é o seguinte:

Imaginemos um caroço em que a composição química seja meio a meio (fração em massa) de Fe e de He. Admitindo-se equilíbrio estatístico, as abundâncias de Fe e de He são relacionadas pela equação de Saha

$$\log n(\text{He}) - \frac{1}{14} \log n(\text{Fe}) = 32.08 + 1.39 \log T_9 - \frac{34.62}{T_9} \quad (1.2.1.6)$$

cuja forma geral foi deduzida por Hoyle<sup>(21)</sup>.

A fim de aplicar a equação (1.2.1.6) ao caroço em questão, colocamos a densidade total igual a  $10^8$  g/cm<sup>3</sup> (o resultado



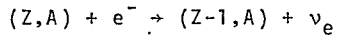
não vai depender muito do valor particular da densidade, desde que dentro de certos limites). Obtemos, então,  $T_9 = 7.6$ . Vamos supor, em seguida, que a temperatura aumente para  $T_9 = 8.2$ . Neste caso, o lado direito da eq. (1.2.1.6) aumenta de 0.4, o que implica que o lado esquerdo deve também aumentar pelo mesmo valor. Mas, aqui é que está o ponto importante da discussão,  $\log n(\text{He})$  pode apenas aumentar no máximo por 0.3. A razão é que  $n(\text{He})$  pode crescer no máximo por um fator 2 ( $\log 2 = 0.3$ ), no limite então em que todo o material é convertido em hélio. Assim, um aumento na temperatura de  $\Delta T_9 = 0.6$  implica que  $\log n(\text{Fe})$  seja reduzido de pelo menos 0.1, e isto equivale a uma diminuição na quantidade de Fe de um fator no mínimo igual a 25, dando uma distribuição de massa de 98% na forma de He e 2% na forma de Fe, vale dizer, praticamente todo de hélio.

Por outro lado, como a energia necessária para transformar 1 grama de Fe em He ( $2.1 \times 10^{18}$  ergs) é muito maior que a energia térmica da mesma quantidade do material (a  $T_9 = 8$ , ela é  $3 \times 10^{17}$  ergs), então a diferença deve ser coberta pela gravitação, através de uma contração da pré-supernova. Sendo a escala de tempo da fotodissociação da ordem de  $10^{-6}$  seg, e a fim de liberar quantidade suficiente de energia, a contração tem que ocorrer rápida e violentamente, levando as camadas centrais da pré-supernova a um movimento de queda livre. É o colapso, portanto.

### 1.2.2 - Captura Eletrônica

A transição Fe-He não é o único mecanismo capaz de pro

vocar a implosão estelar. Um outro candidato sério é justamente a captura eletrônica. Em outras palavras, nas condições extremas de temperatura e densidade que ocorrem em supernovas, os núcleos presentes, a essa altura já totalmente ionizados, capturam elétrons do plasma que os envolve, através da reação



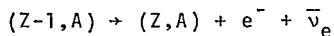
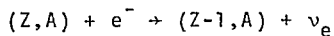
onde  $(Z,A)$  denota o núcleo de número atômico  $Z$  e número de massa  $A$ . Esta reação difere da reação semelhante em laboratório pelo fato importante de que neste caso a energia do elétron está no contínuo.

O processo de captura é também um processo endotérmico que reduz tremendamente a pressão interna, porque o faz duplamente, a saber:

- 1) - reduzindo a pressão eletrônica na medida em que, com a captura, reduz o número de elétrons livres do plasma;
- 2) - reduzindo a pressão de gás perfeito na medida em que dão origem a neutrinos que conduzem energia para fora da estrela (esfriando a estrela).

Como veremos em capítulo mais adiante, o número de capturas por unidade de tempo é função crescente da densidade, de modo que, aumentando a densidade, aumenta a taxa da captura que, por sua vez, aumenta novamente a densidade, num movimento cíclico de realimentação. É justamente isto que provoca a implosão.

A propósito, o famoso processo Urca (em homenagem ao ex-cassino do bairro carioca da Urca), proposta por Gamow e Schoenberg em 1941<sup>(24)</sup>,



é na prática um mecanismo de perda de energia por emissão de neutrinos (o núcleo é sempre regenerado, fazendo as vezes de catalizador). O processo Urca, entretanto, constitui um mecanismo de implosão bastante fraco, quando comparado com o da captura eletrônica. A razão é que, com o aumento da energia de Fermi do elétron, a 2ª reação do processo (decaimento beta) é fortemente inibida por causa da degenerescência.

Os últimos instantes de implosão são de grande interesse nos cálculos de nucleossíntese por processo-r. A razão é a seguinte: o lugar mais apropriado para o processo-r são justamente as camadas mais externas do caroço, onde existem núcleos e neutrons livres em grande abundância, além de condições extremas de temperatura ( $\sim 10^9$  °K) e densidade ( $\sim 10^{10}$  g/cm<sup>3</sup>). Por exemplo, em trabalho recente, Hillebrandt et al. (25) fizeram cálculos dinâmicos baseados num modelo de pré-supernova que tem um caroço formado por uma estrela de neutron e uma camada de Ni, e uma envoltória. A camada e a envoltória, juntas, foram divididas em 20 camadas iguais em massa. Admitiu-se então que o sítio de processo-r está localizado nas 8 camadas mais internas. Como resultado, mostraram que a curva de abundância observada do sistema solar pode ser bem reproduzida, supondo-se apenas um evento de supernova numa escala de tempo da ordem de 1 seg.

### 1.3 - MECANISMOS DE EXPLOSAO

Os principais mecanismos que podem gerar uma explosão de supernova são:

#### 1.3.1 - Transporte de Momentum por Neutrinos

Este mecanismo se baseia no seguinte: a aceleração por unidade de massa (no caso de simetria esférica) é dada por

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} + \frac{F k_{\nu}}{c} \quad (1.3.1.7)$$

onde  $F$  é o fluxo de neutrinos e  $k_{\nu}$  o coeficiente de absorção ou espalhamento.

Se

$$\frac{F k_{\nu}}{c} \geq \frac{GM}{r^2}, \quad (1.3.1.8)$$

então uma explosão pode ocorrer. A desigualdade (1.3.1.8) fornece um limite para a luminosidade  $L_{\nu}$  de neutrinos, dado por

$$L_{\nu}^{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMc}{k_{\nu} \langle 1 - \cos\theta \rangle} \quad (1.3.1.9)$$

sendo  $\langle 1 - \cos\theta \rangle$  o ângulo de espalhamento médio. Este limite é chamado de limite de Eddington, e constitui uma unidade natural para a luminosidade.

#### 1.3.2 - Transporte de Energia por Neutrinos

O transporte de energia por neutrinos é feito principalmente através de absorção e de espalhamento elétron-neutrino. A energia transportada leva o caroço a se esfriar e a envoltão -

ria a se esquentar. Com o aumento na temperatura, a pressão do gás aumenta e o gradiente de pressão é que eventualmente vai provocar a explosão. Porém, este mecanismo é efetivo somente se o fluxo de neutrinos for suficientemente grande e, no caso de espalhamento, se a energia do neutrino for maior que a energia cinética dos elétrons. Neste caso, o neutrino transfere, em média, metade de sua energia à matéria.

### 1.3.3 - Choque de Reflexão

Neste caso, o transporte de neutrinos não é considerado, e a explosão começa quando, na equação de movimento

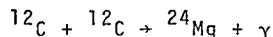
$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}, \quad (1.3.3.10)$$

o termo de gradiente de pressão for maior que a força gravitacional. O choque de reflexão pode acontecer, por exemplo, quando o índice adiabático passa de um valor de 4/3 (gás de elétron relativístico) para um valor de 5/3 (gás de neutron não-relativístico).

### 1.3.4 - Queimas Termonucleares Explosivas

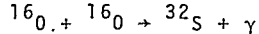
Na envoltória, e para certas condições de temperatura e densidade, podem ocorrer reações termonucleares explosivas, tais como:

a) a detonação do carbono,



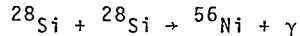
com valor Q igual a 13.930 MeV;

b) a detonação do oxigênio,



com valor Q de 16.539 MeV;

c) ou ainda a detonação do silício



com valor Q de 10.94 MeV.

Estas detonações explosivas ejetam o material da man-  
ta, e deixam como resultado um caroço remanescente.

#### 1.4 - MODELOS DE PRÉ-SUPERNOVAS

A fim de realizar o cálculo hidrodinâmico do colapso, é indispensável ter uma configuração inicial da estrela, isto é, uma distribuição apropriada de densidade, velocidade, temperatura e pressão. Esta distribuição, naturalmente, tem que ser escolhida a partir de uma configuração de equilíbrio ou muito próxima do equilíbrio, que então fazemos evoluir quase-estaticamente até o ponto de pré-colapso.

Quais são os modelos mais simples de pré-supernova ?  
Para responder à pergunta, lembremos o seguinte:

Das equações de equilíbrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM\rho}{r^2} \quad (1.4.11)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1.4.12)$$

onde  $P$  é a pressão e  $\rho$  a densidade de matéria, resulta:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (1.4.13)$$

onde a equação de estado tem a forma

$$P = P(\rho, T, \{N_i\}) \quad (1.4.14)$$

com  $\{N_i\}$  denotando a composição química.

Podemos resolver a eq. (1.4.13) numericamente para situações simples, tais como:

1) uma esfera de gás politrópico; temos, então,

$$\rho = \alpha T^n \quad (1.4.15)$$

onde  $\alpha$  é uma constante que depende das condições iniciais, e  $n$  é o índice politrópico, que é relacionado com o índice adiabático  $\gamma$  através de

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (1.4.16)$$

Neste caso, a eq. (1.4.13) se reescreve,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta_n^n}{d\xi} \right) = -\theta_n^n \quad (1.4.17)$$

onde fizemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\xi = r/\alpha \quad \text{e} \quad \theta_n^n(r) = \rho/\rho_c$$

sendo  $\rho_c$  uma constante.

A eq. (1.4.17) é conhecida como equação de Lane-Emden de índice  $n$  e  $\theta_n$  são as funções de Lane-Emden de índice  $n$ , e se impusermos as condições de contorno em  $\xi = 0$ ,

$$\theta_n = 1 \quad \frac{d\theta_n}{d\xi} = 0$$

então, as soluções são as chamadas soluções-E de Chandrasekhar. No caso de índices 0, 1 e 5, existem expressões analíticas para as soluções-E

2) um caroço isotérmico; temos, neste caso

$$T = \text{cte.}$$

Escrevendo a equação de estado como

$$P = R T \rho / \mu_A + K f(\rho) + a T^4 / 3$$

onde os termos no lado direito são, respectivamente, a pressão de gás perfeito (incluindo a parte dos núcleos, através do peso molecular médio  $\mu_A$ ), a de gás degenerado de elétrons (cf. Cap. V) e a de radiação, então, a eq. (1.4.13) adquire a seguinte forma:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \left( 1 + \lambda \frac{df}{d\rho} \right) \frac{d\eta}{d\xi} \right] = e^{-\eta} \quad (1.4.18)$$

onde fizemos as mudanças de variáveis seguintes:

$$\xi = r/\alpha \quad e \quad e^{-\eta} = \rho/\rho_c$$

com



$$\alpha = \left( \frac{RT}{4\pi G \rho_C \mu_A} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{K \mu_A}{RT}$$

As condições de contorno em  $\xi = 0$  agora são:

$$\eta = 0 \quad ; \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

Dos dois modelos que iremos discutir a seguir tem como ponto de partida estes dois tipos de solução da eq.(1.4.13).

#### 1.4.1 - Modelo de Fowler-Hoyle

Em 1964, Fowler e Hoyle<sup>(26)</sup> encontraram uma relação aproximada entre a densidade e a temperatura, para os valores de concentração em equilíbrio de Fe e He, dada por

$$T_9/6 = \left( \frac{\rho}{1.82 \times 10^6} \right)^{0.081} \quad (1.4.1.19)$$

e que está representada na Fig. 1.4.1.2. A região de fotodissociação é dada pela parte superior da figura.

A fim de viabilizar o mecanismo da transformação Fe - He, Fowler e Hoyle propuseram então um modelo de estrela que servisse de configuração inicial para os cálculos de colapso. Esta configuração ficou conhecida como modelo de pré-supernova de Fowler-Hoyle.

Em resumo, o modelo de Fowler-Hoyle é o seguinte: uma esfera de gás politrópico de ordem 3 (isto é, um politropo de ordem 3), com caroço não-degenerado, por exemplo, com densidade central igual a  $3.2 \times 10^5 \text{ g/cm}^3$ , e temperatura de  $1.6 \times 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ .

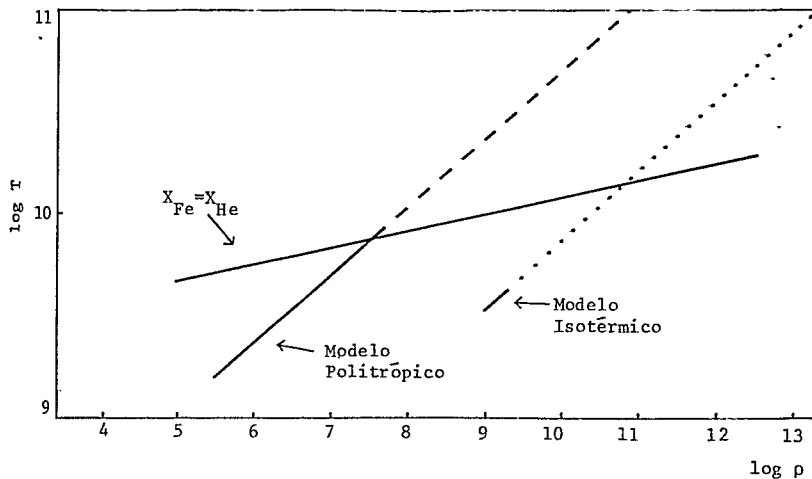


Figura 1.4.1.2 - Região de fotodissociação e evolução quase-estática.

Neste caso, o resultado é uma estrela com massa igual a  $10 M_{\odot}$  e raio de  $6.2 \times 10^9$  cm, como mostra a Fig. 1.4.1.3.

A Fig. 1.4.1.2 nos mostra que a evolução quase-estática da esfera politrópica, que no início segue a adiabática  $5/3$

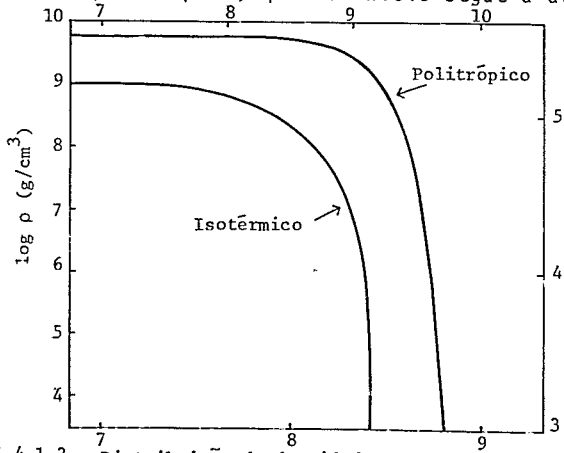


Figura 1.4.1.3 - Distribuição de densidades no modelo isotérmico (escalas à esquerda e abaixo) e no modelo politrópico (escalas à direita e acima).

(baixa densidade, baixa temperatura) e no fim a adiabática 4/3 (alta densidade e alta temperatura), passa exatamente dentro da região de fotodesintegração, de modo que esta reação pode efetivamente ser incorporada à dinâmica da evolução estelar. No trabalho de Colgate e White, foi utilizado o modelo de Fowler-Hoyle.

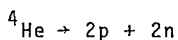
#### 1.4.2 - Modelo de Chiu

O modelo de pré-supernova de Chiu está relacionado com o seguinte problema:

Estimativas do valor limiar da densidade para captura eletrônica nos fornecem

$$\rho/\mu_e \sim 10^9 \text{ g/cm}^3.$$

onde  $\mu_e$  é o peso molecular médio por elétron, de modo que  $\rho/\mu_e$  é a densidade de prótons (de número igual ao de elétrons). Este resultado implica que, se usarmos o modelo politrópico de Fowler-Hoyle, o caroço da estrela irá sofrer a dissociação, antes que a captura possa acontecer, a não ser talvez sobre o He, que é o produto da fotodissociação do Fe. Mas, mesmo neste caso, a alternativa mais provável é a desintegração também do He, através de



com o valor Q (por unidade de massa) de  $Q = -6.8 \times 10^{18}$  ergs.

Deste modo, adotando o modelo de Fowler-Hoyle, o que no máximo teríamos é a captura de elétrons pelos prótons. É ne-

cessário então evitar a região de transformação Fe-He, se quisermos eleger a captura eletrônica como possível mecanismo de implosão. Para isto justamente é que o modelo de Chiu foi proposto.

É o seguinte o modelo de Chiu<sup>(27)</sup>: um caroço isotérmico denso, em que os elétrons são degenerados, com densidade central, por exemplo, igual a  $10^9$  g/cm<sup>3</sup>, temperatura constante de  $3.5 \times 10^9$  °K, raio de  $1.2 \times 10^8$  cm, e uma envoltória de gigante vermelha, com índice adiabático igual a 5/3. Este modelo de Chiu tem massa de  $2 M_{\odot}$  e raio igual a  $2.6 \times 10^8$  cm (Fig.1.4.1.3).

Em comparação com o modelo de Fowler-Hoyle, o de Chiu permanece numa adiabática mais baixa, fugindo, portanto, da região de fotodissociação, e permitindo, quase que de início, a captura eletrônica.

O modelo de Chiu foi usado por Arnett e por Schwartz.

O modelo de Chiu que utilizamos neste trabalho tem <sup>56</sup>Fe no caroço e H na envoltória. Esta mudança de composição química obviamente determina uma descontinuidade na densidade nos pontos de passagem do caroço para a envoltória. Entretanto, desde que se mantenha (como mantivemos) a continuidade na pressão, esta continuidade na densidade não causa nenhum problema (fisicamente representa uma transição de fase).

Resolvendo as equações de equilíbrio hidrostático com as mesmas condições iniciais de densidade e temperatura acima, mas com a equação de estado dada pela eq. (5.5.28), e colocando a massa do caroço igual a  $1.54 M_{\odot}$  (que fizemos  $\geq$  limite de Chandrasekhar), encontramos uma distribuição diferente, Fig. 1.4.2.4, com raio do caroço igual a  $2.6 \times 10^8$  cm e raio da estrela igual a  $6.3 \times 10^8$  cm. A estrela tem, neste caso, massa

igual a  $1.716 M_{\odot}$ .

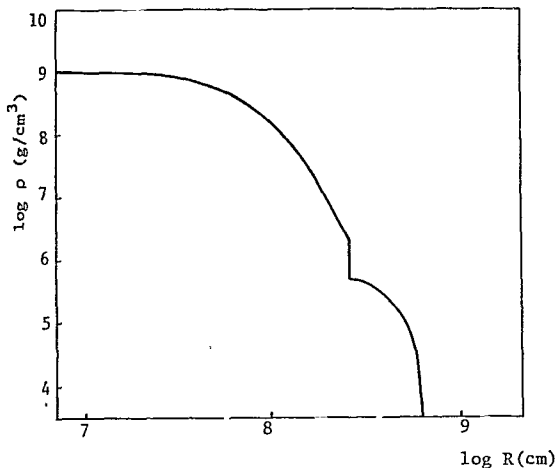


Figura 1.4.2.4 - Modelo de Chiu, com caroço isotérmico de Fe e envoltória politrópica de H.

#### 1.5 - EVOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA EM DIREÇÃO AO COLAPSO

A fim de que o colapso possa ser desencadeado, temos que fazer a estrela (um modelo de pré-supernova, no caso) evoluir quase-estaticamente até o ponto em que a densidade das camadas centrais atinja o valor limiar da fotodesintegração (no modelo politrópico) ou o valor limiar da captura (no modelo isotérmico).

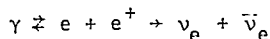
Para garantir o caráter quase-estático, a evolução precisa seguir a adiabática  $4/3$ . A razão é a seguinte: a pressão gravitacional (no limite Newtoniano) é proporcional a  $\rho^{4/3}$ . Se uma estrela está em estado de quase-equilíbrio, então a pressão do gás de elétrons degenerados relativísticos (que é o nosso caso) é também proporcional a  $\rho^{4/3}$ , com o índice adiabático  $\gamma$  igual a  $4/3$  portanto, e é o bastante para contrabalançar a pressão gravitacional. Uma pressão de gás diferente desse valor ( $\gamma \neq 4/3$ ) conduz à instabilidade. Se  $\gamma \gtrsim 4/3$ , a estrela

se contrai (colapso hidrodinâmico). Podemos, deste modo, interpretar a adiabática  $4/3$  como sendo a linha de estabilidade estelar.

Finalmente, para que a evolução seja adiabática, temos que eliminar energia da estrela em quantidades pequenas. Esta perda de energia pode ser através de dois processos principais (desprezando a luminosidade de fótons), ambos de interação fraca, com emissão de neutrinos: neutrinos de par e neutrinos de plasma.

### 1) - Neutrinos de Par

Os fótons, no interior estelar, estão em equilíbrio com os elétrons (equilíbrio termodinâmico local). A temperaturas da ordem de  $T_9 = 1$ , os pares elétron-pósitron serão criados em equilíbrio com a radiação, de modo que o seguinte processo pode ocorrer:



que é conhecido como aniquilação de par. Em 1961, Chiu<sup>(28)</sup> calculou a taxa de perda de energia deste processo para temperaturas na faixa de  $0.5$  a  $10 T_9$  e para densidades de até  $10^9$  g/cm<sup>3</sup>.

Uma expressão simples pode ser obtida no caso de

$$m_e c^2 \ll kT \quad \text{e} \quad \epsilon_F \leq kT \quad (1.5.20)$$

onde  $\epsilon_F$  é a energia de Fermi. As condições (1.5.20) correspondem ao caso não-degenerado. A taxa  $\bar{Q}$ , então, dada por:

$$\bar{Q} = 4.3 \times 10^{15} \frac{T_9^9}{\rho} \quad \text{erg/g/seg} \quad (1.5.21)$$

No caso degenerado,

$$Q = 1.43 \times 10^{15} (1 + 5\phi) T_{10}^4 \exp(-\frac{1}{\phi}) \quad \text{erg/g/seg} \quad (1.5.22)$$

onde  $\phi \equiv kT/E_F$  sendo  $E_F = \epsilon_F + m_e c^2$ , e  $T_{10} \equiv T/10^{10}$ .

## 2) - Neutrinos de Plasma

É bem conhecido que um fóton livre não pode decair em um par neutrino-antineutrino (conservação de momentum e energia). Contudo, a situação é bem diferente, quando o fóton está na presença de algum campo. É o caso, por exemplo, de um fóton interagindo com um gás de elétrons. Sabemos que, no mar degenerado de elétrons, níveis de energia até o nível de Fermi ( $E_F$ ) são completamente preenchidos. Um elétron pode ser levantado do mar de Fermi completamente ocupado, até um estado de energia superior a  $E_F$ , deixando no lugar um buraco (em analogia com a teoria de Dirac). A criação dos pares elétron-buraco altera as propriedades físicas do meio, mudando o valor da constante dielétrica de um valor  $> 1$  para um valor  $< 1$ .

A constante dielétrica, com aproximação, é dada por:

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{w_p}{w}\right)^2 \quad (1.5.23)$$

onde  $w_p$  é a frequência do plasma e  $w$  a frequência angular do fóton. Da relação de dispersão,

$$w^2 \epsilon = k^2 c^2 \quad (1.5.24)$$

Vem:

$$w = (w_p^2 + k^2 c^2)^{1/2} \quad (1.5.25)$$

de modo que  $\hbar\omega_p/c^2$  pode ser encarado como a "massa" do fôton no meio. Assim, o fôton se comporta num gás de elétrons, como se tivesse uma massa de repouso efetiva. Tal fôton é intitulado um plasmon transversal.

Consequentemente, temos, no interior estelar, o seguinte decaimento:

$$\gamma \text{ (plasmon)} \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$$

cuja taxa de perda de energia foi calculada por Adams et al. (29) em 1963 como sendo:

$$Q = 1.1 T_9^3 \rho \quad \text{erg/g/seg} \quad (1.5.26)$$

para  $\rho > 10^6 \text{ g/cm}^3$

e

$$x = \frac{0.237 \rho_6^{1/2}}{(1 + 0.6413 \rho_6^{2/3})^{1/4}} \leq 1 \quad (1.5.27)$$

onde  $\rho_6$  denota densidade em unidades de  $10^6$ .

Embora a principal contribuição venha dos plasmons transversais, existem também os plasmons longitudinais. Neste trabalho, desprezamos a contribuição dos plasmons longitudinais porque ela é irrelevante na faixa de densidade e temperatura em que estamos interessados.

Estes dois processos, quando acionados, são o responsável pela evolução quase-estática até a ignição de qualquer um dos dois mecanismos de implosão. Contudo, sem desviar a setrela muito da adiabaticidade, pode-se aumentar esta taxa de perda de energia por um fator multiplicativo, com a finalidade de acelerar a evolução, e assim economizar tempo de cálculo.



Schwartz, por exemplo, sugeriu um fator de  $10^6$ . Entretanto, advertiu que isto provoca um erro na determinação das temperaturas, de modo que estas sã podem ser levadas em conta apenas como ordens de grandeza.

As condições de densidade e raio, nesta fase de evolução, são tais que o livre percurso médio dos neutrinos é, para todos os efeitos práticos, infinito, o que significa que os neutrinos, uma vez formados, escapam livremente (opacidade da matéria a neutrinos nula). Tais neutrinos conduzem energia para fora da estrela, e entram nas equações como perdas locais de energia. São denotadas por  $\dot{s}$ .

#### 1.4.3 - Modelo Homogêneo

O uso do modelo de Fowler-Hoyle ou o de Chiu é praticamente proibitivo, quando se quer acoplar a Hidrodinâmica com a rede de equações de reação nuclear (a estrela tem que ser dividida em pelo menos 50 camadas). Por isso, é inevitável recorrer-se a um modelo mais simples, o chamado modelo homogêneo. Neste modelo, a temperatura, a densidade e a composição química são uniformes ao longo de toda a estrela (equivale ao modelo de uma única camada). A utilização deste modelo implica que apenas resultados qualitativos podem ser obtidos.

O modelo homogêneo que consideramos tem densidade de  $2 \times 10^9$  g/cm<sup>3</sup>, temperatura de  $10^9$  °K e composição química dada pelo <sup>56</sup>Fe, com massa total de  $3.5 M_{\odot}$  e raio de  $7.4 \times 10^7$  cm.

## CAPÍTULO II

### INTERAÇÃO FRACA

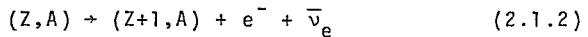
#### 2.1 - FENOMENOLOGIA

Um dos processos básicos (e um dos mais simples) de interação fraca é dado pelo decaimento do nêutron livre,



A reação (2.1.1), com meia-vida de 12 min, é energeticamente possível, porque a diferença de massa entre nêutron e próton ( $\sim 1.3$  MeV) é maior que a massa do elétron (0.511 MeV).

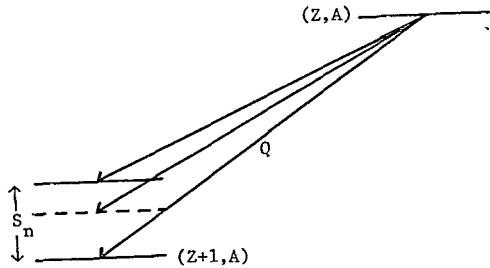
Contudo, o nêutron pode estar em estado ligado, no interior do núcleo. Neste caso, temos o decaimento beta (menos) nuclear:



que imaginamos ser essencialmente o mesmo que (2.1.1), com a diferença de que em (2.1.2) são levadas em conta também as energias de ligação do próton e do nêutron, além das modificações nas funções de onda do núcleo e do elétron. Esquemáticamente te

mos:

Figura 2.1.1 - Decaimento beta nuclear, com três tipos de transições distintos.



Na Fig. 2.1.1,  $Q$  é sempre positivo e  $S_n$ , a energia de separação de nêutron do núcleo filho.

O núcleo pai pode decair para o núcleo filho de 3 maneiras distintas:

1) para o estado fundamental do núcleo filho

Neste caso, o valor  $Q$  coincide com a energia do decaimento, que é repartida então entre o elétron e o antineutrino, sendo que a energia deste em média representa  $3/4$  do total.

2) para um estado com energia igual ou superior a  $S_n$

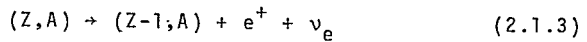
Se o núcleo pai decai para um nível igual ou acima da energia de separação de nêutron do núcleo filho, há uma probabilidade de ocorrer a emissão de nêutron, com posterior emissão de fóton ou fótons até o estado fundamental. Esta emissão de nêutron é semelhante a que ocorre em fragmentos de fissão<sup>(30)</sup> que, neste caso, é atrasada em relação à fissão de um tempo da ordem da meia-vida do decaimento beta. Por isto é que esta emissão é conhecida aqui também como emissão retardada de nêutron.

3) para um nível excitado entre o estado fundamental e  $S_n$

O núcleo filho se desexcita, emitindo simplesmente um

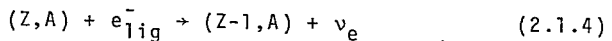
fóton ou uma cascata de fótons até atingir o estado fundamental. Obviamente estes fótons têm em média energia da ordem de  $S_n$ .

De forma análoga, havendo energia de ligação suficiente para cobrir as diferenças de massa envolvidas, pode igualmente ocorrer, no interior do núcleo, o decaimento beta mais (emissão de pósitron),



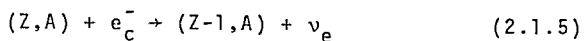
Temos ainda o caso em que o núcleo captura um elétron atômico das camadas mais internas (por exemplo, elétron K, elétron L, etc.). Tais elétrons se encontram em orbitais que fornecem uma probabilidade finita de o elétron estar no interior nuclear.

Esta reação é representada por:



onde  $e_{lig}^-$  denota elétron ligado.

Entretanto, o processo que é de maior interesse astrofísico é a captura de elétrons com energia no contínuo (por exemplo, elétrons de um mar de Fermi totalmente degenerado). A razão é que, no interior das estrelas que iremos discutir, os átomos são completamente ionizados, com os elétrons formando uma nuvem de partículas praticamente livres, de modo que, ao invés da reação (2.1.4), encontramos:



com  $e_c^-$  denotando elétron no contínuo.

As reações (2.1.4) e (2.1.5) diferem quanto ao espectro de energia do elétron (no primeiro caso, o espectro é discreto; no segundo, é contínuo) e quanto ao local de ocorrência (o primeiro na Terra, o segundo nas estrelas).

A captura eletrônica, esquematicamente, é a seguinte:

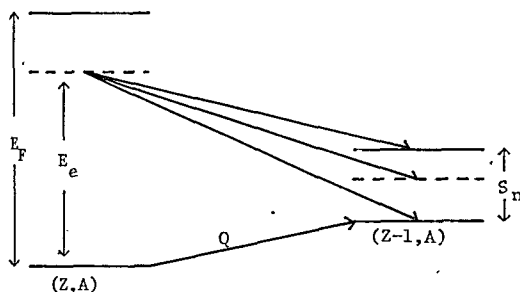


Figura 2.1.2 - Captura eletrônica pelo núcleo (Z,A).

Aqui, a situação é análoga ao decaimento beta. Temos também 3 tipos de decaimento. A única diferença é que agora há um espectro contínuo de níveis de energia do elétron (de  $m_e c^2$  a  $E_F$ ) e, dependendo do estado inicial, uma determinada transição pode ser energeticamente proibida (estado final com energia superior ao estado inicial). Isto significa que, no caso da captura eletrônica, temos que levar em conta também regras de exclusão.

Mais especificamente e recorrendo à Fig. 2.1.2, vemos que considerações de energia determinam os tipos possíveis de transição para um dado estado inicial. Assim, por exemplo, para um nível bem junto da superfície de Fermi, qualquer um dos 3 tipos é possível, mas para elétrons entre  $-Q$  e  $S_n$ , apenas é permitido o decaimento para nível excitado e estado fundamental. Para níveis iniciais abaixo de  $Q$ , então não existe a possibilidade

de de qualquer transição.

No caso de transição direta para o estado fundamental, a energia carregada pelo neutrino que escapa é  $3/5$  da energia de transição.

Finalmente, em situações muito extremas de densidade e temperatura, a energia por partícula pode atingir o valor limiar para a criação de mésons- $\mu$ . Estes muons (meia-vida  $\sim 10^{-6}$  seg no caso de estado livre), em seguida, decaem por interação fraca em

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (2.1.6)$$

onde  $\nu_\mu$  é o neutrino muônico.

## 2.2 - FONTES DE NEUTRINO

O neutrino, cujo papel nos últimos estágios de evolução queremos investigar, tem como fontes os seguintes processos:

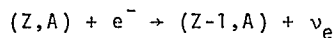
- 1) Captura eletrônica
- 2) Decaimento beta
- 3) Decaimento muônico
- 4) Fotoneutrino
- 5) Aniquilação de par
- 6) Plasmon
- 7) Processo Urca

Aniquilação de par, plasmon e processo Urca já foram discutidos no Cap. I. O processo fotoneutrino, nos cálculos de pré-supernova e de colapso gravitacional, é completamente des -

prezível. O decaimento muônico só é efetivo a densidades extremamente altas ( $\sim 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>), por causa do limiar de produção de muons. Em vista disso, não será levado em conta neste trabalho. Trataremos aqui tão somente da captura eletrônica e do decaimento beta, com ênfase total no primeiro processo, que é o ponto central nos nossos cálculos.

### 2.2.1 - Captura Eletrônica

Em termos de um tratamento formal, a reação de captura



(salvo indicação em contrário,  $e^-$  denotará sempre elétronno contínuo) pode ser encarada como a transição da função de onda inicial  $|(Z,A),e^->$  para a função de onda final  $|(Z-1,A),\nu_e >$  e o responsável por esta transição é o elemento de matriz

$$\langle (Z-1,A),\nu_e | H_{int} | (Z,A),e^- \rangle$$

onde  $H_{int}$  é a Hamiltoniana de interação.

A fim de escrever a Hamiltoniana  $H_{int}$ , aplicamos a teoria convencional de interação fraca que se baseia nas seguintes hipóteses:

- 1) a interação fraca é pontual (instantânea);
- 2) a Hamiltoniana é uma combinação linear de um escalar ou um pseudo-escalar de Lorentz dos quatro campos fermiônicos;

3) a Hamiltoniana  $\hat{H}$  é linear em todas as variáveis de campo e não contém derivadas de campo.

Assim, com a hipótese (1), o potencial de interação pode ser escrito como um operador constante multiplicado por uma função delta. A hipótese (2) limita a interação a 5 tipos: escalar, pseudo-escalar, vetorial, pseudo-vetorial (axial) e tensorial. Contudo, experiências de correlação angular elétron-neutrino e medidas de polarização dos elétrons emitidos no decaimento beta permitem eliminar ainda as interações escalar, pseudo-escalar e tensorial. Em resumo, a teoria atual da interação fraca inclui apenas 2 tipos de interação: a vetorial e a axial. É a chamada teoria V-A da interação fraca. Portanto, os fatos vieram mostrar que Fermi não estava muito longe da verdade, ao construir sua teoria de interação fraca, postulando uma interação apenas do tipo vetorial. A 3ª hipótese permite consideráveis simplificações na teoria, eliminando termos do tipo  $|\nabla\psi|^2$ , onde  $\psi$  é uma variável de campo. Recentemente, a teoria da interação fraca incorporou os novos desenvolvimentos da teoria gauge, que se fundamentaram em resultados experimentais a altas energias, como veremos mais adiante. Contudo, não obstante o fato de a teoria V-A ser apenas de interação efetiva, ficou demonstrado pela experiência que ela funciona razoavelmente bem no caso de transições nucleares a baixa energia, razão por que concentra-nos nossa atenção sobre ela.

A fim de calcular as probabilidades de transição, podemos aplicar a teoria da perturbação, porque a interação fraca é bastante menor que a interação forte (fator da ordem de  $10^{-12}$ ).

Trataremos aqui, por simplicidade, somente do caso das chamadas transições permitidas, isto é, aquelas para as



quais existe grande "overlapping" das funções de onda inicial e final no elemento de matriz de transição. Neste caso, experimentalmente, vemos que tais elementos de matriz são independentes do momentum do elétron emitido. Isto significa que os diagramas de Kurie correspondentes (gráfico de  $\sqrt{n(E)}/pE$  versus  $E$ , onde  $p$  e  $E$  são momentum e energia do elétron, respectivamente, e  $n(E)dE$  é a probabilidade de emissão de um elétron com energia entre  $E$  e  $E+dE$ ) são simples retas.

Usualmente, a grandeza que caracteriza a transição é o valor de  $\log(ft)$ , onde  $f$  é a função de Fermi e  $t$  é a meia-vida. Para as transições permitidas, o valor de  $\log(ft)$  (inversamente proporcional ao quadrado do elemento de matriz de transição) é pequeno, entre 4 e 6, aproximadamente.

Em termos mais formais, as transições permitidas provêm do fato de que retomamos, na expansão em série das funções de onda nucleares, apenas os termos de ordem zero. Justamente os termos de ordem superior é que são os responsáveis pelas chamadas transições proibidas, de 1ª ordem, de 2ª ordem, etc., conforme a ordem do termo de expansão.

Evidentemente, tais transições são bem mais fracas em relação às permitidas. Traduzindo isto em termos de  $\log(ft)$ , para as 1ªs proibidas, encontramos valores entre 6 e 9. O valor de  $\log(ft)$  aumenta quando cresce a ordem de proibição.

Em trabalhos recentes, Egawa et al. (31) investigaram a captura eletrônica, levando em conta também os níveis excitados dos núcleos, e Takahashi et al. (32) estudaram as transições permitidas e as 1ªs proibidas visando a aplicações astrofísicas.

Evidentemente, nos cálculos de colapso, as transições

permitidas são mais que suficientes para os nossos objetivos.

Neste caso, a teoria V-A<sup>(33)</sup> fornece a taxa de captura eletrônica, que tem expressão relativamente simples:

$$\lambda_c = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \sum_j F(Z, A, E) \left[ |g_F|^2 \left| \int \pi_j \right|^2 + |g_{GT}|^2 \left| \int \sigma_j \right|^2 \right] \quad (2.1.7)$$

onde o somatório  $\bar{e}$  é sobre todos os estados finais.

Na eq. (2.1.7),  $E = E_j - E_i$ , sendo  $E_i$  a energia do estado inicial e  $E_j$  a energia do estado final  $j$ . Representa assim a energia de captura.  $g_F$  e  $g_{GT}$  são as constantes de acoplamento de Fermi e de Gamow-Teller, respectivamente ( $g_F \approx 1.4 \times 10^{-49} \text{ erg cm}^3$  e  $g_{GT} \approx -1.2 g_F$ ). A função  $F(Z, A, E)$  é conhecida como função de Fermi e exprime nada mais que a interação Coulombiana entre o elétron e o núcleo. Nas condições de temperatura e densidade que temos, o elétron é relativístico (sua função de onda é relativística), de modo que a função de Fermi é dada por<sup>(32)</sup>:

$$F(Z, A, E) = \frac{1}{2} (1+s) e^{\pi\mu} (2pR)^{2(s-1)} \frac{|\Gamma(s+i\mu)|^2}{\left| \frac{1}{2} \Gamma(1+2s) \right|^2} \quad (2.1.8)$$

com

$$s = \left[ 1 - (\alpha Z)^2 \right]^{1/2}$$

e

$$\mu = - \frac{\alpha Z E}{p}$$

onde  $\alpha = 1/137$  é a constante de estrutura fina,  $p$  o momentum do elétron,  $R$  é tomado como sendo o raio nuclear,  $\Gamma(z)$  é a função Gama.

O argumento  $Z$  na eq. (2.1.8) é a carga do núcleo pai

(no caso de captura eletrônica) ou a carga do núcleo filho (no caso de decaimento beta). O valor de  $\mu$  deve ser substituído por  $-\mu$  no caso de decaimento beta.

Nos nossos cálculos, desprezamos a mudança na função de onda do elétron devido ao encobrimento da carga nuclear pelos elétrons. Este efeito pode resultar numa diminuição das taxas de captura, no máximo, por um fator 2, o que está dentro das incertezas dos cálculos de taxa (31).

Na eq. (2.1.7), os elementos de matriz nuclear são dados por:

$$\int \Pi_j \equiv \int \psi_n^*(\vec{r}) \tau \psi_p(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.1.9)$$

$$\int \sigma_j \equiv \int \psi_n^*(\vec{r}) \sigma \psi_p(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2.1.10)$$

e são responsáveis, no primeiro caso, pelas interações de Fermi, com as seguintes regras de seleção, facilmente verificáveis pela eq. (2.1.9):

$$\Delta J = 0 \quad , \quad \Delta \pi = 0$$

( $J$  e  $\pi$  são o spin e a paridade nuclear, respectivamente), e no segundo caso, pelas interações de Gamow-Teller, com outras regras de seleção, a partir da eq. (2.1.10), dadas por:

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad , \quad \Delta \pi = 0$$

(exceto a transição  $0^+ \rightarrow 0^+$ ).

### 2.2.2 - Teoria Grossa

A fim de calcular a taxa de captura eletrônica  $\lambda_c$ , podemos utilizar vários métodos atualmente disponíveis. Um deles, por exemplo, é o desenvolvido por Bahcall<sup>(33)</sup>, que consiste essencialmente em expandir a expressão do fator de forma em série de potências (a chamada aproximação normal). Hansen<sup>(34)</sup> e Tsuruta e Cameron<sup>(35)</sup> apresentaram também métodos semelhantes para calcular a eq. (2.1.7). Contudo, todos estes processos tratamos elementos de matriz nuclear como termos a ajustar com resultados experimentais apenas. Evidentemente, isto não é satisfatório, ainda mais no nosso caso, em que lidamos com núcleos muito afastados da linha de beta-estabilidade.

Por isso, resolvemos aplicar um método que, ao contrário dos demais, leva em conta a estrutura nuclear na determinação das eqs. (2.1.9) e (2.1.10). Trata-se da chamada teoria grossa, desenvolvida por Takahashi e Yamada<sup>(36)</sup> em 1969, que se baseia no seguinte fato: os núcleos apresentam propriedades médias, e estas propriedades médias são suficientes, a alto grau de precisão, para a determinação de muitas quantidades de interesse, tal como a taxa de captura eletrônica.

Vamos resumir os argumentos da teoria grossa:

Primeiramente, admitimos que a densidade de níveis finais é suficientemente grande, de modo que se pode, em primeira aproximação, substituir o somatório sobre os estados finais da eq. (2.1.7) por uma simples integral.

Assim, a taxa de captura tem a forma:

$$\lambda_c \approx \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^{E_F} \left[ |g_F|^2 |M_F(E)|^2 + |g_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \right] f(-E) dE \quad (2.2.2.11)$$

onde  $Q$  é o valor  $Q$  do estado fundamental, dado por:

$$Q = M(Z,A) - M(Z-1;A) \quad (2.2.2.12)$$

sendo  $M(Z,A)$  a massa atômica do núcleo  $(Z,A)$ .

Na eq. (2.2:2.11), a variável  $E$  corresponde a  $E_j - E_i$  da eq. (2.1.7), porém aqui ela é contínua. As funções  $|M_F(E)|^2$  e  $|M_{GT}(E)|^2$  são as chamadas funções intensidade. Elas são definidas como uma média apropriada (sobre os níveis em torno de  $E$ ) dos quadrados dos elementos de matriz, multiplicada pela densidade de níveis finais  $\rho(E)$ , isto é,

$$|M_\Omega(E)|^2 \equiv \overline{|\langle \psi_f | \Omega | \psi_i \rangle|^2} \rho(E) \quad (2.2.2.13)$$

onde o índice  $\Omega$  denota  $F$  (Fermi) ou  $GT$  (Gamow-Teller).

$\epsilon_F$  é a energia de Fermi do elétron, e tem por expressão:

$$\epsilon_F = m_e c^2 \left[ \left\{ (p_F / m_e c)^2 + 1 \right\}^{1/2} - 1 \right] \quad (2.2.2.14)$$

onde

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}$$

com  $n_e$  representando a densidade de número de elétrons. A função  $f(-E)$  é conhecida como a função de Fermi integrada e é dada por:

$$f(-E) = \int_{W_{\min}}^{W_{\max}} W(W^2 - 1)^{1/2} (W - 1 - E/m_e c^2)^2 F(Z, A, W) dW \quad (2.2.2.15)$$

Os limites da integral são dados por:

$$W_{m\bar{a}x} = (\epsilon_F + m_e c^2) / m_e c^2$$

$$W_{m\bar{i}n} = 1 \quad \text{para } E < 0$$

$$= E / m_e c^2 + 1 \quad \text{para } E \geq 0$$

Na eq.(2.2.2.15),  $W$  é a energia do elétron em unidades de  $m_e c^2$  (incluindo o termo de massa de repouso).

### 1) Determinação das Funções Intensidade

Como calcular efetivamente as funções intensidade ? Podemos fazer o seguinte: admitimos o modelo de partícula única, de modo que a função intensidade pode ser escrita em termos de funções intensidade de partícula única, como se segue (37):

$$|M_{\Omega}(E)|^2 = \int_{\epsilon_{m\bar{i}n}}^{\epsilon_{m\bar{a}x}} D_{\Omega}(E, \epsilon) W(E, \epsilon) \frac{dn}{d\epsilon} d\epsilon \quad (2.2.2.16)$$

Em (2.2.2.16),  $\epsilon$  é dada pela soma da energia cinética do nucleon com as energias potenciais entre o nucleon e os demais, e é uma espécie de energia de partícula única;  $dn/d\epsilon$  é a distribuição de densidade de níveis;  $D_{\Omega}(E, \epsilon)$  é a função intensidade de partícula única;  $W(E, \epsilon)$  é uma função peso, que leva em conta o princípio de exclusão de Pauli nos estados finais, e pode assumir valores entre 0 e 1;  $\epsilon_{m\bar{a}x}$  é dado pela energia de Fermi e  $\epsilon_{m\bar{i}n}$  é ditado pelas regras de seleção.

### 2) Densidade de Níveis

Para concretamente calcular a integral (2.2.2.16), temos que conhecer o termo  $dn/d\epsilon$ . Isto é possível com o auxílio

do modelo de gás de Fermi para o núcleo. Segundo este modelo, os meio-espaçamentos de nível perto da superfície de Fermi são dados por:

$$d_{ij}(N_i) = \left[ \left(1 + \frac{(j-2)}{N_i}\right)^{2/3} - \left(1 + \frac{(j-3)}{N_i}\right)^{2/3} \right] \epsilon_F(N_i) \quad (2.2.2.17)$$

onde  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3, 4$ , com  $N_1$  sendo a densidade de número de prótons e  $N_2$  a densidade de número de neutrons.

A energia de Fermi do gás é:

$$\epsilon_F(N_i) = \frac{76.52}{(M_n^*/M_n)r_0^2} \left(\frac{N_i}{A}\right)^{2/3} \text{ MeV} \quad (2.2.2.18)$$

Em (2.2.2.18),  $M_n$  é a massa do nucleon,  $M_n^*$  a sua massa efetiva. Usamos, em nossos cálculos,  $M_n^*/M_n = 0.6$ . O valor de  $r_0$  é a constante que encontramos na expressão do raio nuclear e aqui é tomado como 1.2 fm. Para núcleos com  $A < 50$ , entretanto, admitimos  $r_0 = 1.3$  fm.

A distribuição de níveis é dada por (37):

$$\frac{dn_1}{d\epsilon} = \left(\frac{dn_1}{d\epsilon}\right)_F h_1(\epsilon) + 2\delta(\epsilon - \epsilon_1) \quad (2.2.2.19)$$

onde

$$h_1(\epsilon) = 1 \quad \text{se} \quad \epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_1 + \Delta_1 - d_{11}(N_1)$$

$$= 0 \quad \text{do contrário}$$

e

$$\left(\frac{dn_1}{d\epsilon}\right)_F = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi V \left[ 2 M_n^{*3} (\epsilon - \epsilon_{\min}) \right]^{1/2} \quad (2.2.2.20)$$

com

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

e

$$\epsilon_{m\bar{n}} = \epsilon_1 + \Delta_1 + d_{12}(N_1) - \epsilon_F(N_1) \quad (2.2.2.21)$$

sendo  $\epsilon_1$  e  $\epsilon$  as energias de partícula simples inicial e final.

A função peso é dada por:

$$\begin{aligned} W(E, \epsilon) &= 1 && \text{para } \epsilon + E \geq \epsilon_1 - Q \\ &= 0 && \text{do contrário} \end{aligned}$$

### 3) Funções Intensidade de Partícula Única

Para funções intensidade de partícula única, existem quatro candidatos: a Gaussiana, a exponencial, a Lorentziana e a Lorentziana modificada. Neste trabalho, escolhemos a forma Lorentziana modificada, porque dentre todas ela é que mostrou melhor ajuste com os resultados obtidos do decaimento beta.

No caso de transições de Fermi, ela tem a seguinte forma (37):

$$D_F^0(E, \epsilon) = \frac{\sigma_c^2 + \gamma^2}{\pi} \cdot \frac{\sigma_c^2}{\gamma} \cdot \frac{1}{(E - \Delta_c)^2 + (\sigma_c^2/\gamma)^2} \cdot \frac{1}{(E - \Delta_c)^2 + \gamma^2} \quad (2.2.2.22)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro de largura que tomamos arbitrariamente como sendo igual a 100 MeV. As expressões de  $\Delta_c$  e  $\sigma_c$  são obtidas das regras de soma para as funções de intensidade de partícula única, que são as seguintes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_F^0(E, \epsilon) dE = \quad (2.2.2.23)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} (E - \Delta_C)^2 D_F^0(E, \epsilon) dE \equiv \sigma_C^2 \approx \left[ \frac{0.157}{r_0^{1/1.2}} \frac{Z_1}{A^{1/3}} \right]^2 \text{ MeV}^2 \quad (2.2.2.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E D_F^0(E, \epsilon) dE \equiv \Delta_C \approx - \left[ \frac{1.44}{r_0^{1/1.2}} \frac{Z_1}{A^{1/3}} - 0.7825 \right] \text{ MeV} \quad (2.2.2.25)$$

onde  $Z_1$  é o menor dos números atômicos do núcleo pai e núcleo filho.

Fisicamente,  $\Delta_C$  representa o deslocamento de energia na ressonância do estado análogo isobárico e  $\sigma_C$ , a largura da ressonância devido à interação Coulombiana.

No caso das transições de Gamow-Teller, as regras de soma são:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{GT}^0(E, \epsilon) dE = 1 \quad (2.2.2.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (E - \Delta_C)^2 D_{GT}^0(E, \epsilon) dE \approx \sigma_C^2 + \sigma_N^2 \quad (2.2.2.27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E D_{GT}^0(E, \epsilon) dE \approx \Delta_C \quad (2.2.2.28)$$

Portanto, a função intensidade de partícula única para tais transições é dada também pela eq. (2.2.2.22), bastando substituir  $\sigma_C$  por  $\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_N^2}$ , onde  $\sigma_N$  é a largura de ressonância devido à interação nuclear. O valor do parâmetro  $\sigma_N$  foi escolhido como sendo  $\sigma_N = 12$  MeV, após a análise dos valores de meia-vida do decaimento beta.

#### 4) Termo de Emparelhamento

A diferença de massa par-ímpar (efeito par-ímpar) é incorporada pela teoria grossa, através de um emparelhamento adicional. Este emparelhamento é simulado pelo deslocamento dos quatro níveis discretos da seguinte forma: os níveis abaixo do nível de Fermi são abaixados de  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2$ , em que 1 se refere a prótons e 2 a neutrons) e aqueles acima do nível de Fermi, levantados de  $\Delta_i$ , de modo que o termo de emparelhamento na fórmula de massa é dado por:

$$\delta = (d_{ij}/2) + \Delta_i \quad (2.2.2.29)$$

Por simplicidade, tomamos  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.85$  para todo núcleo (Z,A).

#### 2.2.3 - Emissão Retardada de Neutron

Como já mencionamos, quando o estado final tem energia igual ou superior a  $S_n$ , pode ocorrer emissão de neutron. Neste caso, a eq. (2.2.2.11) pode ser separada em duas partes: uma correspondendo à contribuição da captura eletrônica, que leva a um estado final com energia abaixo de  $S_n$ , e outra, correspondendo à emissão retardada de neutron (estado final com energia igual ou maior que  $S_n$ ).

Deste modo, a taxa de captura se re-escreve:

$$\lambda_c = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^{S_n} \left[ |g_F|^2 |M_F(E)|^2 + |g_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \right] f(-E) dE \quad (2.2.3.30)$$

E a taxa de emissão de neutron é dada por:

$$\lambda_d = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 h^7} \int_{S_n}^{\epsilon_F} \left[ |g_F|^2 |M_F(E)|^2 + |g_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \right] f(-E) dE \quad (2.2.3.31)$$

A rigor, temos que levar em conta, na eq. (2.2.3.31), um fator estatístico  $\Gamma_n / (\Gamma_n + \Gamma_\gamma)$  onde  $\Gamma_n$  é a largura do canal de emissão retardada de neutron e  $\Gamma_\gamma$ , a do canal de emissão do fóton. Contudo, cometemos erro desprezível se colocarmos  $\Gamma_\gamma = 0$ , o que efetivamente fizemos. Os detalhes para determinar, pela teoria grossa, as integrais (2.2.3.30) e (2.2.3.31) são explicados no Apêndice B.

#### 2.2.4 - Expressões Aproximadas para as Taxas

As eqs. (2.2.3.30) e (2.2.3.31) fornecem as taxas de captura  $\lambda_c$  e de emissão retardada de neutron  $\lambda_d$  como funções da energia de Fermi e do valor  $Q$ . Interessa-nos obter, para um dado núcleo ( $Q$  fixo) e uma dada densidade ( $\epsilon_F$  fixa), fórmulas mais simples, mesmo que aproximadas, a fim de que possam ser utilizadas no cálculo hidrodinâmico.

Antes de mais nada, notamos que, na faixa de densidade que nos interessa, a taxa de captura e de emissão retardada são funções bem comportadas e aproximadamente parabólicas na escala log-log. Isto nos sugere fitar as taxas a um polinômio do 2º grau, em que a variável independente é o logaritmo das taxas. Os coeficientes, então, foram devidamente tabelados, de modo que, para um dado núcleo e uma dada densidade, a taxa de captura ou a taxa de emissão retardada possam ser escritas como

$$\log \lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - \log \rho)}}{2a} \quad (2.2.4.32)$$

onde a, b e c são coeficientes tabelados, e log denota logaritmo na base 10.

### 2.2.5 - Energia Média dos Neutrinos na Captura Eletrônica

Um elétron, com energia cinética  $E_e$ ,

$$0 \leq E_e \leq \epsilon_F / m_e c^2,$$

pode ser capturado pelo núcleo de energia  $E_i$  e disso resultarem um neutrino de energia  $E_\nu$  e um núcleo filho com energia  $E_f$  (Fig. 2.2.5.3).

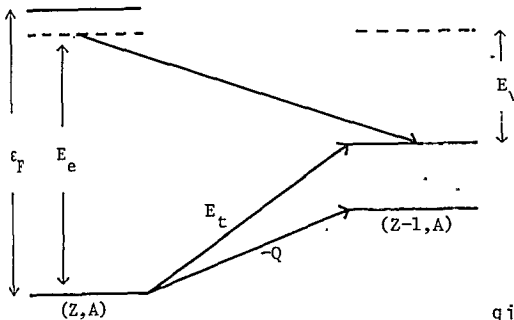


Figura 2.2.5.3 - Energias relevantes na captura eletrônica.

Denotando a energia de transição  $E_f - E_i$  por  $E_t$ , e escrevendo agora todas as energias em unidades de  $m_e c^2$ , temos:

$$E_\nu = E_e - E_t = W - E_t$$

onde  $W = E_e + 1$ .

A energia média dos neutrinos, por definição,  $\bar{E}$  é dada por:

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{\int_{-Q}^{\epsilon_F} \left[ |g_F|^2 |M_F(E)|^2 + |g_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \right] \int_{E_t+1}^{\epsilon_F} W \sqrt{W^2-1} F(Z,A,W) (W-1-E_t)^3 dW dE_t}{\int_{-Q}^{\epsilon_F} \left[ |g_F|^2 |M_F(E)|^2 + |g_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \right] \int_{E_t+1}^{\epsilon_F} W \sqrt{W^2-1} F(Z,A,W) (W-1-E_t)^2 dW dE_t} \quad (2.2.5.33)$$

No caso das transições permitidas, uma simplificação sensível podemos fazer, visto que os elementos de matriz são en tão aproximadamente independentes da energia. Por outro lado, como lidamos com núcleos que têm Z pequeno e com uma faixa de energia de elétrons  $\geq 2$  MeV,  $\bar{E}$  bastante razoável colocarmos

$$F(Z,A,W) \approx \text{const.}$$

Então, a eq. (2.2.5.33) reduz a:

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{\int_{-Q}^{\epsilon_F} dE_t \int_{E_t+1}^{\epsilon_F} W \sqrt{W^2-1} (W-1-E_t)^3 dW}{\int_{-Q}^{\epsilon_F} dE_t \int_{E_t+1}^{\epsilon_F} W \sqrt{W^2-1} (W-1-E_t)^2 dW} \quad (2.2.5.34)$$

Notando que integrar primeiro na variável W, de  $E_t+1$  a  $\epsilon_F$ , e depois na variável  $E_t$ , de  $-Q$  a  $\epsilon_F$ , é a mesmíssima coisa que integrar primeiro em  $E_t$ , de  $-Q$  a  $W+1$ , e depois em W, de  $-Q$  a  $\epsilon_F$ , vem:

$$\langle E_V \rangle = \frac{\frac{1}{4} \int_{-Q}^{\epsilon_F} W \sqrt{W^2 - 1} (W - W_0)^4 dW}{\frac{1}{3} \int_{-Q}^{\epsilon_F} W \sqrt{W^2 - 1} (W - W_0)^3 dW} \quad (2.2.5.35)$$

A fim de calcular analiticamente as integrais em (2.2.5.35), fazemos uma aproximação adicional:

$$\sqrt{W^2 - 1} \approx W - \frac{1}{2W}$$

Integrando, termo a termo, encontramos:

$$\langle E_V \rangle = \frac{\frac{3}{4} \frac{1}{7} (\epsilon_F + Q)^2 + \frac{1}{3} W_0 (\epsilon_F + Q) + \frac{1}{5} (W_0^2 - \frac{1}{2})}{\frac{1}{6} (\epsilon_F + Q)^2 + \frac{3}{5} W_0 (\epsilon_F + Q) + \frac{1}{4} (W_0^2 - \frac{1}{2})} (\epsilon_F + Q) \quad (2.2.5.36)$$

onde  $W_0 = -Q + 1$ .

No caso de  $\epsilon_F \gg -Q$ , a eq. (2.3.5.36) fornece

$$\langle E_V \rangle \approx \frac{9}{14} (\epsilon_F + Q) \quad (2.2.5.37)$$

e no caso de  $\epsilon_F \approx -Q$ ,

$$\langle E_V \rangle \approx \frac{3}{5} (\epsilon_F + Q) \quad (2.2.5.38)$$

### 2.2.6 - Taxa de Captura a Temperatura Finita

Evidentemente, as taxas, tanto de captura eletrônica quanto de emissão retardada de neutron; variam com a temperatura. Lembrando que a taxa de captura é proporcional à densidade

de elétrons, então podemos escrever, seguindo Egawa et al. (31):

$$\lambda_c(\rho/\mu_e, T) = \int_{m_e c^2}^{\infty} \theta(\epsilon) f(\epsilon, T) d\epsilon \quad (2.2.6.39)$$

onde

$$\epsilon = \omega m_e c^2$$

e

$$f(\epsilon, T) = \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{(\epsilon - \mu)}{kT} \right] \right\}^{-1} \quad (2.2.6.40)$$

que  $\bar{\epsilon}$  é a distribuição de Férmi. Na eq. (2.2.6.40),  $\mu$  é o potencial químico, que é relacionado com  $\rho/\mu_e$  por:

$$\frac{\rho}{\mu_e} = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3 N_A} \int_{m_e c^2}^{\infty} \epsilon (\epsilon^2 - m_e^2 c^4)^{1/2} f(\epsilon, T) d\epsilon \quad (2.2.6.41)$$

onde  $N_A$  é o número de Avogadro. Em (2.2.6.41), desprezamos o efeito de criação de par.

Integrando a eq. (2.2.6.39) por partes, encontramos:

$$\lambda_c(\rho/\mu_e, T) = - \int_{m_e c^2}^{\infty} \left[ \int_{m_e c^2}^{\epsilon} \theta(\epsilon') d\epsilon' \right] \frac{df(\epsilon, T)}{d\epsilon} d\epsilon \quad (2.2.6.42)$$

O termo entre colchetes pode ser identificado como  $\lambda_c(\rho'/\mu_e, T = 0)$  se  $\epsilon$  for encarado como energia de Fermi do gás degenerado.

Desse modo:

$$\lambda_c(\rho/\mu_e, T) = - \int_{m_e c^2}^{\infty} \lambda_c(\rho'/\mu_e, T=0) \frac{df(\epsilon, T)}{d\epsilon} d\epsilon \quad (2.2.6.43)$$

onde

$$\epsilon^2 = \frac{1}{h^2 c^2} (3\pi^2 N_A \rho' / \mu_e)^{2/3} + m_e^2 c^4 \quad (2.2.6.44)$$

Notemos que, quando  $(\epsilon - \mu)/kT \ll 1$ ,

$$\lambda_c(\rho/\mu_e, T) \rightarrow \lambda_c(\rho/\mu_e, T=0) .$$

Entretanto, levar em consideração a temperatura na determinação das taxas equivale a aumentar o tempo de cálculo a um nível atualmente proibitivo. Embora seja importante usar os valores das taxas dados pela eq. (2.2.6.42), nós nos limitamos neste trabalho à aproximação de temperatura zero.

### 2.3 - OPACIDADE DE NEUTRINOS

Chegamos aqui a um ponto crucial do problema: a opacidade da matéria estelar aos neutrinos. Este ponto, aliás, é estreitamente relacionado com a questão do transporte de neutrinos, que até hoje não foi satisfatoriamente resolvido. A interligação entre opacidade e transporte de neutrinos significa na prática que hipóteses ou simplificações feitas sobre um condicionam as hipóteses ou simplificações sobre outro.

Vamos discutir, então, primeiramente o problema do transporte de neutrinos.

Quem, pela primeira vez, tratou do transporte de neutrinos durante o colapso gravitacional de caroços estelares, foi Wilson <sup>(10)</sup> em 1971, que aplicou a equação de Boltzmann no contexto da Relatividade Geral. Em 1973, Imshennik e Nadezhin <sup>(38)</sup>



introduziram um tratamento aproximado, baseado na idéia de condutibilidade térmica (análoga ao caso de fótons). Em 1977, Yueh e Buchler<sup>(39)</sup> fizeram um estudo pelo método  $S_n$  (esquema de ângulo discreto), mas usando um modelo estático (congelado) de caroço estelar. Mais recentemente, ainda em 1977, Arnett<sup>(40)</sup> atacou o problema, desde o início do colapso até a reflexão do caroço, encarando o transporte como um processo de difusão, em que aos neutrinos são atribuídos um índice de grupo de energia, de modo a poder se trabalhar com diferenças finitas no espaço das energias. Além disto, ele introduziu dois grupos de energia limite: um grupo de energia inferior, que permite o escape livre do fluxo, outro de energia superior, que dá o confinamento completo. É o que ele chama de difusão de multigrupos de fluxo limitado. Como equação, ele utilizou a de Castor<sup>(41)</sup> (modificada de forma a levar em conta propriamente a conservação do número leptônico) para o caso esfericamente simétrico..

Infelizmente, todos estes métodos de resolver a transferência de energia dos neutrinos (não obstante a sofisticação de alguns deles) não permitem ainda tirar uma conclusão sobre o papel dos neutrinos na ejeção da matéria nas supernovas. Com efeito, o quadro está no seguinte pé:

Os resultados de Wilson não esclarecem se o fluxo de neutrinos provoca explosão ou se apenas um colapso continuado. Bruenn<sup>(42)</sup>, em 1975, com uma investigação semelhante a de Wilson, também chegou a resultados não-conclusivos. Por outro lado, Arnett, em seu trabalho, mostrou que as opacidades são grandes demais para permitir transporte de neutrinos, dando como resultado um forte confinamento dos neutrinos (segundo seus cálculos, metade deles permanece ainda retida na matéria por ocasião

da reflexão do carço). Este resultado, contudo, não o permitiu afirmar senão que "as condições na reflexão do carço são próximas da fronteira entre valores que provocam ejeção de massa por uma onda refletida e aqueles que não a provocam".

Somos de opinião de que é possível chegar a uma conclusão mais definida, desde que se resolvam simultaneamente as equações básicas da Hidrodinâmica (incluindo a equação de transferência) e as equações de reação nuclear (em especial, a de captura eletrônica), e mesmo que a equação de transporte tenha somente aproximação de ordem zero. É claro que o peso molecular médio dos elétrons, neste esquema, tem que ser calculado como variável dependente tanto da evolução dinâmica do carço como também da difusão dos neutrinos.

A fim de evitar, então, o tratamento complicado da equação de transporte de neutrinos (equação de Navier-Stokes), várias aproximações simples foram apresentadas e podem ser usadas, desde que sejam satisfeitas as condições de aplicabilidade.

As aproximações mais simples são as seguintes:

#### 1) Deposição de Neutrinos

Colgate e White simplificaram drasticamente o problema de transporte, admitindo que a transferência de energia se realize por emissão e deposição de neutrinos. Eles se fundamentaram no fato de que o livre percurso médio dos neutrinos é, segundo as estimativas feitas, igual a 1/10 da altura de escala  $h$  ( $h = \left[ \frac{d \log \rho}{dr} \right]^{-1}$ ). Assim, é razoável pensar que os neutrinos, uma vez emitidos no carço, sejam automaticamente depositados na envoltória da estrela. É justamente o calor proveniente des-

te fluxo de neutrinos, depositado na matéria a um potencial gravitacional menor, que ejeta a envoltória da estrela.

## 2) Difusão de Neutrinos

Utilizado por Arnett em 1967, este esquema supõe a termalização dos neutrinos (isto é, equilíbrio térmico entre neutrinos e o meio), que é devido principalmente ao espalhamento leptônico, e em especial, ao espalhamento não-conservativo elétron-neutrino. Convém lembrar que a termalização implica apenas equilíbrio térmico, mas não necessariamente o equilíbrio químico. Mais claramente, a hipótese de neutrinos termalizados significa que a função de distribuição pode ser dada pela função de Planck  $B_\nu(T)$ ,

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \exp(h\nu/kT) - 1 \right]^{-1} \quad (2.3.45)$$

mas

$$\mu_\nu = \mu_p + \mu_e - \mu_n, \quad (2.3.46)$$

onde as quantidades denotam o potencial químico do neutrino, próton, elétron e neutrino (na ordem em que aparecem), não é necessariamente verificada.

Um aspecto importante em caroços de supernova deve ser mencionado: o equilíbrio térmico é atingido antes do equilíbrio químico. A razão é que as taxas de espalhamento nesta região são maiores que as de reação.

Coerente com a suposição de equilíbrio termodinâmico local, podemos ainda substituir o espectro de neutrinos na camada de absorção ou espalhamento pelo seu valor médio, que é dado

por  $\langle E_\nu \rangle \approx 3kT$ . É evidente que a média da energia dos neutrinos na camada de emissão tem valor diferente, e é dada pela eq. (2.2.5.36).

### 3) Parametrização

A aproximação mais simples para o transporte de neutrinos é o de curto-circuitar o problema, introduzindo um parâmetro. Este procedimento é justificável por duas razões: primeira, tal como mencionamos acima, a questão do fluxo de neutrinos ainda é bastante controversa; segunda, estamos interessados apenas na discussão do papel da captura como acionador do colapso e não nos detalhes da transferência dos neutrinos.

Porém, mesmo adotando a parametrização para o problema de transporte de neutrinos, achamos importante apresentar a questão da opacidade, indispensável a um bom entendimento de todo o processo do colapso.

#### 2.3.1 - Média de Rosseland

O coeficiente de absorção ou espalhamento de neutrino  $k_\nu$  é definido em analogia com a de fótons, isto é,

$$k_\nu \equiv 1/\rho\lambda_\nu \quad (2.3.1.47)$$

onde  $\lambda_\nu$  é o livre percurso médio do neutrino (função de sua frequência  $\nu$ ). Ou, em termos de seção de choque,

$$k_\nu = \sigma_\nu n/\rho \quad (2.3.1.48)$$

onde  $\sigma_\nu$  é a seção de choque e  $n$  a densidade de número da partí-

cula que interage com o neutrino. Coeficientes de absorção e de espalhamento tem dimensões de  $\text{cm}^2\text{g}^{-1}$ .

Nos cálculos hidrodinâmicos, entretanto, temos que usar um valor médio, visto que os coeficientes de absorção e de espalhamento dependem do espectro de neutrinos. Em geral, a média mais apropriada é a chamada média de Rosseland, dada por:

$$\frac{1}{K} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sum k_{\nu}^a + \sum k_{\nu}^e} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu \bigg/ \int_0^{\infty} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu \quad (2.3.1.49)$$

onde  $B_{\nu}(T)$  é a função de Planck e  $k_{\nu}^a$  é dado por

$$k_{\nu}^a = k_{\nu}^a \left[ 1 - \exp(-h\nu/kT) \right] \quad (2.3.1.50)$$

sendo  $k_{\nu}^a$  e  $k_{\nu}^e$  coeficientes de absorção e de espalhamento, respectivamente. A eq. (2.3.1.49) define a opacidade K, que é uma espécie de média harmônica dos  $k_{\nu}^a$  e  $k_{\nu}^e$ .

O tempo de cálculo impõe uma simplificação severa, embora de muito pouca influência nos resultados finais. A simplificação consiste em admitir um valor constante para a energia do neutrino, que tomamos como sendo o seu valor médio na zona de absorção ou espalhamento, dado por  $\langle E_{\nu} \rangle \approx 3kT$ . Em consequência, a opacidade é dada simplesmente por

$$K = \sum k_{\nu}^a (\nu = \langle \nu \rangle) \left[ 1 - \exp(-h\langle \nu \rangle/kT) \right] + \sum k_{\nu}^e (\nu = \langle \nu \rangle) . \quad (2.3.1.51)$$

### 2.3.2 - Correntes Neutras

É bem conhecido que os leptons (o elétron, o muon, o neutrino eletrônico, o neutrino muônico e as respectivas anti-partículas) e, possivelmente, os leptons pesados e seus associados (por exemplo, o tau e o neutrino tauônico) interagem apenas com os fótons (responsáveis pela interação eletromagnética) e com os mésons intermediários (os prováveis responsáveis pela interação fraca). Este fato levou os teóricos a procurarem unificar a interação eletromagnética com a interação fraca, de modo que estes bósons (o fóton e o méson intermediário, ambos de spin 1) possam ser considerados como membros de um multiplete de campos de simetria.

Com efeito, em 1967, Weinberg<sup>(43)</sup> propôs um modelo renormalizável para unificar as duas interações, introduzindo o fóton e os campos de méson intermediário como campos de gauge.

O modelo de Weinberg prediz a existência de um méson intermediário neutro Z, além de um bóson carregado W, o que, ao contrário da teoria V-A, implica na presença de correntes neutras na interação fraca, do tipo  $(\bar{\nu}_e \nu_e)(e^+ e^-)$ .

Isto deu origem a grandes esforços no sentido de detectar experimentalmente o bóson Z<sup>(\*)</sup>. Contudo, dificuldades experimentais, devido ao fato de que nas reações de correntes neutras os neutrinos de estado inicial e de estado final são de difícil

---

(\*) A massa do bóson Z é maior que 76 GeV.

observação, frustraram toda e qualquer tentativa, até que Hasert et al. (44) em 1973 encontraram os primeiros indícios da existência do bóson intermediário Z. Deste modo, novos processos, antes não considerados, devem agora ser incluídos nos cálculos de opacidade. Como exemplo, citamos o espalhamento coerente de neutrinos por núcleos, isto é, o neutrino é espalhado pelos núcleons como um todo.

### 2.3.3 - Principais Processos de Neutrino

As principais contribuições à opacidade vem de processos de interação fraca (desprezamos a opacidade de fótons), que ocorrem, quer via uma corrente carregada (através de um bóson W), quer via uma corrente neutra (através de um bóson Z) ou ainda via ambas (W e Z). Em resumo, são os seguintes:

- 1)  $\nu_e + n \xrightarrow{W} p + e^-$  (absorção)
- 2)  $\bar{\nu}_e + p \xrightarrow{W} n + e^+$  (absorção)
- 3)  $\nu_e + (Z, A) \xrightarrow{W} (Z+1, A) + e^-$  (absorção por um neutrão dentro do núcleo)
- 4)  $\bar{\nu}_e + (Z, A) \xrightarrow{W} (Z-1, A) + e^+$  (absorção por um próton dentro do núcleo)
- 5)  $\nu_e + n \xrightarrow{Z} \nu_e + n$  (espalhamento) (2.3.3.52)
- 6)  $\nu_e + p \xrightarrow{Z} \nu_e + p$  (espalhamento)
- 7)  $\nu_e + \nu_e \xrightarrow{Z} \nu_e + \nu_e$  (espalhamento)
- 8)  $\nu_e + (Z, A) \xrightarrow{Z} \nu_e + (Z, A)$  (espalhamento coerente)
- 9)  $\nu_e + e \xrightarrow{Z, W} \nu_e + e^-$  (espalhamento)

Dos processos acima, apenas o espalhamento neutrino-neutrino e elétron-neutrino são processos leptônicos puros (sem correntes bariônicas). Todos os outros são processos semi-leptônicos.

No colapso gravitacional, os processos leptônicos dominam sobre os semi-leptônicos, desde que a energia térmica seja superior à energia de repouso dos elétrons. No caso de processos, como o espalhamento elétron-neutrino, em que, além da corrente carregada, existe uma mistura de corrente neutra, a taxa não sofre nenhuma mudança sensível por causa dessa mistura.

Devemos lembrar ainda que, no caso de já existir um gás degenerado de elétrons no meio, então tanto a absorção de neutrino pelo neutron (processo 1) quanto por neutron no interior do núcleo (processo 3) apresentam fatores de inibição. Esta inibição significa, em última análise, que o processo deixa de ocorrer quando o elétron tiver energia inferior à energia de Fermi do gás circundante. A razão é que, neste caso, não há nível acessível no espaço de fase para o estado final. Os processos (2) e (4), com emissão de pósitrons, não apresentam inibição, porque estes são supostos não-degenerados.

Por outro lado, sabemos que, quando a matéria fica opaca a neutrinos, estes ficam aprisionados no carocô estelar e formam um gás de neutrinos, que pode ser degenerado. Neste caso, os processos que envolvem neutrinos no estado final também apresentam fatores de inibição. Contudo, aqui não levaremos em consideração a degenerescência dos neutrinos.

O fator de inibição para os processos de absorção por neutron e por núcleos pode ser aproximado por<sup>(45)</sup>:



$$f = \left[ 1 + \exp (\omega + Q - \mu_e) / kT \right]^{-1} \quad (2.3.3.53)$$

onde  $\mu_e$  e  $\omega$  denotam o potencial químico do elétron e a energia do neutrino, respectivamente, e  $Q$ , o valor  $Q$  da reação.

### 2.3.4 - Seções de Choque

Vamos considerar apenas os processos mais efetivos. Assim, trataremos dos seguintes:

#### 1) Absorção por Neutron (Processo 1)

Esta reação foi pela primeira vez estudada por Euwema <sup>(46)</sup> em 1964. Como ela se processa unicamente via bóson carregado,  $W$ , a sua seção de choque não é alterada pela teoria de Weinberg. Entretanto, Euwema apresentou a absorção numa forma que não é fácil de se aplicar em cálculos de opacidade de neutrinos nem deixa explícito o fator de inibição. Schramm e Arnett <sup>(45)</sup> em 1975 mostraram que a seção de choque pode ser escrita como:

$$\sigma_{\nu n} = 5.05 \sigma_0 \omega^2 \left(1 + \frac{Q}{\omega}\right) \left(1 + 2 \frac{Q}{\omega} + \frac{Q^2 - m_e^2 c^4}{\omega^2}\right)^{1/2} (1-f) \quad (2.3.4.54)$$

onde  $\sigma_0 = 1.7 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$ ,  $\omega$  a energia do neutrino em MeV,  $Q$  a diferença de massa neutron-próton (1.3 MeV),  $f$  o fator de inibição, dado pela eq. (2.3.4.53). As seções de choque aqui são dadas sempre no sistema CGS.

Se a fração em massa de neutron livre é  $X_n$ , então, pela igualdade (2.3.1.47), o coeficiente de absorção tem por ex -

pressão:

$$k_V^a = N_A \sigma_{\nu n} X_n \quad (2.3.4.55)$$

onde  $N_A = 6.022450 \times 10^{23}$  é o número de Avogadro.

### 2) Absorção por Núcleo Complexo (Processo 3)

Neste caso, seguindo Sato<sup>(14)</sup>, a seção de choque fica:

$$\sigma_{\nu N} = \frac{2\pi^2}{3} \ln 2 \langle \rho_L | ft \rangle \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 m_e c \left[ \left\{ \omega + M(Z, A+1) c^2 - M(Z+1, A+1) c^2 \right\} / m_e c^2 \right]^3 (1-f) \quad (2.3.4.56)$$

onde  $\langle \rho_L | ft \rangle$  é a função intensidade de decaimento beta, que admitimos como sendo igual a  $10^{-5.5} \text{ MeV}^{-1} \text{ seg}^{-1}$ .

Deste modo, denotando a fração em massa de núcleos  $(Z, A)$  por  $X_A$ , o coeficiente de absorção correspondente é:

$$k_V^a = N_A X_A \sigma_{\nu N} / A \quad (2.3.4.57)$$

Evidentemente, para levarmos em conta todas as contribuições, teremos que somar sobre todos os núcleos presentes.

### 3) Espalhamento Elétron-Neutrino (Processo 9)

Este processo ocorre tanto através da troca de um bóson carregado  $W$  quanto através de um méson neutro  $Z$ . A seção de choque para o espalhamento elétron-neutrino, sem correntes neutras, foi calculado em 1964 por Bahcall<sup>(47)</sup>. Em 1971, já incluindo correntes neutras, 't Hooft<sup>(48)</sup> aplicou a teoria de Weinberg e obteve:

$$\sigma = \frac{1}{4} \left[ (g_V + g_A)^2 + \frac{1}{3} (g_V - g_A)^2 + (g_A^2 - g_V^2) \frac{m_e c^2}{2\omega} \right] \sigma_e^{\text{CVC}}$$

ou

$$\sigma = \frac{1}{3} (g_V^2 + g_A^2 + g_A g_V) \sigma_{ev}^{CVC} \quad \text{para} \quad \omega \gg m_e c^2/2 \quad (2.3.4.58)$$

onde  $g_V$  e  $g_A$  são constantes de acoplamento das interações vetorial e axial respectivamente e  $\sigma_{ev}^{CVC} = \sigma_0 (\omega/m_e c^2)^2 \bar{e}$  é a seção de choque de espalhamento elétron-neutrino sob a teoria CVC usual (hipótese de corrente vetorial conservada, isto é,  $g_A = -g_V = 1$ ).

O coeficiente de espalhamento  $\bar{e}$  dado, então, por:

$$k_v^e = N_A \sigma_e^{CVC} \left[ \frac{a_0^2}{3} + \frac{a_0}{2} + \frac{1}{4} \right] \frac{n_e}{n_b} \text{Min}(1, \frac{\mu_e}{\omega}) + \frac{1}{4} \frac{n_e}{n_b} \text{Min}(1, \frac{\mu_\nu}{\omega}) \quad (2.3.4.59)$$

onde  $n_e$ ,  $n_\nu$ ,  $n_b$  são as densidades de número de elétron, neutrino e barion, respectivamente,  $\text{Min}(a,b)$  denota o menor valor entre  $a$  e  $b$ ,  $a_0$  o coeficiente da parte isoescalar da corrente neutra, dado por

$$a_0 = 2 \text{sen}^2 \theta_W \quad (2.3.4.60)$$

onde  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg. Os resultados experimentais são consistentes com  $0.3 \lesssim \text{sen}^2 \theta_W \lesssim 0.4$ . Aqui tomamos o valor 0.3.

É importante notar que a quantidade de energia transferida pelo neutrino ao plasma, dada por

$$\Delta\omega = \langle \omega - \omega' \rangle \quad (2.3.4.61)$$

onde  $\omega$  e  $\omega'$  são as energias dos neutrinos incidente e espalhado, respectivamente, tem as seguintes expressões:

$$\Delta\omega \approx \omega/2 \quad (\text{no caso de elétrons degenerados e relativísticos})$$

$$\Delta\omega \approx (1-4kT/\omega) \omega/2 \quad (\text{no caso de elétrons não-degenerados e relativísticos}).$$

Vemos, então, que para altas temperaturas e baixas energias do neutrino, o processo de espalhamento neutrino-elétron esfria a matéria, em vez de esquentar. O fato de que, nestas condições, o neutrino ganha energia, ao invés de perder, se explica pela presença de um mar de Fermi não completamente preenchido.

Tubbs e Schramm<sup>(49)</sup> mostraram que a inclusão de corrente neutra no espalhamento elétron-neutrino, no caso de elétrons relativísticos, tem apenas um efeito marginal na taxa e na seção de choque média, calculadas pela teoria V-A (reduz em aproximadamente 20%). Schramm e Arnett<sup>(45)</sup>, por outro lado, encontraram que, em se tratando de neutrinos de alta energia, a absorção por nucleon domina, enquanto que, no caso de neutrinos de baixa energia, o espalhamento por elétron prevalece.

#### 4) Espalhamento Coerente (Processo 8)

Freedman<sup>(50)</sup> em 1974 mostrou que, se a interação fraca contém correntes neutras, então os nucleons ligados dentro de um núcleo podem espalhar coherentemente o neutrino, de forma análoga ao espalhamento Mott de elétrons de alta energia. Ele calculou a seção de choque para núcleos com  $Z = N = A/2$  e  $S = 0$  (núcleos par-par), a fim de ter apenas a componente isoescalar na corrente neutra. O resultado a que chegou é:

$$\sigma_{ec} \approx \frac{1}{4} a_0^2 \sigma_0 A^2 \omega^2 \left(1 - \frac{8}{3} b \omega^2 + \dots\right) \quad (2.3.4.62)$$

onde o parâmetro  $b$  é relacionado com o valor rms do raio nuclear,  $b = r^2/6 = 4.8 \times 10^{-6} A^{2/3} \text{ MeV}^{-2}$ .

Vemos que, da mesma forma que o espalhamento Mott é

proporcional a  $Z^2$ , o espalhamento coerente é proporcional a  $A^2$ .

Na eq. (2.3.4.62), fizemos a hipótese de que o momentum transferido  $q$  do neutrino é desprezível em relação à massa  $M$  do núcleo (mais precisamente,  $q^2 \ll M^2 c^2$ ). Esta hipótese de baixas energias é apropriada às condições astrofísicas.

O coeficiente de espalhamento para este processo é:

$$k_{\nu}^e = N_A \sigma_{ec} X_A \quad (2.3.4.63)$$

Sato calculou que, por causa do espalhamento coerente, a opacidade se torna cerca de  $A^2/4Z$  vezes maior que a obtida pela teoria CVC, até o ponto de dissociação dos núcleos.

Sendo pequeno o momentum transferido (por causa da grande massa do núcleo em relação à energia do neutrino  $\sim 16\text{MeV}$ ), as energias inicial e final do neutrino são aproximadamente iguais. Isto significa que no espalhamento coerente não ocorre quase nenhuma transferência de energia. Em contrapartida, há uma grande troca de momentum, porque o ângulo de espalhamento médio dá, para este caso, cerca de  $70^\circ$ .

A importância do espalhamento coerente está na seguinte possibilidade: um neutrino, emitido no caroço estelar (que nos instantes finais da implosão deve apresentar todos os núcleos já desintegrados em nucleons livres), vai transferir bastante momentum para os núcleos da envoltória (com  $A \sim 56$ ) que está caindo sobre o caroço. Isto pode fornecer um eficiente mecanismo de ejeção de massa, tal como discutido no Capítulo I.

##### 5) Espalhamento por Nucleons (Processos 5 e 6)

As seções de choque por neutrons e prótons, derivadas

dos resultados de Weinberg (43), são simplesmente:

$$\sigma_n = 1.33 \sigma_{ev}^{CVC}/8 \quad (2.3.4.64)$$

e

$$\sigma_p = \left[ 1.08 + (0.5 - a_0)^2 \right] \sigma_{ev}^{CVC}/8 \quad (2.3.4.65)$$

O coeficiente de espalhamento se escreve então:

$$k_v^e = \frac{N_A \sigma_{ev}^{CVC}}{4} \left[ (1 - \langle \cos \theta \rangle) A a_0^2 X_A + 0.5 \left\{ 1.08 + (0.5 - a_0)^2 \right\} X_p + 0.665 X_n \right] \quad (2.3.4.66)$$

onde  $X_n$  e  $X_p$  são frações em massa de neutrons e prótons livres, respectivamente. O primeiro termo no lado direito da eq. (2.3.4.66) corresponde à contribuição devido aos nucleons dentro dos núcleos.

Tomamos o ângulo de espalhamento médio  $\langle \cos \theta \rangle$  igual a 1/3, conforme explicação dada no item 4.

## CAPÍTULO III

### EQUAÇÕES DE REAÇÃO NUCLEAR

#### 3.1 - MASSAS NUCLEARES

Vamos, antes de prosseguir, discutir um tópico importante, que é o de massas nucleares. O problema pode ser colocado nos seguintes termos: para um dado núcleo, conhecido o seu número atômico  $Z$  e o seu número de massa  $A$ , como a teoria pode prever a sua energia de ligação ?

Aparentemente a solução não é difícil, mas na prática as coisas mostram o contrário. A fonte de todas as dificuldades pode ser encontrada em dois pontos fundamentais da Física Nuclear Teórica:

- 1) Interação nucleon-nucleon, que basicamente ainda desconhecemos. Isto reflete a nossa ignorância em relação à interação forte. Dela atualmente apenas se conhecem as seguintes propriedades: potencial atrativo, de curto alcance, tensorial, com um carão suave repulsivo;
- 2) problema de muitos corpos, que se encontra ainda na infância. O dilema do núcleo é o seguinte: o número de nucleons é grande demais para ser tratado por teorias puramente microscópicas e pequeno demais para ser resolvido pelas leis estatísticas. O problema de muitos corpos se propõe justamente a

ser a abordagem teórica para sistemas deste tipo.

A fim de parametrizar nossa ignorância em relação à interação nuclear, foram propostas inúmeras fórmulas de massa semi-empíricas, com parâmetros ajustados a propriedades médias dos núcleos, ou potenciais fenomenológicos, com parâmetros ajustados a resultados de espalhamento nucleon-nucleon. Por outro lado, para fugir às complicações do problema de muitos corpos, foram também introduzidos modelos simples para o núcleo.

Os modelos mais simples para o núcleo são o da gota líquida e o de gás de Fermi. Embora primitivos, estes dois modelos são capazes de fornecer praticamente todas as propriedades médias (macroscópicas) dos núcleos com grande precisão. Além destes modelos, e partindo de um ponto de vista microscópico, temos o modelo de camada.

É baseado no modelo da gota líquida que Weizsacker, em 1938, propôs a sua famosa fórmula de massa semi-empírica com 5 parâmetros (coeficientes de volume, superfície, repulsão Coulombiana, simetria e emparelhamento de spins). Desde então, muitas fórmulas foram apresentadas, sendo que cada uma reproduz as massas de núcleos localizados apenas numa região limitada da tabela periódica.

Diante disso, em 1969, Myers e Swiatecki<sup>(51)</sup> tentaram melhorar o modelo da gota líquida, através de refinamentos que no fundo são relacionados com o fato de que o núcleo é um sistema pequeno. Eles apresentaram o chamado modelo da gotícula, caracterizado por duas coisas:

- 1) espessura finita da superfície nuclear;
- 2) compressibilidade nuclear finita.



Conseqüentemente, as distribuições de densidade de neutrons e de prótons não mais são consideradas como constantes, nem tais distribuições, limitadas por uma superfície nítida. No modelo da gotícula, as densidades de neutron e de próton são encaradas como dois novos graus de liberdade do núcleo.

Baseado neste modelo, Myers e Swiatecki propuseram a fórmula de massa do modelo da gotícula, com 9 parâmetros ajustáveis. Este número maior de parâmetros reflete apenas o fato de que a fórmula da gotícula carrega mais informação sobre propriedades nucleares, tais como, por exemplo, a compressibilidade nuclear, a correção de curvatura à tensão superficial, a correção de camada, etc).

Além das fórmulas de massa convencionais, isto é, aquelas que descrevem a energia de ligação como uma função  $B(Z,A)$ , existem ainda potenciais fenomenológicos, como o de Reid<sup>(52)</sup>, a dois corpos, com caroço suave. Em 1970, Brueckner et al.<sup>(53)</sup> elaboraram um formalismo que dá a energia de ligação como um funcional  $B[\rho, \rho_p]$ , com  $\rho$  e  $\rho_p$  normalizados a  $A$  e  $Z$ , respectivamente. Este formalismo tira maior proveito dos resultados de matéria nuclear, permitindo com isso, segundo acreditam os seus autores, uma extrapolação mais segura para a região dos núcleos superpesados e para áreas de interesse astrofísico, tal como a região dos núcleos ricos-em-neutron.

Tendo em vista as nossas necessidades, resolvemos, de todas as fórmulas de massa, utilizar a fórmula da gotícula de Myers-Swiatecki (massas atômicas), porque ela apresenta uma boa concordância com os dados experimentais na região dos núcleos médios e pesados. É verdade, porém, que na região dos núcleos leves ( $A \leq 40$ ), começam a surgir flutuações não-desprezíveis que,

no entanto, não são motivo para maiores preocupações, porque justamente nesta faixa é que dispomos de grande quantidade de dados experimentais. Neste caso, simplesmente substituímos os valores calculados por dados experimentais correspondentes. Estes dados experimentais foram compilados por Wapstra e Bos<sup>(54)</sup> em 1977.

Resta, porém, um problema — para nós, o mais sério. Como calcular a massa dos núcleos longe da linha de beta estabilidade? No nosso caso, como atribuir energia de ligação a núcleos muito ricos-em-neutron, que inclusive não são encontráveis em laboratório?

A determinação da massa destes núcleos é essencial para nosso trabalho pela seguinte razão:

Sendo a captura eletrônica o processo principal que escolhemos para provocar a implosão, os núcleos iniciais irão se transmutando ao longo de uma mesma família isobárica (A constante), aumentando cada vez mais o número de neutrons às custas do número de prótons, de modo que, neste processo, entram em cena núcleos extremamente neutronizados (muito afastados da linha de estabilidade beta na direção de N crescente). Estes núcleos, embora instáveis contra decaimento beta no laboratório, são contudo estáveis na estrela por causa da indisponibilidade de estados no espaço de fase, devido ao mar de Fermi de elétrons completamente preenchido.

O que fizemos, então, foi extrapolar a fórmula de massa da seguinte forma: numa família isobárica, a partir do último núcleo com massa experimental disponível, o núcleo (Z,A) tem sua massa dada por:

$$M(Z,A) = M(Z,A)^{teo} + (M_0^{exp} - M_0^{teo}) \quad (3.1.1)$$

onde  $M_0^{exp}$  é a massa do último núcleo da família com valor experimental, e  $M_0^{teo}$  é a massa deste mesmo núcleo usando a fórmula de massa.

A expressão (3.1.1) foi usada com a intenção de evitar saltos irrealísticos entre as massas de dois núcleos isobáricos vizinhos.

### 3.2 - OUTRAS REAÇÕES NUCLEARES

Além da captura eletrônica e decaimento beta e das emissões retardadas de neutron, temos que considerar outras reações nucleares, embora menos eficientes, mas que também podem comparecer durante a implosão. Por exemplo, foto-emissão de neutron (reação  $(\gamma, n)$ ) e captura de neutron por processo-r (reação  $(n, \gamma)$ ).

Trata-se do seguinte:

Se um fóton, de energia  $\hbar\omega$ , for absorvido por um núcleo  $(Z,A)$ , haverá, segundo a teoria do núcleo composto, a formação de um sistema intermediário, no caso um estado excitado, que em seguida poderá decair por qualquer um dos canais permitidos.

O canal de saída que nos interessa é a emissão de um neutron. Isto acontece desde que a energia  $\hbar\omega$  seja superior à energia de separação de neutron  $S_n$  do núcleo  $(Z,A)$ . A reação  $(\gamma, n)$ , em analogia óbvia, também é conhecida por foto-efeito nuclear. Os fótons incidentes, no interior estelar, tem duas ori-

gens principais. Uma, representada pela captura eletrônica e emissão retardada de neutrons (tanto de captura quanto de decaimento), que deixam o núcleo filho em estado excitado. Este núcleo filho decai eletromagneticamente, emitindo radiações de uma só vez ou em cascata, até atingir o estado fundamental. Tais radiações podem ter energias de até da ordem da energia de separação de neutron do núcleo filho. Contudo, no início do colapso estelar, as taxas de captura eletrônica e de emissão retardada são baixas, de modo que a densidade de fótons deste tipo é também baixa.

A outra fonte de fótons provém do próprio movimento cinético das partículas, isto é, da radiação térmica. Coerente com a nossa hipótese de equilíbrio termodinâmico local para a matéria no interior da estrela, admitimos o espectro de energia de tais fótons igual ao da radiação de corpo negro. Estes fótons de corpo negro tem energia  $\sim kT$ , de forma que, nas condições iniciais do colapso, isto equivale a cerca de 1 MeV apenas.

A reação inversa ( $n, \gamma$ ) é a captura de um neutron livre, com a emissão de um fóton. Tal captura pode se processar de modo lento ou de modo rápido, conforme a taxa de captura de neutron ser maior ou menor que a taxa de decaimento beta. No caso de processo-s (processo lento), a reação ( $n, \gamma$ ) praticamente não é ativa no colapso gravitacional, tendo em vista a presença dominante da captura eletrônica. Por outro lado, o processo-r (processo rápido) só é efetivo para condições extremas de densidade e temperatura. Acredita-se que o processo-r tenha nas implosões o seu mais provável sítio de ocorrência. Além do mais, no início da implosão, a densidade de neutrons livres é pequena. A captura de neutrons tem aqui apenas papel secundário.

Vamos calcular, então, a taxa de foto-emissão de neutron. Segundo a teoria usual das reações nucleares<sup>(55)</sup>,

$$\lambda_{\gamma n} = \int_{S_n}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{c\hbar}\right)^3 \frac{E^2}{e^{E/kT} - 1} \sigma_N(E) c dE \quad (3.2.2)$$

onde o limite inferior da integral é a energia de separação de neutron  $S_n$ ;  $\sigma_N(E)$  é a seção de choque para a reação  $(\gamma, n)$  do núcleo  $(Z, A)$  como função da energia  $E$  do sistema, no referencial do centro de massa, e é dada por:

$$\sigma_N(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2}{\left(\frac{E_0^2 - E^2}{E}\right)^2 + \Gamma^2} \quad (3.2.3)$$

onde  $E_0$  é a energia de ressonância e  $\Gamma$  é a largura de nível de ressonância.

Desde que estamos interessados em propriedades médias apenas, podemos desprezar a dependência de  $E_0$  e  $\Gamma$  em relação a números mágicos e a momentos de quadrupolo (deformação) dos núcleos. Assim, por simplicidade, podemos tomar como energia de ressonância  $E_0 = 82 A^{-1/3}$  MeV e a largura  $\Gamma = 6$  MeV. Tais valores foram tirados de resultados experimentais da ressonância gigante de dipolo. Modelos mais recentes de ressonância gigante de dipolo<sup>(56)</sup> prevêm, entretanto, uma lei de potência em  $A$  ligeiramente diferente, dando

$$E_0 = 46 A^{-0.23},$$

que mostrou ser mais próximo aos dados experimentais<sup>(57)</sup>.

Para núcleos pesados ( $A \geq 200$ ), é muito razoável admi

tir a razão de ramificação  $f$ , dada por

$$f \equiv \sigma_N / \sigma_T \quad (3.2.4)$$

ser igual aproximadamente a 0.95. No caso de núcleos muito ricos-em-neutron, que é o nosso caso, tudo indica que  $f$  deve ser também em torno deste valor.

Deste modo, com o auxílio da regra de soma (para transições de dipolo) de Gell'Mann et al. (58), dada por:

$$\int_0^{155 \text{ MeV}} \sigma_T dE = 2\pi^2 e^2 \left( \frac{\hbar}{Mc} \right) \frac{NZ}{A} \left( 1 + 0.1 \frac{A^2}{NZ} \right) \quad (3.2.5)$$

onde  $M$  é a massa do nucleon e  $e$ , a carga eletrônica, e com a ajuda das eqs. (3.2.3) e (3.2.4), a eq. (3.2.5) fornece uma expressão para  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = 4\pi \frac{1}{T} \frac{e^2 \hbar^2}{Mc} \frac{NZ}{A} \left( 1 + 0.1 \frac{A^2}{NZ} \right) f \quad (3.2.6)$$

Finalmente, integrando a eq. (3.2.2), vem:

$$\lambda_{\gamma n} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{E_0}{\hbar c} \right)^3 \sigma_0 c \left( \frac{\Gamma}{E_0} \right)^2 \frac{kT}{E_0} e^{-S_n/kT} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2-\gamma^2)^{n-m} x$$

$$\frac{n!}{(n-m)! m!} \sum_{r=0}^{2(m+n+2)} \frac{(2(m+n+2))!}{(2(m+n+2)-r)!} q^{2(m+n+2)-r} \alpha^r$$

onde  $q \equiv S_n/E_0$  e  $\alpha \equiv kT/E_0$ .

Retendo somente termos de ordem zero, tiramos:

$$\lambda_{\gamma n} = 2.67 \times 10^8 T_9 S_n^4 A^{0.23} NZ \left( 1 + 0.1 \frac{A^2}{NZ} \right) x$$

$$(1 + 4 \frac{kT}{S_n} + 12 (\frac{kT}{S_n})^2 + \dots) e^{-S_n/kT} \quad (3.2.7)$$

Uma outra maneira de calcular a taxa da reação  $(\gamma, n)$  é a seguinte: determinar a taxa da reação  $(n, \gamma)$  e, aplicando o princípio do balanço detalhado,

$$\log \frac{\lambda_{\gamma n}}{\lambda_{n\gamma}} = 34.075 + 1.5 \log T_9 \frac{A-1}{A} - \frac{5.04}{T_9} S_n \quad (3.2.8)$$

obter a taxa de  $(\gamma, n)$ . Os resultados são aproximadamente os mes mos.

### 3.3 - EQUAÇÕES DE REAÇÃO NUCLEAR

Como dissemos, a composição muda com o tempo, devido à presença de inúmeras reações termonucleares. Como isto funciona ?

Primeiramente, por simplicidade, admitimos uma composição química inicial de  $^{56}\text{Fe}$  puro (uma hipótese diferente muda certamente nos detalhes, mas não em termos de propriedades médias). Podemos, então, construir toda a rede de núcleos de que, com as reações nucleares e principalmente com a captura eletrônica, iremos precisar.

Como no início a única reação possível é a captura eletrônica pelo  $^{56}\text{Fe}$ , a nossa rede é limitada de um lado pela linha de estabilidade beta, do outro pela linha de evaporação de neutrons e por cima pela família isobárica  $A = 56$ , como mostra a Fig. 3.3.1. A linha de estabilidade beta é o lugar geométrico dos pontos com

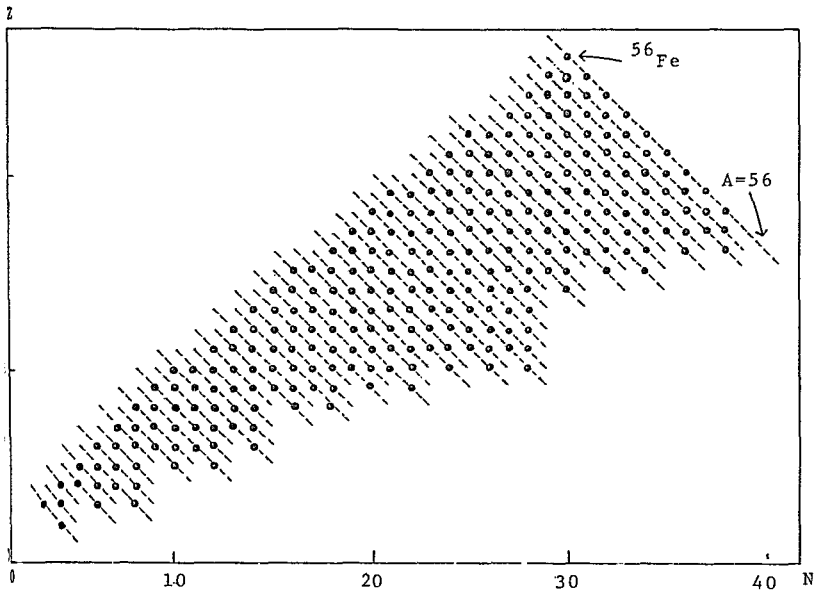


Figura 3.3.1 - Rede de núcleos para reações nucleares.

$$\frac{\partial M(Z,A)}{\partial A} = 0$$

isto é, com o número atômico dado aproximadamente por (59)

$$Z = \frac{1}{2} \left[ A - \frac{(0.35997 A^{2/3} - 0.39131)A}{47.2866 + 0.35997 A^{2/3}} \right]$$

A linha de evaporação de neutrons  $\bar{e}$  é determinada a partir da condição de que a energia de separação de neutron  $S_n$  do núcleo  $(Z,A)$ , dada por

$$S_n = \delta M(Z,A-1) - \delta M(Z,A) + 8.07169 \text{ MeV}$$

onde  $\delta M(Z,A) = M(Z,A) - A \bar{e}$  é o excesso de massa, seja menor ou igual a zero. A rede, assim formada, contém cerca de 300 núcleos.

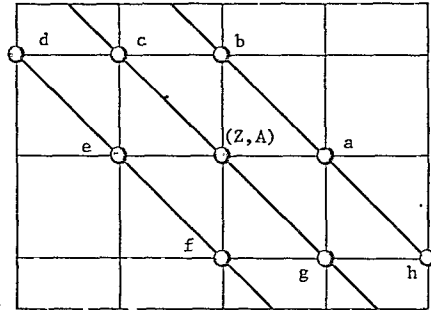
Seja, por exemplo, um núcleo  $(Z,A)$  da rede, cuja abun



dância (densidade de número) é denotada por  $N_{Z,A}$ . Na Fig. 2.3.2, são mostrados o núcleo  $(Z,A)$  e seus vizinhos mais próximos (dispostos ao longo de uma rede de 3 linhas isobáricas com 3 linhas isotópicas).

A abundância do elemento  $(Z,A)$  pode diminuir apenas de

Figura 3.3.2 - Núcleo  $(Z,A)$  com seus vizinhos.



vido às seguintes reações:

1) Captura Eletrônica

A captura eletrônica alimenta a abundância de seu vizinho isobárico seguinte  $(Z-1,A)$  — o elemento g na Fig.2.3.2 — numa taxa dada por  $-\lambda_c N_{Z,A}$ , onde  $\lambda_c$  é a taxa de captura eletrônica. Representamos este processo por ↙.

2) Decaimento Beta


O decaimento beta leva o núcleo  $(Z,A)$  a caminhar ao longo da isobárica em direção ao seu vizinho  $(Z+1,A)$  — o elemento c. O número de núcleos  $(Z,A)$ , por unidade de tempo, que são convertidos em  $(Z+1,A)$ , é dado por  $-\lambda_\beta N_{Z,A}$ , sendo  $\lambda_\beta$  a taxa de decaimento beta. Este processo é representado por ↖.

3) Foto-emissão de Neutron


Esta reação aumenta a população de seu isótopo  $(Z,A-1)$  — o elemento e — a taxa de  $-\lambda_{\gamma n} N_{Z,A}$ , sendo  $\lambda_{\gamma n}$  a taxa de foto

-emissão do neutron. O gráfico para a foto-emissão é ←.

4) Emissão Retardada de Neutrons na Captura Eletrônica

A emissão retardada abastece o núcleo  $(A-1, A-1)$  - elemento  $f$  - a taxa de  $-\lambda_{dc} N_{Z,A}$ , onde  $\lambda_{dc}$  é a taxa de emissão retardada de neutrons. O diagrama é .

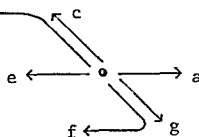
5) Emissão Retardada de Neutrons no Decaimento Beta

Neste caso, cresce a abundância do elemento  $d$  - núcleo  $(Z+1, A-2)$  - a taxa de  $-\lambda_{d\beta} N_{Z,A}$ , onde  $\lambda_{d\beta}$  é a taxa de emissão retardada de neutrons no decaimento beta. O diagrama é .

6) Captura de Neutron

A abundância do elemento  $a$  - núcleo  $(Z, A+1)$  - com a captura de neutrons, é que sai ganhando, numa taxa de  $-\lambda_{n\gamma} N_{Z,A}$ , onde  $\lambda_{n\gamma}$  é a taxa de captura de neutrons. O diagrama é →.

Em resumo, todos os processos, através dos quais o núcleo  $(Z, A)$  pode sofrer transmutação nuclear, estão representados no seguinte diagrama:



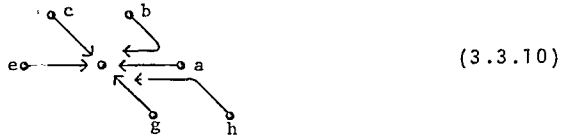
(3.3.9)..

Inversamente, um núcleo  $(Z, A)$  pode aumentar sua abundância, através dos processos de:

- 1) Captura eletrônica pelo núcleo  $(Z+1, A)$  - elemento  $c$ .
- 2) Decaimento beta pelo núcleo  $(Z-1, A)$  - elemento  $g$ .
- 3) Emissão  $(\gamma, n)$  pelo núcleo  $(Z, A+1)$  - elemento  $a$ .
- 4) Captura  $(n, \gamma)$  pelo núcleo  $(Z, A-1)$  - elemento  $e$ .

- 5) Emissão retardada de neutrons na captura eletrônica pelo núcleo  $(Z+1, A+1)$  – elemento b.  
 6) Emissão retardada de neutrons no decaimento beta pelo núcleo  $(Z-1, A+1)$  – elemento h.

Assim, o diagrama correspondente é:



Os diagramas (3.3.9) e (3.3.10) nos permitem, então, escrever as equações de reação nuclear para cada núcleo  $(Z, A)$  :

$$\frac{d N_{Z,A}}{dt} = - \sum_{i=1}^6 \lambda_i N_{Z,A} + \lambda_c N_{Z+1,A} + \lambda_\beta N_{Z-1,A} + \lambda_{\gamma n} N_{Z,A+1} + \lambda_{n\gamma} N_{Z,A-1} + \lambda_{dc} N_{Z+1,A+1} + \lambda_{d\beta} N_{Z-1,A+1}$$

(3.3.11)

onde o somatório é sobre todos os 6 processos mencionados acima.

Existem tantas equações semelhantes à (3.3.11) quantos forem os núcleos presentes ao processo hidrodinâmico. Elas constituem um sistema de equações simultâneas. Para uma dada temperatura e densidade, as eqs. (3.3.11) podem ser resolvidas, fornecendo as abundâncias ao longo do tempo. Por sua vez, as abundâncias permitem o cálculo da perda de energia por neutrons.

É evidente que a eq. (3.3.11) tem que ser acoplada às equações da Hidrodinâmica, visto que as taxas de reação dependem da densidade e da temperatura (dadas pelas equações hidrodinâmicas). Estas, por sua vez, dependem das taxas de perda de ener

gia, principalmente devido às capturas eletrônicas, e da densidade de número de elétrons.

## CAPÍTULO IV

### EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA COM REAÇÕES NUCLEARES

#### 4.1 - HIDRODINÂMICA

Vamos apresentar primeiramente o problema para o caso não-simplificado (modelos de Hoyle-Fowler e de Chiu) e, em seguida, para o caso simplificado (modelo homogêneo).

Consideramos, por simplicidade, uma estrela constituída de um fluido perfeito (viscosidade nula) e não-relativístico (tratamento Newtoniano). Além disto, admitimos simetria esférica (campo magnético e momento angular desprezíveis), de modo que as equações hidrodinâmicas podem ser iguais às do movimento unidimensional. A fim de escrever as equações básicas (60), escolhemos um referencial Lagrangeano, isto é, um observador co-movente em relação ao elemento de volume do fluido. É conveniente tomar como coordenada Lagrangeana a massa  $m$ , definida por:

$$m \equiv 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad (4.1.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa. A coordenada Euleriana  $r$  passa a ser função de  $m$  e  $t$ ,

$$r = r(m, t) \quad (4.1.2)$$

e é relacionada com a velocidade do fluido, através de

$$U(m, t) = \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_m \quad (4.1.3)$$

. De modo análogo, a densidade de massa  $\bar{\rho}$  é também função das novas coordenadas,

$$\rho = \rho(m, t)$$

e o volume específico (volume por unidade de massa) é dado por:

$$V(m, t) = \frac{1}{\rho(m, 0)} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (4.1.4)$$

As equações da Hidrodinâmica que queremos são na realidade expressões matemáticas de leis de conservação, que no caso são as seguintes:

- 1) Conservação de massa
- 2) Conservação de momentum
- 3) Conservação de energia

Comecemos com a conservação de massa, que é dada pela equação da continuidade,

$$\rho(m, 0) \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial m} \quad (4.1.5)$$

Então, a eq. (4.1.5) é equivalente a

$$m(r, t) = m(r_0, 0) \quad (4.1.6)$$

onde  $r_0 \equiv r(m, 0)$ . Ou ainda equivalente a:

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \quad (4.1.7)$$

sendo  $dm$  a massa da camada elementar localizada em  $r$ .

A conservação de momentum do sistema é expressa pela equação do movimento:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} - \frac{mG}{r^2} \quad (4.1.8)$$

onde  $P$  é a pressão do fluido e  $G$  a constante gravitacio-

nal ( $G = 6.673 \times 10^{-8} \text{ dyn.cm}^2 \text{ g}^{-2}$ ). No lado direito da eq.(4.1.8), o primeiro termo representa o gradiente de pressão devido ao fluido e o segundo termo dá a contribuição devido à atração gravitacional. A eq. (4.1.8) é também conhecida como equação de Euler.

Antes de escrevermos a equação de conservação de energia, devemos prestar atenção a três pontos:

### 1) Equilíbrio Termodinâmico Local

O tratamento termodinâmico do colapso está assentado na hipótese básica do equilíbrio termodinâmico local. O que significa equilíbrio termodinâmico local?

Quando as condições da estrela, mesmo não estando em pleno equilíbrio termodinâmico, são tais que permitem a introdução de uma temperatura  $T$  para descrever, com boa aproximação, as propriedades locais do sistema, então dizemos que a estrela está em equilíbrio termodinâmico local. Neste caso, em outras palavras, é sempre possível atribuir um valor para a temperatura em cada ponto no interior da estrela, tal que as propriedades de um elemento da matéria na vizinhança do ponto sejam as mesmas como se ele fosse adiabaticamente encerrado num recipiente àquela mesma temperatura. A distribuição da radiação é dada, então, simplesmente pela distribuição de Planck e, em consequência, a densidade de energia radiativa é igual a de um corpo-negro.

### 2) Mudança de Composição Química

Como vamos considerar um sistema em que reações nucleares desempenham papel predominante, devemos lembrar que o número total de núcleos de uma dada espécie ( $Z, A$ ), denotado por  $N_{Z, A}$ ,

não pode ser considerado como um parâmetro de valor fixo. Formalmente, o que é preciso fazer é encarar o sistema como um sistema aberto e tratar  $N_{Z,A}$  como uma outra variável termodinâmica independente. Em outras palavras, a composição química do material (dada pelos valores de  $N_{Z,A}$  para todo Z e todo A existentes no sistema) muda com o tempo e também com a densidade e a temperatura, de modo que os termos proporcionais a  $dN_{Z,A}$  representam contribuições importantes para a energia interna do sistema.

Assim, a energia interna específica é função da entropia específica S, do volume específico V e da composição química  $\{N_{Z,A}\}$ , de sorte que podemos escrever:

$$dE = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V, \{N_{Z,A}\}} dS + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, \{N_{Z,A}\}} dV + \sum_{i=1}^K \left( \frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_{S,V} dN_i \quad (4.1.9)$$

onde K é o número total de espécies nucleares presentes.

Definindo o potencial químico da espécie nuclear (Z,A),

$$\mu_{Z,A} = \left( \frac{\partial E}{\partial N_{Z,A}} \right)_{S,V, \{N_{Z',A'}\}_{Z' \neq Z, A' \neq A}} \quad (4.1.10)$$

e notando que (61)

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + P \right] dV \quad (4.1.11)$$

e

$$T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_P \quad (4.1.12)$$

a eq. (4.1.9) assume a seguinte forma:



$$dE = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{T, \{N_{Z,A}\}} dV + \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V, \{N_{Z,A}\}} dT + \sum \mu_{Z,A} dN_{Z,A} \quad (4.1.13)$$

### 3) Transferência de Energia por Fôtons

Durante a implosão, cuja escala de tempo  $\bar{t}$  é da ordem de milisegundos, desprezamos o transporte de energia radiativa (fôtons). O argumento para isto  $\bar{t}$  é o seguinte:

Se  $t_h$  e  $t_f$  denotam escala de tempo hidrodinâmico e de difusão de fôtons, respectivamente, vemos que para estrelas normais,

$$t_f \gg t_h \quad (4.1.14)$$

Isto significa que podemos encarar o fôton como permanecendo no mesmo lugar em que  $\bar{t}$  é criado.

Vamos mostrar a desigualdade (4.1.14), admitindo o espalhamento fôton-elétron livre como o processo principal de interação. Neste caso, usamos a seção de choque de Thomson, que é dada por

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (4.1.15)$$

com

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (4.1.16)$$

que  $\bar{t}$  é conhecido como o raio clássico do elétron. Assim, o livre percurso médio do fôton tem a forma:

$$\lambda_f \sim \frac{1}{N_e \sigma_{Th}} \quad (4.1.17)$$

onde  $N_e$  é a densidade de número de elétrons. Ou, escrevendo  $r_0$  em função de  $\rho_e$ ,

$$r_0 \sim \left(\frac{N_e}{\rho_e}\right)^{1/3} \quad (4.1.18)$$

resulta:

$$\lambda_f \sim \frac{1}{\rho} \quad (4.1.19)$$

Por outro lado, o tempo para o fóton se difundir através de uma distância igual à altura de escala  $R$  (distância em que a densidade ou pressão cai por um fator igual a  $e$ ) é dado por

$$t = \frac{R^2}{\lambda c} \quad (4.1.20)$$

Tomando este tempo como escala de tempo de difusão de fótons, e fazendo  $\rho = 10^9 \text{ g cm}^{-3}$  e  $R = 10^8 \text{ cm}$  (valores aproximados de uma camada central do modelo de pré-supernova de Chiu), encontramos

$$t_f \sim 10^7 \text{ anos}$$

que é infinitamente maior que  $t_h$ .

Podemos agora escrever a equação da energia, que é dada simplesmente pela equação da continuidade para o fluxo  $F$ :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot F \hat{r} = \text{fontes} \quad (4.1.21)$$

Na eq. (4.1.21),  $E$  é a energia interna específica e  $\hat{r}$  é o unitário na direção radial.

Ocorrendo movimentos macroscópicos em escala de tempo suficientemente pequena, o trabalho realizado pelas forças de pressão deve também ser incluído. E se, além disto, houver for-

mação de ondas de choque (matematicamente representadas pela presença de superfícies sobre as quais a densidade, a temperatura, a velocidade do fluido, etc, tem descontinuidades), então é indispensável recorrer ao expediente, proposto por von Neumann e Richtmyer (62), de simular a ação da onda de choque através de um termo de pseudo-viscosidade, que não é senão uma espécie de pressão artificial.

Denotando por  $\dot{s}$  as fontes por unidade de massa, a eq. (4.1.21) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{P} \hat{r} = - (P + \eta) \frac{dV}{dt} + \dot{s} \quad (4.1.22)$$

Na equação acima,  $P$  é a pressão e  $\eta$  a pseudo-viscosidade de von Neumann-Richtmyer, que no caso unidimensional é dado por (62)

$$\eta = - \frac{(\alpha \Delta r)^2}{V} \frac{\partial U}{\partial r} \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \quad (4.1.23)$$

onde  $\alpha$  é uma constante adimensional, aproximadamente igual à unidade.

Podemos escrever a eq. (4.1.22) ligeiramente diferente. Para tanto, introduzimos o parâmetro  $\theta \equiv \lambda/d$ , onde  $\lambda$  é o livre percurso médio dos neutrinos e  $d$  é a dimensão linear em que as variáveis macroscópicas sofrem mudanças sensíveis. Então, se  $\theta < 1$ , podemos aplicar a aproximação da difusão. Neste caso, introduzimos também a luminosidade de neutrinos  $L_\nu$ , definida em analogia com a de fótons  $L_\gamma$ , por:

$$L(r) = 4\pi r^2 \mathcal{F} \quad (4.1.23)$$

com

$$F = - \frac{\Gamma c}{3} \frac{1}{\rho K} \frac{d}{dr} (T^4) \quad (4.1.24)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $K$  a opacidade média de Rosseland,  $\Gamma = (7/8) a$ , sendo  $a = 7.565 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{K}^{-4}$  a constante de radiação de Steffan-Boltzmann (no caso de fótons,  $\Gamma = a$ ).

Deste modo, a luminosidade total é definida como sendo a potência para a estrela manter o fluxo de energia. Por outro lado, como o transporte de energia radiativa é desprezível como vimos,

$$L_\gamma \ll L_\nu$$

de modo que a luminosidade da estrela, nesta fase de evolução, tem contribuição apenas dos neutrinos.

Com o auxílio da eq. (4.1.7), a eq. (4.1.22) fica:

$$dE = (\dot{s} - \frac{\partial L}{\partial m}) dt - (P + \eta) dV \quad (4.1.25)$$

Entretanto, no caso de  $\theta > 1$ , isto é, quando a aproximação da difusão se torna inadequada, temos que acoplar as equações da Hidrodinâmica com uma equação de transporte de neutrinos. Contudo, este problema só pode ser abordado por métodos aproximados. Resolvemos, então, simular a equação de transporte nesta faixa de valores de  $\theta$ , através de uma expressão apropriada para  $\partial L / \partial m$ , de forma que, no limite de opacidade nula, a expressão de  $\partial L / \partial m$  só contenha termos de perda de energia local.

A expressão que julgamos correta é a seguinte:

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \dot{\epsilon}_\nu - \chi \frac{K}{4\pi r^2} L \quad (4.1.26)$$

onde

$$\dot{\epsilon}_\nu = \dot{\epsilon}_\nu^{\text{capt}} - \dot{s}$$

A eq. (4.1.26) permite eliminar a divergência na luminosidade quando  $K = 0$ , o que em si já representa uma grande vantagem computacional. Na eq. (4.1.26),  $\chi$  é uma função, em geral, da temperatura, densidade e composição química, que representa aproximadamente a perda fracional da energia. A função  $\chi$  pode ser interpretada também como fator de absorção pelo material, e tem dimensões de inverso da opacidade. Tomamos, por simplicidade, como tendo o valor igual a 0.5, que corresponde ao valor médio para situações em que a energia dos neutrinos é superior à energia térmica dos elétrons do plasma.

A eq. (4.1.25) é a própria expressão da primeira lei da Termodinâmica. Igualando a eq. (4.1.25) com a eq. (4.1.13), obtemos:

$$dT = \frac{1}{\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V} \left\{ \left( \dot{s} - \frac{\partial L}{\partial m} \right) dt - \sum \mu_{Z,A} dN_{Z,A} - \left[ P + \eta + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \right] dV \right\} \quad (4.1.27)$$

As eqs. (4.1.7), (4.1.8), esta acrescida do termo de pseudo-viscosidade de Neumann-Richtmyer, e (4.1.27), junto com a equação de estado

$$P = P(V, T, \{N_{Z,A}\}) ,$$

constituem as equações básicas do fluido hidrodinâmico não-relativístico, e formam um sistema de equações diferenciais parciais, simultâneas, altamente não-lineares.

#### 4.2 - MÉTODO DE CÁLCULO

As eqs. (4.1.7), (4.1.8) e (4.1.27), devido à não-li-

nearidade e a presença de descontinuidades (ondas de choque), são mais convenientemente aproximadas por equações de diferenças finitas. Neste caso, a hipótese de simetria esférica nos permite dividir a estrela em certo número de camadas esféricas concêntricas, e para cada uma destas camadas, aplicamos as equações acima. Nestas equações, encontramos quantidades tanto definidas sobre o contorno externo da camada quanto no seu interior.

O número de camadas em que a estrela deve ser dividida é de importância crucial. Deve obedecer a dois critérios principais, que são aliás antagônicos entre si. De um lado, a precisão nos cálculos, que exige grande número de divisões (quanto maior o número de camadas, melhor a aproximação das equações e, portanto, menor o erro nas soluções). Por outro lado, o tempo de cálculo, que limita inapelavelmente o número de camadas. Parece que o número ótimo é, no modelo politrópico, cerca de 100, e no modelo de caroço isotérmico, 50. Quanto a este último modelo, uma dificuldade ainda permanece. Como dividir o caroço e a envoltória em camadas? Em termos de melhor estabilidade das soluções, encontramos a seguinte partição: 46 camadas no caroço e 5 na envoltória.

Os detalhes da integração numérica das equações hidrodinâmicas são dados no Apêndice A.

Vamos agora esclarecer o que fizemos para acoplar as equações de reação nuclear (eqs. (3.3.11)) com as equações da Hidrodinâmica.

Desde o instante inicial de cálculo até o colapso, o processo é o seguinte (a descrição serve para qualquer camada da estrela):

A evolução quase-estática é promovida unicamente pela

aniquilação de par e pelos neutrinos de plasma. Esta evolução se faz ao longo da adiabática  $4/3$ . O passo no tempo de cálculo é dado pela condição de estabilidade das soluções, eq. (A.25) cujo limite superior denotamos por  $\Delta_{\text{estab}}$ . Quando a camada atinge uma densidade igual à densidade limiar de captura pelo  $^{56}\text{Fe}$  ( $\rho/\mu_e \sim 10^9 \text{ g cm}^{-3}$ ), as eqs. (3.3.11) são imediatamente incorporadas ao cálculo hidrodinâmico.

#### 4.3 - MODELO SIMPLIFICADO

A equação de movimento, no caso do modelo homogêneo, pode ser obtida através da Lagrangeana

$$L = T - \phi \quad (4.3.28)$$

onde

$$T = \frac{1}{2} \int_0^R \rho \dot{v}^2 dV \quad (4.3.29)$$

e

$$\phi = \int_0^R \epsilon dV - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (4.3.30)$$

sendo  $R$  o raio da estrela,  $\epsilon$  a densidade de energia total. O 2º termo à direita da eq. (4.3.30) representa a energia gravitacional. Em (4.3.29),  $v$  é o campo de velocidade.

Com o auxílio da lei de conservação de massa (eq. (4.1.7)), a eq. (4.3.29) fornece:

$$T = \frac{3}{10} MR^2 \quad (4.3.31)$$

onde  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  é a massa da estrela.

De forma análoga, a eq. (4.3.30) pode ser re-escrita como:

$$\phi = M\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (4.3.32)$$

Assim, a Lagrangeana adquire o aspecto:

$$L = \frac{3}{10} M \dot{R}^2 - M\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) + \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (4.3.33)$$

Aplicando as equações de Lagrange, obtemos:

$$\ddot{R} = \frac{5P}{\rho R} - \frac{GM}{R^2} \quad (4.3.34)$$

A Termodinâmica da matéria estelar é descrita, tal como no caso não-simplificado, pela 1ª lei da Termodinâmica, e é dada pela eq. (4.1.27) com pequenas modificações. O termo  $\partial L / \partial m$ , correspondente ao transporte de neutrinos, é substituído por  $\chi \dot{Q}$ , onde  $\chi$  é um parâmetro e  $\dot{Q}$  é a taxa de energia do neutrino liberada e é dada por

$$\dot{Q} = \sum_{Z,A} (\lambda_c + \lambda_d + \lambda_\beta)_{Z,A} N_{Z,A} \langle E_\nu \rangle \quad (4.3.35)$$

Deste modo, a eq. (4.1.27), no caso do modelo homogêneo, se re-escreve:

$$\frac{dT}{dt} = - \left[ (1-\chi) \dot{Q} - \dot{s} + \left( P + \frac{\partial E}{\partial V} \right) dV + \sum_{Z,A} \mu_{Z,A} \frac{dN_{Z,A}}{dt} \right] / \frac{\partial E}{\partial T} \quad (4.3.36)$$

As eqs. (4.3.34) e (4.3.36) constituem as equações básicas do modelo homogêneo e podem ser facilmente resolvidas pelo método de Runge-Kutta-Gill.



## CAPÍTULO V

### EQUAÇÃO DE ESTADO

#### 5.1 - ASPECTOS PRINCIPAIS

Resta um problema difícil: como escrever a equação de estado da matéria antes e durante o colapso? Em outras palavras, como escrever a função

$$P = P(V, T, \{N_i\}) ?$$

Para melhor discutir o assunto, convém introduzir dois parâmetros fundamentais: o parâmetro relatividade  $\beta$ , definido por

$$\beta \equiv kT/mc^2 ,$$

e o parâmetro degenerescência, dado por

$$\eta \equiv \mu/kT$$

onde  $\mu$  é o potencial químico.

O que acontece com a matéria quando a densidade e a temperatura aumentam? Em concreto, para efeito de discussão, vamos supor uma composição inicial dada por átomos neutros de  $^{56}\text{Fe}$  puro. Os aspectos principais são, então, os seguintes:

1) O material começa a se ionizar quando a temperatura atinge valores da ordem de  $10^5$  °K. A  $10^6$  °K mais ou menos, os átomos ficam completamente ionizados.

2) Os elétrons, inicialmente não-relativísticos, formam um mar de partículas que, em primeira aproximação, são livres. Quando a temperatura ultrapassa a  $6 \times 10^9$  °K ( $\beta > 1$ ) ou quando a densidade supera a  $10^6$  g/cm<sup>3</sup> ( $\eta\beta = \frac{\mu}{m_e c^2} > 1$ ), então eles se tornam relativísticos.

3) Aproximando o mar de elétrons por um gás ideal de Fermi, um efeito quântico de imediato aparece: a degenerescência, que é dada pelo parâmetro  $\eta$ . Se  $\eta < 1$ , os elétrons são não-degenerados. Caso contrário, são degenerados. Fisicamente, o gás degenerado tem a seguinte propriedade: todos os estados abaixo do nível de Fermi ficam completamente preenchidos e os que estão acima ficam totalmente vazios. Isto implica que a equação de estado praticamente não depende da temperatura. Para efeito de cálculo, a temperatura é colocada igual a zero nestes casos.

Outra propriedade do gás degenerado é que pequenas variações da densidade provocam mudanças muito maiores na pressão do que no caso de um gás ideal. Deste modo, o gás degenerado é muito menos compressível (a compressibilidade é dada por  $\chi = \left[ \rho \frac{dP}{d\rho} \right]^{-1}$ ) do que um gás ideal.

A Fig. 5.1.1 mostra o plano temperatura-densidade para o caso de gás de elétrons. Estão representadas as linhas com  $\eta \sim 1$  (separando regiões de degenerescência e de não-degenerescência),  $\beta \sim 1$  (relativística e não-relativística) e  $\mu/m_e c^2 \sim 1$  (idem). O limite clássico de gás perfeito corresponde a baixas densidades e baixas temperaturas (limite não-degenerado). O caso de gás completamente degenerado se situa a altas densidades.

Aqui surge uma dificuldade: é fácil escrever a equação de estado, quando a matéria está num destes limites. Mas,

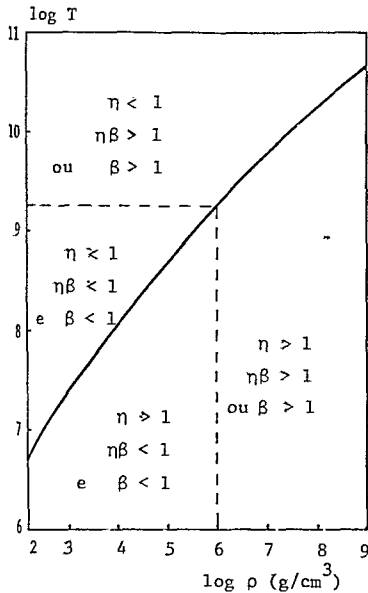


Figura 5.1.1 - Plano temperatura-densidade para o gás de elétrons.

pode acontecer, como é o nosso caso, que a matéria se encontre na região de transição de degenerada para não-degenerada, isto é, na chamada região semi-degenerada ( $\eta \sim 0$ ). É claro que isto implica que temos de usar uma equação de estado mais complicada, porém uma que não exija demasiado tempo de cálculo.

4) Atingindo a densidade o valor limiar de captura eletrônica pelos núcleos de  $^{56}\text{Fe}$ , começa então a neutronização da matéria. Esta neutronização conduz à evaporação de neutrons, passando a existir também um gás de neutrons, que admitimos livres. Inicialmente não-relativístico, o gás de neutron só se torna relativístico quando a temperatura é maior que  $10^{13}$  °K ou a densidade maior que  $6 \times 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup> (ã densidade nuclear de  $2 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, por exemplo,  $p_F/m_n c = 0.32$ , não-relativísticos ainda, portanto).

5) Evidentemente, quando a densidade atinge a  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, a interação forte começa a ser sensível, bem como os efeitos da Relatividade Geral passam a ser não-desprezíveis. É a região de densidade da matéria neutrônica (sendo o neutron o principal constituinte), em que podem aparecer novas partículas, como os

muons. A densidades mais altas ( $\sim 10^{16}$  g/cm<sup>3</sup>) até mesmo partículas mais pesadas, como os híperons, podem ser formadas (regime hiperônico) <sup>(64)</sup>.

6) No caso de gases relativísticos, um fenômeno importante em geral ocorre. Trata-se da criação de pares elétron-pósitron, que se verifica quando  $\beta \sim 1$ . Entretanto, a contribuição dos pares à equação de estado só é relevante quando a pressão de radiação é comparável com a pressão do gás. Assim, cometemos muito pouco erro se desprezarmos a contribuição dos pares na região de alta densidade.

## 5.2 - GÁS DE ELÉTRONS

Na aproximação de gás ideal de Fermi, o potencial termodinâmico é dado por <sup>(65)</sup>

$$\Omega = -(2I+1) V kT \int \frac{d^3p}{h^3} \ln \left[ 1 + \exp(\mu - E_c) / kT \right] \quad (5.2.1)$$

onde  $I$  é o spin (no caso do elétron,  $I = 1/2$ ),  $V$  é o volume total,  $\mu$  o potencial químico e  $E_c$  a energia cinética da partícula.

A pressão, dada por  $P = -(\partial\Omega/\partial V)_{T,\mu}$ , tem então a seguinte expressão:

$$P = K m_e c^2 \beta^{5/2} \left[ \frac{2}{3} F_{3/2}(\eta, \beta) + \frac{1}{3} \beta F_{5/2}(\eta, \beta) \right] \quad (5.2.2)$$

sendo

$$K = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} (m_e c / \hbar)^3 = 2.49 \times 10^{30} \text{ cm}^{-3}$$

$$F_k(\eta, \beta) \equiv \int_0^{\infty} \frac{z^k (1 + \frac{1}{2} \beta z)^{1/2}}{1 + e^{z-\eta}} dz \quad (5.2.3)$$

que são as conhecidas integrais de Fermi. Em (5.2.2) e (5.2.3), fizemos:

$$z \equiv E_c/kT, \quad \eta \equiv \mu/kT \quad \text{e} \quad \beta \equiv kT/m_e c^2$$

Por outro lado, lembrando que a identidade termodinâmica (sai da primeira lei da Termodinâmica),

$$dP = s dT + n d\mu,$$

onde  $s = S/V$  é a densidade de entropia e  $n = N/V$  a densidade de número, pode ser escrita também como

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T} d\mu$$

então, por comparação, obtemos:

$$s = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu} \quad \text{e} \quad n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T} \quad (5.2.4)$$

Assim, a densidade de número tem a seguinte expressão:

$$n = K \beta^{3/2} \left[ F_{1/2}(\eta, \beta) + \beta F_{3/2}(\eta, \beta) \right] \quad (5.2.5)$$

Para calcular a densidade de energia  $\epsilon = E/V$ , lembramos também que

$$E = -PV + ST + N\mu$$

Com o auxílio das igualdades (5.2.4), chegamos a

$$\epsilon = -P + \frac{\partial P}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial P}{\partial T} T \quad (5.2.6)$$

ou

$$\epsilon = K m_e c^2 \beta^{5/2} \left[ F_{3/2}(\eta, \beta) + \beta F_{5/2}(\eta, \beta) \right] \quad (5.2.7)$$

As eqs. (5.2.2), (5.2.5) e (5.2.7) para  $P$ ,  $n$  e  $\epsilon$ , respectivamente, não contêm nenhuma aproximação. Porém, as integrais de Fermi envolvidas são funções de duas variáveis e isto requer um trabalho bastante grande, seja para calcular as integrais, seja para fazer uma tabela.

Apenas em 4 casos limites, a situação fica simples:

### 1) Não-Relativístico

Este caso corresponde a  $\eta\beta \ll 1$  e  $\beta \ll 1$ . Fazendo então a expansão apropriada na definição (5.2.3) e abandonando termos de ordem superior, vem:

$$F_k(\eta, \beta) = F_k(\eta) + \frac{1}{4} \beta F_{k+1}(\eta)$$

onde

$$F_k(\eta) \equiv \int_0^{\infty} \frac{z^k}{1 + e^{z-\eta}} dz \quad (5.2.8)$$

que é análoga não-relativística da integral de Fermi.

Deste modo, a pressão e a densidade de número tem a seguinte expressão:

$$P = K m_e c^2 \beta^{5/2} \frac{2}{3} F_{3/2}(\eta) \quad (5.2.9)$$

$$n = K \beta^{3/2} F_{1/2}(\eta) \quad (5.2.10)$$

A densidade de energia é relacionada com a pressão através de

$$\epsilon = 3/2 P \quad (5.2.11)$$

### 2) Relativístico

## 2) Relativístico

Neste caso, temos  $\beta \gg 1$  ou  $\eta\beta \gg 1$ , e de forma análoga ao item anterior, chegamos a:

$$F_k(\eta, \beta) = \left(\frac{1}{2} \beta\right)^{1/2} \left[ F_{k+1/2}(\eta) + \frac{1}{\beta} F_{k-1/2}(\eta) \right] \quad (5.2.12)$$

$$P = K m_e c^2 \beta^4 \frac{1}{3\sqrt{2}} F_3(\eta) \quad (5.2.13)$$

$$n = \frac{K}{\sqrt{2}} \beta^3 F_2(\eta) \quad (5.2.14)$$

e

$$\epsilon = 3P \quad (5.2.15)$$

## 3) Não-degenerado

Equivale a  $\eta \ll 0$  e coincide com a aproximação clássica de gás perfeito. Assim,

$$P = n k T \quad (5.2.16)$$

onde a densidade de número é dada por

$$n = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 e^\eta \quad (\text{relativístico}) \quad (5.2.17)$$

ou

$$n = \frac{1}{4\pi^3 h^3} (2\pi m_e kT)^{3/2} e^\eta \quad (\text{não-relativístico}) \quad (5.2.18)$$

## 4) Completamente Degenerado

Este caso ( $\eta \gg 0$ ) foi estudado por Chandrasekhar<sup>(15)</sup>, que o aplicou no estudo de anãs brancas. As expressões são:

$$P = \frac{K}{12\sqrt{2}} m_e c^2 f(x) \quad (5.2.19)$$

$$\dot{n} = \frac{K}{3\sqrt{2}} x^3 \quad (5.2.20)$$

e

$$\epsilon = \frac{K}{12\sqrt{2}} m_e c^2 \cdot g(x) \quad (5.2.21)$$

onde

$$x = \left[ (1 + \beta\eta)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (5.2.22)$$

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x \quad (5.2.23)$$

$$g(x) = 8x^3 \left[ (1 + x^2)^{1/2} - 1 \right] - f(x) \quad (5.2.24)$$

Para densidades acima de  $10^{10}$  g/cm<sup>3</sup>, a aproximação de gás completamente degenerado difere muito pouco (menos de 1%) das equações (5.2.2), (5.2.5) e (5.2.7). Isto justifica plenamente a utilização desta aproximação para densidades superiores ao valor citado acima.

### 5.3 - GÁS SEMI-DEGENERADO

Como afirmamos um pouco antes, a região de  $\eta \sim 0$  (parcialmente degenerada) é de relevância aqui neste trabalho. Assim, em muitas situações, principalmente no período da contração quase-estática e nos instantes iniciais do colapso, em que os valores da densidade e da temperatura não nos permitem aproveitar as fórmulas relativamente simples dos 4 casos limites discutidos, temos que partir efetivamente para resolver as integrais de Fermi a 2 variáveis.

O método é reduzir as integrais de Fermi a uma tabela de apenas uma dimensão, segundo um esquema dado por Chiu<sup>(66)</sup>, que visa a cálculo pelo computador eletrônico. O resultado é:



$$p = \frac{2^{3/2} m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \beta^{5/2} \left[ F_{3/2}(\eta) + F_{5/2}(\eta) \frac{G(U_{3/2}, \beta) - 1}{U_{3/2}} \right] \quad (5.3.25)$$

$$n = \frac{\sqrt{2} m_e^3 c^3}{\pi^2 \hbar^3} \beta^{3/2} \left[ F_{1/2}(\eta) + F_{3/2}(\eta) \frac{F(U_{1/2}, \beta) - 1}{U_{1/2}} \right] \quad (5.3.26)$$

$$e = \frac{\sqrt{2} m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \beta^{5/2} \left[ F_{3/2}(\eta) + F_{5/2}(\eta) \frac{F(U_{3/2}, \beta) - 1}{U_{3/2}} \right] \quad (5.3.27)$$

onde

$$F(u, \beta) = (1 + u\beta)(1 + \frac{1}{2} u\beta)^{1/2}$$

$$G(u, \beta) = (1 + \frac{1}{2} u\beta)^{3/2}$$

sendo

$$U_{1/2}(\eta) = \left[ F_2(\eta)/F_{3/2}(\eta) \right]^2$$

e

$$U_{3/2}(\eta) = \left[ F_3(\eta)/F_{5/2}(\eta) \right]^2$$

Montamos uma tabela de integrais de Fermi não-relativísticas, correspondentes a valores do argumento de -20 a 127, com intervalos proporcionais à própria raiz quadrada do argumento. Os extremos inferior e superior do argumento foram escolhidos, de modo que a tabela possa cobrir toda a faixa de densidade de interesse. Esta tabela apresenta resultados das integrais para 600 valores do argumento, uma parte dos quais é mostrada na Tab. 5.3.1

A fim de verificar a precisão da aproximação, Chiu comparou o resultado dado pelas eqs. (5.3.25), (5.3.26) e (5.3.27) com o valor das integrais calculado, de modo exato, no ponto onde se espera o desvio máximo ocorrer (em  $\eta=1$  e  $\eta\beta=1$ ) O erro é inferior a 0.1%.

|           |                    |                 |                 |
|-----------|--------------------|-----------------|-----------------|
| $\eta$    | - 0.1900627170( 2) | 0.1095224873(1) | 0.7025443999(2) |
| $F_{1/2}$ | 0.4605806721(-8)   | 0.1310016898(1) | 0.3900565263(3) |
| $F_{3/2}$ | 0.6908627212(-8)   | 0.2465022575(1) | 0.1638536561(5) |
| $F_2$     | 0.1039400954(-7)   | 0.3990359795(1) | 0.1142806977(6) |
| $F_{5/2}$ | 0.1727138628(-7)   | 0.7005782983(1) | 0.8199674730(6) |
| $F_3$     | 0.3118179398(-7)   | 0.1318074287(2) | 0.6006865475(7) |

Tabela 5.3.1 - Integrais de Fermi para 3 valores diferentes de  $\eta$ . Os números entre parênteses denotam potências de 10.

Na prática, como a pressão pode ser determinada quando a densidade, a temperatura e a composição química são conhecidas ?

Em primeiro lugar, através de um fluxograma, calculamos a composição química para densidade e temperatura dadas.. Em seguida, determinamos o potencial químico  $\mu$  que aparece nas integrais de Fermi. O valor de  $\mu$  é relacionado a  $\rho$  e  $T$  através da eq. (5.3.26). Finalmente, uma interpolação (escolhemos a fórmula de Lagrange com 6 termos) dos valores dados pela eq.(5.3.26), junto com resultados tirados da tabela de Fermi, nos fornece então o valor desejado da pressão, que denotamos por  $P_{sd}$ .

#### 5.4 - GÁS DE NEUTRONS

A equação de estado para o gás de neutrons é exatamen

te igual à do gás de elétrons, com a única diferença de que, em vez de massa do elétron, deve-se usar a massa do neutrôn. A razão é que o neutrôn é também um fermion, obedecendo portanto à mesma estatística de Fermi-Dirac, e com o mesmo fator estatístico (spin 1/2).

### 5.5.- EQUAÇÃO DE ESTADO DA MATÉRIA

A matéria estelar é usualmente classificada em 4 regimes ou fases distintas de densidade, a saber: fases subnuclear sem neutrons livres, subnuclear com neutrons livres, nuclear e supranuclear ou hiperônica.

#### a) Subnuclear Sem Neutrons Livres

Esta faixa de densidade vai de  $500 \text{ g/cm}^3$  (quando os elétrons já podem ser considerados partículas livres) até a densidade limiar para evaporação de neutrons. Nos cálculos de estrutura de estrelas de neutron, este limiar é da ordem de  $10^{11} \text{ g/cm}^3$  (Chung<sup>(57)</sup>), por exemplo, encontrou o valor de  $6 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ). Contudo, em cálculo de colapso, o limite superior desta faixa é dado pelo valor da densidade, a partir do qual surgem neutrons livres (isto é, neutrons fora dos núcleos) no meio, ou através da reação  $(\gamma, n)$  ou principalmente através da captura eletrônica pelo último núcleo de cada família isobárica que faz uma transição ao vizinho isobárico seguinte com  $S_n$  negativo, passando este a emitir por causa disso neutrons, ao longo da família isotópica correspondente. De qualquer maneira, o limite superior tem que ser maior que o limiar de captura eletrônica, evidentemente. Além disso, a temperatura tem que ser aqui

levada em conta.

Neste regime, a principal contribuição para a pressão é dada pelo gás de elétrons. Existem várias equações de estado para esta região<sup>(68)</sup>, mas todas elas obtidas na hipótese de temperatura nula.

Uma equação de estado possível (dada por Arnett) é<sup>(8)</sup>:

$$P = P_{gp} + P_{deg} + P_{par} + P_{rad} + P_{nuc} \quad (5.5.28)$$

onde os termos são, respectivamente, a contribuição do gás perfeito, gás degenerado, par elétron-pósitron, radiação e dos núcleos presentes. Na eq. (5.5.28), os dois primeiros termos dão a aproximação do gás de elétrons como uma simples soma da equação de estado nos 2 limites: gás perfeito e gás completamente degenerado.

Entretanto, foi mostrado pelo próprio Arnett que esta equação de estado na região semi-degenerada apresenta um erro de até 16%. Ela é insatisfatória, portanto.

Como estamos justamente preocupados com a região semi-degenerada, substituímos os 2 primeiros termos na eq. (5.5.28) pela eq. (5.3.25), com interpolação. Desprezando a contribuição dos pares elétron-pósitron, a equação de estado neste regime, que usamos, é:

$$P = P_{sd} + P_{rad} + P_{nuc} \quad (5.5.29)$$

#### b) Subnuclear com Neutrons Livres

Esta região se estende desde o limiar de evaporação de neutrons até a completa dissociação dos núcleos que, pelos

cálculos de Langer et al. (69) (para o limite de  $T = 0$ ), ocorre a  $5 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ . A equação de estado, neste caso, é também dada pela eq. (5.5.29), com a diferença de que um termo correspondendo ao gás de nêutrons deve ser acrescentado. Este termo, à medida que a densidade de nêutrons livres aumenta, vai substituindo o do gás de elétrons como fonte principal de pressão. Assim,

$$P = P_{sd} + P_{rad} + P_{nuc} + P_{neu} \quad (5.5.30)$$

### c) Nuclear

A faixa de densidade nuclear é aquela que vai de  $5 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$  a  $6 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Neste regime, a matéria é constituída de uma fase homogênea nêutron-próton-elétron, em que os nêutrons representam a parte maior das partículas presentes. Os eventuais muons e híperons na parte superior deste domínio são desprezados.

É provável que a matéria, neste regime, se apresente em estado de superfluidez. Segundo se acredita, esta superfluidez pode afetar a taxa de esfriamento da estrela (70)

Pode-se usar, nesta faixa de densidade, uma equação de estado obtida por El-Eid (71) que se baseou no modelo de Thomas-Fermi nuclear. Deste modo, a equação de estado se escreve:

$$P = P_{TF} + P_{rad} \quad (5.5.31)$$

### d) Supranuclear ou Hiperônica

É o domínio com densidade superior a  $6 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ , em que aparecem os híperons  $\Sigma^-$ ,  $\Lambda$  e  $\Sigma^0$ . Não existem ainda da

dos experimentais nesta faixa suficientes que permitam fundamentar uma relação simples entre a pressão de um lado e a densidade e a temperatura do outro.

Em 1973, Leung e Wang <sup>(72)</sup> tentaram obter uma equação de estado, introduzindo o que chamam de espectro de massa bariônica efetiva. Desta maneira, encontraram uma forma assintótica relativamente simples, que eles julgam válida para  $\rho \sim 10^{17}$  g/cm<sup>3</sup>, e que é dada por

$$P = \frac{1}{5 + 2\alpha} \rho \quad (5.5.32)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro.

Nossos cálculos não chegam até esta região. Contudo, quando eventualmente necessário, simplesmente estendemos a validade da equação de Thomas-Fermi para o domínio hiperônico, pelo menos até  $\rho \sim 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, que é o limite de interesse neste trabalho.

Heintzmann e Hillebrandt <sup>(73)</sup> examinaram modelos de estrelas hiperônicas à luz da Relatividade Geral. Com o auxílio da equação de estado de Libby e Thomas, chegaram à conclusão de que tais estrelas podem existir gravitacionalmente ligadas e estáveis contra pulsações radiais.

## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 6.1 - TAXAS

Uma vez iniciada a implosão, os processos dominantes são a captura eletrônica e a emissão retardada de neutrons, cujas taxas nós calculamos com o auxílio da teoria grossa. Na Fig. 6.1.1, mostramos os resultados para 5 membros da família isobárica  $A = 56$ , inclusive o  $^{56}\text{Fe}$ . Chamamos a atenção para o fato de que o limiar de captura ou de emissão retardada é função de  $Z$  e de  $A$  (mais precisamente, do valor  $Q$  da reação). Na região de altas densidades ( $\gg$  densidade limiar), as taxas aumentam linearmente com a densidade (em escala log-log). Isto se deve ao comportamento da função intensidade a tais densidades.

Lembramos, contudo, que foi utilizada a aproximação de temperatura zero. Esta aproximação é imposta pelo tempo de cálculo. Se temperatura fosse incluída, os valores limiares de reação seriam deslocados, mas isto não alteraria de maneira sensível os nossos resultados. De qualquer modo, na maior parte da faixa de densidades que nos interessam, as taxas tem uma dependência muito pequena na temperatura.

Outro ponto que deve ser notado é o seguinte: a fim de obter fórmulas computacionalmente úteis para as taxas, tive-

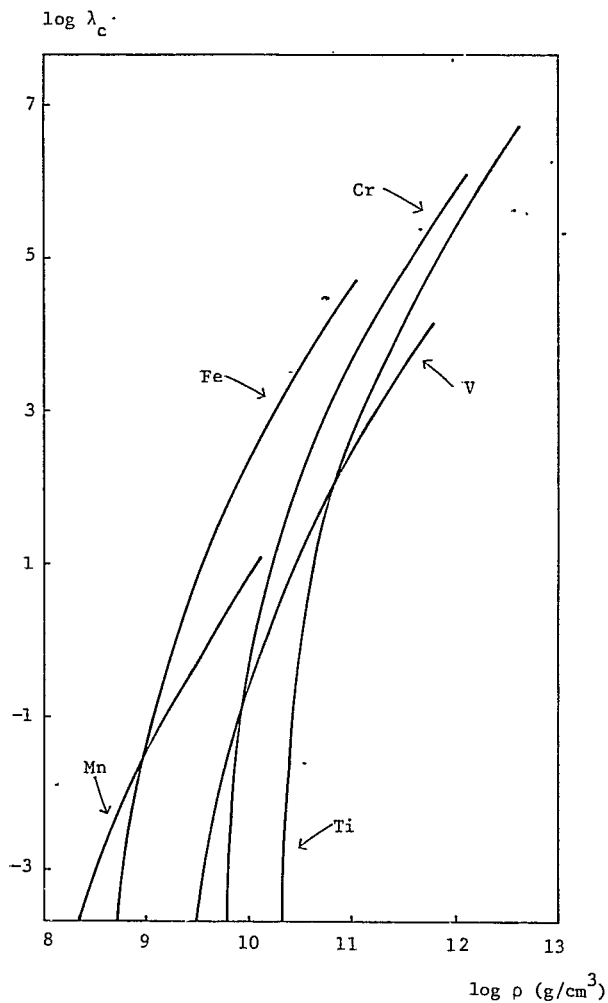


Figura 6.1.1 - Taxas de captura eletrônica do Fe, Mn, Cr, V e Ti.



mos de aproximá-las por expressões simplificadas. A precisão que obtivemos é, no pior caso, de 40% (na maioria dos casos,  $\sim 5\%$ ), o que representa um preço perfeitamente admissível - em troca da exequibilidade das fórmulas de taxa.

As taxas calculadas pela teoria grossa, são, em nossa opinião, mais realistas que as obtidas por outros métodos, porque elas já levam em conta a própria estrutura nuclear. Evidentemente, como há incertezas nas fórmulas de massa para os núcleos ricos-em-neutron (afastados da linha de beta-estabilidade), isto só é verdade em termos de propriedades globais ou, em outras palavras, em termos estatísticos.

## 6.2 - EQUAÇÃO DE ESTADO E COMPOSIÇÃO QUÍMICA

Tivemos a preocupação de usar uma equação de estado que traduzisse melhor a contribuição do gás de elétrons (ou de neutrons) na região semi-degenerada. Esta contribuição é essencial para o comportamento da estrela, pelo menos até o surgimento da interação nuclear. Deste modo, para tanto, resolvemos as integrais de Fermi dentro de uma precisão de 0.1%, e tabelamos os resultados para valores  $\eta = \mu/kT$  entre -20 e 127. Para valores de  $\eta$  superiores a 127 (região completamente degenerada), o cálculo das integrais de Fermi ultrapassa os limites de nossa tabela e a pressão é, então, substituída pela expressão (5.2.19), válida para a região totalmente degenerada.

A Fig. 6.2.2 mostra os valores da pressão do gás de elétrons que obtivemos (com  $T_g = 1$ ). Para efeito de comparação, apresentamos também a pressão dada como uma simples soma dos ter

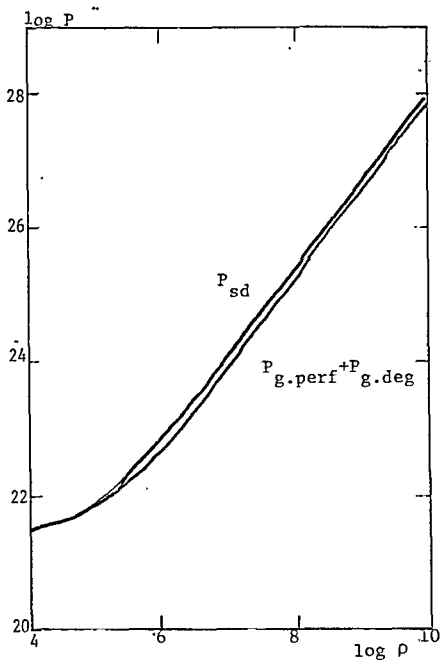


Figura 6.2.2 - Equação de estado semi-degenerado  $P_{sd}$  e equação de estado dada pela soma de gás perfeito e gás degenerado.

mos de gás perfeito e gás completamente degenerado (utilizamos um valor do peso molecular por elétron  $\mu_e$  correspondente a  $^{56}\text{Fe}$  puro). Veremos que, tal como era de se esperar, o des-

vio é bastante sensível na região semi-degenerada.

Além disso, os valores de  $dE/dV$  e  $dE/dT$  apresentam igualmente grandes desvios, como se pode verificar pela Tab. 6.2.1. Nesta tabela, usamos ainda  $T_9 = 1$  e peso molecular por elétron igual ao de  $^{56}\text{Fe}$ . Para um dado valor da densidade, a primeira linha fornece o valor calculado com o auxílio das integrais de Fermi e da interpolação numérica; a segunda dá o valor obtido com a aproximação de gás perfeito mais gás degenerado.

Quanto aos resultados, vemos que o desvio é relativamente pequeno para  $dE/dV$  (no máximo por um fator de 4), mas em

TABELA 6.2.1 - Valores de  $dE/dV$  e  $dE/dT$  para  $T_0 = 1$ . Os números entre parênteses denotam potências de 10.

| $\rho$<br>( $\text{g cm}^{-3}$ ) | $dE/dV$<br>( $\text{erg cm}^{-3}$ ) | $dE/dV$<br>( $\text{erg g}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ ) |
|----------------------------------|-------------------------------------|---|
| (4)                              | 0.7547803 (22)                      | 0.3102714 (20)  |
|                                  | 0.7551865 (22)                      | 0.3201419 (10)  |
| (5)                              | 0.7263525 (22)                      | 0.3784466 ( 9)  |
|                                  | 0.6989070 (22)                      | 0.4781252 ( 9)  |
| (6)                              | -0.6892279 (22)                     | 0.9810998 ( 8)  |
|                                  | -0.1582723 (22)                     | 0.2057959 ( 9)  |
| (7)                              | -0.6797322 (24)                     | 0.4346637 ( 8)  |
|                                  | -0.7521517 (24)                     | 0.1785629 ( 9)  |
| (8)                              | -0.1918858 (26)                     | 0.1850995 ( 8)  |
|                                  | -0.1942153 (26)                     | 0.1758397 ( 9)  |
| (9)                              | -0.4400005 (27)                     | 0.8339322 ( 7)  |
|                                  | -0.4401055 (27)                     | 0.1755673 ( 9)  |
| (10)                             | -0.9599892 (28)                     | 0.3694497 ( 7)  |
|                                  | -0.9597860 (28)                     | 0.1755401 ( 9)  |

se tratando de  $dE/dT$ , a diferença é tanto maior quanto maior a densidade, chegando a quase duas ordens de grandeza no caso de densidade igual a  $10^{10} \text{ g cm}^{-3}$ . Por outro lado, podemos ainda notar que  $dE/dV$  muda de sinal (positivo para  $\rho$  pequeno e negativo para  $\rho$  grande). Isto é nada mais nada menos que uma outra manifestação do efeito de degenerescência.

Estas observações acima são importantes, porque as quantidades  $dE/dV$  e  $dE/dT$  entram diretamente na eq. (4.1.27), que é a expressão da conservação de energia.

A composição química é uma das peças-chaves do complexo quebra-cabeça que é a teoria de evolução estelar. Desgraçadamente, ela mesma constitui um quebra-cabeça à parte. As informações que temos de composição química estelar se restringem ao estudo dos meteoritos e principalmente à análise das linhas espectrais emitidas pelas estrelas. Para o Sol (no estágio de sequência principal), por exemplo, Gaustad<sup>(74)</sup> fornece a seguinte composição química:

$$X = 0.70 \text{ a } 0.72$$

$$Y = 0.26 \text{ a } 0.28$$

$$Z = 0.02 ,$$

onde X, Y e Z são, respectivamente, as frações em massa de hidrogênio, hélio e metais.

Como a composição química é ainda uma incógnita para estrelas em estágios mais avançados (a não ser que se acompanhe a evolução da estrela desde o início, o que até agora ninguém fez), resolvemos adotar um modelo que é, conquanto razoável, o mais simples possível. Trata-se do seguinte:

Como explicamos na Seção 1.2.1, a composição química muda ao longo da vida útil da estrela, de modo que nos últimos estágios de evolução é razoável admitir, como admitimos, os seguintes valores para X, Y e Z:

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = 1$$

onde Z denota aqui fração em massa do elemento  $^{56}\text{Fe}$ .

### 6.3 - CAPTURA ELETRÔNICA E COLAPSO

A Fig. 6.3.1 mostra o comportamento da densidade para 3 valores diferentes do parâmetro  $\chi$ . Para  $\chi = 0$ , temos o caso de escape livre de neutrinos; e para  $\chi = 1$ , encontramos confinamento total. Entre estes dois valores limites, colocamos  $\chi = 0.5$ . Vemos que, em todos os 3 casos, o aumento da densidade corresponde ao de colapso estelar. A linha tracejada dá a evolução da estrela, para o caso em que as reações de captura foram desconectadas. Neste caso, o comportamento é naturalmente de equilíbrio estático.

Ainda, a Fig. 6.3.1 nos mostra que quanto menor o valor de  $\chi$  (fisicamente um índice de confinamento dos neutrinos no interior da estrela), mais rápido e favorável é o colapso. Isto é facilmente entendido, desde que valores de  $\chi$  grandes significam perdas menores de energia pela estrela, o que age no sentido contrário ao colapso.

A Fig. 6.3.2 fornece a variação das abundâncias (normalizadas a 1) dos 3 primeiros elementos da família  $A=56$ , a saber, o ferro, o manganês e o cromo. É bastante acentuado o aumento da abundância de Mn nos instantes finais do cálculo. Isto mostra que a captura eletrônica foi efetiva em transmutar o ferro em manganês, em proporções pelo menos dentro do suficiente para provocar o colapso.

Finalmente, a Fig. 6.3.3 representa o plano  $p$ - $T$ , em que a linha de estabilidade é mostrada em linhas tracejadas. Uma vez mais, podemos notar o efeito do confinamento sobre o aumento da temperatura do sistema, desde que o percurso com  $\chi = 1$  (confinamento total) permanece mais afastado da linha de estabilidade dinâmica do que o percurso com  $\chi = 0$ .

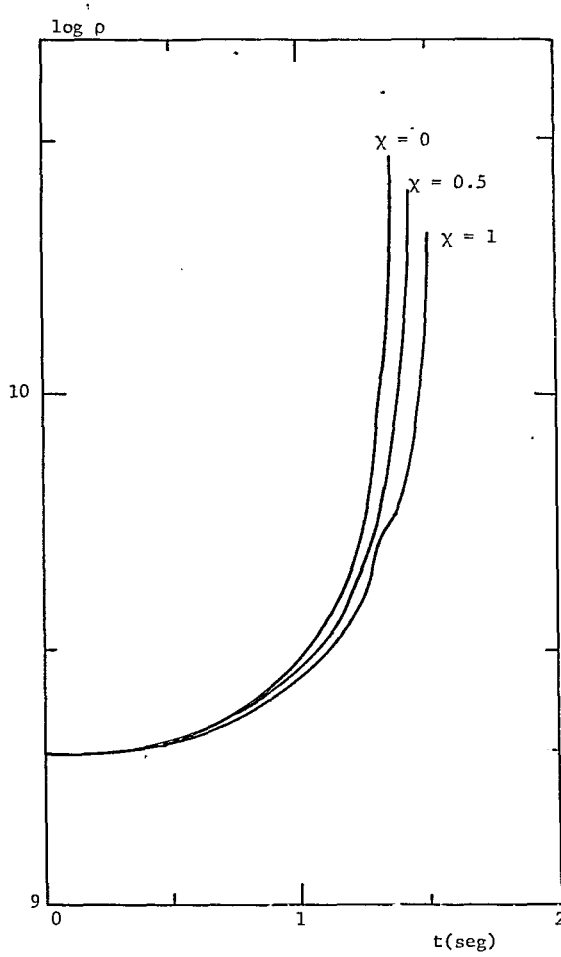


Figura 6.3.1 = Variações da densidade para 3 valores do parâmetro  $\chi$ .

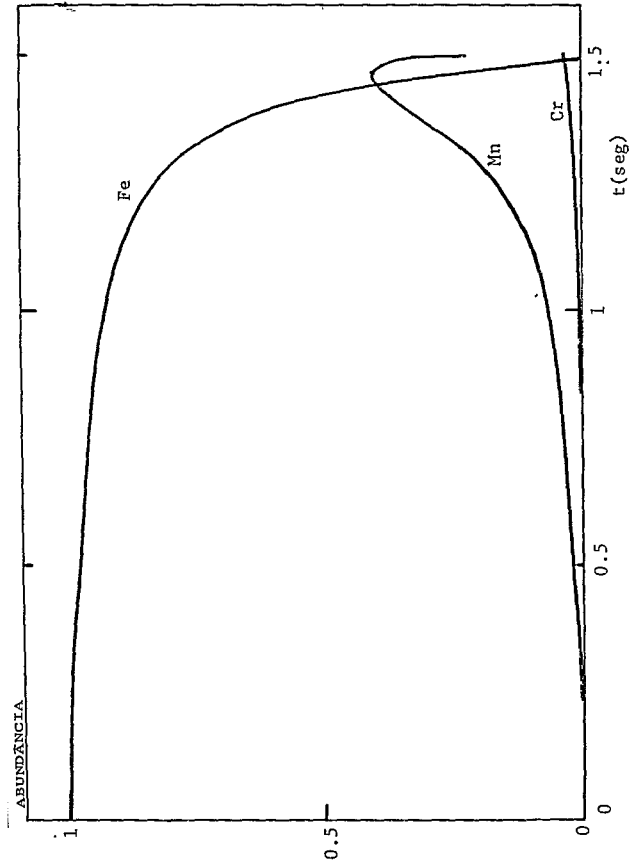


Figura 6.3.2 - Abundâncias dos 3 primeiros elementos da família A=56.

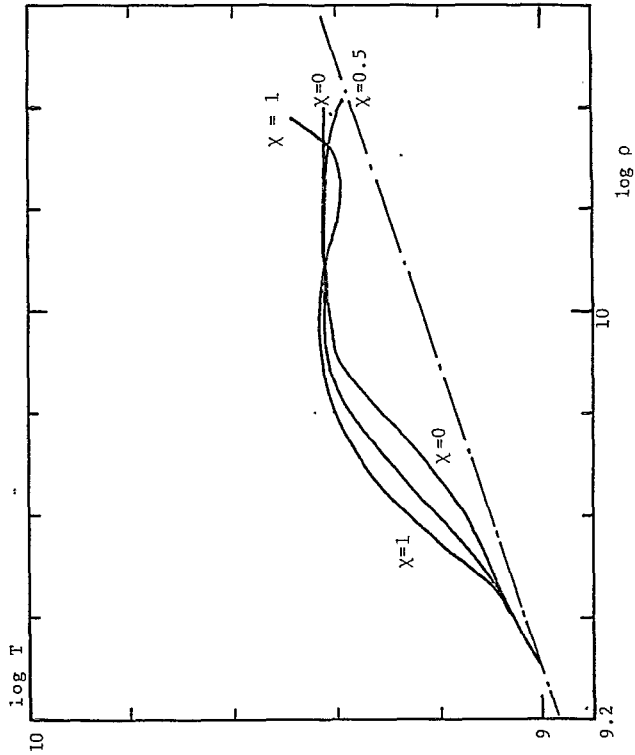


Figura 6.3.3 - Plano  $\rho$ - $T$  com os percursos correspondentes aos 3 valores de  $\chi$ .



#### 6.4 - EVOLUÇÃO QUASE-ESTÁTICA

A título de resultados preliminares de um cálculo não-simplificado que pode ter seguimento num futuro próximo e para mostrar as diferenças nos cálculos, apresentamos também a evolução quase-estática do modelo de pré-supernova de Chiu.

Usamos o modelo de Chiu, conforme o exposto na Seção 1.4.2 com a composição química no caroço dada pelo item anterior e com a composição química na envoltória dada pelo hidrogênio puro.

As perdas de energia por neutrinos de par e de plasma foram utilizadas para fazer o sistema evoluir ao longo da adiabática  $4/3$ . A fim de economizar tempo de cálculo (já na ordem de  $10^5$  seg de CPU!), aceleramos o processo, introduzindo um fator 100 nas taxas de perda de energia<sup>(9)</sup>.

O comportamento dinâmico da estrela nesta fase pode ser acompanhado através da evolução de 3 camadas, que arbitrariamente escolhemos como sendo a 1<sup>a</sup> (camada central), a 11<sup>a</sup> e a 31<sup>a</sup>. A Fig. 6.4.1 mostra as oscilações da densidade durante o período de evolução quase-estática. Vemos que elas são mais acentuadas nas camadas centrais (amplitudes e frequências maiores) que nas camadas externas do caroço. Isto claramente reflete uma propriedade física da matéria: a sua compressibilidade, que é dada por  $\kappa = (\rho \frac{dP}{d\rho})^{-1}$ . A compressibilidade é, portanto, aproximadamente proporcional ao inverso da densidade. Como, por sua vez, a frequência destas pequenas oscilações é, em primeira aproximação, proporcional a  $\kappa^{-1/2}$  (o coeficiente de restituição é dado por  $\kappa^{-1}$ ), então ela é proporcional a  $\rho^{1/2}$ , o que

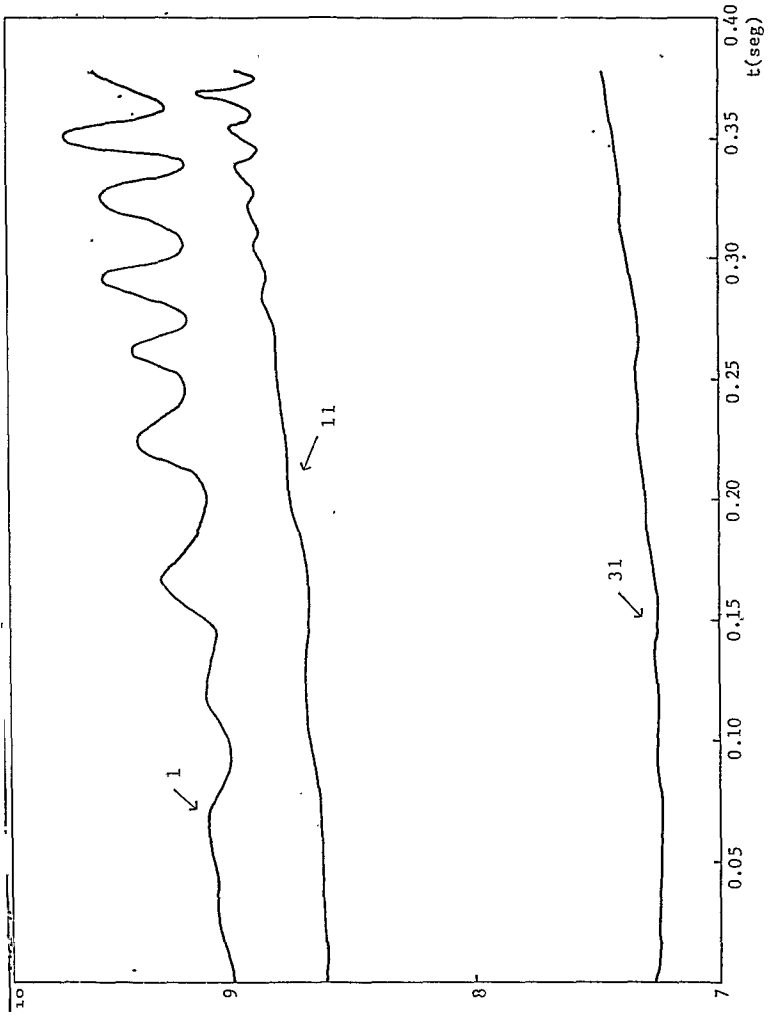


Figura 6.4.1.1 - Variação de densidade em relação ao tempo para as zonas 1, 11 e 31.

justifica a nossa observação acima.

Na Fig. 6.4.2, apresentamos a variação das velocidades radiais em relação ao tempo para as camadas de números 6, 16 e 36. As grandes flutuações que aí ocorrem são devidas ao movimento oscilatório das densidades, e estão também em perfeito acordo qualitativo com os obtidos por Colgate e White<sup>(7)</sup> (Fig. 6.4.3), que usaram o modelo isotrópico de Fowler-Hoyle (cf. Seção 1.4.1), com massa total de  $10 M_{\odot}$  e densidade central de  $3.2 \times 10^5 \text{ g/cm}^3$ . Contudo, é bom lembrar que tais flutuações na velocidade são termodinamicamente desprezíveis pelo seguinte argumento: As contribuições por partícula de origem cinética ( $\propto U^2/2$ ) são inferiores a 1% (no pior dos casos) que a energia térmica ( $\propto kT$ ) e inferiores a 0.4% que a energia gravitacional ( $\propto GM/r$ ), como mostra a Tab. 6.4.1.

TABELA 6.4.1 - Valores das energias por partícula para 3 camadas, calculados no instante  $t = 0.13$  seg, com  $E_c$ ,  $E_g$  e  $E_t$  denotando energias cinética, gravitacional e térmica, respectivamente.

| CAMADA | $E_c$                 | $E_g$                 | $E_t$                 | $E_c/E_g$ | $E_c/E_t$ |
|--------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------|-----------|
| 6      | $1.29 \times 10^{-3}$ | $3.87 \times 10^{-1}$ | $3.35 \times 10^{-1}$ | 0.0033    | 0.0038    |
| 16     | $9.38 \times 10^{-4}$ | 1.09                  | $3.18 \times 10^{-1}$ | 0.00086   | 0.0029    |
| 36     | $3.23 \times 10^{-3}$ | $9.85 \times 10^{-1}$ | $3.19 \times 10^{-1}$ | 0.0033    | 0.010     |

A Fig. 6.4.4 mostra as distribuições de densidade e de velocidade em relação às camadas, no instante em que acionamos o mecanismo de captura eletrônica para as camadas mais centrais ( $t = 0.378$  seg). Por conveniência, plotamos  $-U$  em vez de  $U$ . Podemos ver que apenas cerca de 5 camadas (10%) atingiram a

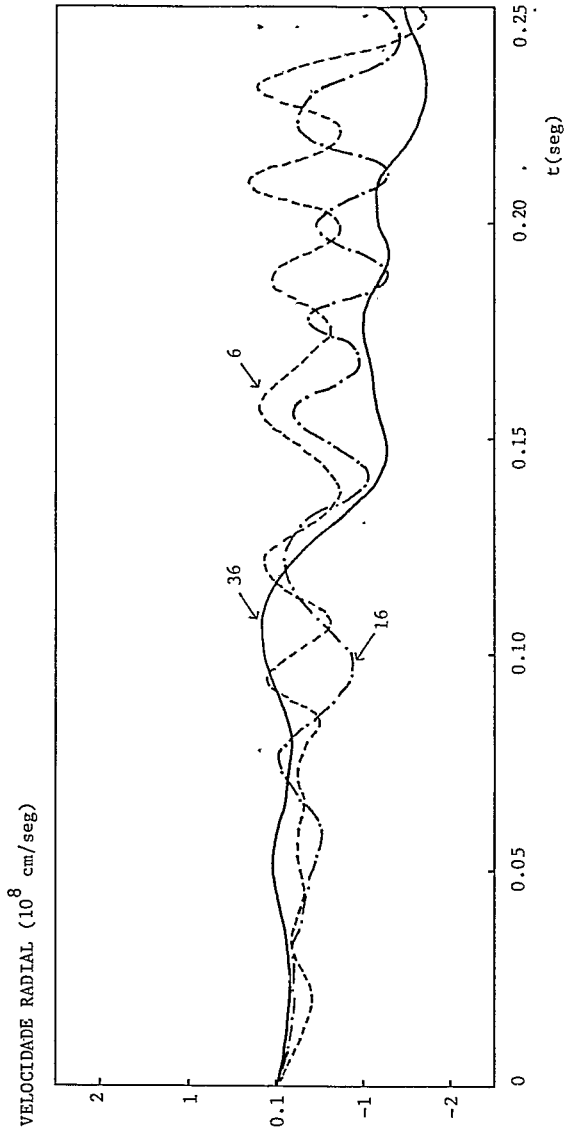


Figura 6.4.2 - Velocidades radiais das zonas 6, 16 e 36 durante a evolução quase-estática.

Figura 6.4.3 - Oscilações da velocidade para zonas de 0.8% da massa (curva 1), 26% (curva 2), 78% (curva 3) e 100% (curva 4).

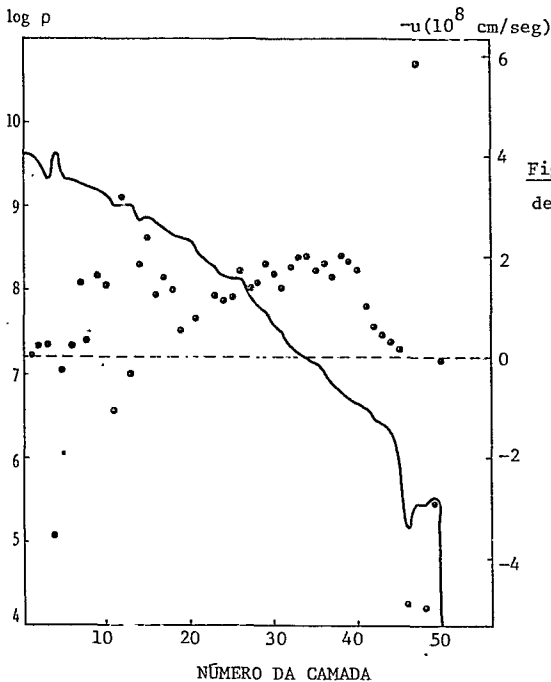
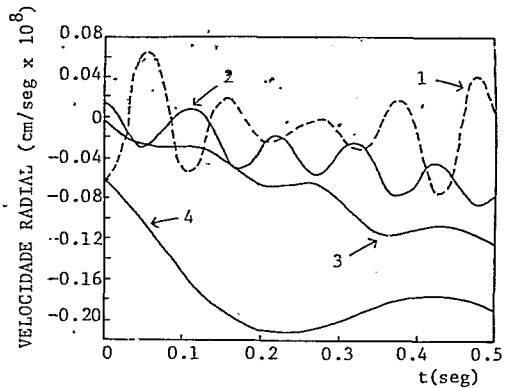


Figura 6.4.4 - Distribuições de densidade e de velocidade.

região limiar de captura e que a grande maioria está começando a cair em direção ao centro da estrela (velocidades negativas).

A Fig. 6.4.5 dá as distribuições de pressão e de temperatura, e mostra que o gradiente de temperatura é pequeno

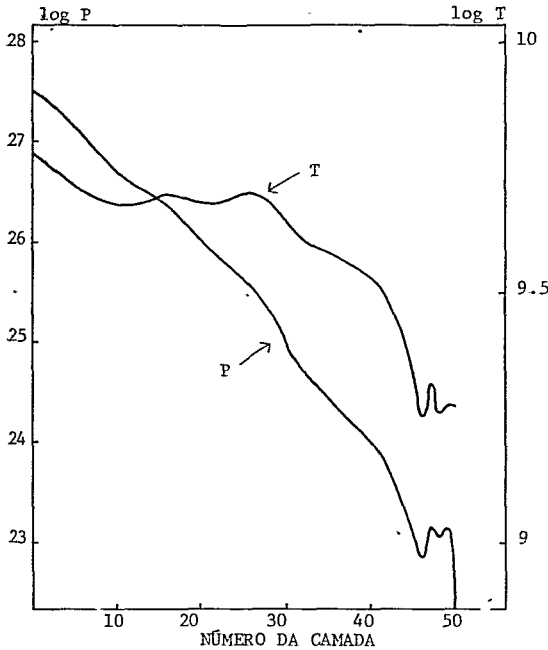


Figura 6.4.5 - Distribuições de temperatura e pressão.

no caroço (com efeito, antes do processo quase-estático, era identicamente nulo) e grande na envoltória, ao contrário do gradiente de pressão, que é grande no caroço e pequeno na envoltória.

Apresentamos também a evolução da

estrela ao longo do plano  $T$ - $\rho$ , até o ponto de acoplamento com a captura eletrônica (Fig. 6.4.6). O pequeno desvio da adiabática  $4/3$  (linha tra-

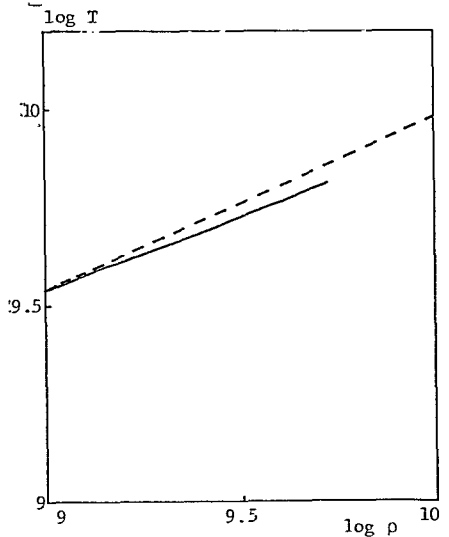


Figura 6.4.6 - Evolução quase-adiabática no plano  $\rho$ - $T$ .

cejada) é devido ao expediente que usamos para acelerar o processo computacional. Isto representa a introdução de uma incerteza no cálculo das temperaturas, que no entanto não chega a ter influência no comportamento dinâmico do colapso.

## 6.5 - CONCLUSÕES

Pelas Figs. 6.3.1 e 6.3.2, vemos que a variação brusca de densidade nos instantes finais corresponde a um aumento apreciável na abundância do manganês, o que significa que os processos de captura eletrônica realizados pelo  $^{56}\text{Fe}$  são eficientes para provocar o colapso estelar. O fato de termos utilizado um modelo bastante simplificado não invalida esta conclusão, porque, para qualquer valor do parâmetro  $X$ , o comportamento é essencialmente o mesmo.

Esta tese mostrou então que a captura eletrônica é importante nos instantes finais de evolução de uma estrela de  $3.5 M_{\odot}$ , no sentido de acionar o mecanismo de colapso estelar. Mostrou também que a variação de composição química desempenha papel fundamental, a despeito do calor liberado nas capturas, que atuam em sentido contrário.

O método de acoplamento que aplicamos neste trabalho pode ser estendido ao problema não-simplificado, desde que se consiga melhorar o tratamento de transporte de neutrinos.

## APÊNDICE A

### INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA

#### A.1 - EQUAÇÕES DIFERENÇAS

A fim de resolvermos as eqs. (4.1.7), (4.1.8) e (4.1.27), temos primeiramente que transformá-las em equações de diferenças finitas. Há muitas maneiras de fazer isto, cada maneira correspondendo a uma aproximação diferente. Neste trabalho, adotamos a aproximação utilizada por Colgate e White e por Arnett, que é a seguinte:

Dividimos a estrela em  $J$  zonas esféricas concêntricas, de raios iguais, tendo contornos numerados por  $j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, J$ ), do centro para fora. A primeira zona ( $j = 1$ ) representa o centro da estrela, e a  $J$ -ésima zona, a superfície.

Em seguida, separamos as principais quantidades em dois tipos:

- 1) quantidades associadas com os contornos de zona (as quantidades "mecânicas", como  $r$  e  $U$ , por exemplo); representamos tais quantidades por um sub-índice  $j$ ;
- 2) quantidades associadas com os centros de zona (as quantidades "termodinâmicas", como por exemplo  $V$ ,  $P$  e  $T$ ), que recebem, neste caso, o sub-índice  $j + 1/2$ .



Analogamente à distribuição espacial, as quantidades têm também uma distribuição temporal, que é dada pelo super-índice  $n$  ou  $n+1/2$ , conforme o caso. O instante inicial corresponde a  $n = 1$ .

Antes de tudo, a configuração inicial é suposta conhecida:

$$r_j^1, U_j^1, P_{j+1/2}^1, V_{j+1/2}^1, T_{j+1/2}^1, \quad (j = 1, \dots, J).$$

Calculamos, então, a massa de cada zona, a partir de:

$$dm_{j+1/2}^1 = \frac{4\pi}{3} \left[ (R_{j+1}^1)^3 - (R_j^1)^3 \right] \cdot V_{j+1/2}^1 \quad (A.1.1)$$

que corresponde à eq. (4.1.7). A massa total dentro do contorno  $j+1$  tem a seguinte forma:

$$m_{j+1}^1 = \bar{m}_j^1 + dm_{j+1/2}^1 \quad (A.1.2)$$

Com o auxílio das eqs. (A.1.1) e (A.1.2), podemos escrever a equação para conservação de momentum, eq. (4.1.8):

$$U_j^{n+1/2} = U_j^{n-1/2} - 4\pi r_j^n \left[ P_{j+1/2}^n - P_{j-1/2}^n + Q_{j+1/2}^{n-1/2} - Q_{j-1/2}^{n-1/2} \right] \frac{\Delta t^n}{dm_j^n} - G \frac{m_j^n}{(r_j^n)^2} \Delta t^n \quad (A.1.3)$$

onde  $dm_j^n$  é uma média espacial simples,

$$dm_j^n = \frac{1}{2} (dm_{j+1/2}^n + dm_{j-1/2}^n) \quad (A.1.4)$$

A partir da definição,

$$U \equiv \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_m \quad (A.1.5)$$

tiramos:

$$r_j^{n+1} = r_j^n + U_j^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (\text{A.1.6})$$

que pode ser usado, então, para atualizar o volume específico, eq. (A.1.1):

$$v_{j+1/2}^{n+1} = \frac{4\pi}{3} \frac{(R_{j+1}^{n+1})^3 - (R_j^{n+1})^3}{dm_{j+1/2}^{n+1}} \quad (\text{A.1.7})$$

Uma média temporal fornece uma expressão útil do volume específico no tempo  $n+1/2$ :

$$v_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (v_{j+1/2}^{n+1} + v_{j+1/2}^n) \quad (\text{A.1.8})$$

Quanto à temperatura, fazemos inicialmente

$$T_{j+1/2}^{3/2} = T_{j+1/2}^1 \quad (\text{A.1.9})$$

Uma extrapolação linear no tempo dá como resultado:

$$T_{j+1/2}^{n+1/2} = T_{j+1/2}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^{n+1/2}}{\Delta t^{n-1/2}} (T_{j+1/2}^n - T_{j+1/2}^{n-1}) \quad (\text{A.1.10})$$

A pressão, dada pela equação de estado, tem a seguinte forma funcional:

$$P_{j+1/2}^{n+1/2} = P(T_{j+1/2}^{n+1/2}, v_{j+1/2}^{n+1/2}, \{N_i\}) \quad (\text{A.1.11})$$

De maneira análoga:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \Big|_{j+1/2}^{n+1/2} = f(T_{j+1/2}^{n+1/2}, v_{j+1/2}^{n+1/2}, \{N_i\}) \quad (\text{A.1.12})$$

e:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \Big|_{j+1/2}^{n+1/2} = g \left( T_{j+1/2}^{n+1/2}, v_{j+1/2}^{n+1/2}, \{N_j\} \right) \quad (\text{A.1.13})$$

A pseudo-viscosidade de Neumann-Richtmyer tem por expressão:

$$\eta_{j+1/2}^{n+1/2} = 2 \left( U_{j+1}^{n+1/2} - \dot{U}_j^{n+1/2} \right)^2 / v_{j+1/2}^{n+1/2}$$

$$\text{se } v_{j+1/2}^{n+1} < v_{j+1/2}^n \quad \text{e} \quad U_{j+1}^{n+1/2} < U_j^{n+1/2} \quad (\text{A.1.14})$$

$$= 0 \quad \text{se } v_{j+1/2}^{n+1} \geq v_{j+1/2}^n \quad \text{ou} \quad U_{j+1}^{n+1/2} \geq U_j^{n+1/2}$$

Deste modo, a eq. (4.1.27) assume o aspecto:

$$\begin{aligned} T_{j+1/2}^{n+1} = & T_{j+1/2}^n + \frac{1}{E T_{j+1/2}^{n+1/2}} \left[ - \left( P_{j+1/2}^{n+1/2} + Q_{j+1/2}^{n+1/2} + \right. \right. \\ & \left. \left. E v_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \left( v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j+1/2}^n \right) + \left( s_{j+1/2}^{n+1/2} - L M_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \Delta t^{n+1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

onde usamos as seguintes notações:

$$E T_{j+1/2}^{n+1/2} \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \Big|_{j+1/2}^{n+1/2}$$

$$E v_{j+1/2}^{n+1/2} \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_T \Big|_{j+1/2}^{n+1/2}$$

$$L M_{j+1/2}^{n+1/2} \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial M}\right)_{V,T} \Big|_{j+1/2}^{n+1/2}$$

Na eq. (A.1.15),

$$s_{j+1/2}^{n+1/2} = s (T_{j+1/2}^{n+1/2}, v_{j+1/2}^{n+1/2}, \{N_j\})$$

e  $LM_{j+1/2}^{n+1/2}$  é dado, no caso de  $\theta = \lambda/d \leq 1$ , por:

$$LM_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{L_{j+1}^{n+1/2} - L_j^{n+1/2}}{DM_{j+1/2}} \quad (A.1.16)$$

onde

$$L_j^{n+1/2} = -\frac{16}{3} \pi^2 \text{ac} (R_j^{n+1/2})^4 \frac{(T_{j+1/2}^{n+1/2})^4 - (T_{j-1/2}^{n+1/2})^4}{(DM \times K)_j^{n+1/2}} \quad (A.1.17)$$

sendo

$$(DM \times K)_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (DM_{j+1/2} K_{j+1/2}^{n+1/2} + DM_{j-1/2} K_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (A.1.18)$$

com

$$K_{j+1/2}^{n+1/2} = K (T_{j+1/2}^{n+1/2}, v_{j+1/2}^{n+1/2})$$

No caso de  $\theta > 1$ ,

$$LM_{j+1/2}^{n+1/2} = s_{j+1/2}^{n+1/2} - \chi_{j+1/2}^{n+1/2} K_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{L_{j+1/2}^{n+1/2}}{4\pi (R_j^{n+1/2})^2} \quad (A.1.19)$$

Estas são, em resumo, as equações diferenças equivalentes às equações diferenciais da Hidrodinâmica. É certo que existem outros sistemas de equações diferenças muito superiores

que as acima, do ponto de vista da estabilidade, mas muito mais complicadas do ponto de vista de solução numérica.

A.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como dividimos a estrela em camadas esféricas concêntricas, é natural eleger, como contorno interno, o centro da estrela e, como contorno externo, a sua superfície.

Assim, no contorno interno, a simetria exige:

$$\begin{aligned} r_1^n &= 0 & , & & \forall n \\ U_1^n &= 0 & , & & \forall n \end{aligned} \tag{A.2.20}$$

Estas condições são suficientes para o contorno interno, visto que a simetria do problema assegura a continuidade da pressão, temperatura e volume específico através da origem.

Quanto ao contorno exterior, temos em geral:

$$U_J^n \neq 0$$

(exceto para  $n = 1$ , quando então impomos  $U_J^1 = 0$ ), de modo que o movimento da superfície estelar será determinado com a ajuda da pressão total ( $P + \eta$ ) em  $J+1/2$ . Contudo, ela não é calculada. Portanto, tem que ser imposta como condição de contorno. Fizemos, neste trabalho, para todo  $n$ :

$$\begin{aligned} P_{J+1/2}^n &= 0 \\ \eta_{J+1/2}^{n-1/2} &= 0 \end{aligned} \tag{A.2.21}$$

Com isto, a pressão total em  $J$  dá, como resultado, va

lor zero, que é a condição que desejamos para a pressão da superfície.

### A.3 - ESTABILIDADE DAS EQUAÇÕES DIFERENÇAS

O problema da estabilidade das equações diferenciais e das equações diferenças pode ser colocado nos seguintes termos: suponhamos que, em algum instante, exista, superposta a uma solução procurada  $\phi$ , uma perturbação (pequena)  $d\phi$ . Podemos perguntar: esta perturbação cresce com o tempo? Se não crescer, então a solução é dita estável; do contrário, é instável.

Vamos discutir, em particular, o caso das equações diferenças, que nos interessa. Sabemos que, sendo aproximações às equações diferenciais, elas não podem claramente reproduzir com precisão todas as características da solução exata. Mais concretamente, se  $\phi(r,t)$  é a solução exata e  $\phi_j^n$  a solução das equações diferenças correspondentes, existe então um erro de aproximação, que é dado por:

$$|\phi_j^n - \phi(r = j\Delta r, t = n\Delta t)| \quad (\text{A.3.22})$$

que admitimos ser pequeno.

Consideremos então a presença de uma perturbação  $d\phi$ . Não obstante a estabilidade das equações diferenciais (que dão a solução  $\phi$ ), cabe ainda a pergunta: a perturbação  $d\phi$  cresce com o tempo?

Isto significa, em outras palavras, que a solução das equações diferenças pode ser instável, mesmo que a solução das

equações diferenciais correspondentes seja estável. Ocorrendo esta hipótese, o esquema de diferenças finitas tem que ser obviamente descartado como aproximação às equações diferenciais do problema.

Cada conjunto de equações diferenças apresenta uma estabilidade própria (veja Richtmyer <sup>(75)</sup> para a estabilidade de vários desses conjuntos de equações). No caso de um conjunto como o que apresentamos na Seção A.1 deste Apêndice, em que desprezamos qualquer transferência radiativa, o tempo mínimo  $\Delta t_s$  para o material no contorno da zona  $j$  se comunicar com o da zona  $j+1$  é o tempo de percurso do som:

$$\Delta t_s = \frac{r_{j+1} - r_j}{v_s} \quad (\text{A.3.23})$$

onde  $v_s \approx \sqrt{2PV}$  é a velocidade do som no meio.

A exigência de que as condições no contorno  $j+1$ , no tempo  $n+1$ , não sejam perturbadas pelo que ocorre no contorno  $j$  no mesmo tempo  $n+1$ , nos fornece o critério de estabilidade que queremos:

$$\Delta t \leq \Delta t_s = \frac{\Delta r_{j+1/2}}{v_s} \quad (\text{A.3.24})$$

onde  $\Delta r_{j+1/2} = r_{j+1} - r_j$  é a largura da zona. A eq. (A.3.24) deve ser verdadeira para cada zona.

No problema do colapso gravitacional, encontrou-se que a condição (A.3.24) não reproduz fielmente a situação física. Por exemplo, na contração adiabática de uma esfera uniforme sob gravitação, cuja solução analítica é conhecida, a aproximação por equações diferenças não deu sucesso, a menos que alguma restrição como a que se segue, fosse aplicada:

$$\Delta V^{n+1/2} \leq 0.02 V^n \quad (\text{A.3.25})$$

isto é, a menos que a variação fracionária do volume específico ficasse em apenas uns poucos porcentos.

Baseado nisto, Colgate e White usaram a condição seguinte:

$$\Delta t^{n+3/2} \leq \frac{0.02 V_{j+1/2}^n \Delta t^{n+1/2}}{|V_{j+1/2}^n - V_{j+1/2}^{n-1}|} \quad (\text{A.3.26})$$

Contudo, a fim de evitar instabilidades que podem surgir com a retirada ou acréscimo súbito de energia (o termo  $\dot{E}$  na equação de conservação de energia é um exemplo) e, lembrando que para um fluido (gás perfeito),

$$E = \frac{1}{\gamma-1} PV \quad (\text{A.3.27})$$

onde  $\gamma$  é a razão dos valores específicos, uma condição envolvendo o produto PV, em vez de simplesmente V, é desejável. Assim:

$$\Delta t^{n+3/2} \leq \frac{0.02 P_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^n \Delta t^{n+1/2}}{\left| P_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^n - P_{j+1/2}^{n-1} V_{j+1/2}^{n-1} \right|} \quad (\text{A.3.28})$$

Para economizar tempo de cálculo, devemos tomar o limite superior da condição (A.3.28).



## APÊNDICE B

### TEORIA GROSSA

Para facilitar o cálculo das funções intensidade, temos que separar os núcleos em 4 tipos: par-par ( $Z$  par,  $N$  par, nesta ordem), par-ímpar, ímpar-par e ímpar-ímpar. Consequentemente, existem também 4 tipos de transições, a saber:

- 1) de par-par a ímpar-ímpar;
- 2) de ímpar-par a par-ímpar;
- 3) de par-ímpar a ímpar-par;
- 4) de ímpar-ímpar a par-par.

No que se segue, vamos nos restringir ao caso de núcleos com  $A \leq 70$ , que é a faixa de interesse deste trabalho. Neste caso, os valores de  $\Delta_i$  (deslocamento dos níveis discretos) são menores que os de  $d_{i,j}$  (espaçamento de níveis), tal como mostra a Fig. B.1.

Na Fig. B.1 os níveis contínuos do caroço de prótons ( $p$ ) e de neutrons ( $n$ ) são representados por retângulos, e a energia de Fermi é dada pela linha tracejada. Admitimos que os dois últimos prótons e os dois últimos neutrons ocupam níveis discretos. O tratamento aqui segue o de Koyama et al. (37).

A fim de levar em conta os níveis discretos de energia, temos que modificar a função intensidade de partícula úni-

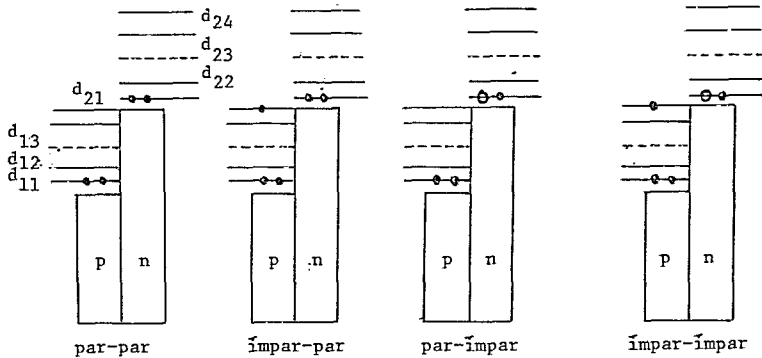


Figura B.1 - Os retângulos representam os níveis contínuos do caroço de protons (p) e de neutrons (n).

ca  $D_{\Omega}^0(E, \epsilon)$ , que é contínua tanto em  $E$  quanto em  $\epsilon$ , e que é dada pela eq. (2.2.2.22). Isto é feito em duas etapas. Primeiro, alteramos  $D_{\Omega}^0(E, \epsilon)$  como se apenas existissem os níveis discretos no estado inicial. Em seguida, mudamos novamente a função intensidade de de partícula única, a fim de incluir os níveis discretos no estado final, o que nos fornece a função intensidade desejada,  $D_{\Omega}(E, \epsilon)$ .

Vamos tratar dos 4 casos separadamente:

### 1) Transição de Núcleo Par-Par

A contribuição para a função intensidade vem de duas fontes: os nucleons do caroço e os 2 últimos nucleons.

Os nucleons do caroço contribuem com:

$$\left| M_{\Omega 1 c}(E) \right|^2 = N_1 \left[ \left( 1 - \frac{d_{12} + d_{11}}{\epsilon_F} \right)^{3/2} - \left( 1 - \frac{Q + E + \Delta_1 + \Delta_2 + d_{12} - d_{24}}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \right] \times$$

$$\times D_{\Omega}^0(E) g_{12}(E) + \frac{3N_1}{2E_F} \left(1 - \frac{Q+E+\Delta_1^2+d_{12}}{E_F}\right)^{1/2} \int_{E-\Delta_2-d_{23}}^{E-\Delta_2+d_{24}} D_{\Omega}^0(E') g_{13}(E) dE' \quad (B.1)$$

onde

$$g_{12}(E) = 1 \quad \text{se} \quad E \geq -Q - \Delta_1 - \Delta_2 + d_{11} + d_{24} \\ = 0 \quad \text{do contrário} \quad (B.2)$$

e

$$g_{13}(E) = 1 \quad \text{se} \quad E \geq -Q - \Delta_1 + d_{11} \\ = 0 \quad \text{do contrário.} \quad (B.3)$$

A contribuição dos 2 últimos nucleons é dada por:

$$\left| M_{\Omega 1 L}(E) \right|^2 = 2D_{\Omega}^0(E-\Delta_1) g_{11}(E) + 2\delta(E+Q) \int_{-Q-\Delta_2-d_{23}}^{-Q-\Delta_2+d_{24}} D_{\Omega}^0(E'-\Delta_1) dE' \quad (B.4)$$

com

$$g_{11}(E) = 1 \quad \text{para} \quad E \geq -Q - \Delta_2 + d_{24} \\ = 0 \quad \text{do contrário} \quad (B.5)$$

Na expressão (B.4), o primeiro termo descreve a transição para a parte do contínuo e o segundo termo, para o nível na região discreta.

A função intensidade para transições de núcleos par-par tem, então, a seguinte expressão:

$$\left| M_{\Omega 1}(E) \right|^2 = \left| M_{\Omega 1 C}(E) \right|^2 + \left| M_{\Omega 1 L}(E) \right|^2 \\ = \left| M_{\Omega 1}(E, Q, N_1, N_2) \right|^2 \quad (B.6)$$

### 2) Transições de Núcleos Ímpar-Par

A situação deste caso é igual à anterior, exceto pela última partícula ímpar e desde que se substitua  $Q$  por  $Q-2\Delta_1 - d_{13}-d_{12}$ , e  $N_1$  por  $N_1-1$ .

A contribuição da última partícula é:

$$\left| M_{\Omega 2p}(E) \right|^2 = D_{\Omega}^0(E+\Delta_1) g_{11}(E) + \delta(E+Q) \int_{-Q-\Delta_2-d_{23}}^{-Q-\Delta_2+d_{24}} D_{\Omega}^0(E'+\Delta_1) dE' \quad (B.7)$$

Somando as contribuições, temos a função intensidade

$$\left| M_{\Omega 2}(E) \right|^2 = \left| M_{\Omega 2p}(E, Q, N_2) \right|^2 + \left| M_{\Omega 1}(E, Q-2\Delta_1-d_{13}-d_{12}, N_1-1, N_2) \right|^2 \quad (B.8)$$

Deve-se lembrar que não basta fazer  $N_1$  por  $N_1-1$ , mas também substituir  $d_{1j}(N_1)$  por  $d_{1j}(N_1-1)$  e  $\epsilon_F(N_1)$  por  $\epsilon_F(N_1-1)$ .

### 3) Transição de Núcleos Par-Ímpar

Este caso, exceto pela transição ao estado de buraco, é também o mesmo que o primeiro caso, contanto que  $Q$  seja substituído por  $Q-2\Delta_2-d_{23}-d_{22}$ , e  $N_2$  por  $N_2+1$ .

A transição das 2 últimas partículas ao estado de buraco contribui para a função intensidade com:

$$\left| M_{\Omega 3p}(E) \right|^2 = \delta(E+Q) \int_{-Q+\Delta_2-d_{21}}^{-Q+\Delta_2+d_{22}} D_{\Omega}^0(E'-\Delta_1) dE' \quad (B.9)$$

E a transição dos nucleons do caroço ao estado de bu

raco  $\bar{e}$

$$\left| M_{\Omega 3c}(E) \right|^2 = \frac{3N_1}{4\varepsilon_F} \left( 1 - \frac{Q+E+\Delta_1+d_1}{\varepsilon_F} \right)^{1/2} \int_{E+\Delta_2-d_{21}}^{E+\Delta_2+d_{22}} D_{\Omega}^0(E') dE' g_{13}(E) \quad (B.10)$$

Assim, as transições ao estado de buraco no todo contribuem com:

$$\left| M_{\Omega 3h}(E) \right|^2 = \left| M_{\Omega 3p}(E) \right|^2 + \left| M_{\Omega 3c}(E) \right|^2. \quad (B.11)$$

Finalmente, a função intensidade tem a forma:

$$\left| M_{\Omega 3}(E) \right|^2 = \left| M_{\Omega 3h}(E, Q, N_1, N_2+1) \right|^2 + \left| M_{\Omega 1}(E, Q-2\Delta_2-d_{23}-d_{22}, N_1, N_2+1) \right|^2 \quad (B.12)$$

O argumento  $N_2+1$  indica a substituição de  $N_2$  por  $N_2+1$ , de  $d_{2j}(N_2)$  por  $d_{2j}(N_2+1)$ .

#### 4) Transições de Núcleo Ímpar-Ímpar

A única contribuição diferente neste caso, em relação ao primeiro, é dada pela transição da última partícula ímpar ao estado de buraco, que é:

$$\left| M_{\Omega 4h}(E) \right|^2 = \frac{1}{2} \delta(E+Q) \int_{-Q+\Delta_2-d_{21}}^{-Q+\Delta_2+d_{22}} D_{\Omega}^0(E'+\Delta_1) dE' \quad (B.13)$$

A contribuição total assim assume o aspecto:

$$\begin{aligned}
\left| M_{\Omega 4}(E) \right|^2 &= \left| M_{\Omega 4h}(E, Q, N_2+1) \right|^2 \\
&+ \left| M_{\Omega 3h}(E, Q-2\Delta_1-d_{13}-d_{12}, N_1-1, N_2+1) \right|^2 \\
&+ \left| M_{\Omega 2p}(E, Q-2\Delta_2-d_{23}-d_{22}, N_2+1) \right|^2 \\
&+ \left| M_{\Omega 1}(E, Q-2\Delta_1-2\Delta_2-d_{13}-d_{12}-d_{23}-d_{22}, N_1-1; N_2+1) \right|^2
\end{aligned} \tag{B.14}$$

## REFERÊNCIAS

1. Recomendamos Zeldovich, Y.B. e Novikov, I.D., "*Relativistic Astrophysics*", Vol. I, The University of Chicago Press, 1971, pág. 162, para uma discussão do assunto. Eles partem da densidade crítica  $\rho_{\text{crit}} = e^5 / \hbar G^2 = 5 \times 10^{93} \text{ g/cm}^3$ , construída a partir de três constantes físicas fundamentais: carga elétrica  $e$ , constante de Planck  $\hbar$  e constante de gravitação  $G$ .
2. Hewish, A.; Bell, S.J.; Pilkington, J.D.H.; Scott, P.F.; Collins, R.A., "*Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source*", *Nature*, 217 (1968), 709.
3. Penzias, A.A. e Wilson, R.W., "*A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*", *Astrophys. J.*, 142 (1965), 419.
4. Lattimer, J.M.; Schramm, D.N.; Grossman, L., "*Supernovae, Grains and Formation of the Solar System*", *Nature*, 269 (1977), 116.
5. Oppenheimer, J.R. e Volkoff, G.M., "*On Massive Neutron Cores*", *Phys. Rev.*, 55 (1939), 374.
6. Burbidge, E.M.; Burbidge, G.R.; Fowler, W.A.; Hoyle, F., "*Synthesis of the Elements in Stars*", *Rev. Mod. Phys.*, 29 (1957), 547.
7. Colgate, S.A. e White, R.H., "*The Hydrodynamic Behavior of Supernova Explosions*", *Astrophys. J.*, 143 (1966), 626.
8. Arnett, W.D., "*Gravitational Collapse and Weak Interactions*", *Can. J. Phys.*, 44 (1966), 2553;  
Arnett, W.D., "*Mass Dependence in Gravitational Collapse of Stellar Cores*", *Can. J. Phys.*, 45 (1967), 1621.
9. Schwartz, R.A., "*Gravitational Collapse, Neutrinos and Supernovae*", *Ann. Phys.*, 43 (1967), 42.

10. Wilson, J.R., "A Numerical Study of Gravitational Collapse", *Astrophys. J.*, 163 (1971), 209.
11. Chung, K.C.; Kodama, T.; Teixeira, A.F. da F., "Relativistic Klein-Gordon Systems", *Phys. Rev. D*, 16 (1977), 2412; Kodama, T.; Chung, K.C.; Teixeira, A.F. da F., "Bound States of Non-linear Scalar Field", *Nuovo Cimento*, 46 B (1978), 206.
12. Veja, por exemplo, Tinsley, B.M., "What Stars Become Supernovae?", *Pub. Astron. Soc. Pac.*, 87 (1975), 837.
13. Tinsley, B.M., "Nucleochronology and Chemical Evolution", *Astrophys. J.*, 198 (1975), 145.
14. Sato, K., "Supernova Explosion and Neutral Currents of Weak Interaction", *Prog. Theor. Phys.*, 54 (1975), 1325.
15. Chandrasekhar, S., "An Introduction to the Study of Stellar Structure", Dover Publications, 1957, Cap. XI.
16. Veja em Hayashi, C.; Hoshi, R.; Sugimoto, D., "Evolution of the Stars", *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 22 (1962).
17. Por exemplo, Clayton, D.D., "Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis", McGraw-Hill, 1968, Cap. V.
18. Fetisov, V.N. e Kopysov, Y.S., "Are the Solar-Neutrino Experiments Suggestive of the Existence of a Resonance in the  ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$  System?", *Phys. Lett.*, 40 B (1972), 602.
19. Barker, F.C., "Solar Neutrinos and a Proposed Level in  ${}^6\text{Be}$ ", *Phys. Lett.*, 42 B (1972), 313.
20. Bethe, H.A., "Energy Production in Stars", *Phys. Rev.*, 55 (1939), 434; Weizsacker, C.F., "Über Elementumwandler in Innern der Sterne. II", *Physik, Z.*, 39 (1938), 633.
21. Hoyle, F., *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 106(1946), 343.
22. Barkat, Z., "On the Evolution of Growing Stellar Cores and



- Presupernova Models*", *Astrophys.J.*, 163 (1971), 433.
23. Shklovsky, I.S., "*Supernovae*", *Monographs and Texts in Phys. and Astron.*, Vol. XXI, Wiley-Interscience Pub., 1968, pág. 56.
24. Gamow, G. e Schoenberg, M., "*Neutrino Theory of Stellar Collapse*", *Phys. Rev.*, 59 (1941), 539.
25. Hillebrandt, W.; Takahashi, K.; Kodama, T., "*R-Process Nucleosynthesis: A Dynamical Model*", *Astron. and Astrophys.*, 52 (1976), 63.
26. Fowler, W.A. e Hoyle, F., "*Neutrino Processes and Pair Formation in Massive Stars and Supernovae*", *Astrophys.J.Suppl.*, 91, IX, (1964), 201.
27. Chiu, H.Y., "*Supernovae, Neutrinos, and Neutron Stars*", *Ann. Phys.*, 26 (1964), 364.
28. Chiu, H.Y., "*Annihilation Process of Neutrino Production in Stars*", *Phys. Rev.*, 123 (1961), 1040;  
Formas analíticas para casos limites são apresentadas em Chiu, H.Y. e Stabler, R.C., "*Emission of Photoneutrinos and Pair Annihilation Neutrinos from Stars*", *Phys.Rev.*, 122(1961), 1317.
29. Adams, J.B.; Ruderman, M.A.; Woo, C.H., "*Neutrino Pair Emission by a Stellar Plasma*", *Phys.Rev.*, 129 (1963), 1383.
30. Roberts, R.B.; Meyer, R.C.; Wang, P., "*Further Observations on the Splitting of Uranium and Thorium*", *Phys. Rev.*, 55 (1939), 510;  
Para interpretação na base do modelo nuclear da gota líquida, veja Bohr, N. e Wheeler, J.A., "*The Mechanism of Nuclear Fission*", *Phys. Rev.*, 56 (1939), 426.
31. Egawa, Y.; Yokoi, K.; Yamada, M., "*Electron Capture in Highly Evolved Stars*", *Prog. Theor. Phys.*, 54 (1975), 1339.
32. Veja, por exemplo, Preston, M.A., "*Physics of the Nucleus*", Addison-Wesley, 1962, Cap. 15.
33. Bahcall, J.N., "*Electron Capture in Stellar Interiors*" ,

- Astrophys. J., 139 (1964), 318.
34. Hansen, C.J., "Some Weak Interaction Processes in Highly Evolved Stars", *Astrophys. Spa. Sci.*, 1 (1968), 499.
35. Tsuruta, S. e Cameron, A.G.W., "Urca Shells in Dense Stellar Interiors", *Astrophys. Spa. Sci.*, 7 (1970), 374.
36. Takahashi, K. e Yamada, M., "Gross Theory of Nuclear  $\beta$ -Decay", *Prog. Theor. Phys.*, 41 (1969), 1470.
37. Koyama, S.; Takahashi, K.; Yamada, M., "Gross Theory of  $\beta$ -Decay and its Application to the Fermi Matrix Element", *Prog. Theor. Phys.*, 44 (1970), 663;  
Veja, também, Takahashi, K.; Yamada, M.; Kondoh, T., "Beta-Decay Half-Lives Calculated on the Gross Theory", *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 12 (1973), 101.
38. Imshennik, V.S. e Nadezhin, D.K., "Neutrino Thermal Conductivity in Collapsing Stars", *JETP*, 36 (1973), 821.
39. Yueh, W.R. e Buchler, J.R., "Neutrino Transport in Supernova Models:  $S_{\beta\beta}$  Method", *Astrophys. J.*, 217 (1977), 565.
40. Arnett, W.D., "Neutrino Trapping During Gravitational Collapse of Stars", *Astrophys. J.*, 218 (1977), 815;  
Ainda usando a aproximação da difusão, veja Bludman, S.A. e Van Riper, K.A., "Diffusion Approximation to Neutrino Transport in Dense Matter", *Astrophys. J.*, 224 (1978), 631.
41. Gastor, J.I., "Radiation Transfer in Spherically Symmetric Flows", *Astrophys. J.*, 178 (1972), 779.
42. Bruenn, S., *Ann. NY Acad. Sci.*, 262 (1975), 80.
43. Weinberg, S., "A Model of Leptons", *Phys. Rev. Lett.*, 19 (1967), 1264.
44. Hasert, F.J. et al., "Observations on Neutrino-Like Interactions Without Muon or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment", *Phys. Lett.*, 46 B (1973), 138.

45. Schramm, D.N. e Arnett, W.D., "*Neutral Currents and Supernovas*", Phys. Rev. Lett., 34 (1975), 113.
46. Euwema, R.N., "*Neutrino Absortion in Dense Matter*", Phys. Rev. B, 133 (1964), 1046.
47. Bahcall, J.N., "*Neutrino Opacity I. Neutrino-Lepton Scattering*", Phys. Rev. B, 136 (1964), 1164.
48. 't Hooft, G., "*Predictions for Neutrino-Electron Cross-Sections in Weinberg's Model of Weak Interactions*", Phys. Lett., 37 B (1971), 195.
49. Tubbs, D.L. e Schramm, D.N., "*Neutrino Opacities at High Temperatures and Densities*", Astrophys. J., 201 (1975), 467.
50. Freedman, D.Z., "*Coherent Effects of a Weak Neutral Current*", Phys. Rev. D, 9 (1974), 1389.
51. Myers, W.D. e Swiatecki, W.J., "*Average Nuclear Properties*", Ann. Phys., 55 (1969), 395.
52. Reid, R., "*Local Phenomenological Nucleon-Nucleon Potentials*", Ann. Phys., 50 (1968), 411.
53. Brueckner, K.A.; Chirico, J.H.; Meldner, H.W., "*Mass Formula Consistent With Nuclear-Matter Calculations vs Conventional Mass-Law Extrapolation*", Phys. Rev. C, 4 (1971), 732; Brueckner, K.A.; Clark, R.C.; Lin, W.F.; Lombard, R.J., "*Statistical Theory of Deformed Nuclei*", Phys. Rev. C, 1 (1970), 249.
54. Wapstra, A.H. e Bos, K., "*The 1977 Atomic Mass Evaluation in Four Parts. Part I: Atomic Mass Table*", Atomic Data and Nuclear Data Tables, 19 (1977), 177.
55. Fuller, E.G. e Hayward, E., "*Nuclear Reaction II*", North Holland, 1962, pág. 113; Veja também Sato, K., "*Formation of Elements in Neutron Rich Ejected Matter*", Prog. Theor. Phys., 51 (1974), 726.

56. Myers, W.D.; Swiatecki, W.J.; Kodama, T.; El-Jaick, L.J. ; Hilf, E.R., "*Droplet Model of the Giant Dipole Resonance*", Phys. Rev. C, 15 (1977), 2032. .
57. Pitthan, R.; Hass, H.; Meyer, D.H.; Dyer, J.N.; Buskirk, F. R., "*The E1 Form Factor and the Existence of a Breathing Mode at  $80 A^{-1/3}$  MeV in Heavy Nuclei*", Naval Postgraduate School, Calif. (USA), preprint (1978).
58. Gell-Mann, M.; Goldberger, M.L.; Thirring, W.E., "*Use of Causality Conditions*", Phys. Rev., 95 (1954), 1612.
59. Yamada, M., "*Semi-Empirical Mass Formula for Compressible Nuclei*", Prog. Theor. Phys., 32 (1964), 512.
60. Zeldovich, Y.B. e Raizer, Y.P., "*Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*", Vol. I, Academic Press, 1966, Cap. I.
61. Huang, K., "*Statistical Mechanics*", John Wiley, 1963, Cap. I.
62. Neumann, J. e Richtmyer, R.D., "*A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*", J. Appl. Phys. , 21 (1950), 232.
63. Gill, S., "*A Process for the Step-by-Step Integration of Differential Equations in an Automatic Digital Computing Machine*", Proc. Cambr. Phil. Soc., 47 (1951), 97.
64. Baym, G.; Bethe, H.A.; Pethick, C.J., "*Neutron Star Matter*", Nucl. Phys. A, 175 (1971), 225;  
Mais recentemente, veja Bethe, H.A.; Brown, G.E.; Applegate, J.; Lattimer, J.M., "*Equation of State in the Gravitational Collapse of Stars*", Nordita, preprint 78/25 (1978).
65. Bludman, S.A. e Van Riper, K.A., "*Equation of State of an Ideal Fermi Gas*", Astrophys. J., 212 (1977), 859.
66. Chiu, H.Y., "*Stellar Physics*", Blaisdell, 1968, Cap. III.
67. Chung, K.C., "*Estrutura das Estrelas de Neutron*", Tese de Mestrado, CBPF, (1974).

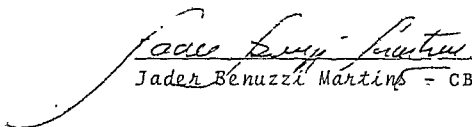
68. Ambartsumyan, V.A. e Saakyan, G.S., "*The Degenerate Superdense Gas of Elementary Particles*", Soviet Astron. - AJ, 5 (1962), 701.
69. Langèr, W.D.; Rosen, L.C.; Cohen, J.M., Cameron, A. J. W. , "*An Equation of State at Subnuclear Densities*", Astrophys. Spa. Sci., 5 (1969), 259.
70. Recomendamos Baym, G., "*Neutron Stars*", Nordita, 1970, Cap.V; Veja também Flowers, E.; Ruderman, M.; Sutherland, P.; "*Neutrino Pair Emission from Finite-Temperature Neutron Superfluid and the Cooling of Young Neutron Stars*", Astrophys. J., 205 (1976), 541; Ou ainda, Maxwell, O.V., "*Neutron Star Cooling*", Nordita, preprint 78/10 (1978).
71. El Eid, M.F. e Hilf, E.R., "*Equation of State for Hot and Dense  $(n, p, e^-)$ -Mixture with Zero Charge Density*", Institut für Kernphysik, Technische Hochschule, Darmstad , preprint (1976).  
Veja também Chung, K.C. e Kodama, T., "*Neutron Stars with Equation of State Given by Nuclear Thomas-Fermi Model*", Rev. Bras. Fis., 8 (1978), 404.
72. Leung, Y.C. e Wang, C.G., "*Equation of State of Matter at Supernuclear Densities*", Astrophys. J., 181 (1973), 895.
73. Heintzmann, H. e Hillebrandt, W., "*Hyperons Stars - Can they Exist in Nature?*", Astron. and Astrophys., 7 (1970), 443.
74. Gaustad, J.E., "*The Solar Helium Abundance*", Astrophys. J., 139 (1964), 406.
75. Richtmyer, R.D., "*Difference Methods for Initial-Value Problems*", John Wiley, 1957, Caps. VI e VII.

TESE DE DOUTORADO, defendida por CHUNG KAI CHÈONG perante a BAN  
CA EXAMINADORA constituída pelos Professores:



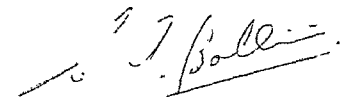
---

Takeshi Kodama - CBPF  
Orientador



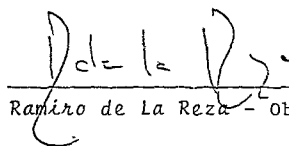
---

Jader Benuzzel Martins - CBPF



---

Carlos Guido Bollini - CBPF



---

Ramiro de La Reza - Obs. Nacional



---

Antonio F. da F. Teixeira - CBPF

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 26 de março de 1979