

# Segmentação de Imagens por entropia relativa não extensiva

M. Portes de Albuquerque, I. A. Esquef, e Marcelo Portes de Albuquerque.

**Resumo--** Image analysis usually refers to processing of images with the goal of finding objects presented in the image. Image segmentation is one of the most critical tasks in automatic image analysis. The nonextensive entropy, also known as Tsallis entropy, is a recent development in statistical mechanics and has been considered as a useful measure in describing termostatistical properties of physical systems. In this new formalism a real quantity  $q$  was introduced as parameter for physical systems that presents long range interactions, long time memories and fractal-type structures. In image processing, one of the most efficient techniques for image segmentation is entropy-based thresholding. This approach uses the Shannon entropy from the information theory considering the gray level image histogram as a probability distribution. In this work, it was applied the Tsallis entropy as a generalized entropy formalism for information theory. For the first time it was proposed an image thresholding method using a nonextensive relative entropy.

**Palavras-chave** — segmentação de imagens, entropia não-extensiva, entropia relativa generalizada.

## I. INTRODUÇÃO

Segmentar uma imagem significa separar suas partes constituintes que se diferenciam entre si. Diversas técnicas de segmentação de imagens que utilizam um ponto de corte global (*threshold*) têm sido propostas na literatura, com aplicações variadas que vão desde a separação da informação relevante à problemas de reconhecimento e classificação de formas [1, 2, 3, 4 e 5]. A principal consideração no uso de um único nível de decisão capaz de classificar as regiões da imagem está baseada na condição que as regiões “objeto” e “fundo da imagem” podem ser distinguidas usando apenas a informação dos níveis de cinza da imagem.

Os desenvolvimentos recentes da física estatística, por meio da proposta da entropia não extensiva de Tsallis [6], se intensificaram devido as possíveis extensões desta entropia na Teoria da Informação. A entropia não extensiva é uma tentativa de generalizar a entropia tradicional de

Boltzmann/Gibbs para sistemas físicos. Nesta teoria, um parâmetro de não extensividade  $q$  está associado ao grau de não extensividade do sistema e é dependente do sistema estudado.

Neste artigo propomos uma técnica de segmentação utilizando a entropia relativa generalizada (i.e. entropia não extensiva). Diversos sistemas físicos em que o formalismo proposto por Tsallis foi aplicado com sucesso apresentam características de não extensividade, como, por exemplo, interações de longo alcance, memória de longo tempo e estrutura fractal. Tal formalismo tem se mostrado mais adequado na medida da entropia destes sistemas, demonstrando se ajustar de forma mais coerente com os modelos teóricos. De modo geral, os resultados obtidos para  $q \neq 1$  apresentam um diferencial qualitativo, se comparados com aos resultados obtidos pela teoria tradicional, onde  $q = 1$ .

A utilização deste novo conceito de entropia generalizada, que surgiu na Física Estatística, tem se estendido para outras áreas da ciência, dentre elas a Teoria da Informação [7 e 8]. Neste contexto, surge a hipótese de que imagens complexas podem apresentar características não extensivas. A formação da imagem digital é um processo físico em que a incidência de fótons em uma matriz CCD (ou em um outro dispositivo de aquisição) determina a intensidade da luminância em cada célula do sensor ou do pixel da imagem, depois que estas quantidades analógicas são devidamente digitalizadas. De forma análoga, a formação da imagem pode ainda se dar por processos não óticos, como em microscópios eletrônicos, magnéticos, de força atômica etc. Nestes casos, a interação de forças entre o material analisado e uma ponta de prova produz sinais elétricos que vão equivaler a valores de luminância para os pixels da imagem. A formação de objetos em uma imagem é, portanto um processo complexo, que sugere a existência de correlações espaciais e correlações de luminância entre os pixels que os formam.

Nos casos da segmentação por similaridade, um objeto é definido por um agrupamento de pixels que possuem valores de luminância correlacionados, tanto aqueles que compõem sua estrutura quanto aqueles que delimitam suas fronteiras. É razoável considerar, portanto, que em algumas classes de imagens, estas correlações espaciais e de luminância podem ser caracterizados como de longo alcance e conseqüentemente sistemas não extensivos.

Em 2004 apresentamos a técnica de segmentação de imagem por entropia não extensiva [9]. Posteriormente Rodrigues et al desenvolveram uma extensão deste trabalho

---

Este trabalho foi financiado pela FAPERJ e pelo MCT.

Os autores Márcio Portes de Albuquerque e Marcelo Portes de Albuquerque são pesquisadores do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) do Ministério da Ciência e Tecnologia do Brasil – Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – Urca/RJ Brasil (e-mail: [albuquerque@cbpf.br](mailto:albuquerque@cbpf.br)).

Israel Andrade Esquef é Doutorando da Universidade Estadual Norte Fluminense (UENF). Av. Alberto Lamego, Campos – RJ/Brasil (e-mail: [esquef@uenf.br](mailto:esquef@uenf.br)).

por meio do algoritmo de multi-segmentação [10]. O trabalho em [9] teve como metodologia o estabelecimento de quatro casos de estudos (Posição do pico, Largura do pico, Altura do pico e Picos muito próximos - objeto imerso no ruído) a fim de caracterizar diferentes tipos de imagens, através de seus histogramas, e consequentemente avaliarem as técnicas de segmentação propostas. Os quatro casos seriam mais representativos da atuação do algoritmo em uma maior diversidade de imagens ao invés da sua aplicação em algumas poucos casos de imagens escolhidas como exemplo. Neste artigo estamos interessados na segmentação por entropia relativa entre distribuições de probabilidade obtida no histograma de níveis de cinza da imagem e de um modelo adotado anteriormente.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2 apresentamos alguns fundamentos sobre a entropia Tsallis (entropia não extensiva ou generalizada) e a entropia relativa generalizada. Na seção 3 apresentamos os aspectos matemáticos que descrevem a técnica de segmentação baseada na entropia relativa generalizada. Na seção 4 discutimos a aplicação do método e a influência do parâmetro de não extensividade para o caso de imagens que não apresentam uma distribuição estatística específica. Na seção 5 são apresentadas as conclusões e discussões sobre o método e propostas de expansão.

## II. ENTROPIA TSALLIS E ENTROPIA RELATIVA NÃO EXTENSIVA

Do ponto de vista da física a entropia está associada à quantidade de desordem em um sistema físico. Shannon redefiniu o conceito de entropia como uma medida de incerteza em um sistema de informação. Para isso ele definiu uma expressão matemática para medir quantitativamente a quantidade de informação produzida em um processo. A entropia de uma fonte discreta é obtida a partir de sua distribuição de probabilidades, onde  $p = p_i$  é a probabilidade de encontrar o sistema em cada um de seus possíveis estados  $i$ .

Desta forma,  $0 \leq p_i \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ , sendo  $k$  o número de estados possíveis do sistema. A entropia de Shannon é descrita pela seguinte expressão:

$$S = -K \sum_{i=1}^k p_i \ln p_i \quad (1)$$

Este formalismo é o mais apropriado dentro do domínio de validade da estatística de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS). Esta estatística aparentemente descreve melhor os fenômenos com interações de curto alcance, chamados geralmente de sistemas extensivos. Entretanto para algumas classes de sistemas físicos que apresentam comportamento fractais e memórias de longo alcance é necessária uma extensão deste formalismo.

Esta foi a proposta de Tsallis para generalização da estatística BGS. A estatística proposta por Tsallis é hoje útil para descrever propriedades de sistemas não extensivos e está baseada na seguinte expressão matemática para a entropia:

$$S_q = \frac{\sum_{i=1}^k (p_i)^q}{q-1} \quad (2)$$

onde  $k$  se refere ao número total de possibilidades do sistema e um número real  $q$  é o índice entrópico que define o grau de não extensividade do sistema. Esta expressão reencontra a expressão de BGS para o caso limite em que  $q \rightarrow 1$ .

Considerando  $I_i$  uma medida de quantidade de informação própria de cada evento,  $I_i = -\log(p_i)$ , e tomando  $p_i$  e  $p'_i$  como probabilidades para dois conjuntos de eventos distintos, podemos afirmar que a diferença de informação obtida através destas duas medidas é

$$\Delta I_i = -(\log p'_i - \log p_i) \quad (3)$$

A taxa média da informação modificada pode ser obtida através da expressão a seguir

$$D(p : p') = \sum_i p_i \cdot \Delta I_i = \sum_i p_i \cdot \log \frac{p_i}{p'_i} \quad (4)$$

Esta é a equação do ganho de informação Kullback-Leibler, também conhecido como entropia relativa. Diversos modelos de generalização de entropia foram propostos na literatura, veja Burbea et al em [11], e as referências por ele citadas. Borland et al [8] generalizaram o ganho de informação Kullback-Leibler para a estatística não extensiva. Uma medida Kullback-Leibler generalizada se deriva naturalmente da aplicação do formalismo da entropia Tsallis no lugar da entropia convencional de Shannon. A partir da equação de entropia proposta por Tsallis é possível definir a informação própria não extensiva de cada evento, ou seja,

$$I_i^q = \frac{-(p_i^{1-q} - 1)}{1-q} \quad (5)$$

Considerando ainda  $p_i$  e  $p'_i$  como as probabilidades para dois conjuntos de eventos medidos, a diferença de informação entre as medidas é

$$\Delta I_i^q = \left[ \frac{1}{(1-q)} \right] ((1 - p_i'^{1-q}) - (1 - p_i^{1-q})) \quad (6)$$

A taxa média da informação modificada pode ser obtida através da expressão a seguir

$$D_{KL,q}(p : p') = \sum_i \frac{p_i^q}{1-q} \cdot (p_i^{1-q} - p_i'^{1-q}) \quad (7)$$

que representa a entropia relativa generalizada. Esta expressão pode ser escrita de outra forma, considerando a função  $q$ -logarítmica,  $\log_q(p) = (p^{(1-q)} - 1)/(1-q)$ , resultando em

$$D_{KL,q}(p : p') = \sum_i p_i \cdot \log_q \frac{p_i}{p'_i} \quad (8)$$

e é válido ressaltar que  $\log_1(p)$  retorna à expressão convencional  $\log(p)$ .

### III. SEGMENTAÇÃO POR ENTROPIA RELATIVA NÃO EXTENSIVA

O método apresentado em [9] não resolve satisfatoriamente o processo de binarização para uma série de classes de imagens. Em [9] a dificuldade vem do fato de que, ao buscarmos maximizar a soma das entropias para as duas regiões da imagem, estamos na prática procurando por histogramas planos (com entropia máxima) e que, no caso de imagens, podem representar regiões ruidosas ou com níveis de cinzas dispersos. O método apresentado neste artigo irá trabalhar com o conceito de entropia relativa tentando aproximar por uma distância estatística um jogo de probabilidade teórico àquele encontrado na própria imagem para objeto e fundo.

Neste artigo é utilizada uma distribuição gaussiana para aproximar os dois jogos de probabilidades (objeto e fundo), onde os parâmetros da função são obtidos no próprio histograma da imagem, utilizando como função de aproximação a entropia relativa generalizada.

A Entropia Relativa ou Divergência Direta é utilizada em métodos de segmentação de imagem que envolve a medida de distância entre duas distribuições estatísticas. Em geral, uma função critério é definida para a obtenção do ponto ótimo de segmentação, através da comparação entre a imagem original e a imagem segmentada. As distribuições estatísticas são frequentemente obtidas através do histograma de luminância da imagem original e do histograma da imagem segmentada ou de modelos teóricos para histogramas sintetizados.

O método proposto é baseado na binarização de imagens utilizando a Entropia Relativa Generalizada (ERG) através da Distância Kullback-Leibler Generalizada entre dois jogos de probabilidade  $p$  e  $p'$ , apresentado na seção anterior.

A versão simétrica da divergência Kullback-Leibler pode ser escrita pela seguinte equação:

$$D_q(p : p') = \sum_i p_i \cdot \log_q \frac{p_i}{p'_i} + \sum_i p'_i \cdot \log_q \frac{p'_i}{p_i} \quad (9)$$

Esta versão simétrica será utilizada para o cálculo da distância estatística entre os dois jogos de probabilidades.

Neste método, o jogo de probabilidades  $p$  é obtido através do histograma de luminância da imagem original. O segundo jogo de probabilidades  $p'$  será obtido através de um modelo

gaussiano obtido no histograma, que será definido levando-se em consideração alguma informação a priori sobre a imagem.

Como o objetivo deste método é segmentar a imagem em duas regiões (objeto e fundo), consideramos um valor  $t$  de luminância que teoricamente separa os pixels da imagem nestas duas regiões. Deste modo, podemos considerar que os pixels do intervalo  $[0,t]$  pertencem ao objeto e os pixels do intervalo  $[(t+1),k]$  pertencem ao fundo da imagem. O jogo de probabilidades  $p$  fica dividido em dois jogos de probabilidades, sendo  $p_A$  para o objeto e  $p_B$  para o fundo, definidos como  $p_A = \{p_1^A, p_2^A, p_3^A, \dots, p_t^A\}$  o jogo de probabilidades dos pixels pertencentes ao objeto e  $p_B = \{p_{t+1}^B, p_{t+2}^B, p_{t+3}^B, \dots, p_k^B\}$  o jogo de probabilidades dos pixels pertencentes ao fundo da imagem, e considerando que:

$$p_i^A = \frac{h_i}{P_t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, t \quad P_t = \sum_i^t h_i \quad (10)$$

$$p_i^B = \frac{h_i}{1 - P_t}, \quad i = t + 1, t + 2, \dots, k \quad (11)$$

em que  $k$  é o número máximo de níveis de cinza da imagem e  $h$  é o histograma de ocorrências de níveis de cinza. A normalização por  $P_t$  é importante porque torna  $p_i^A$  e  $p_i^B$  jogos de probabilidades fechados, i.e.:

$$\sum_i^t p_i^A = \sum_{i=t+1}^k p_i^B = 1 \quad (12)$$

Um segundo ponto importante nesta técnica, é a definição do jogo de probabilidades  $p'$ . Este jogo de probabilidades é normalmente baseado em algum modelo teórico (ou alguma informação a priori que se possa ter da imagem). Pal [3] propõe que o jogo de probabilidades que melhor aproxima o histograma de uma imagem está baseado em uma distribuição de Poisson. Ele assume que os níveis de cinza de uma região da imagem seguem uma distribuição de Poisson como parâmetros  $\lambda_A$  e  $\lambda_B$ , equivalente aos valores médios das regiões segmentadas para objeto e fundo. Neste método, assumimos o jogo de probabilidade

$p'_A = \{p_1'^A, p_2'^A, p_3'^A, \dots, p_t'^A\}$  como a distribuição de probabilidades modelo para o objeto e  $p'_B = \{p_{t+1}'^B, p_{t+2}'^B, p_{t+3}'^B, \dots, p_k'^B\}$  para o fundo da imagem.

A especificação da função modelo para o jogo de probabilidades do objeto e do fundo,  $p'_A$  e  $p'_B$  será baseada nas seguintes distribuições gaussianas:

$$p_i'^A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left(-\frac{(x-x_a)^2}{2\sigma_a^2}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, t \quad (13)$$

$$p_i'^B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left(-\frac{(x-x_b)^2}{2\sigma_b^2}\right), \quad i = t+1, t+2, \dots, k \quad (14)$$

$x_a$  e  $x_b$  são obtidos pela posição onde se encontram os valores máximos  $A_a$  e  $A_b$  partindo-se da direita e da esquerda do histograma. Os valores de  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  correspondem ao valor a meia largura a meia altura (HWHH - *Half Width at Half Height*) encontrados a partir dos máximos  $A_a$  e  $A_b$ . A função de densidade de probabilidade normal tem seu valor máximo em  $0.3989/\sigma$  e sua meia largura a meia altura a  $0.242/\sigma$ . O valor estimado  $\sigma_\tau$  é obtido pela razão entre esses dois valores:  $\sigma_\tau = 0.606604$  obtidos varrendo o próprio histograma de luminância da região (esquerda e direita), definido pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} x_a &= \arg \max (h_i) & i &= 1, 2, 3, \dots, t; \\ x_b &= \arg \max (h_i) & i &= t+1, t+2, \dots, k; \\ \sigma_a &= \arg(p_i'^A = \hat{\sigma}) \quad \text{e} \\ \sigma_b &= \arg(p_i'^B = \hat{\sigma}) \end{aligned}$$

onde  $\sigma_\tau \approx 0.606$ .

O limiar de definição dos dois jogos será definido no ponto  $t$  onde é encontrada a menor distância estatística entre os dois jogos de probabilidades, definida pela seguinte soma:

$$D_q(t) = D_{KL_q}(p_A : p'_A) + D_{KL_q}(p_B : p'_B) \quad (15)$$

Ao encontrar os jogos de probabilidade  $p'_A$  e  $p'_B$ , que estão mais próximos dos jogos de probabilidades do objeto e do fundo ( $p_A$  e  $p_B$ ), temos na realidade uma representação estatística do conjunto de pixels que compõem as duas regiões. Podemos assumir como ponto de corte ótimo  $\tau$ , o ponto onde as gaussianas  $p'_A$  e  $p'_B$  se encontram, figura 1. Isto pode ser feito igualando-se as equações  $p_i'^A$  e  $p_i'^B$ . Duas soluções são encontradas e dadas pela seguinte equação<sup>1</sup>:

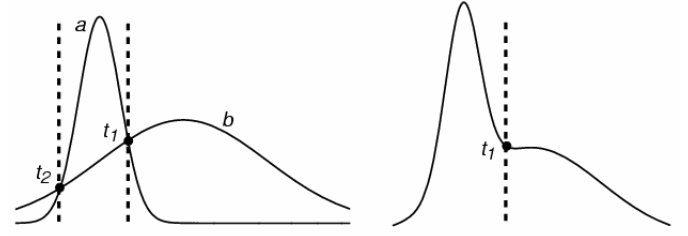


Figura 1 - Ponto de segmentação ótimo é definido no ponto de encontro entre as duas gaussianas,  $a$  e  $b$ .

$$\tau_{1,2} = \frac{x_b\sigma_a^2 - x_a\sigma_b^2 \mp \sigma_a\sigma_b\sqrt{(x_a - x_b)^2 - 2\log(A_a/A_b)(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)}}{(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)} \quad (16)$$

Como duas gaussianas são sempre estimadas pelo algoritmo, aquela mais à direita será sempre a gaussiana  $b$  e a mais a esquerda a gaussiana  $a$ . Dessa forma, a solução que nos interessa é sempre  $\tau_1$ , pois esta raiz terá sempre seu valor entre as duas gaussianas.

Desta forma, a aproximação dos jogos de probabilidade é feita através da técnica da entropia relativa generalizada e o ponto de corte é definido na junção das duas gaussianas.

#### IV. APLICAÇÕES DO MÉTODO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Da mesma forma que apresentado em [9], simulamos diversos histogramas com duas gaussianas classificadas em quatro casos. Os casos escolhidos permitem uma análise mais detalhada da aplicação do método para uma série de imagens através de avaliação direta de seus histogramas. Na seção seguinte apresentaremos um exemplo de aplicação do método de segmentação em um histograma de uma imagem real. Em cada um dos casos apresentado analisamos a posição do ponto de corte  $\tau$  em função do parâmetro de não extensividade  $q$ . Os quatro casos são: Posição do pico (1), Largura do pico (2), Altura do pico (3) e Picos muito próximos - objeto imerso no ruído seção anterior (4). A linha de variação do ponto de corte para cada caso é chamada de trajetória do ponto de corte para cada um dos casos<sup>2</sup>. O resultado para todos os casos não apresentam variações do ponto de corte em função de  $q$ .

<sup>1</sup>- Outras soluções também existem quando as gaussianas tendem a zero, porém são desprezadas neste caso.

<sup>2</sup> - Veja na referência [9] a seção quatro, voltada para a análise experimental dos resultados, onde os quatro casos são descritos em detalhes.

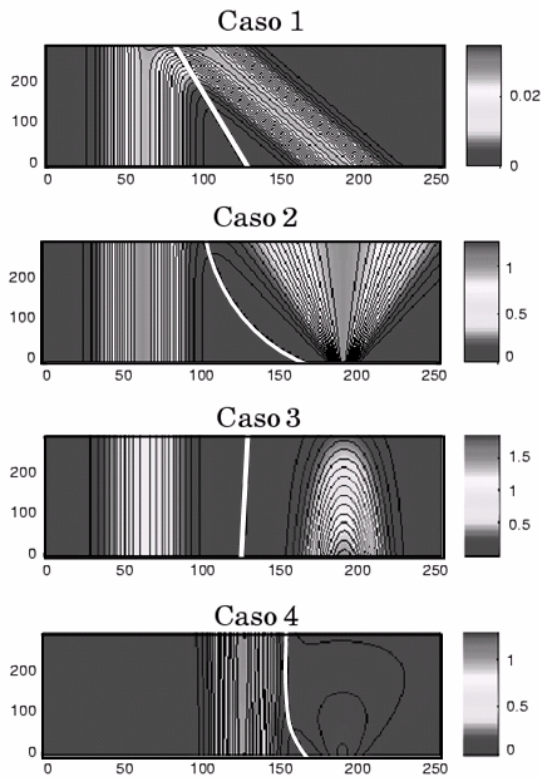


Figura 2 - Resultado da segmentação por entropia relativa para os casos definido em M.P. de Albuquerque et al [9].

Os resultados da trajetória de  $\tau$  são apresentados na figura 2. Para todos os casos o processo de encontro do ponto de corte é achado diretamente através das gaussianas resultantes da menor distância estatística entre os dois jogos de probabilidade. O processo entrópico neste caso foi utilizado para fins de comparação entre os dois jogos. Durante todo o processo, o parâmetro  $q$  não irá influenciar diretamente na escolha do ponto de corte  $\tau$ , pois o objetivo é escolher dois jogos de probabilidades que melhor se aproximem dos jogos de probabilidade que representem o objeto e o fundo. No processo de busca da melhor distribuição gaussiana, modifica-se a todo instante sua posição, largura e altura para que esta se aproxime ao máximo da região do histograma que esta sendo segmentada. No entanto, o parâmetro  $q$  irá influenciar diretamente no processo de comparação das distribuições. No limite, a eficiência do método será dependente desta comparação.

#### A. Resultados na Imagem

O processo de cálculo da distância estatística será fundamental para a determinação do ponto de corte  $\tau$ . Em situações em que a formação da imagem pode ser modelada por distribuições gaussianas (ou de Poisson) o processo apresentado neste trabalho encontrará sempre um jogo de

probabilidade que melhor satisfaça o critério de aproximação e encontrará as duas gaussianas em  $D_q(t)$  mínimo e, conseqüentemente, o ponto de *threshold* na interseção entre elas. Porém, quando a imagem tiver uma distribuição que não possa ser aproximada por uma distribuição gaussiana o ponto de corte poderá oscilar em função de uma melhor sintonia no parâmetro de não extensividade.

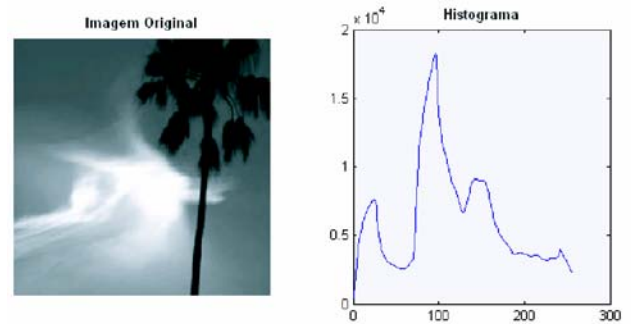


Figura 3 - Imagem de uma paisagem. O histograma não segue a priori nenhuma distribuição específica. Neste caso, o parâmetro de não extensividade  $q$  irá alterar a distância estatística de Kullback-Leibler e modificará o ponto  $\tau$ .

Na prática, podemos encontrar imagens em que o histograma não segue, a priori, nenhuma distribuição específica e avaliar o comportamento deste método nesta situação. A imagem apresentada na figura 3 corresponde a uma paisagem representada na imagem por 256 níveis de cinza. A presença de uma região de brilho intenso altera sensivelmente seu histograma, também apresentado na figura 3.

Nesta imagem, a presença de vários picos no histograma irá dificultar o encontro do ponto ótimo de corte pelo método da aproximação estatística. Neste caso existirá uma região onde o parâmetro de não extensividade irá alterar a distância estatística mínima,  $D_q(t)$ , e irá permitir uma segmentação melhor da imagem.

O fato de  $q \rightarrow 1$  (ou mesmo  $q > 1$ ) faz com que a distância Kullback-Leibler generalizada,  $D_q(t)$  seja amplificada. Esta característica é importante em todo o processo, porém estamos caminhando em uma região de grande sensibilidade no cálculo. Na prática, durante a implementação dos algoritmos, precisamos ter um controle detalhado do cálculo numérico quando  $q$  assume valores maiores que 1, pois a equação se torna instável devido a regiões de zeros no histograma. Na imagem da figura 4 o nível de segmentação encontrado pelo método foi  $\tau = 132$  para  $q < 1$ . Ao levarmos  $q$  para a região acima de 1 ( $q = 1.1$ ), conseguimos ajustar o ponto de escolha das gaussianas  $p'_A$  e  $p'_B$ , para uma outra região de mínimo na curva  $D_q(t)$ , permitindo a escolha de outro ponto de corte  $\tau$

=54, figura 4. Esta amplificação diferenciada para os dois vales se deve às diferenças encontradas nas suas redondezas, pois estes irão definir as gaussianas representativas de suas regiões. A figura 4 apresenta também o resultado da segmentação por outros dois métodos clássicos (Seleção Iterativa e Dois Picos). Todos os pontos de corte são apresentados no histograma da figura (os métodos de Seleção Iterativa e por Entropia não extensiva para  $q=1.1$  estão superpostos no valor 132).

Na figura 5 discutimos a influência do parâmetro  $q$  na escolha do ponto de corte. A figura 5 apresenta este comportamento, através de uma simulação do cálculo de  $D_q(t)$  para duas gaussianas previamente conhecidas. Fixamos uma delas e fazemos variar a outra com objetivo de verificar o comportamento da distância estatística  $D_q(t)$ . O gráfico apresenta a evolução dessa distância para vários tipos de gaussianas, para diferentes valores de  $q$ . À medida que  $q$  aumenta, o ponto de mínimo da curva tende a ser uma curva pontual, com os jogos de probabilidades tendo distância zero para o único caso em que as distribuições são efetivamente iguais. Cabe ressaltar então que a escolha do parâmetro de não extensividade  $q$  significa definir um valor de  $q$  tal que as variações de distância sejam interessantes para fazer variar o ponto de corte. No entanto, podemos supor que adotar valores de  $q$  próximos a 0.9 ou 1.0 deve ser a escolha mais apropriada, pois seria esta a região com o melhor compromisso entre proximidade e distância entre os jogos de probabilidade, ao compararmos jogos de probabilidade  $p$  e  $p'$ . Na imagem da figura 4, existe uma competição clara para decidir entre dois vales, observado no gráfico da função  $D_q(t)$  pela presença de dois mínimos (vales). A variação de  $q$  provoca uma ampliação da distância diferente para os dois casos fazendo com que o primeiro vale (em torno de 54) seja menor que o segundo (em torno de 110), a partir de um determinado valor de  $q$ .

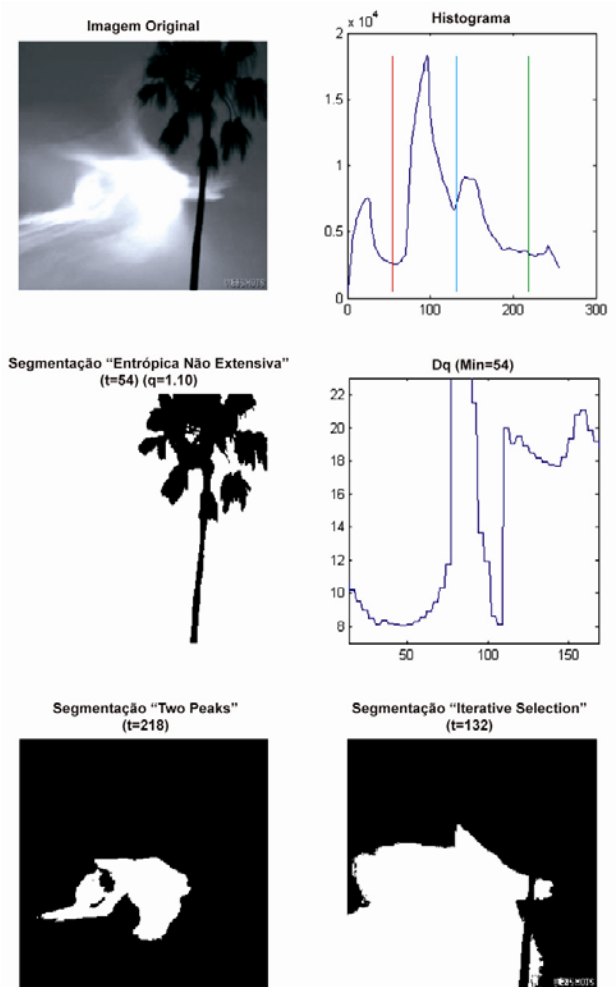


Figura 4 - Resultado da segmentação para a imagem com uma distribuição desconhecida. O parâmetro  $q$  permite um ajuste fino da posição de corte ( $q=1.1$ ).

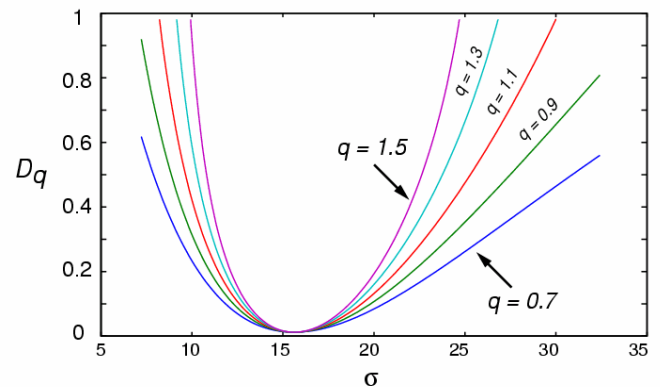


Figura 5 - Gráfico do comportamento da distância Kullback-Leibler generalizada entre gaussianas, para vários valores de  $q$ .

## V. CONCLUSÕES

O funcionamento ideal de um sistema de segmentação é agir precisamente para qualquer tipo de imagem e em perfeita harmonia com os processos de tratamento da informação posteriores. Na prática, a idealização de tal sistema é ainda uma tarefa muito distante para a maior parte dos sistemas de segmentação disponíveis na literatura. No entanto, podemos dizer que o processo de segmentação entrópica, baseado no modelo apresentado nesta seção, é robusto e pode funcionar para uma variedade muito grande de imagens com ótimo resultado final.

A robustez do método é devido principalmente ao fato de podermos aproximar a distribuição gaussiana, para os histogramas obtidos em diversos tipos de imagens. Porém, não existe para estes casos uma dependência direta do parâmetro de não extensividade. O parâmetro  $q$  irá influenciar principalmente, no processo de escolha da proximidade entre os jogos envolvidos no cálculo da distância estatística. Nas situações onde o histograma das imagens não possa ser modelado por uma distribuição gaussiana, o parâmetro  $q$  poderá ser um importante ponto de sintonia do processo, permitindo ajustes finos de onde se quer realizar o corte nas imagens. No entanto, uma precaução adicional deve ser tomada, pois nestes casos estaremos trabalhando em regiões instáveis da equação de distância Kullback-Leibler generalizada.

Uma proposta de ampliação deste método é de utilizarmos o conjunto  $p' = p'_A + p'_B$  ao invés de utilizarmos as distâncias separadamente, para assim compará-lo diretamente com  $p$  (o histograma original da imagem). Este método poderia trazer mais novidades no cálculo de  $D_q$  mínimo. É também interessante notar que este método nos fornece os dois jogos de probabilidade que melhor representam a região correspondente ao objeto e ao fundo da imagem. Isto nos permite estimar o erro de classificação das duas regiões. Nas situações em que as gaussianas estão superpostas, é praticamente inevitável classificar erroneamente as regiões da imagem (i.e. pixels correspondentes aos objetos são classificados como de fundo e pixels correspondentes ao fundo são classificados como de objetos). Este erro poderia ser um interessante ponto de apoio para as etapas posteriores ao processamento da informação.

## VI. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Professor C. Tsallis e F. Baldovin pelas discussões sobre o tema, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Ministério da Ciência e Tecnologia do Brasil, e a FAPERJ, Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro.

## VII. REFERÊNCIAS

- [1] Kapur, J. N. and Sahoo, P. K and Wong, A. K. C., "A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram.", *Computer Vision Graph. Image Processing*; 1985, 29, 273-285.
- [2] Sahoo, P. and Wilkins, C. and Yeager, J., "Threshold Selection using Renyi's Entropy", *Pattern Recognition*, 1997, 30, 1, 71-84.
- [3] Pal, N. R.; "On minimum cross-entropy thresholding", *Pattern Recognition*; 1996, 29, number 4, 575-580.
- [4] Li, C. H. and Tam, P. K. S., "An Iterative Algorithm for Minimum Cross Entropy Thresholding." *Pattern Recognition Letters*, 1998, 19, 771-776.
- [5] Rosin, P. L.; "Unimodal thresholding", *Pattern Recognition*, 2001, 34, 2083-2096.
- [6] Tsallis, C., "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics.", *J. Stat. Phys.*, 1988, 52, 479-487.
- [7] Yamano, T., "A possible Extension of Shannon's Information Theory", *Entropy* 2001 – electronic version in ([www.mdpi.org/entropy/](http://www.mdpi.org/entropy/)), 2001, 3, 280-292.
- [8] Borland, L. and Plastino, A. R. e Tsallis, C., "Information Gain within Nonextensive Thermostatistics", *J. Math. Phys.*, 1998, 39, 12.
- [9] Portes de Albuquerque, M.; P. de Albuquerque, Marcelo; A. G. Mello; Israel A. Esquef; "Image thresholding using Tsallis entropy"; *Pattern Recognition Letters*, 2004, 25, 1059-1065.
- [10] Rodrigues, P.S.; Chang, R-F e Suri, J. S.; "Non-Extensive Entropy for CAD Systems of Breast Cancer Images"; XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI'06), 2006, *sibgrapi*, pp.121-128.
- [11] Burbea, J. e Radhakrishna Rao, C; "On the convexity of some divergence measures based on entropy functions"; *IEEE Transactions on Information Theory*, 28, 3, 1982, 489-495.

## VIII. BIOGRAFIAS



Márcio Portes de Albuquerque recebeu o diploma de Doutor em Engenharia Elétrica pelo *Institut National Polytechnique de Grenoble* (França) em 1995. Atualmente é um dos líderes do Grupo de Computação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF/MCT). Desenvolve pesquisas nas áreas de instrumentação científica, redes de computadores e computação distribuída de alto desempenho para os laboratórios de física ou em colaboração com empresas. É Coordenador de Atividades Técnicas do CBPF e de Engenharia e Operações da Rede Rio de Computadores (FAPERJ).



Marcelo Portes de Albuquerque recebeu o diploma de Doutor em Engenharia Elétrica pelo *Institut National Polytechnique de Grenoble* (França) em 1999. Atualmente é um dos líderes do Laboratório de Processamento de Sinais e Imagens do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF/MCT). Desenvolve pesquisas nas áreas de instrumentação científica e computação distribuída de alto desempenho para os laboratórios de física ou em colaboração com empresas. É Coordenador do Núcleo de Inovação Tecnológica do CBPF e membro da

Coordenação de Engenharia e Operações da Rede Rio de Computadores (FAPERJ).



Israel Andrade Esquef possui graduação em Engenharia Eletrônica pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e título de Mestre em Instrumentação Científica pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Atualmente é Técnico de Nível Superior e Doutorando do Laboratório de Ciências Físicas da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF). Tem experiência na área de Física Experimental, com ênfase em Instrumentação Científica aplicada a técnicas Fotoacústicas e Fototérmicas. Atua ainda no desenvolvimento e automação de sistemas de medição, processamento de sinais e imagens e controle de processos.