

Dissertação de Mestrado

Cálculo da Abundância de Arcos  
Gravitacionais em Aglomerados de Galáxias

---

*Gabriel Bartosch Caminha*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Coordenação de Cosmologia Relatividade e Astrofísica - ICRA

2009

Orientador: Martín Makler

Página intencionalmente deixada em branco

*A meu avô, Carl Heinz Bartosch, que  
será um eterno exemplo para mim.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, que sempre me apoiaram em minhas decisões e estiveram dispostos a me ajudar.

Agradeço ao professor Martín Makler pela enorme paciência e pelos ensinamentos transmitidos durante estes dois anos de trabalho.

Gostaria também de agradecer a todos os professores com os quais tive algum tipo de relacionamento além da sala de aula, de caráter profissional ou não, que tiveram um papel fundamental em minha formação. São eles Daniela Lazzaro, José Abdalla Helayel Neto, Luis A. C. P. da Mota, Luis Guilherme da Silva Duarte e Maria de Fatima Alves da Silva.

Não posso deixar de falar de meus amigos e pessoas íntimas que me apoiaram durante este trabalho. Seus nomes são Aline Nogueira Araújo, Erika Bartosch Caminha, Leandro Alexandre da Silva (pelas dicas de última hora de  $\text{\LaTeX}$ ) e Monique Osório Talarico da Conceição (por ficar falando para eu terminar logo a dissertação).

# Resumo

Neste trabalho é estudada a abundância de arcos gravitacionais em aglomerados de galáxias em função dos parâmetros dos aglomerados e da cosmologia. Em particular, é investigada a variação da fração de arcos em função do desvio para o vermelho  $z$ , que é um assunto ainda controverso na literatura. Para calcular a fração de arcos é necessário obter a seção de choque de formação de arcos  $\sigma$ , que é definida como sendo a área efetiva, no plano das fontes, onde um objeto ali encontrado é mapeado como um arco. É investigada a dependência de  $\sigma$  com a magnificação das imagens e com sua razão comprimento-largura. São apresentadas aproximações para essa dependência, que tornam o cálculo computacional mais rápido. É obtida a fração de arcos em aglomerados de galáxias parametrizados segundo o modelo de Navarro-Frenk-White (NFW). Para o cálculo da fração de arcos são introduzidas duas formas de levar em conta o aumento da razão sinal-ruído das imagens devido à magnificação. Um método utiliza dependência da seção de choque com a magnificação, enquanto o outro considera que todas as fontes sofrem uma mesma magnificação média. É observado que estes dois métodos geram resultados bem semelhantes. Ao comparar o cálculo da fração de arcos que considera a magnificação com a forma usual que não leva em conta este efeito, é visto que a magnificação possui um papel fundamental na fração de arcos ao aumentar esta quantidade em algumas ordens de grandeza. Ao estudar os efeitos das propriedades dos aglomerados e da cosmologia na abundância de arcos, é observado que as características dos aglomerados possuem um papel mais importante do que a cosmologia, pois estes afetam a fração de arcos de forma mais intensa. Em particular a fração de arcos é praticamente insensível a mudanças na equação de estado da energia escura. Esses resultados indicam que a estatística de arcos gravitacionais é mais eficiente para obter informações sobre aglomerados de galáxias que sobre o modelo cosmológico. Com relação à variação da abundância de arcos com o desvio para o vermelho dos aglomerados, é obtido um pico pronunciado em  $z \approx 0.4$ , o que poderia ter uma relação com o suposto aumento da incidência de arcos com  $z$ .

# Abstract

In this work we study the abundance of gravitational arcs in galaxy clusters as a function of the cluster parameters and cosmology. In particular, we investigate the variation of the fraction of arcs with respect to the cluster redshift  $z$ . To compute the arc fraction we obtain the cross section for arc formation  $\sigma$ , which is defined as the effective area, on the source plane, where the objects are mapped into arcs. We investigate the dependence of  $\sigma$  with image magnification  $\mu$  and its length-to-width ratio and obtain analytic approximations for this dependence, allowing for faster computations. We compute the arc fraction in galaxy clusters using the Navarro-Frenk-White model (NFW). The increase in the signal-to-noise ratio due to the magnification is taken into account in two different ways. The first uses the scaling of the cross-section with respect to  $\mu$ , and the second considers that all sources are amplified by the mean magnification. We show that both methods give very similar results. When compared to the more standard way to compute the arc fraction, that ignores the effect of magnification, our results show that this effect has a fundamental contribution, leading to a strong increase in the arc fraction. When we consider the effects of cluster and cosmological parameters on the arc fraction we show that the cluster parameters have a greater impact on the arc fraction than cosmology. In particular, the arc fraction is practically insensitive to the equation of state of dark energy. These results indicate that the arc statistic is better suited to study galaxy clusters than cosmology. Finally, we notice a peak on the arc fraction at  $z \approx 0.4$ , which could be related to the increase of arc incidence with  $z$  reported in previous works.

# Lista de Figuras

1.1	Aglomerado da Bala (NASA). . . . .	6
1.2	Abell 2218 (NASA). . . . .	6
1.3	Esquema Fonte-Lente-Observador. . . . .	8
1.4	Esquema que evidencia as quantidades $\xi$ e $\xi'$ , no plano da lente. . . . .	10
1.5	Deformação de uma fonte infinitesimal circular em uma elipse (figura no plano perpendicular à linha de visada) . . . . .	16
2.1	Elipses com $e = 0.0$ e $0.2$ para a parametrização utilizada em [29] (figura da esquerda) e para a parametrização que mantém as áreas constantes (figura da direita). . . . .	23
2.2	Imagem de um arco gravitacional onde podem ser vistas as quantidades comprimento ( $L$ ) e largura ( $W$ ), veja a referência [32]. . . . .	27
2.3	Magnificações radial e tangencial, ao longo do eixo $x$ , para $\kappa_s = 1.0$ e $e = 0.2$ . . . . .	29
2.4	Razão das magnificações tangencial, ao longo do eixo $x$ , e radial para $\kappa_s = 1.0$ , $e = 0.2$ . . . . .	30
2.5	Região onde $ \mu_t/\mu_r  > 10$ para o modelo de NFW com $\kappa_s = 1.0$ e elipticidades $e = 0.2, 0.5$ . . . . .	31
2.6	Região onde $ \mu_t/\mu_r  > 10$ , <i>no plano das fontes</i> , para o modelo de NFW com $\kappa_s = 1.0$ e elipticidades $e = 0.2, 0.5$ . . . . .	32
2.7	À esquerda é mostrado o comportamento da seção de choque adimensional em relação ao parâmetro $\kappa_s$ , para valores fixos de elipticidade, onde as linhas contínua, tracejada e pontilhada correspondem a $e = 0.2, 0.5$ e $0.8$ respectivamente. O gráfico à direita mostra o comportamento da seção de choque em função da elipticidade para valores fixos de $\kappa_s$ , onde as curvas possuem, de cima para baixo, $\kappa_s = 2.5, 1.25, 0.7$ e $0.35$ . . . . .	33
2.8	Iso-contornos da seção de choque de formação de arcos no espaço $(\kappa_s, e)$ . . . . .	34

2.9	A figura da direita mostra a seção de choque dimensional para uma lente com $M = 5 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ e diferentes valores de elipticidade, onde a fonte possui $z = 2$ . Na esquerda é mostrado o caso de uma lente com $e = 0.2$ e diferentes valores de massa. . . . .	35
2.10	Comportamento da seção de choque em relação a $\mu_{\min}$ , para diferentes valores de $e$ e $\kappa_s$ . As linhas contínuas representam o valor exato da seção de choque e as linhas pontilhadas a aproximação dada pela equação (2.34). . . . .	37
2.11	Forma da região $L/W > C$ , no plano das fontes, para $\kappa_s = 1.0$ e $e = 0.5$ em diferentes valores de $C$ . A linha pontilhada é a cáustica tangencial e as contínua e tracejada são $L/W = C$ . . . . .	38
2.12	Comportamento da seção de choque em relação a $R$ , para diferentes valores de elipticidade e $\kappa_s$ . As linhas contínuas representam o valor exato da seção de choque e as linhas pontilhadas a aproximação dada pela equação (2.40). . . . .	39
3.1	Comparação entre as três formas de calcular a seção de choque, para o modelo $\Lambda$ CDM plano, $m_{\text{lim}} = 24$ e $C = 3$ . . . . .	47
3.2	Cálculo da fração de arcos para diferentes valores da magnitude limite. Vale ressaltar que a magnitude limite correspondente ao <i>Sloan Digital Sky Survey</i> é 22 e o <i>Dark Energy Survey</i> atingirá $m_{\text{lim}} \simeq 24$ . . . . .	48
3.3	Cálculo da fração de arcos feito através da aproximação por $\mu_{\text{med}}$ para duas diferentes definições de massa e alguns valores de elipticidade ( $e$ ). Na figura da esquerda foi utilizada a densidade crítica do universo como $\rho_{\text{ref}}$ , já na direita foi utilizada a densidade de massa do universo (para ambas foi considerado $\Delta_{200} = 200$ e $C = 3$ ). . . . .	49
3.4	Cálculo da fração de arcos para os dois escalonamentos para $C(z)$ (equações 3.23 e 3.22) e para $C(z) = C(z = 0)$ . . . . .	51
3.5	Fração de arcos em função do desvio para o vermelho da lente para diferentes valores de massa e elipticidade. Este cálculo foi feito utilizando o modelo $\Lambda$ CDM plano, a parametrização de $C(z)$ dada pela equação (3.23) e a massa definida em uma região cuja densidade média é $200\rho_{\text{crit}}$ . . . . .	52
3.6	Fração de arcos em função do desvio para o vermelho da lente para valores de massa entre $1 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ e $10 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ . . . . .	53
3.7	Fração de arcos para diferentes valores de $\Omega_{0m}$ em um universo plano para aglomerados com elipticidade 0.2. . . . .	54
3.8	Fração de arcos para $\Omega_{\Lambda} = 0, 0.7$ e $1.0$ , o que corresponde à curvatura do universo negativa, nula e positiva respectivamente. . . . .	54

3.9	Fração de arcos considerando para um fluido com equação de estado $p = w\rho$ , onde estão ilustrados os casos $w = -1.2, 1.0$ e $0.8$ . . . . .	55
A.1	Comparação entre resultados obtidos utilizando o programa <code>gravlens</code> (linhas contínuas) e o programa escrito em C (pontos). . . . .	63
A.2	Disposição de algumas funções, onde cada caixa representa uma função e as linhas que as ligam indicam que as funções mais abaixo dependem das funções mais acima. . . . .	64



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução Histórica . . . . .	3
1.2	Aplicações . . . . .	5
1.3	Introdução à Teoria das Lentes Gravitacionais . . . . .	7
1.3.1	Potencial da Lente . . . . .	9
1.3.2	Magnificação . . . . .	11
1.4	Modelos de Lentes . . . . .	13
1.4.1	Um Exemplo Simples: Lente Pontual . . . . .	13
1.4.2	Lentes com Simetria Axial . . . . .	14
1.4.3	Esfera Isotérmica Singular . . . . .	17
1.4.4	Modelo de Navarro-Frenk-White (NFW) . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Formação de Arcos e Cálculo da Seção de Choque</b>	<b>21</b>
2.1	Lentes com Simetria Elíptica . . . . .	21
2.1.1	Elipses Concêntricas e Confocais . . . . .	23
2.1.2	Ângulo de Deflexão para Densidade Superficial Elíptica . . . . .	24
2.2	Formação de Arcos . . . . .	27
2.3	Seção de Choque para Formação de Arcos . . . . .	28
2.3.1	Cálculo da Seção de Choque . . . . .	29
2.3.2	Escalonamento da Seção de Choque com $\mu_{\min}$ . . . . .	33
2.3.3	Escalonamento da Seção de Choque com $\mu_t/\mu_r$ . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Cálculo da Fração de Arcos</b>	<b>41</b>
3.1	Seção de Choque Dimensional . . . . .	42
3.2	Distribuição das Fontes e o Papel da Magnificação . . . . .	44
3.3	Cálculo da Fração de Arcos . . . . .	46
3.4	Dependência da Fração de Arcos com Parâmetros da Lente . . . . .	49

3.5 Dependência da Fração de Arcos com a Cosmologia . . . . .	52
<b>4 Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>57</b>
<b>A Estrutura do Programa</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A formação de arcos gravitacionais acontece quando a imagem de uma galáxia de fundo é fortemente distorcida por outra galáxia ou um aglomerado mais próximo. Estes objetos atuam como lentes ao desviar a luz das galáxias, produzindo o fenômeno de lenteamento gravitacional. Muitos fatores podem afetar a formação dos arcos gravitacionais, como por exemplo, a distribuição de matéria do objeto que atua como lente e a própria cosmologia.

Uma grande vantagem das lentes gravitacionais no estudo de galáxias, ou aglomerados de galáxias, é que este fenômeno depende unicamente da distribuição de massa dos objetos que atuam como lente, independente dos processos físicos que ocorrem nestes. Por exemplo, o lenteamento gravitacional permite sondar de forma única os perfis de densidade destes objetos o que, por sua vez, pode dar informações sobre a matéria escura, como por exemplo se existe ou não auto-interação, e processos bariônicos, como resfriamento. Já a cosmologia afeta este fenômeno através das distâncias envolvidas.

Este trabalho tem como objetivo obter uma melhor compreensão sobre as quantidades que afetam a abundância dos arcos em aglomerados de galáxias. Isto é motivado pelos futuros levantamentos de grandes áreas do céu, como o *Dark Energy Survey*, o que irá aumentar significativamente a amostra de sistemas com arcos gravitacionais, o que tornará a estatística de arcos mais robusta. Para isto foi calculado o número esperado de arcos por aglomerado em função de parâmetros do modelo da lente e da cosmologia. Para se chegar a esta quantidade é necessário calcular a eficiência de formação de arcos de um aglomerado, que pode ser quantificada pela seção de choque para este processo.

Um aspecto importante é a dependência da abundância de arcos gravitacionais com o desvio para o vermelho do objeto que atua como lente. Existem estudos que indicam que pode haver um pico no número de arcos em um desvio para o vermelho em torno de 0.6 (veja as referências [1] e [2]). Embora ainda não esteja claro se esse é um fenômeno

intrínseco à abundância de arcos por aglomerado ou se é apenas um efeito do próprio número de aglomerados e de vieses de seleções observacionais, o fato é que, se este efeito é real, não há modelos que expliquem de forma natural essa variação da abundância de arcos com o desvio para o vermelho. Portanto este será um dos assuntos a serem investigados nesta dissertação.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. Neste primeiro é feita uma introdução ao contexto histórico e à teoria das lentes gravitacionais. As últimas seções são dedicadas a alguns exemplos de modelos de lente, em particular o modelo de NFW, o qual será utilizado para obter os resultados dos capítulos 2 e 3.

O segundo capítulo é dedicado ao cálculo da seção de choque. Primeiramente é discutido um método para obter as quantidades relevantes ao lenteamento gravitacional para lentes com simetria elipsoidal, o que é importante devido à estrutura tri-axial dos aglomerados de galáxias. Em seguida será detalhada a forma de calcular a seção de choque ( $\sigma$ ), que é a área efetiva, no plano das fontes, onde um objeto ali encontrado é mapeado como um arco, onde *área efetiva* se refere ao fato de que as regiões que darão origem à imagens múltiplas serão contadas um número de vezes igual ao número de imagens geradas. Naturalmente a seção de choque dependerá dos parâmetros do modelo da lente, como a elipticidade e a convergência característica ( $\kappa_s$ ). Um fato interessante que é observado é que a seção de choque é muito sensível a esses parâmetros para baixos valores de  $\kappa_s$ . Este resultado terá implicações na abundância de arcos, como discutido no capítulo 3. Com isto o que irá dominar o comportamento da fração de arcos serão os fatores que influenciam  $\kappa_s$ , como o parâmetro de concentração e a massa, e a elipticidade dos aglomerados.

Um aspecto inovador deste trabalho é considerar a dependência da seção de choque para a formação de arcos em função da magnificação. Foi calculada esta dependência, tendo sido obtida uma excelente aproximação analítica da seção de choque em função da magnificação, o que reduz enormemente o tempo de cálculo. Também foi estudada a seção de choque em função da razão mínima entre o comprimento e a largura dos arcos. Esta dependência se torna importante ao se considerar efeitos observacionais, como o *seeing*. Novamente foi obtida uma aproximação analítica para esta dependência. Até onde sabemos, esses dois comportamentos da seção de choque e as respectivas aproximações são apresentados pela primeira vez neste trabalho.

Já o terceiro capítulo é dedicado ao cálculo da fração de arcos, que é definida como a razão do número de arcos pelo número de aglomerados de galáxias em um dado intervalo de propriedades da lente (como por exemplo massa e elipticidade). Neste trabalho é argumentado que a magnificação possui um papel importante na estatística de arcos ao

aumentar a razão sinal-ruído desses objetos. São propostas duas formas de se considerar a magnificação no cálculo da fração de arcos. Na primeira considera-se que todas as fontes são amplificadas por uma mesma magnificação média. Na segunda leva-se em conta a variação da seção de choque com a magnificação, utilizando a aproximação introduzida no capítulo 2. Posteriormente esses resultados são comparados entre si e com a forma usual de lidar com a estatística de arcos, que ignora a magnificação. Será observado que o efeito da magnificação possui um impacto muito grande neste cálculo e que a estimativa considerando a magnificação média possui um resultado muito próximo ao cálculo considerando detalhadamente a magnificação. Em seguida são discutidos os efeitos de se utilizar diferentes definições de massa de aglomerados existentes na literatura no cálculo da fração de arcos. É investigado então o comportamento da abundância de arcos em relação aos parâmetros do modelo da lente como a massa, a elipticidade e a evolução do parâmetro de concentração. Por último é estudado o impacto da densidade de matéria, da curvatura e da equação de estado da energia escura na abundância dos arcos.

Finalmente, no capítulo 4 serão discutido os principais resultados e as perspectivas futuras.

## 1.1 Introdução Histórica

Em 1783 o astrônomo John Mitchell enviou uma carta para Henry Cavendish mencionando um método de se medir a massa de uma estrela através da diminuição da velocidade da luz devido ao campo gravitacional desta. Motivado por esta idéia Cavendish calculou o desvio Newtoniano da luz. Tal cálculo considerava a luz com natureza corpuscular e se valia do fato de a aceleração de um corpo num campo gravitacional independe de sua massa. Com isto obtem-se o ângulo de deflexão da luz ao passar próximo à estrela de massa  $M$ , que é dado por:

$$\hat{\alpha} = \frac{2GM}{c^2\xi}, \quad (1.1)$$

onde  $\xi$  é o parâmetro de impacto do raio de luz.

Uma coisa interessante é que nesta mesma carta John Mitchell menciona a possibilidade da existência de um corpo com massa suficiente para “parar” a luz emitida, tornando-se invisível. Tal objeto se assemelharia muito à um buraco negro. Infelizmente tais estudos não foram publicados, entretanto o trabalho de Clifford M. Will [3] mostra mais detalhes sobre os primeiros cálculos de desvio da luz por um campo gravitacional. A primeira publicação sobre este assunto foi em 1801. Neste trabalho Johann von Soldner

calculou o desvio da luz causado pelo campo gravitacional de uma estrela, utilizando também a mecânica newtoniana<sup>1</sup>.

Somente com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral foi possível ter uma previsão correta da deflexão da luz. Assim, em 1915 Albert Einstein obteve que o ângulo de deflexão da luz é o dobro do calculado utilizando apenas a teoria newtoniana,

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi}. \quad (1.2)$$

Entretanto, antes mesmo da publicação do valor correto do ângulo de deflexão, houveram tentativas de se observar, durante um eclipse solar, o desvio da luz causado pelo Sol. A primeira foi feita em 1912 por uma expedição argentina ao Brasil, liderada por Carlos Dillon Perrine, na cidade de Cristina, no sul de Minas Gerais [5]. Mas as condições climáticas impediram as observações. Em 1914 outra expedição liderada por Erwin Freundlich tentou fazer a observação na Criméia, um país ao sul da Ucrânia. Entretanto, durante a viagem iniciou-se a Primeira Guerra Mundial e eles foram presos por soldados russos. Assim não houve um teste antes de se obter teoricamente o valor correto do ângulo de deflexão.

Foi apenas com o eclipse de 1919 que as expedições a Sobral, no Ceará, e Ilha de Príncipe puderam comprovar que o resultado de Einstein estava correto. Este experimento tornou-se o mais famoso teste da Relatividade Geral e foi o início da grande popularidade de Einstein.

Até então os trabalhos se concentravam apenas na deflexão da luz, mas em 1923 Sir Arthur Eddington mencionou a possibilidade de serem geradas imagens múltiplas [6]. No ano seguinte o físico Orest Chwolson publicou um breve artigo onde ele descrevia a idéia de uma “estrela dupla imaginária” [7]. Neste trabalho ele descreve que uma segunda imagem seria gerada muito próxima à estrela que causa o desvio da luz, não sendo possível observá-las separadamente. Indo mais além, no trabalho é citado que se houver um alinhamento perfeito entre as estrelas e o observador seria gerada uma imagem com aspecto de anel.

Depois de encontros e trocas de cartas com o cientista amador Rudi W. Mandl, Einstein publicou um breve trabalho sobre como o campo gravitacional de uma estrela poderia atuar como uma “lente” sobre outra estrela mais distante [8]. Aqui Einstein descreve os mesmos resultados obtidos por Chwolson, entretanto ele discute que o objeto lenteado teria seu brilho aparente aumentado. Ambos autores diziam que não era possível observar estes fenômenos diretamente.

---

<sup>1</sup>Para o leitor interessado, há uma tradução em inglês desse trabalho na referência [4].

No ano seguinte o astrônomo Fritz Zwicky considerou a possibilidade de objetos extragaláticos (galáxias e aglomerados de galáxias), não apenas as estrelas, atuarem como lentes [9, 10]. Como tais objetos possuem maior massa e as distâncias envolvidas são maiores, eles seriam melhores candidatos para se observar o fenômeno de lenteamento. Ele argumenta também que o método mais direto de determinação da massa seria utilizando a deflexão da luz. Infelizmente, à época, não parece ter havido interesse da comunidade científica em fazer um programa para se observar o fenômeno de lenteamento causado por estes objetos.

Depois de um longo tempo sem trabalhos sobre o assunto ele voltou a ser discutido com a primeira observação de um quasar em 1963 [11], tendo sido Jean M. Barnothy o primeiro a fazer a conexão entre tais objetos e o fenômeno de lentes gravitacionais [12]. Devido a seu espectro bem característico, seu alto desvio para o vermelho, serem fontes praticamente pontuais e possuírem uma alta luminosidade, estes objetos são fontes ideais para sofrerem lenteamento por um objeto extragalático que seja detectável.

A partir daí muitos aspectos teóricos das lentes gravitacionais foram desenvolvidos. Entretanto, tais pontos não despertaram muito interesse a ponto de se fazer uma busca sistemática por lentes gravitacionais.

Foi apenas em 1979 que foi observado o primeiro objeto lenteado [13], que se tratava da imagem duplicada de um quasar. Algum tempo depois, em meados da década de 1980, foram observados os primeiros arcos gravitacionais [14, 15], tais objetos são o resultado do lenteamento de fontes extensas, ou seja galáxias.

Dois anos depois foi observado o microlenteamento de um quasar [16]. Tal fenômeno ocorre quando a fonte passa por uma região onde a lente amplifica significativamente seu brilho. Neste caso não é possível diferenciar observacionalmente a fonte e a lente, apenas é possível medir a variação temporal do brilho do sistema. Pouco tempo depois foram observadas fontes de radio com formato de anel [17].

Finalmente, cerca de duzentos anos depois dos primeiros cálculos da deflexão da luz por uma estrela, é observado o primeiro fenômeno de microlenteamento por uma estrela [18]. Já no século XXI, em 2004, é descoberto o primeiro planeta extra-solar utilizado a mesma técnica [19].

## 1.2 Aplicações

Considerando a intensidade do efeito de lente gravitacional é comum dividi-lo em dois regimes, o de lenteamento fraco, que causa uma leve distorção das fontes e só pode

ser detectado estatisticamente observando um grande número de fontes, e o lenteamento forte, que é responsável pela grande deformação das fontes, geração de imagens múltiplas e fortes magnificações. As figuras 1.1 e 1.2 são exemplos onde ocorrem os dois regimes de lenteamento. Na primeira não é possível observar diretamente o lenteamento fraco, embora este seja detectado em análises desta imagem, enquanto na segunda a formação de arcos gravitacionais é evidente. O regime de lenteamento gravitacional forte será o foco desta dissertação.

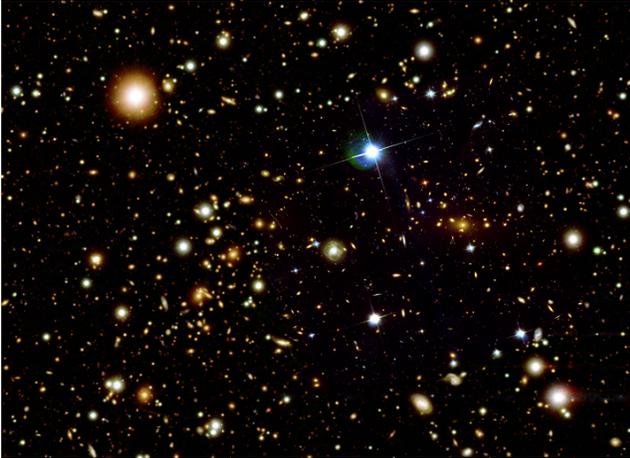


Figura 1.1: Aglomerado da Bala (NASA).

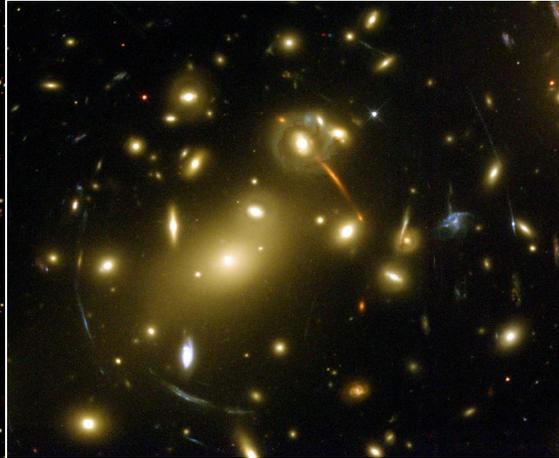


Figura 1.2: Abell 2218 (NASA).

O fenômeno de lenteamento pode ser usado para se obter vários tipos de informações sobre as fontes, o objeto que faz o lenteamento (chamado simplesmente de lente), ou propriedades da gravitação e cosmologia.

Usando o fato de que a luminosidade aparente das fontes pode ser altamente magnificada, as lentes gravitacionais podem ser utilizadas como “telescópios naturais”. Podemos destacar um caso em que foi detectada uma fonte com o desvio para o vermelho de aproximadamente 7 [20], tal fonte teve sua luminosidade amplificada por um fator de cerca de 25.

Outra aplicação é a determinação de aspectos da distribuição de massa do objeto que faz o lenteamento. Isto é possível pois as posições e magnificações das imagens múltiplas dependem apenas das propriedades da distribuição de massa da lente e das posições relativas das fontes. Assim é possível determinar os parâmetros de uma parametrização para a distribuição de massa. Um exemplo desta aplicação pode ser visto na referência [21].

No contexto cosmológico a aplicação mais conhecida das lentes gravitacionais é a determinação do parâmetro de Hubble. Como a luz das imagens múltiplas de um mesmo objeto percorre caminhos diferentes para cada imagem, logo haverá uma diferença no tempo de

viagem da luz entre diferentes imagens<sup>2</sup>. Se a fonte for variável, é possível calcular esta diferença de tempo de viagem da luz. Sabendo que, para um dado desvio para o vermelho, a distância é proporcional à constante de Hubble e a diferença no tempo é proporcional à distância, o produto  $H_0\Delta t$  é uma constante. Por outro lado, se a distribuição de massa da lente e a separação angular das imagens forem conhecidas é possível calcular o valor desta constante. Este método vem sendo aplicado a alguns sistemas de lentes gravitacionais [22] e tem obtido resultados satisfatórios.

Já no caso dos testes da gravitação pode-se utilizar a medição do ângulo de deflexão como um teste fundamental da teoria da relatividade geral. Uma parametrização para o ângulo de deflexão é dada por:

$$\hat{\alpha} = 2(\gamma + 1)\frac{GM}{c^2\xi}, \quad (1.3)$$

tal que para  $\gamma = 0$  temos a teoria Newtoniana e para  $\gamma = 1$  a relatividade geral. Resultados recentes mostram que este valor é de  $\gamma = 0.9998(4)$  [23].

Também podemos citar a estatística de arcos gravitacionais, que é o objeto de estudo desta dissertação. Sabe-se que a formação de arcos depende do perfil de densidade do objeto que faz o lenteamento, por outro lado as distâncias cosmológicas também possuem um papel importante no fenômeno de lentes gravitacionais. Sendo assim, a estatística de arcos se torna uma ferramenta importante no estudo das propriedades da cosmologia ou de galáxias e aglomerados de galáxias. Os detalhes acerca deste assunto serão abordados nas seções seguintes.

## 1.3 Introdução à Teoria das Lentes Gravitacionais

Nesta seção serão apresentados alguns elementos básicos da teoria de lentes gravitacionais. A maioria dos conceitos e definições utilizados nesta dissertação será discutida nas seções seguintes.

A figura 1.3 representa um esquema onde a luz de uma fonte é desviada pelo campo gravitacional de um objeto situado no plano da lente. As distâncias  $D_{OS}$ ,  $D_{OL}$  e  $D_{LS}$  são as distâncias de diâmetro angular entre o observador e a fonte, o observador e a lente e a lente e a fonte, respectivamente. Os ângulos  $\theta$  e  $\beta$  são a posição observada e real (i.e. o que se observaria na ausência do lenteamento) da fonte e  $\hat{\alpha}$  é o ângulo de deflexão.

Note que aqui está sendo considerando o caso de apenas um objeto fazendo o lentea-

---

<sup>2</sup>Esta diferença de tempo ocorre devido a dois fatores: a diferença entre as distâncias nos diferentes caminhos (“fator geométrico”) e a diferente atuação do campo gravitacional ao longo dos caminhos (“fator gravitacional”).

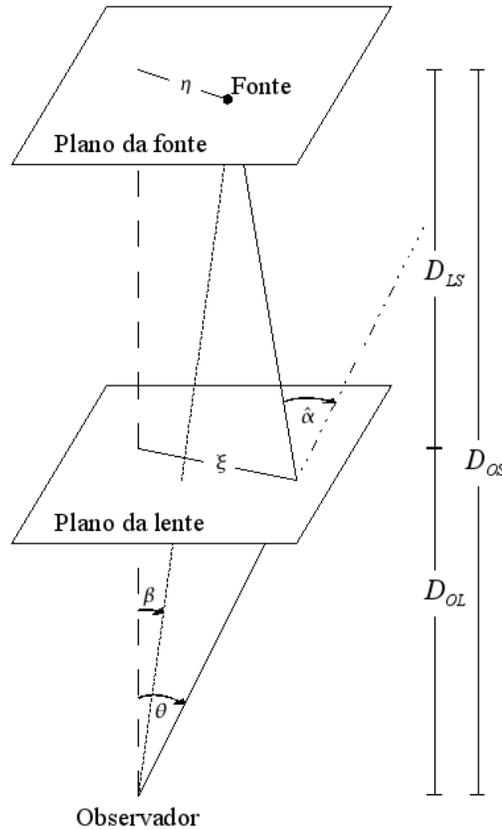


Figura 1.3: Esquema Fonte-Lente-Observador.

mento. No estudo da distribuição de matéria em grades escalas esta aproximação não é válida, pois a luz é desviada ao longo de toda a sua trajetória. Entretanto, para o estudo de formação de arcos, usualmente é considerado apenas um único objeto fazendo o lenteamento, o que de fato é uma excelente aproximação. Estudos recentes utilizando simulações mostram que a maior parte dos arcos é produzida por um único defletor, com a matéria ao longo da linha de visada contribuindo com cerca de 10% do número de arcos (veja, por exemplo, a referência [24]).

Outra aproximação que é feita é a chamada aproximação de lente fina. Nela considera-se que as dimensões do objeto que faz o lenteamento são muito menores do que as distâncias entre o observador e a lente, e a lente e a fonte. Com isto o desvio da luz ocorre apenas no chamado *plano da lente*, como é ilustrado na figura. No contexto de um único defletor esta aproximação é excelente, já que as dimensões da lente são de fato muito menores que as distâncias envolvidas.

No contexto das lentes gravitacionais a equação mais importante e também a mais simples é a chamada equação da lente, que pode ser facilmente compreendida através da

figura 1.3 e é dada por:

$$\vec{\theta}D_{OS} = \vec{\beta}D_{OS} + \hat{\alpha}D_{LS}. \quad (1.4)$$

Por simplicidade e, posteriormente, para facilitar cálculos numéricos é conveniente expressar esta equação em uma forma adimensional. Assim definem-se

$$\vec{x} \equiv \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} \text{ e } \vec{y} \equiv \frac{\vec{\eta}}{\eta_0}, \quad (1.5)$$

onde  $\xi_0$  é um comprimento característico arbitrário no plano da lente e  $\eta_0$  é seu equivalente no plano da fonte, que pela figura 1.3 fica dado por  $\eta_0 = \xi_0 \frac{D_{OS}}{D_{OL}}$ . Dividindo a equação 1.4 por  $\xi_0$  obtém-se

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}), \quad (1.6)$$

onde  $\vec{\alpha}(\vec{x}) \equiv \frac{D_{OL}D_{LS}}{\xi_0 D_{OS}} \hat{\alpha}(\xi_0 \vec{x})$ . Com isto o problema físico consiste na determinação da dependência do ângulo de deflexão com  $\vec{\xi}$ , ou seu correspondente  $\vec{x}$

### 1.3.1 Potencial da Lente

Como foi mencionado anteriormente será utilizada a aproximação de lente fina, com isto ao invés de utilizar a distribuição tri-dimensional da densidade de matéria é utilizada a projeção desta  $\Sigma(\vec{\xi})$  no plano da lente (i.e. integrando ao longo da linha de visada), ou seja:

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int_0^\infty dz \rho(\vec{\xi}, z). \quad (1.7)$$

Dado que o limite de campos fracos da relatividade geral é uma excelente aproximação nas situações onde é possível observar o lenteamento gravitacional atualmente, tem-se que cada elemento de matéria contribui linearmente para o ângulo de deflexão. Sendo assim pode-se pensar na lente extensa como uma soma de elementos de volume, cada um atuando como uma lente pontual. Lembrando a equação (1.2), o ângulo de deflexão pode ser escrito como

$$d\hat{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi' \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \quad (1.8)$$

onde  $\xi'$  é a distância do elemento de massa  $\Sigma d^2\xi'$  à origem, veja a figura 1.4. Para se obter a contribuição de todos os elementos de massa para o ângulo de deflexão deve-se somar todas as contribuições, ou seja

$$\hat{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (1.9)$$

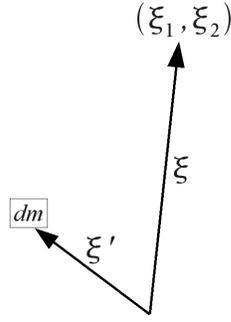


Figura 1.4: Esquema que evidencia as quantidades  $\xi$  e  $\xi'$ , no plano da lente.

Definindo o potencial da lente como sendo o potencial Newtoniano projetado no plano ortogonal à linha do observador,

$$\psi(\vec{\xi}) = \int dz \varphi(\vec{\xi}, z), \quad (1.10)$$

e utilizando o fato de que a equação de Poisson é satisfeita no limite de campos fracos, é possível mostrar que

$$\nabla_{\xi}^2 \psi(\vec{\xi}) = 4\pi G \Sigma(\vec{\xi}). \quad (1.11)$$

Utilizando a função de Green para o laplaciano em duas dimensões, que é dada por  $G(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|$ , o potencial da lente pode ser escrito como

$$\psi(\vec{\xi}) = 2G \int d^2 \xi' \Sigma(\vec{\xi}') \ln |\xi - \xi'|. \quad (1.12)$$

Comparando a equação acima com a (1.9) é possível ver que o ângulo de deflexão é dado em função do potencial da lente por

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\xi} \psi(\vec{\xi}). \quad (1.13)$$

Substituindo a equação acima em (1.4) e passando para as coordenadas adimensionais obtém-se:

$$\vec{x} = \vec{y} - \frac{2D_{LS}D_{OL}}{c^2 D_{OS}} \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x}). \quad (1.14)$$

Define-se o potencial adimensional da lente por

$$\Psi(\vec{x}) \equiv \frac{2D_{LS}D_{OL}}{c^2 D_{OS}} \psi(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 x' \kappa(\vec{x}') \ln |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (1.15)$$

onde

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{\Sigma(\vec{\xi})}{\Sigma_{cr}} \text{ e } \Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{LS}D_{OL}}, \quad (1.16)$$

são respectivamente a convergência e a densidade crítica. Assim a equação da lente toma a forma:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}), \quad (1.17)$$

e a equação (1.11) fica:

$$\nabla_x^2 \Psi(\vec{\xi}) = 2\kappa(\vec{x}). \quad (1.18)$$

### 1.3.2 Magnificação

O efeito de lenteamento possui duas propriedades importantes: é um efeito acromático, ou seja, não depende da frequência dos fótons da fonte; e mantém constante o número de fótons. Com isto o brilho superficial de uma imagem lenteada é o mesmo que se não houvesse o lenteamento. Então o aumento de brilho de um objeto decorre do aumento do ângulo sólido subtendido por este.

Com isto define-se a magnificação de uma imagem como a razão entre os ângulos sólidos da imagem e da fonte.

$$\mu = \frac{\Delta\Omega_{imagem}}{\Delta\Omega_{fonte}}. \quad (1.19)$$

Para uma fonte infinitesimal, a relação entre os ângulos sólidos é determinada pela distorção local da área no plano da lente, ou seja o determinante do jacobiano da transformação  $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$ , assim

$$\mu = \left| \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right|. \quad (1.20)$$

Entretanto, como a equação (1.17) fornece  $y$  em função de  $x$ , é melhor escrever a magnificação como

$$\mu = \left| \det \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right|^{-1}. \quad (1.21)$$

Com isso podemos pensar no fenômeno de lentes gravitacionais como uma transformação de coordenadas (equação 1.17) cuja matriz jacobiana é dada por

$$J_{ij} = \left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right)_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.22)$$

onde  $x_i$  denota a  $i$ -ésima componente de  $\vec{x}$  no plano da lente. Assim, o jacobiano fica escrito em termos das segundas derivadas do potencial da lente. A partir do jacobiano é

possível obter as informações do mapeamento entre os planos da lente e das fontes através do potencial da lente.

Por simplicidade vamos usar a seguinte notação,

$$\Psi_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.23)$$

De modo que

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 1 - \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & 1 - \Psi_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

Usando a equação (1.18) podemos escrever a matriz jacobiana da forma

$$\mathbf{J} = (1 - \kappa)\mathbf{I} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & -\frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \end{vmatrix}, \quad (1.25)$$

ou seja, foi feita a decomposição em uma parte isotrópica, proporcional à matriz identidade ( $\mathbf{I}$ ) e outra parte com o traço nulo. Esta última é chamada de matriz de cisalhamento, e é responsável pela distorção das imagens.

Agora pode-se definir um pseudo vetor,  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$  no plano da lente, tal que

$$\gamma_1(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \quad (1.26)$$

$$\gamma_2(\vec{x}) = \Psi_{12} = \Psi_{21}. \quad (1.27)$$

A equação (1.25) fica:

$$\mathbf{J} = (1 - \kappa)\mathbf{I} - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

Note que o termo  $\kappa$  é responsável pela mudança isotrópica no tamanho da imagem com relação à fonte e  $\gamma$  pela distorção da fonte. Como a matriz  $\mathbf{J}$  é simétrica não há rotação rígida da fonte. A mudança na orientação da imagem é devida à deformação anisotrópica (diferentes distorções em cada direção principal).

A magnificação total fica dada por:

$$\mu = |\det \mathbf{J}|^{-1} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}, \quad (1.29)$$

onde  $\gamma \equiv \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ . Os autovalores da matriz  $\mathbf{J}^{-1}$  são:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}, \quad (1.30)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (1.31)$$

## 1.4 Modelos de Lentes

Hoje existem vários modelos para a distribuição de massa em galáxias e aglomerados de galáxias. Nesta seção serão discutidos alguns destes modelos afim de ilustrar as principais características do lenteamento gravitacional. Em particular serão discutidos os modelos da esfera isotérmica singular, útil para modelar galáxias, e de Navarro-Frenk-White (NFW), o qual é um dos modelos realistas para grupos e aglomerados de galáxias, e que será o modelo utilizado ao longo deste trabalho.

### 1.4.1 Um Exemplo Simples: Lente Pontual

O exemplo mais simples de lente gravitacional é o caso do desvio da luz por uma massa pontual. Neste caso o ângulo de deflexão é dado pela equação (1.2). Escrevendo a equação (1.4) em termos das variáveis adimensionais tem-se:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}} \frac{1}{\xi_0^2} \frac{\vec{x}}{x^2}. \quad (1.32)$$

Escolhendo  $\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}}}$  a equação acima fica

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}}{x^2}, \quad (1.33)$$

onde  $x = |\vec{x}|$ .

Observe que esta é uma equação do segundo grau para  $x$ , ou seja, para uma posição real  $y$  haverá *duas* posições observadas  $x$ , onde

$$x_{\pm} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}. \quad (1.34)$$

Isto mostra a ocorrência de imagens múltiplas no fenômeno de lentes gravitacionais.

Agora, calculando o jacobiano da transformação tem-se:

$$\det \mathbf{J} = 1 - \frac{1}{x^4}, \quad (1.35)$$

ou seja, a magnificação fica sendo dada por:

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{-1}. \quad (1.36)$$

Observe que, para uma fonte localizada em  $y = 0$ , ou seja exatamente sobre a linha definida pelo observador e a lente, sua imagem será formada em  $x = 1$ . Ou melhor, uma fonte em  $y = 0$  será mapeada em um anel de raio  $\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}}}$  e, o que é mais interessante, com a magnificação  $\mu$  infinita! Este anel é chamado de anel de Einstein e foi previsto teoricamente no início do século passado, como visto na seção 1.1. Estas regiões de magnificação infinita são chamadas de curvas críticas, quando no plano da lente, e cáusticas, quando no plano da fonte.

Os autovalores da matriz de magnificação ficam:

$$\mu_1 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}, \quad (1.37)$$

$$\mu_2 = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1}. \quad (1.38)$$

Como será visto na próxima seção,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  representam uma magnificação (“esticamento”) na direção tangencial e radial respectivamente. Das equações acima pode-se ver que  $\mu_1$  tende a infinito quando  $x \rightarrow 1$ , enquanto  $\mu_2$  sempre será um número finito. É como se a imagem fosse esticada infinitamente na direção tangencial, formando assim o anel.

No caso da massa pontual a convergência e o cisalhamento serão dados por

$$\kappa = \pi\delta(\vec{x}), \quad (1.39)$$

$$\gamma = \frac{1}{x^2}, \quad (1.40)$$

onde  $\delta(\vec{x})$  é a função delta de Dirac.

### 1.4.2 Lentes com Simetria Axial

No caso de lenteamento por uma estrela, a aproximação de lente pontual é perfeitamente adequada. Agora, quando o objeto que atua como a lente são galáxias ou aglome-

rados de galáxias esta aproximação não é boa. Torna-se necessário portanto considerar a distribuição de massa ao longo do plano da lente.

Usando as equações (1.11) e (1.13) é possível escrever a seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\alpha} = \frac{8\pi G}{c^2} \Sigma(\vec{\xi}). \quad (1.41)$$

Lembrando que o teorema de Gauss em duas dimensões é dado por

$$\int_{S_\xi} \vec{\nabla} \cdot \hat{\alpha} dS = \oint_{C_\xi} \hat{\alpha} \cdot d\vec{l}, \quad (1.42)$$

onde  $C_\xi$  é a fronteira da área  $S_\xi$  e  $d\vec{l}$  aponta para fora de  $C_\xi$ ; utilizando o fato de que, devido à simetria circular, o ângulo de deflexão possui apenas componente na direção radial, escolhendo uma circunferência  $C_\xi$  com o mesmo centro que a distribuição de massa projetada e integrando os dois lados da equação (1.41) na área englobada por  $C_\xi$ , obtém-se

$$\int_0^{2\pi} \hat{\alpha} \xi d\phi = \frac{8\pi G}{c^2} \underbrace{\int_{S_\xi} \Sigma(\xi) dS}_{M(\xi)}, \quad (1.43)$$

onde  $\phi$  é a componente angular das coordenadas polares. Sendo assim a equação (1.9) fica:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM(\xi)}{c^2 \xi} \hat{r}, \quad (1.44)$$

onde  $M(\xi)$  é a massa compreendida no raio  $\xi$  e  $\hat{r}$  o versor na direção radial. A equação da lente em sua forma adimensional será dada por:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{1}{\pi \Sigma_{cr} \xi_0^2} \frac{M(\xi_0 x)}{x^2} \vec{x}. \quad (1.45)$$

Definindo a massa adimensional como sendo:

$$m(x) = \frac{1}{\pi \xi_0^2} \frac{M(\xi_0 x)}{\Sigma_{cr}}, \quad (1.46)$$

a equação da lente fica

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{m(x)}{x^2} \vec{x}. \quad (1.47)$$

Calculando as derivadas parciais de (1.47), usando a relação  $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{x_i}{x} \frac{d}{dx}$ , a matriz

jacobiana fica:

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{m(x)}{x^4} \begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{vmatrix} - \frac{m(x)'}{x^3} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}, \quad (1.48)$$

onde  $' \equiv \frac{d}{dx}$ . O determinante desta é dado por:

$$\det \mathbf{J} = \left[ 1 - \frac{m(x)}{x^2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{m(x)}{x} \right)' \right] \quad (1.49)$$

Observe que agora o determinante da matriz jacobiana se anula em dois casos: quando  $\frac{m(x)}{x^2} = 1$  ou  $\left( \frac{m(x)}{x} \right)' = 1$ . Isto mostra a existência de duas curvas críticas, onde ambas são circunferências, pois a equação (1.49) depende apenas do módulo de  $\vec{x}$ .

É possível mostrar que cada um dos termos entre colchetes na equação (1.49) corresponde a um autovalor de  $\mathbf{J}$  ( $1 - \kappa - \gamma$  e  $1 - \kappa + \gamma$  respectivamente). A figura 1.5 mostra o mapeamento de uma fonte circular infinitesimal de diâmetro  $\delta$  em uma elipse de eixos  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . É visto na figura que em relação à origem a fonte subtende o ângulo  $\phi = \frac{\delta}{y}$ . Como a simetria circular mantém constante a componente angular é possível escrever também  $\phi = \frac{\rho_1}{x}$ .

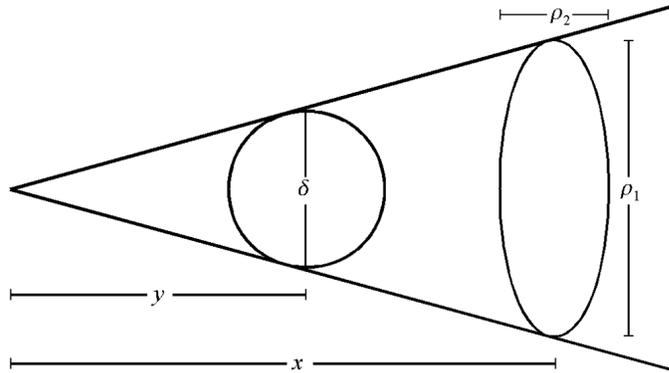


Figura 1.5: Deformação de uma fonte infinitesimal circular em uma elipse (figura no plano perpendicular à linha de visada)

Utilizando a equação (1.47) obtém-se:

$$\frac{\delta}{\rho_1} = \frac{y}{x} = 1 - \frac{m(x)}{x}. \quad (1.50)$$

Escrevendo o diâmetro da imagem como  $\rho_2 = \frac{dx}{dy}\delta$ , encontra-se

$$\frac{\delta}{\rho_2} = \frac{dy}{dx} = 1 - \left(\frac{m(x)}{x}\right)'. \quad (1.51)$$

Com isto observa-se que as fontes são esticadas na direção radial por um fator de  $\left[1 - \left(\frac{m(x)}{x}\right)'\right]^{-1}$  e na direção tangencial por  $\left[1 - \frac{m(x)}{x}\right]^{-1}$ . No caso de simetria circular, os autovalores (equações 1.30 e 1.31) estão associados às magnificações nas direções tangencial e radial, onde  $\mu_1 = \mu_t$  e  $\mu_2 = \mu_r$ .

### 1.4.3 Esfera Isotérmica Singular

Um dos modelos de distribuição de massa mais simples é dado pela *Esfera Isotérmica Singular*. O perfil de densidade deste modelo é obtido assumindo uma distribuição de matéria com simetria esférica e o comportamento de um gás ideal isotérmico em equilíbrio hidrostático. Neste caso a densidade é dada por:

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi Gr^2}, \quad (1.52)$$

onde  $\sigma_v$  é a dispersão de velocidades unidimensional das partículas e  $r$  a distância ao centro da esfera. Calculando a projeção no plano da lente, obtém-se

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} 2 \int_0^\infty \frac{dz}{\xi^2 + z^2} = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi}. \quad (1.53)$$

Observe que o perfil de densidade diverge quando  $\xi \rightarrow 0$ , daí a palavra *singular* no nome do modelo. Apesar deste comportamento patológico na origem, este modelo consegue reproduzir as curvas de rotação planas das galáxias espirais.

Escrevendo

$$\frac{\Sigma(\xi)}{\Sigma_{cr}} = \frac{\xi_0}{2\xi} \frac{4\pi\sigma_v^2 D_{LS} D_{OS}}{c^2 D_{OS} \xi_0}, \quad (1.54)$$

e escolhendo  $\xi_0 = \frac{4\pi\sigma_v^2 D_{LS} D_{OS}}{c^2 D_{OS}}$ , a convergência fica dada por

$$\kappa(x) = \frac{1}{2x}. \quad (1.55)$$

Afim de calcular o potencial da lente pode-se utilizar a equação (1.18), cuja solução formal

para a convergência dada pela equação (1.55) é

$$\Psi(x) = x + c_1 + c_2 \ln(x), \quad (1.56)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração. Observe que para a equação acima gerar um ângulo de deflexão dado pela equação (1.44) a constante de integração  $c_2$  deve ser nula. Como as quantidades relevantes dependem apenas das derivadas do potencial da lente pode-se fazer também a constante  $c_1$  igual a zero, ou seja,  $c_1 = c_2 = 0$ , de modo que

$$\Psi(x) = x. \quad (1.57)$$

Usando (1.17), a equação da lente pode ser escrita como

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}}{x}, \quad (1.58)$$

cujo jacobiano é

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{x^3} \begin{vmatrix} x^2 - x_1^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x^2 - x_2^2 \end{vmatrix}, \quad (1.59)$$

o qual possui determinante dado por

$$\det \mathbf{J} = \frac{x - 1}{x}. \quad (1.60)$$

Note que neste caso o jacobiano é nulo apenas em  $x = 1$ . Isto mostra que a esfera isotérmica singular possui apenas uma curva crítica, que é associada à magnificação tangencial, o que pode ser visto calculando os autovalores radial e tangencial da matriz de magnificação. Também é fácil ver que neste modelo não há magnificação radial.

#### 1.4.4 Modelo de Navarro-Frenk-White (NFW)

Um modelo mais realista para representar aglomerados de galáxias é o conhecido como modelo de Navarro-Frenk-White (NFW), o qual é obtido a partir da análise de simulações de N-corpos (veja as referências [25] e [26]) e pode ser utilizado em diversas cosmologias. É observado que as médias do perfil de densidade de cada aglomerado possuem um comportamento universal, que é dado por:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (1.61)$$

onde  $\rho_s$  e  $r_s$  são a densidade e escala características.

Observe que para regiões próximas ao centro do aglomerado ( $r/r_s \ll 1$ ) tem-se  $\rho \propto r^{-1}$ , ou seja, o perfil é mais suave que o modelo da Esfera Isotérmica Singular. Já para as regiões mais afastadas do centro do aglomerado a densidade cai mais rapidamente, pois  $\rho \propto r^{-3}$ .

Calculando a massa em uma região de raio  $r_\Delta$  obtém-se

$$M_{r_\Delta} = \frac{4\pi\rho_s r_\Delta^3}{C^3} \left( \ln(1+C) - \frac{C}{1+C} \right), \quad (1.62)$$

onde  $C \equiv \frac{r_\Delta}{r_s}$  é chamado de parâmetro de concentração. Note que a massa do aglomerado diverge para  $r_\Delta \rightarrow \infty$ , entretanto é possível definir um “raio do aglomerado” ( $r_\Delta$ ) como sendo tal que sua densidade média seja  $\Delta$  vezes maior que uma determinada densidade de referência  $\rho_{\text{ref}}$ . Esta densidade  $\rho_{\text{ref}}$  pode ser, por exemplo, a densidade crítica do universo ( $\rho_{\text{crit}}$ ), a densidade média do universo ( $\rho_u$ ), ou a densidade de massa do universo ( $\rho_m$ ). Já para o contraste  $\Delta$  pode ser utilizado um valor fixo (usualmente 180 ou 200) ou a dependência da escala de virialização com a cosmologia.

Utilizando a definição de  $r_\Delta$ , a densidade característica ( $\rho_s$ ) do aglomerado é dada por

$$\rho_s = \frac{\Delta}{3} \frac{C^3}{\left( \ln(1+C) - \frac{C}{1+C} \right)} \rho_{\text{ref}}, \quad (1.63)$$

e a expressão para  $r_s$  fica

$$r_s = \frac{r_\Delta}{C} = \frac{1}{C} \left( \frac{3M_{r_\Delta}}{4\pi\Delta\rho_{\text{ref}}} \right)^{1/3}. \quad (1.64)$$

Projetando a densidade dada pela equação (1.61), no plano da lente tem-se que a convergência é dada por (veja a referência [27])

$$\kappa(x) = 2\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1}, \quad (1.65)$$

sendo

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\text{ArcTan}(\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} & , \quad x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ \frac{\text{ArcTanh}(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad x < 1 \end{cases}, \quad (1.66)$$

onde

$$x = \frac{r}{r_s} \quad \text{e} \quad k_s = \frac{\rho_s r_s}{\Sigma_{cr}}. \quad (1.67)$$

O potencial da lente é

$$\Psi(x) = 2\kappa_s r_s^2 \left[ \ln^2 \frac{x}{2} - \text{ArcTanh}^2 \sqrt{1 - x^2} \right]. \quad (1.68)$$

## Capítulo 2

# Formação de Arcos e Cálculo da Seção de Choque

Como foi discutido no capítulo anterior o lenteamento por galáxias ou aglomerados de galáxias pode distorcer tanto uma fonte que está terá a aparência de um arco. Um aspecto importante ao estudar arcos gravitacionais é quantificar a eficiência das lentes em formar os arcos, o que é feito através do cálculo da seção de choque de formação de arcos. Este é um integrante essencial para o cálculo da fração de arcos, que é um observável direto, como será discutido no capítulo 3.

Na próxima seção será obtida uma expressão para as derivadas do potencial da lente em modelos de densidade superficial de massa com simetria elíptica. Em seguida será discutida a definição de um arco gravitacional, onde será introduzida uma aproximação que relaciona a razão das magnificações com a razão entre o comprimento e a largura das imagens. A seção seguinte será dedicada à seção de choque de formação de arcos (a qual será referida apenas por “seção de choque”), que é uma medida da área efetiva da região, no plano das fontes, que levará à formação de arcos, sendo discutida a sua dependência com os parâmetros da lente ainda naquela seção. Por último será estudado o comportamento da seção de choque com relação à magnificação mínima das fontes ( $\mu_{\min}$ ) e à razão entre o comprimento e a largura das imagens ( $L/W$ ). Aqui serão propostas aproximações para a dependência da seção de choque com estas duas quantidades.

### 2.1 Lentes com Simetria Elíptica

Por construção, o modelo NFW possui simetria esférica, logo sua projeção possui simetria circular. Entretanto, tanto as simulações, quanto os dados observacionais mostram

que a maioria das galáxias e aglomerados possui estrutura triaxial, que pode ser aproximada por elipsóides. É possível mostrar que a projeção em um plano de um objeto elipsoidal possui simetria elíptica [28], sendo que um número significativo destas projeções possui elipticidade<sup>1</sup> maior do que 0.5, o que torna fundamental considerar os efeitos da elipticidade.

Afim de se considerar os efeitos da elipticidade, um procedimento muito comum é construir potenciais ou densidades projetadas que possuem essa simetria. Isto é feito impondo que o potencial ou a convergência sejam constantes sobre elipses, ou seja, substituindo a variável radial (que é constante sobre círculos) por uma que possua simetria elíptica (constante sobre elipses), ou seja:

$$x^2 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (2.1)$$

A vantagem de se introduzir a simetria elíptica no potencial vem da possibilidade de se obter uma expressão analítica para o ângulo de deflexão, uma vez que este é escrito em termos das derivadas do potencial. Já se a simetria for incluída diretamente na densidade de massa projetada, em geral não é possível obter uma expressão analítica para o potencial, tornando necessário a utilização de algoritmos numéricos para calcular o ângulo de deflexão e suas derivadas.

Estudos mostram que a utilização do potencial elíptico é uma boa aproximação para valores baixos de elipticidade [29], porém, para valores grandes de  $e$  (maiores que 0.4) esta aproximação perde o sentido físico. Neste trabalho será considerada a simetria elíptica introduzida diretamente na densidade projetada.

Aqui será discutido um método para gerar distribuições de massa projetada elípticas a partir de modelos com simetria axial. Este possibilitará escrever o ângulo de deflexão e suas derivadas, ou seja, o jacobiano, em termos de integrais simples de serem calculadas numericamente.

O desenvolvimento que será realizado é bastante semelhante ao feito por Charles R. Keeton [30], entretanto este autor utiliza uma parametrização da equação (2.1) onde  $a = 1$  e  $b = 1 - e$ . Com esta escolha as elipses possuirão áreas diferentes para diferentes valores de elipticidade, ou seja, a massa no interior de um isocontorno da convergência será diferente para diferentes valores de  $e$ . Com isto, ao observar a dependência da formação de arcos com a elipticidade, haveria também o efeito da mudança da massa do aglomerado.

Afim de se manter a massa constante, dentro de um iso-contorno, ao variar a eliptici-

---

<sup>1</sup>A elipticidade é definida aqui como  $e \equiv 1 - b/a$ , onde  $a$  e  $b$  são respectivamente os semi-eixos maior e menor.

dade, é mais conveniente utilizar a parametrização da equação (2.1) dada por  $a = q^{-1/2}$  e  $b = q^{1/2}$ , onde  $q = 1 - e$ . Por este motivo é necessário que sejam reobtidos os resultados de [30] para esta parametrização.

A figura 2.1 mostra, no primeiro quadro, duas elipses com diferentes valores de elipticidade para a parametrização utilizada em [30]. No segundo quadro é utilizada a parametrização que mantém as áreas das elipses constantes em relação à elipticidade.

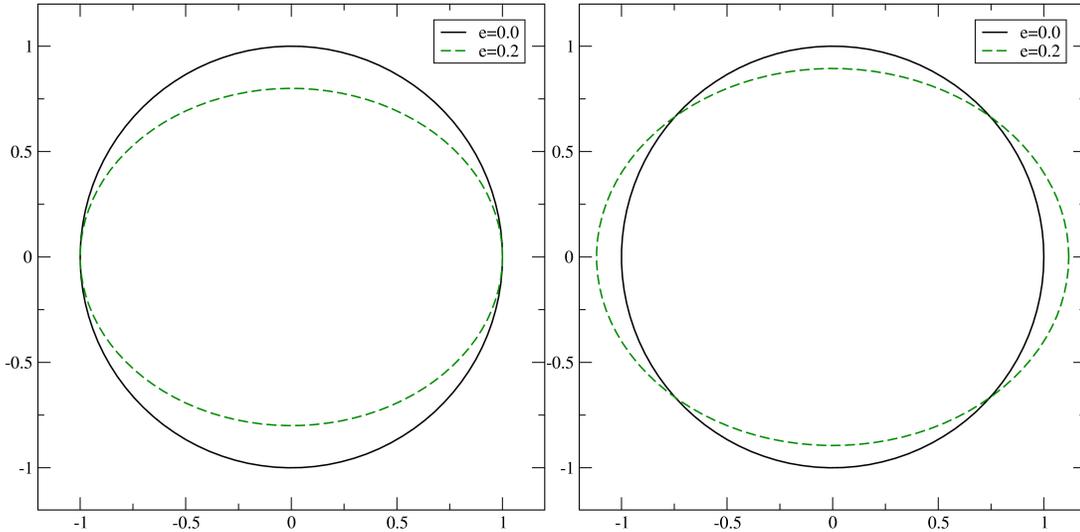


Figura 2.1: Elipses com  $e = 0.0$  e  $0.2$  para a parametrização utilizada em [29] (figura da esquerda) e para a parametrização que mantém as áreas constantes (figura da direita).

### 2.1.1 Elipses Concêntricas e Confocais

Elipses são curvas definidas por

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (2.2)$$

Como mencionado anteriormente, a elipticidade é definida por

$$e = 1 - \frac{b}{a}, \quad (2.3)$$

sendo  $a \geq b$ , pois a elipse sempre será considerada com o eixo maior ao longo do eixo  $x_1$ .

Um parâmetro importante é o chamado de *parâmetro perpendicular*  $p$  em um ponto  $(x_1, x_2)$  da elipse. Este parâmetro é a distância do centro à linha tangente à elipse no

ponto  $(x_1, x_2)$ . É possível mostrar que

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4}. \quad (2.4)$$

Posteriormente será utilizado um conjunto de elipses concêntricas, que são definidas através de um parâmetro  $m$ ,

$$\frac{x_1^2}{(ma)^2} + \frac{x_2^2}{(mb)^2} = 1, \quad (2.5)$$

onde  $m > 0$ . Com isto cada valor de  $m$  define uma elipse concêntrica à elipse com semi-eixos  $a$  e  $b$ . Da mesma forma pode ser definido um conjunto de elipses com o mesmo foco, ou seja, confocais, através da relação

$$\frac{x_1^2}{(a + \lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(b + \lambda)^2} = 1. \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Ângulo de Deflexão para Densidade Superficial Elíptica

Fazendo uma analogia entre a força gravitacional e o ângulo de deflexão, pois ambos são derivadas de potenciais, é possível mostrar que o ângulo de deflexão causado por um anel elíptico de massa  $M$  é dado por (veja a referência [31])

$$\hat{\alpha}_1(x_1, x_2) = -\frac{2GM}{c^2} \frac{2\dot{p}^2 x_1}{\dot{a}\dot{b} \dot{a}^2}, \quad (2.7)$$

$$\hat{\alpha}_2(x_1, x_2) = -\frac{2GM}{c^2} \frac{2\dot{p}^2 x_2}{\dot{a}\dot{b} \dot{b}^2}, \quad (2.8)$$

onde  $\dot{a}^2 = a^2 + \lambda$ ,  $\dot{b}^2 = b^2 + \lambda$  e  $M$  é a massa do anel. Note que  $\dot{p}$  fica definido pela equação (2.4), em relação aos semi-eixos  $\dot{a}$  e  $\dot{b}$ .

É possível estender as equações acima para o caso de uma distribuição ao longo plano da lente integrando as contribuições de anéis infinitesimais para o ângulo de deflexão. As componentes deste ficam escritas como

$$\hat{\alpha}_1(x_1, x_2) = -\frac{8\pi G}{c^2} ab \int_0^{m_0} \frac{p'^2 x_1}{a'b' a'^2} \Sigma(m) dm, \quad (2.9)$$

$$\hat{\alpha}_2(x_1, x_2) = -\frac{8\pi G}{c^2} ab \int_0^{m_0} \frac{p'^2 x_2}{a'b' b'^2} \Sigma(m) dm, \quad (2.10)$$

onde aqui  $a'^2 = (ma)^2 + \lambda$ ,  $b'^2 = (mb)^2 + \lambda$  e  $p'$  é definido em relação ao semi-eixos  $a'$  e  $b'$ . Observe que o parâmetro  $m$  é definido pela equação (2.5) e  $m_0$  é o valor de  $m$  na posição

$(x_1, x_2)$  onde o ângulo de deflexão é calculado. Os parâmetros  $\lambda$  e  $p'$  são obtidos através de:

$$\frac{x_1^2}{(ma)^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{(mb)^2 + \lambda} = 1, \quad (2.11)$$

$$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} = \frac{1}{p'^2}. \quad (2.12)$$

Utilizando as equações acima é possível simplificar as integrais do ângulo de deflexão em

$$\hat{\alpha}_1(x_1, x_2) = -\frac{8\pi G}{c^2} abx_1 \int_0^{m_0} \frac{\omega}{x_1^2 + x_2^2 \omega^4} \Sigma(m) m dm, \quad (2.13)$$

$$\hat{\alpha}_2(x_1, x_2) = -\frac{8\pi G}{c^2} abx_2 \int_0^{m_0} \frac{\omega^3}{x_1^2 + x_2^2 \omega^4} \Sigma(m) m dm, \quad (2.14)$$

onde

$$\omega^2 = \frac{L + m^2(a^2 - b^2) + x_1^2 + x_2^2}{L - m^2(a^2 - b^2) + x_1^2 + x_2^2}, \quad (2.15)$$

e

$$L^2 = [(a^2 - b^2) m^2 - x_1^2 + x_2^2]^2 + 4x_1^2 x_2^2. \quad (2.16)$$

Esta forma de escrever as integrais já havia sido obtida em trabalhos anteriores, como em [32].

Afim de simplificar as integrais acima é usual fazer uma substituição de variáveis semelhante à feita em [30]. A substituição é dada por

$$m^2 = u \left( \frac{x_1^2}{1 - (1 - a^2)u} + \frac{x_2^2}{1 - (1 - b^2)u} \right). \quad (2.17)$$

Substituindo a equação acima na expressão para  $L$  e fazendo algumas simplificações, obtém-se

$$L = \left| \frac{x_1^2}{\sigma} + \sigma x_2^2 \right|, \quad (2.18)$$

onde

$$\sigma = \frac{1 - (1 - a^2)u}{1 - (1 - b^2)u}. \quad (2.19)$$

Se for utilizada a parametrização  $a = q^{-1/2}$  e  $b = q^{1/2}$ , sendo que  $0 \leq q \leq 1$ , os intervalos de valores para  $a$  e  $b$  são:  $1 < a < \infty$  e  $0 < b < 1$ . De modo que  $\sigma > 0$ . Com isto será possível retirar o módulo da equação (2.18), o que possibilitará que sejam feitas simplificações para a obtenção das expressões finais das integrais. A expressão para  $\omega$  fica

simplesmente

$$\omega^2 = \frac{1 - (1 - a^2)u}{1 - (1 - b^2)u}. \quad (2.20)$$

Observe que o limite superior das integrais na nova variável  $u$  é 1, pois  $m^2(1) = m_0^2$ . Substituindo todos estes elementos nas integrais é possível escrever

$$\hat{\alpha}_1(x_1, x_2) = -\frac{4\pi G}{c^2} abx_1 \int_0^1 \frac{\Sigma(m(u))}{[1 - (1 - b^2)u]^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - a^2)u]^{\frac{3}{2}}} du, \quad (2.21)$$

$$\hat{\alpha}_2(x_1, x_2) = -\frac{4\pi G}{c^2} abx_2 \int_0^1 \frac{\Sigma(m(u))}{[1 - (1 - b^2)u]^{\frac{3}{2}} [1 - (1 - a^2)u]^{\frac{1}{2}}} du. \quad (2.22)$$

Como foi visto no capítulo anterior, as quantidades de interesse podem ser escritas em termos das derivadas do potencial da lente, que podem ser obtidas através das equações acima. Lembrando que o ângulo de deflexão é dado pelo gradiente do potencial da lente através da equação (1.13) e utilizando as definições (1.16) e (1.15), é fácil mostrar que

$$\vec{\nabla}\Psi(x_1, x_2) = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{\hat{\alpha}(x_1, x_2)}{\Sigma_{\text{cr}}}. \quad (2.23)$$

Sendo assim, é possível escrever as derivadas do potencial da lente como:

$$\Psi_1(x_1, x_2) = abx_1 J_0, \quad (2.24)$$

$$\Psi_2(x_1, x_2) = abx_2 J_1, \quad (2.25)$$

$$\Psi_{11}(x_1, x_2) = 2abx_1^2 K_0 + abJ_0, \quad (2.26)$$

$$\Psi_{22}(x_1, x_2) = 2abx_2^2 K_2 + abJ_1, \quad (2.27)$$

$$\Psi_{12}(x_1, x_2) = 2abx_1 x_2 K_1, \quad (2.28)$$

onde as integrais são:

$$J_n(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\kappa(m(u))}{[1 - (1 - b^2)u]^{\frac{1}{2}+n} [1 - (1 - a^2)u]^{\frac{3}{2}-n}} du, \quad (2.29)$$

$$K_n(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{u\kappa'(m(u))}{[1 - (1 - b^2)u]^{\frac{1}{2}+n} [1 - (1 - a^2)u]^{\frac{5}{2}-n}} du, \quad (2.30)$$

sendo  $\kappa'(m) = \frac{d\kappa(m)}{d(m^2)}$  e a definição de  $\kappa$  é dada pela equação (1.16). Estas integrais são uma generalização das apresentadas na referência [30], as quais são recuperadas para a parametrização  $a = 1$  e  $b = q$ . Até onde sabemos, esta é a primeira vez que as integrais

(2.29) e (2.30) são apresentadas em sua forma geral.

## 2.2 Formação de Arcos

Uma pergunta fundamental que pode ser feita é: como se define um arco gravitacional? De modo geral existem dois tipos de arcos: os radiais, que são altamente esticados na direção radial, e os tangenciais, os quais são deformados aproximadamente na direção tangencial. Os arcos radiais se formam próximos da região central da lente e geralmente são desmagnificados ( $|\mu| < 1$ ), o que torna muito difícil sua detecção. Já os arcos tangenciais se formam em regiões mais afastadas da lente e são altamente magnificados. Neste trabalho serão considerados apenas os arcos tangenciais.

Nas imagens e simulações, os arcos gravitacionais se apresentam como objetos alongados e muito finos. Uma definição simples e bastante usada na literatura é utilizando a razão entre o comprimento e a largura dos objetos ( $L/W$  do inglês *length* e *width*). Usando este parâmetro diz-se que um objeto é lenteado como um arco se ele possuir a razão  $L/W$  maior que um determinado valor, tipicamente da ordem de 10, o que exclui os arcos radiais. A figura 2.2 é um exemplo de uma imagem real de um arco gravitacional que ilustra esta definição.

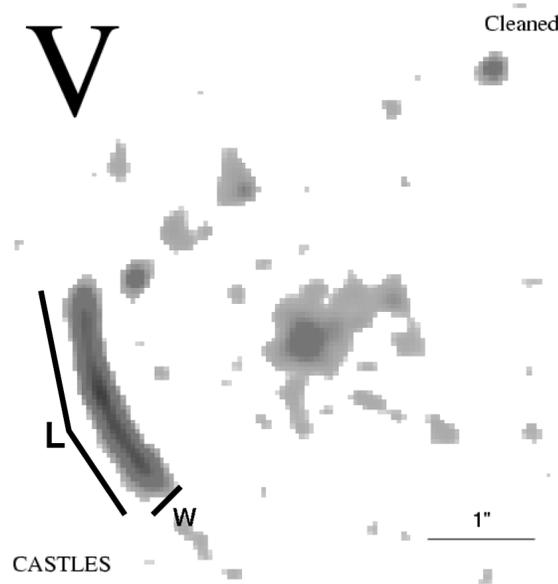


Figura 2.2: Imagem de um arco gravitacional onde podem ser vistas as quantidades comprimento ( $L$ ) e largura ( $W$ ), veja a referência [32].

Para se obter a razão comprimento-largura da imagem de uma fonte finita, é necessário

fazer um mapeamento do plano das fontes para o plano da lente, o que não é simples, pois envolve inverter a equação da lente (1.4). Com isto, o cálculo das propriedades da imagem se torna dispendioso, pois é necessário inverter numericamente a equação da lente para diversos pontos, de modo a criar uma imagem de uma fonte extensa. Afim de evitar essas dificuldades, e por simplicidade, será utilizada uma aproximação para  $L/W$ , a saber, que essa razão é dada pela razão local entre as deformações tangencial e radial<sup>2</sup>  $|\mu_t/\mu_r|$ .

Este método funciona muito bem quando é possível separar todas as imagens de uma mesma fonte. Existe o caso em que duas, ou mais imagens de um mesmo objeto ficam fundidas, gerando assim o que é chamado de arco de fusão. Os arcos de fusão são geralmente mais alongados que os arcos formados por apenas uma imagem (arcos de distorção).

Se forem considerados apenas os casos de arcos de distorção e fontes circulares infinitesimais, substituir a razão  $L/W$  por  $|\mu_t/\mu_r|$  é uma boa aproximação. Estudos mostram que esta aproximação é válida para valores até cerca de 10 [33, 34]. Tal aproximação é extremamente útil, uma vez que uma propriedade não local (razão comprimento largura) é substituída por uma local que é obtida facilmente, pois é calculada apenas para um ponto por arco, e diretamente no plano das imagens.

## 2.3 Seção de Choque para Formação de Arcos

Uma quantidade importante para o cálculo da estatística de arcos é a chamada seção de choque de formação de arcos, que será referida simplesmente por seção de choque. A seção de choque é definida como sendo a *área efetiva, no plano das fontes, onde um objeto ali encontrado é mapeado como um arco*. *Área efetiva* se refere ao fato de que as regiões que darão origem a imagens múltiplas serão contadas um número de vezes igual ao número de imagens geradas.

Como a seção de choque é definida em função da formação ou não de arcos, ela dependerá da definição do que é um arco gravitacional. No caso da definição apresentada na seção anterior, a seção de choque dependerá da escolha de uma dada razão  $L/W$  ou melhor de  $|\mu_t/\mu_r|$ . Naturalmente, a seção de choque dependerá dos parâmetros da lente. No caso do modelo NFW elíptico, a seção de choque dependerá dos parâmetros  $\kappa_s$  e elipticidade ( $e$ ).

A partir de agora será necessário utilizar cálculos numéricos para a obtenção das quantidades de interesse, tais como seção de choque e, posteriormente, fração de arcos.

---

<sup>2</sup>No caso de lentes com simetria elíptica, os auto-valores da matriz jacobiana não correspondem exatamente aos auto-valores nas direções radial e tangencial. Entretanto, a deformação se dará em direções próximas a estas e  $\mu_t$  e  $\mu_r$  serão dados por  $\mu_1$  e  $\mu_2$  nas equações (1.30) e (1.31)

Como os detalhes e implementações dos métodos numéricos não são a parte principal deste estudo, nas próximas seções serão apresentados os aspectos gerais da forma de calcular a seção de choque. No apêndice A serão explicados os detalhes dos programas implementados.

### 2.3.1 Cálculo da Seção de Choque

Dada a definição do que é um arco através da razão  $\mu_t/\mu_r$  o primeiro passo é calcular as magnificações. Isto é feito através dos auto-valores da matriz jacobiana dada pela equação (1.24), onde as derivadas do potencial são calculadas numericamente através das equações (2.26-2.28). Com isto é possível calcular, no plano da lente, os valores das magnificações em função de  $x_1$  e  $x_2$ .

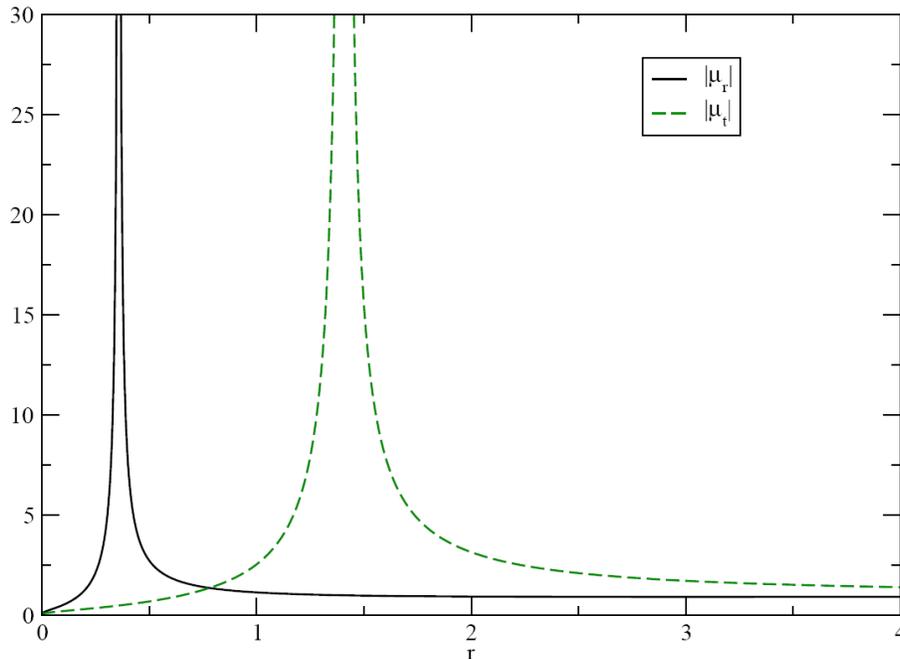


Figura 2.3: Magnificações radial e tangencial, ao longo do eixo  $x$ , para  $\kappa_s = 1.0$  e  $e = 0.2$ .

A figura 2.3 mostra o comportamento das magnificações radial e tangencial ao longo do eixo  $x$  para o modelo de NFW elíptico. Note que ambas possuem divergência em um ponto, sendo que a magnificação radial diverge mais próximo ao centro. Essas divergências correspondem às curvas críticas radial e tangencial. Para regiões distantes do centro ambas tendem à 1.

Uma vez tendo as magnificações nas direções radial e tangencial, é trivial calcular a razão entre elas. A figura 2.4 mostra o gráfico desta razão. Deste gráfico é possível

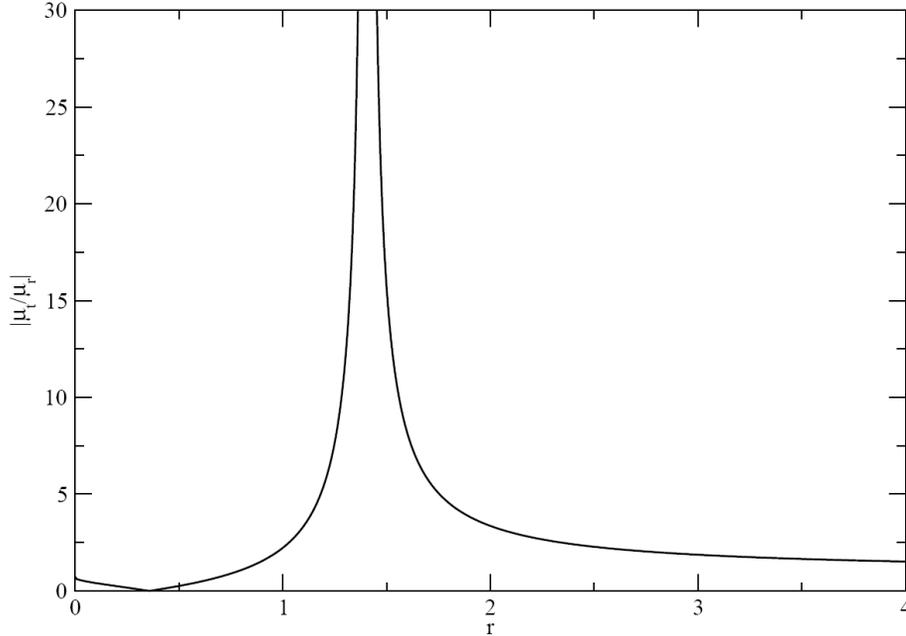


Figura 2.4: Razão das magnificações tangencial, ao longo do eixo  $x$ , e radial para  $\kappa_s = 1.0$ ,  $e = 0.2$ .

observar que a região  $|\mu_t/\mu_r| > 10$  está próxima à curva crítica tangencial.

A forma utilizada para se obter a região  $|\mu_t/\mu_r| > \text{constante}$  foi calcular  $|\mu_t/\mu_r|$ , ao longo da direção radial ( $r$ ), para vários valores da coordenada angular ( $\theta$ ). Para cada valor de  $\theta$  foram encontrados os dois pontos em que  $|\mu_t/\mu_r| = \text{constante}$ , sendo assim possível construir toda a região  $|\mu_t/\mu_r| > \text{constante}$ . Na figura 2.5 as linhas contínua e tracejada mostram a região, no plano da lente, onde  $|\mu_t/\mu_r| = 10$  e a pontilhada é a curva crítica tangencial.

A formação dos arcos tangenciais se dará na região entre as curvas contínua e tracejada na figura 2.5. Entretanto, a região que interessa está no plano das fontes. A figura 2.6 mostra, em cinza, a região no plano das fontes correspondente à região mostrada na figura 2.5. Com isto, uma fonte localizada na região em cinza no plano das fontes será mapeada como arco no plano da lente (plano onde as imagens se formam).

Devido à forma da região mostrada na figura 2.6, não é simples calcular a área diretamente. Já esta região no plano da lente possui uma forma bem definida. A forma mais simples de se calcular a área efetiva da figura 2.6 é calculando a área no plano da lente pesada pelo jacobiano da transformação, ou seja:

$$\sigma \equiv \int_{\left|\frac{\mu_t}{\mu_r}\right| > C} d^2y = \int_{\left|\frac{\mu_t}{\mu_r}\right| > C} |\det \mathbf{J}| d^2x, \quad (2.31)$$

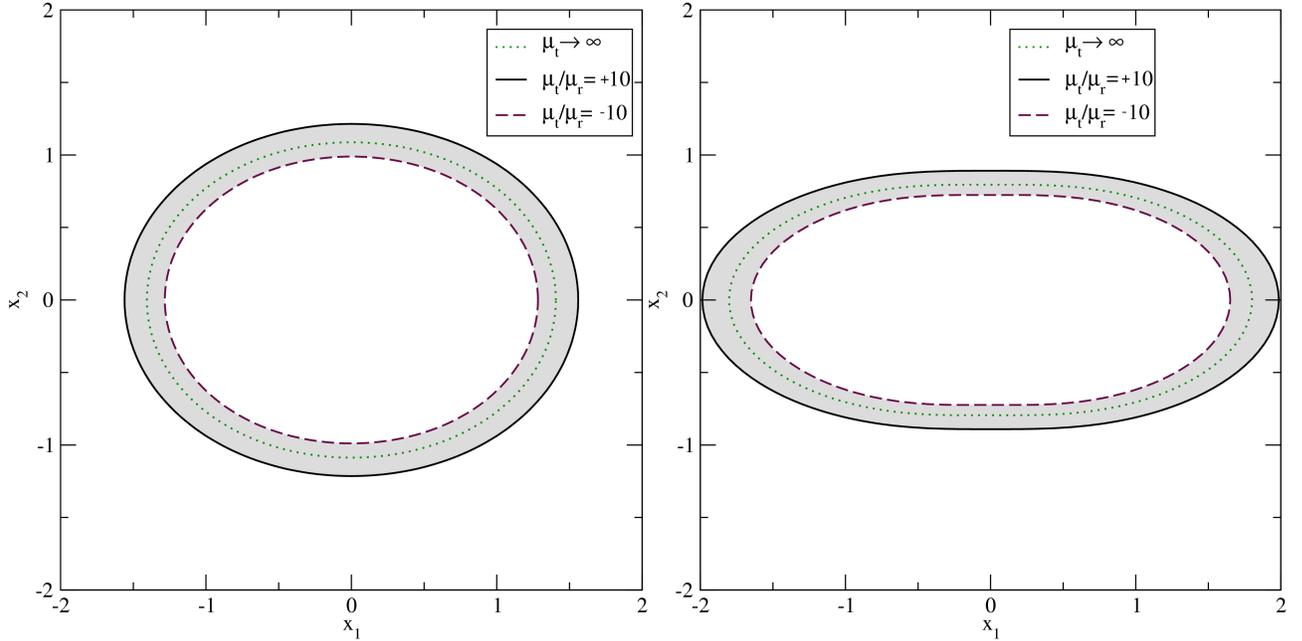


Figura 2.5: Região onde  $|\mu_t/\mu_r| > 10$  para o modelo de NFW com  $\kappa_s = 1.0$  e elipticidades  $e = 0.2, 0.5$ .

onde  $\sigma$  é a seção de choque. Este cálculo leva em conta automaticamente o fato de regiões que dão origem a imagens múltiplas serem contadas múltiplas vezes, pois o cálculo é feito no plano da lente.

Para o cálculo da seção de choque será utilizado o modelo de NFW elíptico, o qual possui três parâmetros  $\kappa_s$ ,  $r_s$  e  $e$ . Afim de simplificar os cálculos, serão utilizadas as coordenadas adimensionais, onde a escolha natural para o modelo de NFW é utilizar  $\xi_0 = r_s$  (veja as equações 1.5 e 1.65). Desse modo todas as distâncias serão expressas em unidades de  $r_s$  e essa variável não aparecerá explicitamente no cálculo.

O valor da seção de choque dado pela equação (2.31) é calculado utilizando a expressão para  $\mathbf{J}$  dada em (1.24) e as derivadas do potencial dadas pelas equações (2.26-2.28). Devido à forma como a região  $|\mu_t/\mu_r| > \text{constante}$  é encontrada, é conveniente utilizar coordenadas polares para realizar esta integral, a expressão final fica

$$\tilde{\sigma}(\kappa_s, e) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_{r_{\min}(\theta)}^{r_{\max}(\theta)} |\det \mathbf{J}(r, \theta)| r dr d\theta, \quad (2.32)$$

onde  $\tilde{\sigma}$  é a seção de choque adimensional, uma vez que estão sendo utilizadas coordenadas adimensionais. Note que o cálculo é feito apenas no primeiro quadrante do plano  $(x_1, x_2)$ , o que é possível devido à simetria do problema.

Com isto será possível calcular o valor da seção de choque adimensional em função dos

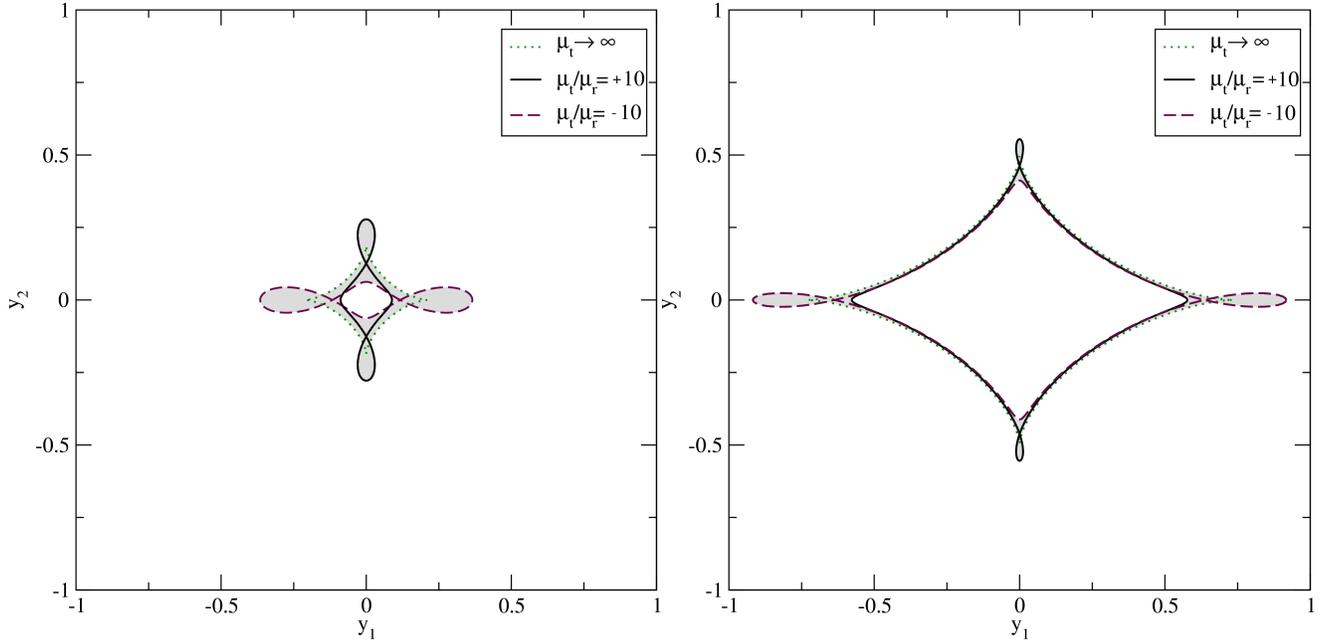


Figura 2.6: Região onde  $|\mu_t/\mu_r| > 10$ , no plano das fontes, para o modelo de NFW com  $\kappa_s = 1.0$  e elipticidades  $e = 0.2, 0.5$ .

parâmetros  $e$  e  $\kappa_s$ . Para escrever a seção de choque em unidades angulares é necessário fazer uma transformação. Lembrando que, neste caso, a coordenada adimensional é dada por  $\vec{x} = \vec{\theta} \frac{D_{OL}}{r_s}$  é possível escrever esta transformação como

$$\sigma(\kappa_s, r_s, e) = \tilde{\sigma}(\kappa_s, e) \left( \frac{r_s}{D_{OL}} \right)^2 \text{radianos}^2. \quad (2.33)$$

A figura 2.7 mostra, à esquerda, o comportamento da seção de choque adimensional em relação ao parâmetro  $\kappa_s$ , para valores fixos de elipticidade. Para valores baixos de  $\kappa_s$  ( $\lesssim 0.7$ ) o valor da seção de choque aumenta com a elipticidade, entretanto, há uma inversão deste comportamento para valores maiores de  $\kappa_s$ . Já o gráfico da direita mostra o comportamento da seção de choque em função da elipticidade para valores fixos de  $\kappa_s$ . Observe que fica clara a inversão de comportamento da seção de choque em função da elipticidade. É possível observar também que a seção de choque é mais sensível a  $\kappa_s$  do que em relação a  $e$ , sendo que a importância da elipticidade aumenta para  $\kappa_s$  menores.

Já a figura 2.8 mostra os iso-contornos da seção de choque no espaço  $(\kappa_s, e)$ . Observe que o valor da seção de choque aumenta com  $\kappa_s$ , para qualquer valor da elipticidade. A mudança de comportamento em relação à elipticidade é observada através da mudança de inclinação dos iso-contornos, mais evidente para altos valores da elipticidade.

Utilizando a equação (2.33) é possível calcular a seção de choque dimensional, cujo o

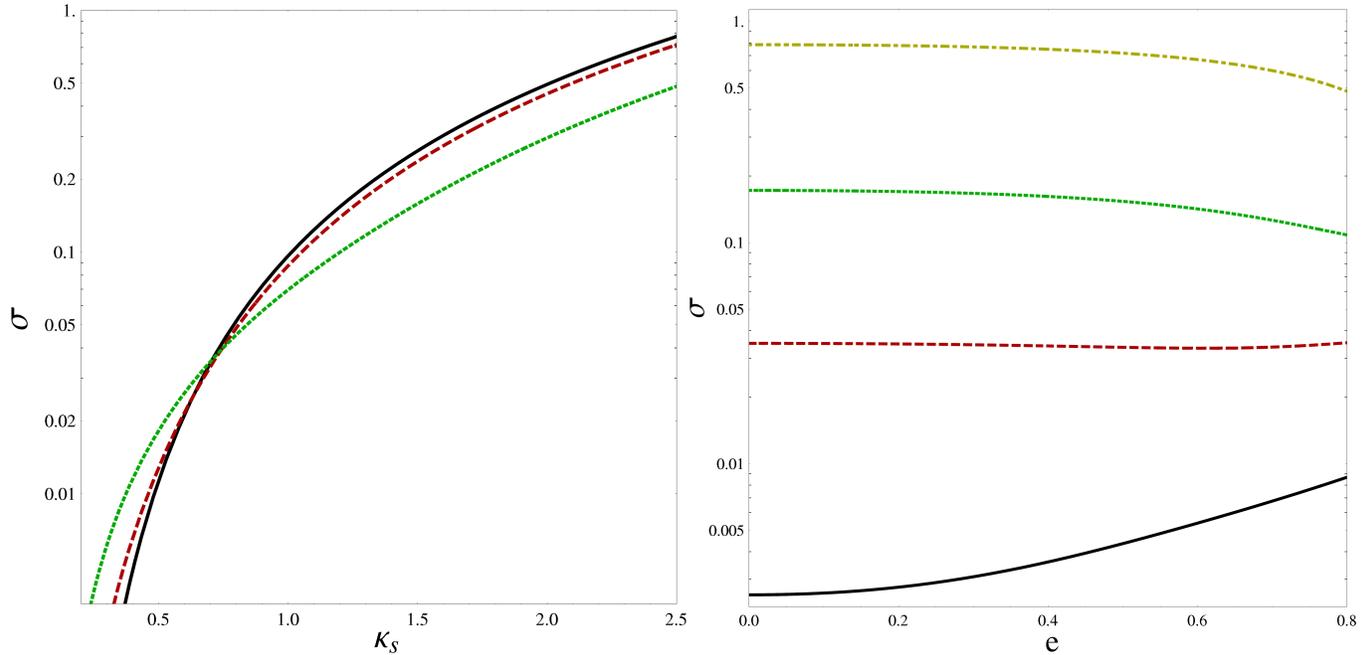


Figura 2.7: À esquerda é mostrado o comportamento da seção de choque adimensional em relação ao parâmetro  $\kappa_s$ , para valores fixos de elipticidade, onde as linhas contínua, tracejada e pontilhada correspondem a  $e = 0.2$ ,  $0.5$  e  $0.8$  respectivamente. O gráfico à direita mostra o comportamento da seção de choque em função da elipticidade para valores fixos de  $\kappa_s$ , onde as curvas possuem, de cima para baixo,  $\kappa_s = 2.5$ ,  $1.25$ ,  $0.7$  e  $0.35$ .

comportamento em função de  $z_L$  é mostrado na figura 2.9. O gráfico da esquerda mostra a seção de choque em função do desvio para o vermelho da lente para diferentes valores da elipticidade e uma fonte com  $z = 2$ . Já no gráfico da direita é mostrada a seção de choque para diferentes valores de massa da lente. Os detalhes de conversão da massa da lente nas quantidades  $r_s$  e  $\kappa_s$  serão discutidos na seção 3.1.

### 2.3.2 Escalonamento da Seção de Choque com $\mu_{\min}$

A dependência da seção de choque em relação a  $\kappa_s$  e  $e$  está ligada às propriedades do modelo da lente. Um aspecto interessante a ser explorado, também, é a dependência em relação à magnificação das fontes. Por exemplo, é interessante considerar apenas as regiões em que as fontes sofrerão uma magnificação maior que um dado valor mínimo ( $\mu_{\min}$ ). Com isto haverá duas imposições para determinar a região de formação de arcos: que a magnificação seja maior que  $\mu_{\min}$  e a já discutida  $|\mu_t/\mu_r| > C$ . A dependência com  $\mu_{\min}$  possui um papel fundamental no cálculo da abundância de arcos (veja o capítulo 3).

Na figura 2.10 é mostrado o comportamento de  $\tilde{\sigma}$  em função de  $\mu_{\min}$  para vários valores

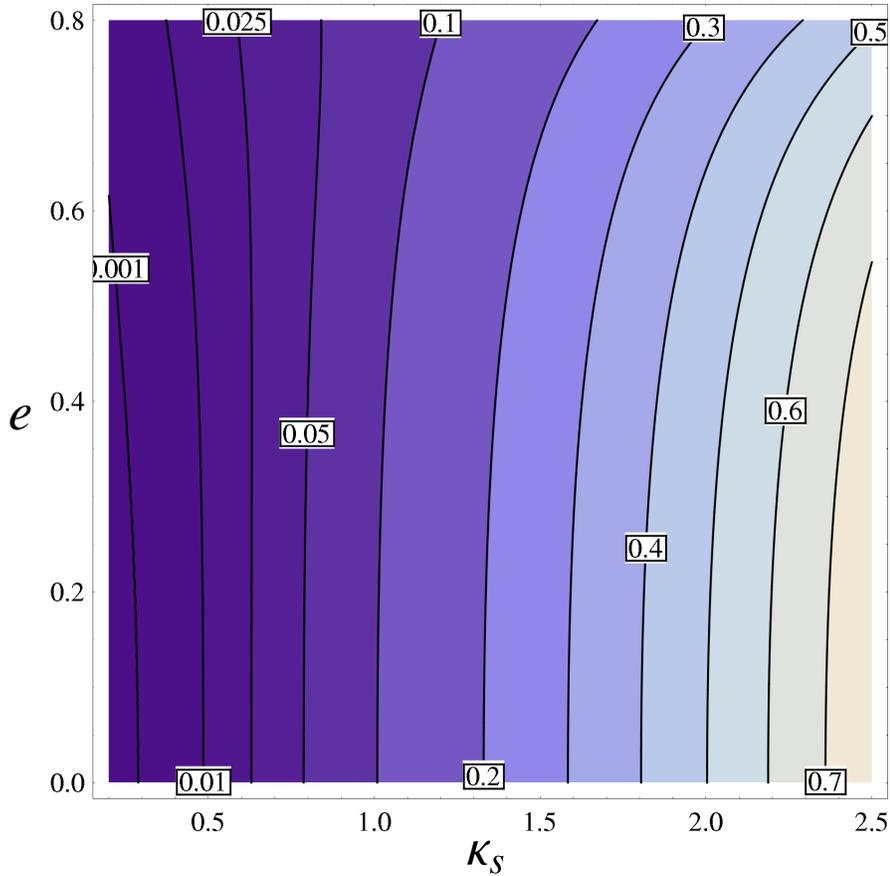


Figura 2.8: Iso-contornos da seção de choque de formação de arcos no espaço  $(\kappa_s, e)$ .

de  $\kappa_s$  e  $e$ . Note que a seção de choque é constante até um determinado valor de  $\mu_{\min}$  e depois diminui. Isto é fácil de compreender, pois todos os pontos da região  $\mu_t/\mu_r > C$  possuem uma magnificação acima de um valor mínimo. Com isto, se  $\mu_{\min}$  for menor que esta magnificação mínima, a imposição  $\mu > \mu_{\min}$  será irrelevante. Já no caso em que  $\mu_{\min}$  for maior que esta magnificação mínima o valor da seção de choque diminuirá. Sendo assim, o valor da seção de choque só irá mudar quando  $\mu_{\min}$  for maior que a magnificação mínima da região  $|\mu_t/\mu_r| > C$ , como observado na figura 2.10.

Ao estudar as propriedades do lenteamento de objetos próximos às causticas, como é o caso dos objetos altamente distorcidos, é possível mostrar que para grandes valores de  $\mu$  a seção de choque é proporcional ao inverso do quadrado da magnificação ( $\tilde{\sigma} \propto \mu^{-2}$ ), veja, por exemplo, a referência [35]. Isto acontece pois próxima à caustica tem-se  $\mu \propto 1/d^2$ , onde  $d$  é a distância à caustica, e  $\mu_r \approx 1$ , ou seja,  $\mu_t \approx \mu$ . A região formada pelos pontos que possuem uma distância máxima  $d$  da cáustica terá a área proporcional a  $d$ , e a forma esta região é bem próxima à região da seção de choque (veja a figura 2.6). Sendo

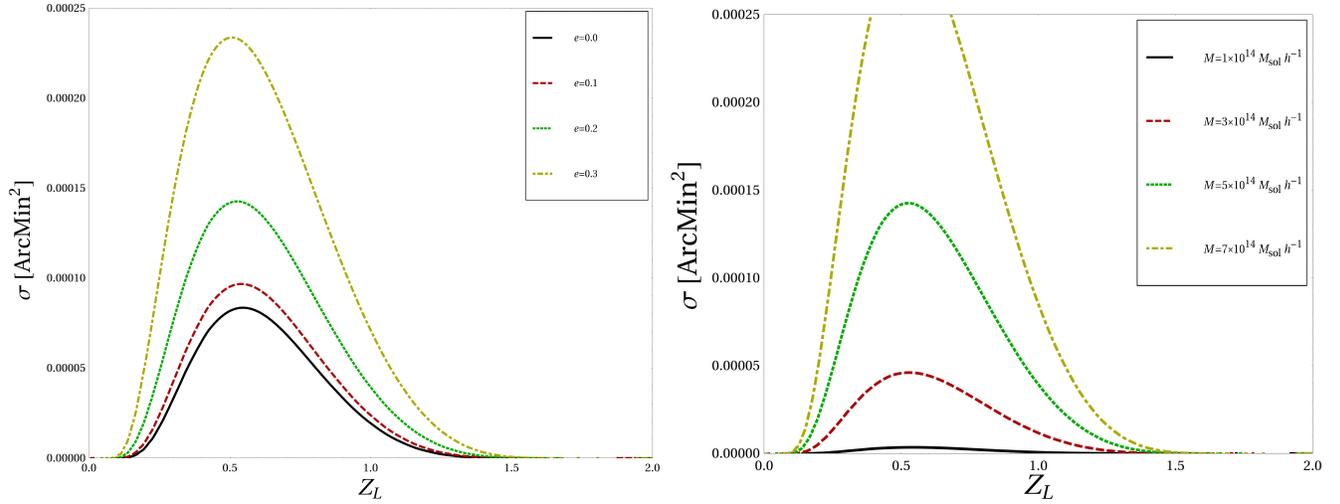


Figura 2.9: A figura da direita mostra a seção de choque dimensional para uma lente com  $M = 5 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  e diferentes valores de elipticidade, onde a fonte possui  $z = 2$ . Na esquerda é mostrado o caso de uma lente com  $e = 0.2$  e diferentes valores de massa.

assim para regiões muito próximas à caustica tem-se  $\tilde{\sigma} \propto \mu^{-2}$ . Com isto em mente, uma aproximação para o comportamento da seção de choque em relação a  $\mu$  é dada por

$$\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, \mu_{\min}) \simeq \tilde{\sigma}(\kappa_s, e) \times \begin{cases} 1 & \text{se } \mu_{\min} \leq \mu_{\text{crit}} \\ \left(\frac{\mu_{\text{crit}}}{\mu_{\min}}\right)^2 & \text{se } \mu_{\min} > \mu_{\text{crit}} \end{cases}, \quad (2.34)$$

onde  $\mu_{\text{crit}}$  é um valor crítico, a partir do qual o escalonamento passa a ser quadrático. Uma forma de determinar o valor de  $\mu_{\text{crit}}$  é escrever a seção de choque como

$$\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, \mu) = \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, \mu)}{d\mu} d\mu, \quad (2.35)$$

onde  $d\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, \mu)$  é a seção de choque para magnificação entre  $\mu$  e  $\mu + d\mu$  e  $\tilde{\sigma}$  é a seção de choque para magnificações maiores que  $\mu$ . Usando a aproximação (2.34) tem-se:

$$\frac{d\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, \mu)}{d\mu} = -2\tilde{\sigma}(\kappa_s, e) \frac{\mu_{\text{crit}}}{\mu^3}, \quad (2.36)$$

para  $\mu > \mu_{\text{crit}}$  (para  $\mu \leq \mu_{\text{crit}}$ ,  $d\tilde{\sigma}/d\mu$  é nulo).

Uma quantidade a ser considerada é a magnificação média da região  $|\mu_t/\mu_r| > C$ , que

será denotada  $\mu_{\text{med}}$  e é dada por

$$\mu_{\text{med}} = \frac{\int_{|\frac{\mu_t}{\mu_r}| > C} |\mu| d^2y}{\int_{|\frac{\mu_t}{\mu_r}| > C} d^2y}. \quad (2.37)$$

Observe que o denominador é a própria seção de choque de formação de arcos, enquanto o numerador pode ser escrito como  $\int \mu d\tilde{\sigma}$ . Sendo assim possível escrever:

$$\mu_{\text{med}} = \frac{\int_0^\infty |\mu| d\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, \mu)}{\tilde{\sigma}(\kappa_s, e)}. \quad (2.38)$$

Usando a equação (2.36) (lembre que ela é válida para valores de  $\mu > \mu_{\text{crit}}$ ) e a equação acima tem-se:

$$\mu_{\text{crit}} = \mu_{\text{med}}/2. \quad (2.39)$$

O valor de  $\mu_{\text{med}}$  é calculado usando a equação (2.37), sendo que a integral no numerador é a área no plano da lente onde  $|\mu_t/\mu_r| > C$ . Com isto a magnificação média é dada pela razão das áreas no plano da lente e das fontes (i. e. própria seção de choque).

A figura 2.10 mostra a comparação entre o resultado exato da seção de choque, linhas contínuas, e a aproximação dada pela equação (2.34), linhas tracejadas. Observe que a aproximação se afasta um pouco do valor real da seção de choque para elipticidades em torno de 0.5. Uma coisa interessante a ser notada é que, para elipticidade nula, a região de transição entre o comportamento constante e o dado por  $\tilde{\sigma} \propto \mu^{-2}$  parece ser regida por uma outra lei de potência. Como o cálculo exato da seção de choque em função de  $\mu_{\text{min}}$  é, computacionalmente, muito dispendioso, e a aproximação (2.34) é muito boa na maior parte dos intervalos de  $\kappa_s$  e  $e$ , será utilizada essa aproximação para os cálculos da fração de arcos.

### 2.3.3 Escalonamento da Seção de Choque com $\mu_t/\mu_r$

Existe, também, uma dependência da seção de choque com a razão  $L/W$ , ou seja, o valor de  $\mu_t/\mu_r$ . Basicamente, é este valor que define a região onde será calculada a área de formação de arcos, onde quanto maior o valor de  $L/W$  menor e mais próxima à curva crítica será esta área.

A razão  $L/W$  está ligada diretamente com a detectabilidade dos arcos gravitacionais, basicamente quanto maior for esta razão mais fácil é a detecção. Na prática existem alguns fatores observacionais que devem ser levados em conta no cálculo desta razão, sendo o mais importante o *seeing*. Este é um efeito atmosférico que faz com que objetos

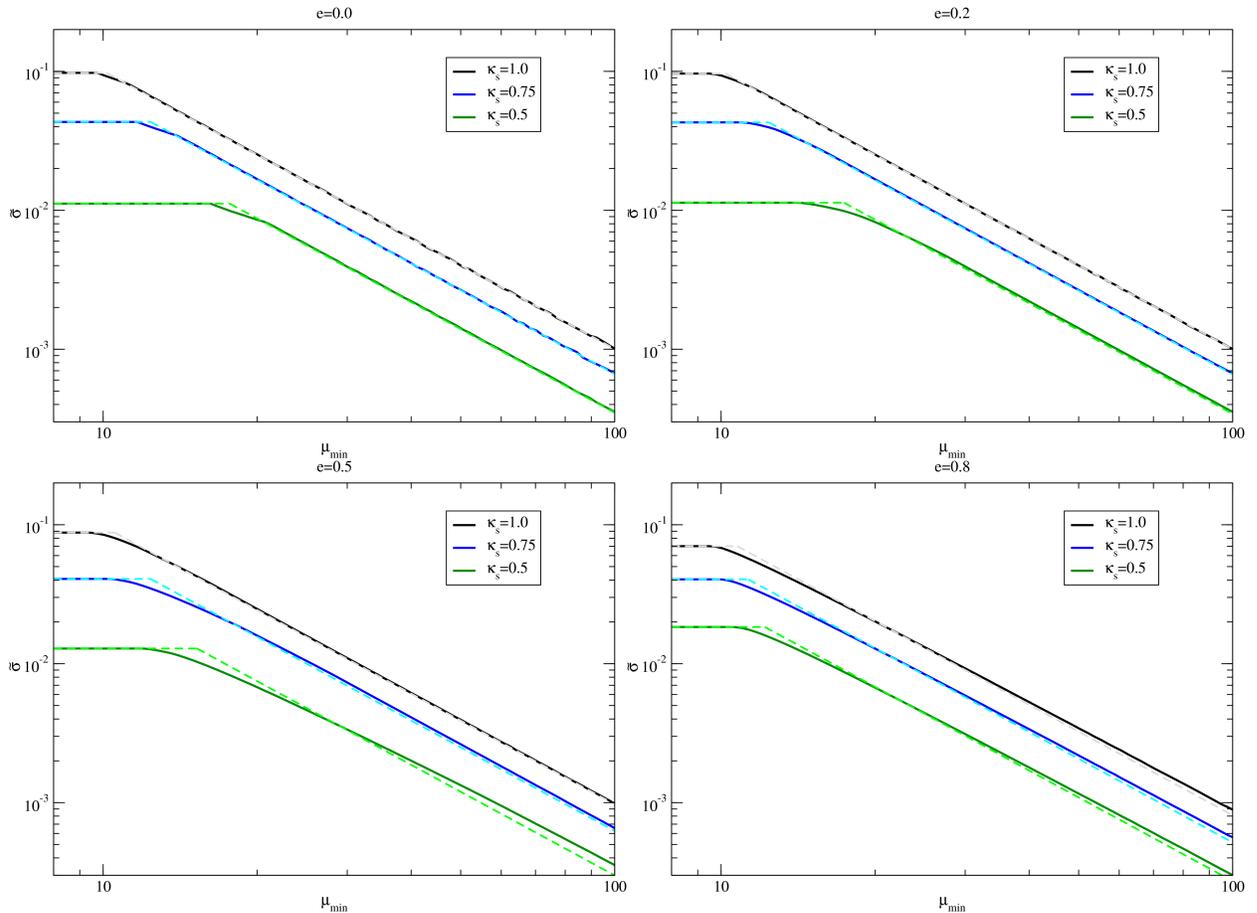


Figura 2.10: Comportamento da seção de choque em relação a  $\mu_{\min}$ , para diferentes valores de  $e$  e  $\kappa_s$ . As linhas contínuas representam o valor exato da seção de choque e as linhas pontilhadas a aproximação dada pela equação (2.34).

pontuais tenham, nas imagens, um aspecto circular. No caso de imagens extensas, como os arcos, pode-se pensar como um conjunto de pontos que, sob o efeito do seeing, cada um terá um aspecto circular, ou seja, as imagens são “borradas” na escala do seeing. Com isto, haverá uma mudança ao medir o comprimento e a largura de uma imagem. Note que o efeito do seeing na medição da largura ( $W$ ) será muito maior que na medição do comprimento ( $L$ ).

Considerar o seeing traria ao problema do cálculo da seção de choque mais um grau de liberdade, o que tornaria o cálculo mais dispendioso. Sendo assim, não serão considerados os efeitos do seeing na razão  $L/W$ , que será calculada através da razão dos autovalores, como foi dito na seção 2.2. No entanto, é útil investigar como varia a seção de choque em função de  $L/W$ , inclusive tendo em vista aplicações futuras.

A figura 2.11 mostra a seção de choque, no plano das fontes, para diferentes valores

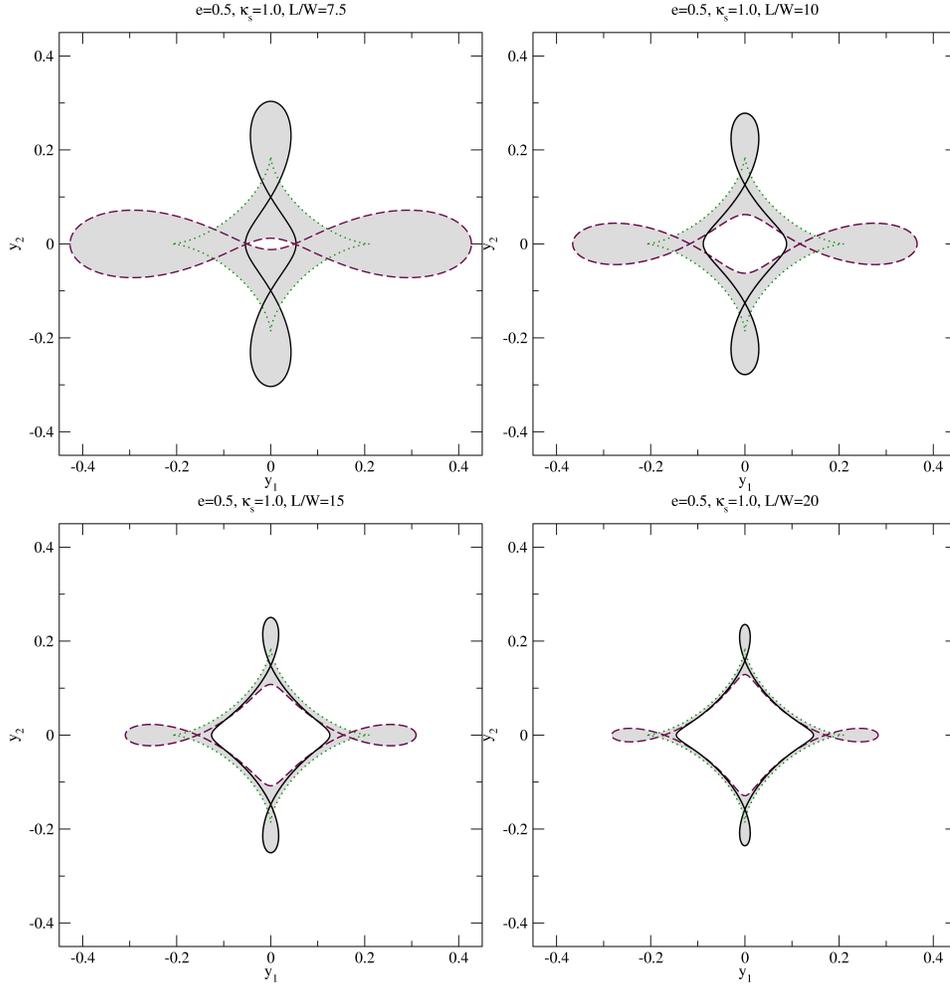


Figura 2.11: Forma da região  $L/W > C$ , no plano das fontes, para  $\kappa_s = 1.0$  e  $e = 0.5$  em diferentes valores de  $C$ . A linha pontilhada é a cáustica tangencial e as contínua e tracejada são  $L/W = C$ .

da razão  $L/W$ . Note que quanto maior for  $L/W$  menor será esta área e mais próxima ela estará da cáustica tangencial (linha pontilhada).

Da mesma forma como acontece com o escalonamento da seção de choque com  $\mu_{\min}$ , para grandes valores de  $L/W$  espera-se que a seção de choque caia com o quadrado dessa razão, pois quanto maior for  $L/W$  mais próxima a cáustica estará a região que define a seção de choque. Sendo assim, a seção de choque em função de  $L/W$  pode ser escrita como:

$$\tilde{\sigma}(\kappa_s, e, R) \simeq \tilde{\sigma}(\kappa_s, e, R_{\text{ref}}) \left( \frac{R_{\text{ref}}}{R} \right)^2, \quad (2.40)$$

onde  $R$  é a razão das ampliações e  $R_{\text{ref}}$  é um valor de referência (aqui será utilizado  $R_{\text{ref}} = 10$ ). A comparação desta aproximação com o cálculo exato da seção de choque

pode ser visto na figura 2.12, onde as linhas contínuas representam o valor exato da seção de choque e as tracejadas são a aproximação dada pela equação (2.40). Esta aproximação mantém o mesmo comportamento para diferentes valores de  $\kappa_s$  e  $e$ .

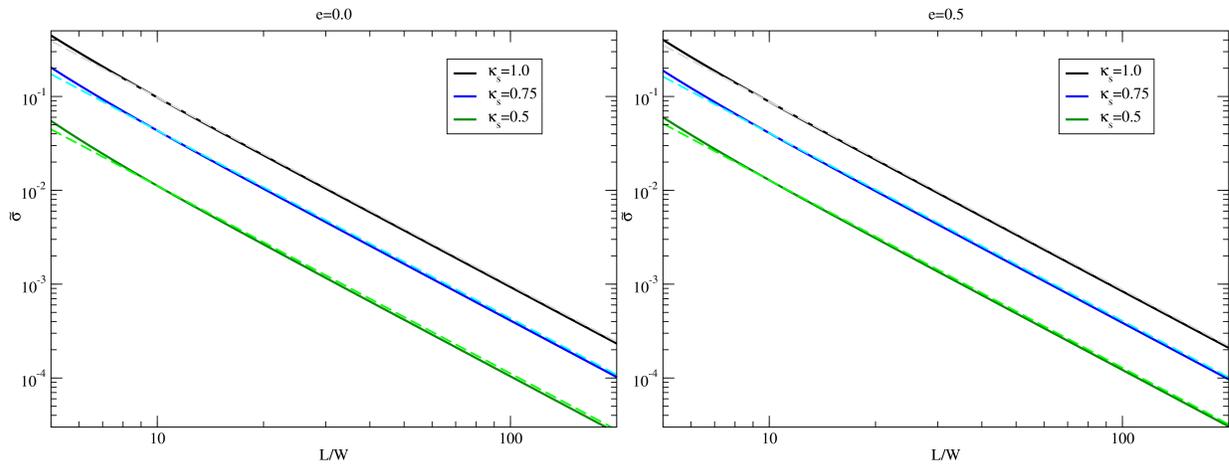


Figura 2.12: Comportamento da seção de choque em relação a  $R$ , para diferentes valores de elipticidade e  $\kappa_s$ . As linhas contínuas representam o valor exato da seção de choque e as linhas pontilhadas a aproximação dada pela equação (2.40).



# Capítulo 3

## Cálculo da Fração de Arcos

A *Fração de Arcos* é definida como a razão do número de arcos pelo número de aglomerados de galáxias para aglomerados com um dado conjunto de propriedades (como, por exemplo, aglomerados em um dado intervalo de massa). Essa quantidade é um observável direto e, diferente do número total de arcos, tem a vantagem de ser independente da abundância de aglomerados, que varia muito em relação aos parâmetros não relacionados ao lenteamento, como a amplitude das flutuações de densidade. Outro ponto importante é que esta grandeza é menos afetada pela função de seleção dos aglomerados. Neste capítulo será apresentado um método para calcular a fração de arcos em função do desvio para o vermelho da lente, para uma dada distribuição de fontes.

Como será mostrado na seção 3.3, um aspecto muito importante a ser levado em conta é o efeito da magnificação das fontes na detecção dos arcos gravitacionais, o que tem sido pouco investigado na literatura. Este efeito irá aumentar o sinal dos arcos em relação ao ruído de fundo, aumentando a sua detectabilidade. Esse papel da magnificação no aumento da razão sinal-ruído dos arcos, até onde sabemos, não havia sido estudado previamente na literatura.

Em seguida será apresentada a dependência da fração de arcos com as características dos aglomerados (massa, elipticidade e parâmetro de concentração). Será observado que a fração de arcos é fortemente afetada por estes fatores, sendo alterado tanto seu valor absoluto, quanto o comportamento com o desvio para o vermelho. Já em relação aos parâmetros cosmológicos ( $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ , curvatura e equação de estado da energia escura), é observado que a abundância de arcos não é muito alterada ao variar estas quantidades, o que indica que a estatística de arcos será mais eficiente para obter informações sobre as lentes do que sobre a cosmologia.

### 3.1 Seção de Choque Dimensional

Na seção 2.3 foi discutido o cálculo da seção de choque adimensional ( $\tilde{\sigma}$ ) em função de  $\kappa_s$  e  $e$ . Nesta seção discutiremos a conversão para a seção de choque em unidades de ângulo sólido em função da massa ( $M$ ) e do parâmetro de concentração ( $C$ ) dos aglomerados e da geometria do universo.

Para relacionar o parâmetro  $\kappa_s$  (equação 1.67) com a massa do aglomerado e o parâmetro de concentração utiliza-se as equações (1.63) e (1.64). Com isso obtém-se:

$$\kappa_s = \frac{g(C)}{\Sigma_{\text{cr}}(z_L, z_S)} \left( \frac{\Delta\rho_{\text{ref}}}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{M_{r\Delta}}{4\pi} \right)^{1/3}, \quad (3.1)$$

onde

$$g(C) \equiv \frac{C^2}{\ln(1+C) - C/(1+C)}. \quad (3.2)$$

Para calcular  $\Sigma_{\text{cr}}$  é necessária a expressão da distância de diâmetro angular (veja a equação 1.16), que pode ser escrita como

$$D_{\text{LS}} = \frac{c}{H_0} \frac{1}{1+z_S} I_{\text{LS}}, \quad (3.3)$$

sendo

$$I_{\text{LS}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0k}}} \sinh \left( \sqrt{\Omega_{0k}} \int_{z_L}^{z_S} \frac{dz}{E(z)} \right) & , \quad \Omega_{0k} > 0 \\ \int_{z_L}^{z_S} \frac{dz}{E(z)} & , \quad \Omega_{0k} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Omega_{0k}}} \sin \left( \sqrt{-\Omega_{0k}} \int_{z_L}^{z_S} \frac{dz}{E(z)} \right) & , \quad \Omega_{0k} < 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde  $\Omega_{0k} = 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{\Lambda}$ , e  $\Omega_{0m}$  e  $\Omega_{\Lambda}$  são as densidades de energia atuais relacionadas à matéria (matéria escura mais matéria bariônica) e à constante cosmológica respectivamente, em unidades da densidade crítica (mais detalhes podem ser vistos na referência [36]). A expressão para  $E(z)$  para o modelo  $\Lambda\text{CDM}$  é dada por:

$$E(z)^2 = \left( \frac{H(z)}{H_0} \right)^2 = \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0k}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda}, \quad (3.5)$$

onde  $H(z)$  é o parâmetro de Hubble, e  $H_0$  o seu valor atual. As definições para  $D_{OL}$  e  $D_{OS}$  seguem a definição acima, onde apenas se deve trocar os índices nos limites de integração na equação (3.4) e na (3.3) é utilizado o desvio para o vermelho correspondente ao limite superior da integral.

Como foi dito na seção 1.4.4, dado que os perfis não possuem um corte bem definido, é necessário um critério para definir a sua massa. Na literatura são utilizadas algumas

formas diferentes de definir as quantidades  $\Delta$  e  $\rho_{\text{ref}}$ . Para a densidade de referência ( $\rho_{\text{ref}}$ ) duas possibilidades bastante usadas na literatura são a densidade média da matéria  $\rho_m(z)$  e a densidade crítica  $\rho_{\text{crit}}(z)$ , que são dadas por

$$\rho_m(z) = \rho_{0m}(1+z)^3, \quad (3.6)$$

e

$$\rho_{\text{crit}}(z) = \frac{3H^2(z)}{4\pi G}, \quad (3.7)$$

onde  $\rho_{0m}$  é a densidade de matéria atual do universo.

Já para o contraste de densidade  $\Delta$  será utilizado um valor fixo ( $\Delta_{200} = 200$ ), o que é muito comum na literatura. Também foram testadas outras escolhas para  $\Delta$  e  $\rho_{\text{ref}}$ , como o contraste de densidade de virialização  $\Delta_{\text{vir}}$  (veja a referência [37]) e a densidade média do universo,  $\rho_u$ . No entanto, para o propósito deste trabalho, será suficiente escolher um valor fixo de  $\Delta$  e as duas possibilidades para  $\rho_{\text{ref}}$ ,  $\rho_m(z)$  e  $\rho_{\text{crit}}(z)$ . Na seção 3.4 será discutido o impacto dessas duas escolhas.

Note que estas escolhas estão associadas à forma de definir a massa dos aglomerados e, em princípio, são todas igualmente válidas. No entanto é necessário tomar um certo cuidado ao comparar os cálculos com as observações, afim de utilizar a definição de massa consistente com a forma que esta foi inferida observacionalmente.

Para obter uma expressão final para  $\kappa_s$  utiliza-se as equações (3.1) e (3.3). Substituindo os valores numéricos das constantes obtém-se

$$\kappa_s = 7.36 \times 10^{-4} \frac{(F(z_L)\Delta)^{2/3}}{1+z_L} g(C) \left( \frac{Mh}{10^{14} M_\odot} \right)^{1/3} \frac{I_{\text{LS}} I_{\text{OL}}}{I_{\text{OS}}}, \quad (3.8)$$

sendo

$$F(z) \equiv \frac{\rho_{\text{ref}}}{\rho_{0\text{crit}}} = \begin{cases} E(z)^2 & , \text{ se } \rho_{\text{ref}} = \rho_{\text{crit}} \\ \Omega_{0m}(1+z)^3 & , \text{ se } \rho_{\text{ref}} = \rho_m \end{cases}, \quad (3.9)$$

onde  $\rho_{0\text{crit}}$  é a densidade crítica do universo hoje ( $\rho_{0\text{crit}} = 3H_0^2/(8\pi G)$ ) e o parâmetro de Hubble é definido em termos de  $h$  por  $H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Com isto  $\kappa_s$  será função da massa do aglomerado<sup>1</sup> e das distâncias cosmológicas.

Lembre que, pela equação (2.33), é necessário calcular a quantidade  $r_S/D_{\text{OL}}$  para recuperar a seção de choque dimensional. Para isto são utilizadas as equações (1.64) e

---

<sup>1</sup>Note que  $\kappa_s$  não depende do parâmetro de Hubble se a massa é dada em unidades de  $h^{-1}$ .

(3.3), o que torna possível escrever:

$$\frac{r_s}{D_{\text{OL}}} = 1.47 \times 10^{-3} (F(z)\Delta)^{-1/3} \frac{1+z_L}{I_{\text{OLC}}} \left( \frac{Mh}{10^{14} M_{\odot}} \right)^{1/3}. \quad (3.10)$$

## 3.2 Distribuição das Fontes e o Papel da Magnificação

Para o cálculo da fração de arcos é necessário que seja considerada a densidade de fontes observada, que é o número de fontes por ângulo sólido e desvio para o vermelho para uma dada magnitude limite. Esta distribuição será modelada da mesma forma que na referência [38], de modo que

$$n(z_S, m_{\text{lim}}) = N(m_{\text{lim}}) \frac{3z_S^2}{2 [z_*(m_{\text{lim}})]^3} \exp \left[ - \left( \frac{z_S}{z_*(m_{\text{lim}})} \right)^{3/2} \right], \quad (3.11)$$

onde  $z_* = z_m/1.412$ ,  $N(m_{\text{lim}})$  é a densidade total de galáxias por unidade de área (ou seja, em todo o intervalo de  $z$ ) e  $m_{\text{lim}}$  é a magnitude limite da observação. Para o caso da densidade total de galáxias será utilizado o número dado pelo levantamento COMBO-17 [39]:

$$N(m_{\text{lim}}) = \frac{30}{\text{arccmin}^2} [z_m(m_{\text{lim}})]^{3.4}, \quad (3.12)$$

sendo  $z_m$  o desvio para o vermelho mediano das galáxias, que depende de  $m_{\text{lim}}$ . Para observações na banda R, neste mesmo levantamento, é possível usar a aproximação  $z_m \simeq 0.23(m_{\text{lim}} - 20.6)$  (veja a referência [40]).

Como foi visto no capítulo 1, as lentes gravitacionais têm a propriedade de aumentar a luminosidade das fontes. Este efeito terá um impacto na magnitude limite ( $m_{\text{lim}}$ ) da observação para objetos lenteados. Para entender como isto funciona é necessário utilizar o conceito da razão sinal-ruído.

A razão sinal-ruído é uma componente importante em observações astronômicas e é dada pela razão entre o sinal de um objeto ( $S$ ) e o ruído ( $N$ , do inglês “noise”). O sinal de um objeto pode ser escrito como  $S = FA$ , onde  $F$  é o brilho superficial e  $A$  é a área ocupada por ele. Como as imagens são obtidas através da contagem do número de fótons, a flutuação destas contagens será a de Poisson. Assim, o ruído pode ser escrito como  $N = \sqrt{bA}$ , onde  $b$  é o brilho superficial (incluindo as contribuições do céu e do objeto).

Sendo assim, a razão sinal-ruído fica dada por

$$\frac{S}{N} = \frac{FA}{\sqrt{bA}}. \quad (3.13)$$

Como foi abordado no capítulo 1, o efeito de lenteamento altera apenas a área das imagens, mantendo seu brilho superficial, sendo a relação entre a área real do objeto e a área da imagem lenteada dada por

$$A_{\text{lenteada}} = \mu \times A. \quad (3.14)$$

Com isto, a relação da razão sinal-ruído de um objeto que sofreu o lenteamento com esta razão se ele não tivesse sofrido o lenteamento será dada por

$$(S/N)_{\text{lenteado}} = (S/N) \times \sqrt{\mu}. \quad (3.15)$$

Como foi visto na seção 2.3.1 a região onde há a formação de arcos é uma região de alta magnificação. Com isto, a razão sinal-ruído dos arcos gravitacionais é aumentada significativamente, e conseqüentemente, a detectabilidade destes objetos também.

Assumindo que a detecção de um objeto é dada pela razão sinal-ruído, objetos antes não detectados poderão ser observados após sofrerem o lenteamento, pois esta razão aumenta na proporção de  $\sqrt{\mu}$  (como pode ser visto pela equação 3.15). Com isto a magnitude limite da observação, para os objetos lenteados, será alterada para

$$m_{\text{lim}}^{\text{ef}} = 2.5 \log(\sqrt{\mu}) + m_{\text{lim}}. \quad (3.16)$$

Sendo assim, o efeito da magnificação terá influência no cálculo da fração de arcos e, como será visto nas próximas seções, esse efeito tem um papel fundamental. O efeito da magnificação na estatística de arcos já havia sido considerado em estudos anteriores ([41, 28]), no entanto esses autores não consideram que a magnificação também aumenta o ruído (foi apenas considerado o aumento do fluxo da fonte). Conseqüentemente o efeito da magnificação é superestimado nesses estudos. Neste trabalho será utilizada a equação (3.16) para a magnitude limite efetiva, que considera que os objetos são identificados pela sua razão sinal-ruído, o que é uma aproximação mais realista do processo de detecção.

### 3.3 Cálculo da Fração de Arcos

Uma vez tendo obtido a seção de choque, conhecendo a densidade de fontes e sabendo como introduzir o efeito da magnificação, finalmente é possível fazer uma previsão da fração de arcos a ser observada, para uma dada magnitude limite. A forma mais simples de se fazer este cálculo, ainda sem levar em conta os efeitos da magnificação, é simplesmente convoluir a seção de choque ( $\sigma$ ), que é a área efetiva de formação de arcos, com a densidade superficial de fontes por intervalo de  $z(n)$ , integrando sobre todas as fontes localizadas atrás da lente, ou seja

$$f_{\text{arcs}} = \int_{z_L}^{\infty} \sigma(M, C, e, z_L, z_S, R) \times n(z_S, m_{\text{lim}}) dz_S, \quad (3.17)$$

onde  $R$  é o valor mínimo de  $|\mu_t/\mu_r|$  usado para calcular  $\sigma$ . Note que a dependência da seção de choque com  $M$ ,  $z_L$  e  $z_S$  vem das expressões para  $\kappa_s$  e  $r_s$  dadas pelas equações (3.8) e (3.10). A expressão para  $n$  é dada pela equação (3.11).

Entretanto, a magnificação altera a detectabilidade dos arcos, como discutido na seção 3.2. A forma de se considerar este efeito é convoluir a seção de choque por intervalo de magnificação com a densidade de fontes, integrando também sobre todas as magnificações,

$$f_{\text{arcs}} = \int_{z_L}^{\infty} \int_{\mu_{\text{min}}}^{\infty} \frac{d\sigma(M, C, e, z_L, z_S, R, \mu)}{d\mu} \times n(z_S, m_{\text{lim}}^{\text{ef}}(\mu)) d\mu dz_S. \quad (3.18)$$

Aqui será utilizada a expressão para  $d\sigma/d\mu$  calculada utilizando a aproximação dada pela equação (2.34), de modo que

$$\frac{d\sigma(M, C, e, z_L, z_S, R, \mu)}{d\mu} = \tilde{\sigma}(\kappa_s(M, C, z_L, z_S), e, R) \left( \frac{r_s(M, C, z_L)}{D_{\text{OL}}(z_L)} \right)^2 \left( \frac{\mu_{\text{med}}(\kappa_s, e, R)^2}{2\mu^3} \right) \quad (3.19)$$

e o limite inferior da integral é dado por  $\mu_{\text{med}}/2$ .

Uma outra forma de se fazer este cálculo é considerar que todas as fontes sofreram a mesma magnificação, dada pela magnificação média (equação 2.37), ao invés de utilizar o escalonamento com  $\mu_{\text{min}}$ . Sendo assim, a fração de arcos fica escrita como:

$$f_{\text{arcs}} = \int_{z_L}^{\infty} \sigma(M, C, e, z_L, z_S, R, \mu_{\text{med}}) \times n(z_S, m_{\text{lim}}^{\text{ef}}(\mu_{\text{med}})) dz_S. \quad (3.20)$$

Com isto é possível calcular o número esperado para a fração de arcos em função dos parâmetros da lente (massa, elipticidade etc.), da magnitude limite da observação e da

cosmologia (cuja dependência vem das distâncias cosmológicas envolvidas no problema). A figura 3.1 mostra a comparação entre as três formas de calcular a seção de choque, para

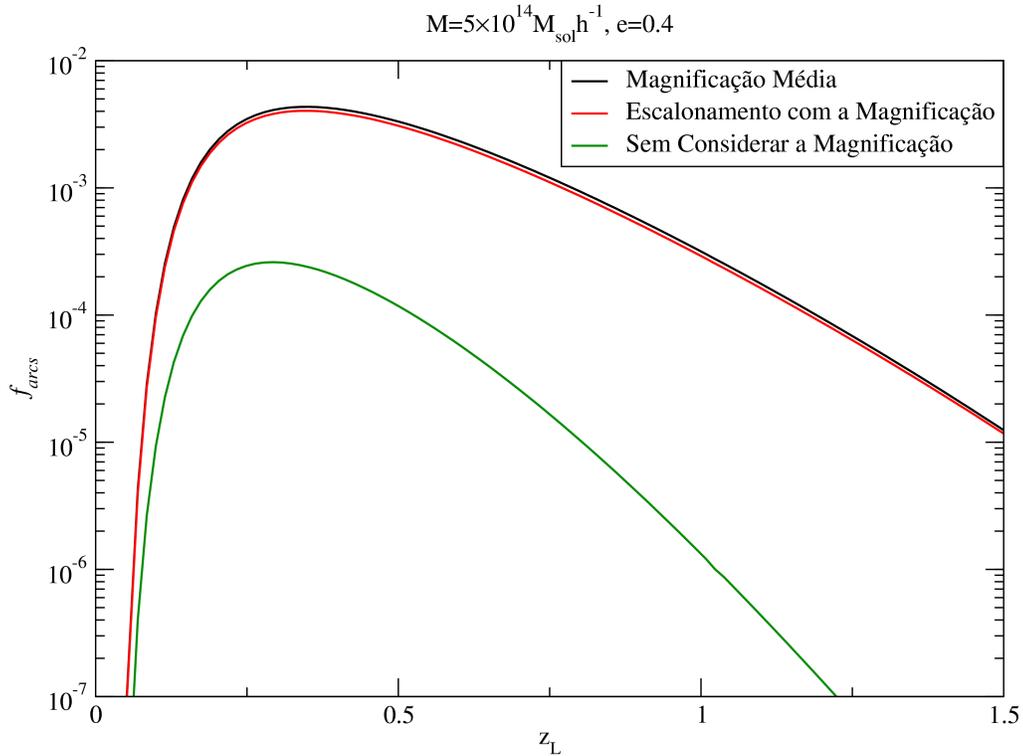


Figura 3.1: Comparação entre as três formas de calcular a seção de choque, para o modelo  $\Lambda$ CDM plano,  $m_{\text{lim}} = 24$  e  $C = 3$ .

$C = 3$ ,  $e = 0.4$ ,  $M = 5 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  definida através de  $\rho_{\text{crit}}$  e  $\Delta_{200}$ . Neste cálculo foi considerado o modelo  $\Lambda$ CDM plano com  $\Omega_m = 0.3$ . Note que o efeito da magnificação aumenta significativamente a fração de arcos. Em particular, para  $z \gtrsim 0.2$  a abundância esperada é superior em mais de uma ordem de grandeza quando é levado em conta o efeito da magnificação em relação à previsão que ignora a magnificação. Para altos desvios para o vermelho essa diferença é ainda maior e a magnificação faz com que a fração de arcos caia mais lentamente com  $z_L$ .

Também é possível observar que considerar a magnificação média das fontes é uma boa aproximação para o caso em que o escalonamento com  $\mu_{\text{min}}$  é considerado. Como calcular a integral (3.18) é computacionalmente mais dispendioso, será utilizada a aproximação da magnificação média (equação 3.20) nas próximas seções.

Como pode ser visto pelas equações (3.18) e (3.16) a magnitude limite de observação é essencial para o cálculo da fração de arcos. A figura 3.2 mostra a fração de arcos para diferentes valores da magnitude limite. Como é esperado, quanto maior a magnitude limite

maior será a fração de arcos esperada. Observe que a fração de arcos é aumentada em uma ordem de grandeza se forem comparadas observações com  $m_{\text{lim}} = 22$ , que corresponde à magnitude limite do *Sloan Digital Sky Survey*, e  $m_{\text{lim}} = 24$ , que será aproximadamente a magnitude limite atingida pelo *Dark Energy Survey (DES)*. Tendo como referência os futuros levantamentos de grandes áreas do céu, como o *DES* (veja a referência [42]), será utilizado  $m_{\text{lim}} = 24$  para o cálculo da fração de arcos.

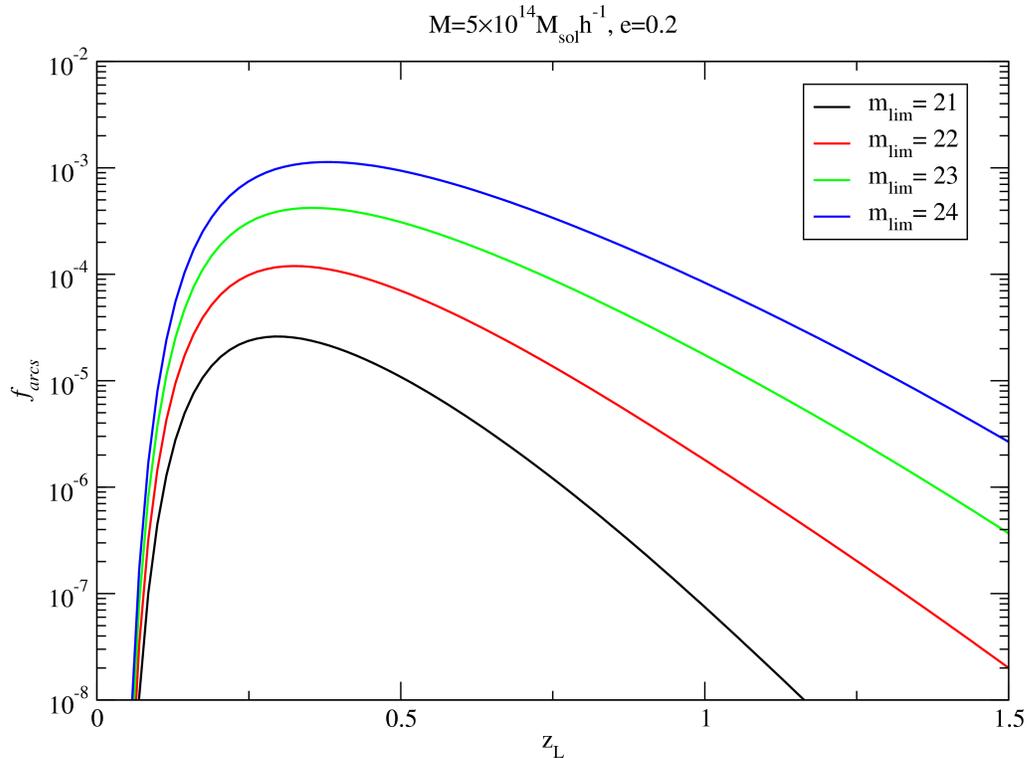


Figura 3.2: Cálculo da fração de arcos para diferentes valores da magnitude limite. Vale ressaltar que a magnitude limite correspondente ao *Sloan Digital Sky Survey* é 22 e o *Dark Energy Survey* atingirá  $m_{\text{lim}} \simeq 24$ .

Um dos aspectos a ser abordado é como parâmetros do modelo da lente e da cosmologia afetam ao cálculo da fração de arcos e sua evolução com o desvio para o vermelho. Pelas equações (3.8) e (3.10) as quantidades  $\kappa_s$  e  $r_s$  são relacionadas com a massa do aglomerado, o parâmetro de concentração, a elipticidade e as distâncias cosmológicas, além de depender da própria definição da massa. Com isto o cálculo da fração de arcos será afetado pelas propriedades da lente e pela cosmologia, sendo estas dependências estudadas nas seções seguintes. É conveniente lembrar que a seção de choque é muito sensível á  $\kappa_s$ , para  $\kappa_s$  pequeno<sup>2</sup>, o que tornará a fração de arcos, também, muito sensível a esta quantidade.

<sup>2</sup>Este é o regime de  $\kappa_s$  de interesse para as massas e distâncias cosmológicas típicas envolvidas neste estudo.

### 3.4 Dependência da Fração de Arcos com Parâmetros da Lente

Nesta seção será estudada a dependência da fração de arcos com os parâmetros do modelo da lente. Aqui será considerado o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM plano com  $\Omega_{0m} = 0.3$ .

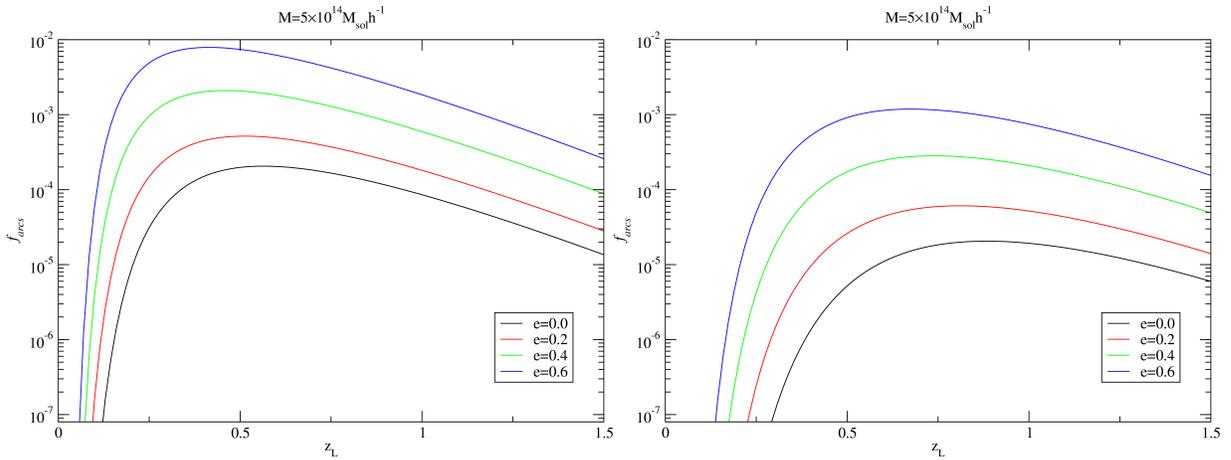


Figura 3.3: Cálculo da fração de arcos feito através da aproximação por  $\mu_{\text{med}}$  para duas diferentes definições de massa e alguns valores de elipticidade ( $e$ ). Na figura da esquerda foi utilizada a densidade crítica do universo como  $\rho_{\text{ref}}$ , já na direita foi utilizada a densidade de massa do universo (para ambas foi considerado  $\Delta_{200} = 200$  e  $C = 3$ ).

Antes de discutir a dependência da fração de arcos com os parâmetros da lente propriamente ditos, é conveniente discutir o papel dos diferentes critérios para definir a massa, pois a evolução de  $\kappa_s$  com o desvio para o vermelho para uma dada massa fixa é diferente em cada escolha (veja as equações 3.8 e 3.9). A figura 3.3 mostra o cálculo da fração de arcos feito através da aproximação por  $\mu_{\text{med}}$  (equação 3.20) para duas diferentes definições de massa e alguns valores de elipticidade ( $e$ ). Na figura da esquerda foi utilizada a densidade crítica do universo como  $\rho_{\text{ref}}$ , já na direita foi utilizada a densidade de massa do universo (para ambas foi considerado  $\Delta_{200} = 200$  e  $C = 3$ ). Note que tanto o comportamento da fração de arcos com  $z_L$  quanto o valor máximo que elas atingem mudam dependendo da definição de massa.

A partir de agora serão utilizados, apenas, como densidade de referência a densidade crítica e para o contraste de densidade o valor  $\Delta_{200} = 200$ , pois são definições mais comuns na literatura recente.

Em princípio o parâmetro de concentração e a massa do aglomerado são quantidades independentes, entretanto, simulações de N-corpos indicam que existe uma correlação

entre ambos. Nestas simulações o que se observa é uma distribuição de valores de  $C$  para uma dada massa fixa. A relação entre o valor médio de  $C$  e a massa pode ser bem ajustada por uma lei de potência. Aqui será considerado apenas a relação média  $C(M)$  e não toda a distribuição de probabilidades de  $C$  para um dado  $M$ . Em particular, será utilizado o ajuste obtido na referência [43], dado por

$$C(M) = 4.67 \left( \frac{Mh}{10^{14}M_{\odot}} \right)^{-0.11}. \quad (3.21)$$

Esta parametrização é obtida para  $z = 0$  e a relação de lei de potência entre  $C$  e  $M$  é bastante bem estabelecida, tanto em simulações quanto a partir de dados observacionais. Já a evolução com  $z$  desta relação ainda não é bem conhecida. Uma forma comum de se extrapolar o parâmetro de concentração em função do desvio para o vermelho é dada por (veja, por exemplo, a referência [44])

$$C(M, z) = \frac{C(M)}{1 + z}. \quad (3.22)$$

Trabalhos mais recentes (tanto com dados observacionais como a partir de simulações) indicam uma variação mais suave de  $C$  com o desvio para o vermelho (veja as referências [45, 46]). Uma forma sugerida para esse escalonamento (veja a referência [45]) é dada por

$$C(M, z) = C(M)E(z)^{-2/3}. \quad (3.23)$$

Como o escalonamento de  $C$  com  $z$  é ainda controverso na literatura, serão testadas as três possibilidades,  $C(M, z) = C(M, z = 0)$  e os escalonamentos das equações (3.23) e (3.22). A figura 3.4 mostra como a fração de arcos é sensível a esta escolha. Observe que para valores pequenos de  $z_L$  as definições são equivalentes, já para valores maiores  $z_L \approx 0.2$  a diferença é em torno de uma ordem de grandeza, e continua aumentando com  $z_L$ . Observe que o escalonamento com  $E(z)^{-2/3}$  fica na região intermediária entre considerar  $C$  constante ou  $C \propto (1 + z)^{-1}$ , como era de se esperar. A partir de agora será utilizada a equação (3.23) para relacionar o parâmetro de concentração com a massa e o desvio para o vermelho da lente.

Agora será investigado o papel da massa e da elipticidade da distribuição de massa projetada que, em princípio, são duas quantidades mais facilmente obtidas dos dados observacionais. A figura 3.5 mostra a previsão da fração de arcos em função do desvio para o vermelho da lente para dois valores de massa e elipticidades 0, 0.2, 0.4 e 0.6. As linhas contínuas foram calculadas utilizando a aproximação que considera apenas a magnifi-

### 3.4. DEPENDÊNCIA DA FRAÇÃO DE ARCOS COM PARÂMETROS DA LENTE 51

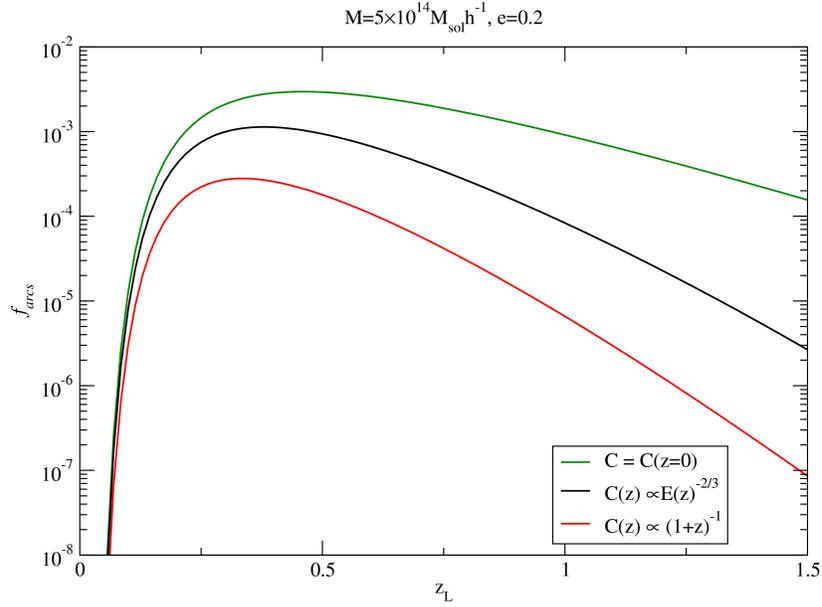


Figura 3.4: Cálculo da fração de arcos para os dois escalonamentos para  $C(z)$  (equações 3.23 e 3.22) e para  $C(z) = C(z = 0)$ .

cação média das fontes (equação 3.20), enquanto os pontos são calculados considerando o escalonamento da seção de choque com  $\mu$  (equação 3.18). Note que a aproximação continua sendo muito próxima do cálculo mais detalhado para este intervalo de massas e elipticidades. É possível observar que quanto maior a elipticidade do aglomerado maior será a fração de arcos.

Já a figura 3.6 mostra a fração de arcos para um intervalo de massas entre  $1 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  e  $10 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  para dois valores de elipticidade, onde a curva mais abaixo equivale ao menor valor da massa e esta vai aumentando linearmente de baixo para cima. Note que para um desvio para o vermelho em torno de  $z_L \approx 0.35$  a fração de arcos muda por um fator  $10^3$  nesse intervalo de massa.

Tanto a elipticidade quanto a massa dos aglomerados alteram fortemente a fração de arcos. No entanto, o escalonamento com  $z$  é menos sensível a essas quantidades. Essa sensibilidade é maior com relação à elipticidade fazendo com que o valor máximo da fração de arcos seja levemente deslocado para desvios para o vermelho maiores ao se diminuir  $e$ .

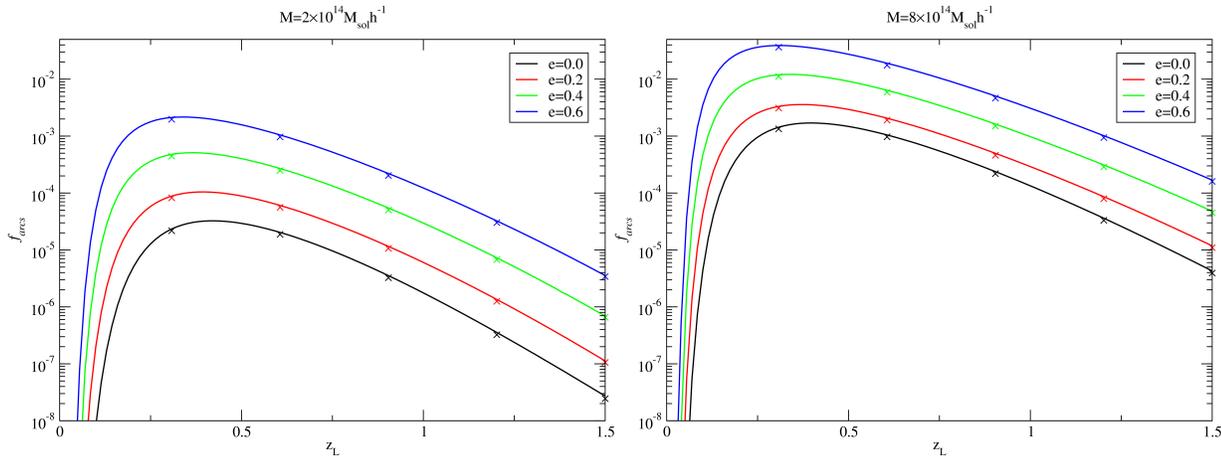


Figura 3.5: Fração de arcos em função do desvio para o vermelho da lente para diferentes valores de massa e elipticidade. Este cálculo foi feito utilizando o modelo  $\Lambda$ CDM plano, a parametrização de  $C(z)$  dada pela equação (3.23) e a massa definida em uma região cuja densidade média é  $200\rho_{\text{crit}}$ .

### 3.5 Dependência da Fração de Arcos com a Cosmologia

Como foi visto na seção 3.1 tanto  $\kappa_s$  quanto  $r_s/D_{\text{OL}}$  dependem das distâncias cosmológicas e, conseqüentemente, dependerão da cosmologia (veja as equações 3.4, 3.8 e 3.10). A figura 3.7 mostra como a fração de arcos muda para diferentes valores da densidade de massa atual do universo ( $\Omega_{0m} = 0.2, 0.3$  e  $0.4$ ), para um universo plano. Note que, em comparação aos resultados da seção anterior, a fração de arcos não é muito sensível à variação da densidade de massa atual do universo (por isto os gráficos serão apresentados com o eixos em escala linear).

Já a figura 3.8 mostra o caso em que a densidade de massa atual do universo é fixa e é variado o valor da densidade associada à constante cosmológica. Note que ao variar  $\Omega_\Lambda$  nos valores 0, 0.7 e 1.0 a curvatura do universo irá mudar, sendo esta negativa, nula e positiva respectivamente para estes valores. Assim como na figura 3.7 esta quantidade não altera o valor da fração de arcos da mesma forma que os parâmetros do modelo da lente. Isto acontece pois as quantidades  $\kappa_s$  e  $r_s/D_{\text{OL}}$  (veja as equações 3.8 e 3.10) são alteradas em cerca de 10% ao se mudar as cosmologias. Já para os intervalos de massa estudados estas quantidades são alteradas em torno de 70% e a elipticidade muda significativamente a seção de choque (veja a figura 2.7). Ainda assim, existe um fator 2 de diferença entre os casos  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $\Omega_\Lambda = 1.0$  em torno de  $z = 0.3$  e o pico é levemente deslocado.

Uma outra questão interessante a ser abordada é considerar um fluido com equação

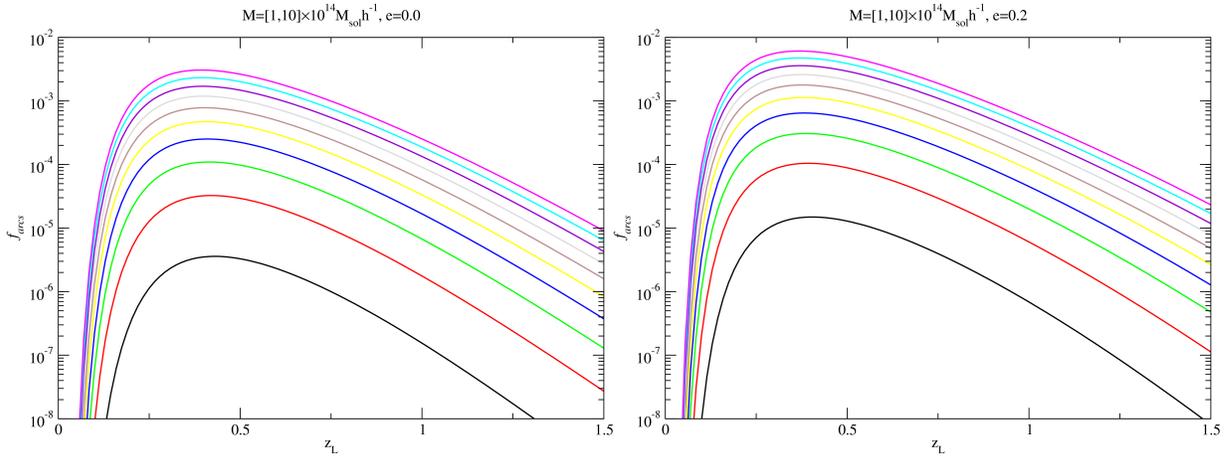


Figura 3.6: Fração de arcos em função do desvio para o vermelho da lente para valores de massa entre  $1 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  e  $10 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ .

de estado  $p = w\rho$  representando a energia escura, no lugar da constante cosmológica. Isto irá alterar a expressão para  $E(z)$ , que será dada por:

$$E(z)^2 = \left( \frac{H(z)}{H_0} \right)^2 = \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0k}(1+z)^2 + \Omega_x(z+1)^{3(1+w)}, \quad (3.24)$$

onde  $\Omega_x$  é a densidade de energia atual relacionada a esta componente. Quando  $w = -1$  é recuperado o caso da constante cosmológica. A figura 3.9 mostra a fração de arcos para diferentes valores de  $w$ . É possível ver que a fração de arcos praticamente não muda em relação a  $w$  no intervalo de  $-1.2$  a  $-0.8$ , pois neste intervalo de  $w$  as quantidades  $\kappa_s$  e  $r_s/D_{OL}$  são alteradas em cerca de 1%. Entretanto, a parametrização para  $C(z)$  é obtida considerando o modelo  $\Lambda$ CDM, e poderia ser alterada em outros modelos de Universo.

Em todos os casos observados acima a fração de arcos, ao variar parâmetros do modelo cosmológico, não é tão alterada quanto ao se variar os parâmetros da lente, sendo mantido seu comportamento e o pico em torno de  $z \approx 0.35$ . Com isto, e tendo em vista que existem muitas incertezas envolvendo os parâmetros da lente (vide o caso da variação do parâmetro de concentração com  $z$  e o próprio modelo de lente considerado), é possível que o fenômeno de lenteamento forte seja mais efetivo para obter informações sobre as lentes do que da cosmologia. Em particular parece ser impossível determinar  $w$  a partir da estatística de arcos.

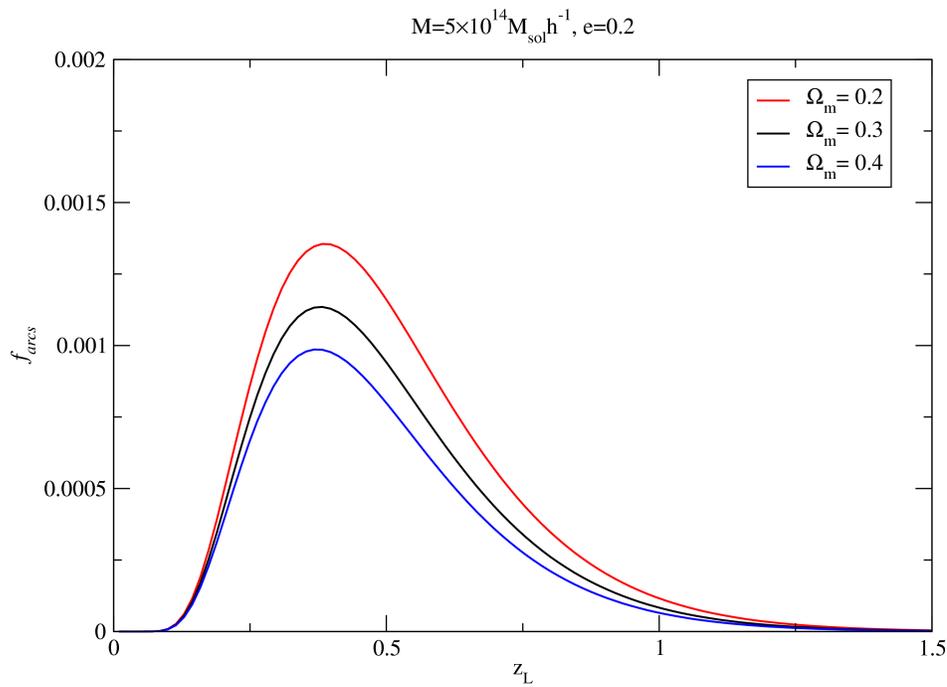


Figura 3.7: Fração de arcos para diferentes valores de  $\Omega_{0m}$  em um universo plano para aglomerados com elipticidade 0.2.

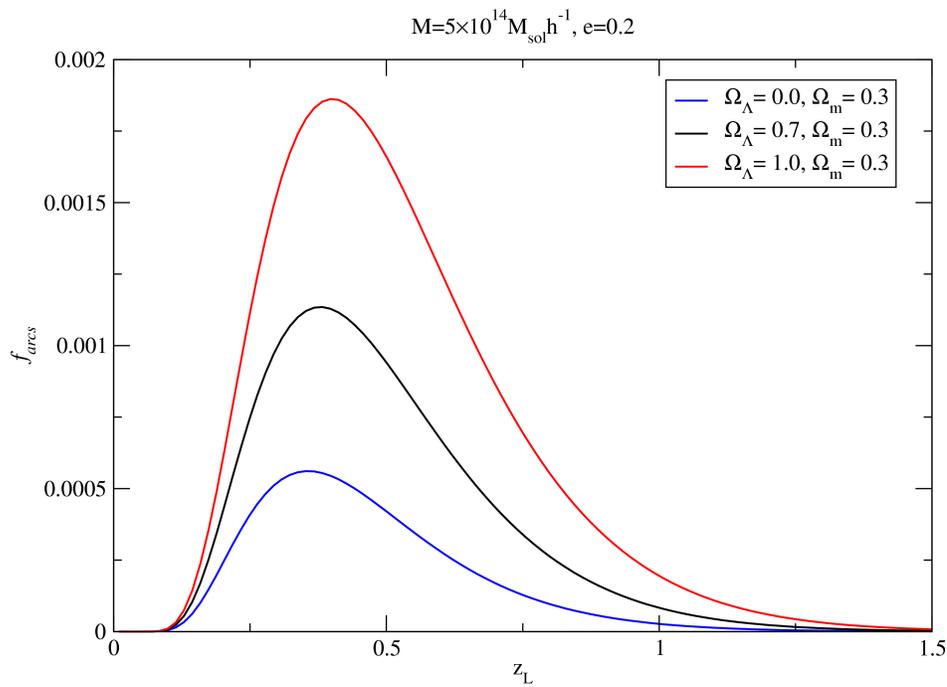


Figura 3.8: Fração de arcos para  $\Omega_{\Lambda} = 0, 0.7$  e  $1.0$ , o que corresponde à curvatura do universo negativa, nula e positiva respectivamente.

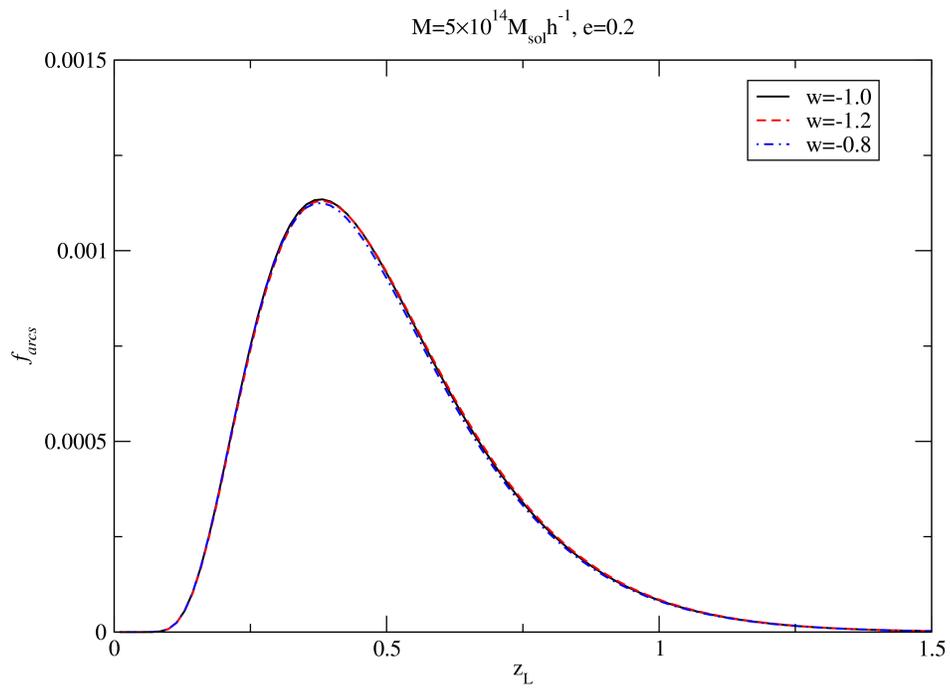


Figura 3.9: Fração de arcos considerando para um fluido com equação de estado  $p = w\rho$ , onde estão ilustrados os casos  $w = -1.2, 1.0$  e  $0.8$



# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho foi desenvolvido um método para calcular a fração de arcos em aglomerados de galáxias a partir da seção de choque, para uma dada distribuição de fontes. Para calcular a seção de choque foi utilizado um perfil de densidade dado pelo modelo de NFW com simetria elíptica. As derivadas do potencial da lente foram calculadas através do método desenvolvido na seção 2.1, no qual a elipticidade na distribuição de matéria é inserida mantendo constante a massa da lente dentro de um isocontorno de densidade, o que generaliza os resultados apresentados em [30]. A seção de choque aumenta com o parâmetro  $\kappa_s$  do modelo de NFW, sendo muito sensível a  $\kappa_s$  para valores pequenos deste. Esse comportamento tem um impacto na sensibilidade da fração de arcos com os diversos parâmetros a serem considerados. Já em relação à elipticidade, para pequenos valores a seção de choque aumenta com  $e$ , mas em um determinado valor de  $\kappa_s$  ( $\approx 0.7$ ) este comportamento se inverte. Foi estudado também o escalonamento da seção de choque com  $L/W$  e  $\mu_{\min}$  e foram introduzidas aproximações dadas pelas equações (2.34) e (2.40).

Um aspecto fundamental deste trabalho é considerar o papel da magnificação  $\mu$  em aumentar a razão sinal-ruído das imagens, o que se reflete em uma maior profundidade efetiva da imagem em regiões lenteadas. Este efeito é equivalente a aumentar a magnitude limite (veja a equação 3.16). Para o cálculo da fração de arcos foram propostas duas formas de considerar os efeitos da magnificação. A primeira considera a dependência da seção de choque com a magnificação dada pela equação (2.34). A segunda é uma aproximação que consiste em considerar apenas a magnificação média sofrida pelas fontes. Foi mostrado que estas duas formas de calcular a fração de arcos geram resultados muito semelhantes, sendo o cálculo pela magnificação média menos custoso computacionalmente. Ao comparar estes resultados com o cálculo que não considera a magnificação foi observado que o papel de desta é fundamental, uma vez que aumenta em algumas ordens de grandeza a fração de

arcos (veja a figura 3.1).

Ao estudar a dependência da fração de arcos com os parâmetros do modelo da lente foi observado que estes possuem um papel determinante. Um aspecto interessante é que a própria definição de massa dos aglomerados altera tanto a magnitude quanto o escalonamento com  $z$  da abundância de arcos (veja a figura 3.3). Isto torna necessário tomar um certo cuidado ao comparar os cálculos com as observações, afim de utilizar a definição de massa consistente com a forma inferida observacionalmente. Em relação a massa e à elipticidade dos aglomerados foi observado que ambas alteram fortemente a fração de arcos (veja as figuras 3.5 e 3.6). No entanto o escalonamento com  $z$  varia pouco com estas quantidades, sendo mais sensível à elipticidade, cujo aumento desloca o pico para desvios para o vermelho menores.

Em relação à cosmologia, esta não afeta tanto a fração de arcos quanto parâmetros da lente. Como pode ser visto nas figuras 3.7 e 3.8 as quantidades  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  alteram pouco a abundância de arcos. Já ao considerar uma equação de estado do tipo  $p = w\rho$  para a energia escura, foi visto que o parâmetro  $w$  possui uma influência ainda menor (veja a figura 3.9). Com isto, será muito difícil utilizar a estatística de arcos para limitar os parâmetros  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ , e parece ser praticamente impossível obter qualquer limite significativo em  $w$ .

Em todos os cálculos da fração de arcos foi observado que existe um pico em torno de  $z \approx 0.3$ , o que pode ser relacionado com as indicações da existência de um excesso no número de arcos gravitacionais em  $z \approx 0.6$  (veja as referências [1] e [2]). Entretanto, o modelo para o cálculo da fração de arcos aqui utilizado é bastante simplificado e, por outro lado, ainda não há uma quantidade muito grande e homogêneo de observações que possibilite afirmar que este é um fenômeno intrínseco à abundância de arcos.

No entanto, outras observáveis em objetos individuais relacionados ao lenteamento gravitacional forte, de um modo geral, podem ser muito úteis para obter informações sobre a cosmologia. Por exemplo, em sistemas com múltiplos arcos correspondentes à fontes em diferentes desvios para o vermelho, em um mesmo aglomerado, é possível determinar a razão entre as distâncias de diâmetro angular destes (veja a referência [47]), o que pode ser utilizado para limitar a cosmologia. Outro exemplo é a determinação de  $H_0$ , como mencionado da seção 1.2.

Existem alguns aspectos interessantes que podem ser abordados ao se dar o prosseguimento a este trabalho. Um dos mais diretos é considerar a distribuição de probabilidade do parâmetro de concentração e também da elipticidade no cálculo da fração de arcos, afim de tornar as previsões mais robustas e de mais fácil comparação com as observações. Um outro ponto é utilizar outros modelos de lente, como por exemplo uma lei de potência

ou modelos mais complexos, como o modelo de Moore (veja a referência [48]), ou ainda utilizar perfis de densidade representando galáxias.

Outra perspectiva é utilizar parte dos códigos já implementados para fazer a inversão da equação da lente, o que permitiria compreender melhor como características das fontes (por exemplo elipticidade e tamanho) e do próprio modelo da lente (como a elipticidade e o perfil de densidade) afetam a aproximação  $|\mu_t/\mu_r| = L/W$ .

Estes estudos da abundância de arcos poderão ser aplicados a futuros projetos de imageamento em grandes áreas do céu, o que irá aumentar significativamente a amostra de sistemas que possuem arcos gravitacionais, fornecendo amostras homogêneas contendo da ordem de milhares de aglomerados, o que tornará a estatística de arcos mais robusta. Para isto será necessário considerar efeitos observacionais no cálculo da fração de arcos, como o *seeing*.



# Apêndice A

## Estrutura do Programa

Para o cálculo da seção de choque e da fração de arcos foi necessário desenvolver ferramentas computacionais capazes de calcular integrais numéricas de forma rápida e precisa, as quais foram implementadas na linguagem de programação C. Tais ferramentas podem ser divididas em duas partes: o cálculo da seção de choque e o da fração de arcos. Para o primeiro caso foi necessário desenvolver um programa mais complexo, levando em conta a metodologia discutida no capítulo 2. Para o cálculo da fração de arcos as questões computacionais são mais simples, em linhas gerais o problema se resume em calcular as integrais dadas pelas equações (3.17), (3.18) e (3.20). Este apêndice tem como objetivo expor as características principais dos algoritmos utilizados e dar uma visão geral da estrutura dos programas desenvolvidos ao longo deste trabalho.

As quantidades mais fundamentais para os cálculos desta dissertação são as derivadas do potencial da lente, escritas em termos de integrais pelas equações (2.24-2.28). Existem vários métodos que podem ser utilizados para calcular estas integrais, onde a grande maioria possui uma característica em comum: podem ser escritos da forma

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx = \sum_n c_n f(x_n), \quad (\text{A.1})$$

sendo as quantidades  $c_n$  e  $x_n$  definidas pelo método que se está utilizando. Note que as integrais citadas são todas definidas de 0 a 1. Afim de otimizar o tempo de cálculo das integrais as quantidades  $c_n$  e  $x_n$  foram calculadas previamente para o método de integração por quadratura de Gauss-Legendre (veja a referência [49]), tornando assim o método de integração preciso e extremamente rápido. Esta forma de implementar o método de integração foi comparada com resultados obtidos através do programa **Mathematica**, que possui seus próprios métodos de integração e é amplamente utilizado no meio acadêmico.

Já para encontrar as regiões de  $L/W > constante$  foi utilizada a aproximação  $L/W \approx |\mu_t/\mu_r|$ . Utilizando coordenadas polares é possível encontrar, para um dado valor da coordenada angular, os valores da coordenada radial onde  $\mu_t/\mu_r = \pm constante$  (que correspondem aos limites de integração da equação 2.32). Para isto foi utilizado o método da bisseção.

Afim de se verificar se os algoritmos estavam calculando as derivadas do potencial e a seção de choque corretamente foi feita, além da verificação com o MATHEMATICA, uma comparação com um programa muito conhecido na literatura, o **gravlens** (veja a referência [50]). Para fazer uma comparação consistente foram geradas tabelas contendo os valores das derivadas do potencial utilizando os dois programas. Com isto a região do plano da lente foi dividida em uma rede quadrada, onde em cada elemento se verificava se este pertencia ou não à região de formação de arcos. Para calcular a área no plano da lente foi simplesmente feita a soma das áreas, multiplicadas pelo jacobiano da equação da lente (veja a equação 1.24). Este resultado é mostrado na figura A.1. A linha contínua representa o resultado obtido através das derivadas do potencial dadas pelo programa **gravlens** e os pontos foram obtidos através dos resultados do programa escrito em C. Note que há bastante ruído no gráfico, isto se deve ao método aqui utilizado para calcular a seção de choque (discretização na rede quadrada), que é diferente do usado na seção 2.3.1 (cálculo através da equação 2.32).

Em relação à estrutura do programa, a figura A.2 mostra de forma bem simplificada a disposição de algumas funções, onde cada caixa representa uma função e as linhas que as ligam indicam que as funções mais abaixo dependem das funções mais acima. Aqui foram omitidas algumas funções intermediárias e os métodos citados acima. Pela forma como o programa foi implementado é possível utilizar qualquer perfil radial (que é transformado em elíptico), bastando apenas trocar a função **kappa**. As funções **XF** e **YF** são utilizadas para gerar os gráficos das regiões de formação de arcos no plano das fontes, enquanto que a função **AREA** calcula a seção de choque pelo método descrito na seção 2.3.1.

Já para o cálculo da fração de arcos são utilizados arquivos contendo uma tabela com os valores da seção de choque e da magnificação média para um dado intervalo de  $\kappa_s$  e alguns valores de  $e$ . Para se obter a seção de choque para um dado  $\kappa_s$  é utilizando um algoritmo de interpolação chamado de Função Racional de Interpolação (veja a referência [49]). Para relacionar a massa e os desvios para o vermelho com  $\kappa_s$  é utilizada a equação (3.8) e para converter as dimensões da seção de choque é utilizada a equação (3.10). Com isto é possível calcular as integrais dadas pelas equações (3.17), (3.18) e (3.20).

Uma perspectiva futura é utilizar estes programas para estudar outros tipos de perfis

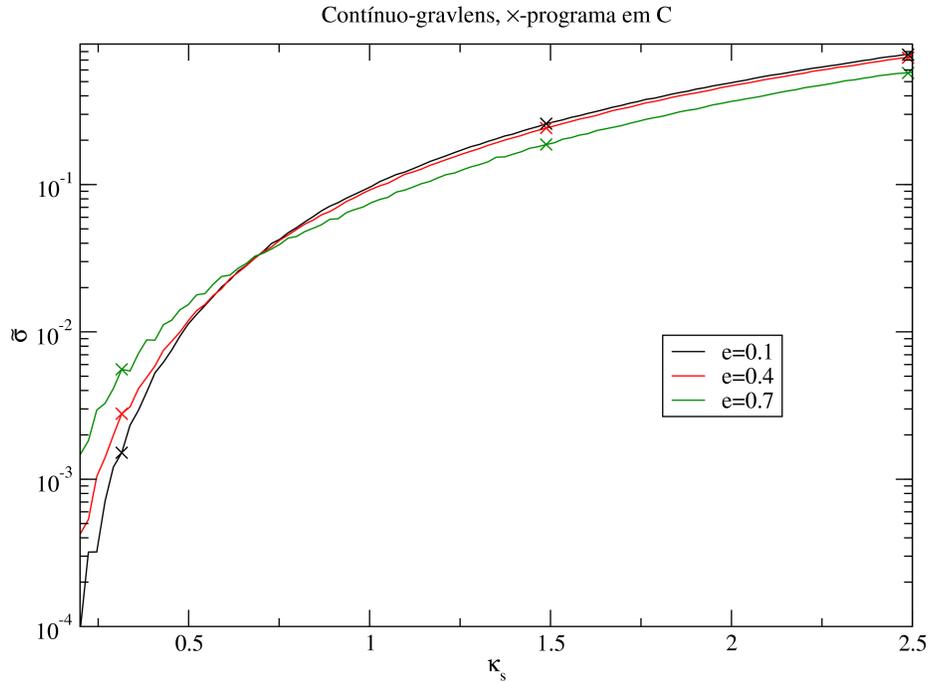


Figura A.1: Comparação entre resultados obtidos utilizando o programa `gravlens` (linhas contínuas) e o programa escrito em C (pontos).

de densidade. Uma outra ferramenta a ser implementada é um módulo que faça a inversão da equação da lente para se estudar o mapeamento das fontes, que poderia ser utilizado para obter imagens de fontes extensas. Entre outras aplicações, isto poderia ser utilizado para investigar como características das fontes, como elipticidade e tamanho, afetam a aproximação  $|\mu_t/\mu_r| = \text{constante}$ .

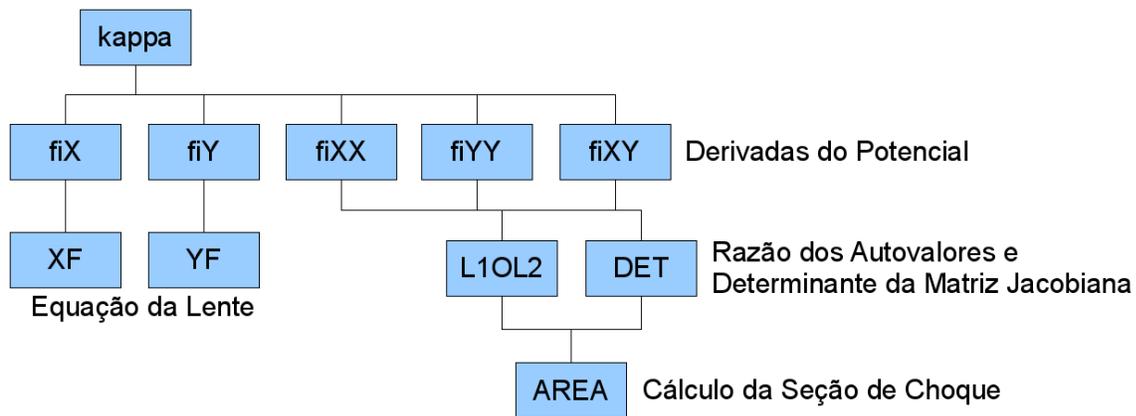


Figura A.2: Disposição de algumas funções, onde cada caixa representa uma função e as linhas que as ligam indicam que as funções mais abaixo dependem das funções mais acima.

# Referências Bibliográficas

- [1] N. Dalal, G. Holder, and J. F. Hennawi. *Statistics of Giant Arcs in Galaxy Clusters*. *Astrophysical Journal*, **609**:50, 2004.
- [2] M. D. Gladders, H. Hoekstra, H. K. C. Yee, P. B. Hall, and L. F. Barrientos. *The Incidence of Strong-Lensing Clusters in the Red-Sequence Cluster Survey*. *The Astrophysical Journal*, **593**:48, 2003.
- [3] C. Will. *Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light*. *Am. J. of Phys.*, **56**:413, 1988.
- [4] S. L. Jaki. *Johann Georg von Soldner and the gravitational bending of light, with an English translation of his essay on it published in 1801*. *Foundations of Physics*, **8**:927, 1978.
- [5] J. Einsenstaedt and A. A. P. Vieira. *Einstein e o Brasil*, page 77. Editora UFRJ, 1995.
- [6] A. Eddington. *Space, Time and Gravitation*. Cambridge University Press, 1923.
- [7] O. Chwolson. *Regarding a possible form of double stars*. *Astronomische Nachrichten*, **221**:329, 1924.
- [8] A. Einstein. *Lens-Like Action of a Star by The Deviation of Light in The Gravitational Field*. *Science*, **84**:56, 1936.
- [9] F. Zwicky. *Nebulae as Gravitational Lenses*. *Phys. Rev.*, **51**:290, 1937.
- [10] F. Zwicky. *On the Probability of Detecting Nebulae Which Act as Gravitational Lenses*. *Phys. Rev.*, **51**:679, 1937.
- [11] M. Schmidt. *3C273: A star-like object with large redshift*. *Nature*, **197**:1040, 1963.

- [12] J. M. Barnothy. *Quasars and the Gravitational Image Intensifier*. *Astronomical Journal*, **70**:666, 1965.
- [13] D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann. *0957+561 A, B: twin quasi-stellar objects or gravitational lens?* *Nature*, **279**:381, 1979.
- [14] Roger Lynds and Vahe Petrosian. *Giant Luminous Arcs in Galaxy Clusters*. *Bulletin of the American Astronomical Society*, **18**:1014, 1986.
- [15] G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier, and J. P. Picat. *A blue ring-like structure, in the center of the A370 cluster of galaxies*. *Astronomy and Astrophysics*, **117**:14, 1987.
- [16] M. J. Irwin, R. L. Webster, P. C. Hewett, R. T. Corrigan, and R. I. Jedrzejewski. *Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event*. *Astronomical Journal*, **98**:1989, 1988.
- [17] J. N. Hewitt, E. L. Turner, D. P. Schneider, B. F. Burke, and G. I. Langston. *Unusual radio source MG1131+0456 - A possible Einstein ring*. *Nature*, **333**:537, 1988.
- [18] S. Refsdal and J. Surdej, editors. *Gravitational lenses*, 1994.
- [19] Bond, I. A. et al. *OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53: A Planetary Microlensing Event*. *Astrophysical Journal*, **606**:L155, 2004.
- [20] J.-P. Kneib, R. S. Ellis, M. R. Santos, and J. Richard. *A Probable  $z \sim 7$  Galaxy Strongly Lensed by the Rich Cluster A2218: Exploring the Dark Ages*. *Astrophysical Journal*, **607**:697, 2004.
- [21] J. D. Cohn, C. S. Kochanek, B. A. McLeod, and C. R. Keeton. *Constraints on Galaxy Density Profiles from Strong Gravitational Lensing: The Case of B1933+503*. *Astrophysical Journal*, **554**:1216, 2001.
- [22] O. Wucknitz, A. D. Biggs, and I. W. A. Browne. *Models for the lens and source of B0218+357: a LENSCLEAN approach to determine  $H_0$* . *MNRAS*, **349**:14, 2004.
- [23] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach, and J. S. Gregory. *Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979 1999*. *Physical Review Letters*, **92**:121101, 2004.
- [24] S. Das and J. P. Ostriker. *Testing a New Analytic Model for Gravitational Lensing Probabilities*. *Astrophysical Journal*, **645**:1, 2006.

- [25] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. *The Structure of Cold Dark Matter Halos*. *Astrophysical Journal*, **462**:563, 1996.
- [26] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. *A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering*. *Astrophysical Journal*, **490**:493, 1997.
- [27] M. Bartelmann. *Arcs from a universal dark-matter halo profile*. *Astronomy and Astrophysics*, **313**:697, 1996.
- [28] M. Oguri, J. Lee, and Y. Suto. *Arc Statistics in Triaxial Dark Matter Halos: Testing the Collisionless Cold Dark Matter Paradigm*. *Astrophysical Journal*, **599**:7, 2003.
- [29] G. Golse and J.-P. Kneib. *Pseudo elliptical lensing mass model: Application to the NFW mass distribution*. *Astronomy and Astrophysics*, **390**:821, 2002.
- [30] C. R. Keeton. *A Catalog of Mass Models for Gravitational Lensing*. ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0102341, 2001.
- [31] T. Schramm. *Realistic elliptical potential wells for gravitational lens models*. *Astronomy and Astrophysics*, **231**:19, 1990.
- [32] R. Barkana. *Fast Calculation of a Family of Elliptical Mass Gravitational Lens Models*. *Astrophysical Journal*, **502**:531, 1998.
- [33] E. Rozo, D. Nagai, C. Keeton, and A. Kravtsov. *The Impact of Baryonic Cooling on Giant Arc Abundances*. *Astrophysical Journal*, **687**:22, 2008.
- [34] Ferreira, P. C. and Makler, M. . *Arcos Gravitacionais: Relações Entre Parâmetros Locais e não Locais das Imagens*. Monografia de final de curso, OV-UFRJ, 2008.
- [35] R. Blandford and R. Narayan. *Fermat's principle, caustics, and the classification of gravitational lens images*. *Astrophysical Journal*, **310**:568, 1986.
- [36] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. UK: Cambridge University Press, 2005.
- [37] G. L. Bryan and M. L. Norman. *Statistical Properties of X-Ray Clusters: Analytic and Numerical Comparisons*. *Astrophysical Journal*, **495**:80, 1998.
- [38] C. M. Baugh and G. Efstathiou. *The Three-Dimensional Power Spectrum Measured from the APM Galaxy Survey - Part One - Use of the Angular Correlation Function*. *MNRAS*, **265**:145, 1993.

- [39] A. N. Taylor, T. D. Kitching, D. J. Bacon, and A. F. Heavens. *Probing dark energy with the shear-ratio geometric test*. MNRAS, **374**:1377, 2007.
- [40] M. L. Brown, A. N. Taylor, D. J. Bacon, M. E. Gray, S. Dye, K. Meisenheimer, and C. Wolf. *The shear power spectrum from the COMBO-17 survey*. MNRAS, **341**:100, 2003.
- [41] E. S. Cypriano, L. J. Sodré, L. E. Campusano, J.-P. Kneib, R. Giovanelli, M. P. Haynes, D. A. Dale, and E. Hardy. *Gravitational Lensing by Nearby Clusters of Galaxies*. Astronomical Journal, **121**:10, 2001.
- [42] Abbott, T. et al. *The Dark Energy Survey*. ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0510346, 2005.
- [43] A. F. Neto, L. Gao, P. Bett, S. Cole, J. F. Navarro, C. S. Frenk, S. D. M. White, V. Springel, and A. Jenkins. *The statistics of  $\Lambda$  CDM halo concentrations*. MNRAS, **381**:1450, 2007.
- [44] K. Dolag, M. Bartelmann, F. Perrotta, C. Baccigalupi, L. Moscardini, M. Meneghetti, and G. Tormen. *Numerical study of halo concentrations in dark-energy cosmologies*. Astronomy and Astrophysics, **416**:853, 2004.
- [45] A. V. Macciò, A. A. Dutton, and F. C. van den Bosch. *Concentration, spin and shape of dark matter haloes as a function of the cosmological model: WMAP1, WMAP3 and WMAP5 results*. MNRAS, **391**:1940, 2008.
- [46] L. Gao, J. F. Navarro, S. Cole, C. S. Frenk, S. D. M. White, V. Springel, A. Jenkins, and A. F. Neto. *The redshift dependence of the structure of massive  $\Lambda$  cold dark matter haloes*. MNRAS, **387**:536, 2008.
- [47] R. Gavazzi, T. Treu, L. V. E. Koopmans, A. S. Bolton, L. A. Moustakas, S. Burles, and P. J. Marshall. *The Sloan Lens ACS Survey. VI. Discovery and Analysis of a Double Einstein Ring*. Astrophysical Journal, **677**:1046, 2008.
- [48] J. Diemand, B. Moore, and J. Stadel. *Convergence and scatter of cluster density profiles*. MNRAS, **353**:624, 2004.
- [49] W.H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *NUMERICAL RECIPES in C*. Cambridge University Press, second edition, 1992.

- [50] C. R. Keeton. *Computational Methods for Gravitational Lensing*. ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0102340, 2001.