TESES

QUATERNIONS E ESPAÇO TEMPO RIEMANNIANO E NÃO RIEMANNIANO

TESE DE DOUTORADO

por

Carlos Marcio do Amaral

em

25 de outubro de 1971

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

AV. WENCESLAU BRAZ, 71

RIO DE JANEIRO

BRASIL

Tese 07-71

QUATERNIONS E ESPAÇO-TEMPO RIEMANNIANO E NÃO RIEMANNIANO

TESE DE DOUTORADO

defendida por

CARLOS MARCIO DO AMARAL

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

em 25 de Outubro de 1971

perante a banca integrada pelos senhores professôres

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Professor Titular do C.B.P.F.

Prem Prakash Srivastava
Professor Titular do C.B.P.F.

Guilherme Mauricio Souza Marcos de La Penha
Professor Adjunto do I.M.U.F.R.J.

Antonio Luciano Leite Videira
Professor Titular da P.U.C.-RJ

Jorge André Swieca
Professor Titular da P.U.C.-RJ

E R R A T A

Pag.	Linha	Errado	Certo
7	(13.II)	$A^{*}=(A^{*}_{0}, A^{*}_{1}, A^{*}_{2}, A^{*}_{3})$	$A^{*} = \sum_{\alpha=0}^{3} A^{*\alpha} \dot{\sigma}^{*}{}_{(\alpha)}$
16	4	induz um quaternion unimodular Q que satisfaz	induz dois quaternions unimodulares $\pm$ Q que satisfazem
26	14	gerado por E_{+} à esquerda	gerado por E_{-} à direita
28	13	gerado por E_{+} à esquerda	gerado por E_{+} à esquerda e E_{-} à direita
29	(35.V)	$\begin{pmatrix} \psi^{-1} \\ \psi^{-2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \psi^{1} \\ \psi^{2} \end{pmatrix}$
30	1	$\phi'_{+} = Q\, \psi_{+}$	$\phi'_{+} = Q\, \phi_{+}$
40	10	$X_{\dot{B}A} = X^{(\mu)}\ \dot{\sigma}_{(\mu)BA}$	$X_{\dot{B}A} = X^{(\mu)}\ \dot{\sigma}_{(\mu)\dot{B}A}$
45	6	$-2\overline{A}(x) = \overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}}\ A(x)\ \dot{\sigma}^{(\alpha)}$	$-2\overline{A}(x) = \dot{\sigma}_{(\alpha)}\ A(x)\ \dot{\sigma}^{(\alpha)}$
45	9	$\overline{A(x)} = -\frac{1}{2}\,\overline{\sigma_{\nu}}\ A(x)\ \sigma^{\nu}(x)$	$\overline{A(x)} = -\frac{1}{2}\,\sigma_{\nu}\ A(x)\ \sigma^{\nu}(x)$
46	23	$\Lambda^{\mu}(x)$	$\Lambda^{\mu}_{\nu}(x)$
52	6	$\psi^{*}_{\|\nu} = \psi^{*}_{,\nu} - \Gamma^{\dagger}_{\nu}\ \psi^{*}$	$\psi^{*}_{\|\nu} = \psi^{*}_{,\nu} - \Gamma^{\dagger}\ \psi^{\dagger}$
52	17	$\ldots + (\psi^{A\dot{L}})(\overset{T}{\Gamma_{\nu}}{}^{\dot{L}\dot{B}})$	$\ldots + (\psi^{A\dot{L}})(\overset{T}{\Gamma_{\nu}}{}_{\dot{L}}{}^{\dot{B}})$.
53	18	função escalar	função matricial escalar
55	1	$\ldots -\overline{\sigma^{\mu}}\ \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}{}^{\dagger}\ \overline{\sigma^{\mu}}$	$\ldots + \overline{\sigma^{\mu}}\ \overline{\Gamma_{\nu}} + \overline{\Gamma_{\nu}}{}^{+}\ \overline{\sigma^{\mu}}$
56	4	$A_{(\alpha)}(x)_{\|\nu} = A_{\mu}(x)_{\|\nu}\ h^{\mu}(x)_{(\alpha)} = A_{(\alpha)}(x)_{\|\nu}$	$A_{(\alpha)}(x)_{\|\nu} = A_{\mu}(x)_{\|\nu}\ h^{\mu}(x)_{(\alpha)}$

Pag.	Linha	Errado	Certo
58	11	$\sigma_\mu \, \sigma^\mu \|_\rho = \ldots \; \ldots\ldots$	$\overline{\sigma_\mu} \, \sigma^\mu \|_\rho = \ldots\ldots\ldots\ldots$
60	8	de coordenadas X^ν,	de coordenadas X^ν e de uma $Q(x)$
67	15	$(-R(x)_{\mu s} \, \sigma^\mu(x) = \ldots\ldots$	$(-\, R(x)_{\mu s} \, \sigma^\mu(x) - \ldots\ldots$
76	17	Com auxílio das bases local $\{\sigma_\nu(x)\}$, e não $\{\dot{\sigma}_{(\alpha)}\}$ da	Com auxílio da base local $\{\sigma_\nu(x)\}$ da ...
81	12	induzida pelas (1.I.VIII)	induzida pelas (1.I.VIII e pelas $Q(x)$
85	11.IX VIII	$F(x) \cdot E_+ \otimes E_+ = F(x)$	$\overline{E_+} \otimes \overline{E_+} \, F(x) = F(x)$
96	8	defere	difere
97	(7.XI)	$-\, L^\mu(x)_{\underline{\lambda\beta}} \cdot L^\lambda(x)_{\alpha\gamma}$	$-\, L^\mu(x)_{\underline{\lambda\beta}} \cdot L^\lambda(x)_{\underline{\alpha\gamma}}$
48	12	quaternion de Lorentz	quaternion quadrivetor
25	(14'.V)	$\begin{pmatrix}\phi^1_+\\ \phi^2_+\end{pmatrix} \quad E_+ = \begin{pmatrix}\phi^1_+\\ \phi^2_+\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\phi^1_+\\ \phi^2_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q^1_1 & Q^1_2\\ Q^2_1 & Q^2_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\phi^1_+\\ \phi^2_+\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\phi^1_+ & 0\\ \phi^2_+ & 0\end{pmatrix} \quad E_+ = \begin{pmatrix}\phi^1_+ & 0\\ \phi^2_+ & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\phi^1_+ & 0\\ \phi^2_+ & 0\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}Q^1_1 & Q^1_2\\ Q^2_1 & Q^2_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\phi^1_+ & 0\\ \phi^2_+ & 0\end{pmatrix}$
60	2	quando ha uma transformação	quer haja uma transformação
60	3	ou quando simplesmente haja	ou quer simplesmente haja
99	(14'XI)	$T_{\mu\nu}(x) = \phi_\mu(x)\phi_\nu(x)$	$T_{\mu\nu}(x) = b\phi_\mu(x)\phi_\nu(x)$
99	(14.XI)	$= b\phi_\mu(x)\phi_\nu(x)$	$= b\phi_\mu(x)\phi_\nu(x) + \text{Cte } g_{\mu\nu}$
99	(14'XI)	$\left.\begin{array}{l} a = \frac{R(x)}{2} \\ b = K \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} a = \frac{R(x)}{2} \\ b = \text{Cte } g \end{array}\right\}$

Pág.	Linha	Errado	Certo
24	19	$+\phi_-^{(1)}\left[\dot{\sigma}_{(1)} - i\,\dot{\sigma}_{(2)}\right] =$	$+\phi_-^{(1)}\left[-\dot{\sigma}_{(1)} - i\,\dot{\sigma}_{(2)}\right] =$
24	20	$=\begin{pmatrix} 2\phi_-^{(0)} & 2\phi_-^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$=\begin{pmatrix} 2\phi_-^{(0)} & -2\phi_-^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
29	(36.V)	$=\begin{pmatrix} 2\phi_-^{(0)} & 2\phi_-^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$=\begin{pmatrix} 2\phi_-^{(0)} & -2\phi_-^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
29	(38.V)	$=\begin{pmatrix} 2\phi_-^{*(0)} & 2\phi_-^{*(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$=\begin{pmatrix} 2\phi_-^{*(0)} & -2\phi_-^{*(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ÍNDICE

APÊNDICES

AGRADECIMENTOS

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas por ter me fornecido o ambiente científico em que me formei.

Ao Professor C. G. Oliveira por me ter iniciado na teoria espinorial da gravitação.

Aos Professôres Costantino Menezes de Barros e Adel da Silveira, pelas sugestões feitas durante a leitura do manuscrito.

À minha espôsa pela valiosa colaboração na feitura desta tese.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas pelo financiamento parcial deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a álgebra e a análise de variedades quaterniônicas espaço-tempo, quadridimensionais riemannianas e não riemannianas. Obtem-se as equações quaterniônicas da gravitação einsteiniana. Por meio do produto direto de álgebras de Clifford-Pauli gera-se variedades não riemannianas. Aborda-se o caso particular de espaço com afinidade integrável e com torção uniforme. Obtem-se, também, a equação de Weyl em espaço-tempo quaterniônico com torção uniforme.

PREFÁCIO

Esta tese é um estudo de variedades quaterniônicas espaço-tempo, riemannianas e não riemannianas Em essência, ela pode ser decomposta em duas partes. Na primeira parte, aplicamos a álgebra e a análise de quaternions à variedades riemannianas, enquanto que na segunda parte fazemos o estudo de variedades quaterniônicas não riemannianas. A primeira parte contém a essência de quatro trabalhos já publicados, (14), (15), (16), (17), que se originaram, fundamentalmente, das idéias de P. G. Bergmann contidas no trabalho "Two Component Spinors in General Relativity", (4). Do final desta primeira parte, extraimos um novo trabalho, "As equações Quaterniônicas da Gravitação Einsteiniana com Condições Subsidiárias".

A segunda parte se estrutura sôbre três trabalhos a serem publicados:

a) Variedade espaço-tempo não riemanniana gerada pelo produto direto de álgebras locais de Clifford-Pauli.

b) Espaço-tempo quaterniônico com afinidade integrável e torção uniforme.

c) A equação de Weyl em espaço-tempo quaterniônico com torção.

Esta tese se apresenta como a exposição de uma técnica de cálculo e contem, implicitamente, aplicações a trabalhos onde foi utilizada. É um método útil para o estudo das teorias físicas no espaço tempo curvo, especialmente para o caso de campos fermiônicos em presença do campo gravitacional e para as teorias da gravitação em espaço sem curvatura.

I. INTRODUÇÃO

Os espinores têm papel fundamental na física moderna, particularmente devido ao fato de que o grupo de Lorentz admite, além de representações tensoriais, representações espinoriais.

Os espinores foram descobertos por E. Cartan em 1913, mas foi sòmente em 1929 que Van der Waerden criou uma notação útil para a álgebra espinorial, análoga à álgebra tensorial da relatividade especial. Em 1933 Infeld e Van der Waerden desenvolveram a análise espinorial de modo covariante, paralelo à análise tensorial no espaço Riemann. A linha de Infeld-Van der Waerden foi seguida em um trabalho publicado em 1953 por Bade e Jehle[13] e posteriormente ampliado por Parke[13] e Jehle em 1965, que formularam espinorialmente equações de onda, covariantes pelo grupo homogêneo de Lorentz. Em 1957 P. Bergman[4] publicou um importante trabalho sôbre espinores a duas componentes em relatividade geral. Nesse trabalho desenvolveu uma teoria espinorial, nos moldes da linha Infeld-Van der Waerden de 1933, onde introduziu matrizes hermitianas, que são generalizações das matrizes de Pauli. Tais matrizes contêm a estrutura geométrica do espaço riemanniano da relatividade geral. Essas matrizes determinam univocamente o tensor métrico, mas dado o tensor métrico, as matrizes ficam determinadas a menos de uma transformação local independente da transformação de coordenadas. A formulação matricial de Bergmann permite a descrição do campo gravitacional de modo bastante conveniente. Foi, entretanto, sòmente a partir de 1960, que a moderna teoria da gravitação reconheceu e explorou com profundidade as vantagens do cálculo espinorial a duas componentes. Por outro lado é possível formular a teoria especial da relatividade por meio de quaternions e assim o fêz F. Klein em 1911. Desde essa época até recentemente não surgiram esforços importantes no sentido de se aprofundar a aplicação dos quaternions à relatividade, se bem que os houvesse no sentido de aplicá-los às teorias quânticas. Em 1964, surgiu um trabalho de P. Rastall[12], onde o autor formulou a álgebra e a análise dos quaternions de modo conveniente e as aplicou a relatividade restrita e aos espaço-tempo riemanniano, mas Rastall explora de modo pouco extenso a correlação entre quaternions e espinores, restringindo-se aos espinores de primeira ordem.

Um dos objetivos do presente trabalho é pretender estabelecer de modo claro, completo, em grande parte original, desde as noções básicas, a teoria dos quaternions em variedades espaço-tempo riemannianas e não riemannianas. Para isto, passaremos, em seguida, a descrever a álgebra de quaternions.

II. ÁLGEBRA DE QUATERNIONS

Como T. Kahan[1], definiremos a álgebra de quaternions como uma álgebra, sôbre um corpo comutativo, com uma base de quatro elementos, e_o, u,v,w que respeita a tabela de multiplicação seguinte:

1º fator \ 2º fator	e_o	u	v	w
e_o	e_o	u	v	w
u	u	$e_o\alpha$	w	v
v	v	$-w$	$e_o\beta$	$-u$
w	w	$-\alpha v$	βu	$-\alpha\beta e_o$

onde α e β são elementos do corpo e α, $\beta \neq 0$. A base e_o, u,v,w é chamada base canônica. Escolhendo-se novas bases obteremos álgebras isomorfas. Para o nosso trabalho adotaremos o corpo dos complexos e escolheremos como base conveniente para os nossos objetivos os quaternions $\dot{\sigma}_{(o)}$, $\dot{\sigma}_{(1)}$, $\dot{\sigma}_{(2)}$, $\dot{\sigma}_{(3)}$, correlacionados à base canônica do seguintes modo:

$$\dot{\sigma}_{(o)} = e_o, \quad \dot{\sigma}_{(1)} = u, \quad \dot{\sigma}_{(2)} = v, \quad \dot{\sigma}_{(3)} = -iw .$$

Imporemos α e β iguais à unidade multiplicativa do corpo.

Então:

$$(\dot{\sigma}_{(o)})^2 = e_o = \dot{\sigma}_{(o)}, \quad (\dot{\sigma}_{(1)})^2 = e_o, \quad (\dot{\sigma}_{(2)})^2 = e_o$$

$$(\dot{\sigma}_{(3)})^2 = (-iw)^2 = -(w)^2 = -(-\alpha\beta) = +e_o$$

A base $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$, $(\alpha = 0,1,2,3)$, é constituida de elementos cujo quadrado vale $e_o = \dot{\sigma}_{(o)}$. Os quaternions introduzidos são também chamados biquaternions de Hamilton. Um quaternion A é então uma quádrupla ordenada de complexos $A = (A^{(o)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$, e chamaremos de $A^{(\alpha)}$ à componente α do quaternion

$$A = \sum_{\alpha=0}^{3} A^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{(\alpha)} = (A^{(o)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) \qquad (1.II)$$

A igualdade de dois quaternions é definida pela igualdade das componentes de mesmo índice.

$$A = B \rightleftarrows A^{(\alpha)} = B^{(\alpha)}$$

O quaternion zero é aquêle em que $A^{(\alpha)} = 0$, para todo α. Se λ é um complexo qualquer, então:

$$\lambda A = (\lambda A^{(o)}, \lambda A^{(1)}, \lambda A^{(2)}, \lambda A^{(3)}). \qquad (2.II)$$

A soma de dois quaternions A, B é definida pela soma das componentes, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} A+B = (A^{(o)}+B^{(o)}, A^{(1)}+B^{(1)}, A^{(2)}+B^{(2)}, A^{(3)}+B^{(3)}) \\ \text{e} \\ A - B = A + (-1)B \end{array}\right\} \qquad (3.II)$$

Com a operação de soma, e multiplicação por um escalar, os quaternions, constituem um espaço vetorial de dimensão quatro sôbre o corpo dos complexos.

Os quaternions também respeitam as propriedades associativa e distributiva:

$$\left.\begin{array}{l} A(BC) = (AB)C \\ (A + B)C = AC + BC \; ; \qquad C(A + B) = CA + CB \end{array}\right\} \quad (4.II)$$

A tabela de multiplicação de quaternions nos mostra que a álgebra de quaternions não é comutativa.

Os quaternions de base $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$ satisfazem, além da normalização a 1, às propriedades:

$$\dot{\sigma}_{(k)} \; \dot{\sigma}_{(\ell)} + \dot{\sigma}_{(\ell)} \; \dot{\sigma}_{(k)} = 0 \qquad (5.II)$$

$$k \neq \ell \; , \qquad k, \ell \neq 0$$

e

$$\dot{\sigma}_{(k)} \; \dot{\sigma}_{(\ell)} = i \; \dot{\sigma}_{(m)} \; ; \qquad (6.II)$$

onde k, ℓ, m são uma permutação cíclica de 1,2,3.

Se um quaternion é $A = (A^{(o)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$, o quaternion adjunto associado, $\overline{A}$, é aquele definido como:

$$\overline{A} = (A^{(o)}, -A^{(1)}, -A^{(2)}, -A^{(3)}) \qquad (7.II)$$

Em particular $\overline{\dot{\sigma}_{(o)}} = \dot{\sigma}_{(o)}$ e

$$\overline{\dot{\sigma}_{(k)}} = - \dot{\sigma}_{(k)} \; , \text{ se } k \neq 0$$

Dêste modo

$$\overline{A} = \sum_{\alpha=0}^{3} A^{(\alpha)} \; \overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}} \qquad (8.II)$$

É claro que $\overline{\overline{A}} = A$.
Se A e B são dois quaternions, então $\overline{AB} = \overline{B}\,\overline{A}$.

Se λ é um complexo e A um quaternion, então vale $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$.

O cálculo direto nos mostra a útil fórmula:

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}}\, A\, \dot{\sigma}_{(\alpha)} = -\, 2\bar{A} \; . \tag{9.II}$$

Como consequência se $A = \dot{\sigma}_{(o)}$, virá

$$-2\, \dot{\sigma}_{(o)} = \sum_{\alpha=0}^{3} \overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}}\, \dot{\sigma}_{(\alpha)}$$

Quando não houver dúvidas, omitiremos a unidade $\dot{\sigma}_{(o)}$.

A norma de um quaternion A é definida como:

$$\text{Norm}\ (A) = \bar{A}\, A = A\, \bar{A} \; . \tag{10.II}$$

Na base $\left\{ \dot{\sigma}_{(\alpha)} \right\}$, a norma de A será:

$$A\bar{A} = (A^{(o)})^2 - (A^{(1)})^2 - (A^{(2)})^2 - (A^{(3)})^2 \; . \tag{10'.II}$$

Também valem:

$$\overline{AB} = \bar{B}\, \bar{A} \quad , \quad e$$

$$(AB)(\overline{AB}) = (A\bar{A})(B\bar{B}) \; ,$$

isto é, a norma de um produto de dois quaternions é o produto das normas dos fatôres.

Se um quaternion tem norma nula êle se diz singular.

Se $A\bar{A} = \dot{\sigma}_{(o)}$ o quaternion se denomina unimodular.

Se um quaternion A é não singular, define-se o quaternion inverso de A como A^{-1} tal que:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{A\bar{A}} \tag{11.II}$$

Se o quaternion é unimodular, $A^{-1} = \bar{A}$.

Da fórmula (11.II) vem: $A^{-1}A = AA^{-1} = \dot{\sigma}_{(o)}$

Uma outra consequência da fórmula (11.II) é que:
$(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$, desde que A e B tenham inversos.

Vamos definir um importante conceito que é o de quater nion hermitiano associado a um quaternion A:

$$A^{\dagger} = (A^{*(o)}, A^{*(1)}, A^{*(2)}, A^{*(3)}), \qquad (12.II)$$

onde $A^{*(\alpha)}$ é o complexo conjugado da componente $A^{(\alpha)}$ de A. Com esta definição vê-se que $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$.

Um quaternion será hermitiano se coincidir com seu hermitiano associado, isto é se $A = A^{\dagger}$ e daí decorre que tôdas componentes de um quaternion hermitiano são reais. Definiremos quaternion complexo conjugado do quaternion A, ao quaternion:

$$A^{*} = (A_o^{*}, A_1^{*}, -A_2^{*}, A_3^{*}) \qquad (13.II)$$

Das definições (7.II), (12.II) e (13.II) resulta que

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{A^{\dagger}} = \bar{A}^{\dagger} \; ; \quad \overline{A^{*}} = \bar{A}^{*} \\
(A^{\dagger})^{\dagger} = A \; ; \quad (A^{*})^{*} = A \; ; \quad (AB)^{*} = A^{*}B^{*} \\
\text{Se } \lambda \text{ é um número complexo, valem também:} \\
(\lambda A)^{\dagger} = \lambda^{*}A^{\dagger} \; ; \quad (\lambda A)^{*} = \lambda^{*}A^{*} \\
\text{e} \quad (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}. \, A^{-1} \; ,
\end{array}\right\} \qquad (14.II)$$

Esta última propriedade vale sòmente se $\lambda \neq 0$ e $A\bar{A} \neq 0$.

Vamos introduzir uma métrica no espaço vetorial da álgebra dos quaternions por meio da definição do produto escalar de dois quaternions.

Define-se produto escalar de dois quaternions por:

$$\left.\begin{array}{l}
A|B = \frac{1}{2} (A\bar{B} + B\bar{A}) = \frac{1}{2} (\bar{A}B + \bar{B}A) = \\
= \left(A^{(o)}B^{(o)} - \sum_{k=1}^{3} A^{(\ell)}B^{(\ell)} \right) \sigma_{(o)}
\end{array}\right\} \qquad (15.II)$$

O produto escalar de dois quaternions é proporcional a $\sigma_{(o)}$.

Em particular, $\dot{\sigma}_{(o)} | \dot{\sigma}_{(o)} = \dot{\sigma}_{(o)}$; $-\dot{\sigma}_{(k)} | \dot{\sigma}_{(k)} = \dot{\sigma}_{(o)}$, se $k \neq 0$; e $\dot{\sigma}_{(\alpha)} | \dot{\sigma}_{(\beta)} = 0$ se $\alpha \neq \beta$.

Essas propriedades nos sugerem introduzir o "tensor mé trico" no espaço dos quaternions como sendo:

$$\eta_{(\alpha\beta)} \equiv \dot{g}_{(\alpha\beta)} = \dot{\sigma}_{(\alpha)} | \dot{\sigma}_{(\beta)} = \dot{\sigma}_{(\beta)} | \dot{\sigma}_{(\alpha)} = \dot{g}_{(\beta\alpha)} \quad (16.\text{II})$$

De modo explícito:

$$\dot{g}_{(oo)} = 1 \ , \ \dot{g}_{(kk)} = -1 \quad (k \neq 0) \text{ e } \dot{g}_{(\alpha\beta)} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq \beta.$$

Com auxílio dos $\dot{g}_{(\alpha\beta)}$ podemos definir os $\dot{g}^{(\alpha\beta)}$ por meio do sistema de equações:

$$\sum_{0}^{3} \dot{g}^{(\alpha\beta)} \dot{g}_{(\beta\partial)} \neq \delta^{(\alpha)}_{(\partial)} \quad (17.\text{II})$$

onde $\delta^{(\alpha)}_{(\partial)}$ é zero se $(\alpha) \neq (\partial)$ e será a unidade se $(\alpha) = (\partial)$.

A resolução do sistema (17.II) nos dará:

$$\dot{g}^{(oo)} = 1; \ \dot{g}^{(kk)} = -1; \text{ se } k \neq 0; \ \dot{g}^{(\alpha\beta)} = 0 \quad \text{se } (\alpha) \neq (\beta).$$

Com auxílio dos $\dot{g}^{(\alpha\beta)}$ podemos introduzir componentes covariantes e contravariantes de um quaternion.

De fato:

$$A|B = \left(\sum_{0}^{3} A_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{(\alpha)} \right) \Big| \left(\sum_{0}^{3} B_{(\beta)} \dot{\sigma}^{(\beta)} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} A_{(\alpha)} B_{(\beta)} \dot{\sigma}^{(\alpha)} | \dot{\sigma}^{(\beta)} =$$

$$= \dot{\sigma}_{(o)} \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} A_{(\alpha)} B_{(\beta)} \dot{g}^{(\alpha\beta)} = \left(\sum_{\alpha=0}^{3} A_{(\alpha)} B^{(\alpha)} \right) \dot{\sigma}_{(o)}$$

(18.II)

Para obter êsse resultado, usamos o fato de que $(A + B) \mid C = A|C + B|C$, e introduzimos a definição

$$B^{(\alpha)} = \sum_{\beta} \dot{g}^{(\alpha\beta)} B_{(\beta)} \tag{19.II}$$

Com a (19.II) estabelecemos a conexão entre componen - tes covariante, $B_{(\beta)}$, de um quaternion e componente contravariante $B^{(\alpha)}$ dêsse quaternion.

Se invertermos a fõrmula (19.II) obteremos:

$$B_{(\beta)} = \sum_{(\lambda)} \dot{g}_{(\beta\lambda)} B^{(\lambda)} \tag{20.II}$$

De um modo mais compacto, podemos escrever:

$$B^{(\alpha)} = \dot{\sigma}^{(\alpha)} \mid B \tag{19'.II}$$

Anãlogamente teremos $\dot{\sigma}_{(\alpha)} \mid B = B_{(\alpha)}$, onde fizemos:

$$\dot{\sigma}_{(\alpha)} = \sum_{(\beta)} \dot{g}_{(\alpha\beta)} \dot{\sigma}^{(\beta)} \tag{21.II}$$

Em geral, passaremos a omitir o sinal de somãtorio quando referido a um Ĩndice covariante e outro contravariante,repetidos.

III. REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE QUATERNIONS

As regras de multiplicação (5.II) e(6.II), juntamente com a normalização imposta aos quaternions bãsicos $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$, permite o estabelecimento de um isomorfismo com as matrizes de Pauli adici onadas da matriz unidade. Especificando melhor, vamos estabelecer a correspondência isomorfica seguinte:

$$\dot{\sigma}_{(o)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{\sigma}_{(1)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad (1.\text{III})$$

$$\dot{\sigma}_{(2)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{\sigma}_{(3)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Escritos os quaternions de base $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$ na forma matricial (1.III), um quaternion qualquer, A, terá por matriz representativa:

$$A = A^{(\alpha)}\ \dot{\sigma}_{(\alpha)} = \begin{pmatrix} A^{(o)} + A^{(3)} & A^{(1)} - iA^{(2)} \\ A^{(1)} + iA^{(2)} & A^{(o)} - A^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (2.\text{III})$$

Tôdas fôrmulas do capítulo anterior são exprimíveis matricialmente e, em particular

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A^{(o)} - A^{(3)} & -A^{(1)} + iA^{(2)} \\ -A^{(1)} - iA^{(2)} & A^{(o)} + A^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (3.\text{III})$$

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{*(o)} + A^{*(3)} & A^{*(1)} - iA^{*(2)} \\ A^{*(1)} + iA^{*(2)} & A^{*(o)} - A^{*(3)} \end{pmatrix} \qquad (4.\text{III})$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A^{*(o)} + A^{*(3)} & A^{*(1)} + iA^{*(2)} \\ A^{*(1)} - iA^{*(2)} & A^{*(o)} - A^{*(3)} \end{pmatrix} . \qquad (5.\text{III})$$

Se $A = A^{\dagger}$, então todos $A^{(\alpha)}$ que aparecem na matriz são reais, logo se transpusermos a matriz e tomarmos a sua complexa conjugada, ela não se altera.

O quaternion transposto de um quaternion A é:

$$A^T = \begin{pmatrix} A^{(o)} + A^{(3)} & A^{(1)} + iA^{(2)} \\ A^{(1)} - iA^{(2)} & A^{(o)} - A^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{isto é,}$$

$$A^T = (A^{(o)}, A^{(1)}, -A^{(2)}, A^{(3)}) \tag{6.III}$$

Um quaternion será simétrico se $A^T = A$ e então $A^{(2)} = 0$.

A rigor, deveríamos representar a matriz representativa de um quaternion A, (na base $\sigma_{(\alpha)}$), por M(A), mas não o faremos, por ser clara a identificação de A com M(A).

Se calcularmos o determinante de A, obteremos:

$$\det A = (A^o)^2 - \sum_{k=1}^{3} (A^{(k)})^2 \tag{7.III}$$

Mas então $\sigma_{(o)}$ (det A) = $\bar{A}A$, que é a norma de A.

Se somarmos as matrizes A e $\bar{A}$, dadas respectivamente em (2.III) e (3.III), obteremos:

$$A + \bar{A} = \sigma_{(o)} \left[2A^{(o)} \right] = \sigma_{(o)} \ (\mathrm{tr}A) \tag{8.III}$$

sendo tr o traço da matriz que representa A na base $\left\{ \sigma_{(\alpha)} \right\}$.

Analogamente, obteríamos como matriz associada ao quaternion, inverso de A, a matriz inversa daquela associada a êste quaternion. Veremos que a forma matricial dos quaternions é fundamental na correlação entre quaternions e espinores.

IV. QUATERNIONS DE LORENTZ

Um evento no quadri-espaço da relatividade especial pode ser caracterizado por quatro reais ordenados x^μ , (μ = 0,1,2,3), coordenadas cartesianas ortogonais dêsse evento.

A coordenada x^o é temporal e as demais são espaciais. A métrica a ser usada é definida pelo tensor simétrico real $\eta_{\mu\nu}$ covariante, de assinatura (+ - - -). Sabemos que as coordenadas covariantes dx_μ são obtidas das contravariantes dx^ν por meio do $\eta_{\mu\nu}$, isto é:

$$dx_\mu = \eta_{\mu\nu}\, dx^\nu \qquad (1.IV)$$

Ao $\eta_{\mu\nu}$ associamos o tensor métrico contravariante $\eta^{\mu\nu}$, tal que:

$$\eta^{\mu\nu}\, \eta_{\nu\rho} = \eta^{\nu}{}_{\rho} = \delta^{\nu}{}_{\rho} \qquad (2.IV)$$

Vamos definir quaternion de Lorentz como sendo um quaternion hermitiano cujas componentes $A^{(\alpha)}$ se transformam como as componentes dx^α de um quadrivetor de universo. Se $(a^\mu{}_\nu)$ é uma transformação de Lorentz,

então:

$$\left.\begin{aligned} dx'_\mu &= dx_\nu \quad a^{-1\nu}{}_\mu \\ A'_\rho &= A_\sigma\, a^{-1\sigma}{}_\rho \end{aligned}\right\} \qquad (3.IV)$$

sendo $(a^{-1\sigma}{}_\rho)$ a matriz inversa da matriz $(a^\mu{}_\nu)$.

Sòmente consideraremos transformações de Lorentz homogêneas, próprias, ortócronas, que denominaremos restritas.

Um ponto do espaço tempo da relatividade especial será frequentemente chamado de evento de universo.

Seja o quaternion de Lorentz:

$$X = X^{(\mu)}\, \acute{\sigma}_{(\mu)}$$

(onde escreveremos o índice da componente quaterniônica entre parênteses, a fim de diferí-lo dos índices de universo ou dos índices espinoriais, que aparecerão posteriormente).

Também podemos escrevê-lo na forma:

$$X = (X^{(o)},\ X^{(1)},\ X^{(2)},\ X^{(3)})$$

Se tomarmos o seu adjunto, X, obteremos:

$$\bar{X} = (X^{(o)}, -X^{(1)}, -X^{(2)}, -X^{(3)}),$$

mas $\quad X_{(\alpha)} = \dot{g}_{\alpha\beta}\, X^{(\beta)} \quad$, logo,

$$\bar{X} = (X_{(o)}, X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}) \ . \qquad (4.IV)$$

A definição de quaternion de Lorentz nos diz que as componentes dêsse quaternion se transformam como componentes de um quadrivetor. Logo, se o quaternion de Lorentz X é a representação quaterniônica de um quadrivetor de universo, contravariante, então $\bar{X}$ será a representação do quadrivetor covariante correspondente. A operação de adjunção está associada à operação de mudança de variância. Um outro aspecto importante está contido no fato de que ao dizermos que as componentes do quaternion de Lorentz se transformam como componentes de um quadrivetor de universo, estaremos dizendo que o índice quaterniônico (μ) se comporta como o índice de universo μ, mas isto sòmente quanto às componente quaterniônicas $X^{(\mu)}$, já que os quaternions $\dot{\sigma}_{(\mu)}$ são matrizes, numéricas, fixas e que, portanto, não se transformam. Disto tudo decorre que numèricamente o tensor métrico quaterniônico $\eta^{(\mu\nu)}$ coincide com o tensor métrico de universo, η . Esta coincidência numérica não prevalece quando passarmos ao espaco curvo

Uma interpretação geométrica que surge de imediato é a de que às matrizes $\dot{\sigma}_{(\mu)}$ podemos associar quatro direções fixas no espaço de universo, independentes do ponto e a estas direções referimos os quadrivetores. Na realidade, estamos comparando dois espaços em essência distintos, um de quaternions e outro de quadrivetores da relatividade especial, e estamos impondo que a lei matemática de transformação das componentes do quaternion de Lorentz seja a mesma que aquela do quadrivetor que o representa no espaço de universo.

Um quadrivetor de universo de componentes covariantes X_μ será escrito na imagem quaterniônica, como sendo o quaternion de Lorentz:

$$X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{(\mu)} \ ; \text{ onde } \ \dot{\sigma}^{(\mu)} = \eta^{(\mu\nu)} \dot{\sigma}_{(\nu)}$$

As componentes quaterniônicas $X_{(\mu)}$ coincidem com as componentes X_μ . Uma transformação de Lorentz restrita, (própria, ortócrona, homogênea), leva os X_μ em X'_μ tal que:

$$X'_\mu = X_\nu \quad a^{-1\nu}{}_\mu \tag{5.IV}$$

onde $(a^{-1\nu}{}_\mu)$ é a inversa da transformação de Lorentz $(a^\mu{}_\nu)$,restrita.

Então, o quaternion $X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{(\mu)}$ se transforma no quaternion

$$X' = a^{-1\nu}{}_\mu \quad X_\nu \dot{\sigma}^{(\mu)} = X'_{(\mu)} \dot{\sigma}^{(\mu)} \tag{6.IV}$$

A realidade dos quadrivetores de universo se traduz na realidade das componentes $X^{(\mu)}$ e como a matriz $(a^\mu{}_\nu)$ é real, teremos:

$$X^\dagger = X \ , \quad \text{logo} \quad X'^\dagger = X' \tag{7.IV}$$

Os quaternions de Lorentz são hermitianos como decorrência da realidade dos quadrivetores associados e da hermiticidade da base quaterniônica $\dot{\sigma}_{(\mu)}$.

Se tomarmos a norma de X' , obteremos:

$$X' \bar{X}' = (X'^{(o)})^2 - \sum_{k=1}^{3} (X'^{(k)})^2$$

Como essa é a norma do quadrivetor associado e como a transformação de Lorentz conserva a norma dos quadrivetores de universo, teremos:

$$X' \bar{X}' = (X'^{(o)})^2 - \sum_{k=1}^{3} (X'^{(k)})^2 =$$

$$= (X^{(o)})^2 - \sum_{k=1}^{3} (X^{(k)})^2 \doteq X\overline{X} \qquad (8.IV)$$

Concluímos que um quaternion de Lorentz tem a norma invariante por uma transformação de Lorentz.

A (7.III) nos dá:

$$X'\,\overline{X}' = \det X' = \det X = \text{invariante} \qquad (9.IV)$$

O determinante de um quaternion de Lorentz é um invariante por uma transformação de Lorentz restrita. Na forma matricial específica, associada à base $\sigma_{(\mu)}$ da álgebra de quaternions, os quaternions de Lorentz X' e X se escrevem:

$$X' = \begin{pmatrix} X'^{(o)} + X'^{(3)} & X'^{(1)} - iX'^{(3)} \\ X'^{(1)} + iX'^{(2)} & X'^{(o)} - X'^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (10.IV)$$

e

$$X = \begin{pmatrix} X^{(o)} + X^{(3)} & X^{(1)} - iX^{(2)} \\ X^{(1)} + iX^{(2)} & X^{(o)} - X^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (11.IV)$$

As matrizes (10.IV) e (11.IV) são quaternions de Lorentz na forma matricial e a transformação da matriz (11.IV) na matriz (10.IV) é uma transformação induzida pela transformação de Lorentz $(a^{\mu}{}_{\nu})$, restrita, que atua no espaço dos quadrivetores de universo.

A relação entre X' e X pode ser escrita na forma de uma transformação por similitude:

com
$$\left.\begin{aligned} X' &= \pm\, Q\, X\, Q^{\dagger} , \\ Q\overline{Q} &= \sigma_{(o)} \end{aligned}\right\} \qquad (12.IV)$$

É claro que em (12.IV) a hermiticidade é preservada.

Em (12.IV) vamos considerar apenas o sinal + para correspondermos às transformações restritas de Lorentz.

Então, podemos escrever:

$$X' = Q\,X\,Q^{\dagger} = X'_{(\mu)}\,\dot{\sigma}^{(\mu)} = a^{-1\nu}{}_{\mu}\,X_{\nu}\,\dot{\sigma}^{(\mu)} \qquad (13.IV)$$

É possível provar[2] que uma transformação restrita de Lorentz ($a^{\mu}{}_{\nu}$), induz um quaternion unimodular Q que satisfaz à (13.IV).

Da equação (13.IV) obtemos:

$$X'\bar{X}' = Q\,X\,\bar{X}\,\bar{Q} = \text{norm}(X)\;Q\bar{Q} = \text{norm}(X)\;\dot{\sigma}_{(o)},$$

então:

$$\text{norm}(X') = \text{norm}(X), \text{ o que coincide com a (8.IV).}$$

A equação (13.IV) permite exprimir ($a^{\mu}{}_{\nu}$) em função de Q e recípocamente.

De fato:

$$X' = Q\,X\,Q^{\dagger} = Q\,X_{(\mu)}\;\dot{\sigma}^{(\mu)}\;Q^{\dagger} = X_{(\mu)}\;Q\,\dot{\sigma}^{(\mu)}\;Q^{\dagger} \qquad (14.IV)$$

Por outro lado, como X' é quaternion de Lorentz, vale:

$$X' = a^{-1\lambda}{}_{\nu}\;\;X_{\lambda}\,\dot{\sigma}^{(\nu)} = X'_{(\nu)}\,\dot{\sigma}^{(\nu)} \qquad (15.IV)$$

Igualando (14.IV) a (15.IV) e levando em conta $X_{(\mu)}$ é arbitrário, obteremos:

$$Q\,\dot{\sigma}^{(\mu)}\;Q^{\dagger} = a^{-1\mu}{}_{\nu}\;\;\dot{\sigma}^{(\nu)} \qquad (16.IV)$$

Multiplicando-se escalarmente ambos membros por $\dot{\sigma}_{(\beta)}$, virá:

$$Q\;\dot{\sigma}^{(\mu)}\;Q^{\dagger}|\,\dot{\sigma}_{(\beta)} = a^{-1\mu}{}_{\beta} = a^{-1\;(\mu)}{}_{(\beta)} \qquad (17.IV)$$

Essa fórmula nos dá o elemento de matriz de Lorentz $a^{-1\mu}{}_{\beta}$, quando conhecemos a Q unimodular que satisfaz à (13.IV).

Na correspondência inversa se demonstra[2] que há para cada transformação de Lorentz ($a^{\mu}{}_{\nu}$), restrita, duas possíveis matrizes, $\pm Q$, unimodulares,tais que:

$$X' = Q\,X\,Q^{\dagger}$$

onde X' e X são quaternions de Lorentz.

Um quaternion de Lorentz importante é o quaternion que corresponde ao quadrivetor gradiente. Vamos defini-lo como:

$$\partial = \dot{\sigma}^{(\mu)}\ \partial_{(\mu)} \doteq \dot{\sigma}_{(\mu)}\ \partial^{(\mu)} \tag{18.IV}$$

onde

$$\partial_{(\mu)} = \frac{\partial}{\partial x^{(\mu)}}$$

Êsse quaternion ∂ é um quaternion formal. Pela própria definição ∂ respeita a (13.IV), isto é:

$$\partial' = Q\,\partial\,Q^{\dagger} = \dot{\sigma}^{(\mu)}\ \partial'_{(\mu)} = a^{-1\nu}{}_{\mu}\,\dot{\sigma}^{(\mu)}\ \partial_{(\nu)} \tag{19.IV}$$

O quaternion Q não depende de $x^{(\mu)}$, logo:

$$\partial' = Q\,\partial\,Q^{\dagger} = Q\,\dot{\sigma}^{(\mu)}\ \partial_{(\mu)}\,Q^{\dagger} = Q\,\dot{\sigma}^{(\mu)}\,Q^{\dagger}\ \partial_{(\mu)} \tag{20.IV}$$

O produto escalar de dois quaternions de Lorentz é um invariante. Realmente, se y e z são dois quaternions de Lorentz, o seu produto escalar será, por (15.II):

$$y|z = \frac{1}{2}\,(y\bar{z} + z\bar{y}) = \left(y^{(o)}z^{(o)} - \sum_{k=1}^{3} y^{(k)}z^{(k)}\right)\dot{\sigma}_{(o)} =$$

$$= \text{invariante} \times \dot{\sigma}_{(o)} = y'|z' \quad . \tag{21.IV}$$

Como consequência imediata, $z\bar{z}$ é um invariante Lorentziano.

Formalmente também se pode mostrar que:

$$\partial.|\partial = \frac{1}{2}(\partial\ \overline{\partial} + \partial\ \overline{\partial}) = \partial^{(o)}\ \partial^{(o)} - \sum_{k=1}^{3} \partial^{(k)}\ \partial^{(k)} =$$

$$= \eta_{(\mu\nu)}\ \partial^{(\mu)}\ \partial^{(\nu)}$$

e

$$\partial|A = \frac{1}{2}(\partial\overline{A} + A\ \overline{\partial}) = \partial^{(o)}A^{(o)} - \sum_{1}^{3} \partial^{(k)}A^{(k)} = \eta_{(\mu\nu)}\partial^{(\mu)}A^{(\nu)} ,$$

são invariantes Lorentzianos.

Devemos notar que $A\ \overline{\partial}$ quer dizer $\overline{\partial\ \overline{A}}$.

V. QUATERNIONS-ESPINORES

Um quaternion E é idempotente se

$$E.E = E \tag{1.V}$$

Se tomarmos a adjunta da equação supra, obteremos:

$$\overline{E}.\overline{E} = \overline{E} \quad , \tag{2.V}$$

logo, o adjunto de um idempotente é idempotente. O quaternion nulo e o quaternion $\sigma_{(o)}$ são idempotentes e os chamaremos de idempotentes triviais.

Seja o idempotente $E = E_{(\alpha)}\sigma^{(\alpha)}$. A equação (1.V) ficará:

$$(E_{(\alpha)}\sigma^{(\alpha)})\ (E_{(\beta)}\ \sigma^{(\beta)}) = E_{(\gamma)}\ \sigma^{(\gamma)}, \tag{3.V}$$

$$\left.\begin{aligned} E_o^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 &= E_o \\ E_1(1-2E_o) &= 0 \\ E_2(1-2E_o) &= 0 \\ E_3(1-2E_o) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.V}$$

Se $E_1 = E_2 = E_3 = 0$, o sistema (4.V) nos dá $E_o = 0$ ou $E_o = 1$, mas êsses são os casos dos idempotentes triviais:

$$0 = (0, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \acute{\sigma}_{(o)} = (1, 0, 0, 0).$$

Se $1 - 2E_o = 0$, então $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 1/4$ e os E_k, com $k \neq 0$, não podem ser simultâneamente nulos. Êste é o caso dos idempotentes não triviais.

Salvo indicação específica, utilizaremos sòmente os idempotentes não triviais.

Se o idempotente E é não trivial, isto é, se:

$$E_o = 1/2 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{3} (E_k)^2 = \frac{1}{4} \tag{5.V}$$

Então

$$E + \bar{E} = \acute{\sigma}_{(o)} \tag{6.V}$$

Multiplicando (6,V) por $\bar{E}$, obteremos:

$$E\bar{E} + \bar{E}\,\bar{E} = \bar{E}$$

mas por (2.V), $\bar{E}\,\bar{E} = \bar{E}$, logo:

$$\bar{E}E = E\bar{E} = 0 \tag{7.V}$$

Todo idempotente não trivial satisfaz às equações (6.V) e (7.V).

Sôbre o conjunto dos quaternions estão definidas as operações de soma de quaternions e produto de quaternions. Com a operação de soma. os quaternions constituem um grupo aditivo,comutativo. Com a operação de produto, que goza das propriedades associativa e distributiva, o conjunto dos quaternions passa a ser um anel. Como esse anel tem $\acute{\sigma}_{(o)}$ por unidade multiplicativa, diz-se um anel com elemento unidade. O anel dos quaternions não é comutativo. Chamaremos o anel dos quaternions de R. Um sub-conjunto de R que seja também um anel se chama sub-anel de R.

Se r é um elemento do anel R e R' é um sub anel de R e se para todo $r' \in R'$ valer $r'r \in R'$, então o conjunto dos $r'r$ se diz um ideal à esquerda, gerado por r. Anàlogamente se define o ideal gerado à direita e em geral êles diferem.

Se os elementos de um anel R podem ser representados de modo único, por n elementos I_α dêsse mesmo R, na forma de uma combinação linear, isto é, se:

$$r = \sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha I_\alpha \quad ,$$

onde $I_\alpha \in R$ e r_α é um escalar do corpo sôbre o qual o anel é definido, então êsse anel será uma álgebra de ordem n e os I_α constituem uma base da álgebra.

Os quaternions com que estamos trabalhando, constituem uma álgebra não comutativa, de ordem quatro, sôbre o corpo dos complexos e a base escolhida é constituida pelos $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$.

Sôbre o anel R dos quaternions vamos definir o ideal gerado à esquerda pelo idempotente E, não trivial, como sendo o conjunto dos quaternions φ definidos por:

$$\begin{aligned} \varphi E &= \varphi \\ E + \bar{E} &= \dot{\sigma}_{(o)} \end{aligned} \tag{8.V}$$

Então:

$$\varphi(1 - \bar{E}) = \varphi$$

logo:

$$\varphi \bar{E} = 0 \tag{9.V}$$

Um quaternion qualquer pode sempre ser decomposto na soma de um quaternion pertencente ao ideal gerado à esquerda pelo idempotente E e de um quaternion pertencente ao ideal à esquerda gerado pelo seu adjunto $\bar{E}$.

De fato, a equação (6.V) nos dá $E + \bar{E} = \acute{\sigma}_{(o)}$ e então se A é um quaternion arbitrário, podemos escrevê-lo como:

$$A = A\ \acute{\sigma}_{(o)} = A(E + \bar{E}) = AE + A\bar{E} = A_E + A_{\bar{E}} \qquad (10.V)$$

A unicidade da decomposição é fàcilmente demonstrável.

Os idempotentes E e $\bar{E}$ são projetores e separam os ideais gerados por êles, de tal modo, que sòmente têm como elemento comum o quaternion nulo. De fato:

$$A_E \cdot E = (AE)E = AE = A_E \qquad (11.V)$$

$$A_E \cdot \bar{E} = (AE)\bar{E} = A.0 = 0 \qquad (12.V)$$

Vamos definir quaternion-espinor de primeira ordem, contravariante, φ, a todo quaternion que satisfaça às equações (8.V) e que se transforme como:

$$\varphi' = Q\,\varphi\ , \qquad (13.V)$$

quando um quaternion de Lorentz sofre a transformação restrita $X' = Q\ X\ Q^{\dagger}$ e quando E é dado por (16.V) ou (17.V).

Então um quaternion-espinor satisfaz simultâneamente as equações:

$$\left.\begin{aligned} \varphi E &= \varphi \\ \varphi' &= Q\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (14.V)$$

onde E é um idempotente definido abaixo.

A equação $\varphi E = \varphi$ é covariante por transformação restrita de Lorentz.

De fato, se $\varphi E = \varphi$, então:

$$Q\,\varphi E = Q\,\varphi = \varphi'\ ,$$

logo

$$\varphi' E = \varphi' \qquad (15.V)$$

Pela (15.V) vê-se que o quaternion-espinor transformado, φ', pertence ao mesmo ideal a que φ pertence.

Para a definição de quaternion-espinor restringiremos E aos casos:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{(o)} \pm \dot{\sigma}_{(3)}) \tag{16.V}$$

Dessa fórmula decorre que:

$$\overline{E}_{\pm} = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{(o)} \mp \dot{\sigma}_{(3)}) = E_{\mp} \tag{17.V}$$

A escolha do idempotente corresponde à escolha do particular ideal a que o quaternion-espinor φ deve pertencer, mas a lei de transformação dos quaternions-espinores deve ser $\varphi' = Q \varphi$, qualquer que seja o ideal a que φ pertença.

Matricialmente:

$$E_{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.V}$$

$$E_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicaremos os quaternions-espinores gerados pelos $E_{+} = 1/2 \; (\dot{\sigma}_{(o)} + \dot{\sigma}_{(3)})$ por φ_{+} e aquêles pertencentes ao ideal gerado por $E_{-} = 1/2 \; (\dot{\sigma}_{(o)} - \dot{\sigma}_{(3)})$, indicaremos por φ_{-}.

De

$$\varphi_{+} E_{+} = \varphi_{+} \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{(o)} + \dot{\sigma}_{(3)}) = \varphi_{+} ,$$

vem:

$$\varphi_{+} \dot{\sigma}_{(3)} = \varphi_{+} \tag{19.V}$$

Anàlogamente:

$$\varphi_- \; \dot{\sigma}_{(3)} = -\varphi_- \qquad (20.V)$$

Com a escolha dos idempotentes E_+ e E_- indicados em (16.V), temos um modêlo conveniente para a descrição dos espino - res da relatividade.

O quaternion-espinor $\varphi_+ = \varphi_+^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{(\alpha)}$ deve satisfazer à equação (19.V), isto é:

$$(\varphi_+^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{(\alpha)}) \quad \dot{\sigma}_{(3)} = \varphi_+^{(\beta)} \dot{\sigma}_{(\beta)} \qquad (21.V)$$

A equação (21.V) estabelece a dependência de duas componentes $\varphi_+^{(\beta)}$ em têrmos das outras duas. Vamos escolher as componentes $\varphi_+^{(o)}$ e $\varphi_+^{(1)}$ como as independentes. Com esta escolha φ_+ se escreverá:

$$\varphi_+ = \varphi_+^{(o)} \dot{\sigma}_{(o)} + \varphi_+^{(1)} \dot{\sigma}_{(1)} - i\varphi_+^{(1)} \dot{\sigma}_{(2)} + \varphi_+^{(o)} \dot{\sigma}_{(3)} =$$

$$= \varphi_+^{(o)} \left[\dot{\sigma}_{(o)} + \dot{\sigma}_{(3)}\right] + \varphi_+^{(1)} \left[\dot{\sigma}_{(1)} - i\,\dot{\sigma}_{(2)}\right]. \qquad (22.V)$$

Matricialmente a equação (22.V) se escreverá:

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} 2\varphi_+^{(o)} & 0 \\ 2\varphi_+^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \qquad (23.V)$$

A partir da fórmula (20.V), obteremos anàlogamente:

$$\varphi_- = \varphi_-^{(o)} \left[\dot{\sigma}_{(o)} - \dot{\sigma}_{(3)}\right] + \varphi_-^{(1)}\left[\dot{\sigma}_{(1)} + i\,\dot{\sigma}_{(2)}\right] \qquad (24.V)$$

e matricialmente

$$\varphi_- = \begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_-^{(1)} \\ 0 & 2\varphi_-^{(o)} \end{pmatrix} \qquad (25.V)$$

Para os quaternions-espinores de primeira ordem poderemos escolher, arbitràriamente, o ideal gerado por E_+ ou aquêle gerado por E_- . Ambos ideais têm a mesma propriedade de transformação (14.V). A correspondência entre os quaternions espinores e os espinores pròpriamente ditos, (que as vêzes são chamados de espinores de Infeld-Van der Waerden), não é biunívoca e esta não univocidade no ideal a escolher sugère que possamos ter dois tipos de quaternions-espinores de 1^a ordem, ambos com a mesma propriedade de transformação espinorial.

Para representar espinores de 1^a ordem, pròpriamente dito, por meio de quaternions-espinores, devemos escolher um dois ideais e vamos escolher o ideal gerado por E_+ à esquerda. Com esta escolha estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os espinores e os quaternions-espinores φ_+ .

Em (22.V), tomando-se o adjunto de φ_+, virá:

$$\bar{\varphi}_+ = \varphi_+^{(o)} \left[\dot{\sigma}_{(o)} - \dot{\sigma}_{(3)} \right] + \varphi_+^{(1)} \left[- \dot{\sigma}_{(1)} + i \, \dot{\sigma}_{(2)} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\,\varphi_+^{(1)} & 2\,\varphi_+^{(o)} \end{pmatrix} \tag{26.V}$$

Se tomarmos o adjunto do φ_- em (20.V), teremos:

$$\bar{\varphi}_- = \varphi_-^{(o)} \left[\dot{\sigma}_{(o)} + \dot{\sigma}_{(3)} \right] + \varphi_-^{(1)} \left[\dot{\sigma}_{(1)} - i \, \dot{\sigma}_{(2)} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,\varphi_-^{(o)} & 2\,\varphi_-^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{27.V}$$

Se estabelecermos o isomorfismo:

$$\begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \varphi_+ = \begin{pmatrix} 2\,\varphi_+^{(o)} & 0 \\ \\ 2\,\varphi_+^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \qquad (28.V)$$

então, estaremos associando isomòrficamente os quaternions espinores de primeira ordem contravariantes a vetores coluna e duas componentes. Nesse formalismo de vetores coluna e espinor dado por (14.V) se escreverá:

$$\begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \qquad E_+ = \begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \\ \phi_+^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_+^{1'} \\ \\ \phi_+^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 \\ \\ Q_1^2 & Q_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+^1 \\ \\ \phi_+^2 \end{pmatrix} \qquad (14'.V)$$

onde representamos Q pela matriz de elementos $Q^A{}_B$, com A ; B = 1, 2.

A representação matricial do idempotente E_+ usado na definição dos quaternions espinores de 1^a ordem é dada pela (18.V).

Do mesmo modo que estabelecemos o isomorfismo (28.V) , vamos estabelecer a correspondência biunívoca entre o quaternion $\bar{\varphi}_+$ e a matriz linha:

$$\begin{pmatrix} \phi_{+1} & \phi_{+2} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \bar{\varphi}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\varphi_+^{(1)} & 2\,\varphi_+^{(o)} \end{pmatrix} \qquad (29.V)$$

Se observarmos as fórmulas (28.V) e (29.V), veremos que:

$$\bar{\phi}_+ \, \phi_+ = \phi_{+A} \, \phi_+^A = 0 \text{ , pois: } \phi_{+1} = -\,\phi_+^2 \; ; \quad \phi_{+2} = \phi_+^1 \qquad (30.V)$$

Se ao quaternion φ_+ associamos o vetor coluna (28.V), então ao quaternion $\bar{\varphi}_+$ associamos o vetor linha (29.V). Acontece que as relações (30.V) são exatamente aquelas que ocorrem entre as componentes covariantes e contravariantes de um espinor de 1ª ordem no cálculo espinorial ordinário. Independentemente dêsse fato, o cálculo matricial associa aos vetores linha uma variancia contrária à que associa aos vetores coluna, (usualmente chamados contravariantes).

A lei de transformação dos φ_+ é $\varphi'_+ = Q\,\varphi_+$ e se tomarmos a adjunta desta equação obteremos $\bar{\varphi}'_+ = \bar{\varphi}_+\,\bar{Q}$.

Como $Q\bar{Q} = \dot{\sigma}_{(o)}$, resulta que $\bar{Q} = Q^{-1}$, logo:

$$\bar{\varphi}'_+ = \bar{\varphi}_+\, Q^{-1} \qquad (31'V)$$

Um quaternion de 1ª ordem, covariante é um quaternion pertencente ao ideal gerado por E_+ à esquerda e que se transforma com $\bar{\varphi}_+$, isto é:

$$\left(\phi'_{+^1} \quad \phi'_{+^2} \right) = \left(\phi_{+^1} \quad \phi_{+^2} \right) \begin{pmatrix} \bar{Q}^1{}_1 & \bar{Q}^1{}_2 \\ \bar{Q}^2{}_1 & \bar{Q}^2{}_2 \end{pmatrix} \qquad (31.V)$$

A lei de transformação para $\left(\phi_{-1} \quad \phi_{-2} \right)$ é a mesma.

Compactamente escreveremos a (31.V) como;

$$\bar{\phi}'_+ = \bar{\phi}_+\,\bar{Q} = \bar{\phi}_+\,Q^{-1} \quad ; \quad \bar{Q} = Q^{-1} \qquad (31''.V)$$

É claro que poderíamos escrever essa equação na forma quaterniônica ordinária, usando-se a (26.V).

Se lembrarmos que a fórmula (7.III) nos dá

$\sigma'_{(o)} = \bar{Q}Q = \sigma'_{(o)}(\det Q)$, e se decompusermos em equações entre os elementos de matriz as equações matriciais (14'.V) e (31.V), obteremos respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \phi'^{A}_{+} = Q^{A}{}_{B}\;\phi^{B}_{+} \\[2ex] \phi'_{+A} = \phi_{+B}\;\bar{Q}^{B}{}_{A} \end{array}\right\} \quad \text{e} \qquad (32.V)$$

onde A; b, = 1, 2. Mas essas são as equações usuais que definem os espinores de 1ª ordem, contravariantes e covariantes.

Se considerarmos a definição de quaternion complexo (13.II), cuja forma matricial está dada em (5.III), e a aplicarmos aos quaternions φ_+ e $\bar{\varphi}_+$, obteremos os quaternions φ^*_+ e $\bar{\varphi}^*_+ = \overline{\varphi^*_+}$, que se transformam, (levando-se em conta as (14.II), (14'.V) e (31.V), como:

$$\varphi^{*'}_{+} = Q^{*}\;\varphi^{*}_{+} \qquad (33.V)$$

$$\bar{\varphi}^{*'}_{+} = \overline{\varphi^{*}_{+}}\;\bar{Q}^{*} = \overline{\varphi^{*}_{+}}\;Q^{-1*} = \overline{\varphi^{*}_{+}}\;(Q^{*})^{-1} \qquad (34.V)$$

Matricialmente obteremos:

$$\begin{pmatrix} \phi^{*1'}_{+} \\[2ex] \phi^{*2'}_{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{*1}{}_{1} & Q^{*1}{}_{2} \\[2ex] Q^{*2}{}_{1} & Q^{*2}{}_{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{*1}_{+} \\[2ex] \phi^{*2}_{+} \end{pmatrix} \qquad (33'.V)$$

$$\overline{\begin{pmatrix} \phi^{*'}_{+1} & \phi^{*'}_{+2} \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} \phi^{*}_{+1} & \phi^{*}_{+2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{*1}{}_{1} & \bar{Q}^{*1}{}_{2} \\[2ex] \bar{Q}^{*2}{}_{1} & \bar{Q}^{*2}{}_{2} \end{pmatrix} \qquad (34'.V)$$

Vamos estabelecer a convenção seguinte:

$$\begin{pmatrix} \phi^{*1} \\ \\ \phi^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{1} \\ \\ \phi^{2} \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} \phi^{\dot{1}} \\ \\ \phi^{\dot{2}} \end{pmatrix} ,$$

onde o índice com pontuação, também chamado índice p), indica que o quaternion considerado é o complexo conjugado do quaternion $\begin{pmatrix} \phi^{1} \\ \phi^{2} \end{pmatrix}$

Com esta convenção as equações (33'.V) e (34'.V) se escreverão:

$$\begin{pmatrix} \phi_{+}^{\dot{1}'} \\ \\ \phi_{+}^{\dot{2}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} & Q^{\dot{1}}{}_{\dot{2}} \\ \\ Q^{\dot{2}}{}_{\dot{1}} & Q^{\dot{2}}{}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{+}^{\dot{1}} \\ \\ \phi_{+}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (33''.V)$$

$$\begin{pmatrix} \phi'_{+\dot{1}} & \phi'_{+\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{+\dot{1}} & \phi_{+\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{\dot{1}}{}_{\dot{1}} & \bar{Q}^{\dot{1}}{}_{\dot{2}} \\ \\ \bar{Q}^{\dot{2}}{}_{\dot{1}} & \bar{Q}^{\dot{2}}{}_{\dot{2}} \end{pmatrix}$$

(34".V)

A lei de transformação de um quaternion espinor de 1^{a} ordem, contravariante de índice p é dada pela (33.V) e se fôr covariante será dada pela (34.V). As fórmulas (33".V) e (34".V) são as expressões matriciais equivalentes.

Até aqui estabelecemos quatro tipos de quaternions espinores de 1^{a} ordem pertencentes ao ideal gerado por E_{+} à esquerda. Poderíamos ter feito o mesmo para o ideal gerado por E_{-} à esquerda e com auxílio das fórmulas (25.V) e (27.V) obteríamos os quatro tipos de quaternions espinores:

$$\varphi_- = \begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_-^{(1)} \\ 0 & 2\varphi_-^{(o)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_-^{1} \\ \psi_-^{2} \end{pmatrix} \qquad (35.V)$$

$$\overline{\varphi}_- = \begin{pmatrix} 2\varphi_-^{(o)} & 2\varphi_-^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_{-1} & \psi_{-2} \end{pmatrix} \qquad (36.V)$$

$$\varphi_-^* = \begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_-^{*(1)} \\ 0 & 2\varphi_-^{*(o)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_-^{\dot{1}} \\ \psi_-^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (37.V)$$

$$\overline{\varphi}_-^* = \begin{pmatrix} 2\varphi_-^{*(o)} & 2\varphi_-^{*(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_{-\dot{1}} & \psi_{-\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (38.V)$$

Para simplificar, passaremos a chamar os quaternions espinores de 1^a espécie de q-espinores de 1^a espécie e aos quaternions ordinários, simplesmente de quaternions. Os quatro tipos de q-espinores supra se transformam segundo leis análogas àquelas vistas para os φ_+, $\overline{\varphi}_+$, φ_+^* e $\overline{\varphi}_+^*$.

Sabemos que, a menos do q-espinor nulo, os ideais gerados por E_+ e E_- são separados. Para cada ideal podemos somar q-espinores do mesmo tipo ou multiplicá-los por um escalar, porque a lei de transformação da soma será a mesma das parcelas e o produto de um q-espinor por um escalar não altera sua lei de transformação. Não podemos somar dois q-espinores de tipos diferentes, se quizermos conservar a lei de transformação.

Os escalares, por extensão, serão chamados q-espinores de ordem zero. Vamos construir q-espinores de 2^a ordem por meio do produto de q-espinores de 1^a ordem. Se φ_+ e ψ_+ são dois q espinores contravariantes, dados pela (28.V), êles se transformam co mo $\varphi'_+ = Q\ \psi_+$; $\psi'_+ = Q\ \psi_+$. Se fizermos o produto dêles e se os escrevermos matricialmente, o produto ficará:

$$\begin{pmatrix} \varphi_+^{1'} & 0 \\ \varphi_+^{2'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+^{1'} & 0 \\ \psi_+^{2'} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+^1 & 0 \\ \varphi_+^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+^1 & 0 \\ \psi_+^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{39.V}$$

Por conveniência estamos escrevendo o q-espinor de 1^a ordem na sua representação matricial.

A (39.V), efetuada ficará:

$$\begin{pmatrix} \varphi_+^{1'} & \psi_+^{1'} & 0 \\ \varphi_+^{2'} & \psi_+^{1'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1{}_A & \varphi_+^A & Q^1{}_B & \psi_+^B & 0 \\ Q^2{}_A & \varphi_+^A & Q^1{}_B & \psi_+^B & 0 \end{pmatrix} \tag{40.V}$$

onde

$$Q^1{}_A \varphi_+^A = Q^1{}_1\ \varphi_+^1 + Q^1{}_2\ \varphi_+^2$$

e

$$Q^1{}_B\ \psi_+^B = Q^1{}_1\ \psi_+^1 + Q^1{}_2\ \psi_+^2$$

A fórmula (40.V) nos mostra que o produto de dois q-espinores de primeira ordem, contravariantes, sem índices p, pertencentes ao ideal gerado por E_+ à esquerda não gera senão uma parte dos q-espinores de 2^a ordem, contravariantes, sem índice p. Precisamos obter os elementos não nulos da 2^a coluna da matriz (40.V) e os obteremos com o produto de q-espinores de primeira ordem, sem índice p gerados por E_ à esquerda.

De fato, a fórmula (35.V) nos permite escrever:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_-^{1'} \\ 0 & \varphi_-^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \psi_-^{1'} \\ 0 & \psi_-^{2'} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_-^1 \\ 0 & \varphi_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \psi_-^1 \\ 0 & \psi_-^2 \end{pmatrix}$$

logo

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_-^{1'} & \psi_-^{2'} \\ 0 & \varphi_-^{2'} & \psi_-^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q^1{}_A & \varphi_-^A & Q^2{}_B & \psi_-^B \\ 0 & Q^2{}_A & \varphi_-^A & Q^2{}_B & \psi_-^B \end{pmatrix} \tag{41.V}$$

Se somarmos (40.V) com (41.V), obteremos:

$$\varphi'_+ \quad \psi'_+ + \varphi'_- \quad \psi'_- = \begin{pmatrix} \varphi_+^{1'} & \psi_+^{1'} & \varphi_-^{1'} & \psi_-^{2'} \\ \varphi_+^{2'} & \psi_+^{1'} & \varphi_-^{2'} & \psi_-^{2'} \end{pmatrix} =$$

$$= Q\varphi_+ \quad Q\psi_+ + Q\varphi_- \quad Q\psi_- =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^1{}_A \ \varphi_+^A & Q^1{}_B \ \psi_+^B & Q^1{}_A \ \varphi_-^A & Q^2{}_B \ \psi_-^B \\ Q^2{}_A \ \varphi_+^A & Q^1{}_B \ \psi_+^B & Q^2{}_A \ \varphi_-^A & Q^2{}_B \ \psi_-^B \end{pmatrix}$$

(42.V)

É importante observar que φ_-^A é independente de φ_+^A, o mesmo ocorrendo entre ψ_-^A e ψ_+^A. A equação (42.V) é sob forma matricial, a lei de transformação do produto direto de dois espino res ordinários, a duas componentes, contravariantes, sem índices p, cada espinor se transformando como $\varphi' = Q\varphi$.

Para formar q-espinores de 2^a ordem não pudemos restringir a um dos ideais, (gerado por E_+ ou por E_-), mas necessitamos de combinações de elementos de ambos ideais.

A fórmula (42.V) pode ser escrita de modo mais conveniente se observarmos que:

$$Q^1{}_A \; \varphi_-^A \quad Q^2{}_B \quad \psi_-^B = Q^1{}_A \; \varphi_-^A \quad \psi^T{}_-^B \quad Q^T{}_B{}^2$$

onde ψ_-^T é o transposto de ψ_- e $Q^T{}_B{}^2$ é o elemento de matriz da matriz transposta de Q.

Com essa observação a (42.V) se escreverá:

$$\varphi'_+ \quad \psi'_+ + \varphi'_- \; \psi'_- = Q\left[\varphi_+ \quad \psi_+^T + \varphi_- \quad \psi_-^T\right] \; Q^T. \qquad (42'.V)$$

Definiremos q-espinores de 2^a ordem contravariantes, sem índices p, a todo quaternion ψ que se transformar como:

$$\psi' = Q\psi \; Q^T$$

Usaremos frequentemente a notação ψ^{AB} para indicar as componentes de um q-espinor definido pela (43.V).

Qualquer outra combinação de produtos, como $Q\varphi_- \; Q\psi_+$, etc., não geraria a lei (43.V).

Na forma matricial a (43.V) se escreverá:

$$\begin{pmatrix} \psi'^{11} & \psi'^{12} \\ \psi'^{21} & \psi'^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{11} & \psi^{12} \\ \psi^{21} & \psi^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix}^T \qquad (43'.V)$$

A lei de transformação dos q-espinores de 2^a ordem, covariantes se estabelece de modo análogo, partindo-se de:

$$\bar{\varphi}'_{+} \quad \bar{\psi}'_{+} + \bar{\varphi}'_{-} \quad \bar{\psi}'_{-} = \bar{\varphi}_{+} \quad \bar{Q} \quad \bar{\psi}_{+} \quad \bar{Q} + \bar{\varphi}_{-} \quad \bar{Q} \quad \bar{\psi}_{-} \quad \bar{Q} =$$

$$= \bar{Q}^{T} \left[\bar{\varphi}_{+}^{T} \quad \bar{\psi}_{+} + \bar{\varphi}_{-}^{T} \quad \bar{\psi}_{-} \right] \bar{Q} \qquad (44.V)$$

Com base nesse resultado definiremos um q-espinor de 2^a ordem covariante, sem índices p a todo quaternion ψ que se transforma segundo a lei:

$$\psi' = \bar{Q}^{T} \; \psi \; \bar{Q} \qquad (45.V)$$

com $Q\bar{Q} = \sigma_{(o)}$.

A notação ψ_{AB} será usada para indicar os elementos da matriz que representa o q-espinor (45.V) isto é:

$$\begin{pmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} \\ \psi'_{21} & \psi'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{-1}{}_{1} & Q^{-1}{}_{2} \\ Q^{-2}{}_{1} & Q^{-2}{}_{2} \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1}{}_{1} & Q^{-1}{}_{2} \\ Q^{-2}{}_{1} & Q^{-2}{}_{2} \end{pmatrix}$$

(45'.V)

Essa é exatamente a lei de transformação dos espinores covariantes de 2^a ordem do cálculo espinorial ordinário, quando na forma matricial.

Os q-espinores de 2^a ordem contravariantes com índices p podem ser obtidos multiplicando-se φ'^{*}_{+} por ψ'^{*}_{+} e somando-se com φ'^{*}_{-} ψ'^{*}_{-} ou tomando-se o complexo conjugado dos quaternions que respeitam à lei (43.V), isto é:

$$\psi^{*\prime} = Q^{*} \quad \psi^{*} \quad Q^{T*} = Q^{*} \quad \psi^{*} \quad Q^{\dagger} \qquad (46.V)$$

Notaremos as componentes de um q-espinor que satisfaz à lei de transformação (46.V), por $\psi^{\dot{A}\dot{B}}$.

Por razões análogas definiremos q-quaternions de 2^a ordem, covariantes com índices p a todo quaternion que se transformar segundo a lei:

$$\psi^{*\prime} = \bar{Q}^{\dagger} \; \psi^{*} \; \bar{Q}^{*} \qquad (47.V)$$

O elemento de matriz que representa o q-espinor dado pela (47.V) será chamado $\psi_{\dot{A}\dot{B}}$.

Para evitar analises enfadônhas, vamos impor que as componentes de um espinor de 2ª ordem se transforme como o produto de componentes de espinores de 1ª ordem. Deste modo obteremos as leis de transformação dos vários tipos de q-espinores de 2ª ordem, desde que as escrevamos na forma matricial.

Deste modo a lei de transformação de um q-espinor ψ , de 2ª ordem, sem índices p, misto, é dada por:

$$\psi' = Q \, \psi \, \bar{Q} \tag{48.V}$$

Os elementos de matriz de um q-espinor definido pela lei (48.V) representaremos por $\psi^{A}{}_{B}$.

Se tomarmos o transposto do q-espinor definido pela (48.V) teremos a lei de transformação do $\left(\psi_{B}{}^{A}\right)$ e, por isso, vamos também passar a indicar, os q-espinores por meio de expressões em que os índices apareçam explicitamente, por exemplo:

$$\left.\begin{aligned} \left(\psi'^{AB}\right) &= Q \left(\psi^{AB}\right) Q^{T} \\ \left(\psi'_{AB}\right) &= \bar{Q}^{T} \left(\psi_{AB}\right) \bar{Q} \end{aligned}\right\} \tag{49.V}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\psi'^{\dot{A}\dot{B}}\right) &= Q^{*} \left(\psi^{\dot{A}\dot{B}}\right) Q^{\dagger} \\ \left(\psi'_{\dot{A}\dot{B}}\right) &= \bar{Q}^{\dagger} \left(\psi_{\dot{A}\dot{B}}\right) \bar{Q}^{*} \end{aligned}\right\} \tag{50.V}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\psi'^{A}{}_{B}\right) &= Q \left(\psi^{A}{}_{B}\right) \bar{Q} \\ \left(\psi'_{A}{}^{B}\right) &= \bar{Q}^{T} \left(\psi_{A}{}^{B}\right) Q^{T} \end{aligned}\right\} \tag{51.V}$$

Se tomarmos o complexo conjugado dos q-espinores $\psi^{A}{}_{B}$ e $\psi_{A}{}^{B}$ teremos, com ajuda das (51.V) as suas leis de transformação:

$$\left.\begin{aligned}\left(\psi'^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}\right) &= Q^* \left(\psi^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}\right) \bar{Q}^* \\ \left(\psi'_{A}{}^{\dot{B}}\right) &= \bar{Q}^{\dagger} \left(\psi_{A}{}^{\dot{B}}\right) Q^{\dagger}\end{aligned}\right\} \tag{52.V}$$

As fórmulas supra definem os dois tipos de q-espinores mistos de segunda ordem, com índices p.

A lei de transformação do q-espinor de 2ª ordem contravariante com o 1º índice não p, e o segundo sendo um p índice, é:

$$\left(\psi'^{A\dot{B}}\right) = Q \left(\psi^{A\dot{B}}\right) Q^{*T} = Q \left(\psi^{A\dot{B}}\right) Q^{\dagger} \tag{53.V}$$

Tomando o complexo conjugado desse quaternion virá:

$$\left(\psi'^{\dot{A}B}\right) = Q^* \left(\psi^{\dot{A}B}\right) Q^T \tag{54.V}$$

Por processos análogos aos anteriores, teremos:

$$\left(\psi'_{A\dot{B}}\right) = \bar{Q}^T \left(\psi_{A\dot{B}}\right) \bar{Q}^* \tag{55.V}$$

e

$$\left(\psi'_{\dot{A}B}\right) = \bar{Q}^{\dagger} \left(\psi_{\dot{A}B}\right) \bar{Q} \tag{56.V}$$

Essas leis de transformação definem os correspondentes q-espinores de 2ª ordem.

Analogamente teremos a lei de transformação do q-espinor $\psi^{A}{}_{\dot{B}}$

isto é:

$$\left(\psi'^{A}{}_{\dot{B}}\right) = Q \left(\psi^{A}{}_{\dot{B}}\right) \bar{Q}^* \tag{57.V}$$

Se tomarmos a sua complexa conjugada, teremos:

$$\left(\psi'^{\dot{A}}{}_{B}\right) = Q^* \left(\psi^{\dot{A}}{}_{B}\right) \bar{Q} \tag{58.V}$$

Tomando os transpostos das (57.V) e (58.V) obteremos respectivamente:

$$\left(\psi'_{B}{}^{\cdot A}\right) = \bar{Q}^{\dagger} \left(\psi_{B}{}^{\cdot A}\right) Q^{T} \tag{59.V}$$

e

$$\left(\psi'_{B}{}^{\dot{A}}\right) = \bar{Q}^{T} \left(\psi_{B}{}^{\dot{A}}\right) Q^{\dagger} \tag{60.V}$$

A conexão entre os elementos de matriz de um quaternion e as suas componentes na base $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$ é obtida a partir da igualdade:

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \psi^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \psi^{11} & \psi^{12} \\ \psi^{21} & \psi^{22} \end{pmatrix} \tag{61.V}$$

onde usamos o q-espinor contravariante de 2ª ordem apenas para explicitação. Da representação matricial usada para os $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$, tiramos:

$$\begin{aligned} \psi^{11} &= \psi^{(o)} + \psi^{(3)} \\ \psi^{12} &= \psi^{(1)} - i\,\psi^{(2)} \\ \psi^{21} &= \psi^{(1)} + i\,\psi^{(2)} \\ \psi^{22} &= \psi^{(o)} - \psi^{(3)} \end{aligned} \tag{62.V}$$

Sabemos que um quaternion é hermitiano se tôdas as suas componentes $\psi^{(\alpha)}$ são reais.

A partir das fórmulas (62.V) e com a hipótese de que

VI. CONEXÃO ENTRE QUATERNIONS DE LORENTZ E q-ESPINORES DE 2^a ORDEM HERMITIANOS

No capítulo IV introduzimos os quaternions de Lorentz como quaternions hermitianos cujas componentes $A_{(\alpha)}$ se transformam como as componentes covariantes de um quadrivetor da relatividade restrita. Da própria definição decorre a realidade de suas componentes e, então, a sua expressão matricial, na base $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$, é a de uma matriz hermitiana e como sua lei de transformação, (13.IV), e $X' = Q\,X\,Q^{\dagger}$, vemos que ela coincide com a lei de transformação (53.V) de um q-espinor de 2^a ordem, hermitiano da forma ($\psi^{A\dot{B}}$).

Êsse resultado é importante pois, além de correlacionar um quaternion de Lorentz com um q-espinor hermitiano de 2^a ordem, mostra que o carâter espinorial do quaternion de Lorentz está associado intrînsecamente â sua formulação matricial. Assim o quaternion X tem uma representação quadrivetorial quando expresso em têrmos dos elementos de base $\dot{\sigma}_{(\mu)}$ e tem uma representação espinorial quando representado matricialmente em têrmos das matrizes $\dot{\sigma}_{(\mu)}$. Deste modo:

$$X = X^{(\mu)}\ \dot{\sigma}_{(\mu)} = \begin{pmatrix} X^{1\dot{1}} & X^{1\dot{2}} \\ X^{2\dot{1}} & X^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \quad , \qquad (1.VI)$$

com

$$X^{1\dot{1}} = X^{(o)} + X^{(3)} \quad , \quad X^{1\dot{2}} = X^{(1)} - iX^{(2)} \quad ,$$
$$X^{2\dot{1}} = X^{(1)} + iX^{(2)} \quad e \quad X^{2\dot{2}} = X^{(o)} - X^{(3)} \quad .$$

De $X' = Q\,X\,Q^{\dagger}$, tomando-se o adjunto, virá:

$$\overline{X}' = \overline{Q}^{\dagger}\ \overline{X}\ \overline{Q} \qquad (2.VI)$$

Mas esta é a lei de transformação, (56.V) do espinor ($\psi_{\dot{A}B}$). É fácil ver que se X é hermitiano, $\overline{X}'$ é hermitiano também.

As fórmulas (1.VI) e (2.VI) estabelecem uma correspondência biunívoca entre X e $(X^{A\dot{B}})$ e entre $\overline{X}$ e $(X_{\dot{A}B})$ respectivamente.

De $X_{(\mu)}\ \dot{\sigma}^{(\mu)} = X^{(\mu)}\ \dot{\sigma}_{(\mu)} = X$, multipliquemos escalarmente por $\dot{\sigma}^{(\nu)}$ e usando as fórmulas (18.II) e (16.II), virá:

$$\dot{\sigma}^{(\nu)} \mid X = X_{(\mu)}\ \dot{\sigma}^{(\nu)} \mid \dot{\sigma}^{(\mu)} = \dot{\sigma}_{(o)}\ X_{(\mu)}\ \eta^{(\nu\mu)} \quad .$$

A (19.II) nos dará:

$$\dot{\sigma}^{(\nu)} | X = \dot{\sigma}_{(o)}\ X^{(\nu)} \quad . \tag{3.VI}$$

Omitiremos frequentemente o $\dot{\sigma}_{(o)}$, quando não houver dúvidas. Pela (15.II) podemos escrever também:

$$\dot{\sigma}^{(\nu)} | X = \frac{1}{2}\ (\dot{\sigma}^{(\nu)}\ \overline{X} + X\ \overline{\dot{\sigma}^{(\nu)}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\ (\dot{\sigma}^{(\nu)}\ \overline{X} + \overline{\dot{\sigma}^{(\nu)}\ \overline{X}}) = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (\dot{\sigma}^{(\nu)}\ \overline{X}) \quad , \tag{4.VI}$$

onde usamos a (8.III).

Como os $X^{(\mu)}$ são elementos do corpo dos escalares, se X é da forma $(X^{A\dot{B}})$ então os $\dot{\sigma}_{(\mu)}$ são da forma $(\dot{\sigma}_{(\mu)}{}^{A\dot{B}})$. A hermiticidade do X decorre da realidade dos $X^{(\mu)}$ e da hermiticidade dos $\dot{\sigma}_{(\mu)}$. Recìprocamente se X é hermitiano e os $X^{(\mu)}$ reais, então os $\dot{\sigma}_{(\mu)}$ são hermitianos. Desta análise a (4.VI) poderá ser escrita como:

$$\dot{\sigma}^{(\nu)} | X = X^{(\nu)} = \frac{\dot{\sigma}_{(o)}}{2}\ \mathrm{tr}\ (\dot{\sigma}^{(\nu)}\ \overline{X}) =$$

$$= \frac{\dot{\sigma}_{(o)}}{2}\ \dot{\sigma}^{(\nu)A\dot{B}}\ X_{\dot{B}A} \tag{5.VI}$$

Essa fórmula dá as componentes do quadrivetor associado ao q-espinor hermitiano X quando conhecemos a sua representação espinorial. Por outro lado, a fórmula (1.VI), é uma igualdade entre a matriz X e a combinação linear das matrizes $\dot{\sigma}_{(\mu)}$ e se fixarmos o elemento de matriz $A\dot{B}$ no primeiro membro, deveremos fixá-lo no segundo membro, isto é:

$$X^{A\dot{B}} = X^{(\mu)} \quad \dot{\sigma}_{(\mu)}{}^{A\dot{B}} \qquad . \qquad (6.VI)$$

Esta fórmula é a inversa da (5.VI), pois dá as componentes da representação espinorial do quadrivetor X quando conhecemos as suas componentes de universo (que chamaremos a sua representação tensorial).

A fórmula (2.VI) e o fato de que se $X = X^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{(\alpha)}$, então $\overline{X} = X^{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}}$, nos leva aos $\overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}}$ como tendo a representação espinorial ($\dot{\sigma}_{(\alpha)\dot{B}A}$)

Então, $X_{\dot{B}A} = X^{(\mu)} \dot{\sigma}_{(\mu)\dot{B}A}$ é a fórmula obtida da igualdade entre elementos da matriz, quando representamos matricialmente a expressão $\overline{X} = X^{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}_{(\alpha)}} = X_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}}$.

A realidade dos quadrivetores é mantida pela transformação de Lorentz e a correspondência (5.VI) entre quaternions de Lorentz e q-espinores hermitianos é biunívoca. Deste modo, sòmente podemos representar quadrivetores de universo por q-espinores hermitianos de 2^a ordem.

O cálculo espinorial ordinário se baseia no produto direto de espinores para formar espinores de ordem superior. Neste trabalho usamos os quaternions para representar espinores de primeira e segunda ordens. Para a formulação da curvatura no espaço riemanniano não precisaremos sair da álgebra dos quaternions e isto quer dizer que nos bastarão os q-espinores de 2^a ordem. Se quisermos representar espinores de ordem superior à segunda por quaternions, necessitaremos de introduzir a operação de produto direto de quaternions.

VII. QUATERNIONS EM ESPAÇO DE RIEMANN

(I.VII) Tetradas e Quaternions

Definido um sistema de coordenadas reais x^{ν} na variedade espaço-tempo, associemos a cada ponto P(x) do continuum espaço-tempo um conjunto de quatro vetores contravariantes, normalizados e linearmente independentes. Três dos vetores serão do gênero espaço e um deles será do gênero tempo. Ao conjunto dos quatro vetores num ponto P(x) chamaremos tetrada em P(x).

Cada vetor da tetrada tem por componentes quatro funções de ponto, reais, $h^{\mu}(P(x))_{\alpha} \equiv h^{\mu}(x)_{\alpha}$, onde μ é o índice de componente e α indica o quadrivetor da tetrada. Faremos α e μ variarem de 0 a 3.

A independência linear dos vetores da tetrada é caracterizada pelo não anulamento do determinante:

$$\begin{vmatrix} h^{o}(x)_{o} & h^{o}(x)_{1} & h^{o}(x)_{2} & h^{o}(x)_{3} \\ h^{1}(x)_{o} & h^{1}(x)_{1} & h^{1}(x)_{2} & h^{1}(x)_{3} \\ h^{2}(x)_{o} & h^{2}(x)_{1} & h^{2}(x)_{2} & h^{2}(x)_{3} \\ h^{3}(x)_{o} & h^{3}(x)_{1} & h^{3}(x)_{2} & h^{3}(x)_{3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.\text{I.VII})$$

Definir a tetrada em cada ponto P(x) do espaço-tempo corresponde a definir 16 funções reais $h^{\mu}(x)_{\alpha}$. Com essas 16 funções podemos construir o tensor métrico $g^{\mu\nu}(x)$, de modo unívoco , através das equações:

$$g^{\mu\nu}(x) = h^{\mu}(x)_{\alpha}\, h^{\nu}(x)^{\alpha} \qquad (2.\text{I.VII})$$

onde:

$$h^{\nu}(x)^{\alpha} = h^{\nu}(x)_{\beta}\, \eta^{\beta\alpha} \qquad (3.\text{I.VII})$$

e $\eta^{\beta\alpha} = 0$ se $\beta \neq \alpha$, $\eta^{oo} = 1 = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33}$.

Podemos definir $\eta_{\alpha\beta}$ de modo único, tal que $\eta_{\alpha\beta}\,\eta^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\ \gamma}$, onde $\delta_{\alpha}^{\ \gamma}$ é o símbolo de Kronecker.

Vamos introduzir o quaternion $\sigma^{\mu}(x)$ por meio da equação:

$$\sigma^{\mu}\ (x) = h^{\mu}(x)_{\alpha}\,\dot{\sigma}^{(\alpha)} \qquad (4.I.VII)$$

Como o índice α é agora também índice de componente quaterniônica vamos escrevê-lo, como anteriormente, entre parênteses, isto é:

$$\sigma^{\mu}\ (x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)}\,\dot{\sigma}^{(\alpha)} \qquad (4'.I.VII)$$

Com a definição (4'.I.VII) haverá a coincidência entre $\eta^{\alpha\beta}$ e $\dot{g}^{(\alpha\beta)} = \dot{\sigma}^{(\alpha)} \mid \dot{\sigma}^{(\beta)}$; entre $\eta_{\alpha\beta}$ e $\dot{g}_{(\alpha\beta)} = \dot{\sigma}_{(\alpha)} \mid \dot{\sigma}_{(\beta)}$.

Se fizermos o produto escalar de $\sigma^{\mu}(x)$ por $\sigma^{\nu}(x)$, virá:

$$\sigma^{\mu}(x)\ \mid \sigma^{\nu}(x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)}\ h^{\nu}(x)_{(\beta)}\ \dot{\sigma}^{(\alpha)} \mid \dot{\sigma}^{(\beta)} =$$

$$= h^{\mu}(x)_{(\alpha)}\ h^{\nu}(x)^{(\alpha)} = g^{\mu\nu}(x).$$

Então:

$$\sigma^{\mu}(x)\ \mid \sigma^{\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) \qquad (5.I.VII)$$

Os quatro quaternions $\sigma^{\mu}(x)$ definem unìvocamente a métrica $g^{\mu\nu}(x)$ e isto é evidente pela (5.I.VII). Definir o campo $g^{\mu\nu}(x)$ corresponde a definir um campo de 16 funções reais de argumento $P(x)$, mas levando em conta a simetria do $g^{\mu\nu}(x)$, vê-se que sòmente 10 são independentes. Como os quatro quaternions $\sigma^{\mu}(x)$ correspondem a 16 funções independentes, então os $g^{\mu\nu}(x)$ não definem unìvocamente os $\sigma^{\mu}(x)$, que encerram ainda 6 grãus de liberdade , que podem ser conectados a seis parâmetros contínuos. Êstes seis parâmetros contínuos permitem definir diferentes tetradas em $P(x)$, obtidas umas das outras por transformações hexaparamétricas, tôdas elas definindo unìvocamente a métrica $g^{\mu\nu}(x)$.

O índice μ é um índice de componente de quadrivetor . Nas transformações de coordenadas X^{ν} em X'^{μ} num ponto P admitiremos sempre o jacobiano diferente de zero em alguma vizinhança do P, isto é:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)_P \neq 0 \qquad (6.I.VII)$$

Os $\sigma^{\mu}(x)$ são quaternions hermitianos devido à realidade dos $h^{\mu}(x)_{(\alpha)}$ e da hermiticidade dos $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$.

Veremos na fórmula (21.I.VII) que vale:

$$\sigma^{\mu}(x) = g^{\mu\nu}(x)\ \sigma_{\nu}(x) \qquad ,$$

logo vale:

$$\overline{\sigma^{\mu}(x)} = g^{\mu\nu}(x)\ \overline{\sigma_{\nu}(x)} \qquad (7.I.VII)$$

Como o determinante (1.I.VII) é diferente de zero existe a inversa da equação (4.I.VII), isto é:

$$\dot{\sigma}^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x)_{\mu}\ \sigma^{\mu}(x) \qquad (8.I.VII)$$

onde $f^{(\alpha)}(x)_{\mu}$ é o elemento de matriz da inversa da matriz associada à (1.I.VII).

Então, em P(x) podemos escrever:

$$\dot{g}^{(\alpha\beta)} = \dot{\sigma}^{(\alpha)} \mid \dot{\sigma}^{(\beta)} = f^{(\alpha)}(x)_{\mu}\ f^{(\beta)}(x)_{\nu}\, \sigma^{\mu}(x) \mid \sigma^{\nu}(x) =$$

$$= f^{(\alpha)}(x)_{\mu}\ f^{(\beta)}(x)_{\nu}\ g^{\mu\nu}(x) = f^{(\alpha)}(x)_{\mu}\ f^{(\beta)}(x)^{\mu} \qquad (9.I.VII)$$

Em particular,

$$\left.\begin{array}{l} \dot{g}^{(oo)} = 1 = f^{(o)}(x)_{\mu}\ f^{(o)}(x)^{\mu} \\ \dot{g}^{(kk)} = -1 = f^{(k)}(x)_{\mu}\ f^{(k)}(x)^{\mu} \ , \quad \text{se} \quad k \neq 0 \end{array}\right\} (10.I.VII)$$

Então, o quadrivetor da tetrada em P cujas componentes μ são $f^{(o)}(x)_{\mu}$ é um vetor do gênero tempo e os demais três vetores de componentes $f^{(k)}(x)_{\mu}$ são do gênero espaço. Todos esses vetores estão normalizados.

Existirá o inverso do quaternion $\sigma^{\mu}(x)$ desde que $g^{\mu\mu}(x) \neq 0$, pois

$$(\sigma^{\mu}(x))^{-1} = \frac{\overline{\sigma^{\mu}(x)}}{\sigma^{\mu}(x)\overline{\sigma^{\mu}(x)}} = \frac{\overline{\sigma^{\mu}(x)}}{g^{\mu\mu}(x)} \qquad (11.\text{I.VII})$$

No caso da relatividade restrita, e em coordenadas cartesianas, ortogonais, $g^{\mu\nu}(x) = \dot{g}^{(\mu\nu)}$. Neste caso, podemos fazer as $\sigma^{\mu}(x)$ coincidentes com as $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$, o que corresponde a fazer:

$$h^{\mu}(x)_{(\alpha)} = 0 \text{ se } \mu \neq \alpha \text{ e } 1 \text{ se } \mu = \alpha \text{ .}$$

A conexão entre as métricas no espaço de universo, (espaço-tempo), e no espaço quaterniônico se dá pela relação:

$$g^{\mu\nu}(x) = \sigma^{\mu}(x) | \sigma^{\nu}(x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \, h^{\nu}(x)_{(\beta)} \, \dot{\sigma}^{(\alpha)}(x) | \dot{\sigma}^{(\beta)}(x) =$$

$$= h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \, h^{\nu}(x)_{(\beta)} \, \dot{g}^{(\alpha\beta)} \qquad (12.\text{I.VII})$$

Essa fórmula correlaciona o tensor $g^{\mu\nu}(x)$ com o "tensor" $\dot{g}^{(\alpha\beta)}$.

Escrevemos "tensor" porque ainda não definimos produto tensorial de quaternions.

De:

$$\dot{\sigma}^{(\beta)} | \sigma^{\mu}(x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \, \dot{\sigma}^{(\beta)} | \dot{\sigma}^{(\alpha)} = h^{\mu}(x)^{(\beta)} \qquad (13.\text{I.VII})$$

Concluímos que $h^{\mu}(x)_{(\alpha)}$ é a projeção do quaternion $\sigma^{\mu}(x)$ sôbre o quaternion $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$.

Como $\dot{\sigma}^{(\beta)} = f^{(\beta)}(x)_{\mu} \, \sigma^{\mu}(x)$ virá:

$$\dot{\sigma}^{(\beta)} \mid \sigma^{\mu}(x) = f^{(\beta)}(x)_{\nu} \quad \sigma^{\nu}(x) \mid \sigma^{\mu}(x) = f^{(\beta)}(x)^{\mu}$$

Então, de (13.I.VII) concluímos que:

$$f^{(\beta)}(x)^{\mu} = h^{\mu}(x)^{(\beta)} . \tag{14.I.VII}$$

Se tomarmos em um ponto P(x) a expressão corresponden-te à (8.II), obteremos:

$$- 2\bar{A}(x) = \overline{\sigma_{(\alpha)}} \; A(x) \, \dot{\sigma}^{(\alpha)} = f_{(\alpha)}(x)_{\mu} \; \overline{\sigma^{\mu}(x)} \; A \; f^{(\alpha)}(x)_{\nu} \quad \sigma^{\nu}(x) =$$

$$= f_{(\alpha)}(x)_{\mu} \quad f^{(\alpha)}(x)_{\nu} \quad \overline{\sigma^{\mu}(x)} \; A \; \sigma^{\nu} = g_{\mu\nu}(x) \; \overline{\sigma^{\mu}(x)} \; A(x) \quad \sigma^{\nu}(x) \quad ,$$

logo:

$$\overline{A(x)} = - \frac{1}{2} \; \overline{\sigma_{\nu}} \quad A(x) \;\; \sigma^{\nu}(x) \; . \tag{15.I.VII}$$

Esta fórmula é um modo de associar ao campo A(x) o seu campo adjunto.

Podemos referir os quaternions de Lorentz no ponto P(x) aos quaternions $\sigma^{\mu}(x)$ como se êstes constituíssem uma base quaterniônica local. De fato, um quaternion de Lorentz, A(x) se escreverá:

$$A(x) = A_{(\mu)}(x) \, \dot{\sigma}^{(\mu)} \tag{16.I.VII}$$

sendo

$$A_{(\mu)}(x') = \left(\frac{\partial \; x'}{\partial \; x^{\mu}} \right)_{P} \quad A'_{(\nu)}(x) \quad , \tag{17.I.VII}$$

a lei de transformação de quadrivetor em P(x) quando passamos das coordenadas x^{β} às x'^{β} .

Com a ajuda da (8.I.VII), teremos:

$$A(x) = A_{(\mu)}(x) \quad f^{(\mu)}(x)_{\nu} \, \sigma^{\nu}(x) = A_{\nu}(x) \quad \sigma^{\nu}(x) \quad , \tag{18.I.VII}$$

onde

$$A_{\nu}(x) = A_{(\mu)}(x) \quad f^{(\mu)}(x)_{\nu} \tag{19.I.VII}$$

Então, concluímos que as $\sigma^{\nu}(x)$ se comportam como uma base local e aparece bem nítido o papel das $f^{(\mu)}(x)_{\nu}$ na mudança de índices quaterniônicos para índices de universo.

Se projetarmos $A(x)$ sôbre $\sigma^{\nu}(x)$ obteremos:

$$A^{\nu}(x) = \sigma^{\nu}(x) | A(x) \qquad (20.I.VII)$$

Passaremos a chamar os $\sigma^{\mu}(x)$ da q-tetrada em $P(x)$.

De (4'.I.VII) e de (8.I.VII) vem:

$$\sigma^{\mu}(x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{(\alpha)} = h^{\mu}(x)_{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x)^{\nu} \sigma_{\nu}(x) \quad .$$

Mas, por (14.I.VII), $f^{(\alpha)}(x)^{\nu} = h^{\nu}(x)^{(\alpha)}$,

logo:

$$\sigma^{\mu}(x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \; h^{\nu}(x)^{(\alpha)} \; \sigma_{\nu}(x)$$

De (12.I.VII), $h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \; h^{\nu}(x)^{(\alpha)} = g^{\mu\nu}(x)$, vem:

$$\sigma^{\mu}(x) = g^{\mu\nu}(x) \; \sigma_{\nu}(x) \qquad (21.I.VII)$$

As fórmulas (4'.I.VII) e (8.I.VII) estabelecem a relação entre a q-tetrada e a base quaterniônica no ponto P. Em cada ponto do espaço curvo temos duas bases, uma independente do ponto, $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$, e outra dependente do ponto, a q-tetrada $\sigma^{\mu}(x)$. Um quaternion local pode ser referido a qualquer uma delas. O fato de que se duas q-tetradas geram o mesmo $g^{\mu\nu}(x)$ elas devem diferir por uma rotação de Lorentz não dependente de transformação $x^{\mu} \to x'^{\mu}$, nos leva a uma lei conectando duas q-tetradas no mesmo ponto:

$$\sigma'^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x) \; \sigma^{\nu}(x) \qquad (22.I.VII)$$

com $\Lambda^{\mu}(x)$ não dependendo da transformação $x^{\mu} \to x'^{\mu}$.

As q-tetradas $\sigma^{\mu}(x)$ têm caráter tensorial porque contêm o índice de quadrivetor, mas o fato de serem uma combinação linear das $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$ em cada ponto $P(x)$ e coeficientes reais $h^{\mu}(x)_{(\alpha)}$, lhes dá também caráter espinorial hermitiano

Se escrevermos a equação matricial (4.I.VII) como uma igualdade entre elementos de matriz correspondentes, obteremos:

$$\sigma^{\mu}(x)^{A\dot{B}} = h^{\mu}(x)_{(\alpha)} \quad \dot{\sigma}^{(\alpha)A\dot{B}} \quad . \tag{23.I.VII}$$

Nesta fórmula há três tipos de índices, o tensorial, o quaterniônico e o espinorial, por isto é de grande importância. Vemos que é exatamente do fato de que $\sigma^{\mu}(x)$ depende das $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$ que decorre o seu comportamento espinorial.

No caso dos quaternions de Lorentz, na relatividade restrita, tínhamos uma conexão entre os três tipos de índices, com a diferença de que não havia dependência de P(x) e o índice tensorial estava coincidente com o quaterniônico. De fato: $X = X_{(\mu)} \dot{\sigma}^{(\mu)}$, se escrito em têrmos dos elementos de matriz passa a ser:

$$X^{A\dot{B}} = X_{(\mu)} \quad \dot{\sigma}^{(\mu)A\dot{B}} \quad .$$

No espaço curvo o índice quaterniônico (μ) se separa nìtidamente do índice vetorial μ.

A partir da fórmula (8.I.VII), isto é:

$$\dot{\sigma}^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x)_{\mu} \, \sigma^{\mu}(x) \quad ,$$

teremos

$$\dot{\sigma}^{(\alpha)A\dot{B}} = f^{(\alpha)}(x)_{\mu} \quad \sigma^{\mu}(x)^{A\dot{B}} \tag{24.I.VII}$$

Sabemos da definição de produto escalar de dois quaternions que:

$$\dot{\sigma}^{(\alpha)} \mid \sigma^{\nu}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\dot{\sigma}^{(\alpha)} \, \overline{\sigma^{\nu}(x)} \right) = \frac{1}{2} \quad \dot{\sigma}^{(\alpha)A\dot{B}} \quad \dot{\sigma}^{\nu}(x)_{\dot{B}A}$$

logo:

$$f^{(\alpha)}(x)^{\nu} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\dot{\sigma}^{(\alpha)} \quad \overline{\sigma^{\nu}(x)} \right) \tag{25.I.VII}$$

Por contração com $\dot{g}_{(\alpha\beta)}$ e $g_{\mu\nu}(x)$ podemos baixar os índices quaterniônico e vetorial, respectivamente, na fórmula supra.

A fórmula (24.I.VII) mostra explìcitamente $\sigma^{\mu}(x)$ é um quaternion hermitiano que tem índices espinoriais do tipo $A\dot{B}$ e isto decorre, já sabíamos, da sua dependência das $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$.

A expressão (22.I.VII) decorre do caráter vetorial dos campos tetradas $h^{\mu}(x)_{(\alpha)}$. Uma rotação de Lorentz, $\Lambda(x)$, efetuada nos campos tetradas, independente de uma transformação de coordenadas, induz a lei:

$$h'^{\mu}(x)_{(\alpha)} = \Lambda^{\mu}(x)_{\nu} \; h^{\nu}(x)_{(\alpha)} \qquad (22'.\text{I.VII})$$

Em cada ponto $P(x)$ podemos construir o homomorfismo $Q(x) \to \Lambda(x)$ tal que um quaternion de Lorentz $A(x) = A_{\nu}(x)\,\sigma^{\nu}(x)$ se transforme como:

$$A'(x) = Q(x)\, A(x)\, Q^{\dagger}(x) \quad . \qquad (26.\text{I.VII})$$

Levando-se em conta que $A'_{\nu}(x) = \overset{-1}{\Lambda}{}^{\mu}(x)_{\nu}\, A_{\mu}(x)$, obteremos em (26.I.VII):

$$A_{\mu}(x) \quad \overset{-1}{\Lambda}{}^{\mu}(x)_{\nu} \; \sigma'^{\nu}(x) = Q(x)\, A_{\mu}(x)\, \sigma^{\mu}(x) \quad Q^{\dagger}(x)$$

logo:

$$\sigma'^{\nu}(x) = \Lambda^{\nu}(x)_{\mu}\, Q(x)\, \sigma^{\mu}(x) \quad Q^{\dagger}(x) \quad . \qquad (26.\text{I.VII})$$

Quando houver uma transformação de coordenadas $x'^{\mu} = x^{\mu}(x^{\nu})$ as q-tetradas se transformarão como:

$$\sigma'^{\mu}(x') = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)_{P} Q(x)\; \sigma^{\nu}(x) \quad Q^{\dagger}(x) \qquad (27.\text{I.VII})$$

Neste caso não se pode estabelecer um homomorfismo entre as transformações gerais de coordenadas $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ e as transformações unimodulares $Q(x)$. O grupo das transformações ge -

rais $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ admite sômente representações tensoriais,deste modo as transformações $Q(x)$ atuam independentemente das transformações $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$.

No restante a demonstração de (27.I.VII) se faz anâlogamente ao caso anterior. Como $A(x)$ é uma matriz hermitiana, construamos:

$$A'(x') = Q(x) \; A(x) \; Q^{\dagger}(x) \quad , \qquad (28.I.VII)$$

onde

$$\overline{Q(x)} \; . \; Q(x) = \dot{\sigma}^{(o)} \quad .$$

Mas:

$$A'(x') = A'_{\nu}(x) \; \sigma'^{\nu}(x') = \left(\frac{\partial \; x^{\mu}}{\partial \; x'^{\nu}}\right)_P A_{\mu}(x) \; \dot{\sigma}'^{\nu}(x') =$$

$$= Q(x) \quad A(x) \quad Q^{\dagger}(x) \quad ,$$

logo, pela arbitrariedade dos $A\ (x)$, decorrerá a (27.I.VII).

Se tomarmos adjunta da (27.I.VII), teremos:

$$\overline{\sigma'^{\mu}(x')} = \left(\frac{\partial \; x'^{\mu}}{\partial \; x^{\nu}}\right)_P \overline{Q^{\dagger}(x)} \; . \; \overline{\sigma^{\nu}(x)} \; . \; \overline{Q(x)} \qquad (29.I.VII)$$

(II.VII) Derivada Covariante das q-Tetradas

A derivada covariante de um vetor $A(x)$, de componentes $A^{\mu}(x)$ é, segundo o cálculo tensorial, o tensor cujas componentes são dadas pela expressão:

$$A^{\mu}(x)_{|\nu} = A^{\mu}(x)_{,\nu} + A^{\rho}(x) \begin{Bmatrix} \mu \\ \rho \;\; \nu \end{Bmatrix}_{(P)} \qquad (1.II.VII)$$

onde $A^{\mu}(x)_{,\nu} = \left(\dfrac{\partial \; A^{\mu}(x)}{\partial \; x^{\nu}}\right)_P$ e $\begin{Bmatrix} \mu \\ \rho \;\; \nu \end{Bmatrix}_{(P)}$ é o símbolo de Christoffel da 2^{a} espécie em P e as x^{ν} são coordenadas do ponto P.

A generalização para a derivada covariante de um tensor é conhecida e para o caso de um tensor de segunda ordem contravariante será:

$$A^{\mu\nu}(x)_{|\rho} = A^{\mu\nu}(x)_{,\rho} + A^{\lambda\nu}(x) \left\{ {\mu \atop \lambda\ \ \rho} \right\}_{(P)} + A^{\mu\lambda}(x) \left\{ {\nu \atop \lambda\ \ \rho} \right\}_{(P)} \tag{2.II.VII}$$

Sabemos também, do cálculo tensorial no espaço de Riemann, que um vetor é transportado paralelamente a si mesmo, entre dois pontos infinitamente próximos se vale a equação:

$$A^{\mu}(x)_{|\rho} = 0 \tag{3.II.VII}$$

Em particular, qualquer dos unitários $e_{\mu}(x)$ do sistema de coordenadas em $P(x)$ satisfaz à condição:

$$e_{\mu}(x)_{|\nu} \equiv 0 \tag{4.II.VII}$$

Os q-espinores de primeira ordem e de cada espécie constituem um espaço vetorial de dimensão 2 e, nesse sentido,os índices espinoriais serão índices vetoriais do espaço vetorial considerado. Dessa interpretação decorre que os q-espinores de 2^{a} ordem poderão ser formados por produtos tensoriais, (produtos diretos), de dois q-espinores de primeira ordem.

No espaço tempo riemanniano os q-espinores ali definidos contituem um campo espinorial. Nesse mesmo espaço definimos grandezas de universo, como os quaternions de Lorentz, (agora generalizados, no sentido de que são dependentes de P).

Sabemos que os quaternions que representam quadrivetores de universo têm estrutura de q-espinores de 2^{a} ordem, hermitianos. Veremos que poderemos expressar entes de universo, importantes, como o tensor curvatura de rotação, em função de produtos ordinários de quaternions. Para isto é necessária a extensão do conceito de derivação covariante e transporte paralelo aos q-espinores definidos no espaço tempo, de modo análogo ao do cálculo tensorial. Como há quatro tipos de índices espinoriais, vamos introdu -

zir quatro expressões que definem a derivada covariante de um q-espinor de 1ª ordem. Se o q-espinor é do tipo $(\psi\ (x)^{A})$, a sua derivada covariante será definida por:

$$\psi(x)_{|\nu} = \psi(x)_{,\nu} + \Gamma_{\nu}(x)\ \psi(x) \quad (5.II.VII)$$

Matricialmente essa expressão se escreverá:

$$(\psi(x)^{A})_{|\nu} = (\psi(x)^{A})_{,\nu} + (\Gamma_{\nu}(x)^{A}{}_{B})\ (\psi(x)^{B}) \quad ,(5'.II.VII)$$

onde $(\psi(x)^{A})_{,\nu} = \left(\dfrac{\partial\ \psi^{A}}{\partial X^{\nu}}\right)_{P}$ e onde $\Gamma_{\nu}\ (x)$ é um quaternion que chamaremos a q-afinidade espinorial no ponto $P(x)$.

Se na fórmula (5.II.VII) o índice espinorial A fôsse um índice tensorial μ , teríamos exatamente a fórmula (1.II.VII).

Veremos posteriormente que podemos expressar a $\Gamma_{\nu}\ (x)$ em função das q-tetradas $\sigma^{\mu}\ (x)$, de suas derivadas ordinárias e dos símbolos de Cristoffel de 2ª espécie.

Se o q-espinor é do tipo $(\psi(x)_{A})$, isto é, covariante, então sua derivada covariante será definida como:

$$\psi(x)_{|\nu} = \psi(x)_{,\nu} - \psi(x)\ \Gamma_{\nu}(x) \quad . \qquad (6.II.VII)$$

A expressão matricial dessa fórmula será:

$$(\psi(x)_{A})_{|\nu} = (\psi(x)_{A})_{,\nu} - (\psi(x)_{B})\ (\Gamma_{\nu}(x)^{B}{}_{A}) \quad (6'.II.VII)$$

Anàlogamente, se A fôsse índice tensorial essa fórmula daria a derivada covariante de um vetor covariante.

Doravante omitiremos, salvo menção contrária, a dependência explicita em x.

Observemos que a derivada covariante de um q-espinor passa a ter comportamento de quadrivetor covariante quanto ao índice tensorial ν .

As derivadas covariantes de espinores da forma $(\psi^{\dot{A}})$ e $(\psi_{\dot{A}})$ são obtidas tomando-se as complexas conjugadas das expressões (5.II.VII) e (6.II.VII), respectivamente, isto é:

$$\psi^*_{|\nu} = \psi^*_{,\nu} + \Gamma^*_\nu \psi^* \tag{7.II.VII}$$

e

$$\psi^*_{|\nu} = \psi^*_{,\nu} - \Gamma^\dagger_\nu \psi^* \tag{8.II.VII}$$

Devemos notar que:

$$\Gamma_\nu^*(x) = \begin{pmatrix} \Gamma^1_\nu{}_1 & \Gamma^1_\nu{}_2 \\ \Gamma^2_\nu{}_1 & \Gamma^2_\nu{}_2 \end{pmatrix}^*_P = \begin{pmatrix} \Gamma^{\dot{1}}_\nu{}_{\dot{1}} & \Gamma^{\dot{1}}_\nu{}_{\dot{2}} \\ \Gamma^{\dot{2}}_\nu{}_{\dot{1}} & \Gamma^{\dot{2}}_\nu{}_{\dot{2}} \end{pmatrix}_P \tag{9.II.VII}$$

Para os q-espinores de 2^a ordem introduziremos a derivação covariante por analogia formal com o caso tensorial. Para os q-espinores de ordem mais elevada é necessário o conceito de produto direto de quaternions, a fim de extender-se de modo coerente a noção de derivada covariante. Para um q-espinor do tipo $(\psi^{A\dot{B}})$ a derivada covariante terá por expressão:

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi + \psi \Gamma^\dagger_\nu \quad , \tag{10.II.VII}$$

cuja fôrma matricial é:

$$(\psi^{A\dot{B}})_{|\nu} = (\psi^{A\dot{B}})_{,\nu} + (\Gamma_\nu{}^A{}_L)\,(\psi^{L\dot{B}}) + (\psi^{A\dot{L}})\,(\Gamma_\nu{}^{T}{}_{\dot{L}}{}^{\dot{B}}) \quad , \tag{10'.II.VII}$$

sendo $\Gamma_\nu{}^\dagger = (\Gamma_\nu{}^*)^T$.

As derivadas covariantes dos demais tipos de q-espinores de 2^a ordem são obtidas a partir das correspondentes expressões do cálculo tensorial. Em particular, vamos apenas dar a derivada covariante do q-espinor $(\psi_{A\dot{B}})$:

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} - \psi\Gamma_\nu - \Gamma^\dagger_\nu \psi \tag{11.II.VII}$$

cuja expressão matricial é:

$$(\psi_{A\dot{B}})_{|\nu} = (\psi_{A\dot{B}})_{,\nu} - (\psi_{A\dot{L}})\,(\Gamma_{\nu}{}^{L}{}_{B}) - (\Gamma_{\nu A}{}^{\dot{L}})^{T}\,(\psi_{L\dot{B}}) \qquad (11'.II.VII)$$

A derivação covariante de um q-espinor introduz um índice tensorial, de modo que, o quaterniòn obtido pela derivação covariante de um q-espinor é um ente misto. Se o quisermos derivar novamente, covariantemente, estaremos estendendo a derivação covariante além dos q-espinores porque estaremos derivando não mais um q-espinor mas um ente misto, com índices espinoriais e tensoriais. Para estendermos a derivação covariante de qualquer ordem de um q-espinor, vamos definir a derivada covariante da derivada covariante de um q-espinor. Vamos defini-la para o caso (5.II.VII), e os demais casos serão obtidos fàcilmente a partir do exemplo dêsse caso. Escreveremos primeiramente na forma matricial para que fique mais clara a sua lei de formação:

$$\begin{aligned}(\psi^{A})_{|\nu\mu} &= ((\psi^{A})_{|\nu})_{|\mu} = ((\psi^{A})_{|\nu})_{,\mu} - \\ &- (\psi^{A})_{|\rho}\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\ \mu\end{Bmatrix} + (\psi^{B})_{|\nu}\,(\Gamma_{\mu}{}^{A}{}_{B})\end{aligned} \qquad (12'.II.VII)$$

onde $\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\ \mu\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\ \nu\end{Bmatrix}$ é o símbolo de Christoffel de 2^{a} espécie e por isso é uma função escalar.

Essa fórmula se escreve compactamente como:

$$\psi_{|\nu\mu} = \psi_{|\nu,\mu} - \psi_{|\rho}\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\ \mu\end{Bmatrix} + \Gamma_{\mu}\psi_{|\nu} \qquad (12.II.VII)$$

A derivação covariante sucessiva é agora de formação óbvia.

A tetrada $\sigma^{\mu}(x)$ é um quaternion que envolve um índice μ de quadrivetor, é hermitiano e sua forma matricial, sabemos, é $(\sigma^{\mu A\dot{B}})$, por isso um ente misto de tipo vetor, espinor de 2^{a} ordem.

Um campo de quaternions de Lorentz definido no espaço riemanniano associa um campo de quadrivetor de universo a um campo espinorial de 2ª ordem hermitiano.

Se $A(x) = A_\mu \sigma^\mu(x)$ é um campo de quaternions de Lorentz, o campo de quadrivetores será dado por:

$$A^\mu(x) = \sigma^\mu(x) \mid A(x)$$

e o campo de espinores será dado por:

$$A^{C\dot{D}}(x) = A_\mu(x)\, \sigma^\mu(x)^{C\dot{D}}$$

O que fizermos para quaternions de Lorentz e q-espinores no caso da relatividade restrita o fizemos no espaço riemanniano substituindo as $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$ pelas $\sigma^\mu(x)$. As q-tetradas $\sigma^\mu(x)$ fazem o importante papel de referencial local e têm também a propriedade de serem um quaternion hermitiano com um índice vetorial, logo têm a mesma estrutura que as derivadas covariantes de um q-espinor de tipo $(\psi^{A\dot{B}})$.

Então, como já definimos a derivada covariante da derivada covariante de um q-espinor, podemos definir a derivada covariante das σ^μ, que será:

$$\sigma^\mu{}_{|\nu} = \sigma^\mu{}_{,\nu} + \sigma^\zeta \left\{ {\mu \atop \zeta\ \nu} \right\} + \Gamma_\nu \sigma^\mu + \sigma^\mu \Gamma_\nu^\dagger \qquad (13.II.VII)$$

A representação matricial desse quaternion derivada covariante é:

$$(\sigma^{\mu A\dot{B}})_{|\nu} = (\sigma^{\mu A\dot{B}})_{,\nu} + (\sigma^{\zeta A\dot{B}}) \left\{ {\mu \atop \zeta\ \nu} \right\} +$$

$$+ (\Gamma_\nu{}^A{}_C)(\sigma^{\mu C\dot{B}}) + (\sigma^{\mu A\dot{D}})(\Gamma_{\nu\dot{D}}{}^{\dot{B}}) \qquad (14.II.VII)$$

A derivada covariante da tetrada $\sigma_\nu = g_{\mu\nu}\sigma^\mu$ é

$$\sigma_{\mu|\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - (\sigma_\zeta \left\{ {\zeta \atop \nu\ \mu} \right\} + \Gamma_\nu \sigma_\mu + \sigma_\mu \Gamma_\nu^\dagger) \qquad (15.II.VII)$$

Se fizermos a derivada covariante de $\overline{\sigma^\mu}$ teremos:

$$\overline{\sigma^{\mu}}_{|\nu} = \overline{\sigma^{\mu}}_{,\nu} + \overline{\sigma^{\tau}}\begin{Bmatrix} \mu \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} - \overline{\sigma^{\mu}}\Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}^{\dagger}\,\overline{\sigma^{\mu}} \qquad (16.II.VII)$$

cuja expressão matricial é:

$$(\sigma^{\mu\cdot}{}_{AB})_{|\nu} = (\sigma^{\mu\cdot}{}_{AB})_{,\nu} + (\sigma^{\tau\cdot}{}_{AB})\begin{Bmatrix} \mu \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} -$$

$$- (\sigma^{\mu\cdot}{}_{AD})\,(\Gamma_{\nu}{}^{D}{}_{B}) - (\Gamma_{\nu A}{}^{\dot{L}})^{T}\,(\sigma^{\mu\cdot}{}_{LB})$$

As q-tetradas $\sigma^{\mu}(x)$ se comportam como uma base em P, para referir todos quaternions ali definidos, elas fazem papel aná logo aos vetores $e_{\mu}(P)$, unitários, associados a um sistema de coordenadas em P. Dentro dessa analogia, vamos impor o anulamento da derivada covariante das $\sigma^{\mu}(x)$, isto é

$$\sigma^{\mu}(x)_{|\nu} = 0 \qquad 17.II.VII)$$

Essa fórmula é sugerida pela (4.II.VII).

Como $\sigma^{\mu}(x)|\sigma^{\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x)$; tomando-se a derivada covariante dêsse produto escalar, virá como decorrência da (17.II.VII):

$$0 = \sigma^{\mu}(x)_{|\rho}\,|\,\sigma^{\nu}(x) + \sigma^{\mu}(x)\,|\,\sigma^{\nu}(x)_{|\rho} = g^{\mu\nu}(x)_{|\rho}$$

logo

$$g^{\mu\nu}(x)_{|\rho} = 0 \qquad (18.II.VII)$$

Do anulamento da derivada covariante das $\sigma^{\mu}(x)$, podemos escrever a derivada covariante dos quaternions de Lorentz como:

$$A(x)_{|\rho} = A_{\mu}(x)_{|\rho}\,\sigma^{\mu}(x) \qquad (19.II.VII)$$

De $\sigma^{\mu}(x) = h^{\mu}(x)_{(\alpha)}\,\dot{\sigma}^{(\alpha)}$ é de (17.II. VII) decorre que :

$$h^{\mu}(x)_{(\alpha)|\nu} = 0 \qquad (20.II.VII)$$

Então:

$$A(x) = A_\mu(x)\sigma^\mu = A_\mu(x) \quad h^\mu(x)_{(\alpha)} \dot{\sigma}^{(\alpha)} = A_{(\alpha)}(x) \dot{\sigma}^{(\alpha)} \quad ,$$

logo:

$$A_{(\alpha)}(x)_{|\nu} = A_\mu(x)_{|\nu} \quad h^\mu(x)_{(\alpha)} = A_{(\alpha)}(x)_{|\nu} \qquad \text{(21.II.VII)}$$

Esta é a relação entre a derivada covariante das componentes quaterniônicas de um quaternion de Lorentz e a correspondente derivada covariante de suas componentes quando referido à q-tetrada local.

Do fato de $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$ ser um quaternion constante implica em que $\dot{\sigma}^{(\alpha)}{}_{|\rho} = 0$, mas

$$\dot{\sigma}^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x)_\mu \quad \dot{\sigma}^\mu(x) \quad ,$$

e como $\sigma^\mu(x)_{|\rho} = 0$, então

$$f^{(\alpha)}(x)_{\mu|\rho} = 0 \quad . \qquad \text{(22.II.VII)}$$

(III.VII) <u>As q-afinidades $\Gamma_\nu(x)$</u> .

Partindo-se da fórmula (5.II.VII) e tomando-se a sua adjunta, virá:

$$\overline{\psi_{|\nu}} = \overline{\psi_{,\nu}} + \bar{\psi}\,\bar{\Gamma}_\nu \qquad \text{(1.III.VII)}$$

Vamos demonstrar que $\overline{\psi_{|\nu}} = \bar{\psi}_{|\nu}$, isto é, que o adjunto da derivada covariante é igual à derivada covariante do adjunto.

Como podemos escrever qualquer quaternion como combinação linear das $\dot{\sigma}^{(\alpha)}$ e, consequentemente, como combinação linear das $\sigma^\mu(x)$, então podemos escrever o quaternion $\psi_{|\nu}$ como:

$$\psi_{|\nu} = (\psi_{|\nu})_{(\alpha)} \quad \dot{\sigma}^{(\alpha)} = (\psi_{|\nu})_\mu \, \sigma^\mu \quad .$$

Tomando-se o adjunto desta equação, obteremos:

$$\overline{\psi_{|\nu}} = (\psi_{|\nu})_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}} \quad .$$

Por outro lado, tomando-se a derivada covariante de:

$$\overline{\psi} = \psi_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}} \quad ,$$

virá:

$$\overline{\psi}_{|\nu} = (\psi_{(\alpha)})_{|\nu} \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}} = (\psi_{|\nu})_{(\alpha)} \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}}$$

Mas então;

$$\overline{\psi}_{|\nu} = \overline{\psi_{|\nu}} \quad , \qquad (2.III.VII)$$

como queríamos demonstrar.

A relação (2.III.VII) nos permite obter uma importante propriedade das Γ_ν. Sabemos que se ψ é um q-espinor do tipo (ψ^A), o seu adjunto $\overline{\psi}$ se transforma como (ψ_A).

A derivada covariante de um q-espinor do tipo (ψ^A) é dada pela (5.II.VII), isto é:

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi \ .$$

Se tomarmos a adjunta desta equação obteremos $\overline{\psi_{|\nu}} = \overline{\psi_{,\nu}} + \overline{\psi}\ \overline{\Gamma_\nu}$ mas levando em conta a (2.III.VII) temos.

$$\overline{\psi_{,\nu}} + \overline{\psi}\ \overline{\Gamma_\nu} = \overline{\psi}_{|\nu}$$

mas a $\overline{\psi}_{|\nu}$ é a derivada covariante de um q-espinor do tipo (ψ_A), logo é dada pela equação (6.II.VII), e então:

$$\overline{\psi_{,\nu}} + \overline{\psi}\ \overline{\Gamma_\nu} = (\psi_A)_{,\nu} - (\psi_A)\ \Gamma_\nu = \overline{\psi}_{,\nu} - \overline{\psi}\ \Gamma_\nu \quad .$$

Como a ψ é arbitrária, resulta que:

$$- \Gamma_\nu = \overline{\Gamma}_\nu \quad ,$$

ou

$$\Gamma_\nu + \overline{\Gamma}_\nu = 0 \qquad (3.\mathrm{III.VII})$$

Lembrando a (8.III), temos equivalentemente:

$$\mathrm{tr}\ (\Gamma_\nu) = 0 \qquad (4.\mathrm{III.VII})$$

isto é, as q.afinidades têm traço nulo.

Do anulamento do traço das Γ_ν e de sua representação quaterniônica: $\Gamma_\nu = (\Gamma_\nu)_{(\alpha)}\ \dot{\sigma}^{(\alpha)}$, temos:

$$(\Gamma_\nu)_{(o)} = 0 \qquad (5.\mathrm{III.VII})$$

É possível expressar as Γ_ν em função das σ^μ e de suas derivadas e isto é feito a partir da equação $\sigma^\mu{}_{|\rho} = 0$. De fato:

$$\sigma_\mu\ \sigma^\mu{}_{|\rho} = 0 = \overline{\sigma_\mu}\left[\sigma^\mu{}_{,\rho} + \sigma^\nu\ \left\{{}^{\ \mu}_{\nu\ \rho}\right\} + \right.$$

$$\left. + \Gamma_\rho\ \sigma^\mu + \sigma^\mu \Gamma_\rho{}^\dagger\right] \quad .$$

Mas:

$$\overline{\sigma_\mu}\ \sigma^\mu = h_{\mu(\alpha)}\ \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}} h^\mu{}_{\cdot(\beta)}\ \dot{\sigma}^{(\beta)} =$$

$$= \eta_{(\alpha\beta)}\ \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}}\ \dot{\sigma}^{(\beta)} = \overline{\dot{\sigma}^{(\alpha)}}\dot{\sigma}_{(\alpha)} = 4\dot{\sigma}_{(o)} \qquad (6.\mathrm{III.VII})$$

e

$$\overline{\sigma_\mu}\ \Gamma_\rho\ \dot{\sigma}^\mu\ \ h_{\mu(\beta)}\overline{\dot{\sigma}^{(\beta)}}\ \Gamma_\rho\ h^\mu{}_{(\lambda)}\dot{\sigma}^{(\lambda)} =$$

$$\eta_{(\beta\lambda)}\ \overline{\dot{\sigma}^{(\beta)}}\ \Gamma_\rho\ \ \dot{\sigma}^{(\lambda)} = \overline{\dot{\sigma}^{(\beta)}}\ \Gamma_\rho\ \dot{\sigma}_{(\beta)} \qquad (7.\mathrm{III.VII})$$

Se expressarmos Γ_ρ como $(\Gamma_\rho)_{(\delta)}\ \sigma^{(\delta)}$ e o levarmos à (7.III.VII), obteremos:

$$\overline{\sigma_\mu}\ \Gamma_\rho\ \sigma^\mu = 0 \qquad (8.III.VII)$$

O resultado (8.III.VII) é um caso particular de expressão:

$$\overline{\sigma_\mu(x)}\ A(x)\ \sigma^\mu(x) = 4A_{(o)}(x)\ \dot{\sigma}_{(o)} =$$

$$\left[2\ \mathrm{tr}\ A(x)\right]\ \dot{\sigma}_{(o)} \qquad (9.III.VII)$$

onde A(x) é um campo quaterniônico arbitrário.

Com os resultados (6.III.VII) e (8.III.VII), obteremos:

$$\overline{\sigma_\mu}\ \sigma^\mu{}_{|\rho} = 0 = \overline{\sigma_\mu}\ \left[\sigma^\mu{}_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ {\mu \atop \nu\ \rho} \right\}\right] + \left[4\ \Gamma_\rho{}^\dagger\right]$$

ou

$$\Gamma_\rho{}^\dagger = -\frac{\overline{\sigma_\mu}}{4}\left(\sigma^\mu{}_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ {\mu \atop \nu\ \rho} \right\}\right)_P$$

Tomando-se o hermitiano, teremos:

$$\Gamma_\rho = -\frac{1}{4}\left(\sigma^\mu{}_{,\rho} + \sigma^\nu \left\{ {\mu \atop \nu\ \rho} \right\}\right)_P \overline{\sigma_\mu} \qquad (10.III.VII)$$

já que $\overline{\sigma_\mu}$ $\sigma^\mu{}_{,\rho}$ e σ^ν são quaternions hermitianos.

A fórmula (10.III.VII) define a q-afinidade em função das σ^μ, suas derivadas parciais e dos símbolos de Christoffel de 2^a espécie. As Γ_ρ não são hermitianas.

A fórmula (5.II.VII) mostra que as Γ_ν se transformam como quadrivetores de universo quanto ao índice ν, entretanto Γ_ν é um quaternion de estrutura matemática mais complexa. Vejamos como se transforma por uma transformação em que estejam fixadas as x^μ.

De $$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi \qquad (5.II.VII)$$

e levando em conta que ψ é um q-espinor da forma (ψ^A) e,portanto, deve se transformar como $\psi'(x) = Q(x)\ \psi(x)$, quando há uma trans - formação de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu$ ou quando simplesmente haja uma transformação em P, as x^μ fixadas, que relaciona uma tetrada $\sigma^\mu(P)$ com outra $\sigma'^\mu(x) = \Lambda^\mu(x)_\nu\ \sigma^\nu(x)$, (neste último caso dizemos que temos uma transformação de spin pura).

A transformação de $(\psi^A)_{|\mu}$ induzida por uma transformação de coordenadas X^ν , decorre simultâneamente do seu caráter espinorial e do seu caráter tensorial, respectivamente contidos nos índices A e μ . Por isto, a sua lei de transformação é:

$$\psi'_{|\mu}(x') = \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu}\right)_P Q(x)\ \psi_{|\nu}(x) \qquad (11.III.VII)$$

onde Q(x) depende da transformação de coordenadas.

Uma transformação pura de spin será um caso particular, definida por:

$$\psi'(x)_{|\mu} = Q(x)\ \psi(x)_{|\mu} \quad , \qquad (12.III.VII)$$

ou

$$\psi'_{,\mu} + \Gamma'_\mu\ \psi' = Q\ \psi_{,\mu} + Q\ \Gamma_\mu \psi$$

mas $\psi' = Q\ \psi$, logo:

$$(Q\ \psi)_{,\mu} + \Gamma'_\mu\ Q\psi = Q\psi_{,\mu} + Q\Gamma_\mu \psi \quad ,$$

ou

$$Q_{,\mu}\ \psi + \Gamma'_\mu\ Q\psi = Q\Gamma_\mu \psi \quad .$$

Da arbitrariedade de ψ resulta que.

$$Q_{,\mu} + \Gamma'_\mu\ Q = Q\ \Gamma_\mu \quad .$$

Como:

$$Q(P)\ \bar{Q}(P) = \sigma_{(o)} \quad ,$$

virá:

$$\Gamma'_{\mu}\ (x) = (Q\ \Gamma_{\mu} - Q_{,\mu})_P\ \overline{Q(x)} \quad . \qquad (13.III.VII)$$

Esta é a lei de transformação das q-afinidades, quando temos uma transformação pura de spin. Para o caso mais geral de uma transformação de coordenadas, a lei de transformação deve levar em conta o caráter tensorial do índice μ , isto é:

$$\Gamma'_{\mu}\ (x') = \left(\frac{\partial\ X^{\nu}}{\partial\ X'^{\mu}}\right)_P\ (Q\Gamma_{\nu} - Q_{,\nu})_P\ \overline{Q(x)} \qquad (14.III.VII)$$

onde o ponto P vem indicado por suas coordenadas.

(IV.VII) A q-Curvatura $\mathbb{R}_{rs}$

Do cálculo tensorial sabemos que o tensor de Riemann - Christoffel é definido em função dos símbolos de Christoffel e de suas derivadas parciais, por meio da expressão:

$$R_{\mu\cdot\ rs}^{\ \cdot\lambda} = \partial_r \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \ s \end{Bmatrix} - \partial_s \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta \\ \mu\ \ s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \theta\ \ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \theta \\ \mu\ \ r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \theta\ \ s \end{Bmatrix}$$

(1.IV.VII)

onde $\partial_r \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \ s \end{Bmatrix}\ \dfrac{\partial\{\mu^{\lambda}s\}}{\partial X^r}$, as X^r constituem o sistema de coordenadas e $\{\mu^{\lambda}s\}$ é o símbolo de Christoffel de 2^a espécie.

No capítulo anterior vimos a correlação que existe entre as q-afinidades Γ_{μ} e os símbolos $\{\mu^{\lambda}s\}$ e essa correlação surgiu na definição da derivada covariante de um q-espinor. Dentro dessa analogia, vamos procurar o quaternion análogo ao tensor de Riemann-Christoffel. Para isto, lembremos que as derivadas covariantes não comutam e que a lei de comutação para a derivada covariante de um quadrivetor a^μ é:

$$a^\rho{}_{|\lambda\mu} - a^\rho{}_{|\mu\lambda} = a^\theta \, R_\theta{}^\rho{}_{\lambda\mu} \quad . \tag{2.IV.VII}$$

A fórmula (5.II.VII) nos dá a derivada covariante de um q-espinor do tipo (ψ^A). Se a derivarmos mais uma vez e trocarmos a ordem das derivadas obteremos dois quaternions, derivadas covariantes segundas de um q-espinor. Se os subtrairmos, obteremos uma certa função que envolve o próprio q-espinor, as q-afinidades e suas derivadas parciais. Essa expressão será indicada por:

$$(\psi_{|\nu})_{|\mu} - (\psi_{|\mu})_{|\nu} = \psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} = \mathbb{R}_{\nu\mu}\psi \tag{3.IV.VII}$$

A obtenção deste resultado é um pouco trabalhosa e se encontra no apêndice II.

Ao quaternion $\mathbb{R}_{\nu\mu}$ chamaremos q-curvatura.

A expressão matricial da (3.IV.VII) é:

$$(\psi^A)_{|\nu\mu} - (\psi^A)_{|\mu\nu} = (\mathbb{R}^A{}_B)_{\nu\mu} \; (\psi^B) \quad . \tag{3'.IV.VII}$$

Como se pode ver no apêndice II, a q-curvatura $\mathbb{R}_{\nu\mu}$ é dependente das q-afinidades e suas derivadas parciais e sua expressão é:

$$\mathbb{R}_{\nu\mu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \tag{4.IV.VII}$$

Comparando-se (4.IV.VII) e (3.IV.VII) com (1.IV.VII) e (2.IV.VII), respectivamente, veremos a analogia entre a q-curvatura $\mathbb{R}_{\nu\mu}$ e o tensor de Riemann-Christoffel.

Do fato de que $\Gamma_\mu + \overline{\Gamma_\mu} = 0$ resulta que:

$$\mathbb{R}_{\nu\mu} + \overline{\mathbb{R}_{\nu\mu}} = 0 \tag{5.IV.VII}$$

ou

$$\mathrm{tr}(\mathbb{R}_{\nu\mu}) = 0 \qquad (6.\mathrm{IV.VII})$$

A fórmula (4.IV.VII) mostra que $\mathbb{R}_{\nu\mu}$ é antissimétrica nos índices ν e μ .

Se tomarmos o adjunto da (3.IV.VII) e levarmos em conta a (5.IV.VII), teremos:

$$\overline{\psi_{|\nu\mu}} - \overline{\psi_{|\mu\nu}} = - \overline{\psi}\,\mathbb{R}_{\nu\mu}$$

mas $\overline{\psi_{|\nu\mu}} = \overline{\psi}_{|\nu\mu}$, logo:

$$\overline{\psi}_{|\nu\mu} - \overline{\psi}_{|\mu\nu} = - \overline{\psi}\,\mathbb{R}_{\nu\mu}$$

Levando em conta que o adjunto de um q-espinor do tipo (ψ^A) passa a ser do tipo (ψ_A), vem:

$$(\psi_B)_{|\nu\mu} - (\psi_B)_{|\mu\nu} = - (\psi_A)(\mathbb{R}^A{}_B)_{\nu\mu} \qquad (7.\mathrm{IV.VII})$$

Mas essa é, então, a lei de comutação na derivada covariante de um q-espinor covariante. Ela apresenta grande analogia com a correspondente expressão tensorial.

Como as q-tetradas têm derivada covariante nula, resulta:

$$\sigma^\mu{}_{|rs} - \sigma^\mu{}_{|sr} = 0 \qquad (8'.\mathrm{IV.VII})$$

efetuando-se os cálculos, que são algo longos e encontram-se no apêndice I, obteremos:

$$\sigma^\lambda R_\lambda{}^\mu{}_{rs} + \mathbb{R}_{rs}\,\sigma^\mu + \sigma^\mu\,\mathbb{R}^\dagger{}_{rs} = 0 \qquad (8.\mathrm{IV.VII})$$

A fórmula (8.IV.VII) estabelece uma importante correlação entre o tensor de Riemann $R_\lambda{}^\mu{}_{rs}$ e a q-curvatura e a correlação é feita pelas q-tetradas σ^μ .

Multiplicando-se à direita ambos membros de (8.IV.VII) por $\overline{\sigma}_\mu$ e somando-se nos μ , virá:

$$\sigma^{\lambda} R_{\lambda}{}^{\mu}{}_{rs}\, \overline{\sigma_{\mu}} + \mathbb{R}_{rs}\, \sigma^{\mu}\, \overline{\sigma_{\mu}} + \sigma^{\mu}\, \mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}\, \overline{\sigma_{\mu}} = 0 \quad .$$

Como $\sigma^{\mu}\,\overline{\sigma_{\mu}} = 4\dot{\sigma}^{o}$ e como $\sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}\,\overline{\sigma_{\mu}} = (2\ \mathrm{tr}\ \mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs})\dot{\sigma}^{o}$, e como de (6.IV.VII) conclue-se que tr $\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs} = 0$, obteremos:

$$\mathbb{R}_{rs} = -\frac{1}{4}\ \sigma^{\lambda} R_{\lambda}{}^{\mu}{}_{rs}\ \overline{\sigma_{\mu}} \quad . \qquad (9.\mathrm{IV.VII})$$

A q-curvatura é uma função do tensor de Riemann-Christoffel e das q-tetradas. A fórmula (9.IV.VII) mostra que $\mathbb{R}_{rs}$ não é hermitiano.

A inversão da fórmula (9.IV.VII) é obtida se projetarmos a expressão (8.IV.VII) sôbre σ^{θ}, isto é:

$$\sigma^{\theta} |\ (R_{\lambda}{}^{\mu}{}_{rs}\, \sigma^{\lambda} + \mathbb{R}_{rs}\, \sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\, \mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}) = 0$$

ou

$$-\dot{\sigma}^{(o)}\,(R^{\theta\mu}{}_{rs}) = \sigma^{\theta} |\ \left[\mathbb{R}_{rs}\, \sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\, \mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}\right] . \qquad (10.\mathrm{IV.VII})$$

O tensor de Riemann-Christoffel é definido quando conhecemos as q-tetradas e a q-curvatura ou, mais explìcitamente, quando conhecemos as q-tetradas σ^{μ}, as q-afinidades e suas derivadas parciais.

Se levarmos em conta a definição, (15.II), do produto escalar de dois quaternions, mais o fato de que $\overline{\sigma^{\theta}}\ (\mathbb{R}_{rs}\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs})$ é o adjunto do $(\mathbb{R}_{rs}\,\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs})\,\sigma^{\theta}$ e também que $A + \bar{A} = \mathrm{tr}\ A$, obteremos a partir de (10.IV.VII) a expressão:

$$\dot{\sigma}^{(o)}\,(R^{\theta\mu}{}_{rs}) = -\frac{1}{2}\left[\overline{\sigma^{\theta}}(\mathbb{R}_{rs}\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}) + \overline{(\mathbb{R}_{rs}\,\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs})\,\sigma^{\theta}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\left\{\overline{\sigma^{\theta}}\ (\mathbb{R}_{rs}\,\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{+}{}_{rs})\right\} \quad . \qquad (10'.\mathrm{IV.VII})$$

De $\mathbb{R}_{rs} + \overline{\mathbb{R}_{rs}} := 0$, vem:

$$\dot{\sigma}^{(o)}(R^{\theta\mu}{}_{rs}) = -\frac{1}{2}\Big[\overline{\sigma^{\theta}}\ \mathbb{R}_{rs}\,\sigma^{\mu} +$$

$$+\ \overline{\sigma^{\theta}}\ \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs} - \overline{\sigma^{\mu}}\,\mathbb{R}_{rs}\,\sigma^{\theta} - \mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}\,\overline{\sigma^{\mu}}\,\sigma^{\theta}\Big] \quad (10''.IV.VII)$$

É claro que a partir do tensor de Riemann podemos obter as suas formas contraidas. Assim, de (10.IV.VII) podemos obter:

$$\dot{\sigma}^{(o)}(R^{\theta\mu}{}_{\mu s}) = \dot{\sigma}^{(o)}\ R^{\theta}{}_{s} = -\sigma^{\theta}|(\mathbb{R}_{\mu s}\,\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{\mu s})$$

(11.IV.VII)

É possível escrever a fórmula (11.IV.VII) sob a forma de traço ou desdobrada em outras formas equivalentes, mas a forma supra é mais compacta. O tensor $R^{\theta}{}_{s}$ é também chamado tensor de Ricci.

Se contrairmos a (11.IV.VII) obteremos a curvatura escalar R, isto é:

$$\dot{\sigma}^{(o)}R^{\theta\mu}{}_{\mu\theta} = \dot{\sigma}^{(o)}R = -\sigma^{\theta}|(\mathbb{R}_{\mu\theta}\ \sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}{}_{\mu\theta}) \quad (12.IV.VII)$$

As fórmulas (10.IV.VII), (11.IV.VII) e (12.IV.VII) dão as expressões quaterniônicas dos tensores de Riemann, de Ricci e a curvatura escalar em função da q-curvatura e das σ^{μ} .

Para a descrição da curvatura do espaço de Riemann basta o conhecimento das σ^{μ}, $\overline{\sigma^{\mu}}$, dos $\mathbb{R}_{rs}$ e das $\mathbb{R}^{\dagger}{}_{rs}$.

A conexão entre a q-curvatura e o tensor de Riemann--Christoffel tem suas verdadeiras raízes na fórmula (10.III.VII) quando se conecta a q-afinidade com os símbolos de Christoffel de 2ª espécie.

Dados os σ^{μ}, e os símbolos $\{\nu{}^{\mu}{}_{\rho}\}$ construiremos as q-afinidades e a q-curvatura, entretanto do mesmo modo que os $g^{\mu\nu}$ não fixam univocamente os σ^{μ}, o tensor de Riemann-Christoffel não fixa univocamente o $\mathbb{R}_{\mu\nu}$.

(V.VII) As equações quaterniônicas da gravitação Einsteiniana.

O tensor de Ricci é exprimível em função das q-tetradas e da q-curvatura e isto está indicado em:

$$\dot{\sigma}_{(o)}\ R^{\theta}(x)_{s} = -\ \sigma^{\theta}(x)\ \Big|\ (\ \mathbb{R}(x)_{\mu s}\ \sigma^{\mu}\ (x) + \sigma^{\mu}\ (x)\ \ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s}) \qquad (11.IV.VII)$$

É fácil provar que se $\{\sigma_{\nu}(x)\}$ e $A(x)$ são, respectivamente, uma base e um quaternion da álgebra de Clifford-Pauli local $C_2(K.\ P(x))$ e se em $P(x)$ vale $A(x)\ \big|\ \sigma^{\theta}\ (x) = 0$ para $\theta = 0,1,2,3$, então decorrerá que $A(x) = 0$ em $P(x)$.

Deste lema, podemos concluir que em todo ponto $P(x)$, em que $R^{\theta}(x)_{s}$ se anular, então se anulará também, o quaternion $\mathbb{R}(x)_{\mu s}\,\sigma^{\mu}(x) + \sigma^{\mu}(x)\ \mathbb{R}(x)_{\mu s}$.

Consequentemente, se em uma certa região de V_4, tivermos a equação tensorial:

$$R^{\theta}(x)_{s} = 0 \qquad , \qquad (1.V.VII)$$

teremos a equação quaterniônica:

$$\mathbb{R}(x)_{\mu s}\ \ \sigma^{\mu}\ (x)\ +\ \sigma^{\mu}\ (x)\ \ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s} = 0 \qquad (2.V.VII)$$

e sua adjunta:

$$\overline{\sigma^{\mu}(x)}\ \ \mathbb{R}(x)_{\mu s} + \ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s}\ \overline{\sigma^{\mu}(x)} = 0 \qquad (2'.V.VII)$$

Recíprocamente, se vale (2.V.VII), então por (11.IV.VII) valerá (1.V.VII).

A teoria da gravitação de Einstein é uma teoria tensorial, onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ tem papel relevante.

A correlação entre a equação tensorial (1.V.VII) e a equação quaterniônica (2.V.VII) nos leva, naturalmente, a interpretar as q-tetradas $\sigma_{\nu}(x)$ além de componentes de bases locais, como potenciais quaterniônicos.

Se as q-tetradas e suas adjuntas são interpretadas como potenciais gravitacionais quaterniônicos, então as equações (2.V.VII) serão interpretadas como equações quaterniônicas da gravitação em espaço vazio.

No caso mais geral, as equações da teoria tensorial de Einstein, (onde omitimos a constante cosmologica), serão:

$$R^{\theta}(x)_s - \frac{1}{2} R(x)\ g^{\theta}(x)_s = K\ T^{\theta}(x)_s \quad , \qquad (3.V.VII)$$

onde $R(x)$ é a curvatura escalar (12.IV.VII). K uma constante e $T^{\theta}(x)_s$ o tensor de energia-quantidade de movimento da matéria, (incluso o campo eletromagnético).

Tanto $R^{\theta}(x)_s\ \dot{\sigma}_{(o)}$ quanto $g^{\theta}(x)_s\ \dot{\sigma}_{(o)}$ são descritos na forma de produtos escalares de quaternions, onde um dos quaternions é $^{\theta}(x)$, de modo que podemos escrever a equação (3.V.VII) na forma quaterniônica:

$$\sigma^{\theta}(x)\ \left(-\mathbb{R}(x)_{\mu s}\ \sigma^{\mu}(x) = \sigma^{\mu}(x)\ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s} - \frac{R(x)}{2}\ \sigma_s(x)\right) =$$

$$= \dot{\sigma}_{(o)} \cdot K \cdot T^{\theta}(x)_s \quad . \qquad (4.V.VII)$$

De fato, $T(x)_s \in C_2(K, P(x))$ e se $\{\sigma_{\nu}(x)\}$ é uma base da $C_2(K, P(x))$, então:

$$\left.\begin{array}{l} T(x)_s = T^{\mu}(x)_s\ \sigma_{\mu}(x) \quad , \\ T^{\nu}(x)_s\ \dot{\sigma}_{(o)} = \sigma^{\nu}(x)\ |\ T(x)_s \end{array}\right\} \quad , \quad \text{c.q.d.} \qquad (5.V.VII)$$

Além do mais, $T(x)_s$ é único, porque se

$\sigma^{\theta}(x)\ |\ T(x)_s = \sigma^{\theta}(x)\ |\ T'(x)_s$, então

$\sigma^{\theta}(x)\ |\ (T(x)_s - T'(x)_s = 0$, e pelo lema já visto teremos:

$$T(x)_s = T'(x)_s \quad , \quad \text{c.q.d.}$$

Então, podemos escrever:

$$\sigma^{\theta}(x) \mid (-\,\mathbb{R}(x)_{\mu s}\ \sigma^{\mu}(x) - \sigma^{\mu}(x)\ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s} - \frac{R(x)}{2}\ \sigma_{s}(x)) =$$

$$= K\ .\ \sigma^{\theta}(x) \mid T(x)_{s} \quad . \qquad (6.V.VII)$$

Pela independência linear dos elementos de base, $\sigma^{\theta}(x)$ em cada $P(x)$, concluímos que:

$$-\ \mathbb{R}(x)_{\mu s}\ \sigma^{\mu}(x) - \sigma^{\mu}(x)\ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s} - \frac{R(x)}{2}\ \sigma_{s}(x) = K\ .\ T(x)_{s} \qquad (7.V.VII)$$

A adjunta será, por (5.IV.VII):

$$\overline{\sigma^{\mu}(x)}\ \ \mathbb{R}(x)_{\mu s} + \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s}\ \ \overline{\sigma^{\mu}(x)} - \frac{R(x)}{2}\ \ \overline{\sigma_{s}(x)} = K.\ \overline{T(x)}_{s} \qquad (7'.V.VII)$$

A equação (7.V.VII) e sua adjunta (7'.V.VII), constituirão o que passaremos a chamar o par de equações quaterniônicas da gravitação.

O campo quaterniônico, hermitiano, $T(x)_s$ está associado à distribuição de matéria e energia existente em V_4 e as componentes de $T(x)_s$, relativamente à base local $\left\{\sigma^{\theta}(x)\right\}$, serão as componentes $T^{\theta}(x)_s$ do tensor de quantidade de movimento-energia.

É simples varificar, que se multiplicamos (7.V.VII) à direita por $\overline{\sigma^{\theta}(x)}$ e (7'.V.VII) por $\sigma^{\theta}(x)$ à esquerda e somamos, obteremos a (3.V.VII), se levarmos em conta (11.IV.VII).

A forma usual das equações da gravitação, isto é, as equações tensoriais resultaram de um modo particular de combinar a equação (7.V.VII) e sua adjunta (7'.V.VII).

Devemos observar que os campos $\sigma^{\mu}(x)$ e $\overline{\sigma^{\mu}(x)}$, soluções das equações (7.V.VII) e (7'.V.VII), estão correlacionados ao potencial gravitacional tensorial, $g_{\mu\nu}(x)$, pois $\sigma^{\mu}(x) \mid \sigma^{\nu}(x)$ é a solução das correpondentes equações Einsteinianas.

M. Sachs[3] obteve equações análogas às equações (7.V.VII) e (7'.V.VII) por meio de métodos variacionais. No presen

III. PRODUTO DIRETO DE ÁLGEBRAS QUATERNIÔNICAS E GEOMETRIA ESPAÇO-TEMPO NÃO RIEMANNIANA

As propriedades geométricas de um espaço dependem da natureza dos objetos geométricos que constituem os referenciais localizados neste espaço.

Demonstraremos que em um espaço em que os referenciais forem construídos com quaternions, as afinidades geradas são não simétricas e consequentemente a geometria associada é não Riemanniana.

P.G. Bergmann[4] ao formular espinorialmente a sua teoria da gravitação, baseou-se, realmente, em uma álgebra de quaternions, de modo que a sua teoria não permite a construção de espinores de ordem superior à segunda.

Neste sentido a teoria de Bergmann não é equivalente à teoria espinorial.

No presente trabalho partimos das ideias básicas de Bergmann e construímos uma álgebra de quaternions e com auxílio dela estabelecemos uma geometria diferencial em espaço curvo com estrutura Riemanniana. Em particular obtivemos as q-afinidades, a derivada covariante e a q-curvatura.

Vamos agora ampliar o conceito de álgebra de quaternions introduzindo o conceito de produto direto de álgebras locais de quaternions. Deste modo poderemos construir a noção de quaternion-tensor, introduzir a derivada covariante de quaternions-tensores e abrir a possibilidade de introduzir afinidades diferentes em uma mesma derivação covariante.

A torção é construida em função das q-afinidades e das q-tetradas.

(I.VIII) Transformações admissíveis de coordenadas

Vamos construir uma geometria mais complexa que a Riemanniana, de modo que vamos introduzir novos conceitos e precisar melhor alguns conceitos anteriores.

Seja V_4 uma variedade diferenciável por partes[5], 4-dimensional, com coordenadas reais locais x^{ν} ; $\nu = 0, 1, 2, 3$; onde x^0 é temporal e os demais x^{ν} são coordenadas espaciais.

Uma transformação de coordenadas admissível será transformação de coordenadas, diferenciável, a jacobiano não nulo, com derivadas parciais pelo menos até a 3^a ordem.

Vamos indica-las por:

$$x'^{\nu} = x'^{\nu}\,(x^{\mu}) \qquad (1.I.VIII)$$

Como o jacobiano de (1.I.VIII) é suposto não nulo, vamos nos restringir à região de V_4 em que:

$$J\left(\frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, x'^{\mu}}\right) > 0 \qquad (2.I.VIII)$$

(II.VIII) Álgebra local de Clifford-Pauli

Uma álgebra $C_n(K)$ de Clifford, sôbre o corpo K dos complexos é uma álgebra a 2^n dimensões, gerada por n elementos e_j ; $j = 1, 2, \ldots, n$; ditos geradores da álgebra.

Os geradores de uma álgebra de Clifford devem satisfazer às relações de anticomutação:

$$(e_i\, e_j + e_j\, e_i) = 2\delta_{ij}\, e_o \;, \qquad (1.II.VIII)$$

onde e_o é o elemento unidade da álgebra e δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Se construirmos 2^n produtos linearmente independentes, de geradores, teremos uma base para a álgebra $C_n(K)$. Há uma infinidade de bases.

A álgebra de quaternions definida em II, também chamada álgebra de Clifford-Pauli (6), é isomorfa à álgebra $C_2(K)$.

Para a álgebra de quaternions $C_2(K)$ podemos escolher como elementos geradores $\dot{\sigma}_{(1)}$ e $\dot{\sigma}_{(2)}$. O elemento unidade será o $\dot{\sigma}_{(o)}$ e $\dot{\sigma}_{(3)} = - i\, \dot{\sigma}_{(1)}\, \dot{\sigma}_{(2)}$.

Êstes quatros elementos são linearmente independentes e constituem uma base para a álgebra $C_2(K)$.

Esta base será chamada base não local: $\left\{ \dot{\sigma}_{(\alpha)} \right\}$.

Na variedade V_4 podemos introduzir o conceito de campo de álgebras locais de Clifford-Pauli. Êste conceito será construido por meio da definição em cada ponto $P(x^\nu)$ de V_4, da álgebra de Clifford-Pauli local $C_2(K, P(x))$.

Com auxílio da base não local $\left\{ \dot{\sigma}_{(\alpha)} \right\}$ e das tetradas podemos definir em cada ponto $P(x) \in V_4$ bases locais $\sigma_\nu(x) = g_{\mu\nu}(x) \sigma^\mu(x)$.

Vamos impor que as tetradas satisfaçam, as mesmas condições de continuidade e derivabilidade que as transformações (1.I.VIII).

Estas propriedades são satisfeitas, também, pelas q-tetradas $\sigma_\nu(x)$, como decorrência da (4.I.VIII).

A independência linear dos $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$ e a independência linear dos vetores tetradas acarreta a independência linear dos $\sigma_\nu(x)$.

Definida a base $\left\{ \dot{\sigma}_{(\alpha)} \right\}$ e construidos os campos tetrada $\left\{ h^\mu(x)_\alpha \right\}$ e seus recíprocos, vamos definir a álgebra de Clifford-Pauli local $C_2(K, P(x))$ como a totalidade, em $P(x)$, dos elementos da forma:

$$C^\nu(x)\ \sigma_\nu(x) = C(x) \quad , \tag{2.II.VIII}$$

onde $C^\nu(x)$ é em geral uma função complexa.

É claro que $C(x)$ é um quaternion, dito local. Com auxílio de (4.I.VII) e das métricas $g_{\mu\nu}(x)$ e $g^{\mu\nu}(x)$, podemos escrever $C(x)$ como combinação da base não $\left\{ \dot{\sigma}_{(\alpha)} \right\}$. É essencialmente neste fato que se apoia a asserção de que $C_2(K, P(x))$ seja uma álgebra de quaternions, se bem que local.

Há elementos não locais e que podem ser descritos localmente, como é por exemplo o caso dos próprios $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$ que são exprimíveis em têrmos dos $\sigma_\nu(x)$.

(III.VIII) A afinidade assimétrica

O espaço quaterniônico que estamos considerando está referido em cada ponto $P(x)$ à base $\left\{ \sigma_\nu(x) \right\}$. As condições de continuidade e derivabilidade vão permitir relacionar bases próximas.

Para isto, consideremos em $P(x)$ a base $\sigma_\nu(x)$ e em $P(x + dx) = P(x) + \delta P(x)$ a base $\sigma_\nu(x + dx) = \sigma_\nu(x) + \delta\sigma_\nu(x)$.

A base $\sigma_\nu(x) + \delta\sigma_\nu(x)$ ficará determinada unìvocamente relativamente à base $\sigma_\nu(x)$ se conhecermos as componentes dos quaternions $\delta\sigma_\nu(x)$ em função dos $\sigma_\nu(x)$ locais.

Tal como na análise tensorial[7], escrevamos:

$$\delta\sigma_\nu(x) = \omega^\theta(x)_\nu \quad \sigma_\theta(x) =$$

$$= \mathrm{L}(x)^\theta{}_{\nu\rho} \quad \sigma_\theta(x) \; dx^\rho \qquad (1.\mathrm{III.VIII})$$

As 64 funções $\mathrm{L}(x)^\theta{}_{\nu\rho}$ são reais, pois $\delta\sigma_\nu(x)$ e $\sigma_\theta(x)$ são hermitianos.

Estas $\mathrm{L}(x)^\theta{}_{\nu\rho}$ constituem as afinidades do espaço quaterniônico que estamos considerando.

De (15.II.VII), temos:

$$0 = \sigma_\nu(x)_{|\rho} \; dx^\rho = \frac{\partial \sigma_\nu(x)}{\partial x^\rho} dx^\rho - \delta\sigma_\nu(x) \quad , (2.\mathrm{III.VIII})$$

onde

$$\delta\, \sigma_\nu(x) = dx^\rho \left(\sigma_\tau \left\{ {}_\nu{}^\tau{}_\rho \right\} + \sigma_\nu(x)\ \Gamma_\rho^{\dagger}(x) + \Gamma_\rho(x)\ \sigma_\nu(x) \right) \qquad (3.\text{III.VIII})$$

Mas $\sigma_\nu(x)\ \Gamma_\rho^{\dagger}(x) + \Gamma_\rho(x)\ \sigma_\nu(x)$ é um quaternion hermitiano, local, logo pode ser desenvolvido em têrmo da base local $\left\{ \sigma_\lambda(x) \right\}$:

$$\Delta\,(x)_{\nu\rho} = \sigma_\nu(x)\ \Gamma_\rho^{\dagger}(x) + \Gamma_\rho(x)\ \sigma_\nu(x) = \Delta^\beta(x)_{\nu\rho}\ \sigma_\beta(x) \quad , \qquad (4.\text{III.VIII})$$

onde os $\Delta^\beta(x)_{\nu\rho}$ são,salvo restrições, 64 funções reais.

Se compararmos a (1.III.VIII) com (3.III.VIII) e levarmos em conta a (4.III.VIII), teremos:

$$L(x)^\mu{}_{\nu\rho} = \left\{ {}_\nu{}^\mu{}_\rho \right\} + \Delta^{\mu}(x)_{\nu\rho} \qquad (5.\text{III.VIII})$$

A afinidade $L(x)^\mu{}_{\nu\rho}$ não é simétrica em geral, já que a $\Delta^\mu{}_{\nu\rho}$, salvo restrições, é assimétrica.

Um espaço dotado de tal afinidade não simétrica é não Riemanniano.

(IV.VIII) Derivada covariante em um espaço dotado com uma base $\sigma_\nu(x)$

A estrutura geométrica de uma variedade diferenciável se reflete no conjunto de seus referenciais, pois em cada ponto da variedade é possível caracterizar as afinidades e o tensor métrico por meio dos referenciais localizados nestes pontos.

A cada ponto $P(x) \in V_4$, associamos a álgebra de Clifford-Pauli local $C_2(K, P(x))$. Vamos também associar um espaço vetorial, real, constituido pela totalidade dos vetores contravariantes de componentes reais $A^\nu = A^\nu(x)$.

Êste espaço vetorial local será indicado por $T_4(R, P(x))$. Em cada $P(x) \in V_4$ podemos definir o espaço vetorial $T'_4(R, P(x))$, constituido pela totalidade dos covetores reais $A_\nu = A_\nu(x)$.

Se as $A^\nu(x)$ são as componentes de um elemento de $T_4(R, P(x))$ então podemos formar o quaternion hermitiano local $A(x) \in C_2(K, P(x))$:

$$A(x) = A^\nu(x)\ \sigma_\nu(x)$$

Se admitirmos condições suficientes de derivabilidade para os $A^\nu(x)$, vamos definir a derivada do quaternion vetor $A(x)$, como sendo:

$$A(x)_{|\rho} = (A^\nu(x)_{,\rho} + A^\lambda(x)\ \Gamma^\nu(x)_{\lambda\rho})\ \sigma_\nu(x) \qquad (1.IV.VIII)$$

A afinidade $\Gamma^\nu(x)_{\lambda\rho}$ não é simétrica em geral nos índices λ, ρ; de modo que há dois tipos de derivada covariante possíveis:

$$A^\nu(x)_{\underset{+}{|}\rho} = A^\nu(x)_{,\rho} + A^\lambda(x)\ \Gamma^\nu(x)_{\lambda\rho} \qquad (1'.IV.VIII)$$

e

$$A^\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = A^\nu(x)_{,\rho} + A^\lambda(x)\ \Gamma^\nu(x)_{\rho\lambda} \qquad (1''.IV.VIII).$$

Para nosso trabalho vamos escolher (1'.IV.VIII) como sendo a definição de derivada covariante das componentes contravariantes de um quaternion vetor.

Os acréscimos paralelos dos quaternions de base são:

$$\delta_+ \sigma_\nu(x) = + \Gamma^\mu(x)_{\nu\rho}\ \sigma_\mu(x)\ dx^\rho \qquad (2.IV.VIII)$$

e

$$\delta_+ \sigma^\nu(x) = - \Gamma^\nu(x)_{\mu\rho}\ \sigma^\mu(x)\ dx^\rho \qquad (3.IV.VIII)$$

Com estas definições temos:

$$A^\nu(x)_{\underset{+}{|}\rho} = A^\nu(x)_{,\rho} + A^\lambda(x)\ \Gamma^\nu(x)_{\lambda\rho} \qquad (4.IV.VIII)$$

$$A_\nu(x)_{\underset{+}{|}\rho} = A_\nu(x)_{,\rho} - \Gamma^\mu(x)_{\nu\rho}\ A_\mu(x) \qquad (5.IV.VIII)$$

Daqui por diante, salvo menção contrária, a definição de derivação covariante será do tipo (+).

(V.VIII) Produto direto de álgebras locais de Clifford-Pauli

Em cada ponto $P(x) \in V_4$ podemos construir o produto direto de álgebras de Clifford-Pauli locais $C_2(K, P(x))$.

Faremos a construção para o caso do produto direto de duas álgebras e a generalização para o caso de produto de mais de duas, se fará de modo natural, por indução.

Consideremos o caso $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$.

Neste caso estaremos multiplicando a álgebra $C_2(K, P(x))$ por si mesma.

Poderíamos considerar em $P(x)$, álgebras distintas e construir o produto direto delas. Isto seria uma generalização, não necessária para os nossos objetivos atuais, que permitiria a construção de derivadas covariantes com afinidades de espécies distintas.

Com auxílio das bases local $\left\{\sigma_\nu(x)\right\}$ e não $\left\{\dot{\sigma}_{(\alpha)}\right\}$ da álgebra $C_2(K, P(x))$, formemos o produto direto:

$$\sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x) = h^{(\alpha)}(x)_\mu \; h^{(\beta)}(x)_\nu \; \dot{\sigma}_{(\alpha)} \otimes \dot{\sigma}_{(\beta)} \, , \qquad (1.V.VIII)$$

com

$$\sigma_\mu(x) = h^{(\alpha)}(x)_\mu \; \dot{\sigma}_{(\alpha)} \quad .$$

Todo elemento de $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$ é da forma $f^{\mu\nu}(x) \; \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x)$, onde $f^{\mu\nu}(x)$ é uma função em geral complexa.

Consideremos um campo tensorial $T^{\mu\nu}(x) \in T_4(R, P(x)) \otimes T_4(R, P(x))$.

Formemos a combinação linear local:

$$T(x) = T^{\mu\nu}(x)\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x) \quad , \qquad (2.V.VIII)$$

O elemento $T(x)$ não é um quaternion, será chamado um quaternion tensor de 2^a ordem representado por suas componentes contravariantes.

No caso geral de um tensor quaternion de ordem n as componentes serão as componentes de um tensor de ordem n.

A métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e sua recíproca nos permite representar $T(x)$ em função de suas componentes covariantes ou mistas:

$$T(x) = T^{\mu\nu}(x)\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x) = T_\rho\ (x)^\nu\ \sigma^\rho(x) \otimes \sigma_\nu(x) =$$

$$= T_{\rho\delta}\ (x)\ \sigma^\rho(x) \otimes \sigma^\delta(x) \quad . \qquad (3.V.VIII)$$

Os elementos de matriz da representação matricial de $T(x)$ são as componentes da sua representação espinorial, enquanto que os coeficientes do desenvolvimento de $T(x)$ em função dos produtos diretos $\sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x)$ constituem as componentes de sua representação tensorial.

O inverso da fórmula (2.V.VIII) se faz com auxílio da fórmula:

$$g_{\mu\nu}(x)\ \sigma_{(o)} = \frac{1}{2}\left[\sigma_\mu(x)\ \overline{\sigma_\nu(x)} + \sigma_\nu(x)\ \overline{\sigma_\mu(x)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ (\ \sigma_\mu(x)\ \overline{\sigma_\nu(x)}) \qquad (4.V.VIII)$$

De fato, pelas propriedades de produto direto de matrizes[8], vem:

$$T(x)\ .\ \overline{\sigma_\rho(x)} \otimes \overline{\sigma_\theta(x)} = T^{\mu\nu}(x)\ \sigma_\mu\ (x) \otimes \sigma_\nu(x)\ .\ \overline{\sigma_\rho(x)} \otimes \overline{\sigma_\theta(x)} =$$

$$= T^{\mu\nu}(x)\left[\sigma_\mu(x)\ .\ \overline{\sigma_\rho(x)}\right] \otimes \left[\sigma_\nu(x)\ .\ \overline{\sigma_\theta(x)}\right] \quad . \qquad (5.V.VIII)$$

Tomando o traço de ambos membros e levando em conta a (4.V.VIII), vem:

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\left[T(x)\ \overline{\sigma_\rho(x)} \otimes \overline{\sigma_\theta(x)}\right] = T^{\mu\nu}(x)\ g_{\mu\rho}(x)\ g_{\nu\theta}(x) = T_{\rho\theta}(x)$$

(6.V.VIII)

Êste processo de inversão se aplica de modo análogo, qualquer que seja o número de fatores no produto direto.

A componente genérica de representação espinorial de T(x) é:

$$T(x)^{A\dot{B}C\dot{D}} = T^{\mu\nu}(x)\,\sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}(x)\,\sigma_{\nu}{}^{C\dot{D}}(x) \quad , \qquad (7.V.VIII)$$

tal qual no cálculo espinoral usual[13].

(VI.VIII) Derivada covariante de tensores quaternions

Vamos introduzir o conceito de derivada covariante de um tensor-quaternion. Em particular abordaremos explìcitamente o caso de tensor-quaternion de 2^{a} ordem, mas a regra geral se obtem por indução.

Seja $T(x) \in C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$, dada por:

$$T(x) = T^{\mu\nu}(x)\;\sigma_{\mu}(x) \otimes \sigma_{\nu}(x) \quad , \qquad (1.VI.VIII)$$

onde

$$T^{\mu\nu}(x) \in T_4(R, P(x)) \otimes T_4(R, P(x))$$

Vamos definir a diferencial absoluta de T(x) por meio da expressão:

$$dx^{\rho}\; T(x)_{\underset{+}{|}\rho} = \frac{\partial\; T^{\mu\nu}(x)}{\partial\; x^{\rho}}\;\; \sigma_{\mu}(x) \otimes \sigma_{\nu}(x) \; +$$

$$+\; T^{\mu\nu}(x)\,\underset{+}{\delta}\,(\sigma_{\mu}(x) \otimes \sigma_{\nu}(x)) \quad , \qquad (2.VI.VIII)$$

onde:

$$\underset{+}{\delta}\,(\sigma_{\mu}(x) \otimes \sigma_{\nu}(x)) = (\underset{+}{\delta}\,\sigma_{\mu}(x)) \otimes \sigma_{\nu}(x) \; +$$

$$+\; \sigma_{\mu}(x) \otimes (\underset{+}{\delta}\,\sigma_{\nu}(x)) \qquad (3.VI.VIII)$$

Sabemos de (2.IV.VIII) que:

$$\underset{+}{\delta}\, \sigma_\mu(x) = \mathsf{L}^\theta(x)_{\mu\rho}\ \sigma_\theta(x)\ dx^\rho \quad , \qquad (4.VI.VIII)$$

Então virá:

$$T(x)\underset{+}{|}_\rho = T^{\mu\nu}(x)_{,\rho}\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x) +$$

$$+ T^{\mu\nu}(x)\ \mathsf{L}^\theta(x)_{\mu\rho}\ \sigma_\theta(x) \otimes \sigma_\nu(x) + T^{\mu\nu}(x)\ \mathsf{L}^\theta(x)_{\nu\rho}\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\theta(x) =$$

$$= T^{\mu\theta}(x)_{,\rho}\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\theta(x) + T^{\alpha\theta}(x)\ \mathsf{L}^\mu(x)_{\alpha\rho}\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\theta(x) +$$

$$+ T^{\mu\nu}(x)\ \mathsf{L}(x)^\theta{}_{\nu\rho}\ \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\theta(x) \quad ,$$

logo:

$$T(x)\underset{+}{|}_\rho = \left[T^{\mu\theta}(x)_{,\rho} + T^{\alpha\theta}(x)\ \mathsf{L}(x)^\mu{}_{\alpha\rho} + T^{\mu\nu}(x)\ \mathsf{L}(x)^\theta{}_{\nu\rho}\right] \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\theta(x) \qquad (5.VI.VIII)$$

Os coeficientes de (5.VI.VIII) coincidem com a definição de derivada covariante de um tensor de 2^a ordem duas vêzes contravariante onde a afinidade é $\mathsf{L}(x)^\mu{}_{\nu\rho}$.

O caso Riemanniano surge quando $\Gamma_\rho(x) \equiv 0$

A generalização para o caso de um tensor quaternion de tipo ou ordem arbitrários é agora facilmente construtível.

(VII.VIII) A torção

A afinidade $\mathsf{L}(x)^\mu{}_{\nu\rho}$ não é simétrica em geral. Podemos decompo-la em uma parte simétrica e em uma parte antissimétrica:

$$\mathsf{L}(x)^\mu{}_{\nu\rho} = \mathsf{L}(x)^\mu{}_{\underline{\nu\rho}} + \mathsf{L}(x)^\mu{}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \quad , \qquad (1.VII.VIII)$$

com

$$\mathsf{L}(x)^\mu{}_{\underline{\nu\rho}} = \mathsf{L}(x)^\mu{}_{\underline{\rho\nu}} = \left\{ {}_\nu{}^\mu{}_\rho \right\} + \Delta^\mu(x)_{\underline{\nu\rho}} \qquad (2.VII.VIII)$$

e

$$\mathsf{L}(x)^\mu{}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} = -\mathsf{L}(x)^\mu{}_{\underset{\vee}{\rho\nu}} = \Delta^\mu(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \qquad (3.VII.VIII)$$

Explicitando melhor:

$$\Delta^{\mu}(x)_{\underline{\nu\rho}} = \frac{1}{2}\Big[(\sigma_\nu(x)\Gamma_\rho{}^{\dagger}(x) + \Gamma_\rho(x)\sigma_\nu(x)) +$$

$$+ (\sigma_\rho(x)\ \Gamma_\nu{}^{\dagger}(x) + \Gamma_\nu(x)\ \sigma_\rho(x))\Big] \mid \sigma^{\mu}(x) \qquad (4.\mathrm{VII.VIII})$$

e

$$\Delta^{\mu}(x)_{\overset{\vee}{\nu\rho}} = \frac{1}{2}\Big[(\sigma_\nu(x)\ \ \Gamma_\rho{}^{\dagger}(x) + \Gamma_\rho(x)\ \ \sigma_\nu(x)) -$$

$$- (\sigma_\rho(x)\ \Gamma_\nu{}^{\dagger}(x) + \Gamma_\nu(x)\sigma_\rho(x))\Big] \mid \sigma^{\mu}(x) \qquad (5.\mathrm{VII.VIII})$$

Sabemos que a lei de transformação das afinidades, induzida pela lei (1.I.VIII), é diferente da lei de transformação dos tensores, isto é, não é uma lei linear homogênea, é apenas linear. A soma de duas afinidades não é uma afinidade, se bem que a soma de uma afinidade e um tensor, com a mesma estrutura de índices, é ainda uma afinidade.

Da lei de transformação de uma afinidade(9) decorre que a parte antissimétrica da afinidade se transforma como um tensor. Então $\Delta^{\mu}(x)_{\overset{\vee}{\nu\rho}}$, dado por (5.VII.VIII) se transforma como um tensor e este tensor será chamado tensor das torções ou simplesmente torção.

Notemos que a torção está associada à existencia da q-afinidade $\Gamma_\rho(x)$.

Então, um espaço dotado com uma estrutura de referenciais $\{\sigma_\nu(x)\}$ é em geral um espaço dotado de torção.

(VIII.VIII) Lei de transformação de quaternions tensores

Em (V.VIII) introduzimos o conceito de produto direto de álgebras locais de Clifford-Pauli. Todo elemento de um produto direto, por exemplo, de duas álgebras $C_2(K, P(x))$ é da forma genérica $f^{\mu\nu}(x)\, \sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x)$.

Os quaternions-tensores de segunda ordem constituem um sub espaço vetorial de $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$ e são caracterizados pelo fato de que as $f^{\mu\nu}(x)$ devam se transformar como componentes contravariantes $T^{\mu\nu}(x)$ de um tensor de 2ª ordem. Já assinalamos anteriormente, que podemos representar o mesmo quaternion-tensor por meio de suas componentes covariantes ou mistas bastando, para isto, mudar a representação da base local da álgebra com auxílio da métrica $g_{\mu\nu}(x)$.

Anàlogamente à (27.I.VII), definiremos a lei de transformação dos quaternions de base $\sigma_\nu(x)$, induzida pelas (1.I.VIII), como:

$$\sigma'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\, Q(x)\, \sigma_\nu(x)\, Q^\dagger(x) , \qquad (1.\text{VIII}.\text{VIII})$$

Então:

$$\sigma'_\mu(x') \otimes \sigma'_\nu(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\, Q(x)\, \sigma_\rho(x)\, Q^\dagger(x) \otimes$$

$$\otimes\, Q(x)\, \sigma_\tau(x)\, Q^\dagger(x) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\, Q(x) \otimes Q(x) \cdot \sigma_\rho(x) \otimes \sigma_\tau(x) \,.$$

$$\cdot\, Q^\dagger(x) \otimes Q^\dagger(x) \,. \qquad (2.\text{VIII}.\text{VIII})$$

A expressão (2.VIII.VIII) é a lei de transformação da base local $\{\sigma_\mu(x) \otimes \sigma_\nu(x)\}$ do produto de álgebras $C_2(K, P(x)) \otimes \otimes\, C_2(K, P(x))$.

A lei de transformação da base de um produto de n álgebras é construído, por indução, a partir da (2.VIII.VIII).

Conhecida a lei de transformação dos elementos de base de $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$, podemos obter a lei de transformação

82

de um quaternion-tensor, por exemplo, de 2^a ordem.

Se levarmos em conta que $T'^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} T^{\rho\sigma}(x)$ é a transformação induzida em $T^{\rho\sigma}$ pelas (1.I.VIII), virá:

$$T'(x') = T'^{\mu\nu}(x')\, \sigma'_{\mu}(x') \otimes \sigma'_{\nu}(x') =$$

$$= Q(x) \otimes Q(x) \,.\, T^{\rho\sigma}(x) \,.\, \sigma_{\rho}(x) \otimes \sigma_{\sigma}(x) \,.\, Q^{\dagger}(x) \otimes Q^{\dagger}(x) =$$

$$= Q(x) \otimes Q(x) \,.\, T(x) \,.\, Q^{\dagger}(x) \otimes Q^{\dagger}(x) \,. \qquad (3.VIII.VIII)$$

A lei de transformação de um quaternion-tensor de ordem n se obterá, por indução, a partir da (3.VIII.VIII).

O produto de quaternions-tensores não é em geral um quaternion tensor, mas o produto direto é.

(IX).VIII) Produto direto de quaternions espinores

Vamos definir quaternions-espinores de 1^a ordem, contravariante, a todo quaternion $\phi(x) \in C_2(K, P(x))$ que satisfaça às equações:

$$\left.\begin{aligned} \phi(x)\, E_+ &= \phi(x) \\ \phi'(x) &= Q(x)\,\phi(x) \end{aligned}\right\} \,, \qquad (1.IX.VIII)$$

onde $E_+ = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_{(o)} + \dot{\sigma}_{(3)})$.

Ao campo quaterniônico $Q(x)$ imporemos a condição de unimodularidade, isto é:

$$\overline{Q(x)}\, Q(x) = \dot{\sigma}_{(o)} \qquad (2.IX.VIII)$$

Os quaternions $Q(x)$ constituem um grupo, dito unimodular 2 x 2.

Sabe-se que as transformações de Lorentz próprias ortócronas admitem representações tensoriais e representações espino -

riais, mas o grupo das transformações gerais de coordenadas, (1.I.VIII) sômente admite representações tensoriais. Deste modo vamos admitir que o grupo das transformações unimodulares, Q(x), atue independentemente das transformações admissíveis de coordenadas.

Se tomarmos o complexo conjugado das equações (1.IX.VIII) obteremos:

$$\left.\begin{array}{l} \phi^{*}(x)\ E_{+} = \phi^{*}(x) \\ \phi^{*\prime} = Q^{*}(x)\ \phi^{*}(x) \end{array}\right\} \qquad (3.IX.VIII)$$

e

$$\overline{Q(x)}^{\,*}\ Q^{*}(x) = \dot{\sigma}_{(o)}$$

Estas equações definem localmente um espinor de 1ª ordem, contravariante com índices complexos (p).

Se tomarmos as adjuntas de (1.IX.VIII) obteremos os quaternions-espinores covariantes de 1ª ordem.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{E}_{+}\ \overline{\phi(x)} = \overline{\phi(x)} \\ \overline{\phi'(x)} = \overline{\phi(x)}\ \overline{Q(x)} \end{array}\right\} \qquad (4.IX.VIII)$$

$$\overline{Q(x)}\ Q(x) = \dot{\sigma}_{(o)}$$

Se tomarmos o complexo conjugado destas últimas, obteremos o quaternion-espinor de 1ª ordem, covariante, com índice complexo, (p) :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{E}_{+}\ \overline{\phi(x)}^{\,*} = \overline{\phi(x)}^{\,*} \\ \overline{\phi'(x)}^{\,*} = \overline{\phi(x)}^{\,*} . \overline{Q(x)}^{\,*} \end{array}\right\}, \qquad (5.IX.VIII)$$

$$\overline{Q(x)}^{\,*}\ Q^{*}(x) = \dot{\sigma}_{(o)}$$

O produto de dois quaternions espinores não é, em geral, um quaternion espinor.

Se construirmos a lei de transformação do produto direto de dois quaternions do tipo (1.IX.VIII), obteremos:

$$\phi'(x) \otimes \psi'(x) = Q(x)\,\phi(x) \otimes Q(x)\,\psi(x) =$$

$$= Q(x) \otimes Q(x) \,.\, \phi(x) \otimes \psi(x) \;; \qquad (6.\text{IX.VIII})$$

e

$$\phi(x)\,E_+ \otimes \psi(x)\,E_+ = \phi(x) \otimes \psi(x) \,, \quad \text{ou}$$

$$\phi(x) \otimes \psi(x) \,.\, E_+ \otimes E_+ = \phi(x) \otimes \psi(x) \,. \qquad (7.\text{IX.VIII})$$

Vamos, então, definir como quaternion espinor de 2ª ordem contravariante sem índice complexo a todo elemento de $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$, que satisfaça a:

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= Q(x) \otimes Q(x) \,.\, F(x) \\ F(x) \,.\, E_+ \otimes E_+ &= F(x) \end{aligned}\right\} \,, \qquad (8.\text{IX.VIII})$$

De $\overline{Q(x)} \,.\, Q(x) = \sigma_{(o)}$, decorre:

$$\overline{Q(x)} \otimes \overline{Q(x)} \,.\, Q(x) \otimes Q(x) = \sigma_{(o)} \otimes \sigma_{(o)} \qquad (9.\text{IX.VIII})$$

A lei de formação de um quaternion-espinor de uma dada ordem e um dado tipo será inferida, como no caso da (8.IX.VIII), pela lei de formação do produto direto de quaternions-espinores de 1ª ordem.

Em particular, um quaternion-espinor de 2ª ordem contravariante, com o primeiro índice complexo (p), e o segundo não complexo, será todo elemento de $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$ que respeite as propriedades:

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= Q^*(x) \otimes Q(x)\, F(x) \\ F(x) \,.\, E_+ \otimes E_+ &= F(x) \end{aligned}\right\} \,, \qquad (10.\text{IX.VIII})$$

Notemos que $\overline{Q^*(x)} \otimes Q(x) \cdot Q^*(x) \otimes Q(x) =$

$= \dot{\sigma}_{(o)} \otimes \dot{\sigma}_{(o)}$, e que:

$\overline{Q^*(x)} = \overline{Q(x)}^*$.

Um quaternion-espinor de 2^a ordem, duas vêzes covariante será todo elemento $F(x)$ de $C_2(K, P(x)) \otimes C_2(K, P(x))$ que se transformar como:

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= F(x) \cdot \overline{Q(x)} \otimes \overline{Q(x)} \\ F(x) \cdot E_+ \otimes E_+ &= F(x) \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-IX.VIII})$$

No caso de um quaternion-espinor, misto com o primeiro índice contravariante, temos:

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= Q(x) \otimes \overline{Q(x)}^{\,T} \cdot F(x) \\ F(x) \cdot E_+ \otimes \overline{E}_+^{\,T} &= F(x) \end{aligned}\right\} , \qquad (12.\text{IX.VIII})$$

onde $\overline{Q(x)}^{\,T} = \overline{Q^T(x)}$, e $Q^T(x)$ é o transposto do quaternion $Q(x)$.

É facil verificar-se que:

$\overline{Q(x)} \otimes Q^T(x) \quad Q(x) \otimes \overline{Q(x)}^{\,T} = \dot{\sigma}_{(o)} \otimes \dot{\sigma}_{(o)}$.

A partir destes exemplos, podemos construir um quaternion-espinor de ordem e espécie qualquer.

(X.VIII) A afinidade $\Gamma^\mu(x)_{\nu\rho}$ em função dos campos tetradas $h^{(\alpha)}(x)_\mu$

Vimos em (5.III.VIII) que podemos decompor a afinidade $\Gamma^\mu(x)_{\nu\rho}$ em $\left\{ {\mu \atop \nu\ \rho} \right\} + \Delta^\mu(x)_{\nu\rho}$.

Se levarmos em conta que:

$$\sigma(x)_\mu = h^{(\alpha)}(x)_\mu \, \dot{\sigma}_{(\alpha)} , \qquad (1.\text{X.VIII})$$

(onde os $h^{(\alpha)}(x)_\mu$ são os recíprocos dos $h^\mu(x)_{(\alpha)}$, então do anulamento da derivada covariante das q-tetradas $\sigma(x)_\mu$, resulta:

$$\sigma(x)_{\mu|\rho} = 0 = h^{(\alpha)}(x)_{\mu|\rho}\dot{\sigma}_{(\alpha)} \qquad (2.X.VIII)$$

Devemos lembrar que as derivadas covariantes são do tipo (+) devido à assimetria da $\llcorner^\mu(x)_{\nu\rho}$, isto é:

$$h^{(\alpha)}(x)_{\mu|\rho} = h^{(\alpha)}(x)_{\mu\underset{+}{|}\rho} =$$

$$= h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_\lambda \llcorner^\lambda(x)_{\mu\rho} = 0 \qquad (3.X.VIII)$$

Usando a decomposição (5.III.VIII) temos:

$$0 = h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_\lambda \left\{ {\lambda \atop \mu\ \rho} \right\} - h^{(\alpha)}(x)_\lambda \Delta^\lambda(x)_{\mu\rho} \qquad (4.X.VIII)$$

De (4.VII.VIII) e (5.VII.VIII), temos:

$$\Delta^\lambda(x)_{\mu\rho} = \Delta^\lambda(x)_{\underline{\mu\rho}} + \Delta^\lambda(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} \quad , \qquad (5.X.VIII)$$

logo

$$0 = h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_\lambda \left[\left\{ {\lambda \atop \mu\ \rho} \right\} + \Delta^\lambda(x)_{\underline{\mu\rho}} \right] -$$

$$- h^{(\alpha)}(x)_\lambda \Delta^\lambda(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} \quad , \qquad (6.X.VIII)$$

Decompondo $h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho}$ em uma parte simétrica e numa parte antissimétrica, obteremos:

$$\frac{1}{2}\left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} + h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu} \right] - h^{(\alpha)}(x)_\lambda \left\{ {\lambda \atop \mu\ \rho} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu} \right] =$$

$$= h^{(\alpha)}(x)_\lambda \Delta^\lambda(x)_{\underline{\mu\rho}} + h^{(\alpha)}(x)_\lambda \Delta^\lambda(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} \qquad (7.X.VIII)$$

Para obter a correspondente equação em têrmos das q-tetradas, basta multiplicar ambos membros da (7.X.VIII) por $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$ e somar sôbre (α).

Igualando as partes simétricas e antissimétricas, respectivamente, virá:

$$\frac{1}{2}\left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} + h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu}\right] - h^{(\alpha)}(x)_{\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\ \rho}\right\} =$$

$$= h^{(\alpha)}(x)_{\lambda}\ \Delta^{\lambda}(x)_{\underline{\mu\rho}}$$

$$\frac{1}{2}\left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu}\right] = h^{(\alpha)}(x)_{\lambda}\Delta^{\lambda}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} ,$$

ou

$$\Delta^{\theta}(x)_{\underline{\mu\rho}} = \frac{h_{(\alpha)}(x)^{\theta}}{2}\left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} + h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu}\right] - \left\{{\theta \atop \mu\ \rho}\right\}$$

(8.X.VIII)

e

$$\Delta^{\theta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = \frac{h_{(\alpha)}(x)^{\theta}}{2}\left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu}\right] \qquad (9.X.VIII)$$

As (8.X.VIII) são em número de 40, enquanto que as (9.X.VIII) são em número de 24.

Poderíamos obter os resultados (8.X.VIII) e (9.X.VIII) em função das q-tetradas se partíssemos da (7.X.VIII) multiplicada por $\dot{\sigma}_{(\alpha)}$, somando sôbre os (α) e posteriormente usando o produto escalar de quaternions, isto é:

$$\dot{\sigma}_{(o)}\Delta^{\theta}(x)_{\underline{\mu\rho}} = \frac{1}{2}\ \sigma(x)^{\theta} \mid \left[\sigma(x)_{\mu,\rho} + \sigma(x)_{\rho,\mu}\right] -$$

$$- \left\{{\theta \atop \mu\ \rho}\right\}\dot{\sigma}_{(o)} \qquad (.8'.X.VIII)$$

e

$$\dot{\sigma}_{(o)}\ \Delta^{\theta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = \frac{1}{2}\ \sigma(x)^{\theta} \mid \left[\sigma(x)_{\mu,\rho} - \sigma(x)_{\rho,\mu}\right] . \qquad (9'.X.VIII)$$

Por (4.VII.VIII) e (5.VII.VIII) vê-se que $\Delta^{\theta}(x)_{\underline{\mu\rho}}$ e $\Delta^{\theta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}}$ são reais.

Se as q-afinidades $\Gamma_{\rho}(x)$ forem nulas, então as (8.X.VIII) e (9.X.VIII) se anulam, mas a recíproca não é válida:

O anulamento $\Delta^{\theta}(x)_{\underline{\mu\rho}}$ impõe 40 relações funcionais entre os símbolos de Christoffel de 2ª espécie $\left\{ {\theta \atop \mu\ \rho} \right\}$, os campos tetradas e suas derivadas:

$$\left.\begin{aligned} \left\{ {\theta \atop \mu\ \rho} \right\} &= h_{(\alpha)}(x)^{\theta} \left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} + h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu} \right] , \\ \Delta^{\theta}(x)_{\underline{\mu\rho}} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.X.VIII)$$

Se levarmos em conta que $\det(h_{(\alpha)}(x)^{\theta}) \neq 0$, o anulamento de $\Delta^{\theta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}}$ impõe 24 relações:

$$\begin{aligned} \left[h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} - h^{(\alpha)}(x)_{\rho,\mu} \right] &= 0 \\ \Delta^{\theta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} &= 0 \end{aligned} \qquad (11.X.VIII)$$

Para que as relações (11.X.VIII) valham, não é necessário que a afinidade $L^{\theta}(x)_{\mu\rho}$ seja integrável.

Devemos observar, também, que por uma transformação de coordenadas admissível, (1.I.VIII), os campos tetradas se transformam como:

$$h'^{(\alpha)}(x')_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} h^{(\alpha)}(x)_{\nu} \qquad (12.X.VIII)$$

Com auxílio das fórmulas (1.VII.VIII), (8.X.VIII) e (9.X.VIII), obtem-se:

$$L^{\theta}(x)_{\mu\rho} = h_{(\alpha)}(x)^{\theta} \, . \, h^{(\alpha)}(x)_{\mu,\rho} \qquad (13.X.VIII)$$

A expressão (13.X.VIII) é geral, não exige a integrabilidade da afinidade ou a simetria nos índices inferiores.

Se levarmos em conta a relação (2.IV.VIII), podemos escrever a (13.X.VIII), como um produto escalar de quaternions, isto é:

$$\sigma^{\lambda}(x) \mid \delta_{+}\, \sigma_{\mu}(x) = \sigma^{\lambda}(x) \mid \mathsf{L}^{\theta}(x)_{\mu\rho}\, \sigma_{\theta}(x)\, dx^{\rho} \quad ,$$

logo:

$$\mathsf{L}^{\lambda}(x)_{\mu\rho} = \sigma^{\lambda}(x) \mid \frac{\delta_{+}\, \sigma_{\mu}(x)}{dx^{\rho}} \quad . \qquad (14.X.VIII)$$

Com o formalismo quaterniônico construido, podemos passar a algumas aplicações.

(I.IX) A quadri-velocidade e a quadri-aceleração em espaço tempo quaterniônico.

Daqui por diante vamos nos apoiar nos conceitos e relações introduzidos até o capítulo (X.VIII), de modo, que os usaremos sem maiores detalhes ou explicações.

Seja o quaternion hermitiano:

$$dX(x) = dx^{\nu}\, \sigma_{\nu}(x) \quad , \qquad (1.I.IX)$$

onde $dX \in C_2(K, P(x))$.

Com a base local $\{\sigma_{\nu}(x)\}$, podemos construir a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e com esta, formar a norma de quaternion $dX(x)$, isto é:

$$dX(x) \mid dX(x) = dx^{\mu}\, dx^{\nu}\, \sigma_{\mu}(x) \mid \sigma_{\nu}(x) =$$

$$= dx^{\mu}\, dx^{\nu}\, g_{\mu\nu}(x)\, \dot{\sigma}_{(o)} = dS^{2}\, \dot{\sigma}_{(o)} \qquad (2.I.IX)$$

Definamos a quadri-velocidade $U(x)$ como o quaternion $U(x) \in C_2(K, P(x))$, tal que:

$$U(x) = \frac{dX(x)}{dS} = \frac{dx^\nu}{dS} \sigma_\nu(x) = U^\nu(x)\ \sigma_\nu(x) \tag{3.I.IX}$$

O arco dS liga os pontos P(x) e P(x + dx) de V_4.

Seja $U(x + dx) - U(x) = d(U(x))$ (4.I.IX)

isto é:

$$d(U(x)) = d(U^\nu(x)\ \sigma_\nu(x)) =$$

$$= dU^\nu(x)\ \sigma_\nu(x) + U^\nu(x)\ \delta_+ \sigma_\nu(x) \tag{5.I.IX}$$

Mas $dU^\nu(x) = \dfrac{\partial\ U^\nu(x)}{\partial x^\rho} dx^\rho$ e levando em conta (2.IV.VIII)

obteremos:

$$d(U(x)) = dU^\lambda(x)\ \sigma_\lambda(x) + U^\nu(x)\ \llcorner^\lambda(x)_{\nu\rho}\ \sigma_\lambda(x)\ dx^\rho =$$

$$= \left[\frac{\partial\ U^\lambda(x)}{\partial x^\rho} + U^\nu(x)\ \llcorner^\lambda(x)_{\nu\rho}\right] \sigma_\lambda(x)\ dx^\rho\ . \tag{6.I.IX}$$

Definiremos a quadri-aceleração W(x) como o quaternion $W(x) \in C_2(K, P(x))$ tal que:

$$W(x) = \frac{dU(x)}{dS} = \left[\frac{dU^\lambda(x)}{dS} + U^\nu(x)\ \llcorner^\lambda(x)_{\nu\rho}\ U^\rho(x)\right] \sigma_\lambda(x) \tag{7.I.IX}$$

ou:

$$W(x) = W^\lambda(x)\ \sigma_\lambda(x) \tag{7'.I.IX}$$

onde:

$$W^\lambda(x) = \frac{dU^\lambda(x)}{dS} + U^\nu(x)\ \llcorner^\lambda(x)_{\nu\rho}\ U^\rho(x) =$$

$$= \frac{d^2x^\lambda}{dS^2} + \frac{dx^\nu}{dS}\ \llcorner^\lambda(x)_{\nu\rho}\ \frac{dx^\rho}{dS}\ . \tag{8.I.IX}$$

Como:

$$U(x) \mid U(x) = \frac{dx^\nu}{dS}\frac{dx^\mu}{dS}\ \sigma_\nu(x) \mid \sigma_\mu(x) =$$

$$= \frac{dx^\nu}{dS}\frac{dx^\mu}{dS}\ g_{\mu\nu}(x)\ \dot{\sigma}_{(o)} = \dot{\sigma}_{(o)}\ , \tag{9.I.IX}$$

conclue-se que:

$$W(x) \mid U(x) = 0 \tag{10.I.IX}$$

(II.IX) A equação da geodésica em espaço-tempo quaterniônico.

De (7.I.IX), a equação da quadri-aceleração nula é:

$$\frac{dU(x)}{dS} = \left[\frac{dU^{\lambda}(x)}{dS} + \Gamma^{\lambda}(x)_{\nu\rho}\, U^{\nu}(x)\, U^{\rho}(x) \right] \sigma_{\lambda}(x) = 0 \qquad (1.\text{II.IX})$$

Sòmente a parte simétrica da afinidade contribue para a equação (1.II.IX). Se levarmos em conta que a parte simétrica $\Gamma^{\lambda}(x)_{\underline{\nu\rho}}$ vale $\left\{ {\lambda \atop \nu\ \rho} \right\} + \Delta^{\lambda}(x)_{\underline{\nu\rho}}$, teremos:

$$\left[\frac{dU^{\lambda}(x)}{dS} + \left\{ {\lambda \atop \nu\ \rho} \right\} U^{\nu}(x)\, U^{\rho}(x) \right] \sigma_{\lambda}(x) =$$

$$= - \Delta^{\lambda}(x)_{\underline{\nu\rho}}\, U^{\nu}(x)\, U^{\rho}(x)\, \sigma_{\lambda}(x) \qquad (2.\text{II.IX})$$

onde $\Delta^{\lambda}(x)_{\nu\rho}$ está dada em (4.VII.VIII) em função das q-tetradas $\sigma_{\nu}(x)$ e das q-afinidades $\Gamma_{\rho}(x)$ e suas hermitianas associadas, ou em (8.X.VIII), como função dos campos tetradas $h_{(\alpha)}(x)^{\theta}$ e as derivadas de seus recíprocos.

Se os campos $\sigma_{\nu}(x)$ respeitam as condições subsidiarias:

$$\Delta^{\lambda}(x)_{\underline{\nu\rho}} = 0 \quad , \qquad (3.\text{II.IX})$$

então, a equação (2.II.IX) coincidirá com a equação da geodésica de uma variedade pseudo-Riemanniana 4-dimensional dotada com a assinatura (+ - - -).

A independência linear dos $\sigma_{\lambda}(x)$ permite que se escreva:

$$\frac{dU^{\lambda}(x)}{dS} + \left\{ {\lambda \atop \nu\ \rho} \right\} U^{\nu}(x)\, U^{\rho}(x) = - \Delta^{\lambda}(x)_{\underline{\nu\rho}}\, U^{\nu}(x)\, U^{\rho}(x) \qquad (2'.\text{II.IX})$$

Se temos uma geometria 4-dimensional quaterniônica, dotada de uma métrica:

$$\dot{\sigma}_{(o)}\, g_{\mu\nu}(x) = \dot{\sigma}_{\mu}(x) \mid \sigma_{\nu}(x)$$

e de uma afinidade:

$$\llcorner^{\lambda}(x)_{\mu\rho} = \sigma^{\lambda}(x) \mid \frac{\delta_{+}\ \sigma_{\mu}(x)}{dx^{\rho}} \quad ,$$

a toda curva $x^{\nu}(S)$, solução da equação (1.II.IX), chamaremos de geodésica quaterniônica.

Por (2.II.IX), vê-se que quando $\Delta^{\lambda}(x)_{\mu\rho} = 0$, a geodésica quaterniônica coincidirá com a geodésica métrica de uma variedade de pseudo-Riemanniana, pois a parte simétrica da $\llcorner^{\lambda}(x)_{\mu\rho}$ coincidirá com o símbolo de Christoffel de 2^{a} espécie formado com os $g_{\mu\nu}(x)$, isto é, coincidirá com o $\left\{ {\lambda \atop \mu\ \rho} \right\}$.

X. A q-afinidade $\Gamma_{\rho}(x)$ em função da torção.

No capítulo V.VII vimos que as equações quaterniônicas da gravitação, (7.V.VII) e (7'.V.VII), foram suplementadas pela condição subsidiária $\sigma_{\nu}(x)|_{\underset{+}{\rho}} = 0$, mas, se levarmos em conta que:

$$\sigma_{\mu}(x) \mid \sigma_{\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x)\ \dot{\sigma}_{(o)} \quad ,$$

então, de $\sigma_{\nu}(x)|_{\underset{+}{\rho}} = 0$, decorrerá que:

$$g_{\mu\nu}(x)|_{\underset{+}{\rho}} = 0 \quad . \tag{1.X}$$

Logo:

$$g^{\lambda\nu}(x)|_{\underset{+}{\rho}} = 0 \quad , \tag{1'.X}$$

porque:

$$g^{\lambda\nu}(x)\ g_{\nu\mu}(x) = \delta^{\lambda}{}_{\mu} \quad .$$

É facil concluirmos, então, que vale:

$$\sigma^{\beta}(x)|_{\underset{+}{\rho}} = 0 \quad , \tag{2.X}$$

pois:

$$(g^{\beta\nu}(x)\,\sigma_\nu(x))_{\underset{+}{|}\rho} = \sigma^\beta(x)_{\underset{+}{|}\rho} \quad .$$

A condição (2.X) pode ser escrita de modo explícito com auxílio da (13.II.VII):

$$\sigma^\beta(x)_{\underset{+}{|}\rho} = 0 = \sigma^\beta(x)_{,\rho} + \sigma^\lambda(x)\;\llcorner^\beta(x)_{\lambda\rho} \quad , \tag{3.X}$$

onde

$$\llcorner^\beta(x)_{\lambda\rho} = \left\{{}_\lambda{}^\beta{}_\rho\right\} + \Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}} + \Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}} \quad .$$

Então:

$$\sigma^\beta(x)_{,\rho} + \sigma^\lambda(x)\left\{{}_\lambda{}^\beta{}_\rho\right\} = -\;\sigma^\lambda(\Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}} + \Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}) . \tag{4.X}$$

Utilizando a relação (10.III.VII), teremos:

$$\Gamma_\rho(x) = \frac{1}{4}\left[\Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}} + \Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}\right]\sigma^\lambda(x)\;\overline{\sigma_\beta(x)} \quad . \tag{5.X}$$

Esta relação expressa a q-afinidade em função da tor - ção $\Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}$ e do tensor simétrico $\Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}}$.

Nos casos em que impuzermos a restrição $\Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}} = 0$, valerá a (10.X.VIII) e obteremos:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\rho(x) &= \frac{1}{4}\;\Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}\cdot\sigma^\lambda(x)\;\overline{\sigma_\beta(x)} \\ \Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.X}$$

Neste caso, a q-afinidade dependerá sòmente da torção, das q-tetradas e suas adjuntas.

Se estivermos em uma variedade V_4 em que a torção for nula e valer a (6.X), então:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_\rho(x) = 0 \\ &0 = \Delta^\beta(x)_{\lambda\rho} = \Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}} + \Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.X)$$

Neste particular caso (7.X), a variedade V_4 será Riemanniana, a afinidade será a própria de Christoffel, $\left\{ {\beta \atop \lambda\ \rho} \right\}$.

De (4.X), obteremos então:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^\beta(x)_{,\rho} + \sigma^\lambda(x) \left\{ {\beta \atop \lambda\ \rho} \right\} = 0 \\ &\Gamma_\rho(x) = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (8.X)$$

Escrevendo os $\sigma^\beta(x)$ em função dos $\overset{+}{\sigma}{}^{(\alpha)}$, e levando em conta a independência linear destes, virá:

$$h^\beta(x)_{(\alpha),\rho} + h^\lambda(x)_{(\alpha)} \left\{ {\beta \atop \lambda\ \rho} \right\} = 0 \qquad ,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\left\{ {\beta \atop \nu\ \rho} \right\} = - h_\nu(x)^{(\alpha)} \cdot h^\beta(x)_{(\alpha),\rho} \\ &h^\lambda(x)_{(\alpha)} \cdot h_\nu(x)^{(\alpha)} = \delta^\lambda{}_\nu \end{aligned}\right. \qquad (9.X)$$

A condição (8.X) equivale a $\underset{+}{\delta}\,\sigma_\mu(x) \equiv \delta\,\sigma_\mu(x) = \sigma_\lambda(x) \left\{ {\lambda \atop \mu\ \rho} \right\} \delta x^\rho$.

Podemos interpretar este caso especial, dizendo que no transporte paralelo dos $\sigma_\mu(x)$ a sua estrutura interna manteve-se rígida, não dependente do δx^ρ e para isto é necessário e suficiente o anulamento das q-afinidades $\Gamma_\rho(x)$ em toda variedade V_4 .

Uma variedade será a torção uniforme se a derivada covariante da torção se anular em toda a variedade, isto é:

$$\Delta^\beta(x)_{\underset{\vee}{\lambda\rho}|\underset{+}{\sigma}} = 0 \qquad (10.X)$$

Com auxílio das (6.X), concluímos que uma variedade a torção uniforme e onde o tensor simétrico $\Delta^\beta(x)_{\underline{\lambda\rho}}$ for identico a zero, será uma variedade a q-afinidade uniforme, isto é:

$$\dot{\Gamma}_{\rho}(x)_{\underset{+}{|\tau}} = 0 \qquad (11.X)$$

XI. VARIEDADE ESPAÇO-TEMPO QUATERNIÔNICA, DOTADA DE AFINIDADE INTEGRÁVEL E TORÇÃO UNIFORME

No capítulo III e VIII vimos que a variedade V_4 pode ser referida, em cada ponto $P(x)$, a uma base $\{\sigma_\nu(x)\}$ da álgebra local $C_2(K.\ P(x))$. Cada base se relaciona com a base vizinha por meio de condições de continuidade e derivabilidade e destas surge a afinidade $\lfloor^{\mu}(x)_{\nu\rho}$, explicitamente indicada em (5.III.VIII).

Com auxílio de (1.VII.VIII), (2.VII.VIII) e (3.VII.VIII) vem:

$$\lfloor^{\mu}(x)_{\nu\rho} = \left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\} + \Delta^{\mu}(x)_{\underline{\nu\rho}} + \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \quad . \qquad (1.XI)$$

Sabemos[9] que a condição necessária e suficiente para que uma afinidade seja integrável é que o correspondente tensor de Riemann seja nulo em todo $P(x) \in V_4$ onde é definido. A condição de afinidade integrável corresponde a uma condição de paralelismo à distancia. Se a $\lfloor^{\mu}(x)_{\nu\rho}$ é suposta integrável, o tensor de Riemann associado, $\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$, é nulo em toda a variedade, isto é:

$$\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = \lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta,\gamma} - \lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\gamma,\beta} + \lfloor^{\sigma}(x)_{\alpha\beta} \lfloor^{\mu}(x)_{\sigma\gamma} -$$

$$- \lfloor^{\sigma}(x)_{\alpha\gamma} \lfloor^{\mu}(x)_{\sigma\beta} = 0 \qquad (2.XI)$$

A integrabilidade de afinidade não é suficiente para que a variedade seja achatada, (flat space-time), a menos que a torção $\Delta^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$ seja nula.

Na teoria Riemanniana da gravitação, a conexão é simétrica e a torção se anula. No caso em estudo a torção não é nula mas podemos impor a condição de torção uniforme. Deste modo, a afinidade que estamos considerando está sujeita a dois tipos de restrições:

$$\left.\begin{aligned} \llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}\underset{+}{|}\varsigma} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \tag{3.XI}$$

onde

$$\llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}\underset{+}{|}\varsigma} = \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho},\varsigma} - \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\lambda}} \llcorner^{\lambda}(x)_{\rho\varsigma} -$$

$$- \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\lambda'}} \llcorner^{\lambda'}(x)_{\rho\varsigma} + \llcorner^{\lambda''}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \llcorner^{\mu}(x)_{\lambda''\varsigma} \; . \tag{4.XI}$$

A derivação covariante do tipo (-) defere daquela do tipo (+) e facilmente se demonstra, levando em conta a independência linear dos $\sigma_{\nu}(x)$, que se tivermos $\sigma_{\nu}(x)_{\underset{+}{|}\rho} = \sigma_{\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$, então a afinidade será simétrica, isto é, $\llcorner^{\mu}(x)_{\nu\rho} = \llcorner^{\mu}(x)_{\rho\nu}$.

Deste resultado decorre que a existência da uma torção está ligada à não coincidência dos dois tipos de derivação covariante. No apêndice IV constroi-se o $\sigma_{\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$ e o $g_{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$ em função da torção.

Imponhamos a condição:

$$\Delta^{\mu}(x)_{\underline{\nu\rho}} = 0 \tag{5.XI}$$

Com esta hipótese a parte simétrica da afinidade $\llcorner^{\mu}(x)_{\nu\rho}$ coincidirá com a afinidade de Christoffel, $\left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\}$, isto é:

$$\llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\nu\rho}} = \left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\} \quad , \tag{5'.XI}$$

e então :

$$\llcorner^{\mu}(x)_{\nu\rho} = \left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\} + \Delta^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \quad . \tag{6.XI}$$

Com a parte simétrica da (6.XI), isto é, com a $\left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\}$, construamos uma entidade formalmente análoga ao tensor de Riemann--Christoffel de uma variedade cuja afinidade fosse a $\left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\}$. Chamemos a esta entidade de ${}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ e a definamos como:

$$
\begin{aligned}
{}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = {} & \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\alpha\beta},\gamma} - \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\alpha\gamma},\beta} + \\
& + \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\lambda\gamma}} \cdot \llcorner^{\lambda}(x)_{\underline{\alpha\beta}} - \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\lambda\beta}} \cdot \llcorner^{\lambda}(x)_{\alpha\gamma} ,
\end{aligned}
\tag{7.XI}
$$

onde a $\llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\alpha\beta}}$ é dada em (5'.XI).

No apêndice III demonstra-se que a ${}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ é um tensor construtível com o tensor $\llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$ e deste modo terá todas propriedades do tensor de Riemann-Christoffel, apezar de estar definido em uma variedade cuja afinidade é a $\llcorner^{\mu}(x)_{\nu\rho}$. A curvatura de rotação é dada pelo tensor $\llcorner^{\mu}(x)_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$, mas por (3.XI), esta curvatura é nula. A condição (5.XI) restringe os símbolos de Christoffel de 2ª espécie a se relacionarem às tetradas por meio das equações (10.X.VIII).

Na variedade que estamos considerando, os tensores fundamentais são o $g_{\mu\nu}(x)$ e o $\llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$ e êles são construtíveis com os $\sigma_{\mu}(x)$, seus adjuntos e suas derivadas.

Como ${}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ é estruturalmente um tensor de Riemann--Christoffel, então valerá a relação:

$$
{}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} + {}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\gamma\alpha\beta} + {}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\beta\gamma\alpha} = 0 \tag{8.XI}
$$

A fórmula (5.A.III) do apêndice III nos dá a relação entre ${}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ e a torção:

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^{s}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} &= - \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} \cdot \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} = \\
&= + \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} \cdot \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\beta\gamma}}
\end{aligned}
\right\} \; . \tag{9.XI}
$$

Deste modo o ${}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ sendo um produto de tensores, é um tensor. A (9.XI) e o fato de que a variedade seja a torção uniforme leva a:

$$ {}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma|\underset{+}{\rho}} = 0 \qquad (10.XI) $$

O tensor ${}^{s}\lfloor(x)_{\alpha\beta\gamma}$ faz o papel da parte Riemanniana da curvatura total $\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = 0$ e a fórmula (10.XI) nos diz que o ${}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ é um campo uniforme.

O conhecimento das 24 componentes $\lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$ determina o ${}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$, que está sujeito às 4 condições subsidiárias (10.XI).

A teoria quaterniônica que estamos construindo tem como entidades fundamentais os campos $\sigma_{\nu}(x)$ e seus adjuntos. Neste capítulo XI, construimos uma teoria tensorial, métrica, onde a torção é o tensor fundamental, além do $g_{\mu\nu}(x)$. Ambos são construidos com os $\sigma_{\nu}(x)$ e seus adjuntos e derivadas.

Do apêndice III, vemos que o tensor contraído, construido com o ${}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ é dado por:

$$ {}^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma} = {}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\mu\gamma} = \lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\mu\gamma}} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\sigma} \qquad (7.A.III) $$

Êste tensor tem as propriedades de um tensor de Ricci e se bem que a afinidade desta variedade seja a $\lfloor^{\mu}(x)_{\nu\rho}$ o tensor ${}^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma}$ é construido com a $\left\{ {}_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \right\}$.

Como $\lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}|\underset{+}{\tau}} = 0$, então êste tensor também é uniforme, isto é:

$$ {}^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma|\underset{+}{\tau}} = 0 \qquad (11.XI) $$

Construamos os campos vetoriais duais dos campos $\lfloor^{\sigma}(x)^{\mu\nu}_{\vee}$, isto é:

$$ \phi_{\lambda}(x) = \frac{1}{3!} \epsilon_{\lambda\sigma\mu\nu} \lfloor^{\sigma}(x)^{\mu\nu}_{\vee} \quad , \qquad (12.XI) $$

onde $\epsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}$ é a densidade de Levi-Civita.

Da uniformidade do $\lfloor^{\sigma}(x)^{\mu\nu}_{\vee}$, resulta:

$$\phi_{\lambda}(x)_{\underset{+}{|}\sigma} = 0 \tag{13.XI}$$

Os tensores $g_{\mu\nu}(x)$ e $\lfloor^{\alpha}(x)_{\overset{\vee}{\beta\gamma}}$ são independêntes, e são considerados os tensores fundamentais da variedade que estamos considerando.

O tensor $^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma}$ deve ser uma combinação linear de tensores simétricos construidos com o $g_{\alpha\gamma}(x)$ e o $\lfloor^{\mu}(x)_{\overset{\vee}{\nu\rho}}$ e estas combinações lineares devem ser tais que a derivada covariante seja nula. A solução geral da equação (11.XI) pode ser escrita:

$$^{s}\lfloor(x)_{\mu\nu} - a\, g_{\mu\nu}(x) = b\, \phi_{\mu}(x)\, \phi_{\nu}(x) . \tag{14.XI}$$

Tanto $g_{\mu\nu}(x)$ quando $\phi_{\mu}(x) = \frac{1}{3!} \in_{\mu\alpha\beta\gamma} \lfloor^{\alpha}(x)^{\beta\gamma}_{\vee}$ são construtíveis com os campos $\sigma_{\nu}(x)$, suas derivadas e seus adjuntos. Se admitimos as equações quaterniônicas de campo como sendo as e-quações (7.V.VII) e (7'.V.VII) e como estas são restritas à condição tensorial (3.V.VII), que é a forma Einsteiniana das equações do campo gravitacional, então deveremos identificar:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{R(x)}{2} \\ b &= K \\ T_{\mu\nu}(x) &= \phi_{\mu}(x)\ \phi_{\nu}(x) \end{aligned}\right\} \tag{14'.XI}$$

Então, podemos considerar as equações (14.XI), com as identificações (14'.XI), como as equações tensoriais da variedade espaço-tempo quaterniônica dotada de afinidade integrável e torção uniforme.

As equações quaterniônicas desta mesma variedade serão as equações (7.V.VII) e (7'.V.VII), juntamente com a condição subsidiária $\sigma_{\nu}(x)_{\underset{+}{|}\rho} = 0$.

Os campos $\phi_\mu(x)$ devem ser dados e a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ deve ser obtida como solução das (14.XI).

Dar os $\phi_\mu(x)$, corresponde a conhecer em cada P(x) os 10 $T_{\mu\nu}(x)$.

XII. GENERALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE WEYL PARA O CASO DE UMA VARIEDADE ESPAÇO-TEMPO QUATERNIÔNICA.

Consideramos um campo quaternion-espinor $\psi(x)$, do tipo $(\psi_A^{\cdot}(x))$.

Como sabemos, a derivada covariante deste campo é:

$$\psi(x)_{|\nu} = \psi(x)_{,\nu} - \Gamma_\nu^{\dagger}(x)\ \psi(x) \qquad (8.II.VII)$$

Multiplicando à esquerda por $\sigma^\nu(x)$ e somando em ν, virá:

$$\sigma^\nu(x)\ \psi(x)_{|\nu} = \sigma^\nu(x)\ \psi(x)_{,\nu} - \sigma^\nu(x)\Gamma_\nu^{\dagger}(x)\ \psi(x) \qquad (1.XII)$$

A equação de Weyl[10] em espaço achatado, em coordenadas cartesianas ortogonais é:

$$\dot{\sigma}^{(\nu)}\ \psi(x)_{,(\nu)} = 0 \qquad (2.XII)$$

A generalização de uma tal equação para um espaço curvo quaterniônico será:

$$\sigma^\nu(x)\ \psi(x)_{|\nu} = 0 \qquad (3.XII)$$

Se desenvolvermos a $\psi(x)_{|\nu}$ por meio de (8.II.VII), virá:

$$\sigma^\nu(x)\ \psi(x)_{,\nu} - \sigma^\nu(x)\Gamma_\nu^{\dagger}(x)\psi(x) = 0 \qquad (3'.XII)$$

A equação (3.XII) é covariante desde que $\psi_{|\nu}$ se transforme como uma entidade q-espinor covariante com índice μ, veto - rial covariante, isto é, se transformar-se como:

$$\psi'(x')_{|\nu} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)_{P(x)} \cdot \overline{Q(x)}^{\dagger} \cdot \psi(x)_{|\mu} \qquad (4.XII)$$

A lei de transformação dos $\sigma^{\nu}(x)$ é conhecida e dada em (1.VIII.VIII). A (4.XII) é inferida com auxílio das (3.XII) e (1.VIII.VIII).

A equação (3'.XII) poderá ser escrita em função dos $\Delta^{\beta}(x)_{\lambda\rho}$ se utilizarmos a (5.X):

$$\sigma^{\nu}(x)\ \psi(x)_{,\nu} - \frac{\sigma^{\nu}(x)}{4}\left[\Delta^{\beta}(x)_{\underline{\lambda\nu}} + \Delta^{\beta}(x)_{\overset{\vee}{\lambda\nu}}\right]\overline{\sigma_{\beta}(x)} \cdot \sigma^{\lambda}(x)\ \psi(x) = 0$$

(5.XII)

Se a variedade for tal que $\Delta^{\beta}(x)_{\underline{\lambda\nu}} \equiv 0$, como é o caso (5.XI), então:

$$\sigma^{\nu}(x)\psi(x)_{,\nu} - \frac{\sigma^{\nu}(x)}{4}\Delta^{\beta}(x)_{\overset{\vee}{\lambda\nu}}\ \overline{\sigma_{\beta}(x)}\ \sigma^{\lambda}(x)\ \psi(x) = 0 \qquad (6.XII)$$

A equação (6.XII) tem um têrmo proporcional à torção.

Devemos observar que a equação (3.XII) é uma equação de um campo q-espinorial representado pelo q-espinor $\psi(x)$ e êste sistema está em interação com o campo gravitacional representado pelas q-tetradas $\sigma^{\nu}(x)$. A própria equação (3.XII) indica explicitamente a interação ao acoplar os dois campos.

O campo $\psi(x)$ é definido pela equação (3.XII) enquanto que os campos $\sigma^{\nu}(x)$ devem satisfazer às equações quaterniônicas (7.V.VII) e (7'.V.VII), que são às equações quaterniônicas do campo gravitacional.

Então, a rigor, estaremos considerando o sistema de equações:

 102

$$\left.\begin{aligned}
&- \mathbb{R}(x)_{\mu s}\ \sigma^{\mu}(x) - \sigma^{\mu}(x)\ \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s} - \frac{R(x)}{2}\ \sigma_s(x) = K \cdot T(x)_s \\
&\overline{\sigma^{\mu}(x)}\ \mathbb{R}(x)_{\mu s} + \mathbb{R}^{\dagger}(x)_{\mu s}\ \overline{\sigma^{\mu}(x)} - \frac{R(x)}{2}\ \overline{\sigma_s(x)} = K \cdot \overline{T(x)_s} \\
&\sigma^{\mu}(x)_{\underset{+}{|}} = 0 \\
&\sigma^{\nu}(x)\ \psi(x)_{|\nu} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7.\mathrm{XII})$$

Um quasi desacoplamento deste sistema será o caso em que os campos $\sigma^{\nu}(x)$ satisfaçam às correspondentes equações do campo, independentemente da existência do campo espinorial $\psi(x)$. Neste caso a presença do campo $\psi(x)$ perturbará desprezivelmente os campos $\sigma^{\nu}(x)$.

Quando os campo $\sigma^{\nu}(x)$ satisfizerem a uma equação tensorial como a (14.XI), estaremos num caso em que $\Delta^{\beta}(x)_{\underline{\mu\nu}} \equiv 0$, e onde o tensor das torções juntamente com o $g_{\underline{\mu\nu}}(x)$ constituem o par fundamental. Neste caso, a variedade espaço-tempo tem a geometria determinada pelo:

$$T_{\mu\nu}(x) = K\ \phi_{\mu}(x)\ \phi_{\nu}(x)$$

e o $\phi_{\mu}(x)$ é construido com o $\llcorner^{\beta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \equiv \Delta^{\beta}(x)_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$.

Um dos princípios fundamentais da gravitação Einsteiniana é o princípio de Mach. Por êste princípio o tensor $T_{\mu\nu}(x)$ é determinado pela distribuição de matéria na variedade espaço-tempo. No caso que estamos considerando, se a presença da matéria for representada pela presença do sistema $\psi(x)$, então devemos relacionar o tensor de momentum-energia com o q-espinor $\psi(x)$.

Se admitirmos estar dentro das condições que estruturam a variedade quaterniônica espaço-tempo definida no capítulo XI, então deveremos ter:

$$\left.\begin{aligned} \lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}|\underset{+}{\tau}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.XI}$$

$$\Delta^{\mu}(x)_{\underline{\nu\rho}} = 0 \tag{5.XI}$$

$$^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma|\underset{+}{\tau}} = 0 \tag{11.XI}$$

$$\phi_{\lambda}(x) = \frac{1}{3!} \in_{\lambda\sigma\mu\nu} \lfloor^{\sigma}(x)^{\mu\nu}_{\vee} \quad ; \tag{12.XI}$$

onde $\lfloor^{\sigma}(x)^{\mu\nu}_{\vee} \equiv \Delta^{\sigma}(x)^{\mu\nu}_{\vee}$

Então a equação tensorial do campo gravitacional será:

$$^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma} - \frac{R(x)}{2} g_{\mu\nu}(x) = K\, \phi_{\mu}(x)\ \phi_{\nu}(x) \quad . \tag{14.XI}$$

Uma hipótese possível, simples, será:

$$\phi_{\mu}(x) = C\psi^{\dagger}(x)\ \sigma_{\mu}(x)\ \psi(x) \quad , \tag{8.XII}$$

onde C é uma constante real.

Logo, levando-se em conta a simetria virá:

$$\phi_{\mu}(x)\ \phi_{\nu}(x) = C^{2}\Big[\psi^{\dagger}(x)\ \sigma_{\mu}(x)\ \psi(x)\ \psi^{\dagger}(x)\ \sigma_{\nu}(x) + \\ + \psi^{\dagger}(x)\ \sigma_{\nu}(x)\ \psi(x)\psi^{\dagger}(x)\ \sigma_{\mu}(x)\psi(x)\Big] \tag{9.XII}$$

Lembremos que $\psi(x)$ é do tipo $(\psi_{\dot{A}})$, de modo que se transforma como $\psi'(x) = \overline{Q(x)}^{\dagger}\psi(x)$ e recordando a lei de transformação dos $\sigma_{\nu}(x)$, vê-se que $\phi_{\mu}(x)\ \phi_{\nu}(x)$ transforma-se como um tensor covariante de 2^{a} ordem.

A expressão supra é induzida pela condição de preservação do princípio de Mach.

Nas relações (7.XII), teremos neste caso:

$$T(x)_s = T_{s\nu}(x)\,\sigma^{\nu}(x) = \phi_s(x)\,.\,\phi_{\nu}(x)\sigma^{\nu}(x) \quad , \qquad (10.XII)$$

onde $\phi_s(x)$ $\phi_{\nu}(x)$ é dado por (9.XII).

Se invertermos a fórmula (12.XI) e usarmos a hipótese (8.XII), então ficará aparente o carater não linear da equação (6.XII).

R. Finkelstein(11) construiu uma generalização da equação de Dirac para o eletron, e nesta equação há uma correção à massa do eletron que é proporcional à torção.

A equação de Finkelstein poderá ser obtida se usarmos as generalizações $\gamma^{\nu}(x)$ das matrizes γ^{ν} de Dirac. As matrizes $\gamma^{\nu}(x)$ serão construidas por meio de produtos diretos dos campos q-tetradas $\sigma^{\nu}(x)$, já que uma álgebra de Clifford-Dirac local é sempre construtível por meio do produto direto de duas álgebras de Clifford--Pauli locais.

Não faremos tal cálculo, deixando-o apenas mencionado.

APÊNDICE I

CÁLCULO DE: $R_\lambda{}^{\mu}{}_{rs}(x)\,\sigma^\lambda(x) + \mathbb{R}_{rs}(x)\,\sigma^\mu(x) + \sigma^\mu(x)\,\mathbb{R}^\dagger{}_{rs}(x) = 0$

Omitiremos, nos cálculos o argumento x.
Trabalharemos no formalismo matricial. A fórmula (14.II.VII) nos dá:

$$(\sigma^{\mu A\dot{B}})_{|r} = (\sigma^{\mu A\dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu A\dot{B}})\left\{{\mu \atop \nu\ r}\right\} +$$

$$+ (\Gamma_r{}^A{}_C)(\sigma^{\mu C\dot{B}}) + (\sigma^{\mu A\dot{L}})(\Gamma_r{}^{\dot{B}}{}_{\dot{L}})^T = 0 \qquad ,$$

onde $(\Gamma_r{}^{\dot{B}}{}_{\dot{L}})^T = (\Gamma_r{}_{\dot{L}}{}^{\dot{B}})$ e μ , r são índices vetoriais.

Derivando essa expressão covariantemente, virá:

$$(\sigma^{\mu A\dot{B}})_{|rs} = 0 = \left[\sigma^{\mu A\dot{B}}{}_{,r} + (\sigma^{\nu A\dot{B}})\left\{{\mu \atop \nu\ r}\right\}\right]_{|s} (A,\ \dot{B}\ \text{fixos}) +$$

$$+ (\Gamma_s{}^A{}_D)(\sigma^{\mu D\dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\mu A\dot{D}})_{,r}(\Gamma_s{}_{\dot{D}}{}^{\dot{B}}) +$$

$$+ (\Gamma_s{}^A{}_D)(\sigma^{\nu D\dot{B}})\left\{{\mu \atop \nu\ r}\right\} + (\sigma^{\nu A\dot{D}})(\Gamma_s{}_{\dot{D}}{}^{\dot{B}})\left\{{\mu \atop \nu\ r}\right\} +$$

$$+ (\Gamma_r{}^A{}_C)(\sigma^{\mu C\dot{B}})_{|s} + \left[(\Gamma_t{}^A{}_C)\left\{{t \atop r\ s}\right\} + (\Gamma_r{}^A{}_C)_{,s} +\right.$$

$$\left.+ (\Gamma_s{}^A{}_L)(\Gamma_r{}^L{}_C) - (\Gamma_r{}^A{}_L)(\Gamma_s{}^L{}_C)(\Gamma_s{}^L{}_C)\right](\sigma^{\mu C\dot{B}}) +$$

$$+ (\sigma^{\mu A\dot{C}})_{|s}(\Gamma_r{}_{\dot{C}}{}^{\dot{B}}) + (\sigma^{\mu A\dot{C}})\left[(\Gamma_r{}_{\dot{C}}{}^{\dot{B}})_{,s} + (\Gamma_t{}_{\dot{C}}{}^{\dot{B}})\left\{{t \atop r\ s}\right\} +\right.$$

$$\left.+ (\Gamma_r{}_{\dot{C}}{}^{\dot{L}})(\Gamma_s{}_{\dot{L}}{}^{\dot{B}}) - (\Gamma_s{}_{\dot{C}}{}^{\dot{L}})(\Gamma_r{}_{\dot{L}}{}^{\dot{B}})\right] =$$

$$= \left[(\sigma^{\mu A\dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu A\dot{B}})\left\{{\mu \atop \nu\ r}\right\}\right]_{|s} (A,\ \dot{B}\ \text{fixos}) +$$

$$+ (\Gamma_s{}^A{}_D)\left[(\sigma^{\mu D\dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu D\dot{B}})\left\{{\mu \atop \nu\ r}\right\} + (\Gamma_r{}^D{}_C)\cdot(\sigma^{\mu C\dot{B}})\right] +$$

$$+\left[(\sigma^{\mu A\dot{D}})_{,r} + (\sigma^{\nu A\dot{D}})\left\{ {\mu \atop \nu\; r} \right\} + (\sigma^{\mu A\dot{C}})(\Gamma_{r\,\dot{C}}^{\;\;\dot{D}})\right](\Gamma_{s\,\dot{D}}^{\;\;\dot{B}}) +$$

$$+ (\Gamma_{t\,C}^{\;A})(\sigma^{\mu C\dot{B}})\left\{ {t \atop r\; s} \right\} + (\Gamma_{r\,C}^{\;A})_{,s}(\sigma^{\mu C\dot{B}}) -$$

$$- (\Gamma_{r\,L}^{\;A})(\Gamma_{s\,C}^{\;L})(\sigma^{\mu C\dot{B}}) + (\sigma^{\mu A\dot{C}})\Big[(\Gamma_{r\,\dot{C}}^{\;\;\dot{B}})_{,s} +$$

$$+ (\Gamma_{t\,\dot{C}}^{\;\;\dot{B}})\left\{ {t \atop r\; s} \right\} - (\Gamma_{s\,\dot{C}}^{\;\;\dot{L}})(\Gamma_{r\,\dot{L}}^{\;\;\dot{B}})\Big]$$

Para formarmos a expressão (8.IV:VII) precisamos subtrair, do resultado anterior, o $\sigma^{\mu}{}_{|sr}$ e anular a diferença.

A formação do $\sigma^{\mu}{}_{|sr}$ é feita anàlogamente ao $\sigma^{\mu}{}_{|rs}$, (bastando-se comutar na fórmula anterior s por r).

Mas, do cálculo tensorial temos:

$$\left[(\sigma^{\mu A\dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\nu A\dot{B}})\left\{ {\mu \atop \nu\; r} \right\}\right]_{|s}^{(A,\ \dot{B}\text{ fixos})} - \left[(\sigma^{\mu A\dot{B}})_{,s} +\right.$$

$$\left. + (\sigma^{\nu A\dot{B}})\left\{ {\mu \atop \nu\; s} \right\}\right]_{|r}^{(A,\ \dot{B}\text{ fixos})} = (\sigma^{\lambda A\dot{B}})\, R_{\lambda\ rs}^{\ \mu} \quad , \text{ onde}$$

$R_{\lambda\ rs}^{\ \mu}$ é o tensor de Riemann-Christoffel. Esta é a lei de comutação da derivada covariante do cálculo tensorial.

Então:

$$0 = (\sigma^{\mu A\dot{B}})_{|rs} - (\sigma^{\mu A\dot{B}})_{|sr} = (\sigma^{\lambda A\dot{B}})\, R_{\lambda\ rs}^{\ \mu} -$$

$$- (\Gamma_{s\,D}^{\;A})\cancel{(\sigma^{\mu D\dot{L}})}(\Gamma_{r\,\dot{L}}^{\;\;\dot{B}}) - (\Gamma_{r\,L}^{\;A})\cancel{(\sigma^{\mu L\dot{D}})}(\Gamma_{s\,\dot{D}}^{\;\;\dot{B}}) +$$

$$+ (\Gamma_{r\,C}^{\;A})_{,s}(\sigma^{\mu C\dot{B}}) - (\Gamma_{r\,L}^{\;A})(\Gamma_{s\,C}^{\;L})(\sigma^{\mu C\dot{B}}) +$$

$$+ (\sigma^{\mu A\dot{C}})\left[(\Gamma_{r\,\dot{C}}^{\;\;\dot{B}})_{,s} - (\Gamma_{s\,\dot{C}}^{\;\;\dot{L}})(\Gamma_{r\,\dot{L}}^{\;\;\dot{B}})\right] +$$

$$+ (\Gamma_{r\;D}^{\;A}) \cdot \cancel{(\sigma^{\mu D\dot{E}})} (\Gamma_{s\;\dot{L}}^{\;\dot{B}}) + (\Gamma_{s\;L}^{\;A}) \cancel{(\sigma^{\mu L\dot{D}})} (\Gamma_{r\;\dot{D}}^{\;\dot{B}}) -$$

$$- (\Gamma_{s\;C}^{\;A})_{,r} \, (\sigma^{\mu C\dot{B}}) + (\Gamma_{s\;L}^{\;A})(\Gamma_{r\;C}^{\;A})(\sigma^{\mu C\dot{B}}) -$$

$$- (\sigma^{\mu A\dot{C}})(\Gamma_{s\;\dot{C}}^{\;\dot{B}})_{,r} + (\sigma^{\mu A\dot{C}})(\Gamma_{r\;\dot{C}}^{\;\dot{L}})(\Gamma_{s\;\dot{L}}^{\;\dot{B}}) \; .$$

Então, com a omissão dos têrmos cancelados, teremos:

$$0 = (\sigma^{\lambda A\dot{B}}) \, R_{\lambda\;\;rs}^{\;\mu} + \Big[(\Gamma_{r\;C}^{\;A})_{,s} - (\Gamma_{r\;L}^{\;A})(\Gamma_{s\;C}^{\;L}) -$$

$$- (\Gamma_{s\;C}^{\;A})_{,r} + (\Gamma_{s\;C}^{\;A})(\Gamma_{r\;C}^{\;L}) \Big] \cdot (\sigma^{\mu C\dot{B}}) +$$

$$+ (\sigma^{\mu A\dot{C}}) \Big[(\Gamma_{r\;\dot{C}}^{\;\dot{B}})_{,s} - (\Gamma_{s\;\dot{C}}^{\;\dot{L}})(\Gamma_{r\;\dot{L}}^{\;\dot{B}}) - (\Gamma_{s\;\dot{C}}^{\;\dot{B}}) +$$

$$+ (\Gamma_{r\;\dot{C}}^{\;\dot{L}}) \cdot (\Gamma_{s\;\dot{L}}^{\;\dot{B}}) \Big] .$$

Escrevendo em forma compacta e levando em conta a definição da q-curvatura $\mathbb{R}_{rs}$, dada em (2.IV.VII), virá:

$$\sigma^{\lambda} \, R_{\lambda\;\;rs}^{\;\mu} + \mathbb{R}_{rs}\,\sigma^{\mu} + \sigma^{\mu}\,\mathbb{R}^{\dagger}_{\;rs} = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

APÊNDICE II

A fórmula (5.II.VII) nos dá a expressão da derivada covariante de um espinor de 1ª ordem do tipo (ψ^A) :

$$\psi_{|\nu} = \psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi \qquad (5.\text{II.VII})$$

Se derivarmos novamente a (5.II.VII), obteremos:

$$(\psi_{|\nu})_{|\mu} = \psi_{|\nu\mu} = (\psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi)_{,\mu} - \psi_{|\rho} \left\{ {\rho \atop \mu\ \nu} \right\} + \Gamma_\mu \psi_{|\nu} \qquad (1.\text{A.II})$$

O símbolo de Christoffel $\left\{ {\rho \atop \mu\ \nu} \right\}$ surgiu porque $\psi_{|\nu}$ além de espinor tem caráter tensorial devido ao índice ν. Comutando-se a ordem dos índices ν , μ em (1.A.II), virá:

$$(\psi_{|\mu})_{|\nu} = \psi_{|\mu\nu} = (\psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi)_{,\nu} - \psi_{|\rho} \left\{ {\rho \atop \nu\ \mu} \right\} + \Gamma_\nu \psi_{|\mu} \qquad (2.\text{A.II})$$

Subtraindo-se (2.A.II) de (1.A.II) e levando em conta a simetria dos símbolos de Christoffel nos índices μ, ν , virá:

$$\psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} = \psi_{,\nu\mu} + \Gamma_{\nu,\mu} \psi + \Gamma_\nu \psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi_{|\nu} -$$

$$- \psi_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu,\nu} \psi - \Gamma_\mu \psi_{,\nu} - \Gamma_\nu \psi_{|\mu} =$$

$$= \Gamma_{\nu,\mu} \psi + \Gamma_\nu \psi_{,\mu} + \Gamma_\mu (\psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \psi) -$$

$$- \Gamma_{\mu,\nu} \psi - \Gamma_\mu \psi_{,\nu} - \Gamma_\nu (\psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi) \qquad \text{ou}$$

$$\psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} = \left[\Gamma_{\nu,\mu} + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \right] \psi \qquad (3.\text{A.II})$$

Comparando essa fórmula com a correspondente fórmula do cálculo tensorial, escreveremos:

$$\psi_{|\nu\mu} - \psi_{|\mu\nu} = \mathbb{R}_{\nu\mu}\,\Psi \quad , \tag{3'.A.II}$$

onde

$$\mathbb{R}_{\nu\mu} = \partial_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \quad .$$

Mas esta é a fórmula (4.IV.VII), que dá a q.curvatura.

Em (3.A.II) se trocarmos μ por ν , obteremos:

$$\psi_{|\mu\nu} - \psi_{|\nu\mu} = \mathbb{R}_{\mu\nu}\,\psi \tag{4.A.II}$$

Comparando (4.A.II) com (3'.A.II) e levando em conta a arbitrariedade da ψ, concluimos que:

$$\mathbb{R}_{\mu\nu} = - \mathbb{R}_{\nu\mu} \quad . \tag{5.A.II}$$

A P Ê N D I C E III

CÁLCULO DE ${}^{S}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma}$ EM FUNÇÃO DE $\llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$.

Tirando (7.XI) de (2.XI), vem:

$$\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} - {}^{S}\llcorner^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = - \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma},\beta} + \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta},\gamma} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\alpha\beta}\, \llcorner^{\mu}(x)_{\sigma\gamma} - \llcorner^{\sigma}(x)_{\underline{\alpha\beta}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\sigma\gamma}} - \llcorner^{\sigma}(x)_{\alpha\gamma} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\sigma\beta} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\underline{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\sigma\beta}} =$$

$$= \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta},\gamma} - \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma},\beta} + \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\sigma\gamma}} + \llcorner^{\sigma}(x)_{\underline{\alpha\beta}}\, \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} -$$

$$- \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} + \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underline{\sigma\beta}} -$$

$$\llcorner^{\sigma}(x)_{\underline{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} \,. \qquad (1.A.III)$$

Somando e subtraindo a parte antissimétrica da afinida de $\llcorner^{\mu}(x)_{\nu\rho}$, em algumas parcelas de (1.A.III), vamos obter:

$$\llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta},\gamma} - \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma},\beta} + \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\, \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} - \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\alpha\beta} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} - \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} -$$

$$- \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} - \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\sigma\beta} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} - \llcorner^{\sigma}(x)_{\alpha\gamma} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} +$$

$$+ \llcorner^{\sigma}(x)_{\alpha\gamma} \cdot \llcorner^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} =$$

$$= L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}|\underset{+}{\gamma}} + L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} \cdot L^{\sigma}(x)_{\beta\gamma} - L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}|\underset{+}{\beta}} -$$

$$- L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\sigma}} \cdot L^{\sigma}(x)_{\beta\gamma} + L^{\sigma}(x)_{\alpha\beta} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} -$$

$$- L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} - L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} -$$

$$- L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} + L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} +$$

$$+ L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} \; .$$

Mas $L^{\mu}(x)_{\alpha\beta|\underset{+}{\gamma}} = 0$ e $L^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = 0$, logo:

$$-^{s} L^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} + L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} +$$

$$+ L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} -$$

$$- \left(\cancel{L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} + L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} + \right.$$

$$\left. + \cancel{L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}}} \right)$$

logo:

$$-^{s} L^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} - L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} \; . \qquad (2.A.III)$$

Mas, então podemos escrever a (8.XI) em têrmos de (2.A.III) e virá:

$$0 = L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} - L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} +$$

$$+ L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\gamma\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} - L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\gamma\alpha}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} +$$

$$+ L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\beta\alpha}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} - L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} =$$

$$= 2\left(L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} - L^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \cdot L^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} + \right.$$

$$+ \lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\gamma\beta}} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} \;) \qquad (3.A.III)$$

logo:

$$\lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{.\sigma\beta}} - \lfloor^{\sigma}(x)_{\alpha\beta} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\sigma\gamma} =$$

$$= \lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} \quad . \qquad (4.A.III)$$

Comparando com (2.A.III), virá:

$$^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\beta\gamma} = - \lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} \qquad (5.A.III)$$

Se contrairmos μ com α , como há a antissimetrica em σ , α , então:

$$^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\mu\beta\gamma} = 0 \qquad (6.A.III)$$

Resta então, como única contração não nula de (5.A.III):

$$^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma} = {}^{s}\lfloor^{\mu}(x)_{\alpha\mu\gamma} = - \lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\mu\gamma}} \cdot \lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\alpha}} \qquad (7.A.III)$$

Notemos que o tensor $^{s}\lfloor(x)_{\alpha\gamma}$ é simétrico em α, γ, logo tem sòmente 10 componentes independêntes; e é construido com o $\lfloor^{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$ que tem 4 componentes independêntes.

As (4.A.III) estabelecem 16 relações entre os $\lfloor^{\sigma}(x)^{\alpha\gamma}_{\vee}$.

A condição $\Gamma_{\rho}(x) + \overline{\Gamma_{\rho}(x)} = 0$, (3.III.VII), estabelece mais 4 relações, da forma $\lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\sigma\gamma}} = 0$.

Então, das 24 componentes do $\lfloor^{\sigma}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}}$, restam 4 independêntes.

A P Ê N D I C E IV

CÁLCULO DE $\sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho}$ E $g_{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$ EM FUNÇÃO DA TORÇÃO.

Sabemos que:

$$\sigma_\nu(x)_{\underset{+}{|}\rho} = 0 = \sigma_\nu(x)_{,\rho} - \sigma_\lambda(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\nu\rho}$$

e que:

$$\sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = \sigma_\nu(x)_{,\rho} - \sigma_\lambda(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\rho\nu}$$

Logo:

$$\sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} - \sigma_\nu(x)_{\underset{+}{|}\rho} = - \sigma_\lambda(x) \left[\mathrm{L}^\lambda(x)_{\rho\nu} - \mathrm{L}^\lambda(x)_{\nu\rho} \right] .$$

ou

$$\sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = 2\, \sigma_\lambda(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \qquad (1.A.IV)$$

Se a torção for nula, então: $\sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = 0$.

De $(g^{\mu\nu}(x)\, \sigma_\mu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = \sigma^\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho}$, decorre que com a ajuda de (1.A.IV) e o conhecimento de $g^{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$, podemos calcular $\sigma^\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho}$.

A determinação de $g^{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$ se faz a partir de $g^{\mu\lambda}(x)\, g_{\lambda\nu}(x) = \delta^\mu{}_\nu$

Então devemos conhecer $g_{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho}$.

Mas:

$$\dot\sigma_{(o)}\, g_{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho} = \sigma_\mu(x) | \sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = \sigma_\mu(x)_{\underset{-}{|}\rho} | \sigma_\nu(x) +$$

$$+ \sigma_\mu(x) | \sigma_\nu(x)_{\underset{-}{|}\rho} = (\sigma_\mu(x)_{,\rho} - \sigma_\lambda(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\rho\mu}) | \sigma_\nu(x) +$$

$$+ \sigma_\mu(x) | (\sigma_\nu(x)_{,\rho} - \sigma_\lambda(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\rho\nu}) = \sigma_\mu(x)_{,\rho} | \sigma_\nu(x) -$$

$$- g_{\lambda\nu}(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\rho\mu}\, \dot\sigma_{(o)} + \sigma_\mu(x) | \sigma_\nu(x)_{,\rho} - g_{\mu\lambda}(x)\, \mathrm{L}^\lambda(x)_{\rho\nu}\, \dot\sigma_{(o)} .$$

Subtraindo $\dot{\sigma}_{(o)}\, g_{\mu\nu}(x)_{\underset{+}{|}\rho} = 0$, vem:

$$\dot{\sigma}_{(o)}\, g_{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho} = \left(- g_{\lambda\nu}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\rho\mu} + g_{\lambda\nu}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\rho\nu} + g_{\mu\lambda}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\nu\rho} \right) \dot{\sigma}_{(o)} = \left(2 g_{\lambda\nu}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} + 2 g_{\mu\lambda}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \right) \dot{\sigma}_{(o)}$$

ou

$$g_{\mu\nu}(x)_{\underset{-}{|}\rho} = 2 \left(\llcorner_{\nu}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} + \llcorner_{\mu}(x)_{\underset{\vee}{\nu\rho}} \right) , \qquad (2.A.IV)$$

onde

$$\llcorner_{\nu}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = g_{\nu\lambda}(x)\, \llcorner^{\lambda}(x)_{\underset{\vee}{\mu\rho}} . \qquad (3.A.IV)$$

outras expressões são fàcilmente construtíveis.

BIBLIOGRAFIA

(1) T. Kahan, Théorie des Groupes en Physique Classique et Quantique. Tome I, Dunod, Paris, (1960).

(2) F.R. Halpern, Special Relativity and Quantum Mechanics, Prentice-Hall, (1968).

(3) M. Sachs, Nuovo Cimento, 47 A, 759 (1967).

(4) P.G. Bergmann, Phys. Rev., vol. 107, nº 2, 624 (1957).

(5) A. Lichnerowicz, Théorie Relativistes de la Gravitation et de L'Eletromagnétisme, Masson (1955).

(6) D. Hestenes, Space-time algebra, Gordon and Breach, (1966).

(7) A. Lichnerowicz, Elementos de Cálculo Tensorial, Aguilar, Segunda Edição, (1965).

(8) P. Roman, Theory of Elementary Particles, North-Holland, Second Edition (1961).

(9) J.L. Anderson, Principles of Relativity Physics, Academic Press (1967).

(10) J. Aharoni, The Special Theory of Relativity, Oxford, Second Edition (1965).

(11) R. Finkelstein, J. Math. Phys., 1, nº 5, 440 (1960).

(12) P. Rastall, Revs. Modern Phys., vol. 36, 820 (1964).

(13) W.G. Parke, H. Jehle, Lectures in Theoretical Physics, vol. VII A, 297 (1965). W.L. Bade, H. Jehle, Revs. Modern Phys. 25, 714 (1953).

(14) C. G. Oliveira, C. Marcio do Amaral, Phys. Letters, vol. 22, nº 1, 64 (1966).

(15) C. G. Oliveira, C. Marcio do Amaral, Nuovo Cimento, Série X, vol. 47, 9 (1967).

(16) C. Marcio do Amaral, C. G. Oliveira, Nuovo Cimento, Série X, vol. 63 B, 318 (1969).

(17) C. Marcio do Amaral, Notas de Física, 14, nº 1, C.B.P.F. (1968), Guanabara, Brasil.