



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
LAFEX - COORDENAÇÃO DE FÍSICA EXPERIMENTAL DE ALTAS ENERGIAS
GRUPO DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS ELEMENTARES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Limites para as constantes de acoplamento da gravitação de ordem superior

BRENO LOUREIRO GIACCHINI

Orientador

Antonio José Accioly

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2015

The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds.

WILLIAM THOMSON, LORD KELVIN

27 DE ABRIL DE 1900

Agradecimentos

A Deus, inteligência suprema, causa primária de todas as coisas.

Aos meus pais, Stefânie e Clóvis, pelo apoio e incentivo de sempre e de cada dia.

A minha namorada, Yackelin, pelo carinho e companheirismo, de perto e de longe.

Ao professor Accioly, mais que um orientador, um grande amigo. Agradeço não só os ensinamentos, mas também as várias conversas, sobre Física ou sobre a vida, às vezes acompanhadas de um cafezinho, um pão-de-queijo e uma fatia de bolo de laranja.

Ao professor Tião, pelos inesquecíveis cursos de *eletromagnetismo*, *mecânica quântica* e *métodos teóricos para a física de altas energias*, pela primeira acolhida no CBPF e por haver me apresentado ao professor Accioly. De seus cursos levarei, além do conteúdo de Física, toda uma inspiração de docência.

Aos amigos do (ou no) Rio, que tornaram mais alegres meus dias nesta cidade: Felipe, Roberto, Leandro, Franciele. Em especial à Betty, pela acolhida.

Aos companheiros do CBPF, em especial à Vanessa, Erick, Gabriel, Luís, Grecia, Gilson, Wallace, Ricardo, João.

A minha família e amigos de Belo Horizonte, pelo apoio à distância e aconchego nas viagens. Em especial à avó Rosa, aos tios, a minha pequena irmã Elise e à diletta Joana.

As minhas tias e primos do Paraná, que me receberam durante duas semanas de inspirações princesinas para a escrita desta dissertação.

À professora Maria Carolina Nemes, *in memoriam*, que me incentivou a vir para o CBPF. Aos professores Rodney Josué Biezuner, Maria Carolina Aguiar, Carlos Heitor D'Ávila Fonseca, Ronald Dickman e Bernardo Riedel, pelo incentivo e amizade.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, que me propiciou as condições necessárias para que este trabalho pudesse ser realizado e me ofereceu excelentes cursos.

À Bete e ao professor Ivan, da CFC, sempre muito solícitos.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho realizamos dois estudos em gravitação de ordem superior. Primeiramente, estudamos o fenômeno de deflexão da luz pelo campo gerado por uma massa pontual. Esta análise é feita tanto classicamente quanto ao nível de árvore. Ao comparar os resultados obtidos com dados experimentais, determinamos um limite superior para a constante que acopla o termo $R_{\mu\nu}^2$: $\mathcal{O}(|\beta|) \leq 10^{62}$. Interessante notar que, ao nível semiclássico, o ângulo de espalhamento depende da energia do fóton incidente. O segundo estudo contempla o avermelhamento de linhas espectrais, devido a um campo gravitacional. O confrontamento das predições da gravitação de ordem superior com medidas experimentais, e o limite encontrado para $|\beta|$, permitem estabelecer um limite superior para o parâmetro α , relacionado ao setor R^2 : $\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{78}$.

Palavras-chave: Gravitação de ordem superior; constantes de acoplamento; gravitação semiclássica; deflexão da luz; *red-shift* gravitacional.

Áreas de conhecimento: Gravitação; Teoria Quântica de Campos.

Abstract

We study two of the classical tests of general relativity, but in the framework of higher-derivative gravity: the bending of light and the gravitational red-shift. The former is analysed in both classical and tree-level approaches. A comparison between the predicted results and the experimental data allows us to set an upper bound on the constant which makes the coupling of the $R^2_{\mu\nu}$ -sector: $\mathcal{O}(|\beta|) \leq 10^{62}$. Interestingly enough, at tree-level the scattering angle depends on the energy of the incoming photon. In the study of the red-shift of spectral lines we use the bound on $|\beta|$ and experimental measurements in order to determine an upper limit also on α – the parameter associated to the R^2 -sector – $\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{78}$.

Key-words: Higher-derivative gravity; coupling constants; semiclassical gravity; light deflection; gravitational red-shift.

Conteúdo

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Conteúdo	x
Introdução	1
1 Elementos de gravitação linearizada	5
1.1 Gravitação linearizada	5
1.2 Propagador da gravitação de ordem superior	10
1.2.1 Operadores de Barnes-Rivers	10
1.2.2 Cálculo do propagador	13
1.3 Conteúdo de partículas e unitariedade	16
1.4 O calibre de Teyssandier	17
1.5 Solução geral das equações de campo	20
1.6 Campo gerado por uma massa puntiforme	23
2 Deflexão da luz: abordagem clássica	27
2.1 Forma ε - μ das equações de Maxwell com gravidade	27
2.2 Analogia com a óptica geométrica	31

2.3	Cálculo da deflexão e limite superior para $ \beta $	33
3	Deflexão da luz: abordagem ao nível de árvore	41
3.1	Arco-íris gravitacional	41
3.2	Novo limite superior para $ \beta $	46
3.3	Comparação entre os casos clássico e semiclássico	49
4	Avermelhamento de linhas espectrais	53
4.1	Descrição do fenômeno	53
4.2	Espectro solar e limite superior para α	57
4.3	Outros dados experimentais, novos limites superiores para α	60
	Epílogo	65
	Apêndice A Equações de campo para a gravitação de ordem superior	69
	Apêndice B Teorema para o estudo da unitariedade	73
	Apêndice C Equivalência conforme e o setor de R^2	77
	Apêndice D Comportamento do ângulo de espalhamento para algumas situações limite	79
	Referências Bibliográficas	81

Introdução

Em seu célebre discurso de 27 de abril de 1900, na aurora do século XX, William Thomson mencionou duas “nuvens que obscureciam a bela e límpida dinâmica”: a negativa do experimento de Michelson-Morley e a catástrofe do ultravioleta. Não tardou muito para que a comunidade científica notasse que o teor dos termos era mais que válido; e essas pequenas “nuvens” resultaram, após consideráveis desenvolvimentos, na Relatividade Geral e na Teoria Quântica de Campos. É notável que numa mesma época estivessem brotando os germes de teorias fundamentalmente tão diferentes, uma descrevendo o micro e a outra o macro-cosmos.

Tentativas de unificação das duas descrições, a busca por uma teoria quântica da gravitação, foram feitas, sem sucesso, durante praticamente todo o século XX. A dificuldade de acordo entre elas talvez venha desde o estabelecimento dos entes matemáticos básicos sobre os quais se sustentam as teorias. Por um lado, a relatividade geral tem uma formulação geométrica, fortemente presa à noção de ponto, onde vale o princípio de equivalência. Por outro, o princípio de incerteza da teoria quântica vem negar o ponto, munindo os entes físicos primários com certa espacialidade que, inclusive, talvez seja algo de caráter mais ontológico que prático.

Apesar das diferenças fundamentais, várias tentativas foram feitas para descrever a gravitação por meio de uma teoria quântica, mudando, naturalmente, certos aspectos

de uma ou de ambas teorias. Em geral, o ponto de partida é a ação de Einstein-Hilbert da relatividade geral:

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R.$$

Em 1974, Gerard 't Hooft e Martinus Veltman mostraram que, no esquema perturbativo tradicional, a gravitação de Einstein não é renormalizável em 1 *loop*, se acoplada com campos de matéria; mas eventualmente o seria na condição de campo livre [1]. Isso foi provado incorreto em 1986, por Marc Goroff e Augusto Sagnotti: a teoria livre não é renormalizável em 2 *loops* [2].

Neste contexto, ganhou interesse a teoria de gravitação com derivadas de ordem superior (que chamamos, simplificada, “gravitação de ordem superior”). Entendida como uma extensão “natural” da lagrangeana de Einstein – mediante a inclusão de termos de curvatura ao quadrado –, foi mostrado que ela é renormalizável mesmo quando acoplada com a matéria. Este importante resultado foi apresentado por Kellogg Stelle em um artigo seminal de 1977 [3].

Infelizmente, esta teoria não é unitária, pois o propagador contém um fantasma de spin 2. Não obstante, em 1986, Ignatios Antoniadis e Terry Tomboulis argumentaram que esta excitação no propagador nu era instável, sendo inconclusiva no tocante à unitariedade da teoria [4]. Analisando, então, o propagador vestido, eles concluíram que a posição dos pólos complexos depende explicitamente do calibre e, usando argumentos de teoria quântica de campos, inferiram que a gravitação de ordem superior era unitária. Passados dois anos, Desmond Johnston mostrou que a conjectura dos autores anteriores era incorreta, e que os pólos independem do calibre; de sorte que o modelo com derivadas mais altas é, de fato, não-unitário [5].

Temos, então, uma teoria renormalizável porém não-unitária; mais uma dentre aquelas de ordem superior que não conseguem gozar, ao mesmo tempo, dessas duas propriedades [6]. Isso não a impede de ser utilizada como um modelo efetivo para baixas energias. Com efeito, vários trabalhos foram feitos neste viés [7-17]. Outrossim,

como notou Steven Weinberg, há a possibilidade de que talvez “as teorias quânticas de campos das quais somos tão orgulhosos sejam meras ‘teorias de campo efetivas’, aproximações a baixas energias de uma teoria mais fundamental”, e que os entes por elas descritos não sejam partículas, mas sim “algo um pouco diferente, cordas, por exemplo” [18]. Neste contexto é interessante notar que certas teorias quânticas com comprimento mínimo levam, de forma natural, ao aparecimento de derivadas de ordens mais altas [19, 20, 21]. No sentido contrário, eventualmente existam teorias mistas, isto é, modelos que envolvam partes clássicas e quânticas [22]. É justificado, portanto, o estudo da gravitação de ordem superior.

Esta teoria foi proposta ainda nos anos 1920, por Hermann Weyl e Arthur Eddington [23, 24, 25], que incluíram os escalares R^2 , $R_{\mu\nu}^2$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ na lagrangeana da relatividade geral. Contudo, como foi posteriormente notado, pelo teorema de Gauss-Bonnet da geometria diferencial, no espaço (3+1)-dimensional essas três quantidades não são independentes. Podemos, sem perda de generalidade, definir a lagrangeana da gravitação de ordem superior apenas com dois deles:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right).$$

A teoria tem duas constantes livres, α e β , que fazem o acoplamento dos termos de derivadas quárticas. É curioso notar que, pelo menos ao nosso conhecimento, poucos estudos foram feitos com vistas à determinação de valores para esses parâmetros [26, 27, 28]. O motivo talvez haja sido o interesse primário em questões mais técnicas (renormalizabilidade e unitariedade) e, uma vez demonstrada a não-unitariedade, a menor ênfase com que esta teoria foi estudada.

Nosso objetivo neste trabalho é justamente determinar limites para os parâmetros livres da teoria, α e β . Para tanto, estudamos dois dos chamados “testes clássicos” da relatividade geral, porém no contexto da teoria de ordem superior: a deflexão da luz e o avermelhamento de linhas espectrais em presença de gravidade. Os limites são obtidos mediante a comparação das predições da teoria com dados experimentais disponíveis

na literatura.

O estudo da deflexão da luz é feito tanto classicamente quanto ao nível de árvore, o que é, por si só, uma análise interessante. De fato, mostramos que a propagação de fótons neste contexto é dispersiva (isto é, o ângulo de espalhamento depende da energia do fóton incidente), mesmo em primeira ordem.

Ao longo deste trabalho usamos o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$), a menos quando for expresso o contrário. Definimos, ainda, a métrica de Minkovski por $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Usamos a convenção de soma de Einstein para dois índices iguais em posições diferentes. Índices gregos assumem valores entre 0 e 3, e índices latinos variam entre 1 e 3.

Elementos de gravitação linearizada

Apresentamos aspectos fundamentais da gravitação linearizada que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. Visando estudos ao nível de árvore na gravitação de ordem superior, calculamos o propagador da interação e determinamos o conteúdo de partículas desta teoria. Introduzimos, ainda, o calibre de Teyssandier, conveniente para nosso trabalho, e resolvemos as equações de campo para uma massa pontual em repouso.

1.1 Gravitação linearizada

Talvez um dos aspectos mais peculiares da gravitação, se comparada às outras interações fundamentais, seja o seu caráter universal. Universal no sentido de ser percebida por toda e qualquer forma de energia. Essa particularidade foi notada como uma dificuldade por aqueles que tentaram descrever a gravitação, no âmbito da relatividade especial, por um campo tensorial não-massivo de helicidade 2. Explicitamente: assim como no eletromagnetismo a corrente que gera o campo é conservada, no caso gravitacional também se chega a uma lei de conservação a ser satisfeita pela “corrente” associada. Contudo, isso contraria o fato de que o campo gravitacional, por conter energia, é também carga de si mesmo (como diz o adágio: “a gravitação também gra-

vita”). A relatividade geral logra incorporar este caráter singular da gravitação, mas o preço a se pagar é a ausência de uma definição global de energia.

Uma possível tentativa de incorporar aspectos gravitacionais à teoria quântica é considerar a versão linearizada da gravitação – também conhecida por “aproximação de campo fraco”. Esta teoria pode ser vista sob duas óticas diferentes[29]: i) como o limite da teoria completa no caso de campos fracos; ii) como uma descrição da gravidade via um campo tensorial num espaço-tempo plano – nas palavras de Rovelli: “*just one additional field theory with a funny gauge invariance*”[30].

Ao longo de todo este trabalho usamos a aproximação de campo fraco, e nosso ponto de vista particular é um misto dos dois acima mencionados. Consideramos que a métrica é uma pequena perturbação daquela de Minkovski: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, com $\|\kappa h_{\mu\nu}\| \ll 1$, onde $h_{\mu\nu}$ pode ser visto como um campo no espaço plano. Esperamos que se houver alguma teoria de gravitação quântica, esta deve retornar àquela no limite de campos fracos. Caso não haja uma tal teoria, nossa descrição fica como um modelo efetivo.

Nesta seção, apresentamos sucintamente os elementos geométricos sobre os quais se baseia a gravitação de Einstein – e também sua versão de ordem superior, foco deste trabalho – na sua forma linearizada[29, 31, 32].

Consoante o há pouco mencionado, a gravitação linearizada é definida por uma métrica que difere muito pouco daquela de Minkovski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad \|\kappa h_{\mu\nu}\| \ll 1, \quad (1.1)$$

onde $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ é a constante de Einstein e G é a constante de Newton. Na aproximação de campo fraco, abaixamentos (e levantamentos) de índices devem ser feitos com o tensor $\eta_{\mu\nu}$ (e $\eta^{\mu\nu}$). Podemos determinar, então, a inversa da métrica:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h_{\alpha}{}^{\nu} + \dots \quad (1.2)$$

De posse da métrica, e supondo que o espaço-tempo constitui uma variedade com

geometria (pseudo-)Riemanniana, podemos calcular seus entes geométricos. Começamos com os símbolos de Christoffel, que coincidem com os coeficientes da conexão afim e são definidos por¹

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (1.3)$$

Mantendo apenas termos até ordem κ , decorre a versão linearizada:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(\text{lin}) = \frac{\kappa}{2} (h^{\lambda}_{\nu,\mu} + h^{\lambda}_{\mu,\nu} - h_{\nu\mu}{}^{,\lambda}). \quad (1.4)$$

Este procedimento é rotineiro no que segue, em consonância com a linearização.

Com as derivadas segundas da métrica tem-se o tensor de curvatura da conexão, ou tensor de Riemann, que definimos por:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} \equiv \eta_{\lambda\alpha} (\Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\rho}^{\beta} - \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}), \quad (1.5)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho}(\text{lin}) = \frac{\kappa}{2} (h_{\lambda\rho,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\lambda\rho} - h_{\mu\rho,\lambda\nu} - h_{\lambda\nu,\mu\rho}). \quad (1.6)$$

A contração do tensor de Riemann resulta no tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\nu\rho}, \quad (1.7)$$

$$R_{\mu\nu}(\text{lin}) = \frac{\kappa}{2} [\square h_{\mu\nu} - \eta^{\lambda\rho} (\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho} + \gamma_{\lambda\nu,\mu\rho})], \quad (1.8)$$

onde definimos a quantidade

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \text{com} \quad h \equiv h^{\beta}_{\beta} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

Finalmente, a contração do tensor de Ricci fornece o escalar de curvatura:

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} \quad (1.10)$$

$$R(\text{lin}) = \kappa \left(\frac{1}{2}\square h - \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\gamma_{\lambda\mu,\nu\rho} \right). \quad (1.11)$$

¹Ao longo de todo este trabalho denotamos derivadas por componentes espaço-temporais por vírgulas, e derivadas covariantes por ponto-e-vírgulas. A menos que o contrário seja informado, os operadores \square e ∇ estão associados a derivadas tradicionais (não-covariantes).

Uma outra quantidade relevante para nossos cálculos é a densidade escalar $\sqrt{-g}$ (onde definimos $g \equiv \det \mathbf{g}$), que aparece no elemento de volume da variedade. Lembrando que para uma matriz \mathbf{g} tem-se $\text{tr}(\ln \mathbf{g}) = \ln(\det \mathbf{g})$, segue:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} &= \sqrt{-\exp \text{tr} \ln \mathbf{g}} \\
&= \sqrt{-\exp \text{tr} \ln [\boldsymbol{\eta}(\mathbf{1} + \kappa \boldsymbol{\eta} \mathbf{h})]} \\
&= \sqrt{-\det \boldsymbol{\eta} \exp \text{tr} \left[\kappa \boldsymbol{\eta} \mathbf{h} - \frac{\kappa^2}{2} (\boldsymbol{\eta} \mathbf{h})^2 + \dots \right]} \\
&= \exp \left[\frac{\kappa}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{h}) - \frac{\kappa^2}{4} \text{tr}(\boldsymbol{\eta} \mathbf{h})^2 + \dots \right] \\
&= 1 + \frac{\kappa}{2} h - \frac{\kappa^2}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{8} h^2 + \mathcal{O}(\kappa^3), \tag{1.12}
\end{aligned}$$

onde na terceira e na última igualdade usamos que $\|\kappa h_{\mu\nu}\| \ll 1$.

De posse de todos esses elementos, podemos passar ao estudo das lagrangeanas da gravitação. As equações de Einstein da relatividade geral podem ser obtidas por meio de um princípio variacional envolvendo a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R. \tag{1.13}$$

Vale notar que a lagrangeana associada contém derivadas de ordem dois da métrica. Esta ação pode ser escrita na chamada “forma gama-gama”, bastante útil na realização de cálculos e que contém apenas derivadas primeiras da métrica. Princípios definindo a densidade tensorial $H^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$, donde $\sqrt{-g} R = H^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Usando a expressão para o tensor de Ricci em termos dos símbolos de Christoffel e considerando que

$$H^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha = (H^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)_{,\alpha} - H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \quad \text{e} \quad H^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha = (H^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)_{,\nu} - H^{\mu\nu}{}_{,\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha,$$

podemos reescrever (1.13) como

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \left[H^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha) + H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - H^{\mu\nu}{}_{,\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \right], \tag{1.14}$$

onde ignoramos os termos de superfície.

Como $H^{\mu\nu}$ é o produto de um escalar pela métrica, pelo postulado de metricidade, sua derivada covariante é nula. Então,

$$H^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = H^{\mu\nu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\beta} - H^{\beta\nu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - H^{\mu\beta}\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}. \quad (1.15)$$

Substituindo este resultado – e o análogo para a derivação com respeito a ν – em (1.14) chegamos à forma gama-gama da ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(-\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right), \quad (1.16)$$

à qual se associa a [densidade de] lagrangeana

$$\mathcal{L}_R = \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(-\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right). \quad (1.17)$$

Ao incluirmos termos de derivadas mais altas que dois na ação de Einstein-Hilbert obtemos a chamada gravitação de ordem superior. Estudaremos apenas o caso que contém no máximo derivadas quárticas. Os termos que podem contribuir nesta ordem são aqueles formados pelos escalares R^2 , $R_{\alpha\beta}^2$ e $R_{\alpha\beta\mu\nu}^2$.

É bem conhecido, entretanto, que esses escalares não são independentes, uma vez que, pelo teorema de Gauss-Bonnet, uma combinação dos três está relacionada com a característica de Euler da variedade – um invariante topológico. Pode-se mostrar que em 3+1 dimensões² o termo de Gauss-Bonnet é nulo:

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (R^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}^2) = 0, \quad (1.18)$$

o que nos possibilita escrever, sem perda de generalidade, a lagrangeana da gravitação de ordem superior apenas com o escalar de curvatura e o tensor de Ricci:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right), \quad (1.19)$$

²Em outras dimensões a contribuição do termo de Gauss-Bonnet pode ser não-trivial. Contudo, ela é sempre nula na versão linearizada [33], utilizada em estudos ao nível de árvore como os deste trabalho.

onde α e β são constantes livres adimensionais. De posse da lagrangeana podemos calcular a equação de movimento do campo e o propagador associado. O cálculo deste é feito de forma explícita na próxima seção; já a dedução da equação de movimento foi deixada para o Apêndice A. A partir deste momento, por motivos já citados no princípio desta seção, trabalharemos apenas na aproximação de campo fraco; deixaremos, pois, este contexto subentendido. Nesse espírito, por economia de notação, omitiremos as indicações “(lin)” nos entes geométricos linearizados (vide (1.4), por exemplo).

1.2 Propagador da gravitação de ordem superior

Antes de procedermos o cálculo do propagador da gravitação de ordem superior, introduzimos os operadores de Barnes-Rivers [33, 34]. Estes operadores formam uma base conveniente para efetuar as contas sem grandes dificuldades algébricas.

1.2.1 Operadores de Barnes-Rivers

Sejam os operadores de projeção vetorial longitudinal e transversal, respectivamente definidos no espaço dos momentos por (k_μ é o momento do gráviton trocado):

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad \text{e} \quad \omega_{\mu\nu} \equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (1.20)$$

de tal forma a satisfazer as relações de idempotência e ortogonalidade:

$$\theta_{\mu\rho}\theta^\rho{}_\nu = \theta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \omega_{\mu\nu}, \quad \theta_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = 0. \quad (1.21)$$

Os operadores de Barnes-Rivers em 3+1 dimensões são definidos, em termos dos

operadores de projeção vetorial, por³:

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (1.22)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda}), \quad (1.23)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (1.24)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (1.25)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (1.26)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}. \quad (1.27)$$

Os quatro primeiros, $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(0-s)}$ e $P^{(0-w)}$, são projetores mutualmente ortogonais. No referencial de repouso de um campo tensorial massivo eles projetam, respectivamente, as componentes de spin 2, de spin 1 e as duas partes de spin 0 do campo. Os dois operadores restantes são de transferência do spin 0 e garantem a completude do conjunto. A Tabela 1.1 apresenta os produtos dos operadores de Barnes-Rivers, dois a dois.

Não é difícil verificar que, nesta base, o operador identidade é

$$\mathbb{1} = (P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)})_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}). \quad (1.28)$$

A tarefa de expandir um dado operador na base de Barnes-Rivers pode ser bastante simplificada tomando-se em conta as seguintes identidades, de fácil demonstração:

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} = \left[3P^{(0-s)} + \sqrt{3} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) + P^{(0-w)} \right]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \eta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha + \eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta) = (2P^{(1)} + 4P^{(0-w)})_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + \eta_{\alpha\beta}k_\mu k_\nu) = \left[\sqrt{3} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) + 2P^{(0-w)} \right]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{k^4} (k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta) = P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)}. \quad (1.32)$$

³Aqui a vírgula entre os índices indica a simetria do operador.

Tabela 1.1: Tábua multiplicativa dos operadores de Barnes-Rivers

\bullet	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

Encerramos esta seção apresentando a expressão do inverso de um operador escrito na base de Barnes-Rivers. Seja um operador \mathcal{O} escrito na forma genérica:

$$\mathcal{O} = x_2 P^{(2)} + x_1 P^{(1)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)}.$$

Naturalmente, seu inverso \mathcal{O}^{-1} pode ser decomposto na mesma base:

$$\mathcal{O}^{-1} = y_2 P^{(2)} + y_1 P^{(1)} + y_s P^{(0-s)} + y_w P^{(0-w)} + y_{sw} P^{(0-sw)} + y_{ws} P^{(0-ws)}.$$

Considerando que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = \mathbb{1} = P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}$, decorre o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_s y_s + x_{ws} y_{sw} = 1 \\ x_w y_w + x_{sw} y_{ws} = 1 \\ x_s y_{ws} + x_{ws} y_w = 0 \\ x_w y_{sw} + x_{sw} y_s = 0 \\ x_1 y_1 = 1 = x_2 y_2. \end{cases} \quad (1.33)$$

Enquanto as últimas equações são imediatas, as quatro primeiras podem ser resolvidas via o método de Crámer, por exemplo. O resultado é:

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_w x_s - x_{ws} x_{sw}} (x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)}). \quad (1.34)$$

1.2.2 Cálculo do propagador

Para calcular o propagador da gravitação de ordem superior, dada pela densidade de lagrangeana (1.19), é mister escolher um calibre. Um calibre conveniente é o de de Donder (também conhecido no âmbito da relatividade geral clássica como “condição de coordenadas harmônicas”): $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$. Dispondo das expressões (1.2) e (1.4), para a inversa da métrica e para os coeficientes da conexão, pode-se mostrar que a condição de de Donder equivale a:

$$\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0, \quad \gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (1.35)$$

associando-se a seguinte lagrangeana fixadora de calibre:

$$\mathcal{L}_{fc} = \frac{1}{2\lambda} (\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu})^2, \quad (1.36)$$

onde λ é um parâmetro de calibre.

Uma vez escolhido o calibre, o próximo passo para calcular o propagador é escrever a lagrangeana na forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, onde $\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ é o operador de onda, simétrico na troca $\mu\nu \leftrightarrow \alpha\beta$ e em cada par separadamente. O propagador da teoria é o inverso do operador de onda. Para facilitar as contas, separamos a lagrangeana nas contribuições de cada termo, escrevendo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{R^2} + \mathcal{L}_{R_{\mu\nu}^2} + \mathcal{L}_{fc}, \quad (1.37)$$

com

$$\mathcal{L}_R = \frac{2R}{\kappa^2}\sqrt{-g}, \quad \mathcal{L}_{R^2} = \frac{\alpha R^2}{2}\sqrt{-g}, \quad \mathcal{L}_{R_{\mu\nu}^2} = \frac{\beta R_{\mu\nu}^2}{2}\sqrt{-g}. \quad (1.38)$$

Usando os elementos (1.2), (1.4), (1.12) e (1.17) calculados na Seção 1.1, e considerando apenas até termos de ordem κ^2 obtemos:

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2}h_{\mu\nu} [2\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta - 2\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\square] h_{\alpha\beta}, \quad (1.39)$$

$$\mathcal{L}_{R^2} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu} [\alpha\kappa^2 (\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\square\square - 2\eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\square + \partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\partial^\beta)] h_{\alpha\beta}, \quad (1.40)$$

$$\mathcal{L}_{R_{\mu\nu}^2} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[\frac{\beta\kappa^2}{4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square\square + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \square\square - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square + \right. \\ \left. - 2\eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha \square + 2\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta) \right] h_{\alpha\beta}, \quad (1.41)$$

$$\mathcal{L}_{fc} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right) \right] h_{\alpha\beta}. \quad (1.42)$$

Em cada uma das lagrangeanas acima, o termo entre colchetes corresponde a um operador de onda; o operador total é a soma de todos eles. Evidenciando as simetrias desses operadores perante as trocas (α, β) , (μ, ν) e $(\alpha\beta, \mu\nu)$, temos:

$$\mathcal{O}_R^{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta + \eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha + \eta^{\nu\beta} \partial^\mu \partial^\alpha + \eta^{\nu\alpha} \partial^\mu \partial^\beta \right) + \\ - \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta - \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square - \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} \right) \square, \quad (1.43)$$

$$\mathcal{O}_{R^2}^{\mu\nu, \alpha\beta} = \alpha\kappa^2 \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square\square - \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \square - \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \square + \partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta \right), \quad (1.44)$$

$$\mathcal{O}_{R_{\mu\nu}^2}^{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{\beta\kappa^2}{4} \left[\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square\square + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta}) \square\square - (\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta) \square + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha + \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta + \eta^{\nu\beta} \partial^\mu \partial^\alpha + \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\beta) \square + 2\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta \right], \quad (1.45)$$

$$\mathcal{O}_{fc}^{\mu\nu, \alpha\beta} = -\frac{1}{4\lambda} \left(\eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha + \eta^{\nu\beta} \partial^\mu \partial^\alpha + \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta + \eta^{\nu\alpha} \partial^\mu \partial^\beta + \right. \\ \left. - 2\eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square \right). \quad (1.46)$$

Passando, agora, para o espaço dos momentos, com auxílio das identidades (1.28)-(1.32) podemos expressar esses operadores na base de Barnes-Rivers:

$$\mathcal{O}_R^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) = -\frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\alpha} k^\nu k^\beta + \eta^{\mu\beta} k^\nu k^\alpha + \eta^{\nu\beta} k^\mu k^\alpha + \eta^{\nu\alpha} k^\mu k^\beta \right) + \\ + \eta^{\mu\nu} k^\alpha k^\beta - \eta^{\alpha\beta} k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} k^2 + \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} \right) k^2 \\ = k^2 [P^{(2)} - 2P^{(0-s)}]^{\mu\nu, \alpha\beta}, \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{R^2}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) &= \alpha\kappa^2 (\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^4 - \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu k^2 - \eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta k^2 + k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta) \\
&= 3\alpha\kappa^2 k^4 [P^{(0-s)}]^{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{1.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{R_{\mu\nu}^2}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) &= \frac{\beta\kappa^2}{4} \left[\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^4 + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) k^4 - (\eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta) k^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha + \eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha + \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\beta) k^2 + 2k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta \right] \\
&= \frac{\beta\kappa^2 k^4}{4} [P^{(2)} + 4P^{(0-s)}]^{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{1.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{f_c}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) &= \frac{1}{4\lambda} (\eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha + \eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha + \eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \eta^{\nu\alpha}k^\mu k^\beta - 2\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta - 2\eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu + \\
&\quad + \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}k^2) \\
&= \frac{k^2}{4\lambda} [2P^{(1)} + P^{(0-w)} + 3P^{(0-s)} - \sqrt{3} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})]^{\mu\nu,\alpha\beta}. \tag{1.50}
\end{aligned}$$

O operador de onda completo, somando todas as contribuições acima, é, então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) &= \left\{ \frac{k^2}{2\lambda} P^{(1)} + \left(k^2 + \frac{\beta\kappa^2}{4} k^4 \right) P^{(2)} + \frac{k^2}{4\lambda} P^{(0-w)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[k^2 \left(\frac{3}{4\lambda} - 2 \right) + \kappa^2 k^4 (3\alpha + \beta) \right] P^{(0-s)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2\sqrt{3}}{4\lambda} (P^{(0-ws)} + P^{(0-sw)}) \right\}^{\mu\nu,\alpha\beta}. \tag{1.51}
\end{aligned}$$

A inversão desse operador é imediata a partir da fórmula (1.34) e fornece o propagador da interação:

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv (\mathcal{O}^{-1})^{\mu\nu,\alpha\beta} &= \left\{ \frac{m_2^2}{k^2(m_2^2 - k^2)} P^{(2)} + \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^{(0-s)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{4\lambda}{k^2} + \frac{3m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \right] P^{(0-w)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{3}m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] \right\}^{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{1.52}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$m_0^2 \equiv \frac{2}{(3\alpha + \beta)\kappa^2} \quad \text{e} \quad m_2^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}. \quad (1.53)$$

1.3 Conteúdo de partículas e unitariedade

O conteúdo de partículas da gravitação de ordem superior pode ser determinado ao saturar os índices do propagador e analisar seus pólos. Definimos o propagador saturado PS como a contração do propagador com correntes externas conservadas $T^{\mu\nu}$:

$$PS(k) \equiv T^{\mu\nu}(k)D_{\mu\nu,\alpha\beta}(k)T^{\alpha\beta}(k). \quad (1.54)$$

Como as correntes $T^{\mu\nu}$ são conservadas, vale $k_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Decorre, então, que os operadores $P^{(0-sw)}$, $P^{(0-ws)}$, $P^{(0-w)}$ e $P^{(1)}$ não contribuem para o propagador saturado, pois são ortogonais às correntes. Temos, então:

$$PS(k) = \frac{T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{2}}{k^2} - \frac{T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{3}}{k^2 - m_2^2} + \frac{\frac{T^2}{6}}{k^2 - m_0^2}. \quad (1.55)$$

O conteúdo de partículas da teoria é, além do famigerado gráviton não-massivo de helicidade 2, uma partícula de massa m_0 e spin 0 e outra de massa m_2 e spin 2. Para que as excitações massivas sejam não-taquiônicas, devemos ter $m_2^2, m_0^2 > 0$, o que implica nos vínculos

$$3\alpha + \beta > 0 \quad \text{e} \quad \beta < 0. \quad (1.56)$$

Para verificar a unitariedade ao nível de árvore de uma teoria, basta calcular os resíduos do propagador saturado em seus pólos simples [33]. Resíduos menores que zero estão associados a partículas de energia negativa – “fantasmas”, no jargão da teoria de campos –, que violam a unitariedade da teoria ao nível de árvore. Caso todos os resíduos sejam não-negativos, a teoria é unitária ao nível de árvore; outras inspeções devem ser realizadas para verificar se essa propriedade se estende ao nível de *loop*.

No Apêndice B mostramos que em $k^2 = 0$ tem-se $T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{2} \geq 0$, e que $T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{3} > 0$ para $k^2 = m_2^2$. Logo, os resíduos dos pólos do propagador saturado são:

- i. $\text{Res}(SP)|_{k^2=0} = \left(T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{2}\right)\Big|_{k^2=0} \geq 0;$
- ii. $\text{Res}(SP)|_{k^2=m_2^2} = -\left(T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{3}\right)\Big|_{k^2=m_2^2} < 0;$
- iii. $\text{Res}(SP)|_{k^2=m_0^2} = \frac{T^2}{6}\Big|_{k^2=m_0^2} > 0.$

Concluimos, portanto, que a partícula de massa m_2 viola a unitariedade da teoria. Não obstante, pode-se dizer que, para valores familiares de energia, o fantasma não assombra[35]. Com efeito, no regime de baixas energias, caracterizado por $k^2 \ll m_2^2$, o propagador saturado (1.55) se escreve:

$$PS(k) = \frac{T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{2}}{k^2} + \frac{\frac{T^2}{6}}{k^2 - m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{m_2^2}\right) \quad (1.57)$$

$$\approx \frac{T_{\alpha\beta}^2 - \frac{T^2}{2}}{k^2} + \frac{\frac{T^2}{6}}{k^2 - m_0^2}, \quad (1.58)$$

cujos pólos têm resíduos não-negativos. Neste contexto, então, a gravitação de ordem superior pode ser entendida como uma teoria unitária efetiva.

1.4 O calibre de Teyssandier

Nesta seção apresentamos o calibre de Teyssandier[36, 37], bastante útil na busca por soluções das equações de campo da gravitação de ordem superior linearizada. Como mostraremos na seção seguinte, uma de suas principais virtudes é separar as contribuições de cada um dos campos: os massivos de spin 0 e 2, e o não-massivo de helicidade 2.

As equações de campo da gravitação de ordem superior linearizada são (vide o Apêndice A):

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square\right)\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\eta_{\mu\nu}\right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)(\eta_{\mu\nu}\square R - \partial_\mu\partial_\nu R) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.59)$$

com $R_{\mu\nu}$ e R dados pelas expressões (1.8) e (1.11), e onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de momento-energia da relatividade especial, fonte do campo.

A contração desta equação com $\eta^{\mu\nu}$ fornece

$$-\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\square R = -\frac{T}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square\right)R. \quad (1.60)$$

Substituindo (1.60) em (1.59) temos:

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square\right)R_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square\right)\eta_{\mu\nu}R + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\partial_\mu\partial_\nu R = \frac{T}{6}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \quad (1.61)$$

Recordando que o tensor de Ricci é: $R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}[\square h_{\mu\nu} - (\gamma_{\rho\mu,\nu}{}^\rho + \gamma_{\rho\nu,\mu}{}^\rho)]$, podemos reescrever a equação (1.61) na seguinte forma:

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\left(-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6\kappa}R\eta_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = \frac{\kappa}{4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3}\eta_{\mu\nu}\right), \quad (1.62)$$

onde definimos:

$$\Gamma_\mu \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\gamma_{\mu\rho}{}^{,\rho} - \frac{\kappa}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)R_{,\mu}. \quad (1.63)$$

A equação (1.62) acima é equivalente à (1.59). O calibre de Teyssandier consiste em tomar $\Gamma_\mu = 0$. Vamos mostrar que ele de fato é um calibre, isto é, que é sempre possível escolher um sistema de coordenadas tal que essa condição se cumpra.

Como um dos, por assim dizer, “objetivos” da relatividade geral era ser uma teoria que tivesse como grupo de simetria aquele das transformações arbitrárias de coordenadas – o famigerado MMG, *Manifold Mapping Group* –, suas equações de movimento contêm essa simetria⁴. A teoria continua gozando dessa propriedade ao incluirmos termos quadráticos nas curvaturas. Contudo, como aqui nos restringimos à versão linearizada, não podemos esperar que a equação (1.62) seja invariante perante *qualquer* transformação: requeremo-lo apenas para transformações infinitesimais.

Seja, pois, a transformação infinitesimal de coordenadas: $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \kappa\xi^\mu$, onde $\xi^\mu(x)$ é um campo vetorial infinitesimal. Perante ela, o campo $g_{\mu\nu}$ se transforma por

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} = [\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \kappa(\delta_\nu^\sigma \xi^\rho{}_{,\mu} + \delta_\mu^\rho \xi^\sigma{}_{,\nu})] g_{\rho\sigma}, \quad (1.64)$$

⁴Para uma excelente discussão sobre o assunto ver, por exemplo, o capítulo 4 da referência [31].

onde mantivemos apenas termos de ordem κ , em consonância com a aproximação de campo fraco. Dado que $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h'_{\mu\nu}$, vemos que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}), \quad (1.65)$$

donde $\gamma'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' = \gamma_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) + \eta_{\mu\nu}\xi_{\sigma}{}^{\sigma}$.

Com este resultado, e lembrando que $R(h'_{\mu\nu}) = R(h_{\mu\nu})$, podemos determinar a lei de transformação do ente Γ_{μ} definido por (1.63):

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\mu} &= \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \gamma'_{\mu\rho}{}^{,\rho} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) R'_{,\mu} \\ &= \Gamma_{\mu} + \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) [-\square\xi_{\mu} - \xi_{\rho,\mu}{}^{\rho} + \xi_{\sigma}{}^{,\sigma}{}_{\mu}] \\ &= \Gamma_{\mu} - \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \square\xi_{\mu}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Portanto, se em um dado sistema de coordenadas tem-se $\Gamma_{\mu} \neq 0$, existe uma transformação – definida por ξ_{μ} solução de $\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \square\xi_{\mu}(x) = \Gamma_{\mu}(x)$ – que leva a um novo sistema no qual $\Gamma'_{\mu} \equiv 0$.

Concluimos, dessarte, que as equações de movimento (1.62) equivalem ao sistema:

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \left(-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6\kappa}\eta_{\mu\nu}R\right) = \frac{\kappa}{4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3}\eta_{\mu\nu}\right), \quad (1.67a)$$

$$\Gamma_{\mu} \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \gamma_{\mu\rho}{}^{,\rho} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) R_{,\mu} = 0. \quad (1.67b)$$

Antes de passarmos à solução do sistema, nos permitiremos fazer uma breve digressão à gravitação einsteiniana. Ainda que isso não traga nenhuma novidade, mostrar-se-á esclarecedor em certa passagem da próxima seção.

A gravitação de Einstein é caracterizada por escolher os parâmetros $\alpha = \beta = 0$. Nessas condições, o sistema (1.67) se torna:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6\kappa}\eta_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3}\eta_{\mu\nu}\right) \quad (1.68a)$$

$$\Gamma_{\mu} = \gamma_{\mu\rho}{}^{,\rho} = 0. \quad (1.68b)$$

É interessante notar que, neste caso, a condição do calibre de Teyssandier coincide com aquela de de Donder – vide as equações (1.35). Ainda, de (1.60) resulta $R = \frac{\kappa^2}{4}T$, que se substituído em (1.68a) fornece:

$$\square h_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right), \quad (1.69)$$

as equações de Einstein linearizadas no calibre de de Donder – como deve ser. Finda a digressão, retornamos ao sistema (1.67) e sua solução.

1.5 Solução geral das equações de campo

Uma vez escolhido o calibre, é possível resolver as equações de movimento do campo $h_{\mu\nu}$. Como vimos na seção anterior, no calibre de Teyssandier as equações do campo equivalem ao sistema (1.67). Nesta seção mostramos que a solução geral de (1.67) é:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu} - \phi \eta_{\mu\nu}, \quad (1.70)$$

onde $h_{\mu\nu}^{(E)}$, $\psi_{\mu\nu}$ e ϕ são campos que satisfazem o conjunto de equações:

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right), \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0, \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(E)}, \quad (1.71)$$

$$(\square + m_2^2) \psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right), \quad \psi_{\mu\nu}{}^{;\mu\nu} - \square \psi = 0, \quad (1.72)$$

$$(\square + m_0^2) \phi = \frac{\kappa T}{12}, \quad (1.73)$$

com $m_0^2 \equiv \frac{2}{(3\alpha+\beta)\kappa^2}$ e $m_2^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}$, como usualmente. Este resultado também é devido a Teyssandier[36].

Principiamos a demonstração reescrevendo a primeira equação de (1.67) de modo a usar a definição de m_2 :

$$(m_2^2 + \square) \frac{1}{m_2^2} \left(-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3\kappa} \eta_{\mu\nu} R \right) = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3} \eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.74)$$

Definindo $\psi_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{m_2^2} (-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3\kappa}\eta_{\mu\nu}R)$, temos que $\psi_{\mu\nu}$ satisfaz

$$(m_2^2 + \square) \psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3}\eta_{\mu\nu} \right), \quad (1.75)$$

que pode ser reescrita, usando novamente a definição de $\psi_{\mu\nu}$, como

$$-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3\kappa}\eta_{\mu\nu}R + \square\psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{3}\eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.76)$$

Por outro lado, a contração de (1.67a) com $\eta^{\mu\nu}$ fornece:

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \left(-\frac{1}{2}\square h + \frac{2}{3\kappa}R\right) = -\frac{\kappa}{12}T. \quad (1.77)$$

Vamos agora à segunda equação de (1.67). Sua derivada com respeito a x_μ é:

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right) \gamma_{\mu\rho}{}^{;\mu\rho} - \frac{\kappa}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \square R = 0. \quad (1.78)$$

Somando membro a membro (1.77) e (1.78), e identificando $\frac{\kappa}{2}\square h - \kappa\gamma_{\mu\rho}{}^{;\mu\rho} = R$, segue:

$$R = \frac{\kappa^2}{4}T - \frac{1}{m_0^2}\square R. \quad (1.79)$$

Ao substituir R dado por (1.79) na equação (1.76) obtemos:

$$\square \left(h_{\mu\nu} + \frac{1}{3\kappa m_0^2}\eta_{\mu\nu}R - \psi_{\mu\nu} \right) = \frac{\kappa}{2} \left(-T_{\mu\nu} + \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.80)$$

Podemos, então, definir um campo $h_{\mu\nu}^{(E)} \equiv \left(h_{\mu\nu} + \frac{1}{3\kappa m_0^2}\eta_{\mu\nu}R - \psi_{\mu\nu} \right)$ de sorte que:

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left(-T_{\mu\nu} + \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.81)$$

É interessante reparar que o lado direito da equação acima é precisamente o termo que aparece em (1.69), a equação de Einstein linearizada no calibre de de Donder. Uma vez definido $h_{\mu\nu}^{(E)}$, a solução do sistema se escreve: $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu} - \frac{R}{3\kappa m_0^2}\eta_{\mu\nu}$.

Convém definir o campo escalar $\phi \equiv \frac{R}{3\kappa m_0^2}$, cuja dinâmica é determinada graças à relação (1.79) que relaciona R ao tensor energia-momento. Vale, dessarte:

$$(m_0^2 + \square) \phi = \frac{\kappa T}{12}. \quad (1.82)$$

Como anunciado, a solução do problema se escreve na forma $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu} - \phi\eta_{\mu\nu}$, uma soma de três campos desacoplados a serem determinados pelas equações (1.75), (1.81) e (1.82). Resta analisar o vínculo promovido pelo calibre de Teyssandier, que deve se materializar como condições de calibre sobre os campos tensoriais $h_{\mu\nu}^{(E)}$ e $\psi_{\mu\nu}$ (o campo escalar real não é invariante de calibre, como é bem conhecido).

Na análise que segue são úteis as relações

$$(m_2^2 + \square)\psi = -\frac{\kappa T}{6}, \quad \text{e} \quad \square h^{(E)} = \frac{\kappa T}{2}, \quad (1.83)$$

conseqüências de se tomar o traço de (1.75) e (1.81), respectivamente. Ainda, se definirmos $\gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(E)}$, o último resultado de (1.83) implica em outra identidade útil: $\square\gamma_{\mu\nu}^{(E)} = -\frac{\kappa T_{\mu\nu}}{2}$.

Com esses resultados e mais as equações (1.75) e (1.79) pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &\equiv \frac{(m_2^2 + \square)}{m_2^2}\gamma_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)R\eta_{\mu\nu} \\ &= \frac{(m_2^2 + \square)}{m_2^2}\left[\gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}R}{3\kappa m_0^2} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\left(\psi - \frac{4R}{3\kappa m_0^2}\right)\right] - \frac{\kappa}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)R\eta_{\mu\nu} \\ &= \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{3\kappa m_2^2}\left(-\frac{\kappa^2 T}{4} + \frac{\square R}{m_0^2}\right) + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{2}\left[\frac{2}{3\kappa m_0^2} - \kappa\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right] \\ &= \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{2}\left[\frac{2}{3\kappa}\left(-\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_0^2}\right) - \kappa\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right] \\ &= \gamma_{\mu\nu}^{(E)}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Como a condição do calibre de Teyssandier é $\Gamma_\mu = B_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$, para que isso se verifique devemos ter $\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0$. Esta é precisamente a condição de calibre de de Donder sobre o campo $h_{\mu\nu}^{(E)}$. Portanto, $h_{\mu\nu}^{(E)}$ pode ser interpretado como a solução das equações tradicionais de Einstein (isto é, ignorando os termos de ordem superior) no calibre de de Donder. Vemos, assim, uma das virtudes do calibre de Teyssandier: separar, na solução, a contribuição da gravitação einsteiniana daquela oriunda dos termos quadráticos nas curvaturas. A cada um dos campos que compõem a solução, corresponde uma das partículas contidas pela teoria (vide a Seção 1.3).

Falta, ainda, obter o vínculo a ser satisfeito pelo campo $\psi_{\mu\nu}$. Como o calibre de Teyssandier se manifestou sobre $h_{\mu\nu}^{(E)}$ numa condição sobre $\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu}$, é natural que consideremos uma relação envolvendo $\gamma_{\mu\nu}^{,\nu}$. Partindo, pois, de (1.11), segue:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu}^{,\mu\nu} &= \frac{1}{2}\square h - \frac{R}{\kappa} \\ \gamma_{\mu\nu}^{(E),\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\square\psi + \square\phi &= \frac{1}{2}(\square h^{(E)} + \square\psi - 4\square\phi) - 3m_0^2\phi \\ \gamma_{\mu\nu}^{(E),\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^{,\mu\nu} - \square\psi &= \frac{\kappa T}{4} - 3(m_0^2 + \square)\phi \\ \gamma_{\mu\nu}^{(E),\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^{,\mu\nu} - \square\psi &= 0.\end{aligned}$$

Ao usar o vínculo que o calibre de Teyssandier impõe sobre $h_{\mu\nu}^{(E)}$, decorre a relação que faltava: $\square\psi - \psi_{\mu\nu}^{,\mu\nu} = 0$.

Mostramos, assim, como o calibre de Teyssandier desacopla o problema, ao transformá-lo na busca por três campos que satisfaçam (1.71)-(1.73).

1.6 Campo gerado por uma massa puntiforme

Pierre Teyssandier, ao propor o calibre que levou seu nome e mostrar as soluções das equações de campo, comenta que talvez seu trabalho contribua na verificação experimental de predições de teorias de ordem superior [36]. Este é precisamente o objetivo deste trabalho: estudar efeitos desta teoria e compará-los com os dados experimentais disponíveis no momento. A fim de conseguir resultados numéricos, é necessário conhecer o campo gerado por certas distribuições de matéria de interesse. Nosso estudo contempla apenas o caso de uma massa pontual em repouso, na origem do sistema de coordenadas. Nesta seção obtemos explicitamente os campos que satisfazem (1.71)-(1.73) para tal sistema físico.

O tensor de momento-energia para uma partícula puntiforme de massa M situada (em repouso) em $\mathbf{r} = 0$ é:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = M\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (1.85)$$

Como a massa está em repouso, podemos considerar que a solução é independente da coordenada temporal, x^0 , e terá simetria esférica. Ainda, como $T_{\mu\nu}$ é diagonal e tendo em vista (1.71)-(1.73), conclui-se que a métrica também será diagonal.

Principiamos pelo campo $h_{\mu\nu}^{(E)}$, que satisfaz a equação diferencial

$$\nabla^2 h_{\mu\mu}^{(E)}(\mathbf{r}) = -\frac{M\kappa}{4}\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (1.86)$$

Sua solução pode ser encontrada usando o método de transformada de Fourier, por exemplo, e é $h_{\mu\mu}^{(E)}(\mathbf{r}) = -\frac{M\kappa}{16\pi r}$. Logo:

$$h_{\mu\nu}^{(E)}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi r} (\eta_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}), \quad (1.87)$$

que verifica as condições de calibre de (1.71). Esta solução é precisamente aquela apresentada em livros de relatividade geral ([32], por exemplo), uma vez que este problema é inteiramente equivalente ao einsteiniano.

Por sua vez, o campo $\psi_{\mu\nu}$ é determinado por:

$$(\nabla^2 - m_2^2)\psi_{00}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa M}{3}\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad (\nabla^2 - m_2^2)\psi_{ii}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa M}{6}\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (1.88)$$

Estas equações são bastante corriqueiras, podem ser resolvidas pelo método da transformada de Fourier e resultam em potenciais de Yukawa:

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{16\pi} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \left(-\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0} \right), \quad (1.89)$$

que claramente satisfaz a condição de calibre de (1.72).

Finalmente, para o campo escalar temos

$$(\nabla^2 - m_0^2)\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa M}{12}\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad (1.90)$$

cuja solução é:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{48} \frac{e^{-m_0 r}}{r}. \quad (1.91)$$

Os elementos não-triviais do campo $h_{\mu\nu}$ são, então,

$$h_{00}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \right], \quad (1.92a)$$

$$h_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{2}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \right]. \quad (1.92b)$$

Como usualmente, h_{00} se relaciona ao potencial da gravitação de ordem superior:

$$\frac{\kappa}{2} h_{00} \equiv V = MG \left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \right]. \quad (1.93)$$

Uma outra virtude do calibre de Teyssandier é o fato de a métrica ser dada na forma isotrópica. Isto é, os termos referentes às coordenadas espaciais são todos iguais e o intervalo se escreve como $ds^2 = g_{00}(r)dt^2 - f(r)dl^2$, onde $f \equiv 1 - \kappa h_{ii}$.

Por fim, notamos que ao fazer $\alpha, \beta \rightarrow 0$ nas equações acima (o que corresponde a $m_0, m_2 \rightarrow \infty$), temos que $h_{\mu\mu}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{M\kappa}{16\pi r}$, a solução para uma fonte pontual estática na gravitação einsteiniana linearizada, no calibre de de Donder [31, 32]. Este fato alentador é absolutamente trivial uma vez discutida a interpretação da decomposição da solução das equações de campo no calibre de Teyssandier, na seção anterior.

Capítulo 2

Deflexão da luz: abordagem clássica

Neste capítulo analisamos a deflexão da luz, no contexto da gravitação de ordem superior clássica. A partir da comparação com resultados experimentais determinamos um limite para a constante de acoplamento β do setor $R_{\mu\nu}^2$.

2.1 Forma ε - μ das equações de Maxwell com gravidade

O ano de 1919 marcou o estabelecimento da relatividade geral como teoria paradigmática da gravitação. Naquele ano, pela primeira vez, foi verificado experimentalmente um resultado novo previsto pela teoria de Einstein em notável desacordo com a gravitação newtoniana: a luz não se move em linha reta quando sob influência de um campo gravitacional. Este fenômeno, chamado de deflexão da luz, foi observado ao comparar imagens do campo estelar próximo ao Sol durante um eclipse total com outras do mesmo campo, porém tomadas seis meses depois, sem o Sol por perto. Essas observações foram feitas em Sobral, no Ceará, e confirmaram que as posições das estrelas nas placas fotográficas eram diferentes nas duas situações.

Uma forma interessante de calcular o desvio da trajetória de um raio de luz devido

ao campo gerado pelo Sol (aqui aproximado por uma massa pontual) é por meio da analogia com a óptica geométrica que decorre da escrita das equações de Maxwell, em presença de gravidade, na chamada “forma ε - μ ” [38, 39]. Para tanto, é necessário supor que o campo gravitacional é estático e esfericamente simétrico. A primeira condição, além de indicar que o campo independe do tempo, permite, em uma região finita do espaço-tempo, separar a métrica numa componente espacial e outra temporal¹. Já a segunda condição implica que a coordenada espacial que realmente importa é a distância radial r até o centro da distribuição de matéria. Com efeito, pode-se mostrar que, neste contexto, existe um sistema de coordenadas no qual a métrica se exprime como

$$g_{00} = g_{00}(r), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}f(r), \quad \text{com } r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad (2.1)$$

onde $\sqrt{-g} = \sqrt{g_{00}f^3}$ e $g^{\alpha\alpha} = 1/g_{\alpha\alpha}$.

No estudo da interação da luz com o campo gravitacional, supomos que o campo eletromagnético é suficientemente fraco para que sua contribuição na curvatura do espaço-tempo seja desprezada. A gravitação é, pois, tratada como um fundo sobre o qual se propaga a luz. Neste capítulo ambos os campos são tomados como clássicos.

As equações de Maxwell no espaço curvo se escrevem, devido ao acoplamento mínimo, como:

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (2.2a)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = J^\nu, \quad (2.2b)$$

¹Para uma definição precisa de métricas estacionárias e estáticas, em termos de campos de vetores de Killing, e uma apresentação de suas propriedades, ver, por exemplo, a seção 10-5 da referência [31].

onde o tensor de Maxwell é

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Como a conexão de Levi-Civita é simétrica, e $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, não é difícil verificar que (2.2a) é idêntica à sua correspondente no espaço plano: $F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0$, levando às equações de Maxwell homogêneas $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$.

Por sua vez, o par não-homogêneo pode ser reescrito numa forma assaz interessante. Consideremos, para tanto, o seguinte resultado válido para qualquer campo tensorial $A^{\mu\nu}$ antissimétrico num espaço (pseudo-)riemanniano:

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

Ainda, podemos escrever a corrente como composta por diversas partículas carregadas:

$$J^\nu = \sum_k q_k \int \frac{dx_k^\nu}{d\lambda_k} \frac{\delta^{(4)}(x - x_k)}{\sqrt{-g}} d\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k q_k v_k^\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (2.5)$$

onde x_k^ν é a linha-de-mundo da k -ésima partícula, q_k sua carga, e $v_k^\nu \equiv dx_k^\nu/dx^0$. Usando (2.4) e (2.5) escrevemos (2.2b) como:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = \sum_k q_k v_k^\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv j^\nu, \quad (2.6)$$

onde definimos uma “quadricorrente” $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$ de sorte que $j^0 = \sum_k q_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \equiv \rho$ e $\mathbf{j} \equiv \sum_k q_k \mathbf{v}_k \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$.

A equação (2.6) para $\nu = 0$ é:

$$\partial_\mu (g^{\alpha\mu} g^{\beta 0} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = \sum_i \partial_i (g^{ii} g^{00} F_{i0} \sqrt{-g}) = \sum_i \partial_i (\sqrt{f/g_{00}} E_i) = \rho,$$

que, ao por $\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{f}{g_{00}}}$, torna-se: $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$.

Para a componente espacial i , o membro esquerdo de (2.6) é:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (g^{\alpha\mu} g^{\beta i} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}) &= \sum_\mu \partial_\mu (g^{\mu\mu} g^{ii} F_{\mu i} \sqrt{-g}) \\
&= \partial_t (g^{00} g^{ii} F_{0i} \sqrt{-g}) + \sum_j \partial_j (g^{jj} g^{ii} F_{ji} \sqrt{-g}) \\
&= \partial_t (\varepsilon E^i) + \sum_j \partial_j \left(\sqrt{\frac{g_{00}}{f}} F_{ji} \right) \\
&= \partial_t (\varepsilon E^i) - \left[\nabla \times \left(\sqrt{\frac{g_{00}}{f}} \mathbf{B} \right) \right]^i.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Se definirmos $\mu \equiv \sqrt{\frac{f}{g_{00}}}$ segue: $\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \mathbf{j}$.

Concluimos, portanto, que a equação (2.2b) corresponde às leis de Gauss e Ampère,

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \mathbf{j}, \tag{2.8}$$

num meio opticamente ativo de permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ variáveis e iguais a $\sqrt{f/g_{00}}$. Esta é a forma ε - μ das equações de Maxwell.

Como é bem conhecido, soluções do tipo onda plana para as equações de Maxwell implicam que sua velocidade de propagação é dada por $u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Como o índice de refração n de um meio é definido por $n \equiv 1/u$, concluimos que a gravitação age como que se munisse o espaço de um índice de refração que depende da distância até o centro da distribuição de matéria (fonte do campo):

$$n(r) = \sqrt{\frac{f(r)}{g_{00}(r)}}. \tag{2.9}$$

A partir daqui, a lei de Snell-Descartes da óptica geométrica permite o cálculo da deflexão sofrida por um raio de luz ao passar próximo de um corpo massivo [39].

Deixamos esta tarefa para a Seção 2.3; antes disso, mostramos com um pouco mais de detalhe a origem e o domínio de validade desta analogia entre a propagação da luz em presença de gravidade e a óptica geométrica.

2.2 Analogia com a óptica geométrica

Os termos usados na seção anterior, “óptica geométrica” e “raio de luz”, não são fortuitos, mas subentendem limitações sobre os sistemas estudados. Com efeito, duas condições devem ser satisfeitas para que as equações de Maxwell no espaço curvo admitam soluções na forma de ondas planas, quais sejam:

- i) a energia associada à radiação é pequena o suficiente para que se possa desprezar sua influência na curvatura, oriunda da não-linearidade da teoria, e considerar o campo gravitacional como externo;
- ii) o comprimento de onda da luz é muito menor que as demais dimensões envolvidas no problema: a escala de L para a qual se pode considerar a frente de onda como uma superfície plana (e assim ignorar efeitos de difração, por exemplo), e a escala de $\mathcal{R}^{-1/2}$ de curvatura do espaço-tempo.

A escala de $\mathcal{R}^{-1/2}$ (\mathcal{R} pode ser, por exemplo, um elemento típico do tensor de curvatura) é importante uma vez que permite tomar o “índice de refração” como praticamente constante em certa região do espaço. Pode-se, então, obter soluções de onda plana em cada uma dessas regiões, suavemente conectadas, nas quais $\lambda \ll L_m \equiv \min\{L, \mathcal{R}^{-1/2}\}$. Ao combiná-las obtém-se a trajetória do raio de luz [31, 40].

Em sua maioria, os livros-texto de gravitação apresentam o cálculo da deflexão da luz por meio da equação da geodésica nula – a trajetória seguida pela luz. Esta metodologia também encerra as duas hipóteses há pouco apresentadas uma vez que delas decorre: a passagem² da descrição ondulatória (via equações de Maxwell) para esta é feita expandindo a solução em ondas planas em potências de λ/L_m . Ora, para que sejam admitidas as soluções em ondas planas, deve-se supor as condições i) e ii) acima. As duas metodologias de cálculo são, portanto, essencialmente a mesma.

²Para uma apresentação detalhada do procedimento ver, por exemplo, a seção 5.4.4 de [40].

Por completeza, dedicamos o restante desta seção à demonstração de como o índice de refração pode ser obtido a partir da abordagem via a equação da geodésica [31],

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

Como é bem sabido, partículas massivas seguem geodésicas tipo-tempo, enquanto aquelas desprovidas de massa percorrem geodésicas nulas. Aqui λ é um parâmetro conveniente ao longo da curva.

Seja \mathcal{P} um evento na linha-de-mundo de um corpo não-massivo e consideremos todas as curvas nulas que por ele passam. Seja, ainda, o seguinte funcional, avaliado sobre cada uma dessas curvas, desde $\lambda_{\mathcal{P}}$ até $\lambda_{\mathcal{Q}}$ mais adiante:

$$S[x^\mu(\lambda)] = \int_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda \quad (2.11)$$

A variação deste funcional sobre duas curvas, $x^\mu(\lambda)$ e $x'^\mu(\lambda) = x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$, fornece:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} \left(g_{\alpha\beta,\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\rho + 2g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{d\delta x^\beta}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= 2g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \delta x^\beta \Big|_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} + \int_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} \left[g_{\alpha\beta,\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - 2 \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\alpha\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) \right] \delta x^\rho d\lambda. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como tanto x^μ quanto x'^μ são curvas nulas, a distância entre quaisquer eventos ao longo delas é igual a zero e, portanto, $S[x^\mu] = S[x'^\mu] = 0 = \delta S$.

Outrossim, se supomos que x^μ é uma geodésica, a equação (2.10) implica em $g_{\alpha\beta,\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 2 \left(g_{\mu\rho} \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + g_{\alpha\rho,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) = 2 \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\alpha\rho} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right)$. Concluimos, pois, que:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \delta x^\beta \Big|_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{\lambda_{\mathcal{Q}}} = 0. \quad (2.13)$$

Introduzimos, neste ponto, a exigência de que o campo gravitacional é estático, isto é, admite um campo de vetores de Killing τ^β tipo-tempo que permite (em uma região finita do espaço-tempo) a separação da métrica em uma componente espacial e outra

temporal [31]. Tomando, então, $\delta x^\beta = \tau^\beta \delta \xi$, paralelo a um destes vetores de Killing, a equação (2.13) se torna:

$$0 = \delta \xi \Big|_{\lambda_P}^{\lambda_Q} = \delta \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} d\xi, \quad (2.14)$$

onde usamos o fato que $\tau_\beta \frac{dx^\beta}{d\lambda}$ se conserva ao longo de uma geodésica nula. Mapeando de forma que $\tau^\beta = (1, \mathbf{0})$, decorre $\xi = x^0 \equiv t$, donde concluímos que a geodésica nula satisfaz o famigerado princípio de Fermat:

$$\delta \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} dt = 0. \quad (2.15)$$

Traduzindo em palavras, dentre todas as possíveis trajetórias, a luz segue aquela que extremiza o tempo de percurso.

Pode-se avançar um pouco mais na análise ao usar a forma (2.1) da métrica estática esfericamente simétrica: para um raio de luz tem-se $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dt)^2 - f(dl)^2 = 0$, o que implica em $dt = \sqrt{f/g_{00}} dl$. Portanto,

$$\delta \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} \sqrt{\frac{f}{g_{00}}} dl = 0 \quad (2.16)$$

é o princípio de Fermat num meio com índice de refração $n(r) = \sqrt{\frac{f(r)}{g_{00}(r)}}$.

Vimos, desta forma, como a partir da geodésica nula, seguida por um raio de luz, chega-se no princípio de Fermat – e, portanto, na lei de Snell-Descartes da óptica geométrica –, como se a propagação da luz em presença de gravidade fosse através de um meio efetivo cujo índice de refração depende da posição.

2.3 Cálculo da deflexão e limite superior para $|\beta|$

No final do Capítulo 1 vimos que o campo gerado por uma massa puntiforme na gravitação de ordem superior, no calibre de Teyssandier, é dado na forma isotrópica (1.92). Substituindo, então, a solução das equações do campo na expressão (2.9) do

índice de refração, tem-se (até ordem κ^2):

$$n(r) = \sqrt{\frac{1 - \kappa h_{ii}(r)}{1 + \kappa h_{00}(r)}} \quad (2.17)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\kappa h_{00}(r) - \frac{1}{2}\kappa h_{ii}(r) \quad (2.18)$$

$$= 1 + \frac{M\kappa^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{e^{-m_2 r}}{r} \right) \quad (2.19)$$

$$= n_E(r) - \frac{M\kappa^2}{16\pi} \frac{e^{-m_2 r}}{r}, \quad (2.20)$$

onde definimos $n_E(r) \equiv 1 + \frac{M\kappa^2}{16\pi r}$, o índice de refração associado à gravitação de Einstein.

A partir desta relação (2.20) já podemos obter algumas conclusões qualitativas sobre a deflexão da luz na gravitação de ordem superior:

- i) o setor de R^2 não contribui para a deflexão, uma vez que a constante α não aparece na expressão do índice de refração. O cancelamento desses termos ocorre na equação (2.18) já que os potenciais de Yukawa associados a m_0 têm coeficientes opostos em h_{00} e h_{ii} . Como consequência, não é possível distinguir teorias com diferentes valores para a constante α apenas a partir de experimentos de deflexão da luz. Este resultado já era esperado, pois as teorias com e sem o setor R^2 são equivalentes conformes, vide o Apêndice C.
- ii) O setor $R_{\mu\nu}^2$ desempenha um papel de anti-gravitação, tendendo a repelir o raio de luz. A origem deste fenômeno é o sinal “contrário” sempre associado a este termo, em particular na expressão (1.93) do potencial, e em (2.19).
- iii) O ângulo de desvio φ da trajetória da luz na gravitação de ordem superior é sempre *menor* que aquele predito pela teoria de Einstein, φ_E . Isto ocorre pois (2.20) implica que $n(r) \leq n_E(r)$, sendo a igualdade obtida assintoticamente ao fazer $m_2 \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$). Por outro lado, se $|\beta|$ for suficientemente grande, o termo entre parêntesis em (2.19) se anula e, portanto, $n(r) \rightarrow 1$, não havendo deflexão. Concluimos, pois, que $0 \leq \varphi \leq \varphi_E$.

Conhecemos, então, o comportamento assintótico do ângulo de deflexão para os casos de m_2 muito grande ou muito pequeno. Para analisar situações intermediárias é peremptório calcular φ explicitamente. Com base nas definições da Figura 2.1 temos, pela lei de Snell-Descartes:

$$n(r)\text{sen}\theta = n(r + dr)\text{sen}(\theta + d\varphi) \quad (2.21)$$

$$= \left[n(r) + \frac{dn(r)}{dr} dr \right] [\text{sen}\theta + \cos\theta d\varphi] \quad (2.22)$$

$$= n(r)\text{sen}\theta + n(r) \cos\theta d\varphi + \text{sen}\theta \frac{dn(r)}{dr} dr, \quad (2.23)$$

donde

$$d\varphi = -\frac{1}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \text{tg}\theta dr. \quad (2.24)$$

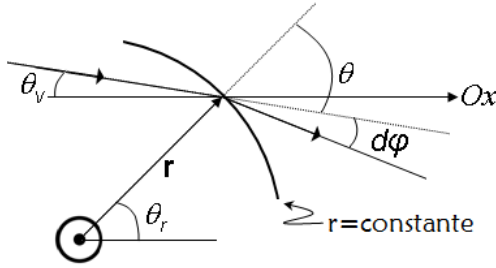


Figura 2.1: Refração da luz por uma casca esférica de raio r . $\theta_V(\theta_r)$ é o ângulo entre o vetor velocidade e o eixo dos x . Ainda, $\theta = \theta_V + \theta_r$, e $d\varphi$ é a variação de θ_V devido à refração.

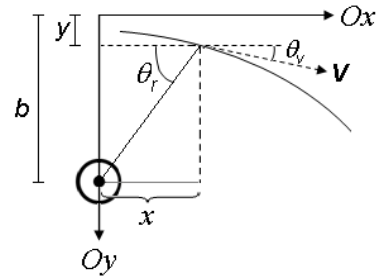


Figura 2.2: Parametrização da trajetória do raio de luz. O raio é caracterizado pelo parâmetro de impacto b , um deslocamento $y(x)$ do caminho retilíneo, e um ângulo de deflexão local $\varphi(x) = \theta_V$.

O ângulo de deflexão é $\int_{\mathcal{C}} d\varphi$, onde \mathcal{C} é o caminho seguido pelo raio de luz; seu cálculo pode ser feito parametrizando a trajetória como proposto na Figura 2.2, ao escrever $y = y(x)$. Este esquema que aqui apresentamos foi proposto em [39] com vistas ao cômputo de φ , no contexto da relatividade geral, com correções de ordem arbitrária em G . Utilizamos este método apenas em primeira ordem, em concordância

com o que temos feito.

Da Figura 2.2 seguem as seguintes relações:

$$r = \sqrt{x^2 + [b - y(x)]^2} \implies r' = \frac{x - by' + yy'}{r}, \quad (2.25)$$

$$\operatorname{tg}\theta_r = \frac{b - y(x)}{x}, \quad \operatorname{tg}\theta_V = \frac{dy/dt}{dx/dt} = y', \quad (2.26)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta_r + \theta_V) = \frac{b - y(x) + xy'}{x - by' + yy'}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta_V = y', \quad (2.27)$$

onde a linha representa a derivação com respeito a x . A equação (2.24) pode ser escrita então como:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{rn(r)} \frac{dn(r)}{dr} [xy' - y(x) + b]. \quad (2.28)$$

Assumamos que a expansão de $\frac{1}{n} \frac{dn}{dr}$ em potências de κ principia no termo de ordem 2. (Isso de fato ocorre tanto para n quanto para n_E definidos em (2.20).) Vejamos o que ocorreria caso $y(x)$ fosse de ordem zero em κ . Por um lado, a equação (2.28) implicaria que o primeiro termo da expansão de φ seria proporcional a κ^2 . Contudo, a segunda equação de (2.27) pode ser escrita como $y(x) = \int_{-\infty}^x \operatorname{tg}\varphi(\bar{x}) d\bar{x}$; sendo φ de ordem κ^2 , y também seria proporcional a κ^2 – em flagrante contradição à hipótese $y \propto \kappa^0$. O absurdo claramente ocorre para qualquer dependência de y em κ . A comparação dos coeficientes das expansões força-nos, pois, a tomar $y(x) \equiv 0$.

Feitas essas considerações, a integração de (2.28) fornece, em $\mathcal{O}(G)$, o ângulo de deflexão sofrido por um raio de luz que vem desde o infinito até o ponto x da trajetória:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x -\frac{b}{rn(r)} \frac{dn(r)}{dr} d\bar{x}, \quad r = \sqrt{\bar{x}^2 + b^2}. \quad (2.29)$$

Para calcular a deflexão sofrida por um raio de luz rasante ao Sol consideramos que o seu campo gravitacional pode ser aproximado por aquele de uma partícula pontual de mesma massa M_\odot . A condição de rasante significa que o parâmetro de impacto é o raio do Sol, R_\odot . Como a medição da deflexão é feita no nosso planeta, teríamos que integrar \bar{x} até o equivalente à órbita da Terra. Contudo, para todos os efeitos práticos podemos tomar $x = \infty$ uma vez que a curvatura aqui é muito pequena.

O desvio da trajetória na gravitação de Einstein pode ser calculado usando o índice de refração $n_E(r) = 1 + \frac{M\kappa^2}{16\pi r}$:

$$\varphi_E = \frac{M_\odot R_\odot \kappa^2}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + R_\odot^2)^{3/2}} = \frac{4M_\odot G}{R_\odot}, \quad (2.30)$$

onde usamos que $\kappa^2 = 32\pi G$. No SI, $M_\odot = 1,99 \times 10^{30}$ kg, $R_\odot = 6,96 \times 10^8$ m e $\varphi_E = 1,75''$.

Na teoria de ordem superior deve-se usar o índice de refração (2.20), que resulta em:

$$\varphi = \varphi_E - \frac{M_\odot R_\odot \kappa^2}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + m_2 \sqrt{x^2 + R_\odot^2}}{(x^2 + R_\odot^2)^{3/2}} \exp\left(-m_2 \sqrt{x^2 + R_\odot^2}\right) dx + \Xi, \quad (2.31)$$

onde Ξ é uma constante de integração. A dependência de φ em β dá-se por meio de $m_2 = \left(\frac{4}{|\beta|\kappa^2}\right)^{1/2}$ e é dominada pelo termo exponencial. É imediato verificar que $\varphi \rightarrow \varphi_E + \Xi$ no limite einsteiniano ($\beta \rightarrow 0$). Portanto, a concordância com a gravitação de Einstein neste regime define $\Xi \equiv 0$.

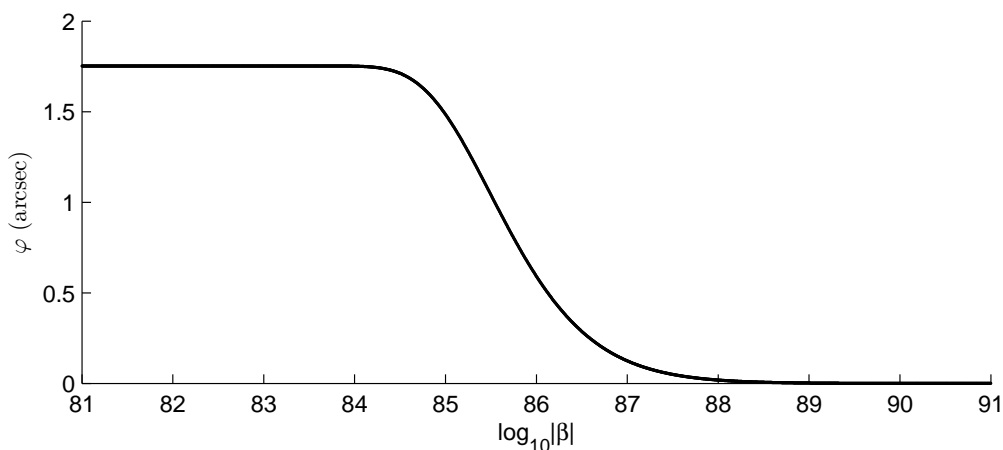


Figura 2.3: Ângulo de deflexão φ em função de $\log_{10}|\beta|$ para raios de luz rasantes ao Sol, na gravitação de ordem superior clássica.

Como a análise assintótica mostrou, o ângulo de deflexão é aproximadamente constante tanto para pequenos, quanto para grandes valores de $|\beta|$. Devido à exponencial,

a transição entre esses dois regimes deve ocorrer num intervalo bem definido. Com efeito, ao resolver a integral (2.31) numericamente para diversos valores de β , notamos que a transição ocorre para $10^{84} \lesssim |\beta| \lesssim 10^{88}$, vide a Figura 2.3.

Existe uma literatura bastante vasta sobre a medição de ângulos de deflexão de raios luminosos rasantes ao Sol. Conforme mencionamos no princípio deste capítulo, esses experimentos foram primordialmente levados a cabo durante eclipses solares, e consistiam em comparar imagens do campo estelar, no visível, com e sem a presença do Sol. O processo de redução de dados é bastante laborioso, havendo que levar em conta várias fontes de erros sistemáticos, desde a refração atmosférica até problemas de escala entre as placas fotográficas [41]. Por essas razões os resultados são às vezes discordantes, e têm uma incerteza na faixa dos 20%, como mostra a Tabela 2.1³. O processo de medição também é difícil, principalmente porque a coroa solar impede a visualização de estrelas cujo parâmetro de impacto é menor que aproximadamente $2R_{\odot}$ [43]. Dessarte, o resultado final, para $b = R_{\odot}$, é obtido por extrapolação dos dados, geralmente referentes a b entre 2 e 10 raios solares.

Medidas mais precisas foram obtidas por interferometria, a partir dos anos 1960, mediante o registro de ocultações de rádio-fontes compactas pelo Sol [43, 44, 45]. A Tabela 2.2, com dados das décadas de 1960 e 1970, mostra a redução da incerteza nas medições até a casa do 1%, à medida que a técnica se aprimorava.

Os melhores dados disponíveis atualmente na literatura são obtidos por VLBI – *Very-Long-Baseline Interferometry* –, e determinam o ângulo de deflexão com precisão

³Na Tabela 2.1 indicamos, ainda, o número de estrelas considerado em cada medição e o menor parâmetro de impacto no conjunto, em raios solares. É interessante reparar que em mais de 40 anos de observações a precisão média obtida para φ se manteve praticamente a mesma. Do ponto de vista instrumental, o registro do eclipse de 1973 representou uma melhora na acurácia, pois pela primeira vez foi empregado um fotômetro digital [41]. No entanto, as barras de erro só começaram a diminuir a partir da década de 1960, como mostra a Tabela 2.2, quando o desenvolvimento de técnicas de interferometria permitiu a realização de medidas na faixa do rádio [43, 45].

melhor que o milissegundo de arco [46]. Por exemplo, a partir de uma ocultação do quasar 3C279 pelo Sol, Lebach e colaboradores mediram o desvio $\varphi_{exp} = (0,9998 \pm 0,0008)\varphi_E$, corroborando as previsões da relatividade geral com uma faixa de incerteza da ordem de 10^{-4} [45]. Mais recentemente, Fomalont *et al.* reportaram a verificação das previsões de Einstein com a precisão de 15 partes em 100.000 [47].

Tabela 2.1: Medidas do ângulo de deflexão φ em eclipses solares [31, 41, 42]

Eclipse	Estrelas	b_{min}	φ (arcsec)
1919	7	2	$1,98 \pm 0,12$
1922	145	2,1	$1,82 \pm 0,15$
1929	17	1,5	$2,24 \pm 0,10$
1947	51	3,3	$2,01 \pm 0,27$
1952	10	2,1	$1,70 \pm 0,10$
1961	12	1,7	$1,98 \pm 0,46$
1973	39	1,9	$1,66 \pm 0,18$

Tabela 2.2: Medidas do ângulo de deflexão φ por interferometria nos anos 1960 e 1970 [43]

Observatório	λ (cm)	φ (arcsec)
Owens Valley	3,1	$1,77 \pm 0,20$
Goldstone	12,5	$1,82_{-0,17}^{+0,26}$
Cambridge	6,0	$1,82 \pm 0,14$
Westerbork	6,0	$1,68 \pm 0,09$
Haystak	3,7	$1,73 \pm 0,05$
National RAO	11,1 e 3,7	$1,78 \pm 0,02$
Westerbork	21,2 e 6,0	$1,82 \pm 0,06$

Portanto, para que a gravitação de ordem superior não entre em conflito com os consagrados resultados experimentais, o ângulo de deflexão por ela previsto deve diferir de φ_E por menos de 10^{-4} segundo de arco. Nossos resultados numéricos implicam que, para que isso ocorra, a ordem de grandeza de $|\beta|$ deve ser menor que 10^{84} . Obtemos, desta forma, um limite superior para a constante de acoplamento do termo $R_{\mu\nu}^2$:

$$\mathcal{O}(|\beta|) \leq 10^{83}. \quad (2.32)$$

Nossa análise foi restrita apenas a medidas realizadas nas proximidades do Sol. Atualmente é possível medir a deflexão em toda a esfera celeste [46, 48], mesmo na posição de estrelas com alongação de 90° – o que corresponde a $b \approx 216R_\odot$. Esta situação é bastante diferente daquela retrada pela Figura 2.3, a de um raio *rasante* ao Sol. A comparação dos dados experimentais com as previsões teóricas se tornam um

pouco mais envolventes quando consideramos diferentes parâmetros de impacto, pois os valores de β relacionados à “região de transição” dependem de b . Para exemplificar, na Figura 2.4 mostramos a curva $\frac{\varphi}{\varphi_E}(\beta)$ para raios de luz com parâmetros de impacto iguais a 1, 2, 3, 4 e 5 raios solares. Sua inspeção leva à conclusão de que, ao comparar medidas de mesma precisão realizadas com raios de luz de diferentes parâmetros de impacto, aquelas com b mais próximos de R_\odot fornecerão um melhor limite para a constante β .

Como as medidas aqui utilizadas foram realizadas com parâmetros de impacto iguais a poucos raios solares, acreditamos que a extrapolação dos dados observacionais até $b = R_\odot$ não comprometa a nossa análise.

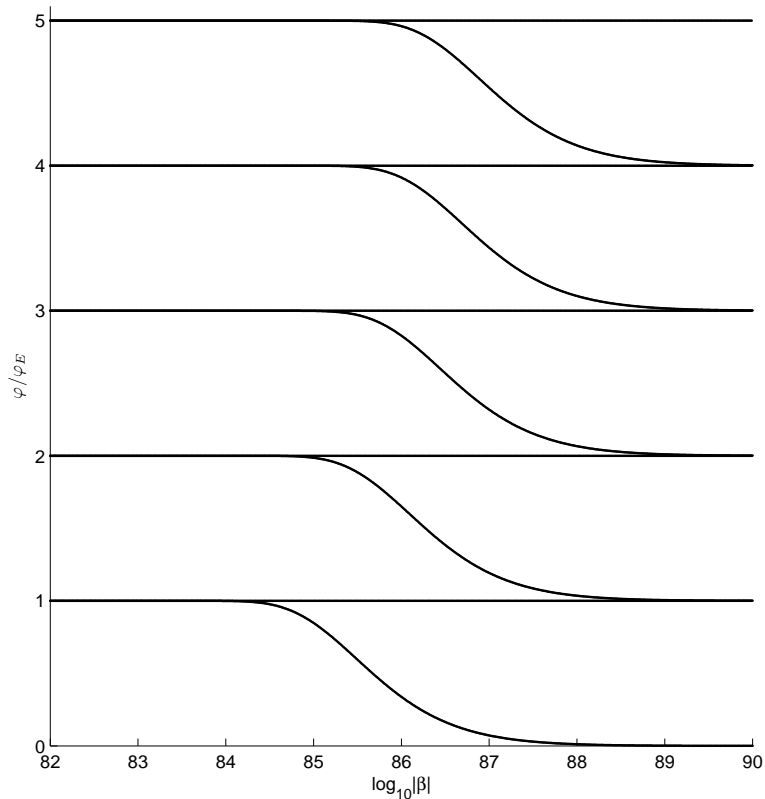


Figura 2.4: Ângulo de deflexão na gravitação de ordem superior, normalizado por φ_E , em função de $\log_{10}|\beta|$, para $b = 1, 2, 3, 4$ e 5 raios solares (eixo vertical).

Capítulo 3

Deflexão da luz: abordagem ao nível de árvore

Prosseguimos o estudo da deflexão da luz, mas agora no contexto semiclássico: os fótons, entendidos como partículas quânticas, interagem com um campo gravitacional clássico, externo. Mostramos que a propagação dos fótons é dispersiva – isto é, depende da sua energia – e obtemos um melhor limite para a constante β .

3.1 Arco-íris gravitacional

Vimos, no capítulo anterior, que o setor de R^2 não contribui para a deflexão da luz, enquanto que o termo oriundo de $R^2_{\mu\nu}$ tem tendência a anular a força atrativa, fazendo com que o desvio seja menor que o previsto pela teoria einsteiniana. Tudo isso foi feito no contexto clássico. No presente capítulo damos um passo além, ao considerarmos o fóton como uma partícula quântica [35]. Nesta primeira seção mostramos que as duas conclusões obtidas no caso clássico continuam válidas e, como novidade, uma nova degenerescência é aberta.

O processo de espalhamento de um fóton por um campo gravitacional externo,

representado na Figura 3.1, é descrito pela lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2} \left(h_{\text{ext}}^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \frac{1}{4} h_{\text{ext}} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (3.1)$$

à qual se associa a função de vértice

$$V_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{2} \kappa h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) \left[-\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + \eta_{\lambda\rho} p'_\mu p_\nu + \right. \\ \left. + 2 (\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \right]. \quad (3.2)$$

Aqui \mathbf{p} e \mathbf{p}' são os momentos dos fótons inicial e final, respectivamente, e $h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k})$ é o campo gravitacional no espaço dos momentos:

$$h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} h_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Usando a decomposição (1.70) do campo gerado por uma massa pontual temos – vide as equações (1.87), (1.89) e (1.91):

$$h_{\mu\nu}^{(E)}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa M}{4\mathbf{k}^2} (\eta_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0}), \quad (3.4)$$

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa M}{4(\mathbf{k}^2 + m_2^2)} \left(-\frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right), \quad (3.5)$$

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{\kappa M}{12(\mathbf{k}^2 + m_0^2)}. \quad (3.6)$$

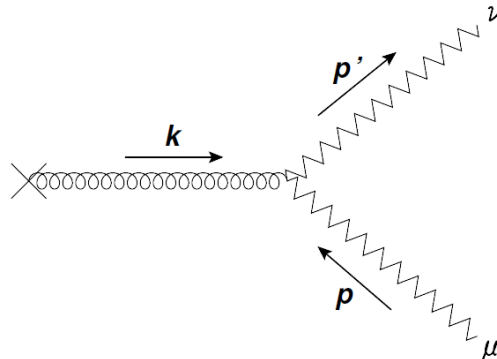


Figura 3.1: Gráfico de Feynman da interação entre um fóton e um campo gravitacional externo.

Portanto, podemos escrever a função de vértice como $V_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(E)} + \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2_{\alpha\beta})} + \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)}$, com

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{1}{2} \kappa h_{\text{ext}}^{(E)\lambda\rho}(\mathbf{k}) \left[-\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + \eta_{\lambda\rho} p'_\mu p_\nu + \right. \\ \left. + 2 \left(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right) \right], \quad (3.7)$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} \kappa \psi_{\text{ext}}^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) \left[-\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + \eta_{\lambda\rho} p'_\mu p_\nu + \right. \\ \left. + 2 \left(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right) \right], \quad (3.8)$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} = -\frac{1}{2} \kappa \phi_{\text{ext}}(\mathbf{k}) \eta^{\lambda\rho} \left[-\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + \eta_{\lambda\rho} p'_\mu p_\nu + \right. \\ \left. + 2 \left(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right) \right]. \quad (3.9)$$

Com a recordação de que para o fóton se tem $p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = 0$, $p'_\mu p'^\mu = E'^2 - \mathbf{p}'^2 = 0$, e que $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ (pois desprezamos a troca de momento entre o fóton e o Sol), concluímos que $E' = E$. Tendo isso em mente, é imediato verificar que a contração de $\eta^{\lambda\rho}$ com o termo entre colchetes na função de vértice (3.2) é nula. Decorre, daí, que $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} = 0$.

Se definirmos os vetores $\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})$ e $\epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}')$ de polarização dos fótons, temos a amplitude de Feynman do espalhamento:

$$\mathcal{M}_{rr'} = V_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}'). \quad (3.10)$$

Portanto, a amplitude de Feynman relacionada ao termo R^2 é igual a zero, em acordo com a abordagem clássica, que mostrou ser este setor irrelevante para a deflexão da luz.

Como em situações experimentais não se conhece a polarização dos fótons, devemos usar a seção de choque diferencial não-polarizada para estudar o espalhamento:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_r \sum_{r'} \mathcal{M}_{rr'}^2. \quad (3.11)$$

Levando em conta que os vetores de polarização satisfazem a relação de completude [49] ($n^2 = 1$)

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{p}') = -\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2} + \frac{p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}, \quad (3.12)$$

temos que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \left[\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(E)} \mathcal{M}^{(E)\mu\nu} + \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R_{\alpha\beta}^2)} \mathcal{M}^{(R_{\alpha\beta}^2)\mu\nu} + 2\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R_{\alpha\beta}^2)} \mathcal{M}^{(E)\mu\nu} \right]. \quad (3.13)$$

Com o uso das equações (3.4), (3.5), (3.7) e (3.8), e algumas manipulações algébricas, obtém-se, na ordem mais baixa,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\kappa^4 M^2 E^2 (1 + \cos\theta)^2}{16} \left[-\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_2^2} \right]^2, \quad (3.14)$$

onde θ é o ângulo de espalhamento, definido por \mathbf{p} e \mathbf{p}' . Evocando a conservação do momento ($\mathbf{k} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \implies \mathbf{k}^2 = 2(1 - \cos\theta)\mathbf{p}^2$), para ângulos pequenos a seção de choque se reduz a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 16G^2 M^2 \left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} \right]^2. \quad (3.15)$$

É útil a comparação com a seção de choque prevista pela gravitação einsteiniana: ao manter apenas o primeiro termo na expressão (3.13) obtemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_E = \frac{16G^2 M^2}{\theta^4}. \quad (3.16)$$

Neste momento já é possível extrair algumas conclusões interessantes sobre a propagação de fótons na gravitação de ordem superior:

- i) diferentemente da gravitação de Einstein, na teoria de ordem superior a propagação dos fótons é dispersiva, isto é, depende da energia do fóton. Fótons de energias diferentes irão sofrer deflexões diferentes. No contexto da analogia entre o campo gravitacional e um índice de refração efetivo, visto no capítulo precedente, é como se, ao nível de árvore, este índice dependesse da energia. Este resultado claramente desafia o princípio de equivalência.

- ii) Na seção de choque (3.15) não aparece a constante α relacionada ao termo R^2 . Como vimos, isto ocorre pois a amplitude de Feynman associada a este setor é nula, não influenciando na deflexão dos fótons. Portanto, corroborando o resultado da abordagem clássica, experimentos de desvios de fótons são insuficientes para determinar α .
- iii) Por ser $\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2} > \theta^2$, é fácil se convencer de que a seção de choque (3.15) oriunda da gravitação de ordem superior é menor que a correspondente einsteiniana. Ainda, no limite $m_2^2 \gg E$ (pequenos valores de $|\beta|$) temos $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_E$, como esperado. Por outro lado, se $|\beta|$ for muito grande: $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow 0$, não havendo deflexão. Concluimos, pois, que $0 \leq \theta \leq \theta_E$, como no contexto clássico, sendo a igualdade verificada assintoticamente.
- iv) Se compararmos as seções de choque da gravitação de ordem superior para diferentes valores de energia E , para um dado β fixo, notamos que fótons mais energéticos têm menor seção de choque. Dessarte, quanto mais energético for um fóton, menos ele se desviará da trajetória retilínea.
- v) O setor $R_{\mu\nu}^2$, além de ser o responsável pela contribuição repulsiva para a deflexão, está associado ao caráter dispersivo da propagação dos fótons. Isso elucidava o comportamento mencionado no item anterior, contra-intuitivo à primeira vista: fótons mais energéticos defletem menos. Com efeito, enquanto o setor de Einstein atrai todos os fótons com a mesma intensidade, a interação com o setor que repele é mais vigorosa se maior for a energia do fóton. Temos, então, a combinação de uma relação direta entre energia e intensidade da interação com o setor de anti-gravitação, e uma relação constante com o atrativo. O balanço das contribuições, evidentemente, faz com que fótons mais energéticos sejam menos defletidos, pois são mais repelidos. Esta situação está representada pictoricamente na Figura 3.2.

Justificamos, desta forma, o título dado a esta seção: um feixe de fótons de diferentes

energias, quando sujeito a um campo gravitacional “de ordem superior”, abrir-se-á num espectro de energia, como um arco-íris. Para determinar a abertura deste espectro faz-se mister calcular o ângulo de deflexão. Este fenômeno e a comparação do ângulo previsto com os medidos experimentalmente permitirá obter um novo limite para a constante β , à maneira como realizado na Seção 2.3.

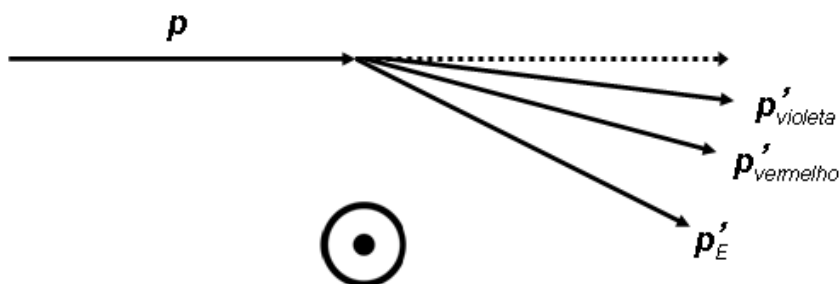


Figura 3.2: Desvios sofridos por fótons passando próximos ao Sol. Todos os fótons são igualmente atraídos pelo setor de Einstein, tendendo a seguir \mathbf{p}'_E . Porém, como o setor $R^2_{\mu\nu}$ repele com mais intensidade fótons mais energéticos, o violeta será mais repellido que o vermelho, tendo um menor ângulo de deflexão com respeito à trajetória retilínea (pontilhada).

3.2 Novo limite superior para $|\beta|$

Conforme se esperaria, a gravitação de Einstein prevê, em primeira ordem, o mesmo ângulo de deflexão, tanto na abordagem clássica quanto ao nível de árvore. De fato, ao igualar a seção de choque (3.16) a sua correspondente clássica[50, 51],

$$\frac{16G^2M^2}{\theta^4} = -\frac{rdr}{\theta d\theta}, \quad (3.17)$$

e proceder a integração, obtém-se:

$$\theta_E = \frac{4GM}{r}. \quad (3.18)$$

Este é precisamente o resultado obtido em (2.30), sendo r o parâmetro de impacto.

Podemos proceder de maneira análoga com a seção de choque da gravitação de ordem superior. O ângulo de deflexão é determinado, então, pela equação

$$16G^2M^2 \left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} \right]^2 = -\frac{rdr}{\theta d\theta}, \quad (3.19)$$

que, após integrada, escreve-se como:

$$r^2 = 16G^2M^2 \left[\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} + \frac{2E^2}{m_2^2} \ln \frac{\theta^2}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} \right] - \bar{\Omega}, \quad (3.20)$$

ou ainda:

$$\frac{1}{\theta_E^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} + \frac{2E^2}{m_2^2} \ln \frac{\theta^2}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} - \Omega, \quad (3.21)$$

sendo Ω uma constante de integração. Como veremos na próxima seção, esta constante é necessária para fazer o limite clássico desta abordagem concordar com o tratamento clássico direto [52]. Omiti-la-emos, por ora, para melhor apreciar como esta transição ocorre.

A equação (3.21) define o ângulo de espalhamento e, a partir dela, é possível chegar às mesmas conclusões qualitativas obtidas ao final da seção anterior, porém com um pouco mais de trabalho. Por completeza, expomos esses procedimentos no Apêndice D.

Podemos resolver, numericamente, a equação (3.21) para os valores de energia que limitam o espectro visível. Substituindo $E = 2\pi/\lambda$ para os comprimentos de onda $\lambda_{\text{vermelho}} = 700 \text{ nm}$ e $\lambda_{\text{violeta}} = 400 \text{ nm}$ (em unidades usuais), para diversos valores de β , obtemos os ângulos de deflexão ilustrados na Figura 3.3.

Este gráfico é análogo ao da Figura 2.3, porém na abordagem ao nível de árvore. Vale notar que a dependência de θ na energia fez diminuir os valores de β correspondentes à transição de $\theta = \theta_E$ a $\theta = 0$, que agora ocorre – para o visível – se $10^{61} \lesssim |\beta| \lesssim 10^{71}$. A abertura do espectro visível seria perceptível, a princípio, aproximadamente nesta mesma faixa de β , como indica a Figura 3.4.

Como até hoje não foi observada a abertura do espectro visível devido à gravitação,

e o ângulo de deflexão previsto pela teoria de Einstein foi verificado¹ com precisão da ordem de 10% (no visível), deve-se ter

$$\mathcal{O}(|\beta|) \leq 10^{62}, \quad (3.22)$$

melhorando o resultado clássico (2.32) em 21 ordens de grandeza.

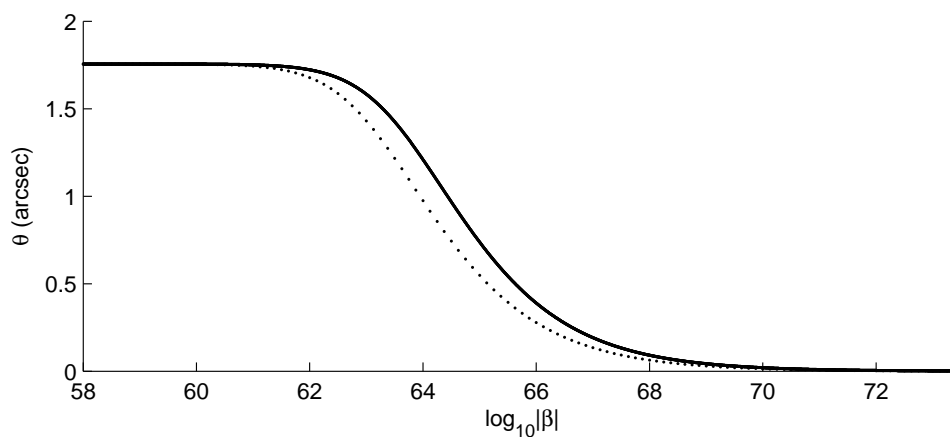


Figura 3.3: Ângulo de deflexão θ como função de $\log_{10} |\beta|$ para fótons rasantes ao Sol. O fóton violeta está representado pela linha pontilhada, enquanto que o vermelho por aquela contínua.

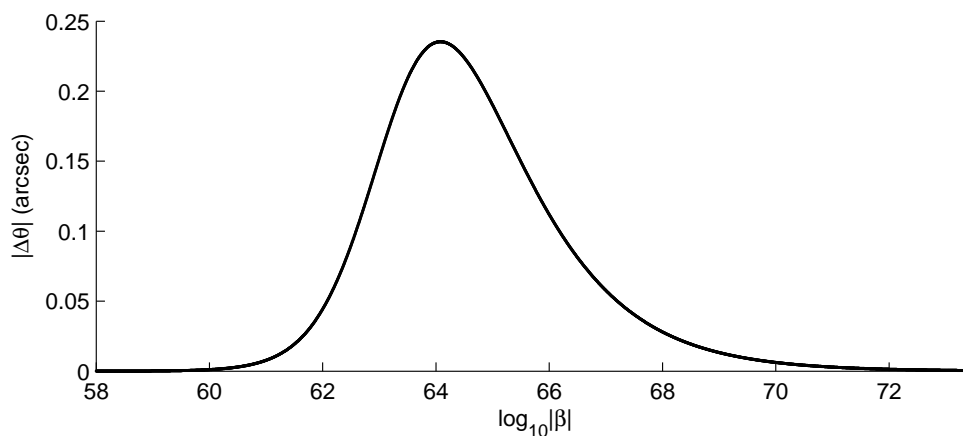


Figura 3.4: $|\Delta\theta| \equiv |\theta_{\text{violeta}} - \theta_{\text{vermelho}}|$ em função de $\log_{10} |\beta|$ para fótons rasantes ao Sol.

¹Vide o final da Seção 2.3 e as referências [41, 46].

As medições realizadas na faixa do rádio citadas na Seção 2.3 [45, 46, 47], apesar de serem mais precisas e acuradas, não melhoram este limite. De fato, como fótons menos energéticos sofrem maior desvio, o intervalo de transição de $\theta = \theta_E$ a $\theta = 0$ ocorre, para a banda de rádio medida, cerca de 10 ordens de grandeza acima do correspondente ao visível. Se dispuséssemos de medidas de deflexão gravitacional de raios-X ou gama poderíamos melhorar o limite para β . Contudo, sinais nesses comprimentos de onda são difíceis de separar daqueles emitidos pelo próprio Sol.

Encerramos esta seção recordando que, até este ponto, tomamos a constante de integração Ω como nula. Ela será determinada explicitamente na próxima seção, por meio de uma comparação judiciosa dos resultados clássicos obtidos no capítulo anterior com aqueles ao nível de árvore. Mostraremos, ainda, que para $\beta < 10^{84}$ pode-se considerar $\Omega = 0$ para todos os efeitos práticos. Portanto, permanecerá válido o limite superior para $|\beta|$ aqui calculado.

3.3 Comparação entre os casos clássico e semiclássico

Talvez a diferença mais marcante entre as abordagens clássica e ao nível de árvore seja o fato de a interação repulsiva devida ao setor $R_{\mu\nu}^2$ depender da energia do fóton sobre o qual atua campo gravitacional. Enquanto no cenário clássico a gravitação espalha igualmente luz de todos os comprimentos de onda – já que ela atua sobre partículas desprovidas de estrutura –, no contexto semiclássico fótons mais energéticos são mais repelidos (e, portanto, menos defletidos).

Uma divergência mais sutil entre esses dois cenários é a discordância entre eles no regime de baixas energias: o limite clássico da teoria semiclássica não recupera a gravitação de ordem superior clássica. De fato, na teoria clássica, qual seja a energia do raio de luz, praticamente não há deflexão caso $|\beta| > 10^{89}$ (vide a Figura 2.3). Por

sua vez, a análise ao nível de árvore não impõe nenhum limite superior ao intervalo de $|\beta|$ de transição: é sempre possível achar E tão pequeno tal que θ seja arbitrariamente próximo de θ_E , mesmo para $|\beta| > 10^{89}$.

Uma maneira possível de fazer uma transição suave do contexto semiclássico rumo ao clássico, no limite de baixas energias, é usar uma constante de integração não-trivial na equação (3.21), que define o ângulo de espalhamento. De fato, se Ω depender apenas de β , é possível fazê-lo ser negligenciável para a faixa de energias cuja transição ocorre para $|\beta| \lesssim 10^{89}$, e ser relevante para aqueles fótons que fazem a transição acima deste intervalo.

Quantitativamente, isso pode ser realizado comparando os ângulos de deflexão previstos em ambas abordagens², e requerendo que $\theta \rightarrow \varphi$ caso $E \rightarrow 0$. A equação (3.21) se escreve, no limite $E \rightarrow 0$, como³:

$$\frac{1}{\theta_E^2} = \frac{1}{\theta^2} - \Omega, \quad (3.23)$$

cuja solução é $\theta = \theta_E (1 + \Omega\theta_E^2)^{-1/2}$. A imposição de que $\theta = \varphi$ determina Ω :

$$\Omega = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\theta_E^2}, \quad (3.24)$$

com φ dado por:

$$\varphi = \varphi_E - \frac{M\kappa^2 b}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + m_2\sqrt{x^2 + b^2}}{(x^2 + b^2)^{3/2}} e^{-m_2\sqrt{x^2 + b^2}} dx, \quad (3.25)$$

como visto em (2.31).

Uma vez determinado Ω , deve-se checar que o limite einsteiniano ($\beta \rightarrow 0$) permanece consistente. A análise conduzida na Seção 2.3 mostra que $\varphi \rightarrow \varphi_E$ se $\beta \rightarrow 0$, donde $\Omega \rightarrow 0$; além disso, $\Omega \gg \theta_E^{-2}$ se $|\beta| \gtrsim 10^{88}$. Logo, o limite $\beta \rightarrow 0$ permanece inalterado, retomando a gravitação de Einstein, como deveria ser. Em particular, para

²Mantemos a notação dos ângulos de deflexão como nas seções anteriores. O ângulo clássico é representado por φ , já o proveniente da análise semiclássica o é por θ .

³Vide o Apêndice D.

$|\beta| < 10^{84}$ a constante Ω pode ser ignorada, a menos que os cálculos envolvam medidas excepcionalmente precisas. Por outro lado, para $|\beta|$ maiores, Ω cresce celeremente, forçando $\theta \rightarrow 0$ mesmo para fótons de baixa energia e recuperando, no limite clássico, o resultado clássico. As Figuras 3.5 e 3.6 ilustram valores de Ω para diversos valores de β .

Para a luz visível mostramos, na seção anterior, que a transição de θ_E para 0, não considerando a constante de integração, ocorre para $|\beta| \in (10^{61}, 10^{71})$ – e com esses valores determinamos um limite superior para $|\beta|$. Esse resultado permanece inalterado pela inclusão de Ω , já que, neste intervalo, podemos tomar $\Omega = 0$.

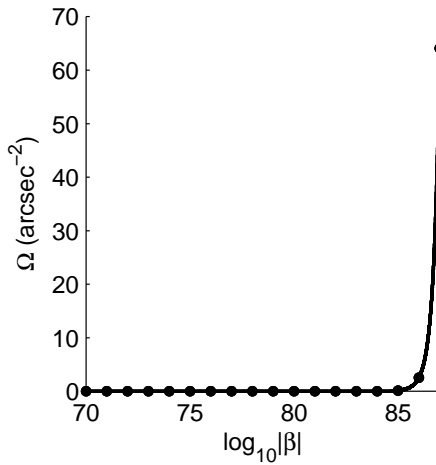


Figura 3.5: Ω em função de β . Nota-se que Ω é praticamente nulo para $|\beta| < 10^{85}$, onde ele começa o crescimento, que segue de forma aproximada uma exponencial dupla, ilustrado na Figura 3.6.

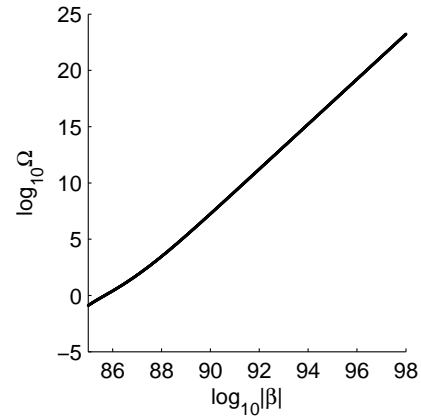


Figura 3.6: Ω (em arcsec^{-2}) em função de β . Aqui a escala do eixo dos Ω também é logarítmica de maneira a mostrar seu rápido crescimento para $|\beta| > 10^{85}$.

Capítulo 4

Avermelhamento de linhas espectrais

Ainda que o avermelhamento de linhas espectrais – também conhecido na literatura por *red-shift* gravitacional – tenha sido o primeiro teste concebido por Einstein para verificação de sua teoria, na prática, acabou sendo um dos últimos dos “testes clássicos” a ter resultados confiáveis [46]. Hoje, contudo, dispomos de medidas de boa precisão, como mostramos mais adiante. Combinando-as com o limite achado para β nos capítulos anteriores, podemos estabelecer um limite para α [53].

4.1 Descrição do fenômeno

O avermelhamento de linhas espectrais é, dentre os chamados “testes clássicos” da relatividade geral, aquele de mais delicada formulação. Isto porque está diretamente relacionado ao comportamento de “relógios” em presença de campos gravitacionais, e a estrutura dos relógios pode trazer dificuldades à análise do fenômeno [31]. Devemos supor, primeiramente, que existem relógios idênticos na natureza, isto é, que se comportam de maneira igual quando estão próximos. Esses relógios devem ser minimamente acoplados à gravitação, para que seus comportamentos sejam similares – e portanto comparáveis –, pese a distância entre eles. Devemos postular, ainda, que as dimensões dos relógios são pequenas se comparadas à escala de curvatura do espaço-tempo. Isso

permite definir posições precisas para eles. Uma última suposição deve ser feita: forças de origem não-gravitacional não afetam a dinâmica interna dos relógios¹.

Em campos gravitacionais fracos, podemos considerar que essas condições se verificam, e usar como relógio uma frequência característica de um átomo de certo elemento. Por exemplo, aquela da radiação emitida em determinada transição eletrônica.

Consideremos, neste espírito, dois átomos A e B de um mesmo elemento, em queda livre num campo gravitacional estático, sujeitos a potenciais diferentes. Um observador comóvel a A irá medir a frequência ν_0^A emitida por este átomo. O mesmo ocorre para o átomo B : um observador que lhe é comóvel medirá sua frequência como sendo ν_0^B . Porém, devido ao princípio de equivalência, como ambos átomos estão em “queda livre”, a frequência medida por um observador comóvel é a frequência própria. Portanto, deve-se ter $\nu_0^A = \nu_0^B \equiv \nu_0$. Em palavras, os fótons emitidos por cada átomo, para observadores que lhe são comóveis, terão a mesma energia.

Contudo, no mundo real, as medidas são geralmente feitas por um observador que é comóvel a um átomo, mas não ao outro. Nesta situação, os fótons emitidos pelos dois átomos serão vistos com energias diferentes.

Suponhamos, então, que o fóton emitido em A é absorvido em B . No referencial do átomo A , ao emitir um fóton de frequência $\nu_0^A = \nu_0$, este átomo sofre uma perda de massa (“gravitacional”) igual a:

$$\Delta m_A = 2\pi\nu_0. \quad (4.1)$$

Por outro lado, ao chegar em B , neste referencial, será percebida a absorção de um fóton de frequência ν_B , o que corresponde a um acréscimo de:

$$\Delta m_B = 2\pi\nu_B. \quad (4.2)$$

A essas diferenças de massas também estão associadas variações na energia potencial

¹Para uma discussão mais detalhada sobre “relógios” e essas suposições, ver, por exemplo, a Seção 12-3 da referência [31], e o Capítulo 5 de [43].

gravitacional. Pela conservação de energia tem-se, então:

$$-\Delta m_A - \Delta m_A V_A + \Delta m_B + \Delta m_B V_B = 0, \quad (4.3)$$

ou

$$-\nu_0 - \nu_0 V_A + \nu_B + \nu_B V_B = 0, \quad (4.4)$$

onde V_i é o potencial gravitacional atuante no átomo i .

Esta última expressão pode ser reescrita na forma

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \equiv \frac{\nu_0 - \nu_B}{\nu_0} = V_B - V_A, \quad (4.5)$$

que relaciona a diferença entre as freqüências emitidas por dois átomos idênticos à diferença de potencial gravitacional entre eles². Se o módulo do potencial em B é menor que em A (B está mais afastado da fonte do campo), então $\nu_B < \nu_0$. Ou seja, um observador comóvel a B irá medir a energia de um fóton emitido por A como sendo menor que aquela emitida por um mesmo átomo, porém em B . Vem daí o nome dado ao fenômeno, já que as linhas espectrais dos átomos sujeitos a um campo mais intenso parecem estar deslocadas no sentido de menor energia (o vermelho, coloquialmente).

É interessante salientar que essa dedução da equação do avermelhamento se baseia, quase que unicamente, nos princípios de equivalência e conservação de energia. A relação existente entre massa-energia e gravitação se materializa na expressão do potencial V . Em particular, todas as teorias métricas que, em primeira ordem, resultam no potencial newtoniano são indistingüíveis pelo efeito de avermelhamento de linhas espectrais [46].

De fato, divergências entre os valores medidos e os previstos por uma teoria podem ocorrer por dois motivos: violação do princípio de equivalência (aqui entendido no sentido de Einstein) ou do limite newtoniano da gravitação [55].

²Este resultado por ser deduzido de diversas maneiras [31, 32, 43, 54, 55]; a sucinta derivação que aqui apresentamos é devida ao próprio Einstein [56].

O potencial da gravitação de ordem superior, como vimos no Capítulo 1, é do tipo pós-newtoniano, já que introduz termos de correção dependentes de α e β :

$$V(r) \equiv \frac{\kappa}{2} h_{00}(r) = V_E(r) + MG \left[-\frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_2 r}}{r} \right], \quad (4.6)$$

onde $V_E(r) = -\frac{MG}{r}$ é o potencial de Newton, também associado à relatividade geral.

Se A e B distam da massa M (fonte do campo), respectivamente, a e b , então o avermelhamento é dado por:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_E + MG \left[-\frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 b}}{b} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_2 b}}{b} + \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 a}}{a} - \frac{4}{3} \frac{e^{-m_2 a}}{a} \right]. \quad (4.7)$$

Com esta fórmula é possível comparar o espectro de átomos na Terra com aquele de átomos do mesmo elemento, porém na superfície solar; basta fazer $b = R$ e $a = R_\odot$, onde R é o raio orbital médio da Terra e R_\odot , o raio do Sol. Como $R \sim 100R_\odot$, para todos efeitos práticos, podemos desprezar os termos relacionados a R . Logo:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_E + \frac{M_\odot G}{3R_\odot} [e^{-m_0 R_\odot} - 4e^{-m_2 R_\odot}] \quad (4.8)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{3} (e^{-m_0 R_\odot} - 4e^{-m_2 R_\odot}) \right] \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_E, \quad (4.9)$$

onde $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_E = \frac{M_\odot G}{R_\odot} = 2,12 \times 10^{-6}$.

Diferentemente do fenômeno de deflexão gravitacional, que dependia apenas de m_2 , o avermelhamento de linhas espectrais também depende de m_0 . Os termos que contêm cada uma dessas constantes aparecem com sinais contrários na expressão (4.9) – o que permite, dado β , encontrar $\alpha = \alpha^*$ tal que $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_E$. Com efeito, não é difícil verificar que isso ocorre para:

$$\alpha^* = \frac{1}{3} \left[|\beta| + \frac{2}{\left(\frac{\kappa \ln 4}{R_\odot} - \sqrt{\frac{4}{|\beta|}} \right)^2} \right], \quad \text{com } |\beta| < |\beta|^*, \quad (4.10)$$

onde $|\beta|^* \equiv \left(\frac{2R_\odot}{\kappa \ln 4} \right)^2 = 3,9 \times 10^{85}$. Esta condição sobre $|\beta|$ garante que o termo de m_0 em (4.9) consiga compensar o de m_2 (que tem um coeficiente quatro vezes

maior). Acima deste valor, o *red-shift* seria menor que o previsto pela relatividade geral. Evidentemente, o α dado pela equação anterior respeita a condição (1.56) de uma teoria livre de táquions: $\alpha > |\beta|/3$.

A possibilidade de a gravitação de ordem superior fornecer exatamente o mesmo resultado que relatividade geral prevê para o avermelhamento de linhas espectrais, se escolhidos com cuidado os valores das constantes da teoria, indica uma dificuldade de se obter limites para α e β a partir do seu confronto com dados experimentais. Não obstante, com o limite superior que já temos para $|\beta|$, decorrente do efeito de deflexão de fótons rasantes ao Sol, podemos determinar um limite para α [53].

4.2 Espectro solar e limite superior para α

Suponhamos, primeiramente, que o experimento verifica a previsão einsteiniana com arbitrário grau de precisão. Nesta situação, a equação (4.10) serviria apenas para fornecer um limite superior para $|\beta|$, já que α poderia ser arbitrariamente grande. Dispondo, contudo, de uma cota superior para $|\beta|$ (obtida por um outro tipo de experimento), $|\beta|_{\text{máx}} < |\beta|^*$, podemos obter um limite para α .

Encarando (4.10) como uma função $\alpha^* = \alpha^*(|\beta|)$, é fácil ver que ela é crescente, de sorte que $\alpha_{\text{máx}} = \alpha^*(|\beta|_{\text{máx}})$. Como o estudo da deflexão da luz concluiu que $|\beta|_{\text{máx}}$ é da ordem de $10^{62} < |\beta|^*$, então $\mathcal{O}(\alpha)$ deve ser menor que a ordem de $\alpha^*(10|\beta|_{\text{máx}}) = 5 \times 10^{62}$. Ou seja, caso o valor do *red-shift* medido no Sol seja identicamente igual ao resultado einsteiniano, deve-se ter:

$$\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{62}. \quad (4.11)$$

A história das medições do avermelhamento do espectro solar remonta ao século XIX, quando o fenômeno foi constatado pela primeira vez; e, já na primeira década do século passado, era conhecido que este efeito variava conforme a posição no disco do Sol [54]. Se as opiniões sobre as causas do fenômeno eram bastante variadas e os

resultados às vezes discordantes, hoje se sabe que parte dessas divergências tem origem no caráter dinâmico da fotosfera: o movimento convectivo de matéria nos grânulos, e mesmo as oscilações acústicas de 5 minutos, causam desvios espectrais devido ao efeito Doppler [57]. A dificuldade na análise dos dados é o motivo da demora em se ter resultados acurados. Com efeito, os primeiros dados confiáveis do desvio gravitacional datam dos anos 1960 [46, 58].

Tabela 4.1: Medidas de *red-shift* gravitacional no espectro solar

Ano	Átomo/ Molécula	ν_0 (Hz)	$\frac{\Delta\nu}{\nu} / \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_E$	Ref.
1961	Sr	$6,5 \times 10^{-6}$	$1,0 \pm 0,1$	[58]
1962	Na	$5,09 \times 10^{-6}$	$1,05 \pm 0,05$	[43, 57]
1972	K	$3,90 \times 10^{-6}$	$1,01 \pm 0,06$	[59]
1991	$^3\text{O}_2$	$3,86 \times 10^{-6}$	$0,99 \pm 0,02$	[57]

Na Tabela 4.1 apresentamos alguns valores do *red-shift* gravitacional medidos no Sol. Uma rápida inspeção basta para verificar que a previsão de Einstein para este fenômeno foi verificada com uma faixa de incerteza de 2%. Assim, podemos admitir na equação (4.9) um desvio de ε , escrevendo-a como:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (1 \pm \varepsilon) \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_E, \quad \pm\varepsilon = \frac{1}{3} (e^{-m_0 R_\odot} - 4e^{-m_2 R_\odot}), \quad \varepsilon > 0. \quad (4.12)$$

Resolvendo a segunda equação, para α obtém-se:

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{3} \left\{ |\beta| + \frac{2R_\odot^2}{\kappa^2 \left[\ln \left(\pm 3\varepsilon + 4e^{-R_\odot} \sqrt{4/|\beta|\kappa^2} \right) \right]^2} \right\}, \quad (4.13)$$

que é uma função crescente em $|\beta|$. A solução α_- , escolhendo $-\varepsilon$, só existe se $|\beta| > \frac{4R_\odot^2}{\kappa^2 [\ln(3|\varepsilon|/4)]^2} = 5,2 \times 10^{84}$ (para $\varepsilon = 0,03$). Sendo incapaz de limitar α , não precisamos considerá-la. Usando, então, o limite superior para $|\beta|$ obtido pela deflexão da luz,

temos:

$$\alpha_+ = \frac{1}{3} \left\{ |\beta|_{\text{máx}} + 2R_{\odot}^2 \left[\kappa \ln \left(3 \times 0,01 + 4e^{-R_{\odot} \sqrt{4/|\beta|_{\text{máx}} \kappa^2}} \right) \right]^{-2} \right\} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{3} (10^{63} + 3,0 \times 10^{84}) \quad (4.15)$$

$$= 1,0 \times 10^{84}, \quad (4.16)$$

donde se conclui que α deve ser de ordem não superior a 10^{84} .

É interessante notar que a dependência em $|\beta|$ é apreciável apenas a partir de $|\beta| = 10^{82}$, como se depreende da Figura 4.1. Para $|\beta|$ abaixo deste valor – e não importa quão abaixo –, a ordem de α pode ser até 10^{84} que o efeito dos termos de ordem superior não serão notados, na precisão disponível atualmente. Para $|\beta|$ maiores que este valor, valores mais altos de α poderiam ser admitidos. Contudo, a deflexão gravitacional já impôs que $|\beta| < 10^{63}$, o que nos deixa com o limite superior para α :

$$\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{84}. \quad (4.17)$$

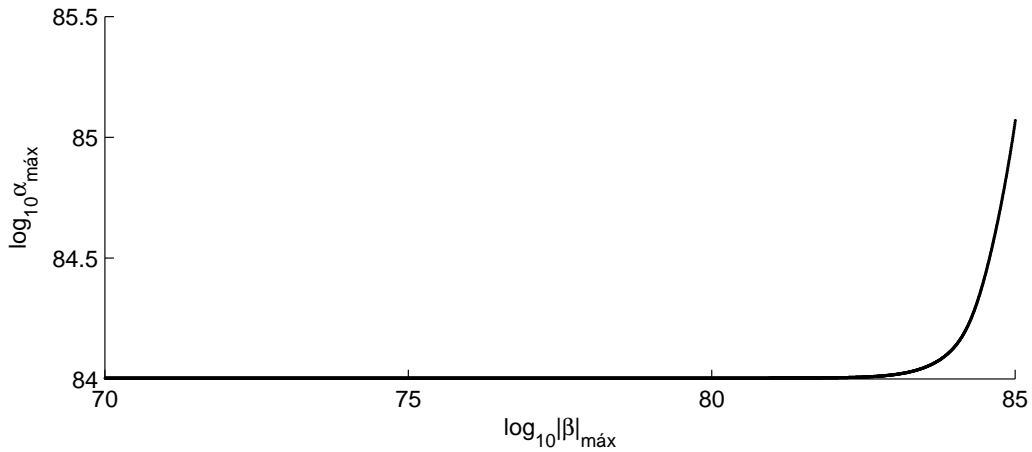


Figura 4.1: $\alpha_{\text{máx}}$ (4.14) em função de $|\beta|$, no contexto do *red-shift* gravitacional solar.

4.3 Outros dados experimentais, novos limites superiores para α

A medição do desvio para o vermelho de linhas espectrais foi originalmente proposta tendo em mente o espectro do Sol. Porém, ainda nos primeiros anos que seguiram a publicação da relatividade geral, tentou-se verificar esse efeito em fontes fora do Sistema Solar. Arthur Eddington desempenhou papel relevante neste processo, como entusiasta da, à época, nova teoria. Acreditando que as estrelas anãs brancas seriam muito densas, concluiu que seus espectros sofreriam um desvio mais significativo – e, portanto, de mais fácil e precisa medição. É necessário, contudo, dispor da razão M/R da estrela para que se possa comparar os dados medidos com o previsto, no âmbito da relatividade geral. (Na gravitação de ordem superior a questão é um pouco mais complexa, já que R aparece isolado desta razão, vide (4.8).) A solução encontrada para este entrave foi estudar o espectro de sistemas binários nos quais uma das estrelas é uma anã branca: o conhecimento da órbita do par e modelos astrofísicos permitem a determinação de cada parâmetro individualmente.

Para que o método seja eficaz é necessário que as estrelas estejam suficientemente separadas, de tal maneira que a luz de uma não contamine o espectro da outra, durante o processo de medida. Sirius e 40 Eridani cumprem esse requisito e, por serem sistemas há muito estudados, têm órbitas determinadas com razoável precisão (mesmo à época de Einstein).

Tabela 4.2: Parâmetros físicos de interesse das anãs brancas Sirius B e 40 Eridani B

Estrela	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	Ref.	$(\frac{\Delta\nu}{\nu})_E$
40 Eridani B	$0,501 \pm 0,011$	$0,0136 \pm 0,00024$	[60]	$(7,8 \pm 0,3) \times 10^{-5}$
Sirius B	$0,978 \pm 0,005$	$0,00864 \pm 0,00012$	[61]	$(2,41 \pm 0,05) \times 10^{-4}$

Apresentamos na Tabela 4.2 a massa e o raio de Sirius B e 40 Eridani B, bem

como o desvio espectral previsto pela relatividade geral. Esses são dados modernos e servirão como nossas referências para comparar resultados experimentais e previsões da gravitação de ordem superior.

Na Tabela 4.3 apresentamos algumas medidas do avermelhamento espectral dessas estrelas, bem como o desvio da predição einsteiniana e a respectiva ordem de grandeza da cota superior para α – decorrente desses dados. Esta última quantidade foi calculada nos mesmos moldes do realizado na seção anterior, usando, *mutatis mutandis*, a equação (4.13).

Tabela 4.3: Medidas de *red-shift* gravitacional no espectro de anãs brancas

Estrela	Ano	$\frac{\Delta\nu}{\nu}$	Ref.	$\frac{\Delta\nu}{\nu} / \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_E$	$\mathcal{O}(\alpha_{\text{máx}})$
40 Eridani B	1954	$(7 \pm 1) \times 10^{-5}$	[62]	$0,9 \pm 0,2$	10^{81}
40 Eridani B	1996	$(8,6 \pm 0,5) \times 10^{-5}$	[63]	$1,1 \pm 0,1$	10^{81}
Sirius B	1971	$(3,0 \pm 0,5) \times 10^{-4}$	[64]	$1,2 \pm 0,2$	(indeterminada)
Sirius B	2005	$(2,7 \pm 0,2) \times 10^{-4}$	[61]	$1,11 \pm 0,09$	10^{81}

Assim como a deflexão da luz era sensível ao parâmetro de impacto b (vide, por exemplo, a Figura 2.4), e fornecia um melhor limite para β se menor fosse b , no *red-shift* ocorre algo semelhante. Quanto mais próximo da fonte do campo estiver o emissor de radiação, menor será o α de transição do comportamento einsteiniano para o limite assintótico da teoria. Como as anãs brancas têm tamanhos similares ao do nosso planeta, o limite obtido para α decorrente do espectro delas é inferior ao obtido na seção anterior. De fato, a análise do espectro solar forneceu o limite $\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{84}$, três ordens de grandeza acima do aqui determinado:

$$\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{81}. \quad (4.18)$$

É interessante reparar que isso ocorre apesar de a precisão das medidas solares serem superiores às das de anãs brancas³. Não obstante, como veremos em seguida, a com-

³Talvez a maior dificuldade da comparação de dados de *red-shift* de espectros estelares seja a impre-

binhação de melhores precisão experimental e limite para α decorre de testes realizados na vizinhança do nosso planeta.

(Antes de finalizar a discussão dos espectros das anãs brancas, faz-se necessário comentar a medida do avermelhamento em Sirius B realizada em 1971, que foi taxada de “indeterminada” na Tabela 4.3. Este dado não restringe α pois a barra de incerteza é tão grande que abarca tanto o valor de desvio previsto pela relatividade geral quanto o limite da teoria de ordem superior para $\beta = -10^{63}$ e $\alpha \rightarrow \infty$, como mostra a Figura 4.2. Isso exemplifica a necessidade de medidas precisas para que se logre divisar um eventual comportamento não-newtoniano.)

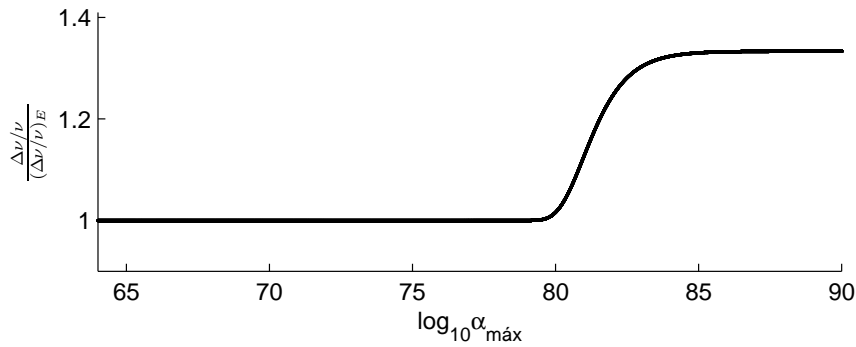


Figura 4.2: $\frac{\Delta\nu/\nu}{(\Delta\nu/\nu)_E}$ para Sirius B, para diversos valores de α . A faixa de incerteza da medida realizada em 1971 [64] vai até 1,4, não sendo, pois, capaz de definir um limite para α .

As medidas mais precisas de desvio de linhas espectrais, disponíveis atualmente, são feitas nas vizinhanças da Terra. É notável o desempenho dos experimentos de Pound-Rebka-Snider – os primeiros resultados desse tipo datam de 1960 e verificam a predição da relatividade geral com precisão de 10%: $\frac{\Delta\nu/\nu}{(\Delta\nu/\nu)_E} = 1,05 \pm 0,10$ [66]. Quatro anos depois, a precisão do experimento chegou ao patamar do 1%. Uma descrição da metodologia empregada pode ser encontrada em [67] e [66]. A proposta era comparar a precisão nos valores de suas massas, raios e velocidades próprias. Desvios espectrais são freqüentemente medidos com boa precisão e utilizados no caminho inverso: considerando que vale a relatividade geral, a partir deles se determina a razão massa/raio da estrela [61, 63, 65].

o espectro de dois átomos iguais, um situado na base e o outro no alto de uma torre; a diferença de potencial entre eles sendo devida ao campo gravitacional da Terra.

Nos experimentos realizados por Pound, Rebka e Snider as fontes distavam de uma altura de 22,5 m, correspondendo a um desvio $(\Delta\nu/\nu)_E = 2,454 \times 10^{-15}$. O melhor resultado obtido foi: $\frac{\Delta\nu/\nu}{(\Delta\nu/\nu)_E} = 0,997 \pm 0,008$ [68].

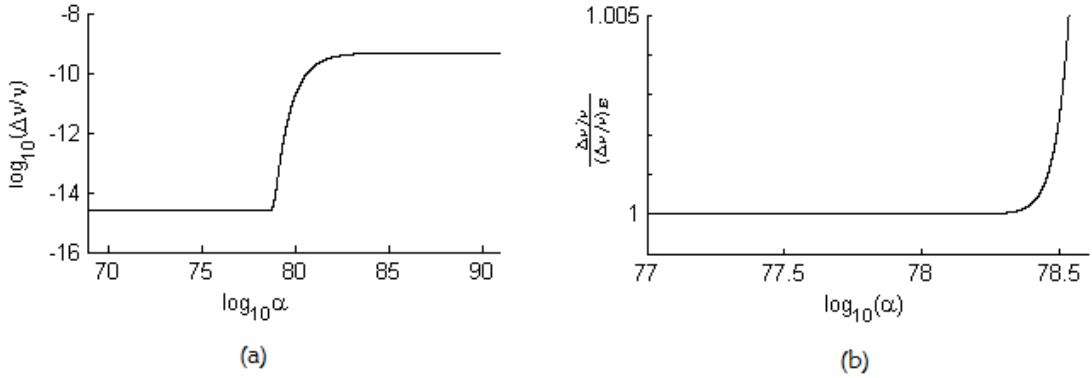


Figura 4.3: a) $\log_{10} \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)$ previsto pela gravitação de ordem superior, como função de $\log_{10}(\alpha)$, no experimento de Pound-Rebka-Snider. Foi mantido fixo o parâmetro $\beta = -10^{63}$. b) Detalhe da região da faixa de incerteza experimental de [68].

A comparação com a previsão da gravitação de ordem superior pode ser feita na Figura 4.3, onde mantivemos $\beta = -10^{63}$ fixo e variamos α . Para que haja concordância com o resultado de Pound & Snider, deve-se ter:

$$\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{78}. \quad (4.19)$$

Além da ótima precisão da medida, a proximidade dos átomos estudados à fonte do campo gravitacional favorece a determinação de um bom limite para α . Isto ocorre porque os termos de ordem superior tendem a corrigir a gravitação no regime de pequenas distâncias. Assim, quanto mais próximas as fontes dos fótons estiverem da origem do campo, mais relevante será a interação com os setores de ordem mais alta. Experimentalmente, nessa circunstância, constantes de acoplamento menores poderiam ser

percebidas com mais facilidade; daí o limite aqui encontrado para α ser melhor que os anteriores.

A medida mais precisa do *red-shift* gravitacional foi feita pela sonda *Gravity Probe A*, num experimento realizado com um *maser* a 10.000 km da superfície da Terra. Na ocasião, o resultado da relatividade geral foi obtido com precisão da ordem de 0,01% [69]. Apesar da excelente precisão, a já grande diferença de potencial entre os átomos faz com que a relevância de eventuais efeitos de curta distância seja diminuída. De fato, o limite que segue desta medição é $\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{79}$.

Há, ainda, um fator que torna questionável o uso deste experimento para estabelecer um limite para α . Ao invés de medir o *red-shift* absoluto entre a sonda e a superfície da Terra, foi monitorada a variação desta quantidade ao longo da trajetória da sonda. Como a interação que estudamos prevê um desvio do resultado einsteiniano que depende da distância entre as fontes emissoras de radiação, é necessário dispor do avermelhamento medido ponto a ponto para comparar com o resultado teórico. Esta mesma dificuldade foi apontada por [55], também ao trabalhar com o potencial de Yukawa. O resultado que melhor restringe α é, portanto, o de Pound & Snider; ao menos por ora.

Ao finalizar esta seção, cabe uma palavra acerca da relevância do limite encontrado para β na determinação de $\alpha_{\text{máx}}$. Ainda que o limite aqui obtido para α não seja tão sensível ao valor de $|\beta|_{\text{máx}}$ (vide, por exemplo, a Figura 4.1), sem ele haveríamos estabelecido um valor bem menos restritivo. Com efeito, se dispuséssemos apenas do limite clássico $|\beta| \leq 10^{83}$, a comparação com as medidas de *red-shift* de anãs brancas seria inconclusiva, pois este β ocorre numa região em que nenhum α é capaz de fornecer os dados observados. (No contexto da equação (4.10), para as anãs brancas, teríamos $|\beta|_{\text{máx}} > |\beta|^*$.) O mesmo vale para os experimentos nos arredores da Terra, de sorte que o único limite para α seria aquele oriundo das medidas do espectro do Sol – o valor menos restritivo dentre os que aqui apresentamos.

Epílogo

Nesta atual “era da precisão” há a expectativa de, nos próximos anos, se dispor de dados necessários para estabelecer limites sobre os parâmetros de várias teorias, clássicas e quânticas. O satélite GAIA, por exemplo, da Agência Espacial Européia, irá fazer o mais preciso levantamento astrométrico até o momento, alcançando a precisão de dez microsegundos de arco. Este excelente banco de dados possibilitará a feitura de novos testes de gravitação no Sistema Solar. É esperado medir efeitos de deflexão gravitacional devido aos planetas, incluindo a contribuição do momento de quadrupolo dos planetas jovianos [70]; bem como efeitos de segunda ordem, no contexto da relatividade geral [71]. Tudo isso permitirá a determinação dos célebres parâmetros pós-newtonianos (PPN) com ótima precisão [72].

A gravitação de ordem superior, porém, devido aos potenciais de Yukawa que aparecem na sua energia potencial, não se encaixa no formalismo PPN tradicional. Suas previsões teóricas para a deflexão da luz e o avermelhamento de linhas espectrais depende, em primeiro lugar, de um valor de distância até a fonte do campo. Por isso a comparação com dados de parâmetros PPN deve ser feita com cautela, como enfatizamos nas análises deste trabalho. Para melhor determinar as constantes de acoplamento da gravitação de ordem superior a partir das modernas medições que estão por vir, é necessário fazer a modelagem do experimento completo, tendo como base esta teoria.

Em segundo lugar, para medidas de deflexão da luz, deve-se ter em mente a propagação dispersiva, que surge já em primeira ordem ao nível de árvore [35]. (Na gravitação einsteiniana ela ocorre, no espalhamento de um fóton por um campo gravitacional fraco externo, na segunda ordem da expansão perturbativa [73].)

Como a gravitação de ordem superior possui dois parâmetros livres, eventualmente as contribuições dos termos de derivadas mais altas podem se cancelar. Um exemplo desta situação é o caso do *red-shift* gravitacional, que, para certos valores de α e β , pode fornecer exatamente o mesmo resultado da relatividade geral. Esta possibilidade de anular o desvio pós-newtoniano do potencial torna de especial valor aqueles testes que dependem de apenas uma das constantes. Vimos, nos capítulos 2 e 3, que este é o caso da deflexão da luz, que depende unicamente de β . Uma vez determinado um limite para uma das constantes, podemos usar testes que dependam de ambas para restringir a gama de possíveis valores que a outra pode assumir. Foi precisamente assim que logramos encontrar uma cota superior para α usando dados de avermelhamento espectral: $\mathcal{O}(\alpha) \leq 10^{78}$ [53].

Vale ressaltar que só foi possível determinar este valor porque dispúnhamos de um bom limite para β , obtido da análise da deflexão da luz ao nível de árvore [52]. Este limite, $\mathcal{O}(|\beta|) \leq 10^{62}$, diga-se de passagem, melhora em 12 ordens de grandeza o apresentado na literatura [26, 27]. Limites mais restritivos podem ser obtidos levando-se em conta duas características da gravitação de ordem superior: o comportamento não-newtoniano a curto alcance e a propagação dispersiva de fótons.

A mencionada dependência na distância tem como origem a correção que a teoria de ordem superior promove no limite de pequenos comprimentos. Esta correção evita as divergências que ocorrem na gravitação einsteiniana; seu curto alcance se manifesta nos termos de Yukawa presentes na expressão de seu potencial. Neste trabalho concentramos nossa atenção sobretudo em testes astrofísicos de gravitação. Os únicos resultados de ambiente controlado que usamos foram os experimentos de Vessot-Levine (sonda

Gravity Probe A) e de Pound-Rebka-Snider; este último, importante frisar, forneceu o melhor limite para α . A vantagem deste é justamente sua capacidade de explorar essa região de pequenas distâncias.

Uma possibilidade de melhorar este limite talvez seja usar o potencial da gravitação de ordem superior para estudar experimentos de gravitação em escalas milimétricas e sub-milimétricas, em laboratório – versões modernas do trabalho pioneiro de Daniel Long [74, 75, 76]. Há não muito tempo isso foi feito no contexto de teorias $f(R)$ (ver [17] e [77], por exemplo) mas, até onde sabemos, para a gravitação de ordem superior completa o último trabalho a esse respeito foi o de Stelle, em 1978 [26]. Combinando essas medidas com o limite que obtivemos para β talvez seja possível reduzir a incerteza sobre α [53].

Por sua vez, o limite de β pode ser melhorado valendo-se do fato de o espalhamento de um fóton depender da sua energia, como mostrou a análise ao nível de árvore. Se se dispõe de medidas de deflexão da luz, nos comprimentos de raios-X ou gama, por objetos cujas massa e raio sejam conhecidos com certa precisão, pode-se inferir um limite ainda menor para $|\beta|$. Outra alternativa seria medir um lenteamento gravitacional que dependesse da energia da radiação, observando assim o “arco-íris gravitacional”. Este fenômeno já foi medido na faixa dos raios-X, porém, ao que tudo indica, sua origem está relacionada à distribuição dos elétrons que emitem a radiação [78]. Ademais, neste caso foi constatado que fótons mais energéticos sofriam mais lenteamento – comportamento contrário ao previsto pela gravitação de ordem superior.

Conhecer os valores dos parâmetros livres é importante não só para dotar o modelo de capacidade preditiva. Como dissemos na Introdução, teorias quânticas com comprimento mínimo levam naturalmente ao aparecimento de derivadas de ordens superiores [19, 20, 21]. A abordagem do comprimento mínimo via deformações na álgebra de Heisenberg pode ser comparada a certas formulações envolvendo geometria não-comutativa [79, 80, 81, 82]. É válido, então, analisar sob quais condições essa

identificação pode ser feita, e como o comprimento mínimo se relaciona ao parâmetro de não-comutatividade. Como este parâmetro está associado às constantes de acoplamento dos termos de ordem superior, os resultados aqui obtidos podem se traduzir em limites para o comprimento mínimo da teoria. Mais investigações merecem ser feitas neste sentido, o que esperamos realizar num futuro próximo.

Apêndice A

Equações de campo para a gravitação de ordem superior

Neste apêndice deduzimos as equações de campo da gravitação de ordem superior por meio da variação da ação

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 - \mathcal{L}_M \right), \quad (\text{A.1})$$

onde \mathcal{L}_M é o setor de matéria. Calcularemos a variação dos diversos termos em separado, juntando-os apenas no final. Aqui os operadores ∇ e \square estão associados a derivadas covariantes.

a) *Variação de $R^\rho_{\mu\nu\sigma}$*

Num sistema de coordenadas geodésicas, $R^\rho_{\mu\nu\sigma} = -\Gamma^\rho_{\mu\nu,\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma,\nu}$ donde

$$\delta R^\rho_{\mu\nu\sigma} = -\nabla_\sigma \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}.$$

Como (1.3) implica em $\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\nabla_\nu \delta g_{\mu\alpha} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu})$, segue:

$$\begin{aligned} \delta R^\rho_{\mu\nu\sigma} = & \frac{1}{2} [g^{\rho\alpha} (\nabla_\nu \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\nu) \delta g_{\mu\alpha} + g^{\rho\alpha} (\nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\lambda\alpha} - \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha}) + \\ & + \nabla_\lambda \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla^\rho \delta g_{\mu\lambda}]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

b) *Variação de $R_{\mu\nu}$*

Como $\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\rho}_{\mu\nu\rho}$, do item anterior decorre:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g^{\rho\alpha} \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\alpha} - \nabla^{\alpha} \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\alpha} - \nabla_{\mu} \nabla^{\rho} \delta g_{\nu\rho} + \square \delta g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.3})$$

c) *Variação de R*

Notando que $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}$ e usando o resultado anterior segue que:

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (-R^{\mu\nu} - \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} + g^{\mu\nu} \square) \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

d) *Variação de $\sqrt{-g}$*

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{(\partial g / \partial g_{\mu\nu})}{g} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

e) *Variação de $\mathcal{S}_R \equiv \int d^4x \sqrt{-g} R$*

Usando os resultados obtidos em (A.4) e (A.5) temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_R[g_{\mu\nu}] &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-R^{\mu\nu} - \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} + g^{\mu\nu} \square + \frac{R}{2} g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-R^{\mu\nu} + \frac{R}{2} g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ao integrar por partes os termos com derivadas de $\delta g_{\mu\nu}$ e assumir que $\delta g_{\mu\nu}$ e $\nabla^{\rho} \delta g_{\mu\nu}$ se anulam no contorno da região de integração.

f) *Variação de $\mathcal{S}_{R^2} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} R^2$*

Vale $\delta(R^2) = 2R\delta R$. Usando (A.4) e (A.5) e fazendo integrações por partes (como no item anterior) segue que

$$\delta \mathcal{S}_{R^2}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-2RR^{\mu\nu} - 2\nabla^{\mu} \nabla^{\nu} R + 2g^{\mu\nu} \square R + \frac{R^2}{2} g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

g) *Variacão de $\mathcal{S}_{R^2_{\mu\nu}} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} R^2_{\mu\nu}$*

Como $\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta(R_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu})$, pode-se mostrar que

$$\delta\mathcal{S}_{R^2_{\mu\nu}}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta}\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - 2R^{\mu\alpha}R_{\alpha}{}^{\nu}\delta g_{\mu\nu} \right).$$

Por sua vez, após integrações por partes, e usando (A.3), o termo central se escreve como

$$\int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-2\nabla_{\rho}\nabla^{\nu}R^{\mu\rho} + g^{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}R^{\alpha\beta} + \square R^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}.$$

Ao levar em conta as identidades $\nabla_{\rho}\nabla^{\nu}R^{\mu\rho} = \frac{1}{2}\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}R + R^{\mu\sigma\rho\nu}R_{\sigma\rho} - R^{\mu\alpha}R_{\alpha}{}^{\nu}$ e $\nabla_{\beta}R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla^{\alpha}R$, cujas provas podem ser encontradas em [37], segue:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_{R^2_{\mu\nu}}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta} - \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}R - 2R^{\mu\sigma\rho\nu}R_{\sigma\rho} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\square R + \square R^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

h) *Variacão de $\mathcal{S}_M \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M$*

Se definirmos $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}}$ segue:

$$\delta\mathcal{S}_M[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{T^{\mu\nu}}{2} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

Coletando os resultados obtidos em (A.6)-(A.9), e considerando o princípio varia-cional $\delta\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = 0$, obtemos as equações de movimento do campo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(2RR_{\mu\nu} + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R - 2g_{\mu\nu}\square R - \frac{R^2}{2}g_{\mu\nu} \right) + \\ + \frac{\beta}{2} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta} + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R + 2R_{\mu\sigma\rho\nu}R^{\sigma\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - \square R_{\mu\nu} \right) + \frac{T_{\mu\nu}}{2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

consideravelmente mais complicadas que as equações de Einstein.

A linearização via aproximação de campo fraco implica em desprezar os termos que envolvem quadrados das curvaturas: R^2 , $RR_{\mu\nu}$, $R^2_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\sigma\rho\nu}R^{\sigma\rho}$, por serem de ordem

κ^2 . Ainda, e por esta mesma razão, das derivadas covariantes permanecem apenas as derivações por componentes espaço-temporais (ordem zero em κ). E, como $g_{\mu\nu}$ sempre aparece multiplicando um termo de ordem κ , podemos substituí-lo pela métrica de Minkovski. A equação de campo da gravitação linearizada é, destarte:

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha\right)\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\eta_{\mu\nu}\right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)(\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha R - \partial_\mu\partial_\nu R) = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.11})$$

É oportuno notar que, como $R_{\mu\nu}{}^{;\nu} = \frac{1}{2}R_{;\mu}$, vale:

$$\left[\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha\right)\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\eta_{\mu\nu}\right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)(\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha R - \partial_\mu\partial_\nu R)\right]^{;\nu} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Decorre, então, da equação de movimento (A.11), a conservação do tensor energia-momento definido no item h) deste apêndice:

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Teorema para o estudo da unitariedade

Teorema[83]: *Sejam $m_2 \geq 0$ a massa de uma partícula física genérica de spin 2 associada a um modelo gravitacional 4-dimensional, k o seu correspondente momento trocado, e $T^{\mu\nu}$ a corrente conservada. Então $\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3}\right)\Big|_{k^2=m_2^2} > 0$ e $\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{2}\right)\Big|_{k^2=0} \geq 0$.*

Demonstração: Seja a base linearmente independente formada pelos vetores $k^\mu \equiv (k^0, \vec{k})$, $\tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\vec{k})$ e $\varepsilon_i^\mu \equiv (0, \hat{e}_i)$, $i = 1, 2$, tais que:

$$k_\mu k^\mu = \tilde{k}_\mu \tilde{k}^\mu = k^2, \quad k_\mu \tilde{k}^\mu = k_0^2 + \vec{k}^2, \quad k_\mu \varepsilon_i^\mu = \tilde{k}_\mu \varepsilon_i^\mu = 0, \quad \varepsilon_i^\mu \varepsilon_{j\mu} = -\delta_{ij}.$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ se escreve nessa base como ($i \leq j$):

$$T^{\mu\nu} = Ak^\mu k^\nu + B\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + C^{ij} \varepsilon_i^{(\mu} \varepsilon_j^{\nu)} + Dk^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + E^i k^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)} + F^i \tilde{k}^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)}, \quad (\text{B.1})$$

onde $a^{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu)$.

A conservação da corrente implica em

$$Ak^2 + \frac{D}{2}(k_0^2 + \vec{k}^2) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$B(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D}{2}k^2 = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$E^i k^2 + F^i(k_0^2 + \vec{k}^2) = 0 \implies (E^i)^2 > (F^i)^2. \quad (\text{B.4})$$

Das equações (B.2) e (B.3), obtemos

$$Ak^4 = B(k_0^2 + \vec{k}^2)^2. \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado, saturando os índices de $T^{\mu\nu}$ com k_ν e k_μ chegamos a uma relação de consistência para os coeficientes A , B e D :

$$Ak^4 + B(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + Dk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Com essas relações podemos determinar o sinal de $\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{D-2}\right) \Big|_{k^2=0}$.

Se $k^2 = 0$, as equações (B.2-B.4) implicam $B = D = F = 0$. A equação (B.1) se escreve então:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= Ak^\mu k^\nu + C^{ij} \epsilon_i^{(\mu} \epsilon_j^{\nu)} + E^i k^{(\mu} \epsilon_i^{\nu)}, \\ T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} &= C^{ij} \epsilon_{i(\mu} \epsilon_{\nu)j} C^{kl} \epsilon_k^{(\mu} \epsilon_l^{\nu)} = (C^{ij})^2, \end{aligned}$$

donde¹ $T \equiv T^\mu{}_\mu = -C^{ii}$ e $T^2 = (C^{ii})^2$.

Portanto,

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{2}\right) \Big|_{k^2=0} = \left[(C^{ij})^2 - \frac{(C^{ii})^2}{2}\right] = \left[\frac{(C^{11} - C^{22})^2}{2} + 2(C^{12})^2\right] \geq 0. \quad (\text{B.7})$$

Determinemos, agora, o sinal de $T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3}$ em $k^2 = m_2^2$.

Com (B.6) obtemos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} &= \underbrace{A^2 k^4 + AB(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + ADk^2(k_0^2 + \vec{k}^2)}_a + AB(k_0^2 + \vec{k}^2)^2 + B^2 k^4 + \\ &\quad + \underbrace{BDk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D^2}{2} k^4 + (C^{ij})^2}_b + \underbrace{ADk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) + \frac{D^2}{2} (k_0^2 + \vec{k}^2)^2}_c + \\ &\quad + \underbrace{BDk^2(k_0^2 + \vec{k}^2) - \frac{(E^i)^2}{2} k^2 - \frac{E^i F^i}{2} (k_0^2 + \vec{k}^2) - \frac{(F^i)^2}{2} k^2 - \frac{E^i F^i}{2} (k_0^2 + \vec{k}^2)}_d. \end{aligned}$$

¹Aqui índices repetidos subentendem somatórios, e expressões como $(C^{ij})^2$ devem ser entendidas como $\sum_{i,j} C^{ij} C^{ij}$. Da mesma forma, $C^{ii} \not\equiv \sum_i C^{ii}$, mas $(C^{ii})^2 \not\equiv (\sum_i C^{ii})^2$.

Usando as relações (B.2)-(B.6) pode-se mostrar que $a = b = c = d = 0$. Podemos escrever então $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = A^2k^4 - 2ABk^4 + B^2k^4 + (C^{ij})^2 - \frac{(F^i)^2}{2}k^2 + \frac{(E^i)^2}{2}k^2$, ou seja,

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = (A - B)^2k^4 + (C^{ij})^2 + \frac{k^2}{2} [(E^i)^2 - (F^i)^2] > 0. \quad (\text{B.8})$$

Por outro lado, como

$$T = Ak^2 + Bk^2 - C^{ii} + D(k_0^2 + \vec{k}^2) = Bk^2 - Ak^2 - C^{ii} = (B - A)k^2 - C^{ii}, \quad (\text{B.9})$$

segue que

$$T^2 = (A - B)^2k^4 + 2(A - B)C^{ii}k^2 + (C^{ii})^2. \quad (\text{B.10})$$

De (B.8) e (B.10), temos

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3} \right) \Big|_{k^2=m_2^2} &= (A - B)^2m_2^4 + (C^{ij})^2 + \frac{m_2^2}{2} [(E^i)^2 - (F^i)^2] + \\ &\quad - \frac{(A - B)^2m_2^4}{3} - \frac{2(A - B)C^{ii}m_2^2}{3} - \frac{(C^{ii})^2}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3} \right) \Big|_{k^2=m_2^2} &= \underbrace{\frac{2}{3}(A - B)^2m_2^4}_{>0} + \underbrace{(C^{ij})^2 - \frac{(C^{ii})^2}{3}}_{\geq 0} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{m_2^2}{2} [(E^i)^2 - (F^i)^2]}_{>0} - \frac{2(A - B)C^{ii}m_2^2}{3}. \end{aligned}$$

Os termos indicados pelas chaves são claramente positivos, restando apenas verificar o sinal do último termo. Para tanto, vamos considerar o traço do tensor $T^{\mu\nu}$: porque partículas físicas massivas têm o traço do tensor energia-momento sempre positivo, em (B.9) tem-se $(B - A) > 0$.

Como $(A - B) < 0$ segue que $-\frac{2(A-B)C^{ii}m_2^2}{4} > 0$. Então,

$$\left(T_{\mu\nu}^2 - \frac{T^2}{3} \right) \Big|_{k^2=m_2^2} > 0, \quad (\text{B.11})$$

finalizando a demonstração do teorema.

Apêndice **C**

Equivalência conforme e o setor de R^2

Neste breve apêndice apresentamos a equivalência conforme entre a teoria com apenas os setores $R + R_{\mu\nu}^2$ e aquela que também contém o termo R^2 na lagrangeana.

Vimos em (1.70) que, no calibre de Teyssandier, a métrica pode ser escrita como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + [h_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu} - \phi\eta_{\mu\nu}] \kappa. \quad (\text{C.1})$$

Não é difícil se convencer de que, caso a teoria não tivesse o setor¹ R^2 , ela seria descrita pela métrica

$$g_{\mu\nu}^{(R+R_{\mu\nu}^2)} = \eta_{\mu\nu} + [h_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu}] \kappa. \quad (\text{C.2})$$

Reescrevemos, pois, em primeira ordem, (C.1) como:

$$g_{\mu\nu} = (1 - \kappa\phi)g^{(R+R_{\mu\nu}^2)}. \quad (\text{C.3})$$

Assim, a inclusão do termo R^2 pode ser vista como uma transformação conforme na métrica da teoria $R + R_{\mu\nu}^2$. Como uma dita transformação preserva ângulos, concluímos que o setor R^2 não contribui em nada para o fenômeno de deflexão da luz [35, 84].

¹Este argumento é de cunho tão-somente hipotético; vimos na Seção 1.3 que o setor R^2 é fundamental para garantir a ausência de táquions na teoria e respeitar o limite newtoniano.

Comportamento do ângulo de espalhamento para algumas situações limite

A partir da equação do ângulo de espalhamento na abordagem semiclassica,

$$\frac{1}{\theta_E^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}} + \frac{2E^2}{m_2^2} \ln \frac{\theta^2}{\theta^2 + \frac{m_2^2}{E^2}}, \quad (\text{D.1})$$

é possível obter os mesmos comportamentos assintóticos descritos na Seção 3.1 (lá, baseando-se na seção de choque do processo). Como (D.1) é a equação que define θ , não podemos tomar limites como $m_2 \rightarrow 0$ considerando que θ se mantém fixo. Para uma análise consistente, definimos a função $\gamma = \gamma(m_2^2/E^2) > 0$ tal que

$$\theta = \frac{m_2}{E} \gamma. \quad (\text{D.2})$$

Pode, então, (D.1) ser posta na forma¹

$$\frac{m_2^2}{E^2 \theta_E^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{1 + \gamma^2} + 2 \ln \left(\frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \right) \equiv f(\gamma), \quad (\text{D.3})$$

ou

$$\frac{\theta^2}{\theta_E^2} = \gamma^2 f(\gamma). \quad (\text{D.4})$$

¹Por ser f uma função contínua decrescente de $\gamma > 0$ que tem como imagem o intervalo $(0, +\infty)$, pode-se mostrar que é sempre possível encontrar uma solução para (D.1) na forma (D.2).

A diferenciação implícita de ambos membros de (D.3) por m_2^2/E^2 mostra que γ é uma função decrescente. Logo, o limite $m_2/E \rightarrow 0$ corresponde a fazer $\gamma \rightarrow \infty$ em (D.4); por sua vez, $m_2/E \rightarrow \infty$ equivale a $\gamma \rightarrow 0$.

Estamos, agora, em posição de verificar o comportamento assintótico do ângulo de deflexão nos limites de pequenos e grandes valores de $|\beta|$. É imediato verificar que, fixando o valor da energia E do fóton: $\lim_{|\beta| \rightarrow 0} \theta = \theta_E$ e $\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \theta = 0$. O primeiro regime retoma o caso einsteiniano, como desejado, enquanto o outro indica que nenhuma deflexão ocorre se $|\beta|$ for suficientemente grande.

Por outro lado, ao manter β fixo e comparar o o ângulo de espalhamento de fótons de diferentes energias segue que $\theta \rightarrow \theta_E$ no limite de baixas energias ($m_2/E \rightarrow \infty$), e $\theta \rightarrow 0$ caso o fóton seja bastante energético ($m_2/E \rightarrow 0$). Isso sugere que quanto maior a energia de um fóton, menos ele se desviará da trajetória retilínea; e que, para qualquer valor de β , existe um valor de energia abaixo do qual a deflexão sofrida pelo fóton será arbitrariamente próxima àquela prevista pela gravitação de Einstein².

²Esta conclusão é contrária à abordagem clássica apresentada no Capítulo 2. Vide as discussões nas seções 3.2 e 3.3.

Bibliografia

- [1] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman, *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **20**, 69 (1977).
- [2] M. H. Goroff, A. Sagnotti, *Nucl. Phys. B* **266**, 709 (1986).
- [3] K. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [4] I. Antoniadis, E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33**, 2756 (1986).
- [5] D. A. Johnston, *Nucl. Phys. B* **297**, 721 (1988).
- [6] A. Accioly *et al.*, *Int. J. Mod. Phys. D* **22**, 1342015 (2013).
- [7] T. P. Soritiou, V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [8] I. Buchbinder, S. Odintsov, I. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*. Boca Raton: Taylor & Francis Group. (1992).
- [9] G. de Berredo-Peixoto, I. Shapiro, *Phys. Rev. D* **70**, 044024 (2004).
- [10] G. de Berredo-Peixoto, I. Shapiro, *Phys. Rev. D* **71**, 064005 (2005).
- [11] E. Bergshoeff, O. Holm, P. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [12] I. Oda, *J. High Energy Phys.* **5**, 064 (2009).

- [13] K. Muneyuki, N. Ohta, *Phys. Rev. D* **85**, 0101501(R) (2012).
- [14] A. Accioly *et al.* *Class. Quantum Grav.* **28**, 225008 (2011).
- [15] A. Accioly *et al.*, *Phys. Rev. D* **83**, 104005 (2011).
- [16] A. Accioly *et al.*, *Phys. Rev. D* **86**, 105046 (2012).
- [17] J. Näf, P. Jetzer, *Phys. Rev. D* **81**, 104003 (2010).
- [18] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I*. Cambridge: Cambridge University Press (1995).
- [19] S. Hossenfelder, *Class. Quantum Grav.* **25**, 038003 (2008).
- [20] S. K. Moayedi, M. R. Setare, H. Moayeri, *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 2080 (2010).
- [21] S. K. Moayedi, M. R. Setare, B. Khosropour, *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 657870 (2013).
- [22] S. Carlip, *Class. Quantum Grav.* **25**, 154010 (2008).
- [23] H. Weyl, *Space-Time-Matter*. New York: Dover (1952).
- [24] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press (1924).
- [25] P. Havas, *Gen. Relativ. Gravit.* **8**, 631 (1977).
- [26] K. Stelle, *Gen. Relativ. Gravit.* **9**, 353 (1978).
- [27] J. Donoghue, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2996 (1994).
- [28] A. Accioly, H. Blas, *Phys. Rev. D* **64**, 067701 (2001).
- [29] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: Freeman (1973).

- [30] C. Rovelli, *Living Rev. Relativity*, **11** (2008), 5. (Acessado em 27/10/2014)
- [31] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*. New York: Academic Press (1967).
- [32] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (1974).
- [33] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai, *J. Math. Phys.* **43**, 473 (2002).
- [34] R. J. Rivers, *Nuovo Cimento* **34**, 387 (1964).
- [35] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, B. Giacchini, W. Herdy, *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 5500522 (2015).
- [36] P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **6**, 219 (1989).
- [37] A. Accioly *et al.*, *Prog. Theor. Phys.* **104**, 103 (2000).
- [38] A. P. Lightman, D. L. Lee, *Phys. Rev. D* **8**, 364 (1973).
- [39] E. Fischbach, B. Freeman, *Phys. Rev. D* **22**, 2950 (1980).
- [40] T. Padmanabhan, *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge: Cambridge University Press (2010).
- [41] B. F. Jones, *Astron. J.* **81**, 455 (1976).
- [42] F. Schmeidler, *Astron. Nachr.* **306**, 77 (1985).
- [43] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*. New York: W.W. Norton & Company, Inc (1976).
- [44] K. W. Weiler, R. D Ekers, *Astron. & Astrophys.* **30**, 241 (1974).
- [45] D. E. Lebach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1439 (1995).

- [46] C. M. Will, *Living Rev. Relativity* **9** (2006) 3. (Acessado em 13/07/2014).
- [47] E. Fomalont *et al.*, *Astrophys. J.* **699**, 1395 (2009).
- [48] S. S. Shapiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 121101 (2004).
- [49] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer-Verlag (1996)
- [50] R. Delbourgo, P. Phocas-Cosmetatos, *Phys. Lett.* **41B**, 533 (1972).
- [51] F. Berends, R. Gastmans, *Ann. Phys.* **98**, 225 (1976).
- [52] A. Accioly, J. Helayël-Neto, B. Giacchini, W. Herdy, *Classical and tree-level approaches to gravitational deflection in higher-derivative gravity*, submetido para publicação no *Physical Review D* (2015).
- [53] B. Giacchini, *Upper bounds on the free parameters of higher-derivative gravity*, em preparação (2015).
- [54] J. Earman, C. Glymour, *Studies in History and Philosophy of Science Part A* **11**, 175 (1981).
- [55] R. J. Hughes, *Phys. Rev. D* **41**, 2367 (1990).
- [56] A. Einstein, *Ann. Phys.* **35**, 898 (1911).
- [57] J. C. LoPresto, C. Schrader, A. K. Pierce, *Astrophys. J.* **376**, 757 (1991).
- [58] J. E. Blamont, F. Roddier, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 437 (1961).
- [59] J. L. Snider *Phys. Rev. Lett.* **28**, 853 (1972).
- [60] H. L. Shipman *et al.*, *Astrophys. J.* **488**, L43 (1997).
- [61] M. A. Barstow *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 1134 (2005).

- [62] D. M. Popper, *Astrophys. J.* **120**, 316 (1954).
- [63] I. N. Reid, *Astron. J.* **111**, 2000 (1996).
- [64] J. L. Greenstein, J. B. Oke, H. L. Shipman, *Astrophys. J.* **169**, 563 (1971).
- [65] P. Bergeron, J. Liebert, M. S. Fulbright, *Astrophys. J.* **444**, 810 (1995).
- [66] R. V. Pound, G. A. Rebka, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **7**, 337 (1960).
- [67] R. V. Pound, G. A. Rebka, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **3**, 439 (1959).
- [68] R. V. Pound, J. L. Snider, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 539 (1964).
- [69] R. F. C. Vessot *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 2081 (1980).
- [70] S. Zschocke, S. A. Klione, *Class. Quantum Grav.* **28**, 015009 (2011).
- [71] B. Linet, P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **30**, 175008 (2013);
Corrigendum–Class. Quantum Grav. **31**, 079502 (2014).
- [72] A. Vecchiato *et al.*, *Astron. & Astrophys.* **399**, 337 (2003).
- [73] A. Accioly, R. Paszko, *Phys. Rev. D* **78**, 064002 (2008).
- [74] D. Long, *Nature* **260**, 417 (1976).
- [75] D. J. Kapner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 021101 (2007).
- [76] R. D. Newman, E. C. Berg, P. E. Boynton, *Space Sci. Rev.* **148**, 175 (2009).
- [77] C. P. L. Berry, J. R. Gair, *Phys. Rev. D* **83**, 104022 (2011);
Erratum–Phys. Rev. D **85**, 089906 (2012).
- [78] B. Chen *et al.*, *Astrophys. J.* **740**, L34 (2011).
- [79] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 10909 (2006).

- [80] A. Smailagic, E. Spallucci, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, L467 (2003).
- [81] A. Smailagic, E. Spallucci, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, L517 (2003).
- [82] A. Smailagic, E. Spallucci, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 7169 (2004).
- [83] A. Accioly, M. Dias, *Int. J. Theor. Phys.* **44**, 1123 (2005).
- [84] A. Accioly *et al.*, *Braz. J. Phys.* **28**, 4 (1998).