

CBPF-NF-031/80

A DUALIDADE NOS ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
E A TEORIA DOS SISTEMAS FÍSICOS LINEARES

por

F.M. de Oliveira Castro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq
Av. Wenceslau Braz, 71 - fundos - RJ
Rio de Janeiro - Brasil

A DUALIDADE NOS ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
E A TEORIA DOS SISTEMAS FÍSICOS LINEARES

por

F.M. de Oliveira Castro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Dedicado a *Bernhard Gross*
no seu 70º aniversário.

INTRODUÇÃO

Este trabalho diz respeito à representação analítica da relação excitação → resposta dos sistemas físicos lineares, passivos, causais com hereditariedade invariável no tempo. Mostramos que a referida relação se exprime mediante um princípio de superposição, cuja forma fica univocamente determinada pelas propriedades do eventual espaço vetorial topológico, escolhido para representar o conjunto das excitações e pelas condições acima enunciadas.

Na primeira parte, adotamos uma exposição intuitiva para descrever o aspecto físico e o tratamento matemático dos problemas em que o emprego do princípio tem sido feito com vantagem. No estudo experimental de sistemas lineares cuja constituição interna é desconhecida, o recurso a um princípio dessa natureza, é, por assim dizer, obrigatório. No estudo teórico de sistemas lineares, é muito usado para facilitar a resolução dos problemas.

No segundo capítulo, a representação analítica do princípio é considerada em seu aspecto matemático.

Na segunda parte, ilustraremos o que foi dito na primeira, com algumas aplicações.

Na escolha dos trabalhos citados, não houve a preocupação de apontar prioridades. Apenas, indicamos aqueles que nos pareceram mais indicados para caracterizar a natureza das questões tratadas neste trabalho.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 1 - PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO. FENOMENOLOGIA</u>	1
1. Ação mecânica retardada (Elastischen Nachwirkungen). Boltzmann.	1
2. Carga residual nos dielétricos. Hopkinson	2
3. Viscoelasticidade. Gross	4
4. Dielétricos (ação retardada). Gross	8
5. Fenômenos hereditários. Volterra	11
6. Circuitos elétricos lineares. Carson	12
<u>CAPÍTULO 2 - REPRESENTAÇÃO DA RELAÇÃO EXCITAÇÃO → RESPOSTA, NOS SISTEMAS FÍSICOS LINEARES</u>	22
1. Sistemas lineares. Propriedades	22
2. Formulação matemática do princípio	23
3. Princípio de superposição e "dualidade"	25
4. O princípio de superposição no espaço $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$ de Hilbert	26
5. O princípio de superposição para $\mathcal{E} = C_k(\mathbb{R})$	32

CAPÍTULO 1

PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO. FENOMENOLOGIA.

1) Ação mecânica retardada (Elastischen Nachwirkungen .Boltzmann)

Observando a relação existente entre o momento de torção de um fio elástico e o correspondente ângulo de torção, Boltzmann [1] verificou o seguinte: O momento de torção $L(t)$, no instante t , depende não só do valor $\theta(t)$ do ângulo de torção, no instante considerado, mas, também, das torções anteriores aplicadas ao fio.

Verificou que o efeito de uma torção $\theta(t-\omega)$, aplicada ao fio no instante ω anterior a t , durante um pequeno intervalo de tempo $d\omega$, decresce constantemente, à medida que ω cresce e achou que este efeito podia ser expresso pela relação

$$\left[-\theta(t-\omega)f(\omega)d\omega \right]$$

em que $f(\omega)$ é uma função decrescente de ω .

Adicionando todos os efeitos de torção anteriores ao instante t , obteve a fórmula seguinte:

$$L = a\theta(t) - \int_0^{\infty} \theta(t-\omega)f(\omega)d\omega \quad (1.1)$$

[1] L. Boltzmann, Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung, Wien. Ber. 70 (1874).

No caso de uma fibra de vidro, Boltzmann encontrou para a função f , a expressão

$$f(\omega) = A/\omega \quad ,$$

em que A é aproximadamente constante para pequenos valores de ω , mas decresce quando ω é muito grande.

2) Carga residual nos dielétricos. Hopkinson.

J. Hopkinson, de cujo trabalho [2], extraímos as indicações precedentes, pois não conseguimos acesso ao trabalho original de Boltzmann, estudou, por sugestão de Clerk Maxwell, o comportamento elétrico de determinados vidros, usados na confecção de Botelhas de Leyde.

No seu trabalho, mostra que os efeitos retardados, produzidos pela aplicação de uma diferença de potencial num dielétrico, são muito semelhantes aos efeitos de retardamento observados por Boltzmann no comportamento dos corpos elásticos e que: à tensão mecânica corresponde a diferença de potencial elétrico e à deformação mecânica corresponde o deslocamento elétrico.

Para descrever esses fenômenos, usa o princípio de superposição empregado por Boltzmann e a mesma expressão (1.1) para representar a relação entre a diferença de potencial $x(t)$ medida com eletrômetro, no instante t , e a grandeza $y(t)$ definida como sendo o quociente do valor da integral de superfície do deslocamento elétrico pela capacidade instantânea do condensador.

[2] J. Hopkinson, Residual charge of a Leyden Jar, Phil. Trans., London, 167, 1877, pg. 599.

A fórmula por ele indicada para representar a relação excitação→resposta, é a mesma de Boltzmann

$$x(t) = y(t) - \int_0^{\infty} y(t-\omega)\phi(\omega)d\omega \quad (1.2)$$

em que $\phi(\omega)$ representa uma função decrescente de ω .

Usa, porém, a relação inversa de (1.2), que escreve da seguinte maneira

$$y(t) = x(t) + \int_0^{\infty} x(t-\omega)\psi(\omega)d\omega \quad (1.3)$$

onde $\psi(\omega)$ é uma função decrescente de ω .

Expressões aproximadas, tanto para a função $f(\omega)$ de Boltzmann como para a função $\psi(\omega)$ de Hopkinson, foram obtidas experimentalmente. A fórmula (1.1) deixou de ser utilizada em vista da dificuldade experimental encontrada na medida de $y(t)$.

Para passar de (1.2) a (1.3), Hopkinson observa que, em cada instante ω , a relação entre $x(t)$, $y(t)$ e $y(t-\omega)$ é linear e o mesmo acontece com $x(t-\omega)$, como se pode deduzir de (1.2). Assim, deve existir também uma relação linear entre $y(t)$, $x(t)$ e $x(t-\omega)$ do tipo (1.2).

O problema da inversão de uma equação do tipo (1.2), só muito mais tarde, foi resolvido rigorosamente por Volterra.

Note-se que a simples mudança de variável $t-\omega = \lambda$, transforma as equações (1.2) e (1.3) num par de equações de Volterra [3]

[3] V. Volterra, Theory of Functionals, Blackie and Sons, London (1931)(Extensa bibliografia sobre os trabalhos de Volterra).

$$x(t) = y(t) - \int_{-\infty}^t y(\lambda)\phi(t-\lambda)d\lambda \quad (1.4)$$

e

$$y(t) = x(t) + \int_{-\infty}^t x(\lambda)\psi(t-\lambda)d\lambda \quad (1.5)$$

em que a função ψ é o núcleo resolvente da equação (1.4), e, reciprocamente, a função ϕ é o núcleo resolvente da equação (1.5).

As funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ não são independentes, como é fácil de prever, também do ponto de vista experimental, pois ambas equações (1.4) e (1.5) traduzem o mesmo fenômeno físico.

Esta dupla representação do mesmo fenômeno por meio de duas funções relacionadas do tipo ϕ e ψ , obtidas experimentalmente e a relação entre elas existente constitui o "*leit-motif*" da excelente publicação de B. Gross sobre a estrutura matemática das teorias da visco-elasticidade [4].

3) Visco-elasticidade. Gross.

Os estudos pioneiros de Boltzmann foram, posteriormente, muito mais desenvolvidos por vários pesquisadores. Uma extensa bibliografia sobre o assunto se encontra no já citado livro de B. Gross [4], onde ele completa os referidos trabalhos, levando em conta a viscosidade Newtoniana, nos casos em que ela possa eventualmente ocorrer.

[4] B. Gross, Mathematical Structure of the Theories of Visco-Elasticity "Actualités Scientifiques et Industrielles" N. 1190, Paris, Hermann & Cie. (1953).

O ponto de partida para descrevê-los, (na aproximação linear), é sempre a fórmula de Boltzmann que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$I(t) = \int_{-\infty}^t A(t-\tau)f'(\tau)d\tau \quad (1.6)$$

onde $f(\tau)$ é uma função que representa a excitação aplicada ao sistema, no instante τ , $f'(\tau) = \frac{df(\tau)}{d\tau}$ e $A(t)$ é a resposta, no instante t , produzida por uma excitação unitária representada pela função de Heaviside $\mathcal{H}(t) = 1$ para $t > 0$ e igual a zero para $t < 0$. A função $A(t)$ caracteriza o sistema.

Representações equivalentes do princípio de superposição têm sido usadas, há longos anos, por vários autores, mas seu emprego remonta, pelo menos a Duhamel [5]. As hipóteses admitidas para deduzi-las não têm sido explicitadas convenientemente, como já foi observado por L. Schwartz [6], mas, sobre esta questão que interessa mais a matemáticos do que a físicos, voltaremos, mais adiante.

O emprego do princípio de superposição é recurso a que se recorre, para estudar, experimentalmente, o comportamento de um sistema cuja constituição interna é desconhecida, desde que a relação excitação→reposta seja aproximadamente linear. Então, basta aplicar ao sistema um tipo de excitação simples e

[5] J.M.C. Duhamel. J. Éc. Polytech., Paris, 14, Cah. 22, 1833 p. 20. (citado por Vannevar Bush, Operational Circuit Analysis N.Y. John Wiley & Sons (1937).

[6] Laurent Schwartz. Causalité e analyticité, Notas de Física, Vol. II, Nº 12 (1961) Centro Bras. de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro e Ann. Acad. Bras. Cien., 34, 13 (1962).

observar a resposta correspondente. Por meio desta única informação, o princípio de superposição permite descrever o comportamento do sistema para outros tipos de excitação mais complicados.

Compreende-se, então, que a formulação de tal princípio, conduza a diferentes formas de representação matemática. Tudo depende do tipo de excitação simples escolhida para atuar sobre o sistema. No caso dos fenômenos visco-elásticos, as várias maneiras de se caracterizar o sistema (solicitações bruscas do tipo Heaviside, aplicação de solicitações periódicas, etc) estão muito bem tratados no referido livro de B.Gross [4].

Vejamos como se procede.

Os corpos de prova podem ser submetidos a dois tipos de experiência, distintos:

- a) Aplica-se ao corpo de prova uma tensão unitária do tipo Heaviside $\sigma_0(t)$ e observa-se a resposta correspondente (deformação), nos instantes posteriores.
- b) Submete-se o corpo de prova a uma deformação unitária do tipo Heaviside $\epsilon_0(t)$ e observa-se a resposta correspondente (tensão), nos instantes posteriores.

No primeiro caso, a deformação resultante $\epsilon(t)$ é a soma de três parcelas:

$$\epsilon_1(t) = \left[\epsilon_\infty + t/\eta_0 + \psi(t) \right] \sigma_0(t) \quad (1.7)$$

onde:

$\epsilon_\infty \sigma_0(t)$ é a deformação instantânea

η_0 o coeficiente Newtoniano de viscosidade

$\psi(t)$ uma função característica do material (creep function) tal que $\psi(0) = 0$.

No segundo caso, a tensão $\sigma_1(t)$ observada é a soma de três parcelas

$$\sigma_1(t) = \left[E_0 + \bar{\eta}_0 \delta(t) + \bar{\psi}(t) \right] \epsilon_0(t) \quad (1.8)$$

onde:

$\bar{\psi}(t)$ é a função de relaxação tal que $\psi(\infty) = 0$ e $\bar{\eta}_0$ é uma constante

E_0 é o módulo de elasticidade estático

$E_0 + \bar{\psi}(0)$ é o módulo instantâneo de elasticidade

$\delta(t)$ é a função δ de Dirac. (O termo é desnecessário quando $\bar{\psi}(0) = \infty$) [4].

Assim, para representar, no caso geral, a relação existente entre deformação $\epsilon(t)$, tensão $\sigma(t)$ e o tempo t , Gross adota a expressão (1.6) do princípio de superposição de Boltzmann e obtém as duas fórmulas equivalentes para descrever o mesmo fenômeno:

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \left[\epsilon_\infty + \frac{t-\tau}{\eta_0} + \psi(t-\tau) \right] d\tau \quad (1.9)$$

e

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau} \left[E_0 + \bar{\eta}_0 \delta(t-\tau) + \bar{\psi}(t-\tau) \right] d\tau \quad (1.10)$$

A presença da função $\delta(t)$ de Dirac no núcleo da segunda, torna esta expressão puramente simbólica, pois é sabido que nem a integral de Riemann nem a integral mais geral de Lebesgue podem servir para representar as denominadas funções impulsivas. A razão é simples: qualquer uma dessas integrais é nula para toda função integranda diferente de zero só num conjunto de pontos de medida nu

1a.

O exemplo foi citado para mostrar que a fórmula (1.6) não é bastante geral para abranger o caso de solicitações impulsivas. O instrumento matemático adequado para representar esses casos é a teoria das Distribuições de L. Schwartz [7].

4) Dielétricos (ação retardada). Gross.

Os estudos pioneiros de Hopkinson sobre a carga residual nos dielétricos deram lugar a um grande número de trabalhos posteriores. Uma bibliografia bastante completa sobre o assunto se encontra nos artigos de B. Gross e P.S. Rocha [8]. Não se trata, aqui, de analisar esses trabalhos, mas sim, de indicar uma aplicação um tanto diferente do princípio de Superposição [9]. No citado trabalho [8], aqueles autores mostram que, num determinado instante t , a corrente $I(t)$ que atravessa um condensador, construído com dielétrico sólido anômalo, submetido a uma diferença de potencial $U(t)$, é dada por

$$I(t) = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + \int_{-P}^t \frac{du}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau \quad (1.11)$$

em que C e R representam, respectivamente, a capacidade geométrica

[7] L. Schwartz, *Theorie des Distributions*, Paris, Hermann & Cie. (1951).

[8] B. Gross e P.S. Rocha, *Estudos sobre Dielétricos*, An. Acad. Bras. Cienc. IX, (1937), X (1938), Rio de Janeiro.

[9] B. Gross, *Uma nova aplicação do princípio de superposição na teoria dos dielétricos anômalos*, An. Acad. Bras. Cienc., XI, (1939), Rio de Janeiro.

ca e a resistência do sistema e $\phi(t)$ é a função de relaxação. O último termo da equação representa a "corrente hereditária" mediante a fórmula de Boltzmann.

A circunstância nova que se apresenta aqui é a seguinte:

Em cada instante t , o funcional linear $I(t)$ que representa o valor instantâneo da corrente, além da corrente hereditária que depende das tensões aplicadas ao condensador anteriormente ao instante t , depende também, explicitamente, das contribuições instantâneas $C \, du/dt$ e u/R .

No caso considerado, Gross adotou para a função $\phi(t)$ a expressão de Schweidler

$$\phi(t) = \beta t^{-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0 \quad (1.12)$$

Expressões do tipo (1.11) constituem uma generalização da Fórmula de Boltzmann, e V. Volterra inclui estes funcionais na sua definição, de fenômeno hereditário [3]. Nos casos examinados precedentemente, as funções hereditárias foram sempre supostas contínuas (excluindo o caso da pseudo função $\delta(t)$ nas fórmulas (1.8) e (1.10)). O caso em apreço também difere dos precedentes, porque a função (1.12) é singular na origem $t = 0$.

É interessante observar que nenhuma das duas complicações introduzidas acarreta maiores dificuldades para a resolução do seguinte problema proposto por Gross: "depois de aberto, subitamente no instante $t = 0$ o ramo de circuito de que faz parte o condensador anômalo, suposto carregado, determinar a variação ulterior da diferença de potencial existente nos seus termi

nais" [8, 9, 10]. A equação íntegro-diferencial do problema resulta da equação (1.11) fazendo-se nela $I(t) = 0$ seja qual for t .

Com a simples mudança de função incógnita:

$$\psi(t) = \frac{du}{dt}$$

e introduzindo, para simplificar,

$$p = 1 - \alpha \qquad \lambda = 1/RC$$

$$K(\tau, t) = \lambda \left[1 + k(t-\tau)^{p-1} \right]$$

$$e \quad f(t) = - \left[\lambda u(0) + \frac{i_0(t)}{C} \right]$$

e, supostas conhecidas a corrente inicial

$$i_0(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{du}{d\tau} \phi(t-\tau) d\tau$$

e a tensão inicial u_0 , o problema se reduz à integração da equação de Volterra

$$\psi(t) + \int_0^t \psi(\tau) K(\tau, t) d\tau = f(t) \qquad (1.13)$$

em que a função $f(t)$ e o núcleo $K(\tau, t)$ são funções conhecidas [11, 12].

[10] B. Gross, On Discharge Voltage and Return Voltage for Absorptive Capacitors, Phys.Rev. 62, Nos. 7 and 8, 383-387 (1942).

[11] Oliveira Castro (F.M. de), Z. Phys. 114, 116, 1939; An. Acad. Brasil. Cienc., 11, 151, 1939.

[12] Moraes (A. de), Shenberg (M.), An.Acad.Brasil.Cienc., 12, 137, 1940.

5) Fenômenos hereditários. Volterra.

Para designar fenômenos da natureza dos que foram considerados precedentemente e outros como, por exemplo, o da histerésis magnética, o mais conhecido de todos, Vito Volterra [13] introduziu o termo de "fenômenos hereditários". O tratamento matemático de "problemas de natureza hereditária" conduz, como vimos, à consideração de equações integrais e íntegro-diferenciais. "Um fenômeno hereditário (esclarece Volterra) ocorre num sistema, quando o fenômeno não depende somente do estado atual do sistema ou de seus estados imediatamente precedentes (i.é dos valores iniciais dos parâmetros que definem o estado do sistema e de algumas de suas derivadas em relação ao tempo) mas também de todos os estados precedentes por que o sistema tenha passado; em outras palavras é um fenômeno que depende da história prévia do sistema e por conseguinte pode ser chamado de hereditário" [3].

O funcional $I(t)$ da equação (1.11) exprime um fenômeno que se enquadra na definição acima.

Os conceitos de "função de linha" [14], "função que depende de outras funções" [15], introduzidos por Volterra, para "representar quantidades que dependem de todos os valores que, uma ou várias funções assumem num determinado campo" caíram em desuso. Foram posteriormente substituídos pela noção moderna de

[13] V. Volterra, Deformazioni di una sfera elastica, soggetta a date tensioni nel caso ereditario. (R.Acc.dei Lincei, Rend., XIX, Series 5, 1910.

[14] V. Volterra, Leçons sur les Fonctions de Lignes, Gauthier Villars, Paris, 1913.

[15] V. Volterra, Sulle funzione che dipendono da altre funzioni, Rend.Lincei, 1887, 3 notas (Trabalho pioneiro).

função definida sobre um conjunto abstrato de funções, como con-
sequência imediata das idéias de Fréchet sobre os conjuntos abs-
tratos, cálculo funcional e teoria dos espaços abstratos [16,17].

O princípio heurístico de passagem do finito ao infi-
nito de que se valeu constantemente, se bem que não seja passí-
vel de justificação rigorosa, foi, também, empregado mais tarde,
por Fredholm e Hilbert com o maior sucesso.

6) Circuitos elétricos lineares. Carson.

Em 1926, John R. Carson [18] publicou um livro funda-
mental sobre a teoria dos circuitos elétricos lineares, que ain-
da é uma das melhores obras já escritas sobre o assunto. O seu
principal objetivo era dar uma justificação rigorosa ao Cálculo
Simbólico de Heaviside.

O problema que consiste em determinar a corrente pro-
duzida num circuito elétrico em resposta a uma força eletromo-
triz $E(t)$, aplicada ao mesmo, no instante $t = 0$, foi por ele re-
duzido à solução da equação integral

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^{\infty} A(t)e^{-pt} dt \quad (1.14)$$

[16] M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel, Rend. del
Cir. Mat. di Palermo, XXX, 1916.

[17] M. Fréchet, Les espaces abstraits, etc., Paris Gauthier-Villars (1951).

[18] John R. Carson, Electric Circuit Theory and the Operational Calculus .
McGraw-Hill, N. York, (1926)
The Heaviside Operational Calculus, Bull. Am.Math.Soc.,
32, 43(1926), Bell System Technical Journal, 1, nº 2 ,
pg. 43 (1922).

e ao emprego do princípio de superposição, formulado da seguinte maneira:

$$I(t) = \frac{d}{d\tau} \int_0^t A(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (1.15)$$

$Z(p)$ (impedância complexa do circuito) o especifica completamente. Todas as características do circuito, i.é: constantes e conexões figuram no problema unicamente através de $Z(p)$. Se fizermos $p = i\omega$ na expressão de $Z(p)$, $Z(i\omega)$ em que $\omega/2\pi$ é a frequência, então $Z(i\omega)$ é a impedância complexa da teoria usual do estado estacionário dos circuitos elétricos, percorridos por corrente alternativa.

As equações (1.14) e (1.15) constituem a formulação completa do problema e a sua solução já leva em conta, automaticamente, a condição de estar o circuito em equilíbrio, antes do instante $t = 0$. $A(t)$ é a admitância indicial de Carson, mas, tudo isso é muito bem conhecido pelos engenheiros eletricitistas. O que interessa aqui, é a maneira pela qual Carson obteve a representação matemática do princípio de superposição, expressa pela equação (1.15). Seu raciocínio pode ser resumido assim:

- 1) - Antes do instante $t = 0$ o circuito está em equilíbrio;
- 2) - Seja $A(t)$ a corrente produzida, no circuito, por uma f.e.m. unitária de Heaviside, nele aplicada no instante $t = 0$;
- 3) - Os parâmetros e conexões do circuito não sofrem qualquer alteração no decorrer do tempo;
- 4) - O sistema é linear.

Então, a f.e.m. E_0 aplicada ao circuito no instante $t = 0$ produzirá, no instante $0 < t$, a corrente $E_0 A(t)$. Como o sistema permanece inalterado no tempo, a aplicação de uma f.e.m. uni

tária, no instante τ , ($0 < \tau < t$), produzirá a corrente $A(t-\tau)$, no instante t , e a uma variação brusca de tensão igual a $\Delta_{\tau}E$, no instante τ , corresponderá uma variação de corrente igual a $\Delta_{\tau}E \times A(t-\tau)$, no instante t . Se, nos instantes sucessivos, $\tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_n$ ($0 < \tau_i < t$) forem aplicadas ao sistema correspondentes variações bruscas de tensão iguais a $\Delta_{\tau_i}E$, em virtude da linearidade do sistema, a corrente resultante no fim do instante t será,

$$I(t) = E_0 A(t) + \Delta_1 E \cdot A(t-\tau_1) + \dots + \Delta_n E A(t-\tau_n) \quad (1.19)$$

Para passar do descontínuo ao contínuo, Carson supõe todos os instantes τ_i igualmente espaçados, isto é, divide o intervalo $[0, t]$ em n partes iguais a $\Delta t = \tau_i - \tau_{i-1}$. Escreve a fórmula (1.19) sob a forma

$$I(t) = E_0 A(t) + \Delta_1 E \cdot A(t-\tau_1) + \dots + \Delta_n E \cdot A(t-n\Delta t) \quad (1.20)$$

e conclue: *"Now evidently if the interval Δt is made shorter and shorter, then in the limit $\Delta t \rightarrow dt$ and $j\Delta t = \tau$ and*

$$\Delta_j E = \frac{d}{d\tau} E(\tau) d\tau, \quad (1.21)$$

Passing to the limit in the usual manner this summation becomes a definite integral and we get

$$I(t) = E(0)A(t) + \int_0^t A(t-\tau) \frac{d}{d\tau} E(\tau) d\tau, \quad (1.22)$$

Finally by obvious transformations of the expression we arrive

at the fundamental formula of circuit theory

$$I(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t A(t-\tau)E(\tau)d\tau \quad (1.23)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_0^t E(t-\tau)A(\tau)d\tau \quad " \quad (1.24)$$

Condições suficientes para a validade dessas fórmulas, bem como a de outras deduzidas a partir das mesmas, não foram por ele enunciadas de modo explícito. O mesmo acontece com as deduções apresentadas, mais tarde, por outros autores de excelentes tratados sobre o Cálculo de Operadores, aplicado a circuitos elétricos [19,5]

No seu livro destinado a engenheiros, o método semi-intuitivo usado por Carson se justifica sendo até mesmo, recomendável pela clareza com que são tratados os aspectos físicos essenciais do problema. Por outro lado, enquadrar a sua dedução dentro de moldes matematicamente mais ortodoxos é problema que não apresenta a menor dificuldade.

A observação que desejamos fazer aqui é de outra natureza. A hipótese de derivabilidade introduzida em (1.21) restringe a generalidade do resultado. A passagem do caso descontínuo (1.19) para o caso contínuo pode ser feita diretamente e conduz a uma forma mais geral do princípio de superposição expressa por meio de uma integral de Stieltjes.

[19] Karl Willy Wagner - Operatoren Rechnung, etc.

Johann Ambrosius Barth/Leipzig (1940).

[5] Vannevar Bush - Op. cit.

De fato, consideremos uma subdivisão Δ do intervalo $[0, t]$ determinado pelos pontos: $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = t$, como em (1.19) e escrevamos a fórmula (1.19) da seguinte maneira:

$$I_n(t) = E_0 A(t) + A(t-\tau_1) [E(\tau_1) - E(0)] + \dots + A(t-\tau_{i+1}) [E(\tau_{i+1}) - E(\tau_i)] + \dots + A(t-\tau_n) [E(\tau_n) - E(\tau_{n-1})] \quad (1.26)$$

Seja δ o maior dos números $\tau_{i+1} - \tau_i$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Se, independentemente da escolha da subdivisão Δ e dos ξ_i , tais que $\tau_i \leq \xi_i \leq \tau_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), existir o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} A(t-\xi_i) [E(\tau_{i+1}) - E(\tau_i)] \quad (1.27)$$

este limite é, por definição, a integral de Riemann Stieltjes de $A(t-\tau)$ relativamente a $E(\tau)$ e se escreve

$$\int_0^t A(t-\tau) dE(\tau) \quad (1.28)$$

Demonstra-se que este limite existe quando $A(t)$ é contínua e $E(\tau)$ de variação limitada em $[0, t]$. A soma dos termos do 2º membro de (1.26), a partir do segundo, difere de (1.27) pelo fato de que os números ξ_i coincidem com extremos superiores dos respectivos intervalos, isto é, $\xi_i = \tau_{i+1}$.

Neste caso, o limite da soma pode existir sem que exista a integral de Riemann Stieltjes e, desde que exista, é por definição a integral de Cauchy Stieltjes à direita e se repre-

senta por

$$CD \int_0^t A(t-\tau)dE(\tau) \quad (1.29)$$

Como, na definição da integral de Riemann Stieljes o limite deve existir, independentemente da escolha dos ξ_i nos respectivos intervalos, a existência da integral (1.28) é suficiente para a existência de (1.29). Neste caso, podemos escrever

$$I(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I_n(t) = E_0 A(t) + \int_0^t A(t-\tau)dE(\tau) \quad (1.30)$$

que generaliza a fórmula (22) de Carson [18].

No caso particular, em que $E(\tau)$ é uma função absolutamente contínua a fórmula (1.30) se reduz a

$$I(t) = E_0 A(t) + \int_0^t A(t-\tau)E'(\tau)d\tau \quad (1.31)$$

que tem a mesma forma de n^o (22) de Carson, mas a integral deve ser entendida no sentido de Lebesgue.

Em nota especial, pretendemos publicar a demonstração rigorosa da fórmula (1.30).

Supondo que se tem $E(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, tanto (1.30) como (1.31) podem ser escritas da seguinte maneira

$$I(t) = \int_{-\infty}^t A(t-\tau)dE(\tau) \quad (1.30) \text{ bis}$$

Representando-se por E_0 o salto de $E(\tau)$ no ponto $t = 0$.

Dentro do procedimento heurístico que vem sendo observado neste primeiro capítulo, no qual se procura realçar o as -

pecto físico dos problemas, deixando, provisoriamente relegadas a um segundo plano questões de rigor matemático, parece interessante observar que o princípio heurístico de Volterra para passar do descontínuo ao contínuo permite passar imediatamente de (1.26) para (1.30).

"Substituir o índice discreto i por um parâmetro contínuo τ e o somatório por integral".

De qualquer forma, a dedução de (1.30) é semi-intuitiva. O ponto fraco, do ponto de vista do rigor matemático, está na ausência de uma especificação "a priori" do campo das funções $E(\tau)$ que devem representar as excitações e na falta de uma definição precisa do objeto matemático que traduza a expressão: "a f.e.m. aplicada ao circuito produz a corrente" bem como qualquer condição de continuidade que torne lícita a passagem ao limite da equação (1.26) para a equação (1.30).

Com o auxílio da fórmula (1.30)bis, podemos dar uma solução rigorosa ao problema da aplicação brusca de uma f.e.m. unitária nas armaduras de um condensador perfeito (ligado à fonte de f.e.m. por condutores sem perdas). Sejam $E(\tau)$ a tensão representada por $E(t) = E_0$ para $t > 0$ e zero para $t < 0$, $Q(t)$ a carga do condensador no instante $t > 0$ (resposta) temos

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t A(t-\tau) dE(\tau) \quad (1.32)$$

Neste caso, a função $A(t)$ representa a capacitância do circuito e se tem

$$A(t) = \text{const} = C \text{ (capacidade do condensador)}$$

Então

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t C dE(\tau) = CE_0 + \int_0^t CE'(\tau) d\tau$$

mas $E'(\tau) = 0$ para $\tau \neq 0$

Assim

$$Q(t) = \begin{cases} CE_0 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Com a formulação do princípio de superposição mediante o emprego da integral de Riemann ou da integral de Lebesgue não se pode obter uma solução direta deste problema elementar ou de outro do mesmo tipo em que as excitações do sistema apresentem variações bruscas.

Do ponto de vista físico, pode-se argumentar que um tal sistema é puramente ideal. De qualquer forma, o problema é considerado por vários autores que indicam meios indiretos para resolvê-lo [5,10]

A generalização do princípio de superposição para sistemas lineares com várias entradas (input) e várias saídas (output) não apresenta a menor dificuldade. No caso, por exemplo, de um circuito elétrico mais complexo com n malhas ou circuitos independentes, podemos considerar as respectivas correntes de malha I_1, I_2, \dots, I_n como as componentes de um vetor I e as correspondentes forças eletromotrizes de malha E_1, E_2, \dots, E_n como

[5] Vannevar Bush. (op. cit.).

[10] B. Gross (op. cit.) - Sugestão feita pelo autor deste artigo.

as componentes de um outro vetor E.

A relação entre I e E será expressa pela equação matricial $I = AE$, em que o elemento de matriz $A_{ik}(t)$ representa a resposta do sistema (corrente de malha produzida na malha de índice i , por uma f.e.m. unitária, de malha, aplicada na malha de índice k). O elemento de matriz A_{ik} denomina-se admitância indicial de transferência, entre as malhas de índices k e i .

O recurso a um princípio de superposição é um poderoso instrumento de cálculo. No caso específico que estamos examinando, para determinar a resposta do sistema para uma excitação dada, $E(\tau)$, basta se obter a resposta $A(t)$ do sistema para uma excitação simples representada pela função de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

e, depois, usar a fórmula (1.22), por exemplo.

Naturalmente, a função $E(\tau)$ não pode ser qualquer (arbitrária como impropriamente é denominada nos livros técnicos). Questões desta natureza envolvem problemas de aproximação como veremos em outro capítulo.

Na teoria das equações diferenciais ordinárias ou de derivadas parciais, lineares e de coeficientes constantes, o princípio de superposição é usado teoricamente para se obter uma solução particular do problema inhomogêneo, quando se conhece a solução da equação no caso mais simples em que a inhomogeneidade é representada pela função δ de Dirac.

Tal solução, conhecida pela denominação de Solução elementar, função de Green, na realidade, só se pode obter rigorosa

mente, mediante o emprego da teoria das distribuições de L. Schwartz [7].

CAPÍTULO 2

REPRESENTAÇÃO DA RELAÇÃO EXCITAÇÃO→RESPOSTA, NOS SISTEMAS FÍSICOS LINEARES

1) Sistemas lineares. Propriedades

Como vimos, no capítulo anterior, os sistemas físicos lineares gozam de propriedades características que podem ser descritas, intuitivamente, da seguinte maneira:

1. A cada excitação (input), E , variável no tempo, corresponde uma resposta (output), I , do sistema, também variável no tempo.
2. Num determinado instante t , o valor medido I da resposta, só depende das excitações anteriores ao instante t (condição de causalidade).
3. Cada excitação determina uma resposta bem determinada, sempre a mesma, quer o sistema esteja ou não sujeito à ação simultânea de outras excitações.
4. Verifica-se a superposição dos efeitos. Em outras palavras, num determinado instante t , a resposta do sistema à ação combinada de duas ou mais excitações E_1, E_2, \dots, E_n é a soma das respostas I_1, I_2, \dots, I_n que o sistema apresentaria se cada uma das excitações E_1, E_2, \dots, E_n fosse aplicada separadamente. Existe proporcionalidade entre excitação e resposta.

5. A relação excitação→resposta não depende da época em que se realiza a interação. Tal condição é naturalmente satisfeita quando o sistema permanece inalterado no decorrer do tempo.
6. Quando a relação excitação→resposta é contínua, a excitações pouco diferentes correspondem respostas também pouco diferentes.

Para se exprimir em termos matemáticos a relação excitação→resposta é necessário, antes de tudo, atribuir um sentido preciso a todos os termos intuitivos que foram acima grifados e escolher convenientemente os "objetos" matemáticos que devam representá-los.

Os elementos necessários para isso se encontram na teoria dos espaços vetoriais topológicos.

2) Formulação matemática do princípio

Representemos por K um corpo fundamental (que será sempre o corpo dos números reais \mathbb{R} , ou o corpo dos números complexos \mathbb{C}).

- a) Seja \mathcal{E} um espaço vetorial topológico, sobre K , cujos elementos $f(t)$ são funções reais, ou complexas, definidas sobre a reta numérica \mathbb{R} . A um tal espaço denominaremos de espaço das excitações. A variável t representa o tempo;
- b) Seja μ um funcional linear contínuo, definido sobre \mathcal{E} .
- c) A relação excitação resposta será definida pela relação

$$I(t) = \mu_t f \quad t \in \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{E}$$

onde μ_t é a restrição de μ ao intervalo $-\infty < \tau \leq t$.

$I(t) \in K$ representa o valor numérico da resposta, no instante t .

Desta forma, a todos os termos grifados anteriormente correspondem objetos matemáticos bem definidos.

A propriedade expressa pelo item (1) fica assegurada por c); a condição de causalidade do item 2) é satisfeita com a restrição μ_t do funcional μ ao intervalo $-\infty < \tau \leq t$; as estruturas de espaços vetoriais topológicos, tanto no espaço das excitações \mathcal{E} , como a do espaço K das respostas conferem um sentido preciso aos conceitos de superposição de excitações e respostas, bem como à continuidade das operações adição e produto por um número real ou complexo nesses espaços (propriedades (4) e (6)).

A linearidade e a continuidade da relação excitação \rightarrow resposta ficam asseguradas pela linearidade e a continuidade do funcional μ (ítem 4) e 6) do parágrafo anterior). Falta, apenas, impor ao funcional μ_t mais uma condição restritiva, para que a relação excitação resposta permaneça invariável no decorrer do tempo.

Se representarmos por τ_h o operador que efetua uma translação h no tempo, a condição acima referida se exprime impondo ao funcional μ_t a condição de ser invariante para qualquer translação τ_h no tempo, isto é, o funcional μ deve satisfazer à condição seguinte

$$d) \quad (\tau_{-h} \mu_t \tau_h) E = \mu_t E \quad E \in \mathcal{E} .$$

Pois bem, quando se conhece a representação geral dos funcionais lineares e contínuos, μ , definidos sobre o espaço

vetorial topológico \mathcal{E} , basta introduzir na referida representação as restrições expressas em c) e d) para se obter a forma explícita da relação $I(t) = \mu_t(E)$, ou seja, a representação analítica do princípio de superposição, válida para o espaço \mathcal{E} .

3) Princípio de superposição e "dualidade"

A proposição do item anterior pode se resumir da seguinte maneira: "Sejam \mathcal{E} o espaço vetorial topológico das excitações e \mathcal{E}' o seu dual (i.e. o espaço vetorial de todos funcionais lineares e contínuos definidos sobre \mathcal{E}). A representação analítica mais geral, dos elementos de \mathcal{E}' , e as condições de causalidade e invariância relativa a translações no tempo determinam univocamente a forma analítica, mais geral, do princípio de Superposição, válida no espaço \mathcal{E} , isto é: determinam univocamente a forma da interação.

A representação analítica dos elementos do dual \mathcal{E}' de um espaço vetorial topológico \mathcal{E} tem sido muito estudada por parte dos matemáticos. Para os espaços vetoriais mais comuns, se encontra nos principais tratados de Análise Funcional.

Assim sendo, nada mais simples do que escolher e aplicar a um desses espaços o que foi dito acima. No capítulo seguinte, vamos considerar, dois exemplos para ilustrar o modo de se proceder. Antes disso, porém, desejamos fazer, ainda, algumas observações:

1) A teoria se refere a sistemas físicos passivos, i.e., sistemas que não contêm fontes de energia no seu interior.

2) Para simplificar a exposição, consideramos, apenas,

o caso de sistemas com uma única entrada (input) e uma única saída (output).

Tal qual como no caso dos circuitos elétricos mais complexos, a generalização para sistemas com várias entradas e saídas, não apresenta a menor dificuldade.

3) Resultados mais gerais podem ser obtidos, como foi feito por L. Schwartz [6], representando-se excitações e respostas por funções generalizadas (distribuições) e a relação entre ambas por uma aplicação linear e contínua, entre os espaços correspondentes.

4) Neste trabalho, consideramos, apenas, o caso de fenômenos variáveis no tempo, conhecidos pela denominação de fenômenos transitórios.

4) Princípio de Superposição no espaço $L^2(-\infty, +\infty)$ de Hilbert

O espaço $L^2(-\infty, +\infty)$ é o espaço vetorial das funções $f(x)$ definidas sobre a reta real \mathbb{R} , com valores em K , mensuráveis e de quadrado somável relativamente à medida de Lebesgue.

Consideram-se idênticas duas funções que coincidam em quase toda a parte (presque partout).

O espaço $L^2(-\infty, +\infty)$ é um espaço normado de norma

$$\|f\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

O produto escalar de dois vetores f e g de L^2 é definido por

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx \quad (2.2)$$

onde $\bar{g}(x)$ representa o complexo conjugado de $g(x)$.

O espaço L^2 é completo, munido com a norma $\|f\|$.

De acordo com o teorema fundamental dos espaços de Hilbert, "Para todo funcional linear e contínuo μ (forma linear e contínua dos autores franceses) definido sobre L^2 , existe um e um só vetor $g \in L^2$, tal

$$\mu(f) = (f, g) \quad , \quad g \in L^2 \quad . \quad "$$

Em outras palavras: todo funcional linear e contínuo definido sobre $L^2(-\infty, +\infty)$ é da forma

$$\mu f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \bar{\alpha}(\tau) d\tau \quad f, \alpha \in L^2(-\infty, +\infty) \quad (2.3)$$

A restrição de μ ao intervalo $(-\infty, t)$, é um funcional linear μ_t que depende do parâmetro t e é contínuo na topologia induzida por $L^2(-\infty, +\infty)$.

Representemos por $\mu_t f$ este funcional e por $\bar{\alpha}_t(\tau)$ a função que o caracteriza. Assim, podemos escrever

$$I(t) = \mu_t(f) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \bar{\alpha}_t(\tau) d\tau \quad , \quad f, \bar{\alpha}_t \in \mathcal{E} \quad (2.4)$$

quando se adota o espaço $L^2(-\infty, +\infty)$ para representar o espaço \mathcal{E} das excitações.

A condição de causalidade fica assegurada pela relação (2.4) a qual exprime que o valor instantâneo $I(t)$ da resposta, no instante t , só depende do que se passa nos instantes anteriores ou iguais a t .

Vamos, agora, impor a μ_t , a condição de ser invariante por translações.

Invariância por translações. Para que $\mu_t(f)$ seja invariante por translações no tempo, devemos ter

$$(\tau_{-h} \mu_t \tau_h)(f) = \mu_t(f) \quad (2.5)$$

em que τ_h representa uma translação h ao longo do eixo dos t .

Calculemos o primeiro membro de (2.5).

Temos sucessivamente

$$\tau_h f(\tau) = f(\tau-h)$$

$$(\mu_t \tau_h) f(\tau) = \mu_t f(\tau-h) = \int_{-\infty}^t f(\tau-h) \bar{\alpha}_t(\tau) d\tau = g(t)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{-h} \mu_t \tau_h) f(\tau) &= \tau_{-h}(g(t)) = g(t+h) = \int_{-\infty}^{t+h} f(\tau-h) \bar{\alpha}_{t+h}(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t f(y) \bar{\alpha}_{t+h}(y+h) dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Em virtude de (2.5), temos

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) \bar{\alpha}_t(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(y) \bar{\alpha}_{t+h}(y+h) dy \quad (2.7)$$

No caso de funções particulares da forma

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{para } Z \leq \tau \leq \lambda & \lambda \leq t \\ 0 & \text{para } \tau < Z \text{ e } \tau > \lambda \end{cases}$$

A equação (2.7) nos dá

$$\int_Z^\lambda \bar{\alpha}_t(\tau) d\tau = \int_Z^\lambda \bar{\alpha}_{t+h}(y+h) dy \quad (2.8)$$

Mas $\bar{\alpha}_t(\tau)$ é localmente integrável no sentido de Lebesgue, por conseguinte, tanto o primeiro como o segundo membro de (2.8) representam funções absolutamente contínuas de λ , e, portanto, deriváveis em quase toda a parte (q.t.p.).

Derivando-se ambos os membros de (2.8) em relação a λ temos

$$\bar{\alpha}_t(\lambda) = \bar{\alpha}_{t+h}(\lambda+h) \quad (\text{q.t.p.}) \quad (2.9)$$

Mas λ, t e h são arbitrários.

Fazendo-se $h = -\lambda$ em (2.9) vem

$$\bar{\alpha}_t(\lambda) = \bar{\alpha}_{t-\lambda}(0) \quad (\text{q.t.p.}) \quad (2.10)$$

donde se conclue que a função $\bar{\alpha}_t(\lambda)$ deve ser, necessariamente, uma função da diferença $t-\lambda$, função esta que representaremos pela mesma letra $\bar{\alpha}$, isto é $\bar{\alpha}(t-\lambda)$.

Vamos mostrar, agora, que a condição é suficiente. De fato, suponhamos realizada a condição. Neste caso, a fórmula (2.4) fica

$$\mu_t(f) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \bar{\alpha}_t(t-\tau) d\tau \quad (2.11)$$

e o segundo membro de (2.7)

$$(\tau_{-h}\mu_t\tau_h)(f) = \int_{-\infty}^t f(y)\bar{\alpha}(t+h-(y+h))dy = \int_{-\infty}^t f(y)\bar{\alpha}(t-y)dy \quad (2.12)$$

coincide com (2.11).

Portanto,

$$(\tau_{-h}\mu_t\tau_h)f = \mu_t f \quad (2.13)$$

e o funcional μ_t é invariante por translação.

Finalmente, sabemos que o funcional μ_t é contínuo, na topologia induzida por $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$.

Desta forma, podemos enunciar a seguinte

Proposição. Para que um funcional linear, definido sobre $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$, com valores em K , seja contínuo, invariante por translações, e causal, é necessário e suficiente que se tenha

$$I(t) = \mu_t(f) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\bar{\alpha}(t-\tau)d\tau \quad f, \bar{\alpha} \in \mathcal{L}^2(-\infty, +\infty) \quad (2.14)$$

3) Resposta característica

Seja $A(t)$ a resposta do sistema a uma excitação unitária representada pela função de Heaviside

$$H(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tau < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < \tau \end{cases} \quad (2.15)$$

Fazendo $f(\tau) = \mathcal{L}(\tau)$ em (2.14), temos

$$\bar{A}(t) = \int_0^t \bar{\alpha}(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^t \bar{\alpha}(\tau) d\tau & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

À função $\bar{A}(t)$, denominaremos de "resposta característica".

Esta função corresponde à admitância indicial introduzida por J. Carson [18] na teoria dos sistemas elétricos lineares, onde as excitações $f(\tau)$ são forças eletromotrizes e as respostas $I(t)$ são intensidades de corrente elétrica.

A equação (2.16) mostra que neste espaço, a função $A(t)$ é absolutamente contínua e portanto derivável em quase toda a parte (q.t.p.), isto é,

$$\frac{d}{dt} \bar{A}(t) = \bar{A}'(t) = \bar{\alpha}(t) \quad (\text{q.t.p.}) .$$

Introduzindo $\bar{A}(t)$ em (2.14) podemos escrever

$$I(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \bar{A}'(t-\tau) d\tau = I(0) + \int_0^t f(\tau) \bar{A}'(t-\tau) d\tau \quad (2.17)$$

Em que $I(0)$ representa a contribuição, para a resposta $I(t)$, de todas as ações anteriores ao instante $t = 0$.

Note-se que $\bar{A}(t)$, como integral indefinida, (t arbitrário) é também uma função de variação limitada, em qualquer intervalo finito $[0, t]$. Observe-se, também, que a fórmula (2.17) só é aplicável a sistemas físicos passivos, isto é sistemas desprovidos de fontes internas de energia.

Caso particular. Nas aplicações, interessa o caso em que o sistema está em equilíbrio, em todos os instantes anterior-

res ao instante $t = 0$. Nesse caso $I(0) = 0$.

A equação (2.17) se reduz a

$$I(t) = \int_0^t f(\tau)\bar{A}'(t-\tau)d\tau \quad (2.18)$$

Da equação (2.16) resulta, também, que $\bar{A}(0) = 0$ e a continuidade da resposta $I(t)$, no instante $t = 0$, fica assegurada.

Na fórmula geral (2.17)

$$I(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\bar{A}'(t-\tau)d\tau \quad (2.17)\text{bis}$$

a "resposta característica" $\bar{A}(t)$ é, de modo geral, uma função complexa da variável real t definida sobre a reta real R .

A relação (2.17)bis, é uma relação muito geral, que fixa somente a forma da interação excitação→resposta num sistema linear. A forma específica da função $\bar{A}(t)$ só pode ser determinada, em cada problema particular, seja experimentalmente seja a partir dos parâmetros que caracterizam o sistema físico em consideração. Em certos casos, como na teoria dos circuitos elétricos lineares, a função $\bar{A}(t)$ é uma função real.

5) Princípio de Superposição para $\mathcal{C}_k(R)$

1 - Seja $\mathcal{C}_k(R)$ o espaço vetorial das funções contínuas com valores reais definidas sobre a reta numérica R , nulas fora de um intervalo compacto K , variável conforme a função. Um teorema de

Riez , estendido a este espaço afirma que todo funcional linear $\mu(f)$, contínuo, definido sobre $C_K(\mathbb{R})$ se exprime na forma de uma integral de Stieltjes

$$\mu(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\alpha(\tau) \quad f \in C_K(\mathbb{R}) \quad (2.19)$$

onde $\alpha(\tau)$ é uma função com valores reais, de variação limitada em qualquer intervalo compacto K de \mathbb{R} .

O espaço $C_K(\mathbb{R})$ não é um espaço de Banach, mas um exemplo de espaço vetorial topológico denominado de espaço (\mathcal{LF}) por Dieudonné e Schwartz. Para a definição e a topologia deste espaço o leitor pode consultar o artigo desses autores [20,21].

Seguindo exatamente a mesma marcha adotada no número anterior, as condições de causalidade e invariância por translações nos permitem escrever

$$\mu_t(f) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\alpha_t(\tau) \quad f \in C_K(\mathbb{R}) \quad (2.20)$$

e

$$(\tau_{-h} \mu_t \tau_h)(f) = \mu_t(f) \quad (2.21)$$

donde

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\alpha_t(\tau) = \int_{-\infty}^t \hat{f}(y) d\alpha_{t+h}(y+h) \quad (2.22)$$

equação análoga a equação (2.7).

[20] J. Dieudonné et L. Schwartz. La Dualité dans les espaces (\mathcal{F}) et (\mathcal{LF}) . Ann. de l'Institut Fourier. 1 (1949).

[21] F. Trèves - Topological Vector Spaces, etc. Acad. Press. N.York(1967).

Muito embora as funções da forma

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{para } Z \leq \tau \leq \lambda \quad \lambda \leq t \\ 0 & \text{para } \tau < Z \end{cases} \quad (2.23)$$

não pertençam a $C_K(\mathbb{R})$, ambos os membros de (2.22) são perfeitamente definidos para $f(\tau) = \phi(\tau)$.

Substituindo-se $f(\tau)$ por $\phi(\tau)$ em (2.15) vem

$$\int_Z^\lambda d\alpha_t(\tau) = \int_Z^\lambda d\alpha_{t+h}(y+h) \quad (2.24)$$

ou

$$\alpha_t(\lambda) - \alpha_t(Z) = \alpha_{t+h}(\lambda+h) - \alpha_{t+h}(Z+h)$$

donde

$$\alpha_{t+h}(\lambda+h) - \alpha_t(\tau) = \alpha_{t+h}(\tau+h) - \alpha_t(\tau)$$

Então

$$\alpha_{t+h}(\lambda+h) - \alpha_t(\lambda) = \text{Const} \quad (2.25)$$

para λ, t e h arbitrários, salvo a condição com a condição $\lambda \leq t$.

Fazendo $h = -\lambda$ em (2.25) vem

$$\alpha_{t-\lambda}(0) = \alpha_t(\lambda) + \text{Const} \quad (2.26)$$

donde se conclue que a $\alpha_t(\lambda)$ é necessariamente uma função da diferença $t-\lambda$; função esta que representaremos pela mesma letra α , isto é $\alpha(t-\lambda)$.

Vamos mostrar agora que a condição é suficiente.

De fato, supondo-se realizada a condição, a equação (2.20) fica

$$\mu_t(f) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\alpha(t-\tau) \quad (2.27)$$

e a transformada

$$(\tau_{-h}\mu_t\tau_h)(f) = \int_{-\infty}^t f(y) d\alpha(t+h-y-h) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\alpha(t-\tau) \quad (2.28)$$

coincide com (2.27) Q.E.D.

Assim, como no número anterior, podemos enunciar a seguinte

Proposição. Para que um funcional linear definido no $C_k(\mathbb{R})$, seja contínuo sobre $C_k(\mathbb{R})$, invariante por translação e causal é necessário e suficiente que se tenha

$$I(t) = \mu_t(f) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\alpha(t-\tau) \quad f \in C_k(\mathbb{R}) \quad (2.29)$$

onde $\alpha(\tau)$ é uma função com valores reais e de variação limitada em qualquer intervalo compacto K .

2 - Resposta característica $A(t)$

Para

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{para } \tau < 0, \text{ e } \tau > t \end{cases}$$

a integral (2.29) é bem definida e, nos dá, para a resposta característica

$$A(t) = \int_0^t d\alpha(t-\tau) = \alpha(0) - \alpha(t) \quad (2.30)$$

Se $t = 0$ é ponto de continuidade de $\alpha(t)$, resulta de (2.30) que $A(0) = 0$.

Nesse caso a equação (2.29) fica

$$I(t) = \mu_t(f) = I(0) - \int_0^t f(\tau) dA(t-\tau) \quad \text{com} \quad A(0) = 0 \quad (2.31)$$

Si $A(\tau)$ é absolutamente contínua, então se tem

$$I(t) = I(0) + \int_0^t f(\tau) A'(t-\tau) d\tau \quad \text{com} \quad A(0) = 0 \quad (2.32)$$

que é o caso particular da fórmula (2.17)bis quando $f(\tau) \in C_k(\mathbb{R})$.

Observe-se que, nem (2.31) nem (2.32) supõem a derivabilidade de $f(\tau)$.

Si $f(\tau) = 0$, para $\tau < t$, a condição $A(0) = 0$ garante a continuidade de $I(t)$ em todo o intervalo $(-\infty, t)$.

As fórmulas (2.29) ou (2.31) exprimem o princípio de superposição, quando se adota o espaço vetorial topológico $C_k(\mathbb{R})$, para o espaço das excitações.

Este exemplo e o anterior, $\mathcal{E} = \mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$, ilustram a tese anteriormente enunciada.

"A escolha de um espaço vetorial topológico \mathcal{E} para representar o espaço das excitações de um sistema físico linear, conjun-

tamente com as condições de causalidade e invariância relativamente a translações no tempo, determinam univocamente a forma da interação excitação \rightarrow resposta, a partir da representação analítica dos elementos do espaço dual \mathcal{E}' de \mathcal{E} "

Observação: Note-se que a invariância relativamente a translações no tempo foi imposta à forma de interação. A condição dos parâmetros característicos do sistema permanecerem invariáveis no decorrer do tempo é condição suficiente para assegurar a condição, mas não é necessária.

O módulo de elasticidade no caso dos fenômenos visco-elásticos e a capacidade de um condensador anômalo, são variáveis no tempo, mas isso não impede que as respectivas formas de interação \rightarrow resposta sejam invariáveis para uma translação do tempo. A condição necessária e suficiente para isso é que o núcleo de transformação integral que exprime a interação seja função só da diferença $(t-\tau)$, no que diz respeito à variação com o tempo.