CARLOS AUGUSTO PINTO GALVÃO

GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA EM ESPAÇOS COM TORÇÃO

TESE DE DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO
1976

AGRADECIMENTOS

"Mario Novello me orientou neste trabalho, e foi mais além me fazendo descobrir "o prazer de investigar as imensidões cósmicas." É acima de tudo um amigo, e qualquer palavra de agradecimento me parece insignificante."

Agradeço ao Dr. Domingos Gomes de Lima, Magnífico Reitor da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, e ao Prof. Alberto Campos por todo apoio recebido durante a realização deste trabalho.

Agradeço também à Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa de estudos que me proporcionou durante o ano de 1975.

Ao Professor Adel da Silveira, o meu reconhecimento e a minha gratidão pelos estímulos e ensinamentos que me proporcionou.

RESUMO

Apresentamos, neste trabalho, os resultados de nossas pesquisas sobre gravitação e cosmologia em variedades espaço-tempo dotadas de uma métrica e uma conexão linear, cuja parte antissimétrica (torsão) é diferente de zero. No nosso estudo, abordamos inicialmente a Teoria de Einstein-Cartan e obtivemos os seguintes resultados: Analisamos modêlos cosmológicos anisotrópicos (Bianchi tipos I e IX) tendo como fontes uma poeira com spin e o campo de Dirac. No caso da poeira com spin, mostramos quais as restrições impostas sobre a anisotropia no caso do tipo I, e a incompatibilidade do tipo IX com este tipo de fontes. No caso da fonte ser o campo de Dirac, construimos um modêlo do tipo I e mostramos que o tipo IX é também incompatível com o campo de Dirac. Mostramos que a teoria de Einstein-Cartan é a teoria de gauge local do grupo de Poincaré, e apresentamos um estudo inicial sobre a formulação ADM da teoria de Einstein-Cartan. Neste sentido, construimos a Lagrangeana e a Hamiltoniana, e encontramos as equações de movimento. Na segunda parte deste trabalho, apresentamos um modêlo geométrico para forças de curto alcance. Nesse modêlo, no qual a torsão tem apenas traço e pseudo-traço, construimos uma Lagrangeana para os campos de torsão, e mostramos que devido à escolha da Lagrangeana do campo gravitacional, o campo de torsão adquire uma massa. Neste esquema, analisamos a equação de movimento do campo de Dirac, e no caso em que o traço e o pseudo-traço definem ape

nas uma direção, mostramos que a equação de Dirac pode ser interpretada como a equação de uma partícula de spin 1/2 em uma variedade riemanniana, interagindo com um campo vetorial. Tal interação viola a paridade. No caso geral, a interação pode ou não violar a paridade.

SUMÁRIO

Convenções para as matrizes de Dirac .... *viii*

1. INTRODUÇÃO 1

2. ANÁLISE TENSORIAL EM VARIEDADES DE RIEMANN-CARTAN 8

3. A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN: PRINCÍPIOS VARIACIONAIS E AS EQUAÇÕES DO CAMPO 16

4. GEOMETRIA DIFERENCIAL EM VARIEDADES DE RIEMANN-CARTAN 25

   Formas Diferenciais 25

   Teoria das Conexões 28

   Torsão e Curvatura 29

   O Grupo GL(4,R) 36

   Grupos Uniparamétricos de Difeomorfismos 43

5. FORMULAÇÃO DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN EM TERMOS DE FORMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES 50

6. A TEORIA CLÁSSICA DE FLUIDOS COM SPINS E AS EQUAÇÕES DE CAMPOS CLÁSSICOS EM GEOMETRIAS DE EINSTEIN-CARTAN 67

   Teoria Clássica de Fluidos com Spin 67

   Campos Vetoriais Massivos como Fontes de Torsão 71

   O Campo de Dirac como Fonte de Torsão 74

7. MODÊLOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS NA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN .. 83

Eletrons e Neutrinos em um Espaço-Tempo com Torsão 84

O Campo de Dirac como Fonte de Modêlos Cosmológicos Anisotrópicos na Teoria de Einstein-Cartan 91

Poeira com Spin como Fonte de Modêlos Cosmológicos na Teoria de Einstein-Cartan 102

8. A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN COMO A TEORIA DE GAUGE DO GRUPO DE POINCARÉ 106

Considerações Iniciais 107

A Teoria de Gauge Local do Grupo de Poincaré e a teoria de Einstein-Cartan 113

9. A FORMULAÇÃO ADM DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN 117

Considerações Iniciais 118

Geometria do Embebimento em Espaços com Torsão 120

A Lagrangeana do Campo Gravitacional de Einstein-Cartan no Formalismo ADM 128

A Hamiltoniana da Teoria de Einstein-Cartan 135

As Ecuações de Movimento 141

10. UM MODÊLO GEOMÉTRICO PARA FORÇAS DE CURTO ALCANCE 150

Considerações Iniciais 150

A Dinâmica dos Campos T^{μ} e Z^{μ} 151

Hierarquia de Forças 155

CONCLUSÕES 158

APÊNDICE I *162*

APÊNDICE II *163*

APÊNDICE III *165*

APÊNDICE IV *166*

APÊNDICE V - Sobre a Teoria Clássica de Partículas com Spin em Campos Gravitacionais *171*

REFERÊNCIAS *181*

CONVENÇÕES PARA AS MATRIZES DE DIRAC

Capítulo 7:

$$\gamma_0 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_0 \; \gamma_1 \; \gamma_2 \; \gamma_3 = -\, i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 10:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *INTRODUÇÃO*

Desde o aparecimento da Teoria da Relatividade Geral pesquisas sobre os seus fundamentos estimularam generalizações da teoria original de Einstein. A maioria destas generalizações foram formuladas em termos de uma geometria riemanniana como, por exemplo, a teoria de Jordan-Brans-Dicke[1]. De modo geral, estas teorias diferem da teoria de Einstein por algumas estruturas suplementares que de alguma forma estão relacionadas com a métrica do espaço-tempo. Outras teorias, no entanto, requerem geometrias mais amplas para a descrição dos fenômenos da gravitação. Este é o caso das teorias de Poincaré e Milne[2] nas quais a estrutura geométrica é a dos espaços de Finsler.

Dentre as modificações e/ou generalizações da teoria da gravitação de Einstein, a mais pesquisada nos últimos anos foi certamente a teoria de Einstein-Cartan. Esta teoria é uma generalização não métrica da teoria de Einstein e teve suas origens em 1922/1923 nos trabalhos de Elie Cartan[3]. A teoria de Einstein-Cartan se propõe a considerar os possíveis efeitos gravitacionais do momento angular intrínseco (spin) da matéria, através da introdução de uma nova estrutura geométrica no espaço-tempo. Em termos matemáticos, a modificação proposta por Cartan consiste em se considerar espaço-tempo como uma variedade quadridimensional dotada de uma métrica e uma conexão linear não necessariamente simétrica. Segundo Cartan a parte antissimétrica $\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\nu]}$ da conexão, a qual tem caráter tensorial e

24 componentes independentes, e chamada por êle de torsão, deveria ser relacionada com a densidade de spin da matéria. Observemos que tal proposta foi feita dois anos antes de Uhlenbeck e Goudsmit proporem a noção moderna de spin. A proposta de Cartan ficou esquecida por aproximadamente 30 anos até que surgiram os trabalhos de Sciama[4] e Kibble[5], e subsequentes trabalhos de Hehl[6] e Trautman[7], através dos quais a teoria de Einstein-Cartan tomou sua forma definitiva.

Sob o ponto de vista físico, parece-nos plausível que em meios onde a densidade média de spins não é nula, isto é, em meios polarizados, os seus efeitos dinâmicos sejam levados em conta em uma teoria da gravitação. Uma situação onde tais efeitos podem ser importantes é, por exemplo, no interior de pulsares onde se supõe que existam campos magnéticos que poderiam produzir um alinhamento dos spins das partículas constituentes da matéria de tal maneira a produzir efeitos dinâmicos observáveis sobre o campo gravitacional.

Sob o ponto de vista matemático, a possibilidade da inclusão do spin como variável dinâmica numa teoria da gravitação é extremamente atraente. Como se sabe, a álgebra de Lie do Grupo de Poincaré da Relatividade Especial tem dois invariantes básicos, os quais são interpretados como massa e spin. Estes invariantes estão ligados com a parte de translação e a parte de rotação do Grupo de Poincaré, respectivamente. Sabe-se também que não é possível introduzir-se uma relação entre um tensor canônico de spin e uma propriedade geométrica do espaço-tempo na teoria de Einstein. Na teoria de Einstein-Cartan tal relação é possível, e os dois invariantes do Grupo de Poincaré são introduzidos na teoria de maneira natural. Além disso, a teoria de Einstein-Cartan é a teoria de gauge local do Grupo de Poincaré. Na realidade, foi sob o aspecto de uma teoria de gauge do grupo de Poincaré que a relação entre torsão e spin foi proposta por Kibble em 1961.

As aplicações da teoria de Einstein-Cartan à Cosmologia é que a tornaram, na opinião de alguns autores, uma séria competidora da teoria de Einstein. Como se sabe, todos os modêlos cosmológicos que estão de acordo (pelo menos em parte) com os mais recentes dados observacionais existentes, apresentam uma singularidade. Os estudos de Penrose, Geroch, Hawking e Ellis, que culmiram com os "teoremas de singularidades", mostraram que, sob hipóteses bastante razoáveis, a ocorrência de singularidades na teoria de Einstein é inevitável. Como consequência natural da teoria de Einstein-Cartan, ocorre uma auto-interação da matéria do tipo spin-spin, a qual, como foi sugerido por Trautman[8], é capaz de violar as condições dos teoremas de singularidade.

O primeiro modêlo cosmológico não singular com torsão foi proposto por Trautman. Êle considerou um universo do tipo de Friedmann quasi-euclideano com uma distribuição esfericamente simétrica de matéria com spin do tipo "poeira". Usando a massa do neutron como base para estimativas êle mostrou que o modêlo apresenta um raio mínimo da ordem de $3\times10^{-27}N^{1/3}$ cm, onde N é o número de partículas presentes no universo. Com $N=10^{80}$ (número costumeiramente usado como uma estimativa para o número de barions na parte do universo acessível à observação) tem-se que este raio é da ordem de 1 cm. Este número é significativa mente grande quando comparado com o comprimento de Planck, $(hk/C^3)^{1/2} \sim 1,6 \times 10^{-33}$ cm, o qual é usualmente considerado como o limite natural para a Cosmologia Einsteiniana. Observemos que nem a pressão nem a possível existência de campos magnéticos primordiais foram consideradas por Trautmann.

Modêlos cosmológicos "mais realistas" que o de Trautmann foram construidos por Kopczyński[9] e Kuchowicz[10], todos com a característica da ausência da singularidade.

É importante observar que em regiões onde não há matéria, as teorias de Einstein e Einstein-Cartan conduzem aos mesmos resultados, devido à relação entre spin e torsão ser de caráter algébrico. Como consequência, é impossível distinguir-se entre as duas teorias experimentalmente, pelo menos atualmente.

No que se refere ao uso da geometria de Riemann-Cartan em outros esquemas, muito pouco tem sido feito, ou, pelo menos, é conhecido do presente autor. Citamos os trabalhos de Arbuzov[11], nos quais é proposta uma teoria unificada dos campos gravitacional e eletromagnético, este último sendo descrito geometricamente pela torsão do espaço-tempo. Citamos também o recente trabalho de Novello e Galvão[12], no qual é apresentado um modêlo geométrico para forças de curto alcance usando-se uma geometria de Riemann-Cartan restrita, na qual a torsão tem apenas traço e pseudo-traço não nulos. Não entraremos em detalhes sobre este trabalho no momento porque êle é parte desta tese.

Neste nosso trabalho, apresentaremos os resultados das nossas pesquisas sobre a teoria de Einstein-Cartan e so bre outros modêlos envolvendo a geometria de Riemann-Cartan. Podemos resumir este trabalho da seguinte maneira:

Capítulo 2: É apresentado um resumo de Análise Tensorial em variedades de Riemann-Cartan, com o objetivo de estabelecer notação, convenções e diversas relações e identidades entre os objetos geométricos que são de interesse nos capítulos seguintes.

Capítulo 3: Apresenta a teoria de Einstein-Cartan (princípio variacional e as equações de campo), usando o formalismo tensorial usual, e estabelece-se a relação entre spin e torsão.

Capítulo 4: Consta de uma revisão de geometria diferencial moderna (essencialmente, formas diferenciais e grupos uniparamétricos de difeomorfismos). O formalismo apresentado neste capítulo é usado em todos os capítulos seguintes, exceto no Capítulo 10.

Capítulo 5: Apresenta a teoria de Einstein-Cartan no formalismo introduzido no Capítulo 4, o que nos permite remover a liberdade da teoria por transformações projetivas, e nos esclarece como se pode usar na teoria os tensores momentum-energia canônico e métrico.

Capítulo 6: Apresenta a teoria clássica dos fluidos perfeitos com spin, um estudo da torsão gerada por um campo vetorial massivo, e a generalização da equação de Dirac para espaços de Riemann-Cartan.

Capítulo 7: É estudado o movimento de eletrons e neutrinos em uma variedade de Minkowski com "torsão externa". São analisados modêlos anisotrópicos (Bianchi tipos I e IX), tendo o campo de Dirac e uma poeira com spin como fonte das equações de Einstein-Cartan.

Capítulo 8: Mostra-se que a teoria de Einstein-Cartan é a teoria de gauge local do grupo de Poincaré.

Capítulo 9: Consta de um primeiro estudo sobre a formulação ADM da teoria de Einstein-Cartan.

Capítulo 10: É apresentado um modêlo geométrico para forças de curto alcance.

Apêndices I/IV: Constam de cálculos referentes ao Capítulo 9.

Apêndice V: São analisadas as equações de movimento para partículas com spin obtidas por Papapetrou, e é apresentado um limite clássico para o campo de Dirac em espaços de Riemann-Cartan.

2. *ANÁLISE TENSORIAL EM VARIEDADES DE RIEMANN-CARTAN*

Chamaremos de uma variedade de Riemann-Cartan, V, a uma variedade quadri-dimensional dotada de uma métrica $g = \{g_{\mu\nu}\}$ com assinatura normal hiperbólica, e uma conexão afim $\{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\}$, não necessariamente simétrica. No que segue, apresentaremos uma coleção de expressões, que nos serão úteis futuramente com o objetivo de fixar notação e convenções as quais foram adaptadas de Schouten[13] .

Os coeficientes $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ da conexão podem ser escritos sob a forma

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)} + \Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} \tag{2.1}$$

onde os parentesis e colchetes indicam simetrização e antisimetrização, respectivamente. A parte antisimétrica $\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$ se transforma como um verdadeiro tensor, o qual, segundo Cartan, chamaremos de tensor de torsão:

$$\tau^{\alpha}_{\ \mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\right) \tag{2.2}$$

Define-se a derivação covariante de um campo vetorial $A^{\mu}(x)$, em V da maneira usual:

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} A^{\alpha} &\equiv A^{\alpha}{}_{\|\nu} = A^{\alpha}{}_{|\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} A^{\mu} \\ \nabla_{\nu} A_{\alpha} &\equiv A_{\alpha\|\nu} = A_{\alpha|\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} A_{\beta} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Um cálculo direto conduz a

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]} A_\alpha = \left(-\partial_{[\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu]\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{[\nu|\rho|}\Gamma^{\rho}_{\mu]\alpha}\right)A_\lambda - \zeta_{\nu\mu}{}^{\lambda}\nabla_\lambda A_\alpha$$

$$= -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha} A_\alpha - \zeta_{\nu\mu}{}^{\lambda}\nabla_\lambda A_\alpha \qquad (2.4)$$

e

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]} A^\alpha = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha} A^\lambda - \zeta_{\nu\mu}{}^{\lambda}\nabla_\lambda A^\alpha \qquad (2.5)$$

onde definimos o tensor de Riemann

$$R_{\nu\mu\alpha}{}^{\lambda} = 2\,\partial_{[\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu]\alpha} + 2\,\Gamma^{\lambda}_{[\nu|\rho|}\Gamma^{\rho}_{\mu]\alpha} \qquad (2.6)$$

Usando o mesmo procedimento do caso usual de espaços de Riemann, vamos impor que as derivadas covariantes das componentes do tensor métrico são nulas. Neste sentido, diremos que a conexão é métrica. Como consequência desta imposição a parte simétrica da conexão pode ser calculada

$$\Gamma^{\beta}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) + g^{\lambda\beta} g_{\nu\alpha}\zeta_{\lambda\mu}^{\alpha} + g^{\lambda\beta} g_{\mu\alpha}\zeta_{\lambda\nu}^{\alpha} \qquad (2.7)$$

Segue então que

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \zeta^{\alpha}_{\mu\nu} - \zeta_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu} + \zeta_{\mu\nu}{}^{\alpha} \qquad (2.8)$$

$$= \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} - K^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

onde introduzimos os símbolos de Christoffel de segunda espécie $\{{\alpha \atop \mu\nu}\}$, e definimos o tensor de contorsão

$$K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = - \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \tau_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu} - \tau_{\mu\nu}{}^{\alpha} \tag{2.10}$$

Da definição (2.6) do tensor de Riemann pode-se mostrar que as identidades abaixo são válidas

$$R_{(\mu\nu)\alpha}{}^{\lambda} = 0 \tag{2.11}$$

$$R_{[\nu\mu\alpha]}{}^{\lambda} = 2\nabla_{[\nu}\tau^{\lambda}{}_{\mu\alpha]} - 4\tau^{\rho}{}_{[\nu\mu}\tau^{\lambda}{}_{\alpha]\rho} \tag{2.12}$$

Contraindo λ com ν, (2.12) conduz a

$$R_{[\lambda\mu\alpha]}{}^{\lambda} = \frac{2}{3}\left(\nabla_{\lambda} + 2\tau^{\rho}{}_{\lambda\rho}\right)\left(\tau^{\lambda}{}_{\mu\alpha} + \delta^{\lambda}_{\mu}\tau^{\sigma}{}_{\alpha\sigma} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\tau^{\sigma}{}_{\mu\sigma}\right) \tag{2.13}$$

Introduzindo o operador

$$\overset{*}{\nabla}_{\lambda} \equiv \nabla_{\lambda} + 2\tau^{\rho}{}_{\lambda\rho} \tag{2.14}$$

e o tensor de torsão modificado

$$\mathcal{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\, \tau^{\sigma}{}_{\nu\sigma} - \delta^{\lambda}_{\nu}\, \tau^{\sigma}{}_{\mu\sigma} \tag{2.15}$$

a expressão (2.13) toma a forma

$$R_{[\lambda\mu\alpha]}{}^{\lambda} = \frac{2}{3} \overset{*}{\nabla}_{\lambda} \mathcal{T}^{\lambda}{}_{\mu\alpha} \tag{2.16}$$

Finalmente, a identidade de Bianchi se escreve

$$\nabla_{[\mu} R_{\alpha\beta]\rho}{}^{\sigma} \equiv 2\, \tau^{\lambda}{}_{[\mu\alpha} R_{\beta]\lambda\rho}{}^{\sigma} \tag{2.17}$$

Definamos agora o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ por

$$R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} \tag{2.18}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.19}$$

onde $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ é o escalar de curvatura. O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ não tem divergência nula em espaços em espaços de Riemann-Cartan. Pode-se verificar que

$$\nabla_{\beta} G_{\alpha}{}^{\beta} + 4\, \tau^{\rho}{}_{\beta(\alpha} G_{\rho)}{}^{\beta} = \mathcal{T}^{\rho}{}_{\mu\nu} R_{\alpha\rho}{}^{\mu\nu} \tag{2.20}$$

Definindo o operador $\overset{+}{\nabla}_\beta$, o qual atua em objetos que tenham apenas um índice covariante, por

$$\overset{+}{\nabla}_\beta \varphi_\alpha = \nabla_\beta \varphi_\alpha + 4 \tau^\lambda{}_{\beta(\alpha} \varphi_{\lambda)}$$
$$= \overset{*}{\nabla}_\beta \varphi_\alpha + 2 \tau^\lambda{}_{\beta(\alpha} \varphi_{\lambda)} \qquad (2.21)$$

segue que

$$\overset{+}{\nabla}_\beta G_\alpha{}^\beta \equiv \mathfrak{S}^\rho{}_{\mu\nu} R_{\alpha\rho}{}^{\mu\nu} \qquad (2.22)$$

Tem-se, também, de (2.16) e (2.18) que

$$\overset{*}{\nabla}_\beta \mathfrak{S}^\beta{}_{\mu\nu} \equiv G_{[\mu\nu]} \qquad (2.23)$$

Para a densidade escalar $\mathcal{R} = \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ pode-se estabelecer a seguinte expressão:

$$\mathcal{R} = 2\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\lambda{}_{\rho[\mu} \Gamma^\rho{}_{\lambda]\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \tau^\rho{}_{\nu\rho} \right)$$
$$+ 2\, \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\ g^{\lambda[\nu} \Gamma^{\mu]}{}_{\nu\lambda} \right) \qquad (2.24)$$

Para efeitos de comparação com as expressões correspondentes em variedades Riemannianas V, vamos introduzir os símbolos { } e Γ, que identificam as quantidades calculadas em U e V, respectivamente. A densidade escalar $\mathcal{R}$ e o tensor de Einstein ficam sob a forma

$$\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{R}(\{\}) - \sqrt{-g}\, \mathcal{S}_\lambda{}^{\mu\nu} K^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\nu \left(2\sqrt{-g}\, K_\lambda{}^{\nu\lambda}\right) \qquad (2.25)$$

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(\Gamma) = G^{\mu\nu}(\{\}) &+ \overset{*}{\nabla}_\lambda \left(\mathcal{S}^{\mu\nu\lambda} - \mathcal{S}^{\nu\lambda\mu} + \mathcal{S}^{\lambda\mu\nu}\right) \\ &+ 4\, \mathcal{S}^{\mu\lambda}{}_{[\rho}\, \mathcal{S}_{\lambda]}{}^{\nu\rho} + 2\, \mathcal{S}^{\mu\lambda\rho}\, \mathcal{S}^{\nu}{}_{\lambda\rho} - \mathcal{S}^{\lambda\rho\mu}\, \mathcal{S}_{\lambda\rho}{}^{\nu} \\ &- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(4\, \mathcal{S}_\rho{}^\lambda{}_{[\sigma}\, \mathcal{S}^{\rho\sigma}{}_{\lambda]} + \mathcal{S}^{\lambda\rho\sigma}\, \mathcal{S}_{\lambda\rho\sigma}\right) \end{aligned} \qquad (2.26)$$

Pelas expressões (2.10) e (2.15) definimos os tensores de contorsão e de torsão modificados, em termos do tensor de torsão. Seguindo[14], decomporemos estes tensores em suas partes irredutíveis. Escreveremos o tensor de torsão sob a forma

$$\tau^\lambda{}_{\mu\nu} = \tilde{\tau}^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\delta^\lambda_\mu \tau_\nu - \delta^\lambda_\nu \tau_\mu\right) - \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \check{\tau}^\rho \qquad (2.27)$$

onde

$$\tau_\nu = \tau^\rho{}_{\nu\rho} \qquad (2.28)$$

é o traço,

$$\check{\tau}^\mu = \frac{1}{3!}\, \tau_{\nu\rho\sigma}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \qquad (2.29)$$

é o pseudo traço, e $\tilde{\tau}^\lambda{}_{\mu\nu}$ é a parte de traço nulo. O pseudo-traço $\check{\tau}^\mu$ se comporta como um vetor axial, e $\tilde{\tau}_{\mu\nu\lambda}$ é dado por

$$\tilde{\tau}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\delta^{\lambda}{}_{[\nu}\,\tau_{\mu]} + \epsilon^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}\,\check{\tau}^{\rho} \tag{2.30}$$

Para os tensores $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ e $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ tem-se que

$$\tilde{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\delta^{\lambda}{}_{[\nu}\,T_{\mu]} + \epsilon^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}\,\check{T}^{\rho} \tag{2.31}$$

$$\tilde{K}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = K^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu}K^{\lambda} - \delta^{\lambda}{}_{\mu}K_{\nu}\right) + \epsilon^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}\,\check{K}^{\rho} \tag{2.32}$$

As seguintes relações são úteis:

(A) Relações entre $\tau^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ e $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$:

(a) $\tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} = T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}{}_{[\nu}\,T_{\mu]}$

(b) $\tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(K^{\lambda}{}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda}\right)$

(c) $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(K^{\lambda}{}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda} - 2\,\delta^{\lambda}{}_{[\nu}\,K_{\mu]}\right)$ (2.33)

(d) $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}{}_{[\nu}\,\tau_{\mu]}$

(e) $K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}{}^{\lambda} - T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} - 2\,\delta^{\lambda}{}_{[\nu}\,T_{\mu]}$

(B) Relações entre os traços:

(a) $\mathcal{T}_\lambda = -\frac{1}{2}\mathcal{S}_\lambda$

(2.34)

(b) $\mathcal{S}_\lambda = -K_\lambda$

(C) Relações entre os vetores axiais:

(a) $\check{\mathcal{T}}_\lambda = \check{\mathcal{S}}_\lambda$

(2.35)

(b) $\check{\mathcal{S}}_\lambda = -\check{K}_\lambda$

"Si les plats que je vous offre sont mal preparés, c'est moins la faute de mon cuisinier que celle de la Chimie que est encore dans l'enfance"

(La Rôtisserie de la Reine Pédauque)

Anatole France

3. *A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN: PRINCÍPIO VARIACIONAL E AS EQUAÇÕES DO CAMPO* [6]

Consideremos um conjunto de campos Ψ interagindo com o campo gravitacional na Teoria de Einstein-Cartan, e escrevamos a integral de ação sob a forma

$$I = \int d^4x \left[\mathcal{L}_M (\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, \tau) + \frac{1}{16\pi k} \mathcal{R}(g, \partial g, \tau, \partial\tau) \right] \qquad (3.1)$$

onde $\mathcal{L}_M$ é a densidade Lagrangeana associada com os campos Ψ. A diferença entre esta expressão e a correspondente na Teoria de Einstein é a presença da torsão a qual, na Lagrangeana , é introduzida pela substituição $\partial \rightarrow \overset{(\Gamma)}{\nabla}$. A torsão é introduzida como uma nova variável geométrica independente, e a geometria dos espaços de Riemann-Cartan fica então descrita pelas 10+24 variáveis independentes $g_{\mu\nu}$ e $\tau^{\alpha}_{\ \beta\lambda}$.

A variação independente da integral de ação com relação a Ψ , g e τ conduz às equações

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \Psi} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi k} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (3.3)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \tau^{\alpha}_{\ \mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi k} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \tau^{\alpha}_{\ \mu\nu}} \qquad (3.4)$$

O termo da esquerda em (3.3), como se sabe, é igual a $\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ T^{\mu\nu}$, onde $T^{\mu\nu}[\Psi]$ é o tensor momentum-energia métrico associado com os campos Ψ. O termo da esquerda da expressão (3.4) define o chamado pseudo-tensor de spin $\mu_\alpha{}^{\nu\mu}$

$$\sqrt{-g}\;\mu_\alpha{}^{\nu\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \tau^\alpha{}_{\mu\nu}} \tag{3.5}$$

o qual tem características de uma energia potencial de spin.

Por um cálculo direto encontra-se que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu}} = -\,G^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\lambda \left(\mathfrak{T}^{\mu\nu\lambda} - \mathfrak{T}^{\nu\lambda\mu} + \mathfrak{T}^{\lambda\mu\nu} \right) \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta R}{\delta \tau^\alpha{}_{\mu\nu}} = -2 \left(\mathfrak{T}_\alpha{}^{\mu\nu} - \mathfrak{T}^{\mu\nu}{}_\alpha + \mathfrak{T}^\nu{}_\alpha{}^\mu \right) \tag{3.7}$$

de modo que o conjunto de equações (3.2, 3, 4) fica sob a forma

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \Psi} = 0 \tag{3.8a}$$

$$G^{\mu\nu} - \overset{*}{\nabla}_\lambda \left(\mathfrak{T}^{\mu\nu\lambda} - \mathfrak{T}^{\nu\lambda\mu} + \mathfrak{T}^{\lambda\mu\nu} \right) = 8\pi k\, T^{\mu\nu} \tag{3.8b}$$

$$\mathfrak{T}_\alpha{}^{\mu\nu} - \mathfrak{T}^{\mu\nu}{}_\alpha + \mathfrak{T}^\nu{}_\alpha{}^\mu = 8\pi k\, \mu_\alpha{}^{\nu\mu} \tag{3.8c}$$

Se tivéssemos usado a contorsão K como nova variável independente, ao invés de τ, a variação de I com relação a K teria conduzido à definição dinâmica de spin segundo Sciama[8]

$$\sqrt{-g}\; S_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta K^\alpha{}_{\mu\nu}} \tag{3.9}$$

Neste caso, ao invés da equação (3.4), teríamos obtido

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta K^{\alpha}{}_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi k}\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta K^{\alpha}{}_{\mu\nu}} \tag{3.10}$$

O tensor de spin $S_{\alpha}{}^{\mu\nu}$ está relacionado com o pseudo-tensor $\mu_{\alpha}{}^{\mu\nu}$ por

$$\mu^{\alpha\mu\nu} = -S^{\alpha\mu\nu} + S^{\mu\nu\alpha} - S^{\nu\alpha\mu} \tag{3.11}$$

ou

$$S^{\alpha\mu\nu} = \mu^{[\mu\alpha]\nu} \tag{3.12}$$

Segue que a última equação do conjunto (3.8) toma a forma

$$\mathcal{G}^{\alpha\mu\nu} = 8\pi k \, S^{\alpha\mu\nu} \tag{3.13}$$

Usando (3.13) em (3.8b), obtem-se

$$G^{\mu\nu} = 8\pi k \, t^{\mu\nu} \tag{3.14}$$

onde $t^{\mu\nu}$ é o tensor momentum-energia

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} + \overset{*}{\nabla}_{\lambda}\left(S^{\mu\nu\lambda} - S^{\nu\lambda\mu} + S^{\lambda\mu\nu}\right) \\ &= T^{\mu\nu} - \overset{*}{\nabla}_{\lambda}\,\mu^{\mu\nu\lambda} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Este tensor é, em geral, assimétrico e como verificaremos depois, é o tensor momentum-energia canônico. Observemos que no contexto desta teoria não é possível decidir qual o tensor momentum-energia que devemos usar. Esta questão terá uma solução quando formularmos a Teoria de Einstein-Cartan em termos de formas diferenciais.

As equações (3.13) e (3.14) constituem provavelmente a forma mais sugestiva das equações de Einstein-Cartan. A equação (3.13) é puramente algébrica, e traz como consequência o fato de que o campo de torsão existe apenas na presença da matéria com spin, e não pode se propagar no vácuo. Os efeitos de torsão a longa distância são sentidos através dos efeitos que o spin induz na métrica. A interação de spin introduzida na teoria é, portanto, uma interação de contato, isto é, de alcance nulo. Em outras palavras, spin e torsão são as manifestações física e geométrica de uma mesma entidade. Observemos que este caráter de alcance nulo da interação é consequência do tipo de acoplamento usado entre a matéria e a geometria, e da densidade Lagrangeana do campo gravitacional ter sido tomada como a densidade escalar de curvatura do espaço de Riemann-Cartan.

É possível por a teoria em uma forma quasi-Einsteinniana, usando-se (3.13) em (3.14),

$$G^{\mu\nu}(\{\}) = 8\pi k T^{\mu\nu} + (8\pi k)^2 \Big\{ -4\, S^{\mu\lambda}{}_{[\alpha}\, S^{\nu}{}_{\lambda]}{}^{\alpha} - 2\, S^{\mu\alpha\lambda} S^{\nu}{}_{\alpha\lambda} + S^{\lambda\alpha\mu} S_{\lambda\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \big(4\, S^{\alpha}_{\lambda}{}_{[\rho}\, S^{\lambda\rho}{}_{\alpha]} + S^{\alpha\lambda\rho} S_{\alpha\lambda\rho} \big) \Big\} \qquad (3.16)$$

ou

$$G^{\mu\nu}(\{\}) = 8\pi k \Sigma^{\mu\nu} \tag{3.17}$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ é chamado de tensor momentum-energia combinado. Este tensor tem as propriedades de ser simétrico e satisfazer à lei de conservação

$$\overset{\{\}}{\nabla}_{\lambda} \Sigma^{\alpha\lambda} = 0 \tag{3.18}$$

Na equação (3.16) vê-se que os termos induzidos pelo spin aparecem como correções à geometria Riemanniana original. Estes termos estão multiplicados pelo quadrado da constante gravitacional, o que significa que são muito pequenos em condições usuais, isto é, baixas densidades de matéria, mesmo que os spins estejam alinhados. A correção da Lagrangeana que origina estes termos é

$$\frac{1}{2} S_{\alpha}{}^{\nu\mu} K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 8\pi k \left[-\frac{1}{2} S_{\mu\nu\rho} S^{\mu\nu\rho} + S_{\mu\nu\rho} S^{\nu\rho\mu} + S_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\lambda} S^{\mu\rho}{}_{\rho} \right] \tag{3.19}$$

Segundo Hehl[6], esta expressão representa uma interação universal spin-spin, e devido ao seu caráter universal, tal interação pode ter uma relação com a interação fraca das partículas elementares. Não entraremos em detalhes com relação a este aspecto do problema, por enquanto.

Façamos uma estimativa da ordem de grandeza da interação spin-spin. Para isto, consideremos uma poeira de matéria com spin, cujas densidades de massa e spin são ρ e s respectivamente. Cada partícula tem massa m e spin $\hbar$. O número de partículas por unidade de volume é então

$$\frac{\rho}{m} = \frac{s}{\hbar}$$

Com s dado pela expressão acima, a razão entre o termo induzido pelos spins e os termos do tensor momentum-energia é

$$\frac{(8\pi k s)^2}{8\pi k \rho} = \frac{8\pi k \hbar^2 \rho}{m^2}$$

Para nucleons (ρ expresso no sistema CGS) a razão acima é da ordem de $8.10^{-55}\,\rho$. Este número é muito pequeno mesmo em casos de matéria super-densa. No entanto, quando esta razão se aproxima da unidade, o que poderia ocorrer, por exemplo, nos instantes iniciais do universo ou no caso do colapso gravitacional, o termo spin-spin é capaz de imperdir a ocorrência de singularidades. Pode-se compreender a razão disto lembrando-se que a parte induzida pelo spin no termo da direita de (3.19) não necessita, em princípio, satisfazer as condições de validade dos teoremas de singularidades.

Com o conjunto de equações de Einstein-Cartan e as identidades geométricas estabelecidas no capítulo anterior, as seguintes leis de conservação podem ser obtidas:

$$\overset{+}{\nabla}_\alpha t^\alpha{}_\mu \equiv S^\lambda{}_{\rho\beta} R_{\mu\lambda}{}^{\rho\beta} \tag{3.20}$$

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda S^\lambda{}_{\mu\nu} - t_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (3.21)$$

ou, em termos de $\overset{\{\}}{\nabla}$,

$$\overset{\{\}}{\nabla}_\alpha t^\alpha{}_\beta = K_{\beta\alpha\lambda} t^{[\alpha\lambda]} + S^\lambda{}_{\alpha\rho} R_{\beta\lambda}{}^{\alpha\rho} \qquad (3.22)$$

$$\overset{\{\}}{\nabla}_\lambda S^\lambda{}_{\mu\nu} - 2K^\rho{}_{\lambda[\mu} S^\lambda_{\nu]\rho} - t_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (3.23)$$

que são as leis de conservação de energia-momentùm e do momento angular, respectivamente. O termo da direita de (3.20) representa uma força por unidade de volume, proporcional ao tensor de curvatura e que atua em cada partícula dotada de spin.

As expressões anteriores podem ser obtidas via teorema de Noether e o grupo geral de transformações de coordenadas, associado com a Lagrangeana $\mathcal{L}_M$. Por este procedimento, chamando de $\alpha^{\nu\mu}$ os elementos de matriz da representação do grupo de Lorentz associada ao campo Ψ, encontra-se que

$$\sqrt{-g}\, t^\alpha{}_\mu = \mathcal{L}_M \delta^\alpha{}_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\alpha \Psi)} \nabla_\mu \Psi \qquad (3.24)$$

$$\sqrt{-g}\, S^{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\alpha \Psi)} \alpha^{[\nu\mu]} \Psi \qquad (3.25)$$

Portanto, $t^\alpha{}_\mu$ e $S^{\mu\nu\alpha}$ são, respectivamente, os tensores canônicos de momentum-energia e spin.

Apresentaremos a seguir as expressões que relacionam os tensores $S^{\alpha\mu\nu}$ $\mu^{\alpha\mu\nu}$, $T^\alpha{}_{\mu\nu}$, $\tau^\alpha{}_{\mu\nu}$ e $K^\alpha{}_{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
\text{(A)}\quad S_{\alpha\beta\lambda} &= -\frac{1}{2}\left(\mu_{\alpha\beta\lambda} + \mu_{\beta\lambda\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\tau_{\alpha\beta\lambda} + 2\, g_{\lambda[\alpha}\, \tau_{\beta]}\right) \\
&= \frac{1}{k}\, \mathcal{T}_{\alpha\beta\lambda} \\
&= -\frac{1}{2k}\left[K_{\alpha\beta\lambda} + K_{\beta\lambda\alpha} - 2\, g_{\lambda[\alpha} K_{\beta]}\right]
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(B)}\quad \mu_{\alpha\beta\lambda} &= -S_{\alpha\beta\lambda} + S_{\beta\lambda\alpha} - S_{\lambda\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{k}\left(\tau_{\alpha\beta\lambda} - \tau_{\beta\lambda\alpha} + \tau_{\lambda\alpha\beta} + 2\, g_{\alpha[\lambda}\, \tau_{\beta]}\right) \\
&= -\frac{1}{k}\left(\mathcal{T}_{\alpha\beta\lambda} - \mathcal{T}_{\beta\lambda\alpha} + \mathcal{T}_{\lambda\beta\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(K_{\alpha\beta\lambda} + 2\, g_{\alpha[\beta} K_{\lambda]}\right)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(C)}\quad \tau_{\alpha\beta\lambda} &= k\left(S_{\alpha\beta\lambda} + g_{\lambda[\alpha} S_{\beta]}\right) \\
&= -\frac{k}{2}\left(\mu_{\alpha\beta\lambda} + \mu_{\beta\lambda\alpha} - g_{\lambda[\alpha}\, \mu_{\beta]}\right)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(D)}\quad \mathcal{T}_{\alpha\beta\lambda} &= k\, S_{\alpha\beta\lambda} \\
&= -\frac{k}{2}\left(\mu_{\alpha\beta\lambda} + \mu_{\beta\lambda\alpha}\right)
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(E)}\quad K_{\alpha\beta\lambda} &= k\left(-S_{\alpha\beta\lambda} + S_{\beta\lambda\alpha} - S_{\lambda\alpha\beta}\right. \\
&\qquad \left. - g_{\alpha\lambda}\, S^{\nu}{}_{\beta\nu} + g_{\alpha\beta}\, S^{\nu}{}_{\lambda\nu}\right) \\
&= k\left(\mu_{\alpha\beta\lambda} + g_{\alpha[\beta}\, \mu_{\lambda]}\right.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Relações entre os traços:

$$(F)\quad S_\lambda = \frac{1}{2}\mu_\lambda$$

$$= -\frac{2}{k}\,\zeta_\lambda$$

$$= -\frac{1}{k}\,\mathfrak{T}_\lambda$$

$$= -\frac{1}{k}\,K_\lambda$$

"Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly Mathematics"

G.H. Hardy (Em "A Mathematician's Apology")

4. *GEOMETRIA DIFERENCIAL EM VARIEDADES DE RIEMANN-CARTAN*

Motivados pelo fato de que a geometria das variedades de Riemann-Cartan apresenta muitos aspectos diferentes da geometria Riemanniana, vamos examinar alguns conceitos de geometria diferencial. Apresentaremos definições e resultados. Os cálculos serão feitos explicitamente apenas em situações que apresentem alguma dificuldade ou utilidade futura. Noções como variedades, campos vetoriais, identificação de vetores com tangentes a curvas parametrizadas e métrica, serão supostas conhecidas[15,16,17].

Formas Diferenciais

O espaço-tempo será representado por uma variedade quadri-dimensional diferenciável C^{∞}, anotada por V, dotada de uma métrica g. O conjunto de todos os vetores tangentes em um ponto $P \varepsilon V$ constitui um espaço vetorial chamado de espaço tangente à variedade em P, o qual será denotado por $TV(P)$. O espaço dual do espaço tangente será anotado por $T^{*}V(P)$, e é o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $\omega : TV(P) \rightarrow R$. Os objetos $\omega \varepsilon T^{*}V(P)$ são chamados de formas diferenciais. Escolhida uma base genérica $\{e_{\alpha}\}$ em $TV(P)$, um referencial em $T^{*}V(P)$ pode ser convenientemente escolhido como o conjunto $\{\theta^{\alpha}\}$ tal que $\theta^{\alpha}(e_{\beta}) = <\theta^{\alpha}, e_{\beta}> = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Neste sentido, diremos que as duas bases são duais, e os elementos de $\{\theta^{\alpha}\}$ serão chamados de 1-forma diferenciais. De modo geral, pode-se cons truir p-formas diferenciais que são funções p-lineares em $TV(P)$.

Define-se o produto exterior de duas formas diferenciais por

$$\omega \wedge (\theta + \lambda) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \lambda$$

$$\omega \wedge (\theta \wedge \lambda) = (\omega \wedge \theta) \wedge \lambda \qquad (4.1)$$

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{pq}\, \theta \wedge \omega$$

onde θ é uma p-forma, ω é uma q-forma e λ é uma r-forma.

O produto interior de um campo vetorial V por uma q-forma ω é uma (p-1)-forma definida por

$$V \lrcorner\, \omega(\underbrace{\text{----}}_{q}) = \omega(V, \underbrace{\text{----}}_{(q-1)}) \qquad (4.2)$$

O produto interior satisfaz às seguintes propriedades

$$V \lrcorner (\omega \wedge \theta) = (V \lrcorner \omega) \wedge \theta + (-1)^{q}\, \omega \wedge (V \lrcorner \theta)$$

$$(4.3)$$

$$V \lrcorner (V \lrcorner \omega) = 0$$

para qualquer ω.

A estrutura do cálculo diferencial sobre formas é baseada na operação de derivação exterior. Esta operação é representada por um operador linear d, e é uma aplicação que leva p-formas em (p+1)-formas satisfazendo as seguintes condições : se ω é uma p-forma e θ uma q-forma, então

$$d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$$

$$(4.4)$$

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{p}\, \omega \wedge d\theta$$

e

$d(d\omega) = 0$ para qualquer p-forma.

Se V é um campo vetorial e ϕ um campo escalar (0-forma), pode-se mostrar que

$$V \lrcorner d\phi = V\phi \tag{4.5}$$

Consideremos um ponto $P \varepsilon V$ e um referencial $\{e_\alpha\}$, com dual $\{\Theta^\alpha\}$. Quando as 1-formas Θ^α são exatas, isto é, quando $\Theta^\alpha = df^\alpha$ onde f^α são funções definidas em P, o referencial é chamado de holonômico. Neste caso, o comutador de dois campos vetoriais e_α, e_β ε $\{e_\mu\}$ é nulo, $[e_\alpha , e_\beta] = 0$. Em caso contrário, diremos que o referencial é não-holonômico e escreveremos

$$[e_\alpha , e_\beta] = 2\, \Lambda^\rho{}_{\alpha\beta}\, e_\rho \tag{4.6}$$

Definiremos a 2-forma com valores vetoriais Λ^ρ por

$$\Lambda^\rho \equiv d\Theta^\rho = \Lambda^\rho{}_{\mu\nu}\, \Theta^\mu \wedge \Theta^\nu \tag{4.7}$$

As 2-forma Λ^ρ são chamadas de objetos de não-holonomia e só se anulam quando o referencial é holonômico.

Teoria das Conexões

Vamos agora introduzir na variedade V uma conexão linear. Por definição, uma conexão linear ∇ em um ponto $P \varepsilon V$ é uma regra que associa a cada campo vetorial U em P um operador diferencial ∇_U, tal que se V é outro campo vetorial em P, $\nabla_U V$ é também um campo vetorial em P, e as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla_U(\alpha V + \beta Z) &= \alpha \nabla_U V + \beta \nabla_U Z \\ \nabla_{(U+V)} Z &= \nabla_U Z + \nabla_V Z \\ \nabla_{(fU)} V &= f \nabla_U V \\ \nabla_U (fV) &= (Uf) V + f \nabla_U V \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde U, V, Z são campos vetoriais, α , $\beta \; \varepsilon$ R, e f é uma função C^∞. O campo vetorial $\nabla_U V$ é chamado de derivada covariante de V na direção de U.

As componentes de ∇ em um referencial $\{e_\alpha\}$ são dadas por

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \langle \theta^\lambda, \nabla_{e_\alpha} e_\beta \rangle = \theta^\lambda(\nabla_{e_\alpha} e_\beta) \tag{4.9}$$

Vamos definir as 1-forma de conexão $\omega^\mu{}_\nu$ pela relação

$$\nabla_{e_\alpha}(e_\beta) = \omega^\mu{}_\beta(e_\alpha)\, e_\mu \tag{4.10}$$

de modo que

$$\omega^{\mu}{}_{\beta} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}\ \theta^{\lambda} \tag{4.11}$$

Pode-se verificar sem dificuldades que se $\{\partial_\mu\}$ é a base canônica (base de coordenadas) em V, então

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\alpha}(V) &= \left(\partial_\alpha v^{\mu} + v^{\beta}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \right) \partial_\mu \\ &\equiv \left(\nabla_\alpha v^{\mu} \right) \partial_\mu \end{aligned} \tag{4.12}$$

o que mostra que as componentes de $\nabla(V)$ na base canônica são as derivadas covariantes das componentes de V nesta base.

Torsão e Curvatura

Define-se a torsão associada com a conexão ∇ como uma regra que a dois campos vetoriais, U e V, associa um campo vetorial T(U , V) definido por

$$T(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \tag{4.13}$$

As componentes da torsão T em uma base $\{e_\alpha\}$ são dadas por

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \langle \theta^{\alpha}, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \frac{1}{2}\, \theta^{\alpha}\big(T(e_\mu, e_\nu)\big) \tag{4.14}$$

Definamos uma regra R que a cada par de vetores U , V em P ε V associa uma transformação linear R(U , V), com valo res tensoriais, do espaço tangente sobre êle mesmo, definida por

$$R(U,V) = \nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U,V]} \tag{4.15}$$

As componentes de R em uma base $\{e_\alpha\}$ são dadas por

$$R^\alpha{}_{\beta\lambda\rho} = \langle \theta^\alpha , R(e_\lambda, e_\rho) e_\beta \rangle \tag{4.16}$$

R é chamada de transformação de curvatura associada com a conexão ∇. De (4.15), pode-se interpretar R(U,V) como uma medida da não comutatividade da operação de derivação covariante.

Consideremos um referencial arbitrário $\{e_\alpha\}$ com dual $\{\theta^\alpha\}$, e definamos as 2-forma de torsão Θ^μ e de curvatura $\Omega^\mu{}_\nu$, respectivamente, por

$$\frac{1}{2} T(U,V) = \Theta^\mu(U,V)\, e_\mu \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{2} R(U,V) e_\nu = \Omega^\mu{}_\nu (U,V)\, e_\mu \tag{4.18}$$

Pode-se mostrar então que

$$\Theta^\mu = d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \theta^\alpha \tag{4.19}$$

$$\Omega^\mu{}_\nu = d\,\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu \tag{4.20}$$

As expressões (4.19) e (4.20) são as equações de estrutura de Cartan, e constituem a base da teoria da torsão e da curvatura de uma variedade.

Considerando-se uma base de cooordenadas $\{\partial_\mu\}$ com dual $\{dx^\mu\}$, e expressando-se as formas de conexão, torsão e curvatura por

$$\omega^\lambda{}_\alpha = \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha}\, dx^\beta \tag{4.21}$$

$$\Theta^\lambda = \frac{1}{2}\, \mathcal{T}^\lambda{}_{\beta\alpha}\, dx^\beta \wedge dx^\alpha \tag{4.22}$$

$$\Omega^\lambda{}_\beta = \frac{1}{2}\, R^\lambda{}_{\beta\alpha\rho}\, dx^\alpha \wedge dx^\rho \tag{4.23}$$

verifica-se então que

$$\mathcal{T}^\lambda{}_{\beta\alpha} = \Gamma^\lambda{}_{[\beta\alpha]} \tag{4.24}$$

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\lambda} = \partial_\beta \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \tag{4.25}$$

Da definição da transformação de curvatura $R(U,V)$ segue que

$$Z^\alpha{}_{\|\nu\|\beta} - Z^\alpha{}_{\|\beta\|\nu} = - Z^\mu R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + \mathcal{T}^\lambda{}_{\nu\beta}\, Z^\alpha{}_{\|\lambda} \tag{4.26}$$

Definindo o diferencial exterior covariante de uma p-forma $\lambda^\alpha{}_\beta$ por

$$\mathbb{D}\lambda^\alpha{}_\beta = d\lambda^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\mu \wedge \lambda^\mu{}_\beta - \lambda^\alpha{}_\mu \wedge \omega^\mu{}_\beta \tag{4.27}$$

pode-se verificar que as equações de estrutura de Cartan conduzem às identidades de Bianchi

$$\mathbb{D}\Theta^{\lambda} = \Omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \tag{4.28}$$

$$\mathbb{D}\,\Omega^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \tag{4.29}$$

As componentes da conexão ∇ são relacionadas com as componentes do tensor métrico através da 1-forma

$$\mathbb{D}\,g_{\mu\nu} = d\,g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu} \tag{4.30}$$

$$= \left(\nabla_{\lambda}\, g_{\mu\nu}\right)\theta^{\lambda} \tag{4.31}$$

onde ∇_{λ} é o operador de derivação covariante e $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}{}_{\nu}$.
Calculemos o diferencial exterior covariante da expressão (4.30):

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\mathbb{D}g_{\mu\nu}) &= \mathbb{D}\left(d\,g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}\right)\\ &= d\left(d\,g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}\right) + \omega^{\lambda}{}_{\mu}\wedge \mathbb{D}g_{\lambda\nu} + \omega^{\lambda}{}_{\nu}\wedge\mathbb{D}g_{\mu\lambda}\\ &= -d\,\omega_{\mu\nu} - d\,\omega_{\nu\mu} - \omega^{\lambda}{}_{\nu}\wedge\omega_{\mu\lambda} - \omega^{\lambda}{}_{\mu}\wedge\omega_{\lambda\nu}\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{D}(\mathbb{D}g_{\mu\nu}) = -\Omega_{\mu\nu} - \Omega_{\nu\mu} \tag{4.32}$$

De modo geral, a conexão ∇ pode ser separada numa parte $\overline{\nabla}$ chamada de conexão Riemanniana de V, e outra parte $\tilde{\nabla}$. A primeira é determinada univocamente pela métrica g, como sendo a conexão que satisfaz as condições $\overline{D}\,g_{\alpha\beta} = 0$ e $\overline{D}\theta^{\mu} = 0$, e a segunda, que representa uma "correção", é devida à não nuli dade do tensor de torsão.

Escrevamos então as 1-formas de conexão como

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \gamma^{\mu}{}_{\nu} + \lambda^{\mu}{}_{\nu} \tag{4.33}$$

onde $\gamma^{\mu}{}_{\nu}$ são as 1-formas da conexão Riemanniana de V e $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$ são as 1-forma de correção. Então

$$\mathbb{D} g_{\mu\nu} = (d g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\nu\mu}) - \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu}$$

$$= \bar{\mathbb{D}} g_{\mu\nu} - \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu}$$

Logo,

$$\mathbb{D} g_{\mu\nu} = - \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu} \tag{4.34}$$

Tem-se também que

$$\Theta^{\mu} = (d\theta^{\mu} + \gamma^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}) + \lambda^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}$$

$$= \bar{\mathbb{D}} \theta^{\mu} + \lambda^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}$$

isto é,

$$\Theta^{\mu} = \lambda^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} \tag{4.35}$$

Segue então que a derivada covariante da métrica e as 2-forma de torsão são completamente determinadas pelas 1-forma de correção $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Em termos de componentes, escreveremos

$$\lambda^{\mu}{}_{\nu} = K^{\mu}{}_{\lambda\nu}\,\theta^{\lambda} \tag{4.36}$$

A imposição de que o transporte paralelo deve preservar o produto escalar induzido pela métrica g implica em que

$$\mathbb{D}\, g_{\mu\nu} = 0 \tag{4.37}$$

Esta condição será chamada de condição métrica. Pode-se mostrar que esta condição induz uma única conexão ∇ sobre V, a qual chamaremos de conexão métrica. A expressão para a conexão métrica ∇ de V pode ser obtida como se segue. Sejam $X,U,V\varepsilon TV(P)$ três campos vetoriais arbitrários. Então, a condição (4.37) se escreve

$$(\nabla_X g)(U,V) = X\,g(U,V) - g(U,\nabla_X V) - g(\nabla_X U, V) = 0$$

Permutando-se ciclicamente os vetores X,U,V, somando e subtraindo com a expressão acima as expressões correspondentes a (V,X,U) e (U,V,X), respectivamente, e levando em conta a definição da torsão, obtém-se

$$\begin{aligned} 2\,g(V,\nabla_U X) = {} & X\,g(U,V) + U\,g(V,X) - V\,g(X,U) - g(V,T(U,X)) \\ & - g(U,T(V,X)) + g(X,T(U,V)) + g(V,[U,X]) \\ & - g(U,[V,X]) + g(X,[U,V]) \end{aligned} \tag{4.38}$$

que é a expressão que determina a conexão métrica ∇ de maneira geral.

Numa base de coordenadas, a expressão (4.38) conduz a

$$\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_{\alpha} g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}\right) + \tau^{\rho}_{\beta\alpha} - \tau_{\beta}{}^{\rho}{}_{\alpha} + \tau_{\alpha\beta}{}^{\rho} \tag{4.39}$$

ou

$$\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} = \left\{{\rho \atop \beta\alpha}\right\} - K^{\rho}{}_{\beta\alpha} \tag{4.40}$$

onde introduzimos os símbolos de Christoffel de segunda espécie $\{{\rho \atop \beta\alpha}\}$ e o tensor de contorsão definido em (2.10).

Numa base arbitrária $\{e_{\alpha}\}$ obtém-se

$$\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} = \left\{{\rho \atop \beta\alpha}\right\} - K^{\rho}{}_{\beta\alpha} + g^{\rho\lambda}\left(-\Lambda_{\lambda\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\lambda} - \Lambda_{\beta\lambda\alpha}\right) \tag{4.41}$$

com

$$\left\{{\rho \atop \beta\alpha}\right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(e_{\alpha} g_{\beta\lambda} + e_{\beta} g_{\alpha\lambda} - e_{\lambda} g_{\alpha\beta}\right) \tag{4.42}$$

A hipótese, de que as variedades de Riemann-Cartan também admitem uma estrutura Minkowskiana local, implica na existência de referenciais ortonormais locais (referenciais de Lorentz ou tetradas), $\{e_A\}$, A = 1,2,3,4,, tais que $g(e_A , e_B) = \eta_{AB}$ = DIAG.(+1, -1, -1, -1). As tetradas são relacionadas com os vetores da base de coordenadas $\{\partial_{\alpha}\}$ e da base dual $\{dx^{\alpha}\}$ por

$$e_A = e^{\alpha}{}_{(A)}\, \partial_\alpha \quad , \qquad \theta^A = e^{(A)}{}_{\alpha}\, d x^{\alpha} \tag{4.43}$$

e, além disto

$$e^{(A)}{}_{\alpha}\, e^{\alpha}{}_{(B)} = \delta^A{}_B \ , \qquad g_{\mu\nu} = e^{(A)}{}_{\mu}\, e^{(B)}{}_{\nu}\, \eta_{AB} \tag{4.44}$$

Na base de tetradas, a parte antissimétrica da conexão se escreve

$$\Gamma^A{}_{[BC]} = \tau^A{}_{BC} - \Delta^A{}_{BC} \tag{4.45}$$

onde $\Lambda^A{}_{BC}$ são os objetos de não-holonomia introduzidos anteriormente, que se escrevem nesta base

$$\Lambda^A{}_{BC} = e^{\nu}{}_{(B)}\, e^{\mu}{}_{(C)}\, \partial_{[\nu}\, e^{(A)}_{\mu]} \tag{4.46}$$

$$= e^{\nu}{}_{[(C)}\, \partial_{(B)]}\, e^{(A)}{}_{\nu} \tag{4.47}$$

onde $\partial_{(B)} = e^{\alpha}_{(B)}\, \partial_\alpha$. Tem-se também que

$$\Gamma^A{}_{BC} = - \Lambda^A{}_{BC} + \Lambda_{BC}{}^A - \Lambda_C{}^A{}_B - K^A{}_{BC} \tag{4.48}$$

O Grupo GL(4, R)

Seja $J: V \to \mathcal{M}$ uma aplicação C^∞ da variedade V em uma variedade $\mathcal{M}$. Esta aplicação induz uma transformação linear de cada espaço tangente de V em um espaço tangente de $\mathcal{M}$, a qual é chamada de aplicação Jacobiana $J_* T(V) \to T(\mathcal{M})$. Chamando de V a um vetor em $V(P)$ e f uma função C^∞ em $J(P) \in \mathcal{M}$, define-se $J_* V$ como um vetor em $J(P)$ por

$$(J_* V) f = V(f \circ J) \tag{4.49}$$

Anotemos por $\mathfrak{F}^p(V)$ o conjunto de todas as p-formas em V. Define-se a aplicação $J^* : \mathfrak{F}^p(\mathcal{M}) \to \mathfrak{F}^p(V)$ por

$$(J^* \omega)(V_1, \ldots, V_p) = \omega(J_* V_1, \ldots, J_* V_p) \tag{4.50}$$

$$\omega \in \mathfrak{F}^p(\mathcal{M}) \ , \quad V_1, \ldots, V_p \in T(V)$$

Pode-se mostrar que, se $\omega \in \mathfrak{F}^p(\mathcal{M})$ e $\eta \in \mathfrak{F}^q(\mathcal{M})$, então

$$\begin{aligned} J^*(\omega \wedge \eta) &= J^* \omega \wedge J^* \eta \\ J^*(d\omega) &= d(J^* \omega) \end{aligned} \tag{4.51}$$

Consideremos agora o grupo GL(4, R) de todas as matrizes reais não singulares 4×4. Como se sabe, GL(4, R) (ou GL(n, R), de modo geral) é um grupo de Lie, e tem uma estrutura de variedade. Anotemos por $G\ell(4, R)$ a sua álgebra de Lie. $G\ell(4, R)$ é isomorfa ao espaço tangente ao elemento identidade do grupo.

Sejam e e e' dois referenciais locais em $V(P)$, isto é, dois conjuntos de vetores linearmente independentes em $TV(P)$. É sempre possível encontrar $A \in GL(4, R)$ tal que $e' = Ae$.

Com e fixo a matriz A é única.

Identifiquemos e com a identidade I ε GL(4 , R). Então, se e' é próximo de e podemos escrever que

$$e' = (\mathbb{1} + \alpha) e \tag{4.52}$$

onde $\alpha \; \varepsilon \; G\ell(4\,,R)$.

Chamemos de V_N a um espaço vetorial de dimensão finita, dim $V_N = N$, e seja GL(N , R) o grupo das transformações lineares não singulares de V_N. Chamemos de σ a uma representação de GL(4 , R) em GL(N , R), e $\{\varepsilon^A\}$, A = 1,...,N, a uma base em V_N. Qualquer p-forma com valores em V_N pode ser representada por

$$\varphi = (\varphi_A) = \varphi_A \otimes \epsilon^A \tag{4.53}$$

A representação σ induz uma transformação na base $\{\varepsilon_A\}$ definida por

$$\begin{aligned} \epsilon'^A &= \sigma^A{}_B(\mathbb{A})\,\epsilon^B \\ \sigma(\mathbb{A}) &\in GL(N,R) \end{aligned} \tag{4.53}$$

e uma transformação nas componentes de φ definida por

$$\varphi'_B = \sigma^A{}_B(\mathbb{A}^{-1})\,\varphi_A \tag{4.54}$$

Consideremos uma transformação infinitesimal $(I + \alpha) \varepsilon GL(4, R)$ sobre os referenciais e, e chamemos de $\sigma(I + \alpha) \varepsilon GL(N, R)$ a correspondente representação. Podemos tratar a matriz α como um vetor tangente à variedade $GL(4, R)$. Consequentemente, $(I + \alpha) - I$ pode ser tratado como a imagem de α pela aplicação Jacobiana σ' induzida entre os espaços tangentes, isto é, entre as correspondentes álgebras de Lie, $\sigma' : G\ell(4, R) \rightarrow G\ell(N, R)$. Esta aplicação pode ser construida fazendo-se uma expansão formal em série de Taylor

$$\sigma(\mathbb{1} + \alpha) \approx \mathbb{1} + \alpha^{\lambda}{}_{\rho}\, \sigma'_{\lambda}{}^{\rho} \tag{4.55}$$

ou,

$$\sigma^{A}{}_{B}(\mathbb{1} + \alpha) \approx \delta^{A}{}_{B} + \alpha^{\lambda}{}_{\rho}\, \sigma^{A}{}_{B\lambda}{}^{\rho} \tag{4.56}$$

onde

$$\sigma^{A}{}_{B\lambda}{}^{\rho} = \left(\frac{\partial\, \sigma^{A}{}_{B}(\mathbb{A})}{\partial A^{\lambda}{}_{\rho}} \right)_{\mathbb{A} = \mathbb{1}} \tag{4.57}$$

são os elementos de matriz do homomorfismo induzido nas álgebras de Lie $\sigma' : G\ell(4, R) \rightarrow G\ell(N, R)$.

Para uma variação infinitesimal dos referenciais escrevamos

$$\delta e_{\lambda} = \alpha_{\lambda}{}^{\rho}\, e_{\rho} \tag{4.58}$$

Lembrando que $A^{-1} \approx I - \alpha$ segue de (4.56) que

$$\delta\varphi_A = -\alpha^\lambda{}_\rho \, \sigma_A{}^B{}_\lambda{}^\rho \, \varphi_B \tag{4.59}$$

Diremos então que é uma p-forma do tipo σ.

Identifiquemos V_N com R^N (que é isomorfo a $TV(P)$ para cada $P \in V$), e $\{\varepsilon_\alpha\}$ com a base padrão em R^N. Anotemos por $\{\theta^\alpha\}$ a base de co-referenciais dual a $\{\varepsilon_\alpha\}$, e chamemos de id a aplicação identidade sobre $GL(4, R)$. Uma 1-forma do tipo id sobre R^N é definida por $\theta = \theta^\alpha \otimes \varepsilon_\alpha$. Segue então que se $e' = Ae$,

$$\theta'^\alpha = (A^{-1})^\alpha{}_\beta \, \theta^\beta \tag{4.60}$$

Mas, $id^\alpha_\beta(A) = A^\alpha_\beta$ e portanto, para a representação identidade tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_\mu{}^\nu{}_\alpha{}^\beta &= \left(\frac{\partial \, id^\nu{}_\mu(A)}{\partial A^\alpha{}_\beta} \right)_{A = \mathbb{1}} = \frac{\partial A^\nu{}_\mu}{\partial A^\alpha{}_\beta} \\ &= \delta^\nu{}_\alpha \, \delta^\beta{}_\mu \end{aligned} \tag{4.61}$$

de modo que a transformação $e' = (I + \alpha)e$ induz uma variação nos referenciais duais dada por

$$\delta\theta^\lambda = -\alpha^\lambda{}_\rho \, \theta^\rho \tag{4.62}$$

Definiremos a derivada covariante exterior de uma p-forma do tipo σ , com relação à conexão $\omega^{\mu}{}_{\nu}$, como uma (p+1)-forma do tipo σ dada por

$$\mathbb{D}\varphi_A = d\varphi_A + \sigma_A{}^B{}_{\nu}{}^{\mu}\, \omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \varphi_B \tag{4.63}$$

Se (ϕ_A) for um campo tensorial, então $D\phi_A = \theta^{\alpha}\nabla_{\alpha}\phi_A$; se um campo vetorial $V = (V^{\lambda})$, $DV^{\lambda} = dV^{\lambda} + \omega^{\lambda}{}_{\rho}V^{\rho}$. Notemos que $D^2\phi_A = \sigma_{A\mu}^{B\nu}\, \Omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \phi_B$, de modo que se (ϕ_A) for um campo tensorial $D^2\phi_A = \Theta^{\lambda}\nabla_{\lambda}\phi_A + \theta^{\mu} \wedge \theta^{\nu}\, \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi_A$.

Diferenciemos exteriormente a expressão (4.60) e usemos (4.19):

$$\begin{aligned} d\theta^{\mu} &= d\left(A^{\mu}{}_{\nu}\, \theta'^{\nu}\right) \\ &= A^{\mu}{}_{\nu}\, d\theta'^{\nu} + dA^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta'^{\nu} \\ &= A^{\mu}{}_{\nu}\left(\Theta'^{\nu} - \omega'^{\mu} \wedge \theta'^{\lambda}\right) + dA^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta'^{\nu} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu} - \omega^{\mu}{}_{\lambda} \wedge \theta^{\lambda} = A^{\mu}{}_{\nu}\Theta'^{\nu} &- \left(A^{\mu}{}_{\nu}\,\omega'^{\mu}{}_{\lambda}\right) \wedge \left(A^{-1}\right)^{\lambda}{}_{\rho}\,\theta^{\rho} \\ &- \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\nu}{}_{\rho}\, dA^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\rho} \end{aligned}$$

Da expressão anterior segue que

$$\Theta'^{\nu} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu}\, \Theta^{\mu} \tag{4.64}$$

e

$$\omega'^{\nu}{}_{\sigma} = (\mathbb{A}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, \omega^{\mu}{}_{\rho}\, A^{\rho}{}_{\sigma} + (\mathbb{A}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\, dA^{\mu}{}_{\sigma} \tag{4.65}$$

Da definição da métrica g tem-se também que

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\, \theta^{\alpha} \otimes \theta^{\beta} &= g_{\alpha\beta}\, A^{\alpha}{}_{\mu}\, A^{\beta}{}_{\nu}\, \theta'^{\mu} \otimes \theta'^{\nu} \\ &= g'_{\mu\nu}\, \theta'^{\mu} \otimes \theta'^{\nu} \end{aligned}$$

onde

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\, A^{\alpha}{}_{\mu}\, A^{\beta}{}_{\nu} \tag{4.66}$$

No caso de transformações infinitesimais, $A^{\mu}{}_{\nu} \approx \delta^{\mu}{}_{\nu} + \alpha^{\mu}{}_{\nu}$, as expressões (4.65, 64) conduzem a

$$\delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = \omega'^{\mu}{}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu} = \mathbb{D}\,\alpha^{\mu}{}_{\nu} \tag{4.67}$$

e

$$\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\mu} \tag{4.68}$$

Grupos Uniparamétricos de Difeomorfismos

Seja V um campo vetorial local em $\mathcal{V}$. Uma curva $\lambda:(a,-a) \to \mathcal{V}$ é uma curva integral de V se V for tangente a λ, isto é, se $\lambda'(t) = V(\lambda(t))$, onde t é um parâmetro e a linha significa derivação com relação a t. Pode-se mostrar que para cada $x \varepsilon \mathcal{V}$ existe uma curva integral de V passando por x.

O seguinte teorema é importante para o que se segue:

(I) Para cada $x \varepsilon \mathcal{V}$ pode-se encontrar dois pontos a(x) e b(x) em $R \cup (-\infty, +\infty)$ e uma curva regular $\lambda_x:(a(x), b(x)) \to$ tal que: (a) $0 \varepsilon (a(x), b(x))$ e $\lambda_x(0) = x$; (b) λ_x é uma curva integral de V passando por x.

(II) Para cada $t \varepsilon R$ pode-se definir uma transformação sobre $\mathcal{V}$, $e^{tV}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, com domínio em $\{x \varepsilon \mathcal{V} \mid t \varepsilon (a(x), b(x))\}$, pela regra $e^{tV}(x) = \lambda_x(t)$ tal que: (a) e^{-tV} é a inversa de e^{tV}; (b) $e^{tV} e^{sV} = e^{(t+s)V}$.

A parte (I) do teorema garante a existência de curvas integrais de V passando por cada $x \varepsilon \mathcal{V}$ de tal maneira que para t = 0 "estamos" em $x = \lambda_x(0)$. A parte (II) estabelece a existência de transformações sobre a variedade $\mathcal{V}$, geradas pelo campo V. Formalmente, para pequenos valores de t, $e^{tV} \approx 1+tV$ e $e^{tV}(x) = x + tV(x)$, o que significa que pela transformação o ponto x é deslocado de tV(x).

Diremos que a variedade V é completa se todas as curvas integrais de V tiverem seus parâmetros variando em $(-\infty, +\infty)$. Isto é equivalente a se dizer que o domínio da transformação e^{tV} é toda a variedade para todo $t \in R$. Se alguma curva integral não tiver o seu parâmetro tomando valores em $(-\infty, +\infty)$ a variedade é chamada de incompleta. Considerando-se o parâmetro t como o tempo, incompleticidade significa que em V existe uma curva integral ao longo da qual não podemos caminhar por um tempo arbitrariamente longo.

As transformações $\{e^{tV}\}$ constituem um grupo. Note que se V for incompleta, há problemas com relação ao domínio das transformações, mas pode-se mostrar que $\{e^{tV}\}$ constitui um grupo local. No que se segue, consideraremos sempre grupos locais. A transformação e^{tV} é um difeomorfismo, e o grupo destas transformações é chamado de grupo uniparamétrico de difeomorfismo.

Devido ao fato de que e^{tV} é um difeomorfismo, é possível se transportar estruturas geométricas de um ponto a outro da variedade através desta transformação, o que nos permite introduzir a noção de derivada de Lie de maneira natural: definimos a derivada de Lie do campo vetorial U, com relação ao campo vetorial V

$$\mathcal{L}_V U = [V, U] \tag{4.69}$$

A derivada de Lie pode ser construida da seguinte maneira: Seja $x \in V$, e consideremos $U(e^{tV}(x))$. Transportemos então $U(e^{tV}(x))$ ao ponto original x por e^{-tV}. Então,

$$\mathcal{L}_V U = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(e^{-tV})_* U(e^{tV}(x)) - U(x) \right] \tag{4.70}$$

Esta maneira de se construir derivadas de Lie pode ser estendida a outros objetos geométricos. Interessa-nos, em particular, calcular a derivada de Lie de uma conexão linear, o que faremos a seguir.

Seja ∇ (ou ω) uma conexão em V e $\{e_\alpha\}$ uma base local em uma vizinhança de $x \in V$. Como anteriormente, anotemos

$$\nabla_{e_\alpha}(e_\beta) = \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\, e_\lambda = \xi_{\alpha\beta} \tag{4.71}$$

Na vizinhança de x, a conexão ∇ fica completamente definida pelos n^2 vetores $\{\xi_{\alpha\beta}\}$. Definamos o conjunto de vetores $\overset{t}{\xi}_{\alpha\beta}$ por

$$\overset{t}{\xi}_{\alpha\beta} = (e^{-tV})_*\, \xi_{\alpha\beta}\,(e^{tV}(x)) \tag{4.72}$$

Este conjunto de vetores induz uma conexão $\overset{t}{\nabla}$ definida por

$$\overset{t}{\nabla}_{e_\alpha}(e_\beta) = \overset{t}{\xi}_{\alpha\beta} \tag{4.73}$$

A diferença $\overset{t}{\nabla} - \nabla$ é uma transformação bilinear em TV. Define-se a derivada de Lie da conexão ∇ por

$$\mathcal{L}_V \nabla = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\overset{t}{\nabla}_V(U) - \nabla_V(U) \right] \tag{4.74}$$

Um conceito de importância particular é o conceito de "arrastamento" de um objeto geométrico. Seja $\mathcal{O}$ um objeto geométrico;se

$$\mathcal{O}(e^{tV}(x)) = (e^{tV}\mathcal{O})(x) \tag{4.75}$$

diz-se que $\mathcal{O}$ é arrastado ao longo das curvas integrais de V. É claro que quando isto ocorre,

$$\mathcal{L}_V \mathcal{O} = 0 \tag{4.76}$$

Por uma escolha conveniente do referencial, a derivada de Lie de um tensor pode ser expressa em termo das derivadas direcionais de suas componentes com relação a este referencial. Isto é verdade em qualquer base que é arrastada ao longo das curvas integrais de V, isto é, tais que $\mathcal{L}_V(e_\alpha) = 0$. É importante notar que, neste caso, a base dual também é arrastada ao longo das curvas integrais de V:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V \theta^\alpha) e_\lambda &= V\langle \theta^\alpha, e_\lambda\rangle - \langle \theta^\alpha, [V, e_\lambda]\rangle \\ &= -\theta^\alpha \mathcal{L}_V(e_\lambda) = 0\end{aligned}$$

Chamemos de $\mathfrak{J}$ um tensor da forma

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^A{}_B\, e_A \otimes \theta^B$$

onde $e_B = e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \ldots \otimes e_\rho$ e $\theta^A = \theta^\mu \otimes \theta^\nu \otimes \ldots . \otimes \theta^\lambda$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V \mathfrak{J} &= (\mathcal{L}_V \mathfrak{J}^A{}_B)\, e_A \otimes \theta^B + \mathfrak{J}^A{}_B\, (\mathcal{L}_V e_A) \otimes \theta^B \\ &\quad + \mathfrak{J}^A{}_B\, e_A \otimes \theta^B \\ &= (V\, \mathfrak{J}^A{}_B)\, e_A \otimes \theta^B\end{aligned} \tag{4.77}$$

É claro então que as bases que são arrastadas, são os referenciais naturais a serem usados, quando se consideram grupos uniparamétricos de difeomorfismos.

Uma conexão ∇ definida sobre V induz uma outra conexão $\overset{T}{\nabla}$ definida pelas 1-forma

$$\overset{T}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \omega^{\alpha}{}_{\beta} + \mathcal{T}^{\alpha}{}_{\rho\beta}\,\theta^{\rho} \tag{4.78}$$

De modo geral, a conexão $\overset{T}{\nabla}$ não é métrica mesmo que ∇ o seja. A condição para que ∇ seja métrica é que $\overset{T}{D}g_{\alpha\beta} = 0$, isto é,

$$\overset{T}{\mathbb{D}} g_{\alpha\beta} = (d g_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha}) - \mathcal{T}_{\alpha\rho\beta}\,\theta^{\rho} - \mathcal{T}_{\beta\rho\alpha}\,\theta^{\rho}$$

$$= -(\mathcal{T}_{\alpha\rho\beta} + \mathcal{T}_{\beta\rho\alpha})\,\theta^{\rho} = 0$$

Logo, ∇ será métrica se e somente se

$$\mathcal{T}_{\alpha\rho\beta} = \mathcal{T}_{[\alpha\rho\beta]} \tag{4.79}$$

Pode-se verificar sem dificuldades que se a base $\{e_\alpha\}$ for holonômica, com $\omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\,\theta^{\rho}$ e $\overset{T}{\omega}{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\overset{T}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\rho}\,\theta^{\rho}$ tem-se que $\overset{T}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}$.

Se $V = (V^{\alpha})$ é um campo vetorial e $\phi = (\phi_{\alpha})$ é uma p-forma tem-se que

$$\overset{T}{\mathbb{D}} V^{\alpha} = \mathbb{D}V^{\alpha} + V \lrcorner\, \Theta^{\alpha} \tag{4.80}$$

$$\overset{T}{\mathbb{D}} \varphi_{\alpha} = \mathbb{D}\varphi_{\alpha} - \mathcal{T}^{\beta}{}_{\rho\alpha}\,\theta^{\rho}\,\varphi_{\beta} \tag{4.81}$$

A expressão para a derivada de Lie de uma p-forma do tipo σ pode ser estabelecida sem dificuldades, e o resultado é

$$\mathcal{L}_V \varphi = [\mathcal{L}_V \varphi]_A \otimes \theta^A$$

$$= \left(\mathcal{L}_V \varphi_A + \sigma_A{}^B{}_\beta{}^\alpha \, \theta^\beta (\mathcal{L}_V e_\alpha) \varphi_B\right) \otimes \theta^A \qquad (4.82)$$

Usando agora, que para uma p-forma ω qualquer

$$\mathcal{L}_V \omega = V \lrcorner d\omega + d(V \lrcorner \omega) \qquad (4.83)$$

a expressão (4.82) se escreve

$$\mathcal{L}_V \varphi = \left[V \lrcorner \mathbb{D}\varphi_A + \mathbb{D}(V \lrcorner \varphi_A) - \sigma_A{}^B{}_\beta{}^\alpha (\overset{T}{\nabla}_\beta V^\alpha) \varphi_B \right] \otimes \theta^A \qquad (4.84)$$

Para se obter a expressão da derivada de Lie das formas de conexão, é conveniente se usar referenciais que são arrastados ao longo das curvas integrais de V. Neste caso, $\overset{T}{\nabla}_\rho V^\alpha = V \lrcorner \omega^\alpha{}_\beta$ e $[\mathcal{L}_V \omega]^\alpha{}_\beta = \mathcal{L}_V \omega^\alpha{}_\beta$. Usando (4.83), obtem-se

$$[\mathcal{L}_V \omega]^\mu{}_\nu = \mathbb{D}(\overset{T}{\nabla}_\nu V^\mu) + V \lrcorner \Omega^\mu{}_\nu \qquad (4.85)$$

Aplicando-se (4.84) à métrica g encontra-se

$$[\mathcal{L}_V g]_{\alpha\beta} = V^\lambda \nabla_\lambda g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\lambda} \overset{T}{\nabla}_\beta V^\lambda + g_{\beta\lambda} \overset{T}{\nabla}_\alpha V^\lambda \qquad (4.86)$$

Um grupo uniparamétrico de difeomorfismos gerado por um campo vetorial V é chamado de uma simetria da variedade, se e somente se, $\mathcal{L}_V g = 0$ e $\mathcal{L}_V \nabla = 0$. Isto significa que "deslizando-se V " ao longo das curvas integrais de V, as distâncias entre os pontos permanecem constantes e as derivadas covariantes dos pontos originais vão nas derivadas covariantes dos novos pontos. De (4.85) e (4.86), se a conexão for métrica, tem-se que as condições para que V seja uma simetria são

$$g_{\alpha\beta} \overset{T}{\nabla}_\lambda V^\beta + g_{\beta\lambda} \overset{T}{\nabla}_\alpha V^\beta = 0 \tag{4.87}$$

$$\mathbb{D}(\overset{T}{\nabla}_\alpha V^\beta) + V \rfloor \Omega^\beta{}_\alpha = 0 \tag{4.88}$$

Observemos que se a variedade for Riemanniana, a primeira equação se reduz à equação de Killing $\nabla_\alpha V_\beta + \nabla_\beta V_\alpha = 0$ e a segunda é uma consequência da primeira.

5. FORMULAÇÃO DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN EM TERMOS DE FORMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES [7]

"Se non è vero, è bene trovato"

Como nos capítulos anteriores, o espaço-tempo será considerado como uma variedade quadri-dimensional V, de classe C^{∞}, dotada de uma métrica g com assinatura normal hiperbólica e uma conexão linear ∇. Todos os campos e aplicações definidas sobre V serão supostas de classe C^{∞}. Definiremos localmente um conjunto de 1-forma diferenciais linearmente independentes $\{\theta^{\alpha}\}$, $\alpha = 0,1,2,3,$ em termos das quais serão expressas as formas diferenciais definidas sobre V. Em particular, a métrica g será expressa por

$$g = g_{\alpha\beta}\, \theta^{\alpha} \otimes \theta^{\beta} \tag{5.1}$$

A base local para as formas diferenciais definidas sobre V se escreve

$$\{\mathbb{1}, \theta^{\mu}, \theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}, \theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}\wedge\theta^{\rho}, \theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}\wedge\theta^{\rho}\wedge\theta^{\lambda}\} \tag{5.2}$$

Vamos introduzir o pseudo-tensor totalmente antissimétrico $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$, com $\eta_{0123} = \sqrt{-g}$, e suas contrações

$$\eta_{\alpha\beta\mu} = \theta^{\nu}\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$\eta_{\alpha} = \frac{1}{3!}\,\theta^{\beta}\wedge\theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{5.3}$$

$$\eta = \frac{1}{4!}\,\theta^{\alpha}\wedge\theta^{\beta}\wedge\theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

η é o elemento de volume de V.

Pode-se mostrar sem dificuldades que as seguintes relações são válidas:

$$\theta^{\rho}\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \delta^{\rho}{}_{\nu}\eta_{\alpha\beta\mu} - \delta^{\rho}{}_{\mu}\eta_{\nu\alpha\beta} + \delta^{\rho}{}_{\beta}\eta_{\mu\nu\alpha} - \delta^{\rho}{}_{\alpha}\eta_{\beta\mu\nu} \tag{5.4a}$$

$$\theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\beta\mu} = \delta^{\rho}{}_{\mu}\eta_{\alpha\beta} + \delta^{\rho}{}_{\beta}\eta_{\mu\alpha} + \delta^{\rho}{}_{\alpha}\eta_{\beta\mu} \tag{5.4b}$$

$$\theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\beta} = \delta^{\rho}{}_{\beta}\eta_{\alpha} - \delta^{\rho}{}_{\alpha}\eta_{\beta} \tag{5.4c}$$

$$\theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha} = \delta^{\rho}{}_{\alpha}\eta \tag{5.4d}$$

Das expressões acima segue que

$$\eta_{\alpha}{}^{\beta}\wedge\Omega^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\eta_{\alpha}{}^{\beta}\wedge\theta^{\mu}\wedge\theta^{\nu}$$

$$= R\eta \tag{5.5}$$

que é a densidade escalar de curvatura de V.

Como consequência da condição métrica $Dg_{\mu\nu} = 0$, as formas definidas em (5.4a-d)satisfazem às seguintes relações:

(A) De $D(\eta^{\alpha\beta\mu\nu}\ \eta_{\alpha\beta\mu\nu}) = 0$ tem-se que

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \tag{5.6}$$

(B) $$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta\mu} = (\mathbb{D}\theta^{\nu})\,\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$$

ou $$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta\mu} = \Theta^{\nu}\,\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{5.7}$$

(C) $$\begin{aligned}\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left[(\mathbb{D}\theta^{\mu})\wedge\eta_{\alpha\beta\mu} - \theta^{\mu}\wedge\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta\mu}\right]\\ &= \Theta^{\mu}\wedge\eta_{\alpha\beta\mu}\\ &= \frac{1}{2}\,\mathcal{T}^{\mu}{}_{\lambda\rho}\,\theta^{\lambda}\wedge\theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\beta\mu}\\ &= \mathcal{T}^{\rho}{}_{\alpha\beta}\,\eta_{\rho} - \mathcal{T}^{\rho}{}_{\rho\beta}\,\eta_{\alpha} - \mathcal{T}^{\rho}{}_{\alpha\rho}\,\eta_{\beta}\end{aligned} \tag{5.8}$$

(D) $$\mathbb{D}\eta_{\alpha} = \Theta^{\mu}\wedge\eta_{\alpha\mu} = \mathcal{T}^{\mu}{}_{\alpha\mu}\,\eta \tag{5.9}$$

O nosso objetivo agora é construir uma Lagrangeana através da qual possamos obter as equações de Einstein-Cartan por um princípio variacional. Tal Lagrangeana deve ser linear e homogênea em $\Omega^{\mu\nu}$ e θ^{μ} e deve se reduzir à Lagrangeana da teoria de Einstein, no limite de torsão nula. Pode-se mostrar que qualquer 4-forma sobre V satisfazendo a estas duas condições deve ser proporcional a $\eta_{\mu\nu} \wedge \Omega^{\mu\nu}$. Como vimos em (4.5) esta expressão é idêntica a $R\eta$, onde R é o escalar de curvatura de V . Escreveremos então a 4-forma Lagrangeana do campo gravitacional, na teoria de Einstein-Cartan, sob a forma

$$8\pi\,\mathbb{L} = \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\wedge\Omega^{\mu\nu} \tag{5.10}$$

Esta Lagrangeana é independente da escolha das 1-forma $\{\theta^\alpha\}$ e portanto, é definida globalmente sobre V.

A integral de ação do campo gravitacional se escreve então

$$I = \int \mathbb{L} = \frac{1}{16\pi} \int \eta_{\mu\nu} \wedge \Omega^{\mu\nu} \tag{5.11}$$

Vamos supor por enquanto que a conexão não é métrica, isto é, que $Dg_{\alpha\beta}$ não é necessariamente nulo. Examinaremos quais as consequências que isto pode acarretar sobre a teoria.

Calculemos as variações da Lagrangeana L com relação às variáveis $(g_{\alpha\beta}, \theta^\mu, \omega^\lambda{}_\rho)$.

(A) Variação de L com relação a $\omega^\mu{}_\nu$

Observemos primeiramente que $\delta\omega^\mu{}_\nu$ é um tensor porque é a diferença entre duas conexões.

$$16\pi \underset{(\omega)}{\delta \mathbb{L}} = \delta(\eta_\mu{}^\nu \wedge d\omega^\mu{}_\nu) + \delta(\eta_\mu{}^\nu \wedge \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu)$$

$$= \delta(\eta_\mu{}^\nu \wedge d\omega^\mu{}_\nu) - (\mathbb{D}\eta_\alpha{}^\nu - d\eta_\alpha{}^\nu) \wedge \delta\omega^\alpha{}_\nu$$

Portanto,

$$16\pi \underset{(\omega)}{\delta \mathbb{L}} = -\mathbb{D}\eta_\alpha{}^\nu \wedge \delta\omega^\alpha{}_\nu + d(\eta_\alpha{}^\nu \wedge \delta\omega^\alpha{}_\nu) \tag{5.12}$$

onde usamos o fato de que as operações δ e d comutam, porque δ é uma variação local. O último termo em (5.12) é uma forma exata, e pode ser omitido na integral de ação.

(B) Variação de L com relação a θ^μ

$$16\pi \underset{(\theta)}{\delta \mathbb{L}} = \frac{1}{2}\,\delta(\theta^\lambda \wedge \theta^\rho)\,\eta_\mu{}^\nu{}_{\lambda\rho} \wedge \Omega^\mu{}_\nu$$

$$= (\theta^\lambda \wedge \delta\theta^\rho)\,\eta_\mu{}^\nu{}_{\lambda\rho} \wedge \Omega^\mu{}_\nu$$

donde

$$16\pi \underset{(\theta)}{\delta \mathbb{L}} = -\,\eta_{\lambda\alpha\beta} \wedge \Omega^{\alpha\beta} \wedge \delta\theta^\lambda \tag{5.13}$$

(C) Variação de L com relação a $g_{\mu\nu}$

$$16\pi \underset{(g)}{\delta \mathbb{L}} = \delta\left(g^{\nu\lambda}\sqrt{-g}\right)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\theta^\rho \wedge \theta^\sigma \wedge \Omega^\mu{}_\lambda$$

$$= \left(\sqrt{-g}\,\delta g^{\nu\lambda} + \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\delta g_{\alpha\beta}\right)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\theta^\rho \wedge \theta^\sigma \wedge \Omega^\mu{}_\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta_\mu{}^\lambda \wedge \Omega^\mu{}_\lambda\, g^{\alpha\beta} - \eta_\mu{}^\beta \wedge \Omega^\mu{}_\lambda\; g^{\lambda\alpha}\right)\delta g_{\alpha\beta}$$

ou

$$16\pi \underset{(g)}{\delta \mathbb{L}} = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\eta_\mu{}^\lambda - g^{\lambda\alpha}\eta_\mu{}^\beta - g^{\lambda\beta}\eta_\mu{}^\alpha\right) \wedge \Omega^\mu{}_\lambda\,\delta g_{\alpha\beta} \tag{5.14}$$

Segue então que a variação total da Lagrangeana pelas variações independentes de $g_{\alpha\beta}$, θ^μ e $\omega^\mu{}_\nu$ se escreve

$$8\pi\,\delta\mathbb{L} = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} - \mathbb{e}_\alpha \wedge \delta\theta^\alpha + \mathbb{C}^\alpha{}_\beta \wedge \delta\omega^\beta{}_\alpha \tag{5.15}$$

onde omitimos a forma exata de (5.12) e definimos as formas

$$\mathbb{E}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\eta^\sigma{}_\lambda - g^{\sigma\alpha}\eta^\beta{}_\lambda - g^{\sigma\beta}\eta^\alpha{}_\lambda\right) \wedge \Omega^\lambda{}_\sigma \tag{5.16}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\mu\nu} \wedge \Omega^\mu{}_\nu \tag{5.17}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = -\, \mathbb{D}\, \eta_{\alpha\beta} \tag{5.18}$$

Observemos que a 4-forma $E^{\alpha\beta}$ é simétrica: $E^{\alpha\beta} = E^{\beta\alpha}$.

Ocorre que nem todas as variações em (5.15) são independentes, porque uma variação nas formas θ^α induz variações nas componentes da métrica e nas formas de conexão. No entanto, podemos usar o princípio da mínima ação fazendo variações independentes da Lagrangeana com relação a $(g_{\alpha\beta}\,,\, \omega^\alpha{}_\beta)$ e $(\theta^\alpha\,,\, \omega^\alpha{}_\beta)$ o que resulta nos seguintes sistemas de equações:

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta} &= 0 \\ C_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} e_\alpha &= 0 \\ C_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Suponhamos que a variação total da Lagrangeana é consequência de uma variação das formas θ^λ dada por (4.62). Usando as expressões para $\delta\theta^\lambda$, $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta\omega^\mu{}_\nu$ dadas por (4.62, 67, 68), a variação total (5.15) se escreve

$$8\pi\, \delta\mathbb{L} = \frac{1}{2}\, \mathbb{E}^{\mu\nu}(\alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\mu}) - \alpha^\mu{}_\nu\, \theta^\nu \wedge \mathfrak{E}_\mu - \frac{1}{2}\, \mathbb{D}\alpha^\mu{}_\nu \wedge \mathbb{C}^\nu{}_\mu \tag{5.21}$$

ou

$$8\pi\,\delta\mathbb{L} = \mathbb{E}^{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu} - \alpha^{\mu}{}_{\nu}\,\theta^{\nu}\wedge \mathbb{e}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\alpha^{\mu}{}_{\nu}\,\mathbb{D}\mathbb{C}^{\nu}{}_{\mu} \tag{5.22}$$

A imposição de que a Lagrangeana $\mathbb{L}$ seja invariante por esta transformação conduz à identidade

$$\mathbb{E}^{\mu}{}_{\nu} = \theta^{\mu}\wedge \mathbb{e}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\mathbb{D}\mathbb{C}^{\mu}{}_{\nu} \tag{5.23}$$

Levando em conta este resultado, podemos concluir que os sistemas de equações (5.19) e (5.20) são equivalentes.

Neste ponto, vamos fazer uma análise dos sistemas de equações (5.19, 20). Consideremos o seguinte tipo de transformação sobre as formas de conexão

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} \longrightarrow \hat{\omega}^{\mu}{}_{\nu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} + \delta^{\mu}{}_{\nu}\,\lambda \tag{5.24}$$

onde λ é uma 1-forma escalar sobre V . Este tipo de transformação é denominada de transformação projetiva. Verifica-se sem dificuldades que este tipo de transformação mantém a Lagrangeana L invariante:

$$\begin{aligned}
16\pi\,\hat{\mathbb{L}} &= \hat{\eta}_{\alpha}{}^{\beta}\wedge \hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \\
&= \eta_{\alpha}{}^{\beta}\wedge \big(d\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \delta^{\alpha}{}_{\beta}\,d\lambda + \omega^{\alpha}{}_{\mu}\wedge\omega^{\mu}{}_{\beta} + \lambda\wedge\omega^{\mu}{}_{\beta}\,\delta^{\alpha}{}_{\mu} \\
&\qquad + \omega^{\alpha}{}_{\mu}\wedge\lambda\,\delta^{\mu}{}_{\beta} + \delta^{\alpha}{}_{\beta}\,\lambda\wedge\lambda \big) \\
&= \eta_{\alpha}{}^{\beta}\wedge \Omega^{\alpha}{}_{\beta} = 16\pi\,\mathbb{L}
\end{aligned}$$

Fazendo agora $\delta\omega^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}\lambda$ na variação da integral de ação, obtém-se $\lambda \wedge C^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$, o que implica na identidade $C^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$.

Consideremos a equação $C_{\alpha\beta} = -D\eta_{\alpha\beta} = 0$ e façamos $\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \lambda^{\alpha}{}_{\beta}$, onde $\gamma^{\alpha}{}_{\beta}$ são as formas da conexão Riemanniana de V. Então,

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} = 0 = d\eta^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\rho}{}_{\beta} \wedge \eta^{\alpha}{}_{\rho} - \omega^{\alpha}{}_{\rho} \wedge \eta^{\rho}{}_{\beta}$$

$$= \bar{\mathbb{D}}\eta^{\alpha}{}_{\beta} + \lambda^{\rho}{}_{\beta} \wedge \eta^{\alpha}{}_{\rho} - \lambda^{\alpha}{}_{\rho} \wedge \eta^{\rho}{}_{\beta}$$

onde $\bar{D}$ é a derivada exterior covariante calculada com as formas $\gamma^{\mu}{}_{\nu}$. Como se sabe, $\bar{D}\eta^{\alpha}{}_{\beta} = 0$ e portanto tem-se que

$$\lambda^{\alpha}{}_{\rho} \wedge \eta^{\rho}{}_{\beta} = \lambda^{\rho}{}_{\beta} \wedge \eta^{\alpha}{}_{\rho} \tag{5.25}$$

Mas, pode-se demonstrar que se $\{\lambda^{\mu}{}_{\nu}\}$ é uma coleção de 1-formas definidas sobre uma variedade dotada de uma métrica, então se a relação (5.25) for válida, tem-se que $\lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}\lambda$, onde λ é uma 1-forma com valores escalares. Logo, $C^{\alpha}{}_{\beta} = 0$ é equivalente a $\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \delta^{\alpha}{}_{\beta}\lambda$. Podemos concluir então que os sistemas de equações (5.19) e (5.20) não determinam univocamente as formas de conexão. Veremos mais adiante que esta liberdade por transformações projetivas pode ser removida, impondo-se que a conexão é métrica.

Introduzindo-se em (5.16) e (5.17) $\Omega^{\lambda}{}_{\sigma} = \frac{1}{2} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}\,\theta^{\mu} \wedge \theta^{\nu}$, obtém-se sem dificuldades

$$\mathbb{E}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha{}^\beta R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} - R_{\nu\alpha}{}^{\nu\beta} - R^{\nu\beta}{}_{\nu\alpha}\right)\eta$$
$$= E_\alpha{}^\beta \eta \qquad (5.26)$$

e

$$e_\alpha = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\beta R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} - R^{\mu\beta}{}_{\mu\alpha} - R^{\beta\mu}{}_{\alpha\mu}\right)\eta_\beta \qquad (5.27)$$

Vamos considerar agora a interação entre um campo clássico ϕ e o campo gravitacional. O campo ϕ será representado por uma p-forma do tipo σ com valores tensoriais; admitiremos que a 4-forma Lagrangeana associada com ϕ dependa localmente de ($g_{\alpha\beta}$, θ^λ , ϕ_A , $D\phi_A$). Escreveremos

$$\mathbb{L}_\phi = \mathcal{L}(\phi_A, \mathbb{D}\phi_A, g_{\alpha\beta}, \theta^\lambda)\eta \qquad (5.28)$$

onde $\mathcal{L}$ é uma função escalar.

Uma variação independente das variáveis conduz a

$$\delta\mathbb{L}_\phi = \frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \delta\theta^\lambda\wedge t_\lambda - \frac{1}{2}\delta\omega^\lambda{}_\beta\wedge \mathbb{S}_\alpha{}^\beta + \mathbb{L}^A\wedge\delta\phi_A \qquad (5.29)$$
$$+ \text{(forma exata)}$$

Supondo que esta variação é consequência de uma variação $\delta\theta^\lambda = \alpha^\lambda{}_\rho\,\theta^\rho$ nas formas θ^λ, de $\delta L_\phi = 0$, obtém-se a identidade

$$\eta T_\alpha{}^\beta = \theta^\beta\wedge t_\alpha - \frac{1}{2}\mathbb{D}\mathbb{S}_\alpha{}^\beta + \sigma_A{}^B{}_\alpha{}^\beta\,\mathbb{L}^A\wedge\phi_B \qquad (5.30)$$

A variação da ação total $I = \int (L + L_\phi)$ com relação a $(\phi_A\ ,\ g_{\alpha\beta}\ ,\ \omega^\mu{}_\nu)$ e $(\phi_A\ ,\ \theta^\lambda\ ,\ \omega^\mu{}_\nu)$ conduz aos seguintes conjuntos de equações:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_A &= 0 \\ \mathbb{E}^\alpha{}_\beta &= -8\pi T^\alpha{}_\beta \eta \\ \mathbb{C}^\alpha{}_\beta &= -8\pi \mathbb{S}^\alpha{}_\beta \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_A &= 0 \\ e_\alpha &= -8\pi t_\alpha \\ \mathbb{C}^\alpha{}_\beta &= -8\pi \mathbb{S}^\alpha{}_\beta \end{aligned} \tag{5.32}$$

Em virtude das identidades (5.23) e (5.30), estes dois sistemas de equações são equivalentes. Isto significa que para escrever as equações de campo da teoria de Einstein-Cartan, podemos usar a 4-forma simétrica $T^\alpha{}_\beta\eta$ de momentum-energia ou a 3-forma canônica t_α. A interpretação física dos termos de fonte destes sistemas pode ser inferida a partir das leis de conservação (consequência das identidades de Bianchi), como veremos depois.

Vamos impor agora que a conexão é métrica, isto é, que $Dg_{\alpha\beta} = 0$. Da equação $-C_{\alpha\beta} = D\eta_{\alpha\beta} = 8\pi S_{\alpha\beta}$ segue que

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta} = -\mathbb{S}_{\beta\alpha} \tag{5.33}$$

É possível se demonstrar que dada a métrica $g_{\alpha\beta}$ e a 3-forma $S_{\alpha\beta}$ definida sobre V, satisfazendo a equação de Cartan $C_{\alpha\beta} = 8\pi S_{\alpha\beta}$, dentre as conexões lineares definidas sobre V existe apenas uma satisfazendo a $Dg_{\alpha\beta} = 0$, se e somente se, $S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}$. Isto significa que se estas condições são válidas, a conexão linear sobre V é univocamente determinada. Como consequências, tem-se que $D\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ e $\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$.

Escrevamos as equações de Einstein-Cartan sob a forma

$$\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\lambda} \wedge \Omega^{\beta\lambda} = -8\pi\, t_\alpha \tag{5.34}$$

$$\eta_{\mu\nu\rho} \wedge \Theta^\rho = 8\pi\, \mathcal{S}_{\mu\nu} \tag{5.35}$$

Vamos introduzir a notação

$$t_\alpha = \eta_\beta\, t^\beta{}_\alpha \tag{5.36}$$

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \eta_\lambda\, S^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{5.37}$$

$$R^\mu{}_\nu = R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\nu}, \quad R = R^\mu{}_\mu \tag{5.38}$$

As equações (5.34) e (5.35) se reduzem a

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R = 8\pi\, t^\mu{}_\nu \tag{5.39}$$

$$\mathcal{T}^\alpha{}_{\beta\lambda} = 8\pi\, S^\alpha{}_{\beta\lambda} \tag{5.40}$$

onde $\mathcal{T}^\alpha{}_{\beta\lambda}$ é o tensor de torsão modificado, definido em (2.15). Estas equações são exatamente as equações (3.13) e (3.14).

De (5.40) tem-se que

$$\frac{1}{8\pi} \mathcal{T}^{\alpha}{}_{\beta\lambda} = S^{\alpha}{}_{\beta\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\beta} S^{\rho}{}_{\rho\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\lambda} S^{\rho}{}_{\beta\rho} \tag{5.41}$$

Introduzindo as formas

$$\Theta_{\alpha\beta} = \mathcal{T}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\, \eta_{\lambda} \quad , \quad \mathbb{S}^{\mu} = \frac{1}{2} S^{\mu}{}_{\lambda\rho}\, \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\rho} \tag{5.42}$$

a equação (5,35) fica equivalente a

$$\Theta_{\alpha\beta} = -8\pi\, \eta_{\alpha\beta\lambda} \wedge \mathbb{S}^{\lambda} \tag{5.43}$$

Por um cálculo direto, usando-se as identidades de Bianchi, verifica-se que

$$\mathbb{D}\, \mathbb{e}_{\alpha} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\rho\lambda}\, \Theta^{\lambda} \wedge \Omega^{\beta\rho} \tag{5.44}$$

ou, em termos de componentes

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\, e_{\alpha} = \Big[& -\mathcal{T}^{\lambda}{}_{\alpha\rho} \left(R^{\rho}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{\lambda} R \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\mathcal{T}^{\lambda}{}_{\beta\rho} R^{\beta\rho}{}_{\alpha\lambda} + 2\, \mathcal{T}^{\lambda}{}_{\lambda\rho} R^{\rho}{}_{\alpha} \right) \Big] \eta \end{aligned} \tag{5.45}$$

O termo da direita de (5.44) pode ser rearranjado, de modo que

$$\mathbb{D}\, e_{\alpha} = \mathcal{T}^{\lambda}{}_{\alpha\rho}\, \theta^{\rho} \wedge e_{\lambda} - \frac{1}{2} R^{\beta\lambda}{}_{\alpha\rho}\, \theta^{\rho} \wedge \mathbb{C}_{\beta\lambda} \tag{5.46}$$

Calculemos a derivada exterior covariante de $C_{\alpha\beta}$:

$$\mathbb{D}\,\mathbb{C}_{\alpha\beta} = -\mathbb{D}\left(\eta_{\alpha\beta\rho}\wedge\Theta^{\rho}\right) = \eta_{\alpha\beta\rho}\wedge\Omega^{\rho}{}_{\lambda}\wedge\theta^{\lambda}$$

$$= -\left(\delta^{\lambda}{}_{\rho}\,\eta_{\alpha\beta} + \delta^{\lambda}{}_{\beta}\,\eta_{\rho\alpha} + \delta^{\lambda}{}_{\alpha}\,\eta_{\beta\rho}\right)\wedge\Omega^{\rho}{}_{\lambda}$$

$$= \eta_{\alpha\rho}\wedge\Omega^{\rho}{}_{\beta} - \eta_{\beta\rho}\wedge\Omega^{\rho}{}_{\alpha}$$

Mas,

$$\eta_{\alpha\rho}\wedge\Omega^{\rho}{}_{\beta} = \theta_{\beta}\wedge\mathbb{e}_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\,\eta_{\rho\sigma}\wedge\Omega^{\rho\sigma}$$

$$\eta_{\beta\rho}\wedge\Omega^{\rho}{}_{\alpha} = \theta_{\alpha}\wedge\mathbb{e}_{\beta} - g_{\alpha\beta}\,\eta_{\rho\sigma}\wedge\Omega^{\rho\sigma}$$

portanto

$$\mathbb{D}\,\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \theta_{\beta}\wedge\mathbb{e}_{\alpha} - \theta_{\alpha}\wedge\mathbb{e}_{\beta} \tag{5.47}$$

Usando as equações de Cartan, as expressões (5.46) e (5.47) conduzem as identidades

$$\mathbb{D}\,t_{\alpha} = \tau^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\,\theta^{\beta}\wedge t_{\lambda} - \frac{1}{2}R^{\lambda\rho}{}_{\alpha\sigma}\,\theta^{\sigma}\wedge\mathbb{S}_{\lambda\rho} \tag{5.48}$$

$$= \eta\left(\tau^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\,t^{\beta}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}S^{\lambda}{}_{\rho\sigma}\,R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\lambda}\right) \tag{5.48a}$$

e

$$\mathbb{D}\,\mathbb{S}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha}\wedge t_{\beta} - \theta_{\beta}\wedge t_{\alpha} \tag{5.49}$$

Da expressão (5.48) tem-se que

$$\nabla_\lambda t^\lambda{}_\alpha = S^\lambda{}_{\alpha\rho} R^\rho{}_\lambda + \frac{1}{2} S^\beta{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\beta\alpha}$$
$$+ S^\lambda{}_{\rho\lambda} \left(R^\rho{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\rho{}_\alpha R \right) \tag{5.50}$$

A identidade (5.23) nos dá uma relação entre o tensor momentum-energia canônico $t_{\alpha\beta}$ e o tensor momentum-energia métrico $T_{\alpha\beta}$

$$\eta T_\alpha{}^\beta = \theta^\beta \wedge \eta_\lambda t^\lambda{}_\alpha - \frac{1}{2} \mathbb{D} \left(\eta_\lambda S^\lambda{}_\alpha{}^\beta \right) \tag{5.51a}$$

ou

$$T_\alpha{}^\beta = t^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} \nabla_\rho \left(S^\rho{}_{\alpha\lambda} \right) \tag{5.51b}$$

A partir deste ponto vamos chamar de σ a uma representação do grupo de Lorentz em R^N, e $\sigma_A{}^B{}_\mu{}^\nu$ os elementos de matriz do homomorfismo induzido nas correspondentes álgebras de Lie. A matriz $\sigma_{\mu\nu} = (\sigma_A{}^B{}_\mu{}^\nu)$ é antissimétrica, $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu}$. Como a teoria é métrica, as formas de conexão referidas aos co-referenciais $\{\theta^\alpha\}$, duais dos referenciais ortonormais $\{e_\lambda\}$, são também antissimétricas.

Nesta formulação, não é mais possível se considerar variações na métrica porque tudo está sendo referido a referenciais ortonormais, e portanto a variação mais geral na densidade Lagrangeana L_ϕ é da forma

$$\delta \mathbb{L}_\phi = \delta\theta^\lambda \wedge t_\lambda + \frac{1}{2} \mathbb{S}_{\alpha\beta} \wedge \delta\omega^{\alpha\beta} + \mathbb{L}^A \delta\phi_A$$
$$+ \text{(FORMA EXATA)} \tag{5.52}$$

onde

$$t_\lambda = \left(\mathcal{L}_\phi \delta^\rho{}_\lambda - \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial(\nabla_\rho \phi)} \nabla_\lambda \phi\right) \eta_\rho \tag{5.53}$$

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial(\nabla_\lambda \phi)} \sigma_{\alpha\beta} \phi \, \eta_\lambda \tag{5.54}$$

$$\mathbb{L}^A = \eta \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi_A} - \mathbb{D}\left(\eta_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \nabla_\lambda \phi}\right) \tag{5.55}$$

As expressões (5.53) e (5.54) identificam as formas t_λ e $S_{\alpha\beta}$ como as formas canônicas de densidade de momentum-energia e spin, respectivamente. Esta interpretação dos termos de fonte das equações de Einstein-Cartan pode ser feita ainda de outra forma, como se segue. Chamamemos de v^λ um campo de raios vetores, que por definição, satisfazem a $D v^\lambda = \theta^\lambda$. Na aproximação da relatividade especial tal campo de vetores sempre existe e $Dt_\lambda = 0$. Segue então de (5.48) que $D(x_\alpha t_\beta - x_\beta t_\alpha + S_{\alpha\beta}) = 0$, o que sugere a identificação feita acima.

Observemos que as identidades (5.46) e (5.47) são as leis de conservação para o momento angular e para o momentum-energia, e correspondem às expressões (3.20) e (3.23).

Da mesma forma que na teoria de Einstein, as simetrias do espaço-tempo de Riemann-Cartan dão origem a leis de conservação na forma de divergências ordinárias. Consideremos a 3-forma

$$j = v^\alpha t_\alpha + \frac{1}{2} \overset{T}{\nabla}{}^\lambda v^\rho \, \mathbb{S}_{\rho\lambda} \tag{5.56}$$

Tem-se então que

$$d j = \overset{T}{\mathbb{D}} (V^{\alpha} t_{\alpha}) + \overset{T}{\mathbb{D}} (\tfrac{1}{2} \overset{T}{\nabla} V^{\rho} \mathcal{S}_{\rho\lambda})$$

$$= V^{\alpha} \left(\overset{T}{\mathbb{D}} t_{\alpha} - \tfrac{1}{2} R^{\lambda\rho}{}_{\alpha\sigma} \, \theta^{\sigma} \wedge \mathcal{S}_{\lambda\rho} \right) + \tfrac{1}{2} \overset{T}{\nabla}{}^{\lambda} V^{\rho} \left(\overset{T}{\mathbb{D}} \mathcal{S}_{\rho\lambda} \right.$$

$$\left. - \theta_{\rho} \wedge t_{\lambda} + \theta_{\lambda} \wedge t_{\rho} \right) + \tfrac{1}{2} \left(\overset{T}{\nabla}{}^{\rho} V^{\lambda} + \overset{T}{\nabla}{}^{\lambda} V^{\rho} \right) \theta_{\rho} \wedge t_{\lambda}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left(\overset{T}{\mathbb{D}} \overset{T}{\nabla}{}^{\lambda} V^{\rho} + V \perp \Omega^{\rho\lambda} \right) \wedge \mathcal{S}_{\rho\lambda}$$

Das identidades (5.48) e (5.50), e das condições (4.87) e (4.88) segue que, se o campo vetorial V gera um grupo uniparamétrico de simetria de V , então

$$d j = 0 \tag{5.57}$$

Esta lei de conservação tem significado no limite da relatividade especial. Se V for o gerador de translações, então $\nabla^{\lambda} V_{\rho} = 0$, e j fica igual à projeção da densidade de momentum-energia sobre V. Se $V^{\alpha} = \lambda^{\alpha}{}_{\rho} X^{\rho}$, onde $(\lambda_{\alpha\rho})$ é uma matriz constante antissimétrica, e (X^{ρ}) é um raio vetor, então $j = \lambda_{\alpha\rho} j^{\alpha\rho}$ onde $j^{\alpha\rho} = X^{\alpha} t^{\rho} - X^{\rho} t^{\alpha} + S^{\alpha\rho}$ é a densidade de momento angular total.

Para finalizar este capítulo, vamos fazer uma interpretação da torsão segundo Trautman . Consideremos um campo de raios vetores $\mathfrak{v}^{\lambda}$ definidos por $D\mathfrak{v}^{\lambda} = \theta^{\lambda}$. A integração desta equação ao longo de uma curva fechada mostra que o vetor $\mathfrak{v}^{\lambda}$, em geral, não volta à sua posição original. Para uma curva infinitesimal fechada, a variação do raio vetor é dada por $\delta \mathfrak{r}^{\lambda} = (\Omega^{\lambda}{}_{\nu} \mathfrak{r}^{\nu} + \Theta^{\lambda}) \times$ (ELEMENTO DE ÁREA). Portanto, a curvatura induz uma transformação de Lorentz e a torsão, uma translação sobre o raio vetor.

6. A TEORIA CLÁSSICA DOS FLUIDOS COM SPIN E AS EQUAÇÕES DOS CAMPOS CLÁSSICOS EM GEOMETRIAS DE EINSTEIN-CARTAN

Neste capítulo, apresentaremos uma descrição clássica para um fluido perfeito, constituído de partículas com spin. Os tensores canônicos associados com este fluido serão construidos com base em hipóteses físicas porque, como se sabe, não existe uma descrição Lagrangeana satisfatória da "poeira com spin". Analisaremos também o campo vetorial massivo e o campo espinorial de Dirac em geometrias de Einstein.Cartan. O caso do campo vetorial será apresentado apenas como um exemplo, no qual algumas características da interação gravitacional de campos clássicos surgem claramente,e uma situação limite interessante pode ser obtida. O caso do campo de Dirac será estudado em detalhes, porque os resultados obtidos serão usados no próximo capítulo.

Teoria Clássica de Fluidos com Spin [18]

Num espaço-tempo de Riemann-Cartan consideremos um campo de velocidades $v = (v^{\alpha})$, satisfazendo a $v^{\alpha}v_{\alpha} = 1$, e definamos a 3-forma u por

$$u = v \rfloor \eta = v^{\alpha} \eta_{\alpha} \tag{6.1}$$

Para qualquer campo tensorial ϕ_A definido sobre V , definamos a "derivada de partícula " de ϕ_A com relação a v por

$$\dot{\phi}_A \, \eta = \mathbb{D}(\phi_A \, u) \tag{6.2}$$

ou equivalentemente

$$\dot{\phi}_A = v^{\alpha} \nabla_{\alpha} \phi_A + \phi_A \nabla_{\alpha} v^{\alpha} \tag{6.3}$$

Se ρ é um campo escalar, a condição $\dot{\rho} = 0$ é equivalente à lei de conservação $d(\rho u) = 0$.

Consideremos agora uma poeira com spin, isto é, um meio contínuo caracterizado por sua velocidade v, a densidade de momentum-energia P_{α}, e a densidade de spin $S_{\alpha\beta}$. As 3-forma de momentum-energia e spin se escrevem

$$t_{\alpha} = P_{\alpha} u \,, \qquad \mathbb{S}_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \, u \tag{6.4}$$

respectivamente. De (5.50), segue que

$$\mathbb{D}(S_{\alpha\beta} \, u) = \theta_{\alpha} \wedge P_{\beta} u - \theta_{\beta} \wedge P_{\alpha} u$$

ou

$$\dot{S}_{\alpha\beta} \eta = (P_{\beta} v_{\alpha} - P_{\alpha} v_{\beta}) \eta$$

isto é,

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = P_{\beta} v_{\alpha} - P_{\alpha} v_{\beta} \tag{6.5}$$

Fazendo

$$\rho = P_\nu v^\nu \tag{6.6}$$

segue de (6.5) que

$$P_\beta = v_\beta \rho + v_\alpha \dot{S}^\alpha{}_\beta \tag{6.7}$$

Substituindo este resultado em (6.5), obtém-se a equação de movimento para o spin

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = v_\alpha v_\lambda \dot{S}^\lambda{}_\beta - v_\beta v_\lambda \dot{S}^\lambda{}_\alpha \tag{6.8}$$

Observemos que as equações (6.7) e (6.8) são consequências da identidade (5.49).

A equação para o movimento de translação das partículas pode ser obtida a partir da identidade (5.48).

$$\mathbb{D}(P_\alpha u) = \tau^\beta{}_{\alpha\lambda}\, \theta^\lambda \wedge (P_\beta u) + \frac{1}{2} R^{\lambda\rho}{}_{\alpha\beta}\, \theta^\beta \wedge (S_{\lambda\rho} u)$$

donde segue que

$$\dot{P}_\alpha = \tau^\beta{}_{\alpha\lambda} v^\lambda P_\beta + \frac{1}{2} R^{\lambda\rho}{}_{\alpha\beta} v^\beta S_{\lambda\rho} \tag{6.9}$$

Esta equação é a generalização da equação de Papapetrou[25]. Se a poeira não tiver spin, $S_{\lambda\rho} = 0$ e $\tau^\beta{}_{\alpha\beta} = 0$, as equações do movimento se reduzem a $\dot{\rho} = 0$ e $\dot{P}_\alpha = 0$. Isto implica em que o campo v é geodésico, $Dv^\mu \wedge u = 0$.

A descrição de uma "poeira com spin" é essencialmente hidrodinâmica. Nesta descrição, chamando de v^α a 4-velocidade das partículas, a densidade de momentum e a densidade de spin são transportadas com esta velocidade. Anotando por p a pressão isotrópica e por h_α a densidade de entalpia, o tensor canônico de momentum-energia pode ser escrito sob a forma

$$t_{\alpha\beta} = h_\alpha v_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{6.10}$$

e a densidade de spin

$$S^\lambda{}_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} v^\lambda \tag{6.11}$$

Usando-se a identidade (4.50) pode-se mostrar sem dificuldades que

$$h_\alpha = (\rho + p) v_\alpha - v^\lambda \nabla_\mu (v^\mu S_{\lambda\alpha}) \tag{6.12}$$

onde

$$\rho = t_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \tag{6.13}$$

é a densidade de energia no sistema de repouso da partícula. Segue então que

$$t_{\alpha\beta} = [(\rho + p) v_\alpha - v^\lambda \nabla_\mu (v^\mu S_{\lambda\alpha})] v_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{6.14}$$

Observemos finalmente que o tensor de spin

$S_{\alpha\beta} = - S_{\beta\alpha}$ tem seis componentes independentes, e que as equações de movimento não podem ser integradas, a menos que sejam impostas condições suplementares sobre $S_{\alpha\beta}$. As condições mais usadas[19,20] são

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}\, v^{\beta} &= 0 \\ S_{\alpha\beta}\, P^{\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Campos Vetoriais Massivos como Fontes de Torsão

Seja $\psi(x) = \{\psi_{\alpha}(x)\}$, $\alpha = 0,1,2,3$, um campo vetorial massivo. Escolhendo uma base $\{\theta^{\beta}\}$, o diferencial exterior covariante $D\psi_{\alpha}$ se escreve $(\nabla_{\lambda}\psi_{\alpha})\theta^{\lambda}$, onde ∇ é operador de derivação covariante. O dual de $D\psi_{\alpha}$, se escreve $\overset{*}{D}\psi_{\alpha} = (\nabla_{\lambda}\psi_{\alpha})\eta^{\lambda}$ e, portanto, a densidade Lagrangeana fica sob a forma

$$\mathbb{L}_{\psi} = -\frac{1}{2}\overset{*}{\mathbb{D}}\psi_{\alpha} \wedge \mathbb{D}\psi_{\alpha} - \frac{1}{2} m^2 \psi_{\alpha}\psi^{\alpha}\eta \tag{6.16}$$

$$= -\frac{1}{2}(\nabla_{\lambda}\psi_{\alpha})\eta^{\lambda} \wedge (\nabla_{\rho}\psi^{\alpha})\theta^{\rho} - \frac{1}{2} m^2 \psi_{\alpha}\psi^{\alpha}\eta$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_{\lambda}\psi_{\alpha}\nabla^{\lambda}\psi^{\alpha} - m^2\psi_{\alpha}\psi^{\alpha})\eta \equiv \mathcal{L}_{\psi}\,\eta \tag{6.17}$$

De (5.54) com $\sigma^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\delta^{\alpha}_{\mu}\,\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\,\delta^{\beta}_{\mu})$ tem-se que

$$\mathbb{S}_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \nabla_{\lambda}\psi_{\rho}}\,(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu})\psi_{\sigma}\eta_{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\,(\psi_{\mu}\nabla^{\lambda}\psi_{\nu} - \psi_{\nu}\nabla^{\lambda}\psi_{\mu})\,\eta_{\lambda} \tag{6.18}$$

Usando agora $S_{\mu\nu} = S^{\lambda}_{\ \mu\nu}\, \eta_{\lambda}$ conforme (5.37), segue que o tensor de spin associado com o campo ψ se escreve

$$S^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\psi_{\mu}\nabla^{\lambda}\psi_{\nu} - \psi_{\nu}\nabla^{\lambda}\psi_{\mu}\right) \tag{6.19}$$

Substituindo este resultado na expressão (5.41), obtemos a expresão do tensor de torsão, gerado pelo campo vetorial ψ:

$$\frac{1}{8\pi}\, \mathcal{T}^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[\psi_{\mu}\nabla^{\lambda}\psi_{\nu} - \psi_{\nu}\nabla^{\lambda}\psi_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\mu}\left(\psi_{\rho}\nabla^{\rho}\psi_{\nu} - \psi_{\nu}\nabla^{\rho}\psi_{\rho}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\nu}\left(\psi_{\mu}\nabla^{\rho}\psi_{\rho} - \psi_{\rho}\nabla^{\rho}\psi_{\mu}\right)\Big] \tag{6.20}$$

Observemos que a expressão (6.20) acima não representa a solução da equação $8\pi\, S_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\lambda} \wedge \Theta^{\lambda}$, porque o termo da direita ainda contém o tensor de torsão. Mas, como vimos anteriormente, as formas de conexão $\omega^{\mu}_{\ \nu}$ podem sempre ser separadas em uma parte $\gamma^{\mu}_{\ \nu}$, associada com os símbolos de Christoffel (parte Riemanniana) e uma parte de correção $\lambda^{\mu}_{\ \nu}$. De (3.35) e (3.36), tem-se que

$$\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\rho}\,\mathcal{T}^{\rho}_{\ \nu\beta} + g_{\beta\rho}\,\mathcal{T}^{\rho}_{\ \mu\nu} + g_{\nu\rho}\,\mathcal{T}^{\rho}_{\ \beta\mu}\right)\theta^{\beta}$$

Substituindo nesta expressão o tensor de torsão dado por (4.20) obtemos

$$\lambda^{\mu}_{\ \nu} = \left(\psi_{\nu}\bar{\nabla}^{\mu} - \psi^{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\right)\psi_{\rho}\,\theta^{\rho} + \left(\psi_{\nu}\bar{\mathbb{D}}\psi^{\mu} - \psi^{\mu}\bar{\mathbb{D}}\psi_{\nu}\right)$$
$$- \psi_{\rho}\left(\bar{\nabla}^{\mu}\psi_{\nu} - \bar{\nabla}_{\nu}\psi^{\mu}\right)\theta^{\rho} + \bar{\nabla}_{\lambda}\psi^{\lambda}\left(\psi^{\mu}\theta_{\nu} - \psi_{\nu}\theta^{\mu}\right)$$
$$+ \psi_{\lambda}\left(\bar{\nabla}^{\lambda}\psi^{\mu}\theta_{\nu} - \bar{\nabla}^{\lambda}\psi_{\nu}\theta^{\mu}\right) + \xi^{\mu}_{\ \nu} \tag{6.21}$$

onde as quantidades com barra são calculadas com a parte Riemanniana da conexão, e a 1-forma $\xi^{\mu}{}_{\nu}$ é constituída de termos quadráticos nas componentes do campo vetorial, e lineares em $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Observemos que se $\xi^{\mu}{}_{\nu} = 0$, as formas $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$ e, consequentemente as 2-forma da torsão $\Theta^{\mu} = \lambda^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}$, podem ser calculadas desde que a métrica seja conhecida. A forma $\xi^{\mu}{}_{\nu}$ tem uma expressão muito complicada, e não conseguimos obter uma situação na qual esta condição é satisfeita.

A equação de movimento que se obtém para o campo ψ, a partir da Lagrangeana (6.17), pode ser escrita sob a forma

$$\bar{\nabla}^{\lambda}\bar{\nabla}_{\lambda}\psi^{\mu} - m^2\psi^{\mu} = 8\pi g^{\alpha\beta}\Big[2K^{\rho}{}_{\alpha[\beta}\bar{\nabla}_{\rho]}\psi^{\mu} + \bar{\nabla}_{\alpha}\left(K^{\mu}{}_{\beta\nu}\psi^{\nu}\right)\Big] \tag{6.22}$$

a qual é claramente não-linear nas componentes de campo e em suas derivadas. O termo não-linear representa uma auto-interação do campo vetorial, e somos conduzidos a interpretar a torsão, gerada pelo campo ψ, como uma consequência desta auto-interação.

Retornando à expressão (6.20), notemos que no caso em que os efeitos de curvatura podem ser desprezados e o campo ψ satisfaz a $\partial^{\alpha}\psi_{\alpha} = 0$, podemos escrever que

$$\frac{1}{8\pi}\tau^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\psi_{\mu}\partial^{\rho}\psi_{\nu} - \psi_{\nu}\partial^{\rho}\psi_{\mu}\right) + \frac{1}{4}\partial^{\lambda}\left(\delta^{\rho}{}_{\nu}\psi_{\lambda}\psi_{\mu} - \delta^{\rho}{}_{\mu}\psi_{\lambda}\psi_{\nu}\right) \tag{6.23}$$

Nesta expressão, o primeiro termo da direita é a densidade de spin usual (relatividade especial), e o segundo termo é uma divergência total que pode ser desprezada.

O Campo de Dirac como Fonte de Torsão [7, 21]

Seja ψ uma o-forma com valores espinoriais e $\{\gamma^\mu\}$ um conjunto de quatro matrizes 4×4 que satisfazem à relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} \mathbb{1} \tag{6.24}$$

De acordo com (4.63), definiremos o diferencial exterior covariante da 0-forma ψ por

$$\mathbb{D}\Psi = d\Psi + \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \Psi \tag{6.25}$$

e para o espinor conjugado $\overline{\psi} = \gamma^0 \psi^+$ por

$$\mathbb{D}\overline{\Psi} = d\overline{\Psi} - \overline{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \tag{6.27}$$

onde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{8}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \tag{6.28}$$

Definamos as 3-forma

$$\xi = \gamma_\lambda \eta^\lambda \tag{6.29}$$

$$\zeta = \gamma_\lambda \theta^\lambda \tag{6.30}$$

Tem-se então que

$$\mathbb{D}\xi = \gamma^\lambda \left(\zeta^\alpha{}_{\alpha\beta}\, \delta^\beta_\lambda\, \eta \right) = \zeta^\alpha{}_{\alpha\beta}\, \theta^\beta \wedge \xi \tag{6.31}$$

Anotando por ∇_α o operador de derivação covariante de espinores em variedade de Riemann-Cartan, podemos escrever que

$$\mathbb{D}\Psi = (\nabla_\alpha \Psi)\,\theta^\alpha \tag{6.32}$$

Definamos o dual de $D\psi$ por

$$\overset{*}{\mathbb{D}}\Psi = (\nabla_\alpha \Psi)\,\eta^\alpha \tag{6.33}$$

Então

$$\begin{aligned} \xi \wedge \mathbb{D}\Psi &= \gamma_\mu \nabla_\lambda \Psi \;\eta^\mu \wedge \theta^\lambda \\ &= -\left(\gamma^\lambda \nabla_\lambda \Psi\right)\eta \end{aligned} \tag{6.34}$$

e

$$\zeta \wedge \overset{*}{\mathbb{D}} \psi = (\gamma^{\lambda} \nabla_{\lambda} \psi) \eta \tag{6.35}$$

de modo que a seguinte relação é válida

$$-\zeta \wedge \mathbb{D} \psi = \zeta \wedge \overset{*}{\mathbb{D}} \psi = (\gamma^{\lambda} \nabla_{\lambda} \psi) \eta \tag{6.36}$$

Escreveremos a 4-forma Lagrangeana, associada com o campo de Dirac, sob a forma

$$\mathbb{L} = -\frac{i}{2} \left\{ \overline{\psi} \zeta \wedge \mathbb{D} \psi + \mathbb{D} \overline{\psi} \wedge \zeta \psi \right\} - m \overline{\psi} \psi \eta \tag{6.37}$$

(Note que em L acima omitimos, por enquanto, o fator $\hbar c$).

Usando (5.31) e (5.33) tem-se que

$$\mathbb{L} = -\frac{i}{2} \left\{ -\overline{\psi} (\gamma^{\lambda} \nabla_{\lambda} \psi) + (\nabla_{\lambda} \overline{\psi}) \gamma^{\lambda} \psi \right\} \eta - m \overline{\psi} \psi \eta$$
$$= \mathcal{L} \eta$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left\{ \overline{\psi} \gamma^{\lambda} \nabla_{\lambda} \psi - (\nabla_{\lambda} \overline{\psi}) \gamma^{\lambda} \psi \right\} - m \overline{\psi} \psi \tag{6.38}$$

As equações para os campos ψ e $\overline{\psi}$ podem ser obtidas a partir de (5.55), e o resultado é

$$\zeta \wedge \mathbb{D} \psi - \mathbb{D}(\zeta \psi) = -2im \psi \eta \tag{6.39}$$

$$(\mathbb{D}\bar{\Psi})\wedge\xi + \mathbb{D}(\bar{\Psi}\xi) = -2im\,\bar{\Psi}\eta \tag{6.40}$$

Destas equações segue que a corrente

$$j = \bar{\Psi}\,\xi\,\Psi \tag{6.41}$$

é conservada, isto é

$$dj = 0 \tag{6.42}$$

As variações independentes da 4-forma Lagrangeana (6.37), com relação a $\omega^{\alpha}{}_{\beta}$ e θ^{α}, conduzem a

$$\underset{(\theta^{\alpha})}{\delta \mathbb{L}} = \frac{i}{2}\,\delta\theta^{\alpha}\wedge\left[(\overset{*}{\mathbb{D}}\bar{\Psi})\gamma_{\alpha}\Psi - \bar{\Psi}\gamma_{\alpha}\overset{*}{\mathbb{D}}\Psi\right]$$

$$\underset{(\omega^{\alpha}{}_{\beta})}{\delta \mathbb{L}} = -\frac{i}{2}\,\delta\omega^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\,\bar{\Psi}\left(\xi\,\sigma_{\alpha}{}^{\beta} + \sigma_{\alpha}{}^{\beta}\,\xi\right)\Psi$$

De acordo com (5.29), $\underset{(\theta^{\alpha})}{\delta L} = \delta\theta^{\alpha}\wedge t_{\alpha}$ e $\underset{(\omega^{\alpha}{}_{\beta})}{\delta L} = -\frac{1}{2}\,\delta\omega^{\alpha}{}_{\beta}\wedge S_{\alpha}{}^{\beta}$, onde t_{α} é a forma canônica de momentum-energia e $S_{\alpha}{}^{\beta}$ é a 3-forma canônica de spin. Das expressões acima segue que

$$t_{\alpha} = \frac{i}{2}\left[(\overset{*}{\mathbb{D}}\bar{\Psi})\gamma_{\alpha}\Psi - \bar{\Psi}\gamma_{\alpha}\overset{*}{\mathbb{D}}\Psi\right] \tag{6.43}$$

e

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = i\bar{\Psi}\left(\xi\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}\xi\right)\Psi \tag{6.44}$$

Introduzindo $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, usando as relações

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - g_{\alpha\mu}\gamma_\nu\right) \\ \gamma_\alpha\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\gamma_\alpha &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\gamma_5\gamma^\rho \\ i\gamma_5\gamma^\lambda &= \frac{1}{3!}\epsilon^{\lambda\beta\alpha\rho}\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\rho \end{aligned} \tag{6.45}$$

e fazendo $S_{\alpha\beta} = S^\lambda{}_{\alpha\beta}\,\eta_\lambda$, segue que

$$S^\lambda{}_{\alpha\beta} = -\frac{i}{4}\epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\rho}\,\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\rho\Psi \tag{6.46}$$

A partir deste ponto, vamos utilizar as tetradas introduzidas em (4.44). Escreveremos a densidade Lagrangeana do campo de Dirac sob a forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left\{\frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^A\nabla_A\Psi - \nabla_A\bar{\Psi}\gamma^A\Psi\right) - m\bar{\Psi}\Psi\right\} \tag{6.47}$$

onde $A = 1,2,3,4$, e $\sqrt{-g} = \det(e^\mu{}_{(A)})$.

Calculemos explicitamente a quantidade $\gamma^A\nabla_A\psi$, que aparece em (6.47). De (6.25) e (6.26), tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla_A\Psi &= \partial_A\Psi + \Gamma^C{}_{AB}\,\sigma_C{}^B\,\Psi \\ &= \partial_A\Psi - \frac{1}{4}\Gamma_{ABC}\gamma^B\gamma^C\Psi \end{aligned} \tag{6.48}$$

e portanto,

$$\gamma^A \nabla_A \Psi = \gamma^A \partial_A \Psi - \frac{1}{4} \Gamma_{ABC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C$$

Mas, as seguintes relações podem ser demonstradas sem dificuldades

$$\gamma^A \gamma^B \gamma^C = \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} + g^{AB} \gamma^C + g^{BC} \gamma^A - g^{AC} \gamma^B \tag{6.49}$$

$$\gamma^{[A} \gamma^{|B|} \gamma^{C]} = \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \tag{6.50}$$

Então, usando (4.48), segue que

$$\Gamma_{ABC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C = \Gamma_{[ABC]} \gamma^A \gamma^B \gamma^C + 2 \gamma^A g^{CB} \Gamma_{CBA} \tag{6.51}$$

Com este resultado, tem-se que

$$\gamma^A \nabla_A \Psi = \gamma^A \left(\partial_A - \frac{1}{4} \Gamma_{[ABC]} \gamma^B \gamma^C - \frac{1}{2} g^{BC} \Gamma_{BCA} \right) \Psi \tag{6.52}$$

Usando agora que $\Gamma_{[ABC]} = - \Lambda_{[ABC]} - K_{[ABC]}$, e $\Gamma_{A(BC)} = 0$, a expressão (6.52) se escreve

$$\gamma^A \nabla_A \Psi = \gamma^A \left(\partial_A + \frac{1}{4} \Lambda_{[ABC]} \gamma^B \gamma^C + \frac{1}{4} K_{[ABC]} \gamma^B \gamma^C \right.$$
$$\left. + \Lambda^B{}_{AB} - \frac{1}{2} K^B{}_{AB} \right) \Psi \tag{6.53}$$

Observemos que todo o segundo membro de (6.53) fica determinado quando as tetradas forem escolhidas e a contorsão for dada.

Anotando por $\overline{\nabla}_\mu$ a derivação covariante com relação à parte Riemanniana da conexão, tem-se que

$$\overline{\nabla}_A \Psi = \partial_A \Psi + \frac{1}{4} \Lambda_{[ABC]} \gamma^B \gamma^C \Psi \tag{6.54}$$

de modo que a expressão (6.53) pode ser escrita sob a forma

$$\gamma^A \nabla_A \Psi = \gamma^A \left(\overline{\nabla}_A + \frac{1}{4} K_{[ABC]} \gamma^B \gamma^C - \frac{1}{2} K^B{}_{BA} \right) \Psi \tag{6.55}$$

Com estes resultados, a densidade Lagrangeana (6.47) se escreve

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \left(\overline{\Psi} \gamma^A \overline{\nabla}_A \Psi - \overline{\nabla}_A \overline{\Psi} \gamma^A \Psi \right) - m \overline{\Psi} \Psi \right\} - \sqrt{-g} \frac{i}{4} K_{ABC} \overline{\Psi} \gamma^{[C} \gamma^B \gamma^{A]} \Psi \tag{6.56}$$

ou

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \left(\overline{\Psi} \gamma^A \partial_A \Psi - \partial_A \overline{\Psi} \gamma^A \Psi \right) - m \overline{\Psi} \Psi \right\} + \sqrt{-g} \frac{i}{4} \Gamma_{ABC} \overline{\Psi} \gamma^{[C} \gamma^B \gamma^{A]} \Psi \tag{6.57}$$

Das equações de Euler-Lagrange segue que a equação de Dirac pode ser escrita sob as seguintes formas:

$$\left(\gamma^A \nabla_A + \frac{1}{2} K^B{}_{BA} \gamma^A\right) \Psi = -i m \Psi \tag{6.58}$$

$$\left(\gamma^A \overline{\nabla}_A + \frac{1}{4} K_{ABC} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]}\right) \Psi = -i m \Psi \tag{6.59}$$

$$\left(\gamma^A \partial_A - \frac{1}{4} \Gamma_{ABC} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} + \Lambda^B{}_{AB}\right) \Psi = -i m \Psi \tag{6.60}$$

Da definição do tensor canônico de spin, segue de (6.56), que

$$S^{ABC} = -\frac{i\hbar c}{4} \bar{\Psi} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \Psi \tag{6.61}$$

onde $S^{ABC} = e^{(A)}_{\ \alpha}\, e^{(B)}_{\ \beta}\, e^{(C)}_{\ \lambda}\, S^{\alpha\beta\lambda}$, e introduzimos o fator $\hbar c$, omitido anteriormente. Observemos que S^{ABC} é totalmente antissimétrico, e portanto, tem apenas quatro componentes independentes. De (5.40) tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ABC} &= k\, S^{ABC} = -K^{[ABC]} \\ &= -\frac{i\ell^2}{4} \bar{\Psi} \gamma^{[A} \gamma^B \gamma^{C]} \Psi \end{aligned} \tag{6.62}$$

onde $\ell^2 = \hbar c k$.

Este resultado mostra que partículas de Dirac são capazes de excitar apenas quatro componentes independentes do tensor de contorsão.

Lembrando que

$$\gamma^{[A}\gamma^{B}\gamma^{C]}\gamma_A\gamma_B\gamma_C = -6\left(\gamma_5\gamma^A\gamma_5\gamma_A\right) \tag{6.63}$$

tem-se de (6.62)

$$K_{ABC} = -k\,\mathcal{S}_{ABC} = \frac{\ell^2}{4}\epsilon_{ABCD}\,\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^D\Psi \tag{6.64}$$

Levando-se este resultado em (6.59) e usando-se a última das expressões (6.45), podemos escrever a equação de Dirac como

$$\gamma^A\left(\bar{\nabla}_A + \frac{i\ell^2}{16}\left(\bar{\Psi}\gamma^{[A}\gamma^{B}\gamma^{C]}\Psi\right)\gamma_A\gamma_B\gamma_C\right)\Psi = -im\Psi \tag{6.65}$$

ou

$$\gamma^A\left(\bar{\nabla}_A - \frac{3}{8}i\ell^2\left(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^A\Psi\right)\gamma_5\gamma_A\right)\Psi = -im\Psi \tag{6.66}$$

7. *MODÊLOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS NA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN*

Neste capítulo vamos estudar a generalização dos modêlos Bianchi I e IX da teoria de Einstein para a teoria de Einstein-Cartan. Consideraremos as situações nas quais as fontes das equações de Einstein-Cartan são um campo de Dirac e uma "poeira com spin". Inicialmente, analisaremos a equação de movimento de uma partícula de teste (eletron ou neutrino) em uma variedade de Minkowski com "torsão externa" constante, produzida por uma distribuição de partículas de Dirac. Apesar de sua simplicidade, este problema é um exemplo no qual as características da interação gravitacional spin-torsão (ou spin-spin) se apresentam claramente.

"We ought to give the whole of our attention to the most insignificant and most easily mastered facts, and remain a long time in contemplation of them until we are accostumed to behold the truth clearly and distincly"

René Descartes

(Traduzido para o Inglês em "Physical Thought from the Presocratics to the Quantum Physicists", editado por Shmuel Sambursky)

Eletrons e Neutrinos em um Espaço-Tempo de Minkowski com Torsão

Vamos considerar a equação de movimento para eletrons e neutrinos em um espaço-tempo de Minkowski com torsão. Neste espaço-tempo, os objetos de não-holonomia $\Lambda^{A}{}_{BC}$ definidos em (4.6) são nulos, e a contorsão $K^{A}{}_{BC}$ é considerada como um "campo externo", e portanto não produz efeitos de curvatura. As partículas de teste (eletrons e neutrinos) serão caracterizadas por uma baixa densidade de massa e uma baixa densidade de spin, de modo a não produzir efeitos apreciáveis de curvatura e torsão. Estas imposições podem ser sintetizadas dizendo-se que o tensor momentum-energia combinado $\Sigma_{\alpha\beta}$ associado com as partículas de teste é negligível.

A equação de movimento para o campo $\Psi(x)$ associado com a partícula de teste se escreve

$$\gamma^{A}\partial_{A}\Psi + \frac{1}{4}K_{ABC}\gamma^{[A}\gamma^{B}\gamma^{C]}\Psi + \frac{imc}{\hbar}\Psi = 0 \qquad (7.1)$$

ou

$$\gamma^{A}\partial_{A}\Psi + \frac{1}{4}\tilde{K}^{A}\gamma_{5}\gamma_{A}\Psi + \frac{imc}{\hbar}\Psi = 0 \qquad (7.2)$$

onde $\tilde{K}^{A} = (K_{0}\ ,\ \vec{K}\ )$ é o pseudo-traço (vetor axial) do tensor de contorsão definido em (2.32). Vamos anotar $\frac{1}{4}\tilde{K}^{A}$ por K^{A}. Usando as nossas convenções para as matrizes de Dirac, um cálculo direto conduz a

$$\begin{pmatrix} iM & i\partial_0 - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial}) + K_0 + (\vec{\sigma}\cdot\vec{K}) \\ -i\partial_0 - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial}) + K_0 - (\vec{\sigma}\cdot\vec{K}) & iM \end{pmatrix} \Psi = 0 \tag{7.3}$$

onde M = mc/h. Procuremos soluções do tipo

$$\Psi(x) = \Phi\, e^{i k_\mu x^\mu} \tag{7.4}$$

onde Φ é um spinor constante, e $k_\mu = (k_0, \vec{k})$, $x^\mu = (x^0, \vec{x})$. Substituindo (7.4) em (7.3), resulta

$$\begin{pmatrix} iM & -(k_0 - K_0) - (\vec{k} - \vec{K})\cdot\vec{\sigma} \\ (k_0 + K_0) - (\vec{k} + \vec{K})\cdot\vec{\sigma} & iM \end{pmatrix} \Phi = 0 \tag{7.5}$$

O sistema de equações (7.5) terá soluções não-triviais se o determinante da matriz for nulo, isto é,

$$\begin{vmatrix} iM & -(k_0 - K_0) - (\vec{k} - \vec{K})\cdot\vec{\sigma} \\ (k_0 + K_0) - (\vec{k} + \vec{K})\cdot\vec{\sigma} & iM \end{vmatrix} = 0 \tag{7.6}$$

Desenvolvendo o determinante obtemos

$$M^2 - \left[(k_0 - K_0) + (\vec{k} - \vec{K}) \cdot \vec{\sigma}\right] \cdot \left[(k_0 + K_0) - (\vec{k} + \vec{K}) \cdot \vec{\sigma}\right] = 0 \qquad (7.7)$$

Considerada como uma relação entre m e k_μ, a condição (7.7) pode ser visualizada como um hiperboloide no espaço de momento, o qual é modificado pela presença do campo K_μ. Na realidade, são as modificações introduzidas por K_μ que nos interessam analisar. Note-se que este problema tem uma analogia formal com o problema do movimento de partículas de Dirac em campos eletromagnéticos.

Desenvolvendo a expressão (7.7), e usando a identidade $(\vec{A} \cdot \vec{\sigma})\,(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\,\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$, obtemos

$$M^4 + A(K,k)\,M^2 + B(K,k) = 0 \qquad (7.8)$$

onde

$$\begin{aligned} A(K,k) &= -2\left(k_\alpha k^\alpha - K_\alpha K^\alpha\right) \\ B(K,k) &= \left(k_\alpha k^\alpha + K_\alpha K^\alpha\right)^2 - 4\left(k_\alpha k^\alpha\right)^2 \end{aligned} \qquad (7.9)$$

De (7.8) segue que

$$M^2 = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 - 4B^2}{4}} \qquad (7.10)$$

Desta expressão pode-se ver que de modo geral a contorsão produz um deslocamento e um desdobramento nos níveis de energia da partícula de teste.

Para que possamos levar nossa análise mais adiante, vamos supor que a partícula de teste é um eletron em repouso ($\vec{k} = 0$), e que o vetor K_μ (constante) tem a direção do eixo z positivo. Tal contorsão pode ser produzida por uma distribuição estática e uniforme de spins (densidade de partículas constantes) polarizada na direção +z. Supondo que as partículas que produzem a contorsão são eletrons, o espinor correspondente pode ser posto sob a forma

$$\Psi = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \qquad (7.11)$$

onde N é uma constante. A densidade destas partículas é $\rho = N^* N$. Da definição do vetor K_μ segue que

$$K_\alpha = \lambda\,(0, 0, 0, 1)$$

onde λ é uma constante proporcional a ρ. De (7.10) com $E = k_0$ obtemos a seguinte expressão para a energia E da partícula de teste:

$$E = \pm\, m \pm \lambda \qquad (7.12)$$

Com estes autovalores para a energia e a equação (7.5), pode-se verificar sem dificuldades que:

(a) $E = m + \lambda$ corresponde a $\Phi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o que caracteriza um autoestado da partícula de teste com energia positiva, polarizada na direção -z (oposta à direção de $\vec{K}$).

(b) $E = m - \lambda$ corresponde a $\Phi \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o que caracteriza um autoestado da partícula de teste com energia positiva, polarizada na direção +Z (na mesma direção que $\vec{K}$).

(c) $E = m + \lambda$ corresponde a $\Phi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, o que caracteriza um autoestado de partícula de teste com energia negativa, polarizada na direção -z (oposta à direção de $\vec{K}$). Em outras palavras, corresponde a um positron com energia positiva $\bar{E} = m - \lambda$ polarizada na direção z (na mesma direção que $\vec{K}$).

(d) $E = -m-\lambda$ corresponde a $\Phi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, o que caracteriza um autoestado da partícula de teste com energia negativa, polarizada na direção +z (na mesma direção que $\vec{K}$), ou, um positron com energia positiva $\bar{E} = m + \lambda$ polarizado na direção -z (oposta à direção de $\vec{K}$).

Destes resultados, podemos concluir que a interação de spin, característica da teoria de Einstein-Cartan, é atrativa entre duas partículas com spins alinhados e repulsiva quando os spins são opostos. O mesmo é válido para as correspondentes antipartículas.

Consideremos agora o caso em que a partícula de teste é um neutrino, e a contorsão é a mesma do caso anterior. A equação (7.10) se reduz a

$$B(K,k) = (k_\alpha k^\alpha - K_\alpha K^\alpha)^2 - 4(k_\alpha k^\alpha)^2 = 0 \tag{7.13}$$

Para o caso em que $k_1 = k_2 = 0$, os níveis de energia do neutrino ficam dados por

$$E = \pm k_3 \pm \lambda \tag{7.14}$$

Uma análise análoga à anterior conduz a:

(a) $E = k_3 + \lambda$: neutrino com energia positiva, k_3 na direção +z e polarização na direção -z.

(b) $E = k_3 - \lambda$: neutrino com energia positiva, k_3 na direção -z e polarização na direção +z.

(c) $E = -k_3 + \lambda$: neutrino com energia negativa, k_3 na direção -z e polarização na direção -z, ou antineutrino com energia positiva $\bar{E} = k_3 - \lambda$ com k_3 na direção +z e polarização na direção +z.

(d) $E = -k_3 - \lambda$: neutrino com energia negativa, k_3 na direreção +z e polarização na direção +z, ou antineutrino com energia positiva $E = k_3 + \lambda$ com k_3 na direção -z e polarização na direção -z.

Os resultados são, portanto, análogos aos do caso anterior. Os níveis de energia do neutrino são deslocados para baixo no caso de spins alinhados, e para cima no caso de spins opostos.

Observemos que dos resultados acima pode-se verificar que a presença da contorsão pode fazer com que alguns momentos se tornem tipo espaço e outros tipo tempo. Esta situação também ocorre no caso da interação de partículas de Dirac e campos eletromagnéticos e, neste caso, são os momentos $k_\mu -$ $- i e A_\mu$ que são restritos a serem tipo-tempo. No nosso caso, podemos impor esta condição a $k_\mu - K_\mu$. Estes momentos são sempre nulos, e não há possibilidade de violação de causalidade.

"It may well be that these electrons
Are worlds just like our very own,
With kings, scholars, arts and armies,
And memories of ages flown.

And atoms — cosmic systems, spinning
Around a central spinning sphere,
Where things are just like ours, but smaller,
Or nothing like what we have here"

("The World of the Electron" - V. Bryusov)

O Campo de Dirac como Fonte de Modêlos Cosmológicos Anisotrópicos na Teoria de Einstein-Cartan.

Vamos considerar inicialmente um modêlo do tipo Bianchi I, cuja métrica se escreve

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\,dx^2 - B^2(t)\,dy^2 - C^2(t)\,dz^2 \qquad (7.15)$$

Como o modêlo não tem rotação, podemos escolher as tetradas e_A e as 1-forma θ^A, de modo que $\langle e_A , \theta^B \rangle = \delta_A{}^B$ e $u^\alpha = \delta^\alpha{}_0 = e_0$.

Os coeficientes de Fock-Ivanenko não nulos para a métrica (7.15) são

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\dot{A}}{A}\gamma^0\gamma^1 \;,\quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{B}}{B}\gamma^0\gamma^2 \;,\quad \Gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{\dot{C}}{C}\gamma^0\gamma^3 \qquad (7.16)$$

onde o ponto significa derivação com relação a t. Então, de (6.72, 73), as equações para os campos Ψ e $\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma_0$, que no nosso caso são funções apenas de t, se escrevem

$$\dot{\Psi} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}\Psi - \frac{3\ell^2 i}{8}\left(\overline{\Psi}\gamma_5\gamma^A\Psi\right)\gamma_0\gamma_5\gamma_A\Psi = i m \gamma_0 \Psi \qquad (7.17)$$

$$\dot{\bar{\Psi}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}\bar{\Psi} + \frac{3\ell^2 i}{8}(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^A\Psi)\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_A\gamma_0 = -im\bar{\Psi}\gamma_0 \qquad (7.18)$$

onde $\ell^2 = \hbar c k$, e $V = A.B.C.$

As equações de Einstein-Cartan (3.17), ficam sob a forma

$$\bar{G}_{AB} = -\frac{i\ell^2}{2}\left[\bar{\nabla}_{(A}\bar{\Psi}\gamma_{B)}\Psi - \bar{\Psi}\gamma_{(B}\bar{\nabla}_{A)}\Psi\right]$$

$$\frac{3\ell^2}{16}\eta_{AB}(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^C\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_C\Psi) \qquad (7.19)$$

onde as quantidades barradas são calculadas com a parte Riemanniana da conexão, $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, e $\bar{G}_{AB} = \bar{R}_{AB} - \frac{1}{2}\eta_{AB}\bar{R}$.

Para a métrica (7.15), devemos ter $\bar{G}_{12} = 0$, $\bar{G}_{13} = 0$ e $\bar{G}_{23} = 0$. Usando (7.16) e (7.19), pode-se verificar, por um cálculo direto, que estas equações conduzem a

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi) = 0$$

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{C}}{C}\right)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi) = 0 \qquad (7.20)$$

$$\left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C}\right)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi) = 0$$

Das equações $G_{0i} = 0$, $i = 1,2,3$, encontra-se do mesmo modo que

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_i\Psi)(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi) = 0 \tag{7.21}$$

Destas equações podemos concluir que o modêlo não pode ter três eixos de anisotropia, porque, neste caso, os efeitos de torsão são necessariamente nulos. No máximo, podemos ter um eixo de anisotropia. Vamos escolher

$$A(t) = B(t) \neq C(t) \tag{7.22}$$

Segue então que o espinor $\Psi(t)$ deve satisfazer às condições

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi &= 0 \\ \bar{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi &= 0 \\ \bar{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi &= 0 \\ \bar{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi &\neq 0 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Observemos que os resultados acima expressam vínculos impostos pela torsão sobre a anisotropia do modêlo. Esta situação ocorre, de maneira geral, em todos os casos de modêlos anisotrópicos (homogêneos) com torsão, mesmo que a fonte de torsão seja uma poeira com spin.

Usando (7.23), a equação de Dirac, (7.17), para o espinor $\Psi(t)$ se escreve

$$\dot{\Psi} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}\Psi - \frac{3\ell^2 i}{8}\left(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^3\Psi\right)\gamma_0\gamma_5\gamma_3\Psi = i m \gamma_0 \Psi \qquad (7.24)$$

Vamos escrever o spinor Ψ sob a forma[22]

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \sigma_3 \varphi(t) \end{pmatrix} \qquad (7.25)$$

Então,

(A) $$\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi = -\Psi^{+}\gamma_5\Psi = i\left(\varphi^{+} \quad \varphi^{+}\sigma_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma_3\varphi \end{pmatrix}$$

$$= i\left(\varphi^{+} \quad \varphi^{+}\sigma_3\right)\begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma_3\varphi \end{pmatrix} = 0$$

(B) $$\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi = \Psi^{+}\gamma_0\gamma_5\gamma_1\Psi = -i\left(\varphi^{+} \quad \varphi^{+}\sigma_3\right)\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma_3\varphi \end{pmatrix}$$

$$= -i\left(\varphi^{+} \quad \varphi^{+}\sigma_3\right)\begin{pmatrix} \sigma_1\varphi \\ \sigma_1\sigma_3\varphi \end{pmatrix} = 0$$

Analogamente,

$$\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi = \Psi^{+}\gamma_0\gamma_5\gamma_2\Psi = 0$$

(c) $$\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi = \Psi^+\gamma_0\gamma_5\gamma_3\Psi = -i\,(\varphi^+ \quad \varphi^+\sigma_3)\begin{pmatrix}\sigma_3\varphi \\ \varphi\end{pmatrix}$$

$$= -2i\,(\varphi^+\sigma_3\varphi)$$

Logo, todas as condições (7.23) ficam satisfeitas pelo espinor (7.25). Além disto, a densidade ρ é diferente de zero,

$$\rho = \Psi^+\Psi = 2(\varphi^+\varphi) \tag{7.26}$$

e a corrente j^k , $k = 1,2,3$, tem apenas a componente j^3 diferente de zero:

$$j^k = i\,\Psi^+\gamma^k\Psi = i\,\Psi^+\begin{pmatrix}0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0\end{pmatrix}\Psi$$

$$= i\left[\varphi^+\sigma_k\sigma_3\varphi + \varphi^+\sigma_3\sigma_k\varphi\right]$$

Então,

$$j^1 = 0 \quad , \quad j^2 = 0$$

$$j^3 = -2(\varphi^+\varphi) \tag{7.27}$$

Explicitemos a dependência temporal do espinor ϕ escrevendo $\Psi(t)$ sob a forma

$$\Psi(t) = H(t)\begin{pmatrix}\varphi \\ \sigma_3\varphi\end{pmatrix} \tag{7.28}$$

onde φ é um espinor constante. Da equação de Dirac (7.24) se gue que

$$\dot{H}\begin{pmatrix}\varphi\\ \sigma_3\varphi\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}H\begin{pmatrix}\varphi\\ \sigma_3\varphi\end{pmatrix} - \frac{3\ell^2 i}{4}(\varphi^+\sigma_3\varphi)\begin{pmatrix}\sigma_3\varphi\\ \varphi\end{pmatrix}H^3 = imH\begin{pmatrix}\sigma_3\varphi\\ \varphi\end{pmatrix}$$

ou

$$\left(\dot{H} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}H\right)\varphi - \left(\frac{3\ell^2 i}{4}(\varphi^+\sigma_3\varphi)H^3\right)\sigma_3\varphi = (imH)\,\sigma_3\varphi$$

$$\left(\dot{H} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}H\right)\sigma_3\varphi - \left(\frac{3\ell^2 i}{4}(\varphi^+\sigma_3\varphi)H^3\right)\varphi = -(imH)\,\varphi$$

onde $H^3 = |H|^2 H$.

A compatibilidade destas equações requer que se tenha $m = 0$, o que reduz a equação para $H(t)$ à forma

$$\left(\dot{H} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}H\right)\varphi - \left(\frac{3\ell^2 i}{4}(\varphi^+\sigma_3\varphi)H^3\right)\sigma_3\varphi = 0 \qquad (7.29)$$

Como φ é um espinor de duas componentes, escrevendo-o sob a forma $\varphi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$, a equação acima impões que $\phi_2 = 0$. Finalmente, podemos escrever o espinor $\Psi(t)$ sob a forma

$$\Psi(t) = H(t)\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix} \qquad (7.30)$$

com

$$\dot{H} - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V} H - \frac{3\ell^2 i}{4} (\alpha^* \alpha) H^3 = 0 \tag{7.31}$$

onde α é um número complexo.

Tendo obtido a forma mais geral do espinor de Dirac que satisfaz às condições (7.23), retornemos às equações de Einstein-Cartan (7.19). Vamos escrever estas equações sob a forma $R_{AB} = -T_{AB} + \frac{1}{2}\eta_{AB}T$ com

$$\begin{aligned} T_{AB} = {} & \frac{i\ell^2}{2} \left[\overline{\nabla}_{(A} \overline{\Psi} \gamma_{B)} \Psi - \overline{\Psi} \gamma_{(B} \overline{\nabla}_{A)} \Psi \right] \\ & - \frac{3\ell^4}{16} \eta_{AB} (\overline{\Psi} \gamma_5 \gamma_A \Psi)(\overline{\Psi} \gamma_5 \gamma^A \Psi) \end{aligned} \tag{7.32}$$

Um cálculo direto conduz a

$$T = -\frac{3\ell^4}{8} (\overline{\Psi} \gamma_5 \gamma^A \Psi)(\overline{\Psi} \gamma_5 \gamma_A \Psi) \tag{7.33}$$

de modo que as equações $R_{AB} = -T_{AB} - \frac{1}{2}\eta_{AB}T$ se escrevem

$$R_{AB} = -\frac{i\ell^2}{2} \left[\overline{\nabla}_{(A} \overline{\Psi} \gamma_{B)} \Psi - \overline{\Psi} \gamma_{(B} \overline{\nabla}_{A)} \Psi \right] \tag{7.34}$$

Das equações para os espinores Ψ e $\overline{\Psi}$, (equações (7.17, 18)), pode-se verificar facilmente que, de modo geral,

$$\dot{\overline{\Psi}}\,\gamma_A\,\Psi - \overline{\Psi}\,\gamma_A\,\dot{\Psi} = \frac{3\ell^2 i}{8}\,(\overline{\Psi}\,\gamma_5\,\gamma^c\Psi)\,\overline{\Psi}\,(\gamma_5\gamma_c\gamma_0\gamma_A + \gamma_A\gamma_0\gamma_5\gamma_3)\,\Psi \qquad (7.35)$$

Usando esta relação encontra-se sem dificuldades que para (A,B) = (1,1) , (2,2) e (3,3), o termo da direita de (7.34) é identicamente nulo, e para (A,B) = (0,0) é igual a $\frac{3\ell^4}{2}\,(\alpha^*\alpha)^2\,H^4$, $H^4 = |H|^4$. Ficamos então com o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3\ell^4}{2}\,(\alpha^*\alpha)^2\,H^4(t) \\ R_{11} &= R_{22} = 0 \qquad (A(t) = B(t)) \\ R_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad (7.36)$$

e mais a equação (7.31) para a função H(t).

Procuremos uma solução do tipo de Kasner para o sistema (7.36), fazendo

$$A(t) = B(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^p , \qquad C(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^q \qquad (7.37)$$

p,q constantes.

As equações $R_{11} = R_{22} = 0 = R_{33}$ conduzem a

$$2p + q = 1 \tag{7.38}$$

e a equação $R_{00} = 0$ conduz a

$$t^{-2}\left[1 - (2p^2 + q^2)\right] = -\frac{3\ell^4}{2} H^4(t) \tag{7.39}$$

Desta equação segue que

$$H(t) = \lambda t^{-\frac{1}{2}} \tag{7.40}$$

Lembrando que $\dot{V}/V = t^{-1}$, a equação (7.31) fica satisfeita com $H \sim t^{-\frac{1}{2}}$ e fixa a constante λ. A equação (7.39) conduz então a uma relação entre as constantes p e q

$$2p^2 + q^2 = 1 + \lambda^4 \frac{3\ell^4}{2} \tag{7.41}$$

A solução do sistema de equações formado com (7.38) e (7.41) determina os valores das constantes p e q e, portanto, a solução das equações de Einstein-Cartan.

Consideremos agora o modêlo Mixmaster (Bianchi tipo IX), cuja métrica se escreve

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)(\sigma^1)^2 - B^2(t)(\sigma^2)^2 - C^2(t)(\sigma^3)^2 \tag{7.42a}$$

onde as 1-forma σ^A $(A = 1,2,3)$ satisfazem à relação

$$d\sigma^A = \frac{1}{2}\epsilon^A{}_{BC}\,\sigma^B \wedge \sigma^C \tag{7.42b}$$

Como este modêlo também não tem rotação, as tetradas podem ser escolhidas como no caso anterior.

Os coeficientes de Fock-Ivanenko não nulos para este caso são

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{2}\frac{\dot{A}}{A}\gamma^0\gamma^1 - \left(\frac{B^2+C^2-A^2}{2ABC}\right)\gamma^2\gamma^3 \\
\Gamma_2 &= \frac{1}{2}\frac{\dot{B}}{B}\gamma^0\gamma^2 - \left(\frac{C^2+A^2-B^2}{2ABC}\right)\gamma^3\gamma^1 \\
\Gamma_3 &= \frac{1}{2}\frac{\dot{C}}{C}\gamma^0\gamma^3 - \left(\frac{A^2+B^2-C^2}{2ABC}\right)\gamma^1\gamma^2
\end{aligned} \tag{7.43}$$

As equações para os espinores Ψ e $\bar{\Psi}$ que, como no caso anterior devem ser funções apenas de t, se escrevem

$$\dot{\Psi} = -\frac{imc}{\hbar}\gamma_0\Psi - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}\Psi - \frac{1}{4}\left(\Lambda^{[ABC]} + K^{[ABC]}\right)\gamma_0\gamma_A\gamma_B\gamma_C\Psi$$

$$\dot{\bar{\Psi}} = \frac{imc}{\hbar}\bar{\Psi}\gamma_0 - \frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{V}\bar{\Psi} + \frac{1}{4}\left(\Lambda^{[ABC]} + K^{[ABC]}\right)\bar{\Psi}\gamma_A\gamma_B\gamma_C\gamma_0$$

onde V = A B C. Destas equações segue que

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\Psi}}\gamma_D\Psi - \bar{\Psi}\gamma_D\dot{\Psi} &= \frac{1}{4}K^{[ABC]}\bar{\Psi}\left(\gamma_A\gamma_B\gamma\ \ \gamma_D\gamma_0 - \gamma_D\gamma_0\gamma_A\gamma_B\gamma_C\right)\Psi \\
&+ \frac{2imc}{\hbar}\eta_{0D}\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{6}\left(\frac{A^2+B^2+C^2}{ABC}\right)\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_D\Psi
\end{aligned} \tag{7.44}$$

onde o último termo vem da contribuição dos objetos $\Lambda^{[ABC]}$, os quais podem ser calculados usando-se a definição (4.7) e a relação (7.42).

Como o procedimento e os cálculos para analisar as equações de Einstein-Cartan são basicamente os mesmos que no caso anterior, vamos apresentar apenas os resultados:

(A) Das equações $\overline{G}_{AB} = 0$ com $(A,B) = (1,2), (2,3), (1,3)$ resultam imposições sobre o espinor Ψ análogas ao caso anterior, isto é, $\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi = 0 = \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi$, e $\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi \neq 0$, com $A=B\neq C$.

(B) Com as condições acima, resulta que as equações $\overline{G}_{10} = 0 = \overline{G}_{20}$ são identicamente satisfeitas.

(C) Da equação $\overline{G}_{03} = 0$ resulta que

$$(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi)\left[-\frac{1}{2}\left(\Lambda^{[123]}+K^{[123]}\right)\frac{\ell^2}{12}\,\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi - \frac{A^2+B^2-C^2}{2ABC}\right] = 0 \tag{7.45}$$

de modo que o termo entre colchetes deve ser nulo. Esta condição, no entanto, não é compatível com a equação para $\overline{G}_{00}$ como pode ser verificado usando-se a expressão (7.44).

Portanto, podemos concluir que não há soluções das equações de Einstein-Cartan com métrica do tipo Mixmaster (modêlo fechado anisotrópico) que sejam compatíveis com fontes de partículas de Dirac.

Poeira com Spin como Fonte de Modêlos Anisotrópicos na Teoria de Einstein-Cartan

Analisaremos nesta seção as possíveis restrições que uma poeira com spin, descrita no Capítulo 6, impõe sobre a anisotropia dos modêlos cosmológicos Bianchi I e Bianchi IX.

Vamos supor que a distribuição de spin não tem rotação, de modo que a velocidade da matéria pode ser tomada como $u^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{0}$. Anotaremos as seis componentes independentes do tensor de spin por S_{10}, S_{20}, S_{30}, S_{23}, S_{31} e S_{12}. As 1-forma de correção podem então ser calculadas usando-se (4.36) e (5.41). Apresentaremos apenas os resultados, porque o cálculo, embora simples, é longo:

$$
\begin{aligned}
\lambda^{0}{}_{1} &= k\left(S_{10}\theta^{0} + S_{12}\theta^{2} - S_{31}\theta^{3}\right)\\
\lambda^{0}{}_{2} &= k\left(S_{20}\theta^{0} + S_{23}\theta^{3} - S_{12}\theta^{1}\right)\\
\lambda^{0}{}_{3} &= k\left(S_{30}\theta^{0} + S_{31}\theta^{1} - S_{23}\theta^{2}\right)\\
\lambda^{2}{}_{3} &= k\left(S_{31}\theta^{0} \quad S_{30}\theta^{1} - S_{10}\theta^{3}\right)\\
\lambda^{3}{}_{1} &= k\left(S_{31}\theta^{0} + S_{30}\theta^{1} - S_{10}\theta^{3}\right)\\
\lambda^{1}{}_{2} &= k\left(S_{21}\theta^{0} - S_{20}\theta^{1} + S_{10}\theta^{2}\right)
\end{aligned}
\qquad (7.46)
$$

Consideremos um modêlo do tipo Bianchi I, cuja métrica é dada por (7.15). Com as 1-forma θ^A definidas por

$$\theta^0 = dt \quad , \quad \theta^1 = A\,dx \quad , \quad \theta^2 = B\,dy \quad , \quad \theta^3 = C\,dz$$

segue que as formas da conexão Riemanniana não nulas são

$$\gamma^0{}_1 = \frac{\dot{A}}{A}\,\theta^1 \quad , \quad \gamma^0{}_2 = \frac{\dot{B}}{B}\,\theta^2 \qquad \gamma^0{}_3 = \frac{\dot{C}}{C}\,\theta^3 \tag{7.47}$$

Com (7.46) e (7.47), as formas da conexão Riemann-Cartan podem ser calculadas por $\omega^A{}_B = \gamma^A{}_B + \lambda^A{}_B$.

Usando (6.14) com $v^A = \delta^A{}_0$, e lembrando que o tensor de spin neste caso deve depender apenas de t, o tensor $t^A{}_B$ pode ser calculado sem dificuldades:

$$(t_{AB}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ -2k\left(\frac{d}{dt} + \frac{\dot{V}}{V}\right)S_{10} & p & 0 & 0 \\ -2k\left(\frac{d}{dt} + \frac{\dot{V}}{V}\right)S_{20} & 0 & p & 0 \\ -2k\left(\frac{d}{dt} + \frac{\dot{V}}{V}\right)S_{30} & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{7.48}$$

onde v = ABC.

Das equações $G_{AB} = k\,t_{AB}$ antissimetrizadas resultam as leis de conservação para o spin

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{\dot{V}}{V}\right)S_{i0} = 0 \tag{7.49}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{\dot{V}}{V}\right)S_{ij} = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

Das equações $G_{0i} = k\,t_{0i}$, $i = 1,2,3,$ resulta que

$$\frac{\dot{A}}{A} S_{10} = 0 \quad , \quad \frac{\dot{B}}{B} S_{20} = 0 \quad , \quad \frac{\dot{C}}{C} S_{30} = 0 \tag{7.50}$$

e portanto devemos ter $S_{0i} = 0$.

Finalmente, das equações $G_{ij} = k\,t_{i5}$, $i,j = 1, 2,3$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B}\right) S_{12} &= 0 \\ \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A}\right) S_{13} &= 0 \\ \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C}\right) S_{23} &= 0 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Destas equações podemos tirar conclusões análogas às que tiramos no caso do campo de Dirac, isto é, que uma dada distribuição de spin restringe a anisotropia do modêlo. É claro das equações acima que um modêlo totalmente anisotrópico é incompatível com uma distribuição de spins do tipo "poeira".

No caso do modêlo Mixmaster, cuja métrica é dada por (7.42a,b), as formas da conexão Riemanniana são

$$\begin{aligned} &\gamma^0{}_1 = \frac{\dot{A}}{A}\theta^1 , \qquad \gamma^0{}_2 = \frac{\dot{B}}{B}\theta^2 , \qquad \gamma^0{}_3 = \frac{\dot{C}}{C}\theta^3 \\ &\gamma^2{}_3 = \frac{B^2+C^2-A^2}{2ABC}\theta^1 , \quad \gamma^3{}_1 = \frac{C^2+A^2-B^2}{2ABC} , \quad \gamma^1{}_2 = \frac{A^2+B^2-C^2}{2ABC} \end{aligned} \tag{7.52}$$

Usando a mesma distribuição de spins que no caso anterior, obtém-se equações análogas às equações (7.51), de modo que as mesmas conclusões referentes à relação entre anisotropia e a distribuição de spin são válidas.

Suponhamos que $S_{12} \neq 0$. Segue então que devemos ter $A = B$. As equações para $\overline{G}_{01}$ e $\overline{G}_{02}$ implicam em $S_{10} = 0 = S_{20}$, e a equação $\overline{G}_{03} = 0$ conduz a $S_{12} = -2 \dfrac{\dot{A}^2 \dot{C}}{C^2} S_{03}$. Mas, a condição $S_{AB}u^B = 0$ requer que S_{03} seja nulo e, portanto, devemos ter $S_{12} = 0$.

Destes resultados, podemos concluir que não há soluções das equações de Einstein-Cartan com uma distribuição do tipo "poeira com spin" polarizada, compatível com métricas do tipo Mexmaster.

8. *A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN COMO A TEORIA DE GAUGE DO GRUPO DE POINCARÉ*

O nosso objetivo neste capítulo é mostrar que a teoria de Einstein-Cartan é a teoria de gauge local, que se origina da invariância sob o grupo de Poincaré. Este resultado nos parece ser conhecido de alguns autores, mas, no entanto, não é do nosso conhecimento nenhum trabalho publicado sobre o assunto. O estudo de uma teoria de gauge pode ser formulado de maneira muito elegante e precisa, usando-se a linguagem de feixes de fibras. Preferimos, por simplicidade, usar o formalismo convencional desenvolvido por Utiyama[23]. O uso do formalismo de feixes de fibras requereria uma análise mais profunda de alguns conceitos inerentes deste formalismo, o que tornaria este trabalho muito mais extenso.

Considerações Iniciais

Como se sabe, algumas teorias apresentam certas ambigüidades estruturais, devido às quais as funções ou equações que descrevem o estado de um sistema físico não são univocamente definidas. Se os observáveis associados com um sistema físico são invariantes pelas transformações permitidas pelas ambigüidades da teoria, então estas variações são fisicamente irrelevantes, e diz-se que a teoria tem uma liberdade de gauge.

O exemplo mais familiar de uma teoria que apresenta esta característica de liberdade de gauge, é a eletrodinâmica. Chamando de $\phi(x)$ um campo carregado, e de $A_\alpha(x)$ os potenciais eletromagnéticos, as equações que descrevem a dinâmica da interação entre o campo $\phi(x)$ e o campo eletromagnético são invariantes pelas transformações (simultâneas ou não)

$$\phi(x) \longrightarrow \bar{\phi}(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \tag{8.1}$$

$$A_\nu(x) \longrightarrow \bar{A}_\nu(x) = A_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda(x) \tag{8.2}$$

onde α é uma matriz de elementos reais constantes, e $\Lambda(x)$ é uma função escalar, arbitrárias. No caso em que α é uma função da posição, $\alpha = \alpha(x)$, então, $\alpha(x)$ e $\Lambda(x)$ não são mais independentes. As equações que descrevem a dinâmica da intera ção são invariantes pelas transformações simultâneas

$$\phi(x) \longrightarrow \bar{\phi}(x) = e^{i\alpha(x)}\,\phi(x)$$
$$A_\nu(x) \longrightarrow \bar{A}_\nu(x) = A_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda(x) \tag{8.3}$$

Como α e Λ são funções de posição, diz-se que as equações acima descrevem uma transformação de gauge local.

Observemos que a Lagrangeana associada com o sistema (ϕ, A_μ) é invariante pela transformação (8.3) e, pelo teorema de Noether, a carga associada com o campo $\phi(x)$ é conservada. No entanto, se os potenciais $A_\mu(x)$ não estivessem presentes, esta lei de conservação não seria mais válida. Neste sentido, pode-se deduzir a existência de uma interação eletromagnética mínima entre campos carregados e a matéria, se for admitida uma lei de conservação da carga com relação a uma mudança local na fase do campo $\phi(x)$. Tal interação será da forma $j^\mu A_\mu$, onde j^μ é a densidade de corrente associada com o campo $\phi(x)$.

Muitos sistemas físicos, nos quais quantidades observáveis são conservadas, admitem uma simetria de gauge local do tipo (8.3). As interações mínimas características do processo em estudo podem ser deduzidas em analogia com o caso eletromagnético.

Vamos considerar um campo qualquer ϕ, e que o espaço-tempo é de Minkowski. Admitamos que a Lagrangeana associada com o campo ϕ , $\mathcal{L}_{\phi}$, é invariante pela transformação $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\phi(x)$, onde α é constante. Generalizando a transformação para $\alpha = \alpha(x)$, a Lagrangeana não fica mais invariante porque as derivadas de $\phi(x)$ não se transformam como $\phi(x)$. Para remover os termos em $\partial_{\mu}\alpha(x)$, vamos definir os campos independentes $B_{\mu}(x)$, que se transformam simultaneamente com $\phi(x)$, de acordo com a regra

$$B_{\mu}(x) \longrightarrow \bar{B}_{\mu}(x) = e^{i\alpha(x)} B_{\mu}(x)\, e^{-i\alpha(x)} - \frac{1}{k}\, \partial_{\mu}\alpha(x) \qquad (8.4)$$

Nesta expressão, k é uma constante introduzida por conveniência. A maneira mais conveniente de introduzir os campos $B_{\mu}(x)$ na teoria, de acordo com o princípio de acoplamento mínimo, é fazer, na Lagrangeana $\mathcal{L}_{\phi}$, a substituição

$$\partial_{\mu}\phi(x) \longrightarrow D_{\mu}\phi(x) = \left(\partial_{\mu} + ik\, B_{\mu}(x)\right)\phi(x) \qquad (8.5)$$

As transformações $\{e^{i\alpha(x)}\}$ constituem um grupo o qual chamaremos de grupo de gauge, G. Este grupo é um grupo de Lie para o qual $e^{i\alpha(x)}$ é uma representação. Denotemos por T_A os geradores de G, e escrevamos a regra de comutação destes geradores como

$$[T_A, T_B] = C^C{}_{AB} T_C \tag{8.6}$$

Podemos então expandir $\alpha(x)$ em termos dos geradores, e escrever

$$e^{i\alpha(x)} = e^{i\epsilon^A(x)T_A} \tag{8.7}$$

onde $\varepsilon^A(x)$ é um vetor no espaço da álgebra gerada pelos T_A. Os campos $B_\mu(x)$ podem também ser expressos em termos dos geradores T_A:

$$B_\mu(x) = g^A{}_\mu(x) T_A \tag{8.8}$$

A substituição (8.5) na Lagrangeana $\mathcal{L}_\phi$ conduz a uma Lagrangeana livre para o campo $\phi(x)$ e a uma Lagrangeana, de interação, $\mathcal{L}_I$, entre $g_\mu(x)$ e $\phi(x)$. A descrição dinâmica do sistema ficará completa introduzindo-se uma Lagrangeana livre para os campos $g_\mu(x)$. Tal Lagrangeana deve ser invariante, tanto por transformações de gauge como por transformações do espaço-tempo, e pode ser obtida introduzindo-se a quantidade covariante $F_{\mu\nu}$, definida por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu \\ &= 2\partial_{[\mu} B_{\nu]} + ik[B_\mu, B_\nu] \end{aligned} \tag{8.9}$$

Fazendo

$$F_{\mu\nu} = f^{A}{}_{\mu\nu} T_A \tag{8.10}$$

segue de (8.9) que

$$f^{A}{}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} g^{A}_{\nu]} + ik C^{A}{}_{BC}\, g^{B}{}_{\mu} g^{C}{}_{\nu} \tag{8.11}$$

Escreveremos, então, a Lagrangeana livre do campo g_μ como

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} f^{A}{}_{\mu\nu} f_{A}{}^{\mu\nu} \tag{8.12}$$

e a Lagrangeana total do sistema como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_I(g,\phi) \tag{8.13}$$

onde $\mathcal{L}_I$ é a Lagrangeana de interação dada por

$$\mathcal{L}_I = -k\, j^\mu g_\mu \tag{8.14}$$

Observemos que a densidade de corrente $j^\mu = j^\mu(\phi)$ pode não ter divergência nula. É possível definir-se uma corrente $J_{\mu A}$ com divergência nula por

$$J_{\mu A} \equiv -\frac{1}{k}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu A}} = j_{\mu A} + i\, C_{ABC}\, g^{\nu B} f^{C}{}_{\mu\nu} \tag{8.15}$$

Chamando de $Q_A(t)$ a integral espacial das componentes J_{0A}, tem-se que

$$[Q_A(t), Q_B(t)] = C^c{}_{AB} Q_c(t) \tag{8.16}$$

Como J tem divergência nula, os Q_A são independentes do tempo, e podem ser usados como geradores do grupo de gauge, isto é,

$$T_A = -i \int J_{0A}(x)\, d^3x \tag{8.17}$$

Tudo o que foi dito até agora, foi baseado no que se pode chamar de versão dinâmica de uma teoria de gauge local. Pode-se também desenvolver uma teoria de gauge numa versão geométrica, que nos parece mais fundamental porque conduz a relações entre as "simetrias internas" dos campos e as simetrias do espaço-tempo no qual os campos são descritos. Nesta versão geométrica, comparam-se transformações de gauge locais efetuadas em pontos diferentes, via os campos B_μ. Este campos assumem, então, um papel análogo ao de uma conexão afim, e esta analogia pode ser visualizada na expressão (8.5). Baseando-se neste fato, vários autores[5, 23], construiram teorias de gauge para a gravitação.

A Teoria de Gauge Local do Grupo de Poincaré e a Teoria de Einstein-Cartan.

Um elemento qualquer do grupo de Poincaré pode ser representado por um par ordenado (T,Λ), onde T é um elemento do grupo das translações e Λ é um elemento do grupo de Lorentz ortocrono homogêneo. Denotando por T_A e T_{AB} os geradores de translações e rotações, respectivamente, podemos escrever $T = e^{\varepsilon^A T_A}$ e $\Lambda = e^{\varepsilon^{AB} T_{AB}}$ onde ε^A e ε^{AB} são parâmetros infinitesimais. Lembremos que o grupo das translações é um grupo Abeliano, e que seus geradores são operadores comutativos. No espaço-tempo de Minkowski estes geradores são operadores de derivação ao longo das direções do referencial inercial global. Num espaço-tempo curvo, os geradores são campos vetoriais comutativos. Lembremos também, que os geradores do grupo de Lorentz devem sempre ser referidos a referenciais locais de Lorentz. A hipótese de que o espaço-tempo de Riemann-Cartan tem estrutura local de Minkowski é, portanto, de importância fundamental nos desenvolvimentos que se seguem.

Como anteriormente, chamemos de $\mathcal{L}_\phi$ à Lagrangeana associada com um campo $\phi(x)$. Denotemos por $\{e_A\}$ um referencial ortonormal local cujos vetores satisfazem a

$$[e_A, e_B] = \Lambda^C{}_{AB}\, e_C$$

conforme (4.43) a (4.48).

Escrevamos as relações de comutação entre os geradores T_A e T_{AB} sob a forma

$$[T_A, T_B] = 0$$

$$[T_A, T_{BC}] = C_A{}^D{}_{BC} T_D \qquad (8.18)$$

$$[T_{AB}, T_{CD}] = \frac{1}{2} C_{AB}{}^{EF}{}_{CD} T_{EF}$$

As variações mais gerais no campo ϕ e nos vetores e_A, que podemos introduzir na Lagrangeana $\mathcal{L}_\phi$, podem ser postas sob a forma

$$\delta\phi(x) = \epsilon^A(x)\partial_A\phi + \epsilon^{CD}(x) T_{CD}\phi \qquad (8.19)$$

$$\delta e_A = \epsilon^{CD}(x)\eta_{A[C}e_{D]}$$

A invariância da Lagrangeana pode ser restabelecida, introduzindo-se 16 potenciais $A^B{}_C$ e 24 potencias $K_A{}^{BC}$ através do operador de derivação covariante

$$D_A = e_A + A^B{}_A T_B + \frac{1}{2} K_A{}^{BC} T_{BC} \qquad (8.20)$$

Tem-se então que

(8.21)

onde os campos de gauge $B_{AB}{}^{C}$ e $R_{AB}{}^{CD}$ são dados em termos dos potenciais por

$$B_{AB}{}^{C} = e_A A^C{}_B - e_B A^C{}_A - \Delta^D{}_{AB} A^C{}_D + A_{AD} K_B{}^{DC} - A_{BD} K_A{}^{DC} \tag{8.22}$$

$$R_{AB}{}^{CD} = e_A K_B{}^{CD} - e_B K_A{}^{CD} + K_A{}^C{}_E K_B{}^{ED} - K_B{}^C{}_E K_A{}^{ED} - \Delta^E{}_{AB} K_E{}^{CD} \tag{8.23}$$

Observemos que os potenciais de gauge devem se transformar de acordo com

$$\begin{aligned} \delta A^C{}_B &= \tfrac{1}{2} C_A{}^C{}_{DE}\, \epsilon^{DE} A^A{}_B + \tfrac{1}{2} C_{DE}{}^C{}_A K_B{}^{DE} \epsilon^A + e_A \epsilon^C \\ \delta K_A{}^{BC} &= \tfrac{1}{4} C_{DE}{}^{BC}{}_{FG} K_A{}^{DE} \epsilon^{FG} + e_A \epsilon^{BC} \end{aligned} \tag{8.24}$$

e a partir destas expressões pode-se obter sem dificuldades a lei de transformação dos campos B e R.

Finalmente, precisamos escolher uma Lagrangeana livre para os campos de gauge. De acordo com Kibble , a Lagrangeana mais simples que pode ser escolhida é a densidade escalar construida com o campo R, isto é, $\sqrt{-g}\ R^{AB}{}_{AB}$.

A interpretação geométrica dos potenciais $K_A{}^{BC}$ é simples: eles podem ser identificados como as componentes do tensor de contorsão.

Vamos agora examinar o caso em que a Lagrangea na $\mathcal{L}_\phi$ é a Lagrangeana de Dirac, e verificar que a interpretação dada anteriormente para os potenciais de gauge é correta. Consideremos a Lagrangeana do campo de Dirac

$$\mathcal{L}_\psi = \sqrt{-g}\left\{\frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^A\partial_A\psi - \partial_A\bar{\Psi}\gamma^A\psi\right) - m\bar{\Psi}\psi\right\}$$

Lembrando que, neste caso, $\delta\psi = -\frac{1}{2}\varepsilon^{CD}S_{CD}\psi$, onde $S_{CD} = -\frac{i}{4}[\gamma_C, \gamma_D]$, e fazendo a substituição (8.20), a Lagrangeana total do sistema se escreve

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \sqrt{-g}\Big\{&\frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^A\partial_A\psi - \partial_A\bar{\Psi}\gamma^A\psi\right) - m\bar{\Psi}\psi \\ &+ \frac{i}{8}K_A{}^{BC}\epsilon^A{}_{BCD}\left(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^D\psi\right) - \frac{1}{k^2}R^{AB}{}_{AB}\Big\}\end{aligned} \tag{8.25}$$

onde usamos (7.48).

Pelas equações de Euler-Lagrange, um cálculo imediato conduz a

$$\begin{aligned}K_A{}^{BC} = &-\left(\Lambda^{BC}{}_A - \Lambda_A{}^{BC} + \Lambda_A{}^{CB}\right) \\ &+ \frac{k^2}{4}\epsilon_A{}^{BCD}\left(\bar{\Psi}\gamma^5\gamma_D\psi\right)\end{aligned}$$

De (4.41) e (6.71), podemos reconhecer na expressão acima que o primeiro termo é a contribuição para o tensor de contorsão que se origina da não holonomia da base $\{e_A\}$, e o segundo termo é a contorsão criada pelo campo de Dirac.

9. A FORMULAÇÃO ADM DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados obtidos num estudo inicial que fizemos, no sentido de estabelecer uma formulação Hamiltoniana para a teoria de Einstein-Cartan. Seguimos as mesmas linhas da formulação Hamiltoniana da teoria de Einstein feita por Arnowitt, Deser e Misner.

No entanto, usaremos o formalismo de formas diferenciais, o qual nos permite usar de maneira direta a noção de grupos uniparamétricos de difeomorfismos.

Considerações Iniciais

Como anteriormente, chamemos de V a variedade quadri-dimensional espaço-tempo, a qual suporemos dotada de uma métrica $\overline{g}$ e uma conexão linear métrica $\overline{\nabla}$. Consideremos uma hipersuperfície tipo-espaço tri-dimensional $\mathcal{M}_3$, embebida em V, e parametrizada por t = const. As estruturas geométricas definidas sobre V induzem estruturas geométricas sobre $\mathcal{M}_3$, inclusive uma métrica e uma conexão linear. O formalismo ADM se propõe a nos fornecer informações sobre a evolução de $\mathcal{M}_3$ com o tempo, isto é, sobre as estruturas geométricas induzidas por V sobre $\mathcal{M}_3$, a cada instante.[24]

Para descrever a formulação ADM precisamos introduzir algumas grandezas que nos permitam caracterizar a evolução temporal de uma dada hipersuperfície. Neste sentido, consideremos uma "hipersuperfície inicial" $\mathcal{M}_3^0$, parametrizada por $t = t_0$, a qual evolui dinamicamente para $\mathcal{M}_3^t$, no intervalo de tempo t. Chamemos de V um campo vetorial arbitrário definido sobre $\mathcal{M}_3^0$, parametrizado por t, e consideremos um observador no ponto $x = (t^0, x^k) \in \mathcal{M}_3^0$. Imaginemos que este observador se desloca, durante o intervalo de tempo t, ao longo da curva integral de V que passa por x. Na hipersuperfície $\mathcal{M}_3^t$ o ponto x tem coordenadas (t, x^k). Se quisermos determinar a nova posição do observador com relação ao ponto inicial, precisamos conhecer a separação em tempo próprio entre $\mathcal{M}_3^0$ e $\mathcal{M}_3^t$ e de quanto o observador foi afastado sobre a hipersuperfície, com relação ao ponto inicial. A separação em tempo próprio entre $\mathcal{M}_3^0$ e $\mathcal{M}_3^t$

é chamada de lapso (N), e deve ser medida ao longo da normal n em $x \in \mathcal{M}_3^0$. Então

$$N = \langle n, V \rangle \tag{9.1}$$

O afastamento sobre a hipersuperfície $\mathcal{M}_3^t$ pode ser caracterizado por um vetor tridimensional S^A, tangente a $\mathcal{M}_3^t$. Portanto, temos que

$$V = Nn + S \tag{9.2}$$

Através da relação (9.2), o campo vetorial (arbitrário) V fica relacionado, via as grandezas N e S, com a normal n, que é um objeto intrínseco de $\mathcal{M}_3$. A relação (9.2) nos indica também que o grupo de difeomorfismos $\{e^{tV}\}$, gerado pelo campo vetorial V, tem um papel importante no nosso estudo.

As grandezas N e S, definidas acima, juntamente com os coeficientes da métrica e seus momentos conjugados, e a torsão, constituem o conjunto de variáveis que serão usadas na formulação ADM da teoria de Einstein-Cartan.

Geometria do Embebimento em Espaços com Torsão

O nosso objetivo nesta seção é definir as grandezas que serão usadas para caracterizar uma hipersuperfície (tridimensional) embebida em uma variedade quadridimensional, e estabelecer uma notação, a qual é específica deste capítulo.Não entraremos em detalhes no que se refere à teoria do embebimento (ver, por exemplo, Hawking e Ellis[15]).

Anotaremos com uma barra as quantidades referidas à variedade quadridimensional V; as quantidades na hipersuperfície tridimensional $\mathcal{M}_3$ embebida em V serão anotadas com um ~ . No caso em que as grandezas induzidas em $\mathcal{M}_3$ coincidem com as respectivas grandezas de V restritas a $\mathcal{M}_3$, não usaremos nenhum sinal particular. A normal a $\mathcal{M}_3$ será anotada por n, e $\langle n,n\rangle = 1$. A aplicação $J : V \to \mathcal{M}_3$ é a aplicação do embebimento.

Consideremos os campos vetoriais U e V definidos em $T\mathcal{M}_3$, espaço tangente a $\mathcal{M}_3$. Como $\langle n,n\rangle$ é constante, tem-se que $0 = V\langle n,n\rangle = 2 \langle \overline{\nabla}_V\, n , n\rangle$, o que significa que o campo vetorial $\overline{\nabla}_V n \in T\mathcal{M}_3$. Definimos a aplicação de Weingarten $L : T\mathcal{M}_3 \to T\mathcal{M}_3$ por[16, 17]

$$L(V) = - \overline{\nabla}_V n \qquad (9.3)$$

Em termos da aplicação L, definamos a curvatura extrínseca de $\mathcal{M}_3$ pela expressão

$$R(V,U) = \langle L(V), U \rangle \qquad (U,V \in T\mathcal{M}_3) \tag{9.4}$$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma: com $U, V \in T\mathcal{M}_3$, tem-se que $0 = V\langle U,n\rangle = \langle \overline{\nabla}_V U, n\rangle + \langle U, \overline{\nabla}_V n\rangle$, e portanto, podemos escrever que

$$R(V,U) = \langle n, \overline{\nabla}_V U \rangle \tag{9.5}$$

De modo geral, se a variedade tem torsão não nula, a curvatura extrínseca não é simétrica

$$\begin{aligned} R(V,U) - R(U,V) &= \langle n, \overline{\nabla}_V U - \overline{\nabla}_U V \rangle \\ &= \langle n, \overline{T}(U,V) + [U,V] \rangle \\ &= \langle n, \overline{T}(U,V) \rangle \end{aligned} \tag{9.6}$$

onde usamos a definição (4.13) da torsão.

Como se sabe, a métrica g induzida em $\mathcal{M}_3$ é a restrição de $\overline{g}$ a $\mathcal{M}_3$, isto é, $g = J^* \overline{g}$ onde J^* é a aplicação definida em (4.50).

A conexão ∇ induzida por $\overline{\nabla}$ em $\mathcal{M}_3$ pode ser definida da seguinte maneira. Consideremos dois vetores $U, V \in T\mathcal{M}_3$. Em geral, $\overline{\nabla}_V U$ tem uma componente fora de $\mathcal{M}_3$. Definimos a conexão $\tilde{\nabla}$ por

$$\tilde{\nabla}_V U = \bar{\nabla}_V U - \langle n, \bar{\nabla}_V U \rangle n \tag{9.7}$$

ou, usando (9.5),

$$\tilde{\nabla}_V U = \bar{\nabla}_V U - R(U, V)\, n \tag{9.8}$$

Consideremos uma base $\{e_A\}$, A = 1,2,3 em $\mathcal{M}_3$. Então, os coeficientes da conexão induzida são definidos por $\tilde{\nabla}_{e_A}(e_B) = \tilde{\Gamma}^e{}_{AB}\, e_C$. Anotando por $\bar{\Gamma}_{ABC}$ os coeficientes da conexão $\bar{\nabla}$ restrita a $\mathcal{M}_3$, temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ABC} &= \langle e_A, \bar{\nabla}_{e_B} e_C \rangle \\
&= \langle e_A, \tilde{\nabla}_{e_B} e_C \rangle + \langle e_A, R(e_B, e_C)\, n \rangle \\
&= \langle e_A, \tilde{\nabla}_{e_B} e_C \rangle \\
&= \tilde{\Gamma}_{ABC}
\end{aligned}$$

isto é, os coeficientes da conexão induzida $\tilde{\nabla}$ em $\mathcal{M}_3$ são iguais aos coeficientes da $\bar{\nabla}$ conexão de V, restrita a $\mathcal{M}_3$,

$$\bar{\Gamma}_{ABC} = \Gamma_{ABC}$$

A partir da expressão da conexão $\tilde{\nabla}$ induzida sobre $\mathcal{M}_3$ pode-se encontrar, sem dificuldades, uma relação entre a torsão definida por $\tilde{\nabla}$ e a restrição de T a . De (4.13) tem-se que, para U , V ε T $\mathcal{M}_3$,

$$\overline{T}(U,V) = \overline{\nabla}_U V - \overline{\nabla}_V U - [U,V]$$

$$= \big(R(U,V) - R(V,U)\big)n + \tilde{T}(U,V)$$

ou, usando (9.6),

$$\overline{T}(U,V) = \langle n, \overline{T}(U,V)\rangle n + \tilde{T}(U,V) \qquad (9.9)$$

Consideremos a base $\{e_A\}$, A = 1,2,3 em T$\mathcal{M}_3$, definida anteriormente, e anotemos por $e_\perp \equiv n$ a normal (tipo-tempo) a $\mathcal{M}_3$. Então, $\{e_\perp , e_A\} \equiv \{e_\alpha\}$, $\alpha = \perp$, 1,2,3, é uma base de V. A base dual de $\{e_\alpha\}$ será denotada por $\{\theta^\alpha\} \equiv \{\theta^\perp , \theta^A\}$.

Chamando de $\overline{\omega}^\mu{}_\nu$ as formas da conexão definida sobre V com relação à base definida acima, procuremos obter as formas $\tilde{\omega}^A{}_B$ induzidas por $\overline{\omega}^A{}_B$ em $\mathcal{M}_3$. Com U ε T$\mathcal{M}_3$ temos que

$$\overline{\nabla}_U e_A = \overline{\omega}^\alpha{}_A(U)\, e_\alpha$$

$$= \overline{\omega}^\perp{}_A(U)\, n + \overline{\omega}^B{}_A(U)\, e_B$$

Mas, usando a equação (9.8),

$$\overline{\nabla}_U e_A = R(U, e_A)\, n + \tilde{\nabla}_U e_A$$

$$= R(U, e_A)\, n + \tilde{\omega}^B{}_A(U)\, e_B$$

onde $\tilde{\omega}^B{}_A$ são as formas da conexão induzida sobre . Como $U \varepsilon T$, então $\bar{\omega}^B{}_A(U) = \tilde{\omega}^B{}_A(U)$ e $\bar{\omega}^{\perp}{}_A(U) = \tilde{\omega}^{\perp}{}_A(U)$, e portanto, das duas equações anteriores segue que

$$R(U, e_A) = \tilde{\omega}^{\perp}{}_A(U) \tag{9.10}$$

$$\tilde{\omega}^B{}_A(U) = \omega^B{}_A(U) \tag{9.11}$$

Em outras palavras, $J^*\bar{\omega}^A{}_B = \tilde{\omega}^A{}_B = \omega^A{}_B$. É importante salientar que estes resultados são válidos apenas na base que definimos anteriormente.

Consideremos a equação de Cartan (4.19),

$$\bar{\Theta}^A = \bar{d}\theta^A + \bar{\omega}^A{}_\alpha \wedge \theta^\alpha \tag{9.12}$$

Operando com a aplicação J^* em ambos os membros tem-se

$$J^*\bar{\Theta}^A = J^*(\bar{d}\theta^A) + J^*(\bar{\omega}^A{}_\alpha \wedge \theta^\alpha)$$

Usando agora as propriedades (4.51) da aplicação J^*, e levando em conta que $J^*\theta^{\perp} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}^A &= d\theta^A + \tilde{\omega}^A{}_B \wedge \theta^B \\ &= d\theta^A + \omega^A{}_B \wedge \theta^B \end{aligned}$$

isto é,

$$J^* \bar{\Theta}^A = \tilde{\Theta}^A = \Theta^A \tag{9.13}$$

Consideremos agora a componente :

$$J^* \bar{\Theta}^\perp = \tilde{\Theta}^\perp = J^* (\bar{d}\,\theta^\perp) + J^* (\bar{\omega}^\perp{}_\alpha \wedge \theta^\alpha)$$

Como d<n,n> = 0 = $d\bar{g}$ e a conexão é métrica, tem-se que $\bar{D}\, g_{\perp\perp} = 0 = 2\bar{\omega}_{\perp\perp}$ e, portanto, $\bar{\omega}^\perp{}_\perp = 0$. Segue que a expressão a cima resulta em

$$\tilde{\Theta}^\perp = J^* \bar{\Theta}^\perp = \tilde{\omega}^\perp{}_A \wedge \theta^A \tag{9.14}$$

Esta última expressão pode ser escrita em uma forma independente do sistema de coordenadas, definindo-se a 1-forma de curvatura extrínseca R_A por

$$\begin{aligned} R(v, e_A) &= R_A(v) \\ &= R_{AB}\,\theta^B(v) \end{aligned} \tag{9.15}$$

Usando-se a eq. (9.10),

$$R_A = \tilde{\omega}^\perp{}_A \tag{9.16}$$

Podemos escrever então

$$\tilde{\Theta}^{\perp} = R_A \wedge \theta^A \tag{9.17}$$

Vamos considerar agora a 2-forma de curvatura $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$. O procedimento é análogo ao que usamos anteriormente no caso da torsão. Da equação de Cartan (4.20) tem-se que

$$J^{*}\bar{\Omega}^{A}{}_{B} = \Omega^{A}{}_{B} = d\tilde{\omega}^{A}{}_{B} + \tilde{\omega}^{A}{}_{C} \wedge \tilde{\omega}^{C}{}_{B} + \tilde{\omega}^{A}{}_{\perp} \wedge \tilde{\omega}^{\perp}{}_{B}$$

$$= d\omega^{A}{}_{B} + \omega^{A}{}_{C} \wedge \omega^{C}{}_{B} + \tilde{\omega}^{A}{}_{\perp} \wedge \tilde{\omega}^{\perp}{}_{B}$$

Da condição $\bar{D}\bar{g}_{\perp A} = 0 = -\bar{\omega}_{\perp A} - \bar{\omega}_{A\perp}$ segue que $\bar{\omega}_{\perp A} = -\bar{\omega}_{A\perp}$ e

$$\bar{\omega}^{A}{}_{\perp} = g^{A\alpha}\,\bar{\omega}_{\alpha\perp} = g^{AB}\,\bar{\omega}_{B\perp} = -\,g^{AB}\,\bar{\omega}_{\perp B}$$

$$= -\,g^{AB} R_B = -\,R^A$$

Logo,

$$\tilde{\Omega}^{A}{}_{B} = d\omega^{A}{}_{B} + \omega^{A}{}_{C} \wedge \omega^{C}{}_{B} - R^A \wedge R_B$$

ou

$$\tilde{\Omega}^{A}{}_{B} = \Omega^{A}{}_{B} - R^A \wedge R_B \tag{9.18}$$

Aplicando a mesma técnica à componente $\Omega^{\perp}{}_{A}$, obtem-se

$$\tilde{\Omega}^{\perp}{}_{A} = J^{*}\,\bar{\Omega}^{\perp}{}_{A} = J^{*}\left(\bar{d}\,\bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right) + J^{*}\left(\bar{\omega}^{\perp}{}_{\alpha} \wedge \bar{\omega}^{\alpha}{}_{A}\right)$$

$$= d\,\omega^{\perp}{}_{A} + \tilde{\omega}^{\perp}{}_{B} \wedge \tilde{\omega}^{B}{}_{A}$$

ou

$$\tilde{\Omega}^{\perp}{}_{A} = dR_{A} - \omega^{B}{}_{A} \wedge R_{B}$$

$$= \tilde{\mathbb{D}} R_{A} \tag{9.19}$$

A Lagrangeana do Campo Gravitacional de Einstein-Cartan no Formalismo ADM.

O nosso objetivo agora é obter a decomposição da Lagrangeana da teoria de Einstein-Cartan em termos das grandezas que foram definidas na seção anterior.

De acordo com (5.10), a 4-forma Lagrangeana se escreve

$$-\mathbb{L}' = \bar{\eta}_{\alpha\beta} \wedge \bar{\Omega}^{\beta\alpha} \tag{9.20}$$

onde omitimos o fator 16π. Temos então que

$$-\mathbb{L}' = 2\,\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\Omega}^{\perp}{}_{A} + \bar{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \bar{\Omega}^{B}{}_{A} \tag{9.21}$$

Analisemos cada um dos termos da expressão acima separadamente.

No segundo termo, $\bar{\eta}^{A}{}_{B} = \frac{1}{2}\bar{\eta}^{A}{}_{B\alpha\beta}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$ e do lado direito desta expressão só pode aparecer um fator $\theta^{\perp}$, isto é, $\bar{\eta}^{A}{}_{B} = \frac{1}{2}\bar{\eta}^{A}{}_{B\perp C}\,\theta^{\perp} \wedge \theta^{C} = \tilde{\eta}^{A}{}_{B}$. Logo, $\bar{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \bar{\Omega}^{B}{}_{A} = \tilde{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \bar{\Omega}^{B}{}_{A}$. Neste último, também só pode aparecer um índice $\perp$ no coeficiente de $\bar{\Omega}^{B}{}_{A}$ e, portanto, $\bar{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \bar{\Omega}^{B}{}_{A} = \tilde{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \tilde{\Omega}^{B}{}_{A}$. Usando agora a expressão (9.18) este termo se escreve

$$\bar{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \bar{\Omega}^{B}{}_{A} = \tilde{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \left(\Omega^{B}{}_{A} - R^{B} \wedge R_{A} \right)$$

Consideremos o primeiro termo, e usemos a equação de Cartan (4.20)

$$2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\Omega}^{\perp}{}_{A} = 2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \left(d\bar{\omega}^{\perp}{}_{A} + \bar{\omega}^{\perp}{}_{B} \wedge \bar{\omega}^{B}{}_{A}\right)$$

$$= d\left(2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right) - 2d\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A} + 2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{B} \wedge \bar{\omega}^{B}{}_{A}$$

$$= d\left(2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right) - 2\,\bar{\mathbb{D}}\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A} - 2\bar{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \bar{\omega}^{B}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A}$$

Mas lembrando que $\bar{\eta}^{A}{}_{B} = \tilde{\eta}^{A}{}_{B}$ e que $\bar{\omega}^{\perp}{}_{A} = R_{A}$ e $\bar{\omega}^{B}{}_{\perp} = -R^{B}$, podemos escrever finalmente

$$\begin{aligned} 2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\Omega}^{\perp}{}_{A} = -2\bar{\mathbb{D}}\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A} - 2\tilde{\eta}^{A}{}_{B} \wedge R^{B} \wedge R_{A} \\ + d\left(2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right) \end{aligned} \tag{9.23}$$

Substituindo (9.22) e (9.23) em (9.21) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}' = \bar{\eta}^{A}{}_{B} \wedge \left(\Omega_{A}{}^{B} - R_{A} \wedge R^{B}\right) \\ + 2\bar{\mathbb{D}}\eta^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A} - d\left(2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} \wedge \bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right) \end{aligned} \tag{9.24}$$

Observemos que, de (5.8), o segundo termo da expressão (9.24) se escreve $\bar{D}\bar{\eta}^{A}{}_{\perp} = \bar{\eta}^{A}{}_{\perp B} \wedge \bar{\Theta}^{B}$. Mas,

$$\bar{\Theta}^{B} = \bar{\zeta}^{B}{}_{\perp D}\,\theta^{\perp} \wedge \theta^{D} + \tilde{\Theta}^{B} \tag{9.25}$$

de modo que

$$\bar{\mathbb{D}}\bar{\eta}^{A}{}_{\perp}\wedge\bar{\omega}^{\perp}{}_{A}=\bar{\eta}^{A}{}_{\perp B}\wedge\Theta^{B}\wedge\bar{\omega}^{\perp}{}_{B}+\bar{\zeta}^{B}{}_{\perp D}\,\bar{\eta}^{A}{}_{\perp B}\wedge\theta^{D}\wedge\tilde{\omega}^{\perp}{}_{A}$$

Fazendo $\tilde{\omega}^{\perp}{}_{A} = a_A\,\theta^{\perp}$ no último termo desta expressão, onde $a_A = \langle\bar{\nabla}_n n, e_A\rangle$, e substituindo em (9.24) segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{L}' &= \tilde{\eta}^{AB}\wedge\left(\Omega_{AB}-R_A\wedge R_B\right)-d\left(2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp}\wedge\bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right)\\&\quad+2\theta^{\perp}\wedge\tilde{\eta}^{A}{}_{\perp B}\wedge\left(\bar{\zeta}^{B}{}_{\perp D}\,\theta^{D}\wedge R_A-a_A\,\Theta^{B}\right)\end{aligned}\tag{9.26}$$

Neste ponto, é conveniente introduzirmos as quantidades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{AB}&=\epsilon_{ABC}\,\theta^{C}\\\mathbb{E}_{A}&=\frac{1}{2}\,\theta^{B}\wedge\mathbb{E}_{AB}\\\mathbb{E}&=\frac{1}{3}\,\theta^{A}\wedge\mathbb{E}_{A}\end{aligned}\tag{9.27}$$

com $\varepsilon_{123} = \sqrt{-g}$. Então, a expressão (9.26) fica sob a forma

$$\begin{aligned}\mathbb{L}' &= \theta^{\perp}\wedge\mathbb{E}^{AB}\wedge\left(\Omega_{AB}-R_A\wedge R_B\right)\\&\quad-2\,\theta^{\perp}\wedge\mathbb{E}^{AB}\wedge\left(\bar{\zeta}_{B\perp D}\,\theta^{D}\wedge R_A-a_A\,\Theta_B\right)\\&\quad-d\left(2\bar{\eta}^{A}{}_{\perp}\wedge\bar{\omega}^{\perp}{}_{A}\right)\end{aligned}\tag{9.28}$$

Observemos que na expressão anterior, a menos do último termo que é uma diferencial exata, ainda aparecem as componentes do tensor de torsão. Vamos introduzir o tensor de torsão extrínseca definido por

$$\mathfrak{T}(U,V) = \langle U, \bar{\tau}(n,V) \rangle \tag{9.29}$$

com $U,V \in T\mathcal{M}_3$. Em termos de componentes

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{AB} &= \mathfrak{T}(e_A, e_B) = \langle e_A , \bar{\tau}(n, e_B) \rangle \\ &= \bar{\tau}_{A \perp B} \end{aligned} \tag{9.30}$$

Introduzindo a torsão extrínseca e desprezando a diferenciável exata em (9.28), ficamos com

$$\begin{aligned} \mathbb{L}' = \theta^{\perp} \wedge \epsilon^{AB} \wedge \Big(& \Omega_{AB} - R_A \wedge R_B + 2\, a_A \Theta_B \\ & - 2\, \mathfrak{T}_{BD}\, \theta^D \wedge R_A \Big) \end{aligned} \tag{9.31}$$

Observemos que na 4-forma Lagrangeana (9.31) já está explícita a parte "restrita a $\mathcal{M}_3$", que é a 3-forma $\mathbb{L}$ definida por $\mathbb{L}' = \theta^{\perp} \wedge \mathbb{L}$.

Chamaremos a 3-forma $\mathbb{L}$ de Lagrangeana ADM, a qual deve ser escrita em termos do lapso N e do vetor de deslocamento S^A. Lembremos que até agora usamos uma base do tipo $\{n , e_A\}$ onde n é a normal e os vetores e_A são tangentes a $\mathcal{M}_3$, e que o nosso propósito inicial foi o de utilizar o grupo de di feomorfismos gerado pelo campo vetorial V, parametrizado por t, e relacionado com N e S^A através da equação (9.1), V = nN + S . O que faremos a seguir para obter a Lagrangeana ADM da teoria de Einstein-Cartan, é simplesmente uma mudança de base.

Definamos a base $\{Z_\mu\}$ por

$$\{Z_\mu\} = \{V, e_A\} \tag{9.32}$$

Esta base se relaciona com a base $\{e_\alpha\} = \{n , e_A\}$ pela transformação linear $e_\alpha = B^\beta{}_\alpha Z_\beta$ onde

$$B = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ S^1 & 1 & 0 & 0 \\ S^2 & 0 & 1 & 0 \\ S^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anotando por $\{\theta'^\mu\}$ a base dual de $\{Z_\mu\}$, teremos que $\theta^\alpha = \theta'^\mu B^\alpha{}_\mu$.

Vamos então expressar a Lagrangeana ADM

$$\begin{aligned} \mathbb{L} = \mathcal{E}^{AB} \wedge \big(& \Omega_{AB} - R_A \wedge R_B + 2\, a_A \Theta_B \\ & - 2\, \mathfrak{T}_{BD}\, \theta^D \wedge R_A \big) \end{aligned} \tag{9.33}$$

em termos destas novas bases. Da definição de a_A, temos que

$$a_A = -\langle n, \bar{\nabla}_n e_A \rangle$$
$$= -\langle n, \bar{\nabla}_{e_A} n \rangle - \langle n, [n, e_A] + \bar{T}(n, e_A) \rangle$$
$$= -\langle n, [n, e_A] + \bar{T}(n, e_A) \rangle$$

Mas, por um cálculo direto encontra-se que

$$\langle n, [n, e_A] \rangle = N \left(n^\alpha \Lambda^0{}_{\alpha 0} - (N^{-1})_{|0} \right)$$

Lembrando que o parâmetro das curvas integrais é t, $V = \partial_t$ e $\theta'^0 = dt$, da expressão $d\theta^0 = \Lambda^0{}_{\alpha\beta}\,\theta'^\alpha \wedge \theta'^\beta = 0$ segue que $\Lambda^0{}_{\alpha D} = 0$. Então, a expressão acima de a_A se reduz a

$$a_A = N^{-1} N_{|A} + \bar{\tau}^\perp{}_{\perp A}$$

Vamos introduzir agora uma segunda torsão extrínseca por

$$Q(U) = -\langle n, T(n, U) \rangle \qquad (9.34)$$
$$(U \in T\mathcal{M}_3)$$

com

$$Q_A = Q(e_A) = \bar{\tau}^\perp{}_{\perp A} \qquad (9.35)$$

Substituindo a expressão de a_A em termos de Q_A na Lagrangeana (9.33), segue que

$$\mathbb{L} = N\, \mathfrak{E}^{AB} \wedge \big(\Omega_{AB} - R_A \wedge R_B + $$

$$ + 2\, Q_A\, \Theta_B - 2\, \mathfrak{S}_{BD}\, \theta'^{D} \wedge R_A \big) $$

$$ + 2\, N_{|A}\, \mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \Theta^{B} \qquad (9.36)$$

O último termo de (9.36) pode ser posto sob uma forma mais conveniente como segue

$$N_{|A}\, \mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \Theta^{B} = (e_A \lrcorner dN) \wedge \mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \Theta^{B}$$

$$= dN \wedge \big(e_A \lrcorner (\mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \Theta^{B}) \big)$$

$$= -dN \wedge \mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \big(\mathcal{T}^{B}{}_{CA}\, \theta'^{C} \big)$$

$$= -d\big(N\, \mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \mathcal{T}^{B}{}_{CA}\, \theta'^{C} \big) + N\, d\big(\mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \mathcal{T}^{B}{}_{CA}\, \theta'^{C} \big)$$

Escreveremos a Lagrangeana $\mathbb{L}$ sob a forma final

$$\mathbb{L} = N\, \mathfrak{E}^{AB} \wedge \big(\Omega_{AB} - R_A \wedge R_B - 2\, \mathfrak{S}_{AB}\, \theta'^{D} \wedge R_A + 2\, Q_A\, \Theta_B \big) \qquad (9.36)$$

$$ + 2N\, d\big(\mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \mathcal{T}^{B}{}_{CA}\, \theta'^{C} \big) - d\big(2N\, \mathfrak{E}^{A}{}_{B} \wedge \mathcal{T}^{B}{}_{CA}\, \theta'^{C} \big)$$

A Hamiltoniana da Teoria de Einstein-Cartan

Para que possamos definir uma Hamiltoniana para a teoria de Einstein-Cartan, precisamos definir os momentos canonicamente conjugados com a métrica. Neste sentido, procuraremos inicialmente obter uma expressão conveniente para as "velocidades" $\dot{g}_{AB} = \partial g_{AB} | \partial t$ (*).

Analisemos a expressão (9.17), $\tilde{\Theta}^{\perp} = R_A \wedge \theta^A$. Em termos de componentes,

$$\bar{\tau}^{\perp}{}_{AB} = R_{AB} - R_{BA} \tag{9.37}$$

No Apêndice I, mostramos que a parte simétrica da conexão extrínseca é dada por

$$R_{(AB)} = \frac{1}{2N}\left(2\, g_{C(A} \overset{T}{\nabla}_{B)} S^C - \dot{g}_{AB}\right) + \mathcal{T}_{(AB)} \tag{9.38}$$

onde $\overset{T}{\nabla}$ é a conexão transposta em $\mathcal{M}_3$, definida em (4.78), e usamos nos cálculos uma base que é arrastada ao longo de V (ver (4.75)). Numa base arbitrária, com três vetores tangentes a $\mathcal{M}_3$ a expressão (9.38) fica sob a forma

$$R_{(AB)} = \frac{1}{2N}\left((\pounds_S g)_{AB} - (\pounds_V g)_{AB}\right) + \mathcal{T}_{(AB)} \tag{9.39}$$

(*) A partir desta seção, apresentaremos alguns cálculos sob a forma de Apêndice, devido à extensão dos mesmos.

Vamos continuar os cálculos usando uma base que é arrastada ao longo de V.

De (9.38) segue que as "velocidades" $\dot{g}_{AB}$ são dadas por

$$\dot{g}_{AB} = -2 g_{c(A} \overset{T}{\nabla}_{B)} S^c - 2N \left(R_{(AB)} - \mathcal{T}_{(AB)} \right) \qquad (9.40)$$

Observemos agora que na Lagrangeana (9.36) apenas a combinação $-N\,\varepsilon^{AB} \wedge \left[R_A \wedge R_B + 2\, \mathcal{T}_{BD}\, \theta^D \wedge R_A \right]$ envolve termos quadráticos em $\dot{g}_{AB}$. Chamaremos esta combinação de parte cinética $\mathbb{L}_1$ da Lagrangeana, e o restante dos termos chamaremos de parte potencial $\mathbb{L}_2$. Escreveremos então

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 - \mathbb{L}_2 \qquad (9.41)$$

onde

$$\mathbb{L}_1 = -N\,\varepsilon^{AB} \wedge \left(R_A \wedge R_B + 2\, \mathcal{T}_{BD}\, \theta^D \wedge R_A \right) \qquad (9.42)$$

$$\mathbb{L}_2 = -N\,\varepsilon^{AB} \wedge \left(\Omega_{AB} + 2 Q_A \Theta_B \right) - 2N\, d\left(\varepsilon^A{}_B \wedge \mathcal{T}^B{}_{CA}\, \theta^C \right) \qquad (9.43)$$

onde desprezamos o diferencial exato de (9.36).

Definiremos o momentum Π^{AB} conjugado com g_{AB}, como a variação da parte cinética de $\mathbb{L}$ com relação a $\dot{g}_{AB}$. Para identificar Π^{AB}, calculemos esta variação

$$\underset{(\dot{g})}{\delta \mathbb{L}_1} = -N\, \mathbb{E}^{AB} \wedge \Big(\underset{(\dot{g})}{\delta R_A} \wedge R_B + R_A \wedge \underset{(\dot{g})}{\delta R_B}$$

$$+ 2\, \mathcal{T}_{DB}\, \theta^D \wedge \underset{(\dot{g})}{\delta R_A} \Big)$$

$$= -2N\, \mathbb{E}^{AB} \wedge \left(R_A - \mathcal{T}_{AD}\, \theta^D \right) \wedge \underset{(\dot{g})}{\delta R_B}$$

$$= -2N\, \mathbb{E}^{AB} \wedge \left(R_A - \mathcal{T}_{AD}\, \theta^D \right) \wedge \theta^C \underset{(\dot{g})}{\delta R_{CB}}$$

De (9.38) temos que $\underset{(\dot{g})}{\delta} R_{AB} = - \frac{1}{2N}\, \delta \dot{g}_{AB}$ e portanto,

$$\underset{(\dot{g})}{\delta \mathbb{L}_1} = \left[\mathbb{E}^{AB} \wedge \left(R_A - \mathcal{T}_{AD}\, \theta^D \right) \wedge \theta^C \right] \delta \dot{g}_{BC}$$

Desta expressão, podemos identificar o momentum Π^{AB} conjugado com g_{AB} como

$$\Pi^{AB} = \left(R_D + \mathcal{T}_{DC}\, \theta^C \right) \wedge \theta^{(B} \wedge \mathbb{E}^{|D|A)} \qquad (9.44)$$

ou

$$\Pi^{AB} = \left[(R - \mathcal{T})\, g^{AB} - \left(R^{(AB)} - \mathcal{T}^{(AB)} \right) \right] \mathbb{E} \qquad (9.45)$$

onde $R = R_{AB}g^{AB}$ e $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{AB}g^{AB}$. Observemos que se a torsão for nula, esta expressão se reduz ao momentum ADM Riemanniano.

Com os momentos conjugados com a métrica g_{AB} dados acima, definiremos a Hamiltoniana H_G da maneira usual,

$$\mathbb{H}_G = \Pi^{AB}\dot{g}_{AB} - \mathbb{L} \tag{9.46}$$

Neste ponto, vamos definir os seguintes tensores:

$$\Sigma(U,V) = \frac{1}{2}\left[\langle U, \bar{T}(n,V)\rangle + \langle V, \bar{T}(n,U)\rangle\right] \tag{9.47}$$

$$\Delta(U,V) = \frac{1}{2}\left[\langle U, \bar{T}(n,V) - \langle V, \bar{T}(n,U)\rangle\right] \tag{9.48}$$

$$\chi(U,V) = \frac{1}{2}\langle n, \bar{T}(U,V)\rangle \tag{9.49}$$

$$(U, V \in \mathcal{M}_3)$$

Em termos de componentes

$$\begin{aligned} \Sigma_{AB} &= \bar{\tau}_{(A|\perp|B)} = \mathfrak{T}_{(AB)} \\ \Delta_{AB} &= \bar{\tau}_{[A|\perp|B]} = \mathfrak{T}_{[AB]} \\ \chi_{AB} &= \frac{1}{2}\bar{\tau}_{\perp[AB]} = R_{[AB]} \end{aligned} \tag{9.50}$$

Em termos destes tensores, mostramos no Apêndice II que a Hamiltoniana H_G pode ser escrita sob a forma

$$\mathbb{H}_G = 2\,\Pi_A{}^B \overset{T}{\nabla}_B S^A + N\,\mathbb{H} \tag{9.51}$$

onde H é a "super-Hamiltoniana" definida por

$$\begin{aligned}\mathbb{H} = {} & \Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi_{AB} - \frac{1}{2}\Pi \wedge {}^*\Pi + \Sigma^{AB} \wedge {}^*\Sigma_{AB} \\ & - \Sigma \wedge {}^*\Sigma + \chi_{AB} \wedge {}^*\chi^{AB} + 2\,\Delta_{AB} \wedge {}^*\chi^{AB} \\ & - \mathbb{E}^{AB} \wedge \left(\Omega_{AB} + 2\,Q_A \Theta_B\right) - d\left(\mathbb{E}^A{}_B \wedge \mathcal{T}^B{}_{CA}\,\theta^C\right)\end{aligned} \tag{9.52}$$

onde $^*(\ )$ indica a dual da quantidade ( ).

A expressão (9.51) pode ainda ser convenientemente modificada observando-se que

$$\begin{aligned} 2\,\Pi_A{}^B \overset{T}{\nabla}_B S^A &= 2\,\Pi_A{}^B \left(e_B \lrcorner \overset{T}{\mathbb{D}} S^A\right) \\ &= 2\left(e_B \lrcorner \Pi_A{}^B\right) \wedge \overset{T}{\mathbb{D}} S^A \end{aligned}$$

Fazendo $e_B \lrcorner\, \Pi_A{}^B = p_A$, a expressão acima pode ser escrita como

$$2\,\Pi_A{}^B \overset{T}{\nabla}_B S^A = d\left(S^A p_A\right) - S^A \overset{T}{\mathbb{D}} p_A \tag{9.53}$$

(No Apêndice III analisaremos o significado das quantidades $p_A =$

$= e_B \lrcorner \Pi_A{}^B)$.

A quantidade $-\overset{T}{D}p_A$ será chamada de super-momentum, e anotaremos

$$\wp_A = -\overset{T}{\mathbb{D}}\,p_A \tag{9.54}$$

Finalmente, substituindo (9.53) e (9.54) na expressão (9.51) para H_G, obtemos

$$\mathbb{H}_G = N\,\mathbb{H} + S^A \wp_A + d(S^A p_A) \tag{9.55}$$

Com esta forma da Hamiltoniana H_G podemos, usando o princípio variacional, obter as equações de movimento e as equações de vínculos da teoria.

As Equações de Movimento

As quantidades que deverão ser variadas independentemente na Hamiltoniana H_G são os coeficientes da métrica, seus momentos conjugados, o lapso, o deslocamento e a torsão. Devemos, no entanto, fazer algumas observações antes de calcular as variações.

Lembremos que a conexão é métrica, isto é, $Dg_{AB} = 0$. Então, para que possamos efetuar variações independentes nas formas da conexão $\omega^A{}_B$ e nos coeficientes da métrica g_{AB}, vamos introduzir a condição métrica como um vínculo na Hamiltoniana, através de multiplicadores de Lagrange. Escreveremos então a Hamiltoniana como

$$\mathbb{H}_G = N\,\mathbb{H} + S^A \mathcal{P}_A + d(S^A p_A) + \lambda^{AB} \wedge \mathbb{D} g_{AB} \qquad (9.56)$$

onde as 2-forma com valores tensoriais λ^{AB} são os multiplicadores de Lagrange.

Vamos considerar, primeiramente, o problema na ausência de matéria. Mostraremos depois quais as modificações que serão introduzidas nas equações pela Lagrangeana de matéria $\mathcal{L}_M$.

Omitiremos na Hamiltoniana (9.56) o diferencial exato $d(S^A p_A)$ e nos cálculos, feitos no Apêndice IV, usamos por conveniência uma base que é arrastada ao longo das curvas integrais de V.

A variação total da Hamiltoniana se escreve

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbb{H}_G &= (\delta N)\mathbb{H} + (\delta S^A)\mathcal{P}_A + N\,\delta\mathbb{H} + S^A\,\delta\mathcal{P}_A \\
&\quad + \delta\left(\lambda^{AB} \wedge \mathbb{D} g_{AB}\right)
\end{aligned}
\tag{9.57}
$$

O último termo de (9.57) pode ser calculado facilmente

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\lambda^{AB} \wedge \mathbb{D} g_{AB}\right) &= \delta\lambda^{AB} \wedge \mathbb{D} g_{AB} - \delta g_{AB}\,\mathbb{D}\lambda^{AB} \\
&\quad - 2\,\delta\omega^A{}_B \wedge \lambda_A{}^B + d\left(\lambda^{AB}\,\delta g_{AB}\right)
\end{aligned}
\tag{9.58}
$$

Os resultados obtidos no Apêndice IV são:

$$
\begin{aligned}
N\,\delta\mathbb{H} &= C + \delta g_{AB}\left(N\,\mathbb{B}^{AB} + 2\,dN \wedge J^{CDAB}\,\mathbb{E}_{DE} \wedge \mathcal{T}^E{}_{FC} \wedge \theta^F\right) \\
&\quad + \delta\omega^A{}_B \wedge \left(2\left(N Q_C + N_{|C}\right)\mathbb{E}^C{}_A \wedge \theta^B + \mathbb{D}\left(N\,\mathbb{E}^B{}_A\right)\right) \\
&\quad + \text{FORMA EXATA}
\end{aligned}
\tag{9.59}
$$

onde

$$
J^{CDAB} = \frac{1}{2}\left(g^{CD} g^{AB} - g^{CA} g^{DB} - g^{CB} g^{DA}\right) \tag{9.60}
$$

$$C = 2N\,\delta\Pi^{AB}\wedge\left({}^{*}\Pi_{AB} - \tfrac{1}{2}\,g_{AB}\,{}^{*}\Pi\right) + 2N\,\delta\Sigma_{AB}\wedge\left({}^{*}\Sigma^{AB} - g^{AB\,*}\Sigma\right) + 2N\,\delta\chi_{AB}\wedge\left({}^{*}\chi^{AB} + {}^{*}\Delta^{AB}\right) + 2N\,\delta\Delta_{AB}\,{}^{*}\chi^{AB} - 2N\,\delta Q_A\,\mathbb{E}^{A}{}_{B}\wedge\Theta^{B} \qquad (9.61)$$

$$S^A\delta\wp_A = \delta\Pi^{AB}\left(g_{AC}\overset{T}{\nabla}_B S^C + g_{CB}\overset{T}{\nabla}_A S^C\right) + \delta g^{AB}\left(\Pi^{AC}\overset{T}{\nabla}_C S^B + \Pi^{CB}\overset{T}{\nabla}_C S^A\right) + \delta\omega^{A}{}_{B}\wedge 2N\left(n \lrcorner \Pi^{B}{}_{A}\right) \qquad (9.62)$$

Neste ponto, com todas as variações calculadas, precisamos determinar os multiplicadores de Lagrange λ^{AB}. Isto pode ser feito facilmente usando-se a equação que se obtem fazendo o coeficiente de $\delta\omega^{A}{}_{B}$ igual a zero, isto é,

$$2\left(NQ_C + N_{|C}\right)\mathbb{E}^{C}{}_{A}\wedge\Theta^{B} + \mathbb{D}\left(N\,\mathbb{E}^{A}{}_{B}\right) - 2N\left(n\lrcorner\Pi^{B}{}_{A}\right) - 2\lambda_{A}{}^{B} = 0 \qquad (9.63)$$

Tomando a parte simétrica de (9.63), e lembrando que λ^{AB} é simétrica, obtemos

$$\lambda^{AB} = \left(NQ_C + N_{|C}\right)\mathbb{E}^{C(A}\wedge\Theta^{B)} + N\left(n\lrcorner\Pi^{AB}\right) \qquad (9.64)$$

A parte antissimétrica de (9.63) conduz a

$$2\left(N Q_c + N_{|c}\right) \mathbb{E}^{c[A} \wedge \theta^{B]} + \mathbb{D}\left(N \mathbb{E}^{BA}\right) = 0 \tag{9.65}$$

Usando agora que

$$\mathbb{E}^{c[A} \wedge \theta^{B]} = g^{c[B} \mathbb{E}^{A]}$$

e

$$\mathbb{D}\left(N \mathbb{E}^{AB}\right) = -2 N_{|c}\, g^{c[B} \mathbb{E}^{A]} + N\, \mathbb{E}^{BA}{}_c\, \Theta^c$$

a equação (9.64) conduz a

$$N\left(2 Q^{[B} \mathbb{E}^{A]} + \mathbb{E}^{BA}{}_c\, \Theta^c\right) = 0 \tag{9.66}$$

Substituindo a expressão (9.64) em δH_G e fazendo $\delta H_G = 0$, segue de $\delta H = 0$ que

$$2 N\, {}^*\chi^{AB} = 0 \tag{9.67}$$

$$2 N\left({}^*\chi^{AB} + {}^*\Delta^{AB}\right) = 0 \tag{9.68}$$

$$2 N\left({}^*\Sigma^{AB} + g^{AB}\, {}^*\Sigma\right) = 0 \tag{9.69}$$

$$2 N\, \mathbb{E}^A{}_B \wedge \Theta^B = 0 \tag{9.70}$$

Estas equações, juntamente com a equação (9.65), são as equações de vínculo que determinam a torsão. Observemos que, se tivéssemos incluido a Lagrangeana da matéria $\mathbb{L}_M$, no lado direito destas equações, teríamos, respectivamente, $\frac{\delta \mathbb{L}_M}{\delta \Delta_{AB}}$, $\frac{\delta \mathbb{L}_M}{\delta X_{AB}}$, $\frac{\delta \mathbb{L}_M}{\delta \Sigma_{AB}}$ e $\frac{\delta \mathbb{L}_M}{\delta Q_A}$. A equação (9.65) seria também modificada pela presença do termo $\delta \mathbb{L}_M|\omega_{AB}$.

Como veremos, a não inclusão destes termos nos dará torsão nula, como era de se esperar.

Ainda de $\delta H = 0$, e de $\delta \mathcal{P}_A = 0$, obtem-se as equações dinâmicas

$$\overset{\circ}{g}_{AB} = 2N\left({}^*\Pi_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB}\Pi\right)$$

$$+ g_{AD}\overset{T}{\nabla}_B S^D + g_{DB}\overset{T}{\nabla}_A S^C \qquad (9.71)$$

$$-\dot{\Pi}_{AB} = N J^{CDAB}\, \epsilon_{DE} \wedge \left(\Omega^E{}_C - 2 Q_C \Theta^E\right)$$

$$+ 2N\left(\Pi_C^{(A} \wedge {}^*\Pi^{B)C} - \frac{1}{2}\Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi\right) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{N}{2} g^{AB} \left(\Pi^{CD} \wedge {}^{*}\Pi_{CD} - \frac{1}{2} \Pi \wedge {}^{*}\Pi \right) \\
&- 2N \left(\Sigma_{C}{}^{(A} \wedge {}^{*}\Sigma^{B)C} - \Sigma^{AB} \wedge {}^{*}\Sigma \right) \\
&- \frac{N}{2} g^{AB} \left(\Sigma_{CD} \wedge {}^{*}\Sigma^{CD} - \Sigma \wedge {}^{*}\Sigma \right) \\
&+ 2N \chi_{C}{}^{(A} \wedge {}^{*}\chi^{B)C} + \frac{1}{2} N g^{AB} \chi_{CD} \wedge {}^{*}\chi^{CD} \\
&+ 4N \Delta^{C(A} \wedge {}^{*}\chi^{B)}{}_{C} + N \Delta^{CD} \wedge {}^{*}\chi_{CD} \qquad (9.72) \\
&- \mathbb{D} \left\{ \left(N Q_{C} + N_{|C} \right) \mathbb{E}^{C(A} \wedge \theta^{B)} \right\} \\
&- \mathbb{D} \left(N\, n \lrcorner \Pi^{AB} \right) + \Pi^{AC} \overset{T}{\nabla}_{C} S^{B} \\
&+ \Pi^{CB} \overset{T}{\nabla}_{C} S^{A}
\end{aligned}
$$

Finalmente, dos vínculos Hamiltonianos $\wp_A = 0$ e $H = 0$ obtemos

$$\overset{T}{\mathbb{D}}\left(e_B \lrcorner \Pi_A\right) = 0 \tag{9.73}$$

$$\Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi_{AB} - \frac{1}{2}\Pi \wedge {}^*\Pi + \Sigma_{AB} \wedge {}^*\Sigma^{AB}$$

$$- \Sigma \wedge {}^*\Sigma + \chi_{AB} \wedge {}^*\chi^{AB} + 2\, \Delta_{AB} \wedge {}^*\chi^{AB}$$

$$- \epsilon^{AB} \wedge \left(\Omega_{AB} + 2 Q_A \Theta^B\right) - 2d\left(\epsilon^A{}_B \wedge \mathcal{T}^B{}_{CA}\theta^C\right) = 0 \tag{9.74}$$

A metodologia para continuar a solução do problema agora é a usual. Primeiro as equações de vínculo que determinam a torsão, (9.67) a (9.70) devem ser resolvidas. Os resultados obtidos devem ser substituidos nas equações de vínculo (9.73) e (9.74) e nas equações dinâmicas (9.71) e (9.72).

Resolvidas as equações de vínculo (9.73) e (9.74), e escolhidos o lapso e o deslocamento, as equações dinâmicas (9.71) e (9.72) dão a evolução temporal de g_{AB} e Π_{AB}.

Vamos agora resolver as equações de vínculo para o nosso caso particular sem a Lagrangeana da matéria. As equações (9.67), (9.68) e (9.69) têm como solução

$$\chi_{AB} = 0$$

$$\Delta_{AB} = 0 \qquad (9.75)$$

$$\Sigma_{AB} = 0$$

e a equação (9.70) conduz a

$$\tau^{A}{}_{AB} = 0 \qquad (9.76)$$

Para resolver a equação (9.65), notemos que

$$\Theta^{D}\, \epsilon^{BA}{}_{D} = \left(\tau^{CA}{}_{C}\, \delta^{B}{}_{D} + \tau_{D}{}^{BA} + \tau^{C}{}_{C}{}^{B}\, \delta^{A}{}_{D} \right) \epsilon^{D}$$

de modo que (9.65) se reduz a

$$Q_{C}\delta_{B}^{A} - Q^{A}\delta_{B}{}^{C} + \tau^{DA}{}_{D}\delta_{B}^{C} + \tau_{B}{}^{CA} + \tau^{D}{}_{D}{}^{C}\delta^{A}{}_{B} = 0$$

ou, usando (9.76)

$$Q^{C}\delta_{B}{}^{A} - Q^{A}\delta_{B}{}^{C} + \tau_{C}{}^{BA} = 0$$

Contraindo B com C obtem-se $Q_B = 0$, e a equação anterior conduz a $\tau^A{}_{BC} = 0$. Logo, como consequência de não termos incluido a Lagrangeana de matéria, a torsão é nula.

10. UM MODÊLO GEOMÉTRICO PARA FORÇAS DE CURTO ALCANCE

Considerações Iniciais

Até o capítulo anterior detivemo-nos no estudo da teoria de Einstein-Cartan, na qual a variedade espaço-tempo é dotada de uma métrica e uma conexão linear não simétrica. A parte antissimétrica da conexão (torsão), na teoria de Einstein-Cartan, é relacionada algebricamente com o tensor de spin da matéria que gera o campo gravitacional. Neste capítulo, afastamo-nos radicalmente desta teoria. Usaremos a geometria de Riemann-Cartan num contexto inteiramente diferente, e apresentaremos um modêlo no qual forças eletromagnéticas e fracas de curto alcance são relacionadas com a torsão do espaço-tempo .

Vamos considerar uma variedade de Riemann-Cartan no qual a torsão é caracterizada pelo traço T^{μ} e o pseudo-traço Z^{μ}, e tem, portanto, oito graus de liberdade. O modêlo que apresentaremos, no qual introduziremos uma nova categoria de forças através da torsão do espaço-tempo[12] , representa uma interação entre duas partículas através de uma corrente intermediária que viola a conservação da paridade (no caso particular que vamos tratar) e apresenta uma dependência da constante de acoplamento com o alcance da interação. Os processos eletromagnéticos e fracos são exemplos de uma hierarquia de forças contidas em nosso modêlo.

A Dinâmica dos Campos T^{μ} e Z^{μ}

Decompondo o tensor de torsão do espaço-tempo em suas partes irredutíveis, de acordo com (2.27), e fazendo a parte de traço nulo igual a zero, temos que

$$\tau^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{3}\left[\delta^{\alpha}{}_{\nu} T_{\mu} - \delta^{\alpha}{}_{\mu} T_{\nu}\right] + \lambda \eta^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho} Z^{\rho} \qquad (10.1)$$

onde

$$T_{\mu} = \tau^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$$

$$Z_{\lambda} = \frac{1}{6} \eta_{\lambda\alpha}{}^{\mu\nu} \tau^{\alpha}{}_{\mu\nu}$$

e λ é uma constante, introduzida por questões de dimensionalidade.

A geometria de Riemann-Cartan é uma extensão da geometria Riemanniana, e o contínuo espaço-tempo é o limite da geometria de Riemann-Cartan quando o tensor é nulo. Em outras palavras, quando a torsão se anula, a dinâmica do espaço-tempo é dada pelas equações de Einstein. As equações de movimento para os campos T^{μ} e Z^{μ} são, portanto, restritas por este limite sobre a geometria.

A escolha mais simples para a integral de ação dos campos é

$$I = \frac{1}{k}\int \sqrt{-g}\, R\, d^4x + \int \sqrt{-g}\, \mathcal{L}(T^{\mu})\, d^4x + \int \sqrt{-g}\, \mathcal{L}(Z^{\mu})\, d^4x \qquad (10.2)$$

onde as Lagrangeanas para os campos vetoriais T^μ e Z^μ são

$$\mathcal{L}(T^\mu) = \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \tag{10.3}$$

$$\mathcal{L}(Z^\mu) = \frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \tag{10.4}$$

onde

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &\equiv \nabla_\nu T_\mu - \nabla_\mu T_\nu \\ &= \bar{\nabla}_\nu T_\mu - \bar{\nabla}_\mu T_\nu + \eta_{\mu\nu\epsilon\rho} T^\epsilon Z^\rho \end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &\equiv \nabla_\nu Z_\mu - \nabla_\mu Z_\nu \\ &= \bar{\nabla}_\nu Z_\mu - \bar{\nabla}_\mu Z_\nu + \frac{1}{2}\left(Z_\nu T_\mu - Z_\mu T_\nu \right) \end{aligned} \tag{10.6}$$

onde as quantidades com barra são calculadas na geometria Riemanniana (*).

Os campos vetoriais T^μ e Z^μ devem ter dimensão

(*) Segundo a notação que usamos em [12], o tensor de contorsão, neste capítulo, tem sinal contrário ao que usamos na definição (2.10).

de (energia)$^{1/2}$. (comprimento)$^{-1/2}$. Então, para que a conexão (10.1) tenha a dimensão correta, (comprimento)$^{-1}$, a constante λ deve ter a dimensionalidade $[\lambda]$ = (energia)$^{-1/2}$. (comprimento)$^{-1/2}$. Por este motivo é que foi introduzida a constante λ em (10.1).

Separando o escalar de curvatura R em uma parte Riemanniana $\bar{R}$ e uma parte dependente da torsão, pode-se verificar sem dificuldades que

$$\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}\,\bar{R} - 2\left(\sqrt{-g}\,T^{\alpha}\right)_{|\alpha} + \frac{2}{3}\sqrt{-g}\,T^{\alpha}T_{\alpha} - \frac{3}{2}\sqrt{-g}\,Z^{\alpha}Z_{\alpha} \tag{10.7}$$

Usando este resultado na integral de ação (10.2) obtemos

$$I = \frac{1}{k}\int\sqrt{-g}\,\bar{R}\,d^4x + \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{k}\int\sqrt{-g}\,T^{\alpha}T_{\alpha}\,d^4x - \frac{3}{2}\frac{\lambda^2}{k}\int\sqrt{-g}\,Z^{\alpha}Z_{\alpha}\,d^4x + \frac{1}{4}\int\sqrt{-g}\,H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}d^4x + \frac{1}{4}\int\sqrt{-g}\,B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{10.8}$$

Observemos que devido à generalização da ação de Einstein, os campos vetoriais adquirem uma massa proporcional a $\frac{\lambda}{\sqrt{k}}\frac{\hbar}{c}$.

Vamos considerar agora a equação de movimento de um campo espinorial ψ no espaço-tempo de Riemann-Cartan. Como anteriormente, a derivada covariante $\nabla_{\mu}\psi$ é definida por $\nabla_{\mu}\psi = \psi_{|\mu} - \Gamma_{\mu}\psi$, onde Γ_{μ} é a conexão de Fock-Ivanenko generali da:

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{8}\left[\gamma_{\mu|\nu}\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_{\mu|\nu} + \left\{ {\epsilon \atop \mu\nu} \right\}(\gamma^\nu\gamma_\epsilon - \gamma_\epsilon\gamma^\nu)\right.$$

$$\left. + K^\epsilon{}_{\mu\nu}(\gamma^\nu\gamma_\epsilon - \gamma_\epsilon\gamma^\nu)\right)$$

$$\equiv \bar{\Gamma}_\nu + \frac{1}{8} K^\epsilon{}_{\mu\nu}(\gamma^\nu\gamma_\epsilon - \gamma_\epsilon\gamma^\nu) \qquad (10.9)$$

onde o tensor de contorsão $K^\varepsilon{}_{\mu\nu}$ é dado por

$$K^\epsilon{}_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{3}\left[T^\epsilon g_{\mu\nu} - \delta^\epsilon{}_\mu T_\nu\right] + \frac{\lambda}{2}\eta^\epsilon{}_{\mu\nu\rho} Z^\rho \qquad (10.10)$$

Escolhamos agora a situação na qual os dois campos vetoriais são caracterizados por uma única direção. Por conveniência, escolhamos a constante de proporcionalidade entre eles como sendo $i\ \frac{9}{4}\ \frac{1}{C_\omega}$, e definamos o campo vetorial W_μ por

$$T_\mu = i\,\frac{9}{4C_\omega} Z_\mu = \frac{i}{3} W_\mu \qquad (10.11)$$

Neste caso, a equação de movimento do campo espinorial ψ se escreve

$$i c\hbar \gamma^{\mu} \overline{\nabla}_{\mu} \psi - mc^2 \psi + c\hbar \lambda W^{\mu} \gamma_{\mu} (1 + C_{\omega} \gamma_5) \psi = 0 \qquad (10.12)$$

A equação (10.12) pode ser intepretada de duas maneiras: ou uma equação na geometria de Riemann-Cartan com apenas uma direção privilegiada, ou como a de uma partícula com spin 1/2 em uma geometria Riemanniana interagindo com um campo vetorial W^{μ} através da Lagrangeana

$$\mathcal{L}_I = g_{\omega} W^{\mu} \overline{\psi} \gamma_{\mu} (1 + C_{\omega} \gamma_5) \psi \qquad (10.13)$$

onde g_{ω} é a constante de acoplamento, dada por $g_{\omega} = \hbar C \lambda$.

Observemos que o pseudo-traço Z^{μ} é real e que o traço T^{μ} é imaginário puro. Isto atribui uma estrutura complexa à conexão em regiões da ordem do comprimento da interação. Fora desta região, a estrutura do espaço é real e Riemanniano.

Hierarquia de Forças

O esquema desenvolvido acima, além de nos fornecer um modêlo geométrico para as interações fracas, admite um conjunto de interações vetoriais, as quais, no caso particular que tratamos, violam a conservação da paridade.

É importante observar que o grau de violação da paridade medido por C_ω é relacionado com uma propriedade do modêlo por transformações conformes. Isto pode ser visto através do ângulo de Cabibbo, que representa modificações sobre o peso da corrente axial relativa à corrente devida a outras interações, o qual surge no modêlo como consequência de uma transformação de escala do traço com relação ao pseudo-traço.

Da ação (10.8) e do valor da constante de acoplamento, pode-se ver que há uma relação entre a massa do campo vetorial, μ_ω , e a constante de acoplamento,

$$g_\omega = \mu_\omega \hbar c \sqrt{k} \tag{10.14}$$

Esta expressão mostra uma dependência da intensidade da força no alcance da interação. Esta propriedade é peculiar dos tipos de forças que estão contidas no nosso modêlo.

Para que possamos comparar nossos resultados com os da teoria das interações fracas, consideremos o valor 10^4 vezes a massa do proton para a massa do campo vetorial. Com este valor, e com o alcance do processo fraco tomado da ordem de 10^{-17}cm, tem-se para a constante de acoplamento o valor

$$g_\omega \sim \sqrt{k} \tag{10.15}$$

Notemos que a dependência da constante de acoplamento com o alcance da interação nos fornece uma hierarquia contínua de forças. Observemos, no entanto, que a menos que o alcance da interação seja da ordem ou menor que 10^{-17}cm, a cons tante de acoplamento será muito pequena. Isto significa que nosso modêlo não inclui interações efetivas de longo alcance.

Para $\mu^{-1} \sim 10^{-31}$ cm, a constante de acoplamento g_ω tem aproximadamente o valor 10^{-2}, o que significa que esta força é competitiva com as forças eletromagnéticas para cargas muito próximas. Este comprimento, no entanto, é muito pequeno quando comparado com o raio clássico do eletron, e certamente não tem efeitos importantes na interação entre eletrons. É possível, no entanto, que esta força tenha um papel importante no interior do eletron e, por exemplo, possa influenciar em sua estabilidade. Neste esquema, teríamos que pensar no eletron como consistindo de centros de concentração de carga.

Notemos que quando a massa do vetor W^μ se anula, a intensidade da força tende ao infinito, como se pode ver da expressão de g_ω. Isto significa que é impossível fazer uma transição do nosso modêlo para um formalismo Lagrangeano com interação do tipo corrente-corrente.

Finalmente, pode-se mostrar que o caso geral no qual T^μ e Z^μ não definem uma única direção, contém a unificação de forças fracas de curto alcance e eletromagnéticas. Por uma rotação relativa de vetores T^μ e Z^μ pode-se fazer surgir interações vetoriais que conservam a paridade e que não conservam a paridade.

CONCLUSÕES

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. A primeira (e maior) parte é dedicada à teoria de Einstein-Cartan, e a segunda é dedicada ao estudo ao estudo de um modêlo geométrico para forças de curto alcance. Os resultados que obtivemos podem ser sumarizados como se segue:

1ª parte:

(a) Estudamos em um modêlo idealizado a equação de movimento para eletrons e neutrinos em uma variedade de Minkowski com "torsão externa". Em tal variedade, a métrica é a de Minkowski, e se supõe que a torsão não gera efeitos de curvatura. O objetivo deste estudo é analisar de maneira simples as características da interação spin-torsão. Mostramos que no caso em que a torsão externa é produzida por um campo de eletrons, esta interação é atrativa quando os spins estão alinhados e repulsiva quando os spins são opostos.

(b) Analisamos a generalização dos modêlos anisotrópicos tipos de Bianchi I e IX para a teoria de Einstein-Cartan, tendo como fontes o campo de Dirac e uma poeira com spin. Em ambos os casos, mostramos que a anisotropia dos modêlos fica restrita pelo tipo de distribuição de spin. Em particular, mostramos que o modêlo Mixmas ter (Bianchi tipo IX) é incompatível com fontes do tipo poeira com spin ou campo de Dirac. No caso do modêlo Bianchi tipo I, mostramos que em ambos os casos a distribuição de spins permite a existência de apenas um eixo de anisotropia. A solução cosmológica com fontes do tipo poeira com spin não foi conseguida. Para o caso do campo de Dirac, uma solução cosmológica foi obtida, na qual as fontes das equações de Einstein-Cartan são neutrinos.

(c) Utilizando o formalismo desenvolvido por Utiyama, mostramos que a teoria de Einstein-Cartan é a teoria de gauge local do grupo de Poincaré. Geometricamente, os potenciais de gauge são identificados com as componentes do tensor de contorsão. No caso em que a Lagrangeana da matéria é a Lagrangeana do campo de Dirac, verificamos que esta interpretação está de acordo com a análise do campo de Dirac como fonte de torsão em espaços de Riemann-Cartan feita no Capítulo 7.

(d) Apresentamos um estudo inicial sobre a formulação ADM da teoria de Einstein-Cartan. Utilizamos o formalismo de formas diferenciais; obtivemos a Lagrangena e a Hamiltoniana do campo gravitacional de Einstein-Cartan. As equações de movimento foram obtidas para o caso particular no qual excluimos a Lagrangeana de matéria e verificamos que neste caso as equações de vínculo conduzem a uma torsão nula, o que era de se esperar. Indicamos quais as modificações nas equações que são introduzidas pela Lagrangeana de matéria.

(e) Analisamos (sem muitos detalhes) o caso de um campo vetorial massivo como fonte das equações de Einstein-Cartan e mostramos que, como no caso do campo de Dirac, a torsão é uma consequência da auto-interação do campo.

(f) Analisamos também as equações de Papapetrou para o movimento de uma partícula com spin em um campo gravitacional, no que se refere à necessidade de imposição de condições extras para a completa determinação do movimento da partícula. Obtivemos um limite clássico (WKB) para a equação de Dirac em campos gravitacionais de Einstein-Cartan, que se reduz a equação de Papapetrou no caso de torsão nula.

2ª parte:

Consideramos uma geometria de Riemann-Cartan restrita, na qual a torsão tem apenas traço e pseudo-traço. Escolhemos Lagrangeanas do tipo de Maxwell para o traço T^{μ} e o pseudo-traço Z^{μ} e verificamos que devido à Lagrangeana do campo vetorial ter sido escolhida como o escalar de curvatura do espaço de Riemann-Cartan, os campos T^{μ} e Z^{μ} adquirem uma massa. Analisamos a situação na qual os dois campos definem uma única direção, o traço é imaginário puro e o pseudo-traço é real. Considera mos, neste caso, a equação de movimento do campo de Dirac e mostramos que esta equação pode ser intepretada como uma equação para uma partícula de spin 1/2, em uma variedade riemanniana, interagindo com um campo vetorial. Esta interação não conserva a paridade, e a expressão obtida para a constante de acoplamento mostra uma dependência da intensidade da força no alcance da interação. Deste resultado, verificamos que o nosso modêlo contém uma hierarquia contínua de forças, mas não inclui interações de longo alcance.

What we call the beginning is often the end
And to make an end is to make a beginning.
The end is where we start from

T.S. Eliot: "Four Quartets,
Little Gidding, 214-216

Apêndice I

Da definição (9.4) da curvatura extrínseca, tem-se que

$$
\begin{aligned}
R_{(AB)} &= \langle \bar{\nabla}_{(A} e_{B)} \, , n \rangle = n^{\alpha} \bar{\Gamma}_{\alpha\,(AB)} \\
&= \frac{1}{N} \left(\bar{\Gamma}_{0\,(AB)} - S^{c} \bar{\Gamma}_{c\,(AB)} \right)
\end{aligned}
\qquad \text{(I.1)}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{0AB} = \frac{1}{2} &\left(g_{0A|B} + g_{0B|A} - g_{AB|0} \right) \\
&+ \bar{\tau}_{A0B} + \bar{\tau}_{B0A} - \bar{\tau}_{0BA}
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\bar{\Gamma}_{0(AB)} = S_{(A|B)} + \bar{\tau}_{(A|0|B)} - \frac{1}{2} \dot{g}_{AB} \qquad \text{(I.2)}
$$

Substituindo (I.2) em (I.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
R_{(AB)} &= \frac{1}{2N} \Big(S_{A|B} - S_{c} \Gamma^{c}{}_{BA} + S_{B|A} - S_{c} \Gamma^{c}{}_{AB} \\
&\qquad + \bar{\tau}_{A0B} + \bar{\tau}_{B0A} \Big) \\
&= \frac{1}{2N} \left(2\, g_{c(A} \nabla_{B)} S^{c} - \dot{g}_{AB} - \bar{\tau}_{A0B} + \bar{\tau}_{B0A} \right)
\end{aligned}
$$

que é a expressão (9.38).

Apêndice II - *Expressão (9.51) para a Hamiltoniana* H_G

A expressão (9.46) da Hamiltoniana H_G se escreve

$$\mathbb{H}_G = \Pi^{AB} \dot{g}_{AB} - \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$$

O primeiro termo da expressão acima pode ser posto, sem dificuldades, sob a forma

$$\Pi^{AB} \dot{g}_{AB} = 2 \Pi_A{}^B \overset{T}{\nabla}_B S^A + 2N \left(\Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi_{AB} - \tfrac{1}{2} \Pi \wedge {}^*\Pi \right) \qquad \text{(II.1)}$$

onde $^*(\ )$ significa o dual de ( ).

Vejamos agora o termo $-\mathbb{L}_1$

$$-\mathbb{L}_1 = N \left(R_A \wedge R_B + 2 \mathfrak{F}_{BD}\, \theta^D \wedge R_A \right) \wedge \epsilon^{AB}$$
$$= N \left(R_{DA} R_{CB} + 2 \mathfrak{F}_{BD} R_{CA} \right) \theta^D \wedge \theta^C \wedge \epsilon^{AB}$$

Mas, $\theta^D \wedge \theta^C \wedge \varepsilon^{AB} = (g^{CB} g^{AD} - g^{CA} g^{BD}) \varepsilon$ e, portanto,

$$-\mathbb{L}_1 = N \left(R^2 - R^{(AB)} R_{(AB)} + 2 \mathfrak{F}^{(AB)} \mathfrak{F}_{(AB)} - 2 \mathfrak{F} R + R^{[AB]} R_{[AB]} + 2 \mathfrak{F}^{[AB]} R_{[AB]} \right) \qquad \text{(II.2)}$$

Usando agora que

$$R^{(AB)} - \mathcal{S}^{(AB)} = {}^{*}\left(\frac{1}{2}\Pi g^{AB} - \Pi^{AB}\right)$$

$$g_{AB}\left(R^{(AB)} - \mathcal{S}^{(AB)}\right) = \frac{1}{2}{}^{*}\Pi$$

$$\left(R^{(AB)} - \mathcal{S}^{(AB)}\right)\left(R_{(AB)} - \mathcal{S}_{(AB)}\right) = \frac{1}{4}\left({}^{*}\Pi\right)^2 + {}^{*}\Pi^{AB}\,{}^{*}\Pi_{AB}$$

a expressão (II.2) se escreve

$$-\mathbb{L}_1 = N\left[\frac{1}{2}\left({}^{*}\Pi\right)^2 - {}^{*}\Pi^{AB}\,{}^{*}\Pi_{AB} + \mathcal{S}^{(AB)}\mathcal{S}_{(AB)} - \mathcal{S}^2 \right.$$
$$\left. + R^{[AB]}R_{[AB]} + 2\mathcal{S}^{[AB]}R_{[AB]}\right]\mathbb{E}$$

ou, introduzindo (9.47) a (9.49),

$$-\mathbb{L}_1 = N\left[\frac{1}{2}\Pi\wedge{}^{*}\Pi - \Pi^{AB}\wedge{}^{*}\Pi_{AB} + \Sigma_{AB}\wedge{}^{*}\Sigma^{AB} \right.$$
$$\left. - \Sigma\wedge\Sigma + \chi_{AB}\wedge{}^{*}\chi^{AB} - 2\Delta_{AB}\,{}^{*}\chi^{AB}\right] \tag{II.3}$$

Com esta expressão para $\mathbb{L}_1$ a Hamiltoniana H_G fica sob a forma (9.51).

Apêndice III - Análise de $p_A = e_B \rfloor \Pi_A{}^B$

A Hamiltoniana H_G foi escrita sob a forma $H_G = \Pi^{AB}\dot{g}_{AB} - \mathbb{L}$ usando-se uma base que é arrastada ao longo de V, na qual $\mathcal{L}_V \equiv \partial t$. Numa base arbitrária,

$$\mathbb{H}_G = \Pi^{AB}(\mathcal{L}_V g)_{AB} - \mathbb{L}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V g &= \mathcal{L}_V (g_{AB}\,\theta^A \otimes \theta^B) \\ &= (\mathcal{L}_V g_{AB})\,\theta^A \otimes \theta^B + g_{AB}\left[(\mathcal{L}_V \theta^A) \otimes \theta^B \right. \\ &\quad \left. + \theta^A \otimes (\mathcal{L}_V \theta^B)\right]\end{aligned}$$

Lembrando que $\mathcal{L}_V \theta^A = (e_C \rfloor \dot{\theta}^A)\,\theta^C$ segue que

$$\begin{aligned}\Pi^{AB}(\mathcal{L}_V g)_{AB} &= \Pi^{AB}\dot{g}_{AB} + 2\,\Pi_A{}^B \wedge (e_B \rfloor \dot{\theta}^A) \\ &= \Pi^{AB}\dot{g}_{AB} + (2\,e_B \rfloor \Pi_A{}^B) \wedge \dot{\theta}^A \\ &= \Pi^{AB}\dot{g}_{AB} + p_A \wedge \dot{\theta}^A\end{aligned}$$

Desta expressão, podemos identificar as quantidades p_A como os momentos conjugados com θ^A.

Apêndice IV - *Cálculo das Variações da Hamiltoniana* H_G

Vamos calcular separadamente as variações das seguintes quantidades

(A) $\Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi_{AB}$

(B) $\Pi \wedge {}^*\Pi$

(C) $\Sigma_{AB} \wedge {}^*\Sigma^{AB}$

(D) $\Sigma \wedge {}^*\Sigma$

(E) $\chi_{AB} \wedge {}^*\chi^{AB}$

(F) $\Delta^{AB} \wedge {}^*\chi_{AB}$

(G) $\mathbb{E}^{A}{}_{B} \wedge \left(\Omega^{B}{}_{A} - 2\,Q_{A}\Theta^{B}\right)$

(H) $\mathbb{E}^{A}{}_{B} \wedge \zeta^{B}{}_{CA}\theta^{C}$

(I) $-S^{A}\overset{T}{\mathbb{D}}\mathcal{S}_{A}$

Antes de calcularmos as variações destas quantidades, é conveniente estabelecer alguns resultados de caráter geral.

Consideremos uma 3-forma do tipo $\omega = f\,\varepsilon$ onde f é uma função escalar arbitrária. Então, $^*\omega = f$ e

$$\delta\omega = (\delta f)\,\epsilon + f\,\delta\epsilon$$

$$= \delta(^*\omega)\,\epsilon + \frac{1}{2} f\,(\delta g_{AB})\,g^{AB}\,\epsilon \qquad \text{(IV.1)}$$

Tomando o dual desta expressão,

$$^*(\delta\omega) = \delta\,^*\omega + \frac{1}{2}\,\delta g_{AB}\,g^{AB}\,^*\omega \qquad \text{(IV.2)}$$

A variação de uma quantidade do tipo $\omega^A \wedge {}^*\omega_A$, onde ω^A é uma 3-forma com valores tensoriais e é calculada lembrando que se λ e θ são p-formas, $\lambda \wedge {}^*\theta = \theta \wedge {}^*\lambda$. Tem-se que

$$\delta(\omega^A \wedge {}^*\omega_A) = \delta\omega^A \wedge {}^*\omega_A + \omega^A \wedge \delta\,^*\omega_A$$

$$= \delta\omega^A \wedge {}^*\omega_A + \delta\omega_A \wedge {}^*\omega^A$$

$$-\frac{1}{2}\,g^{AB}\,\delta g_{AB}\,\omega^A \wedge {}^*\omega_A \qquad \text{(IV.3)}$$

Lembremos, finalmente, que

$$\delta\epsilon^A{}_E = \frac{1}{2}\,(g^{AB}g^{CD} - g^{AC}g^{BD}$$

$$- g^{AD}g^{BC})\,\delta g_{CD}\,\epsilon_{BE} \qquad \text{(IV.4)}$$

e, se ω^A é uma 0-forma, ${}^*\omega^A = \omega^A \varepsilon$ e

$$\delta(\omega_A \wedge {}^*\omega^A) = \delta(\omega_A \omega^A \varepsilon)$$

$$= \delta\omega_A \wedge {}^*\omega^A + (\delta\omega^A)\, {}^*\omega_A + \tfrac{1}{2}\, \delta g_{AB}\, g^{AB}\, \omega_A \wedge {}^*\omega^A \qquad \text{(IV.5)}$$

Com estes resultados, os cálculos das variações das expressões (A) — (I) não apresentam dificuldades:

(A) $$\delta(\Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi_{AB}) = 2\,(\delta\Pi^{AB}) \wedge {}^*\Pi_{AB} + \delta g_{AB}\left(2\Pi_C{}^{(A} \wedge {}^*\Pi^{B)C} - \tfrac{1}{2}\, g^{AB}\, \Pi^{CD} \wedge {}^*\Pi_{CD}\right)$$

(B) $$\delta(\Pi \wedge {}^*\Pi) = 2\, g_{AB}\,(\delta\Pi^{AB}) \wedge {}^*\Pi + \delta g_{AB}\left(2\Pi^{AB} \wedge {}^*\Pi - \tfrac{1}{2}\, g^{AB}\, \Pi \wedge {}^*\Pi\right)$$

(C) $$\delta(\Sigma_{AB} \wedge {}^*\Sigma^{AB}) = 2\,(\delta\Sigma_{AB}) \wedge {}^*\Sigma^{AB} + \delta g_{AB}\left(-2\,\Sigma^{C(A} \wedge {}^*\Sigma^{B)}{}_C + \tfrac{1}{2}\, g^{AB}\, \Sigma_{CD} \wedge {}^*\Sigma^{CD}\right)$$

(D) $$\delta(\Sigma \wedge {}^*\Sigma) = 2\, g^{AB}\,(\delta\Sigma_{AB}) \wedge {}^*\Sigma + \delta g_{AB}\left(-2\,\Sigma^{AB} \wedge {}^*\Sigma + \tfrac{1}{2}\, g^{AB}\, \Sigma \wedge {}^*\Sigma\right)$$

(E) $$\delta(\chi_{AB}\wedge{}^*\chi^{AB}) = 2(\delta\chi_{AB})\wedge{}^*\chi^{AB}$$
$$+\delta g_{AB}\left(2\chi^{C(A}\wedge{}^*\chi^{B)}{}_C + \tfrac{1}{2}g^{AB}\chi_{CD}\wedge{}^*\chi^{CD}\right)$$

(F) $$\delta(\Delta^{AB}\wedge{}^*\chi_{AB}) = \delta\chi_{AB}\wedge{}^*\Delta^{AB} + \delta\Delta^{AB}\wedge{}^*\chi_{AB}$$
$$+\delta g_{AB}\left(2\Delta^{C(A}\wedge{}^*\chi^{B)}{}_C + \tfrac{1}{2}g^{AB}\Delta^{CD}\wedge{}^*\chi_{CD}\right)$$

(G) $$\delta\left[\mathfrak{E}^A{}_B\wedge(\Omega^B{}_A - Q_A\,\Theta^B)\right] =$$
$$= \delta g_{AB}\,J^{CDAB}\,\mathfrak{E}_{CE}\wedge\left(\Omega^B{}_A - 2Q_A\,\Theta^B\right)$$
$$+\mathfrak{E}^A{}_B\wedge\mathbb{D}\,\delta\omega^B{}_A - 2\,\delta Q_A\,\mathfrak{E}^A{}_B\wedge\Theta^B$$
$$-2Q_A\,\mathfrak{E}^A{}_B\wedge\delta\omega^B{}_C\wedge\theta^C$$

(H) $$\delta\, d(\mathfrak{E}^A{}_B\wedge\tau^B{}_A) = d\left[\delta(\mathfrak{E}^A{}_B\wedge\tau^B{}_A)\right], \quad \tau^B{}_A \equiv \tau^B{}_{CA}\theta^C$$
$$= d\left(J^{ACDE}\,\delta g_{DE}\,\mathfrak{E}_{CB}\wedge\tau^B{}_A + \mathfrak{E}^A{}_B\wedge\delta\tau^B{}_A\right)$$
$$= d\left[J^{ACDE}\,\delta g_{DE}\,\mathfrak{E}_{CB}\wedge\tau^B{}_A + \mathfrak{E}^A{}_B\wedge\left(e_A\,\lrcorner\,(\delta\omega^B{}_C\wedge\theta^C)\right)\right]$$

(I) $$-S^A\,\delta\overset{T}{\mathbb{D}}\,\mathcal{P}_A = -S^A\left[\overset{T}{\mathbb{D}}\,\delta\mathcal{P}_A - \delta\overset{T}{\omega}{}^B{}_A\wedge\mathcal{P}_B\right]$$
$$= -d(S^A\,\delta\mathcal{P}_A) + \overset{T}{\mathbb{D}}S^A\wedge\delta\mathcal{P}_A + S^B\,\delta\omega^A{}_B\wedge\mathcal{P}_A$$
$$+S^A\,\delta\tau^B{}_A\wedge\mathcal{P}_B$$

$$= (\overset{T}{\mathbb{D}} S^A) \wedge \delta \wp_A + \delta\omega^A{}_B \wedge (N\, n \rfloor (\theta^B \wedge \wp_A))$$

$$- d(S^A \delta \wp_A)$$

Mas,

$$\overset{T}{\mathbb{D}} S^A \wedge \delta \wp_A = 2 \overset{T}{\mathbb{D}} S^A \wedge e_B \rfloor \delta \Pi^B{}_A$$

$$= 2 \overset{T}{\nabla}_B S^A \delta (g_{AC} \Pi^B{}_C)$$

$$= \delta \Pi^{AB} (g_{AC} \overset{T}{\nabla}_B S^C + g_{CB} \overset{T}{\nabla}_A S^C)$$

$$+ \delta g^{AB} (\Pi_A{}^C \overset{T}{\nabla}_C S_B + \Pi^C{}_B \overset{T}{\nabla}_C S_A)$$

e, portanto,

$$- S^A \delta \overset{T}{\mathbb{D}} \wp_A = \delta \Pi^{AB} (g_{AC} \overset{T}{\nabla}_B S^C + g_{CB} \overset{T}{\nabla}_A S^C)$$

$$+ \delta g^{AB} (\Pi_A{}^C \overset{T}{\nabla}_C S_B + \Pi^C{}_B \overset{T}{\nabla}_C S_A)$$

$$+ \delta \omega^A{}_B \wedge [N\, n \rfloor (\theta^B \wedge \wp_A)] - d(S^A \delta \wp_A)$$

Apêndice V - Sobre a Teoria Clássica de Partículas com Spin em Campos Gravitacionais

O problema do movimento de partículas com spin em campos gravitacionais foi abordado por diversos autores, com procedimentos essencialmente distintos. As teorias de Mathisson, Papapetrou e Tulczyjew que tratam do movimento de corpos de teste, num dado campo gravitacional, usando momentos de multipolos são as mais simples Estas teorias, no entanto, são abertas a várias objeções. Interessa-nos analisar alguns detalhes da teoria de Papapetrou[25].

Papapetrou considerou um sistema descrito por um tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$, e definiu, de maneira não covariante, os momentos de multipolo de $T_{\mu\nu}$. Através das equações $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, êle obteve a equação para uma linha no interior de um "tubo de universo" do sistema, e com a hipótese de que todos os momentos de multipolo mais altos que o de dipolo se anulam, obteve as equações de movimento sob a forma

$$\frac{D}{Ds}\left(m v^{\mu} + v_{\beta}\frac{DS^{\mu\beta}}{Ds}\right) = \frac{1}{2} v_{\beta} R^{\mu\beta}{}_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma} \qquad (V.1)$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{Ds} = v^{\mu} v^{\beta}\frac{DS^{\beta\nu}}{Ds} - v^{\nu} v^{\beta}\frac{DS^{\beta\mu}}{Ds} \qquad (V.2)$$

onde m é a massa da partícula, v^{α} a 4-velocidade, e $S^{\alpha\beta}$ é o tensor de spin. Ocorre que temos apenas sete equações independentes para dez variáveis, necessárias para descrever o movimento da partícula. É necessário então, que sejam impostas condições adicionais para que o movimento da partícula fique completamente determinado.

As equações (V.1) e (V.2) foram também obtidas por Mathisson[19] o qual usou a condição adicional

$$v_{\mu} S^{\mu\nu} = 0 \tag{V.3}$$

Estas condições foram também propostas por Schiff[26] e Pirani[27]. Nas, mesmo com a condição (V.3), as equações (V.1) e (V.2) não são suficientes para determinar o movimento da partícula. Isto pode ser visto de maneira simples no caso de espaços planos. Neste caso, $R^{\mu\beta}{}_{\rho\sigma} = 0$ e $\frac{D}{DS} \equiv \frac{d}{ds}$, e fazendo

$$p_{\mu} = m v_{\mu} + v_{\beta} \frac{d S_{\mu}{}^{\beta}}{ds} \tag{V.4}$$

as equações (V.1) e (V.2) se escrevem

$$\frac{d p_{\mu}}{ds} = 0 \tag{V.5}$$

$$\frac{dS^{\mu\nu}}{ds} = p^{\mu} v^{\nu} - p^{\nu} v^{\mu} \qquad (V.6)$$

De (V.5) segue que p_{μ} = constante. Vamos escolher um um referencial no qual $p_{\mu} = (p_0 , 0)$, e façamos $\vec{A} = (S^{01} , S^{02} , S^{03})$ e $\vec{R} = (S^{23} , S^{31} , S^{12})$.

Segue então da equação (V.5)

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = p^{0} \vec{v} \quad , \quad \frac{d\vec{R}}{ds} = 0 \qquad (V.7)$$

Além disto, tem-se que

$$p^{0} = m v^{0} - \vec{v} \cdot \frac{d\vec{A}}{ds} \qquad (V.8)$$

$$0 = m\vec{v} + v_0 \frac{d\vec{A}}{ds} + \vec{v} \times \frac{d\vec{R}}{ds}$$

$$= m\vec{v} + v_0 \frac{d\vec{A}}{ds} \qquad (V.9)$$

de modo que as equações (V.7) se reduzem a

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{m}{v_0} \\
\frac{d\vec{A}}{ds} &= p^0 \vec{v} \qquad\qquad (V.10) \\
\vec{R} &= \text{CONSTANTE}
\end{aligned}
$$

Usando agora a condição (V.3), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{A} &= 0 \\
v_0 \vec{A} &= \vec{v} \times \vec{R}
\end{aligned}
\qquad\qquad (V.11)
$$

Com $V_0 = \frac{dt}{ds}$ e $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V_0}$ tem-se que $\vec{A} = \vec{u} \times \vec{R}$ e $\frac{d\vec{A}}{dt} = p^0 \vec{u}$. Logo, $\frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{R} = p^0 \vec{u}$ e, portanto, $\vec{u}$ precessa em torno de $\vec{R}$ com velocidade angular constante e amplitude arbitrária.

Tulczyjew[20] estudou o problema do movimento de partículas com spin em campos gravitacionais basicamente seguindo as mesmas linhas que Mathisson, porém de modo mais simples e impos como condição adicional

$$p_\beta S^{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad (V.12)$$

com p_β definido por (V.4). A motivação para adotar esta condição pe que se ela for válida e o espaço for plano, então $\frac{Du^\alpha}{DS} = 0$, $\frac{DS^{\mu\nu}}{DS} = 0$, e $\frac{dm}{ds} = 0$, que são resultados esperados para uma partícula livre.

Examinemos uma outra consequência da condição (V.,2). Definindo $M^2 = p^\nu p_\nu$, tem-se da equação (V.6) que

$$p_\mu \frac{DS^{\mu\nu}}{Ds} = M^2 v^\nu - m p^\nu \qquad (V.13)$$

Mas, de $\frac{D}{DS}(p_\mu S^{\mu\nu}) = 0$ tem-se que $p_\mu \frac{DS^{\mu\nu}}{DS} = - \frac{Dp_\mu}{DS} S^{\mu\nu}$. Substituindo-se este resultado em (V.13) e multiplicando-se por $\frac{Dp_\nu}{DS}$ obtém-se

$$0 = \frac{Dp_\nu}{Ds}\frac{Dp_\mu}{Ds} S^{\mu\nu} = M^2 v^\nu \frac{Dp_\nu}{Ds} - m p^\nu \frac{Dp_\nu}{Ds} \qquad (V.14)$$

Usando agora a equação (V.1), segue que

$$\frac{D}{Ds} M^2 = 0 \qquad (V.15)$$

e portanto M é uma quantidade conservada.

Multiplicando-se a equação (V.13) por V_ν e usando a equação (V.1), obtém-se

$$M^2 - m^2 = -\frac{1}{2} V_\nu S^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\alpha\beta} S^{\alpha\beta} V^\lambda \tag{V.16}$$

donde se vê que se o espaço for plano, $M^2 = m^2$, que é um resultado desejável.

Vamos mostrar a seguir que no caso de um campo gravitacional de Einstein-Cartan linearizado a equação de movimento de uma partícula de Dirac numa aproximação do tipo WKB assume uma forma que se reduz à equação (V.1), no caso de torsão nula.

Aproximação Clássica da Equação de Dirac na Teoria de Einstein-Cartan Linearizada

Vamos chamar de aproximação fraca para o campo gravitacional de Einstein-Cartan à aproximação na qual a métrica pode ser escrita sob a forma

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta} \tag{V.17}$$

onde ε é uma quantidade muito pequena, $|\varepsilon|^2 << |\varepsilon|$ e $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski, e a torsão é também fraca no sentido de que $|\tau|^2 << |\tau|$. As equações de Einstein-Cartan linearizadas podem ser obtidas sem dificuldades[28] .

Consideremos a equação de Dirac $\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = - im\psi$. Iterando-se esta equação, obtém-se

$$\gamma^\beta \gamma^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha \psi = - m^2 \psi$$

ou

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha + \gamma^{[\beta}\gamma^{\alpha]} \nabla_\beta \nabla_\alpha \psi = - m^2 \psi \tag{V.18}$$

Fazendo nesta equação $\nabla_\beta = \partial_\beta + \overset{C}{\Gamma}_\beta$, onde $\overset{C}{\Gamma}_\beta$ é a conexão espinorial de Fock-Ivanenko generalizado para espaços de Riemann-Cartan, segue de (V.18) que

$$\Box\psi + 2\, g^{\alpha\beta}\, \overset{c}{\Gamma}_{(\alpha}\, \partial_{\beta)}\, \psi + g^{\alpha\beta} \left(\partial_\beta \overset{c}{\Gamma}_\alpha \right) \psi + \gamma^\beta \gamma^\alpha\, \overset{c}{\Gamma}_\beta\, \overset{c}{\Gamma}_\alpha\, \psi$$

$$+ \gamma^{[\beta} \gamma^{\alpha]} \left(\partial_\beta \overset{c}{\Gamma}_\alpha \right) \psi = - m^2 \psi \tag{V.19}$$

onde $\Box \equiv g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\, \partial_\nu$.

A conexão espinorial $\overset{C}{\Gamma}$, definida em (10.9) pode ser escrita como

$$\overset{c}{\Gamma}_\mu = \frac{1}{4} \left[e^{(A)}{}_{\lambda|\mu}\, e^\lambda{}_{(C)} - \left\{ {\rho \atop \mu\lambda} \right\} e^{(A)}{}_\rho\, e^\lambda{}_{(C)} \right] \gamma_{[A}\, \gamma^{C]}$$

$$- \frac{1}{4}\, K^\rho{}_{\mu\lambda}\, e^{(A)}{}_\rho\, e^\lambda{}_{(C)}\, \gamma_{[A}\, \gamma^{C]} \tag{V.20}$$

Uma escolha conveniente para as tetradas $e^\mu{}_{(A)}$ é

$$e^\mu{}_{(A)} = \delta^\mu{}_{(A)} + \varepsilon\, h^\mu{}_{(A)}$$

$$h^\mu{}_{(A)} = \delta^\nu{}_{(A)}\, h^\mu{}_\nu \tag{V.21}$$

Com esta escolha a conexão espinorial se escreve

$$\overset{c}{\Gamma}_\mu = \frac{\varepsilon}{4}\, h_{(A)\mu|(C)}\, \gamma^{[A} \gamma^{C]} - \frac{1}{4}\, K_{A\mu C}\, \gamma^{[A} \gamma^{C]} \tag{V.22}$$

Levando este resultado na equação (V.19), e fazendo a hipótese de que termos do tipo εK podem ser despreza dos, obtemos

$$\Box\psi + \left(\frac{\varepsilon}{2} h^{\alpha}{}_{(A)|(C)} - \frac{1}{2} K_{A}{}^{\alpha}{}_{C}\right)\gamma^{[A}\gamma^{C]}\psi_{|\alpha}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} h_{|(A)|(C)}\gamma^{C}\gamma^{A}\psi - \frac{1}{4}\left(K_{A}{}^{\alpha}{}_{C|\alpha} + K_{A\alpha C|\beta}\gamma^{[\beta}\gamma^{\alpha]}\right)\gamma^{[A}\gamma^{C]}\psi$$

$$= - m^{2}\psi$$

onde usamos a condição do gauge de Weyl $h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{|\mu} = \frac{1}{2} h_{|\alpha}$.

Vamos agora fazer a seguinte aproximação para o espinor $\psi(x)$:

$$\psi(x) = H(x)\, e^{i m p(x)} \tag{V.24}$$

com

$$p_{|\mu} \gg p_{|\mu|\nu} \, , \; H_{|\mu} \tag{V.25}$$

que são as condições usuais da aproximação WKB. Segue então que a equação (V.23) toma a forma

$$\begin{aligned} J(p_{|\mu}, x) = & \left(g^{\mu\nu} p_{|\mu} p_{|\nu} - 1\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2} h^{\alpha}{}_{(A)|(C)} - \right. \\ & \left. -\frac{1}{2} K_{A}{}^{\alpha}{}_{C}\right)\frac{1}{m}\langle S^{AC}\rangle p_{|\alpha} \\ & - \frac{\varepsilon}{2m^{2}} h_{|(A)|(C)}\,\overline{\Psi}\gamma^{[C}\gamma^{A]}\psi \\ & + \frac{1}{4}\overline{\Psi}\left(K_{A}{}^{\alpha}{}_{C|\alpha} + K_{A\alpha}\;\gamma^{[\beta}\gamma^{\alpha]}\right)\gamma^{[A}\gamma^{C]}\psi = 0 \end{aligned} \tag{V.26}$$

onde usamos a condição de normalização $\overline{\psi}\psi = 1$ e fizemos $< S^{AB} > = \overline{\psi}\, S^{AB}\, \psi$.

A equação (V.26) é uma equação do tipo Hamilton-Jacobi para a trajetória da partícula. Identifiquemos o momentum p_μ como

$$p_\mu \equiv P_{|\mu} \tag{V.27}$$

com

$$\begin{aligned} v^\mu &= \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial J}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_\mu}{ds} &= -\frac{\partial J}{\partial x^\mu} - p_\mu \frac{\partial J}{\partial s} \end{aligned} \tag{V.28}$$

Segue então de (V.26) que

$$\begin{aligned} v^\mu{}_{\|\lambda} v^\lambda = {} & \frac{\varepsilon}{2m} \bar{R}^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \langle S^{\alpha\beta} \rangle v^\lambda \\ & - \frac{1}{2m} K_\alpha{}^\mu{}_{\beta\,\|\lambda} v^\lambda \langle S^{\alpha\beta} \rangle \end{aligned} \tag{V.29}$$

onde as derivdas covariantes são calculadas com a conexão de Riemann-Cartan, e $\bar{R}^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$ é o tensor de Riemann calculado apenas com $h_{\alpha\beta}$. Observemos que no limite de torsão nula, esta equação se reduz à equação de Papapetrou.

REFERÊNCIAS

1. Jordan, R., *Nature*, 164, 637 (1949).
   Brans, C.H. & D.H. Dicke, *Phys.Rev.*, 124, 925 (1961).

2. Roxburgh, Ian & Reza Tavakol, Mont.Not., *R.Ast. Soc.*, 170, 599 (1975).

3. Cartan, E., *Comptes Rendues*, 174, 437 (1922); 174, 593(1922); 174, 734 (1922); 174, 857 (1922); 174, 1104 (1922); *Ann.Ec. Norm.Sup.* 40, 325 (1923).

4. Sciama, D.W., In: *Recent Developments in General Relativity*, Pergamon Press - PWN, London-Warszawa (1962).

5. Kibble, T.W.B., *J.Math.Phys.* 2, 212 (1961).

6. Hehl, F.W., *Gen.Rel. and Gravit.*, 4, 333 (1973); 5, 491 (1974).

7. Trautman, A., *Bull.Acad.Pol.Sci., Ser.Sci. Math., Astr. et Phys.*, 20, 185 (1972); 20, 503 (1972); 20, 895 (1972).

8. Trautman, A., *Nature Physical Science*, 242. 7 (1973).

9. Kopczyński, W., *Phys.Letters*, 39A, 219 (1972).

10. Kuchowicz, B., *Phys.Letters*, 54A, 13 (1975); *Acta Phys. Polon.*, B6, 173 (1975); B6, 555, (1975); *J.Phys.A: Math.,Gen.*, 8, L 29 (1975); *Current Science*, 44, 537 (1975).

11. Arbuzov, B.A., *Sov.Phys.JETP* 29, 3, 562 (1969).

12. Novello, M. & Carlos A.P. Galvão, *Geometrical models for short-range forces*, preprint A0022/76, CBPF, Ago, (1976); (submetido para publicação no *Journal of Physics*).

13. Schouten, J.A., *Ricci Calculus*, 2nd. ed., Springer Verlag, Berlin (1954).

14. Ponomariev, V.N., *Observable Effects of torsion in Space-Time*. Preprint, Inst. of Theoretical Physics, Warsaw Univ. (1971).

15. Hawking, S.W. & G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).

16. Warner, F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, Illinois (1970).

17. Hicks, N.J., *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold Company, London (1971).

18. Prasana, A.R., *Phys.Rev.*, D11, 8, 2076 (1976).

19. Mathisson, M., *Acta Phys. Polon.*, 6, 163 (1937).

20. Tulczyjew, N., *Acta Phys. Polon.*, 18, 393 (1959).

21. Hehl, F.W. & B.K. Datta, *J. Math. Phys.*, 12, 7, 1334 (1971).

22. Novello, M. & I.D. Soares, *Phys. Letters*, 56A, 6, 431 (1976).

23. Utiyama, R., *Phys. Rev.*, 101, 5, 1957 (1956).

24. Arnowitt, R.; S. Deser & C.W. Misner, *Phys. Rev.*, 113, 2, 745 (1959); 116, 5, 1322 (1959); 117, 6, 1595 (1960); *J. Math. Phys.*, 1, 5. 434 (1960).

25. Papapetrou, A., *Phil. Mag.*, 7, 40, 937)1949).

26. Schiff, L.I., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 46, 871 (1960).

27. Pirani, F.A.E., *Acta Phys. Polon.*, 15, 389 (1956).

28. Arkuszewski, W.; Kopczyński, W., & Ponomariev, V.N., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. XXI, 1, 89 (1974).