UNIVERSIDADE DO BRASIL

CURSOS DE PÓS - GRADUAÇÃO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

"Equações Relativísticas para Partículas com Spin".

ALBERTO VIDAL CARRIÓN

Tese apresentada à banca examinadora do C. B. P. F., para obtenção do GRÂU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (FÍSICA).

Prof. Orientador: J. LEITE LOPES

EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS PARA PARTÍCULAS COM SPIN

Tese de Mestrado

defendida por

ALBERTO VIDAL CARRION

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: José Leite Lopes

em 5 de Julho de 1965

perante a banca integrada pelos senhores professores:

J. Osada

Colber Gonçalves de Oliveira

Gabriel Fialho

EQUAÇÕES RELATIVISTAS PARA PARTÍCULAS COM SPIN

SUMÁRIO

É apresentado um formalismo para as partículas com spin 3/2 e 2, o qual constitui uma formulação spinor-tensorial da teoria de Bargmann-Wigner para o caso S = 3/2, e uma formulação tensorial da mesma teoria para as partículas com S = 2.

É demonstrado depois a equivalência destas formulações às correspondentes de Rarita-Schwinger e Fierz-Pauli respectivamente.

Um resumo do caso S = 1 tratado por Leite Lopes é também apresentado.

EQUAÇÕES RELATIVISTAS PARA PARTÍCULAS COM SPIN

INTRODUÇÃO

1. Dirac[1] em 1936 estabeleceu pela primeira vez equações relativistas para partículas livres com spin arbitrário e massa única. Desde então, a descrição destas partículas tem sido objeto de vários trabalhos nos quais foram propostas diversas linhas de desenvolvimento da teoria das equações relativistas, tendo porém tôdas elas em comum admitir a invariância relativista e o princípio de superposição da Mecânica Quântica (isto é, a linearidade das equações de onda). Por outro lado, é possível agrupar a maioria dêsses trabalhos em duas classes gerais de descrições que existem para as partículas em referência.

As partículas elementares, com efeito, podem ser descritas por meio de funções de onda e equações de movimento, ou em têrmos das representações do grupo inhomogêneo de Lorentz[2]. Exemplos típicos destas classes de descrições são as teorias de Dirac-Fierz-Pauli[3] e Bargmann-Wigner[4], respectivamente.

A teoria de Dirac-Fierz-Pauli tem sua origem nos estudos de Dirac sôbre equações relativistas para partículas com spin fixo, arbitrário e massa em repouso não nula única. Esses trabalhos desenvolvidos posteriormente de forma autoconsistente por Fierz e Pauli, conduzem a equações que constituem uma generalização covariante da equação spinorial de Dirac para o eletron.

Bargmann e Wigner, por outro lado, para descrever essas partículas, com spin S (S = 1/2 N, N = inteiro), usam as equações derivadas por Dirac na forma essencialmente dada por Kramers, Belinfante e Lubanski[5], ou seja, na forma de uma equação matricial diferencial de 1ª ordem cuja função de onda para spin S é um spinor de 4 componentes de órdem N = 2S completamente simétrico (equações 1.8).

O recente descobrimento de novas partículas e ressonâncias, algumas das quais teriam spin maior do que 1, tem revivido o interêsse nestas teorias, e em especial nos casos referentes às partículas com spin 3/2 e 2, pois existem agora para elas evidências experimentais[6,7].

O propósito dêste trabalho é apresentar um formalismo para as partículas mencionadas o qual constitua uma formulação spinor-tensorial da teoria de Bargmann-Wigner para $S = 3/2$, e uma formulação tensorial da mesma teoria no caso das partículas com spin 2. Estas formulações são depois comparadas com as correspondentes de Rarita-Schwinger[8] e Fierz-Pauli[3] (ou seja, com as de Dirac-Fierz-Pauli para tais partículas) e se demonstra a equivalência das mesmas[20,23].

E' apresentado também um resumo do caso dessa teoria para spin 1, tratada pormenorizadamente por Leite Lopes[9], no qual se introduz uma função de onda que permite escrever as equações de Bargmann-Wigner na forma das de Proca[10].

2. Os índices spinoriais e vetoriais serão denotados por letras gregas e itálicas respectivamente. Para as matrizes γ de Dirac usamos a notação de Schweber-Bethe-de Hoffmann[11]. A métrica é

$$g^{00}=1 \quad , \quad g^{ik}=-\delta^{ik} \qquad (i,k=1,2,3)$$

EQUAÇÕES RELATIVISTAS PARA PARTÍCULAS COM SPIN 1. EQUAÇÕES DE BARGMANN-WIGNER E PROCA.

Equações para partículas livres com spin 1 têm sido propostas por vários autores e em formas diversas. A Kemmer[12], Belinfante[13] e Bargmann e Wigner[4], por exemplo, devem-se equações tipo a de Dirac para o eletron, cujas funções de onda são 'undors' de 2ª ordem (rank) (um undor de 1ª órdem é, na nomenclatura de Belinfante, um spinor de Dirac de 4 componentes), enquanto que Proca[10] estabeleceu equações tensoriais. Ainda que existam outras equações para spin 1, é suficiente para os nossos propósitos nos referirmos a estas 4.

As equações de Kemmer servem para descrever simultâneamente partículas com spin 1 e 0, e são:

$$\beta^i \partial_i \psi = m\psi \tag{1.1}$$

onde a função de onda, ψ, para spin 1 (puro) está representada por a matriz

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{10} \end{pmatrix}$$

sendo as β^i matrizes que satisfazem às regras de comutação de Duffin[24],

$$\beta^i\beta^j\beta^k + \beta^k\beta^j\beta^i = \beta^i g^{jk} + \beta^k g^{ji} \tag{1.2}$$

A álgebra destas matrizes é, claramente, mais complicada do que a das as γ de Dirac pois não só o número de seus elementos independentes é maior do que o destas matrizes, 126 contra as 16 da álgebra das γ, como também porque são singulares, o que é o mais importante. Apesar disto trazer dificuldades nos cálculos, é possível achar as representações irredutíveis desta álgebra e assim obter um quadro completo das suas propriedades+. As β^i têm três representações irredutíveis inequivalentes, uma de 1 x 1, outra de 5 x 5 e, finalmente, a 10 x 10 ($1^2 + 5^2 + 10^2 = 126$). A primeira das quais não é de interêsse físico algum, devido a que $\beta^i = (0)$, isto é, não existe equação, ou melhor, $\psi = 0$, enquanto que as demais conduzem a teorias baseadas nas equações de Klein-Gordon e Proca respectivamente.

Um formalismo equivalente[12] ao precedente é o de Bolinfante, que utilizou uma representação especial redutível das β^i:

$$\beta^i = \frac{1}{2}\left(\gamma^i_{(1)} I_{(2)} + I_{(1)} \gamma^i_{(2)}\right) \tag{1.3}$$

para obter as suas equações. Estas, que se seguem de (1.1) e (1.3), são

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^i_{(1)} I_{(2)} + I_{(1)} \gamma^i_{(2)}\right)\partial_i \psi = m\psi \tag{1.4}$$

onde $\gamma^i_{(1)} I_{(2)}$ é o produto direto da matriz γ que opera nos índices da esquerda pela identidade operando sôbre os índices da direita, e é um spinor de 2a. ordem

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{41} & & & \psi_{44} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Bolinfante, como Kemmer, deseja descrever partículas com spin 1 e 0, razão pela qual, em geral, usa (1.4), com $\gamma^i_{(1)} + \gamma^i_{(2)}$ singular. No entanto, se se impõe a condição

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha} \tag{1.6}$$

+ Ver por exemplo ref. 12

isto é, que a função de onda seja simétrica, o número de suas componentes ficará reduzido a 10 e, *assim*, descreverá ùnicamente spin 1+. Como consequência disto a teoria de Bolinfante passa a ser uma formulação da de Proca++ cujas equações

$$\begin{aligned} \partial^j \phi^i - \partial^i \phi^j &= F^{ij} \\ \partial_i F^{ij} + m^2 \phi^j &= 0 \qquad (i,j = 0,1,2,3) \end{aligned} \tag{1.7}$$

envolvem 6 componentes do tensor anti-simétrico de 2a. ordem F^{ij} e 4 do vetor ϕ^i. Estas equações (1.7), como se sabe, podem ser escritas na forma das de Duffin-Kemmer para spin igual a um (puro).

EQUAÇÕES DE BARGMANN-WIGNER

Bargmann e Wigner têm proposto equações para partículas livres com spin $S = N/2$ (N = inteiro), e massa única, as quais são:

$$\begin{aligned} \gamma^i_{(j)} p_i \psi &= m \psi \qquad (j = 1,2,\dots 2S) \\ p_i = i \frac{\partial}{\partial x^i} &\equiv i \partial_i \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde a função de onda é um spinor de órdem N completamente simétrico,

$$\psi = \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_N} \qquad \alpha_j = 1,2,3,4 \tag{1.9}$$

$\gamma^i_{(j)}$ atúa no índice α_j da função de onda e satisfaz às relações

$$\begin{aligned} \gamma^i_{(j)} \gamma^k_{(j)} + \gamma^k_{(j)} \gamma^i_{(j)} &= 2 g^{ik} \\ \gamma^i_{(j)} \gamma^k_{(\ell)} &= \gamma^k_{(\ell)} \gamma^i_{(j)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

+ Na realidade, se a carga é ≠ 0, o que fìsicamente deve-se esperar neste caso, de uma partícula com spin um puro, é que a função de onda deveria ter 6 componentes spinoriais. Logo ψ possue 4 componentes redundantes. Existem teorias[14] nas quais eliminam-se essas 4 componentes e que não têm operadores singulares mas não são manifestamente covariantes.

++ Ver por exemplo ref. 12 e 9.

No caso particular de uma partícula com spin 1, as equações (1.9) de Bargmann-Wigner são:

$$i\gamma^{i}_{(1)}\partial_i \psi = m\psi \tag{1.11a}$$

$$i\gamma^{i}_{(2)}\partial_i \psi = m\psi \tag{1.11b}$$

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \psi_{\alpha_2\alpha_1} \tag{1.11c}$$

Estas duas equações, no entanto, devido à simetria de ψ, (1.11c), na realidade são idênticas, de modo que simplesmente se pode escrever:

$$\gamma^{i}\partial_i \psi = m\psi$$

$$\psi = (\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \psi_{\alpha_2\alpha_1}) .$$

Leite Lopes[9] tem demonstrado que estas equações conduzem às de Proca, se se introduz uma função de onda, construida a partir da função de Bargmann-Wigner, que constitui a forma tensorial desta última.

Com efeito, considerando a função de Bargmann-Wigner como uma matriz de 4 x 4, pode ser escrita como uma combinação dos 16 operadores independentes de Dirac

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \sum_A \varphi_A (\gamma_A)_{\alpha_1\alpha_2}$$

Posto que ψ é simétrica, considerou-se só os 10 operadores simétricos, os quais são+

+ Ver página 69 da referência 9.

$$(-B\gamma_5\gamma_i) \equiv (\bar{C}\gamma_i) \qquad (1.12a)$$

$$(-B\gamma_5\gamma_i\gamma_j) \equiv (\bar{C}\gamma_i\gamma_j)$$

onde B é uma matriz tal que

$$\gamma_i^T = B\gamma_i B^{-1} \equiv -C^{-1}\gamma_i C$$

(T = transposto)

$$B^T = -B \qquad (1.12b)$$

$$C = \gamma_5 B^{-1}$$

$$\bar{C} \equiv C^{-1}$$

Define-se então:

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2}(x) = \phi^i(x)(\gamma_i\gamma_5 B^{-1})_{\alpha_1\alpha_2} + \frac{i}{2m}F^{ij}(x)(\gamma_i\gamma_j B^{-1})_{\alpha_1\alpha_2} \qquad (1.13)$$

Usando agora esta função e (1.10), obtem-se de (1.11):

$$\frac{1}{2}(p_i\phi_k - p_k\phi_i - iF_{ik})(\gamma^i\gamma^k)_{\alpha\lambda} = -g^{ik}p_k\phi_i\delta_{\alpha\lambda} + \qquad (1.14)$$

$$+ m\phi_k\gamma^k_{\alpha\lambda} - \frac{i}{2m}p_i F_{kl}(\gamma^i\gamma^k\gamma^l)_{\alpha\lambda}$$

e tomando traço em $(\alpha\ ;\lambda)$

$$p_i\phi_i = 0$$

Daí, multiplicando (1.14) primeiramente por γ^m e depois por $\gamma^m\gamma^n$ (usando além disso, neste último caso, (1.15)) e tomando traço em $(\alpha\ ;\ \rho)$ em ambos casos, resultam justamente as equações (1.7).

Nota-se além disso que (1.15) conjuntamente com as equações de Proca implicam a de Klein-Gordon.

E' interessante observar, finalmente, que a teoria de Bargmann-Wigner é mais simples matemàticamente que as suas semelhantes, nas quais aparece com operadores singulares.

EQUAÇÕES RELATIVISTAS PARA PARTÍCULAS COM SPIN 3/2. EQUAÇÕES DE BARGMANN-WIGNER E RARITA-SCHWINGER.

Para descrever partículas livres com spin 3/2, como o Ω^-, o barion cujo spin-paridade é $3/2^+$ conforme à simetria unitária[15], tem-se utilizado o formalismo de Rarita-Schwinger para este spin[18], o qual constitui uma formulação spinor-tetra-vetorial da correspondente teoria de Dirac-Fierz-Pauli. Neste formalismo, o campo para S = k + 1/2 em geral, goza das propriedades mistas de transformação de um spinor de Dirac de 4 componentes e um tensor simétrico de ordem k, o qual permite escrever em forma mais simples e compacta as equações de Dirac-Fierz-Pauli[8,15,...]. Esta é uma razão pela qual estamos interessados em compará-la com a de Bargmann-Wigner.

Naturalmente, existem outras teorias para partículas com spin 3/2, como por exemplo as de S. N. Gupta[26] e H. Feshbach[27] que também não usam a notação spinorial de Dirac-Fierz-Pauli. Na teoria de Gupta, com efeito, a função de onda é uma matriz de uma coluna com 16 componentes que satisfaz a uma equação do tipo Dirac (escrita assim pela primeira vez por S. N. Gupta[26]), enquanto que, no formalismo de Feshbach, a função de onda transforma-se como o produto de 3 spinores de Dirac, $\psi_{\alpha\beta\sigma} = \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\sigma$, ou seja, como uma função que descreve um sistema de 3 partículas com S = 1/2, sendo as correspondentes equações de onda idênticas às de Rarita-Schwinger. No entanto, não faremos maior referência a essa escola, posto que não são úteis aos nossos propósitos.

No que se segue formularemos a teoria de Bargmann-Wigner para S = 3/2, em têrmos de um spinor-vetor, análogo ao campo de Rarita-Schwinger, e um spinor-tensor anti-simétrico. Compará-lo-emos depois com o destes últimos autores.[20]

FUNÇÃO DE ONDA. FORMA SPINOR-TENSORIAL DA FUNÇÃO DE BARGMANN-WIGNER.

Na teoria de Bargmann-Wigner para as partículas com spin 3/2, a função de onda é um spinor simétrico de 3a. ordem com 20 componentes independentes, $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ (inicialmente a função de onda tem 64 componentes, mas é reduzida a este número pela condição de simetria). Para construir uma nova função de onda faremos uso da função de Bargmann-Wigner e dos operadores simétricos de Dirac. Definimos então com eles o spinor-tensor, anti-simétrico nos seus índices tensoriais, e o spinor-vetor do seguinte modo:

$$\phi^i_\gamma = (\bar{C}\gamma^i)_{\alpha\beta}\,\psi_{\beta\alpha\gamma} \tag{2.1}$$

$$F^{ij}_\gamma = (\bar{C}\gamma^i\gamma^j)_{\alpha\beta}\,\psi_{\beta\alpha\gamma} \tag{2.2}$$

cujas componentes são 16 e 24 respectivamente, ou seja, 20 a mais das que precisamos para construir o nosso campo. Para cortá-las faremos uso da conhecida relação[19] (ver apêndice)

$$J_{\alpha\sigma}\,G_{\gamma\beta} = \frac{1}{4}\sum_A \gamma^A_{\gamma\sigma}\,(J\gamma^A G)_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

que se cumpre para 2 matrizes tetra-dimensionais tais como J e G. Com efeito, de (2.3) e (2.1,2) segue-se

$$\gamma_i\,\phi^i_\gamma = 0 \tag{2.4}$$

$$-\gamma_j\,F^{ij}_\gamma = \phi_\gamma \tag{2.5}$$

$$\gamma_i\gamma_j\,F^{ij} = 0 \tag{2.6}$$

isto é, obtem-se 3 condições suplementares sôbre ϕ^i_γ e F^{ij}_γ, o que reduz a 20 precisamente o número das componentes independentes. Para demonstrá-lo escrevemos,

$$\gamma^i_{\lambda\gamma}\,\phi^i_\gamma = \bar{C}_{\alpha\tau}\,\gamma^i_{\tau\beta}\,\gamma_{i,\lambda\gamma}\,\psi_{\alpha\beta\gamma}$$

para a primeira condição, de acôrdo a (2.1). Por (2.3) então

$$\gamma^i_{\epsilon\beta}\gamma_{i,\lambda\gamma} = \frac{1}{4}\sum_A \gamma^A_{\lambda\beta}(\gamma_i\gamma^A\gamma^i)_{\epsilon\gamma}$$

obtem-se:

$$\gamma_i\phi^i_\gamma = \bar{c}_{\alpha\gamma}\psi_{\gamma\alpha\lambda} - \frac{1}{2}(\bar{c}\gamma_k)_{\alpha\gamma}\gamma^k_{\lambda\beta}\psi_{\beta\alpha\gamma} + \frac{1}{2}(\bar{c}\gamma_j\gamma^i)_{\alpha\gamma}(\gamma_i\gamma^j)_{\lambda\beta}\psi_{\beta\alpha\lambda} - (\bar{c}\gamma_5)_{\alpha\gamma}(\gamma_5)_{\lambda\beta}\psi_{\beta\alpha\gamma}$$

Agora, como $\bar{c}$, $\bar{c}\gamma_j\gamma^i$, $\bar{c}\gamma_5$ são anti-simétricos, conclui-se que

$$\gamma_i\phi^i_\gamma = -\frac{1}{2}(\gamma^k\phi_k)_\gamma$$

ou seja, $\gamma_i\phi^i_\gamma = 0$, que é a condição (2.4).

Analogamente, para achar a relação (2.5), que diz que F^{ij}_γ é o único campo independente, escrevemos:

$$(\gamma_i)_{\lambda\gamma}F^{ij}_\gamma = (\gamma_i)_{\lambda\gamma}\bar{c}_{\alpha\rho}\sigma^{ij}_{\rho\beta}\psi_{\beta\alpha\gamma}$$

do qual obtem-se

$$\gamma_{i,\lambda\gamma}F^{ij}_\gamma = -\frac{1}{2}(\gamma_i\gamma^j)_{\lambda\beta}\phi^i_\beta$$

Se agora comutamos os γ e usamos (2.4), obteremos (2.5). Finalmente, para encontrar (2.6), aplicamos γ_i sôbre (2.5) e utilizamos (2.1).

Observe-se que poderia considerar-se F^{ij}_γ, sujeito à condição (2.5), a nova função de onda, uma forma tensorial da função original de Bargmann-Wigner, mas neste caso essa função não seria completa no sentido de estar definida em têrmos de todos os operadores simétricos de Dirac.

O conjunto ϕ^i_γ, F^{ij}_γ tal como tem sido definido, possui inverso. Com efeito, a função inversa é:

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{S}{4}\left[(\gamma_i c)_{\alpha\beta}\phi^i_\gamma - \frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_j c)_{\alpha\beta}F^{ij}_\gamma\right] \qquad (2.7)$$

onde S é o operador de simetrização que atúa nos índices spinoriais.

Para obter (2.7), escrevemos para $\psi_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \Big\{ a\left[(\gamma_i c)_{\alpha\beta}\phi^i_\gamma + (\gamma_i c)_{\alpha\gamma}\phi^i_\beta + (\gamma_i c)_{\beta\gamma}\phi^i_\alpha\right] + b\Big[(\gamma_i\gamma_j c)_{\alpha\beta}F^{ij}_\gamma + \qquad (2.8)$$

$$+ (\gamma_i\gamma_j c)_{\alpha\gamma}F^{ij}_\beta + (\gamma_i\gamma_j c)_{\beta\gamma}F^{ij}_\gamma\Big]\Big\}$$

onde a e b são constantes a determinar. Multiplicando agora (2.8) pela esquerda por $(\bar{c}\gamma^k)$, acha-se

Anàlogamente, multiplicando (2.6) por ($\bar{C}\gamma^k\gamma^\ell$), encontra-se

$$(\bar{C}\gamma^k\gamma^\ell)_{\beta\alpha}\psi_{\alpha\beta\gamma} = F_\gamma^{k\ell} = (4a-8b)(\gamma^\ell\phi^k - \gamma^k\phi^\ell)_\gamma - 24b\cdot F_\gamma^{k\ell}$$

donde

$$4a - 8b = 0$$

ou seja

$$a = -\frac{1}{12} \qquad b = -\frac{1}{24}$$

Introduzindo agora o operador de simetrização achamos (2.7) ou também

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{5}{4}\left[\frac{\cdot}{\cdot}(\gamma_i C)_{\alpha\beta}(\gamma_j F^{ij})_\gamma - \frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_j C)_{\alpha\beta} F_\gamma^{ij}\right]$$

EQUAÇÕES DE ONDA. FORMA SPINOR-TENSORIAL DAS EQUAÇÕES DE BARGMANN-WIGNER.

Devido à simetria da função de Bargmann-Wigner é possível escrever, em vez das três equações correspondentes, para uma partícula com spin 3/2, simplesmente uma:

$$(i\gamma^i_{\alpha\alpha'}\partial_i - m\delta_{\alpha\alpha'})\psi_{\alpha'\beta\gamma} = 0 \tag{2.9}$$

$$\psi \equiv \psi_{simet.}$$

Se agora se introduzem as definições (2.1,2), estas equações (2.9) conduzem às seguintes novas equações

$$(i\partial\!\!\!/ - m)F_\gamma^{ij} = 0 \tag{2.10}$$

$$i\partial_j F_\gamma^{ij} = m\gamma_j F_\gamma^{ij} \tag{2.11}$$

$$\partial^i\gamma_j F_\gamma^{jk} - \partial^k\gamma_j F_\gamma^{ji} = m F_\gamma^{ik} \tag{2.12}$$

Reciprocamente, (2.10 - 12) e (2.5) implicam (2.9) para a função de

Bargmann-Wigner definida por (2.7). Assim, as novas equações (2.10-12) conjuntamente com a relação (2.5) constituem a forma spinor-tensorial das equações de Bargmann-Wigner (2.9), ou seja, estas teorias são equivalentes.

COMPARAÇÃO COM A TEORIA DE RARITA-SCHWINGER.

Na teoria de Rarita-Schwinger para partículas com spin 3/2, a função de onda é um spinor-tetra-vetor que satisfaz às seguintes equações

$$(i \not\partial - m) \phi^i_\alpha = 0 \tag{2.13}$$

$$\gamma_i \phi^i_\alpha = 0 \tag{2.14}$$

$$\partial_i \phi^i_\alpha = 0 \tag{2.15}$$

a primeira das quais é a equação do campo pròpriamente dita, enquanto as restantes são as condições subsidiárias, onde as γ_i são as matrizes de Dirac 4 x 4. (2.14) é uma condição que reduz o número de componentes de ϕ^i_α a 2(2S+1), que é o número de orientações de uma partícula com esse spin. (2.15) se segue das duas anteriores.

Observa-se que as equações (2.13 - 15) podem ser obtidas das (2.10 - 12) mais a condição (2.6), se (2.5) define ϕ^i_α. Resulta assim que as novas equações de Bargmann-Wigner implicam as de Rarita-Schwinger. De outra parte, se se introduz a definição (2.5) em (2.12) obtem-se

$$F^{ij}_\alpha = \frac{1}{m} (\partial^i \phi^j - \partial^j \phi^i)_\alpha \tag{2.16}$$

o qual do ponto de vista da teoria de Rarita-Schwinger pode-se considerar uma definição de F^{ij}_α em têrmos de ϕ^i_α. Verifica-se então que as F^{ij}_α definidas por (2.16) satisfazem as equações (2.10 -12) se ϕ^i_α é uma solução de (2.13 - 15). Como consequência, as equações de Rarita-Schwinger também implicam as de Bargmann-Wigner, e portanto ambos conjuntos de equações são equivalentes para partículas livres. O formalismo proposto, ou de Bargmann-Wigner, e a teoria de Rarita - Schwinger são assim equivalentes.

EQUAÇÕES RELATIVISTAS PARA PARTÍCULAS COM SPIN 2. EQUAÇÕES DE BARGMANN-WIGNER E FIERZ-PAULI.

As partículas elementares com atual interêsse físico não se reduzem ùnicamente às de spin 0, 1/2, 1 e 3/2. Existe, também, agora, evidência experimental para as de spin 2,[6] cujas equações no entanto foram escritas pela primeira vez em 1939 por Fierz e Pauli[3]. Desde então, vários autores como Tonnelat[21] e Green[22], entre outros, têm descrito estas partículas também com equações diferenciais mas de primeira órdem (as equações de Fierz-Pauli são de 2a. órdem e tensoriais). Tonnelat, usa o método de Fusão de DeBroglie e seu campo está representado pelo produto direto de 4 soluções independentes da equação de Dirac. Green, por sua vez, introduz uma representação das matrizes α_i que aparecem na sua equação, escrita por êle na forma canônica,

$$(\alpha_i \partial^i + m)\psi = 0$$

$$\alpha_i = \beta_i I + I \beta_i,$$

onde as β_i são matrizes de Duffin-Kemmer. Seu procedimento no entanto é bàsicamente igual ao de Tonnelat.

Como no caso anterior, aqui apresentaremos uma formulação tensorial da teoria de Bargmann-Wigner para spin 2, que generaliza para estas partículas o formalismo desenvolvido para S = 3/2[23]. Compara-la-emos depois com a correspondente de Fierz-Pauli.

FUNÇÃO DE ONDA. FORMA TENSORIAL DA FUNÇÃO DE BARGMANN-WIGNER.

Para construir a função de onda usamos, como antes, os 10 operadores simétricos de Dirac e a função original de Bargmann-Wigner para S=2.

$$\phi_{ij} = (\bar{c}\gamma_i)_{\alpha\beta}(\bar{c}\gamma_j)_{\sigma\eta}\psi_{\eta\sigma\beta\alpha} \tag{3.1}$$

$$f_{[ij]k} = (\bar{c}\gamma_i\gamma_j)_{\alpha\beta}(\bar{c}\gamma_k)_{\sigma\eta}\psi_{\eta\sigma\beta\alpha} \tag{3.2}$$

$$F_{[ij][kl]} = (\bar{c}\gamma_i\gamma_j)_{\alpha\beta}(\bar{c}\gamma_k\gamma_l)_{\sigma\eta}\psi_{\eta\sigma\beta\alpha} \tag{3.3}$$

tensores de 2a., 3a. e 4a. ordens, respectivamente. O primeiro é simétrico enquanto que os demais são anti-simétricos com respeito aos índices vetoriais entre colchetes.

Como a função de Bargmann-Wigner tem só 35 componentes independentes, introduzimos condições subsidiárias sôbre êstes tensores (3.1 - 3), - para cortar as 20 componentes que sobram. Essas condições são:

$$g^{ij}\phi_{ij}=0 \tag{3.4}$$

$$g^{ik}F_{[ij]k}=0 \tag{3.5}$$

$$g^{jl}F_{[ij][kl]}=0 \tag{3.6}$$

$$\varepsilon^{ijkl}F_{[ij]k}=0 \tag{3.7}$$

$$\varepsilon^{ijkl}F_{[ij][kl]}=0 \tag{3.8}$$

$$\phi_{jl}=g^{ik}F_{[ij][kl]} \tag{3.9}$$

obtidas, como no caso anterior, usando o Teorema de Fierz, (2.3), e por um procedimento semelhante.

Note-se que, devido a (3.9), $F_{[ij]k}$ e $F_{[ij][kl]}$, sujeitos às condições (3.5 - 8) podem constituir também outra representação tensorial da função original de Bargmann-Wigner.

A transformação inversa de (3.2 - 3) é então

$$\psi_{\alpha\beta\sigma\eta}=\frac{S}{8}\left[\phi_{ij}(\gamma^{i}C)_{\alpha\beta}(\gamma^{j}C)_{\sigma\eta}-F_{[ij]k}(\gamma^{i}\gamma^{j}C)_{\alpha\beta}(\gamma^{k}C)_{\sigma\eta}+\frac{1}{4}F_{[ij][kl]}(\gamma^{i}\gamma^{j}C)_{\alpha\beta}(\gamma^{k}\gamma^{l})_{\sigma\eta}\right] \tag{3.10}$$

onde é o operador de simetrização que atúa sôbre os índices spinoriais. Pode-se vêr que esta função é uma generalização de (1.13).

<u>EQUAÇÕES DE ONDA. FORMA TENSORIAL DAS EQUAÇÕES DE BARGMANN-WIGNER.</u>

As equações de Bargmann-Wigner para S = 2, podem ser escritas simplesmente assim:

$$(i\gamma^i_{\alpha\mu}\partial_i - m\delta_{\alpha\mu})\,\psi_{\alpha\beta\sigma\eta} = 0$$
$$\psi \equiv \psi_{simet.} \tag{3.11}$$

a partir delas e por (3.1 - 3) acha-se então os dois seguintes sistemas de equações

$$F_{[ij]k} = -\frac{1}{m^2}\partial^\ell\left[\partial_i F_{[\ell k]j} - \partial_j F_{[\ell k]i}\right] \tag{3.12}$$

$$(\Box + m^2)\,F_{[ij]k} = 0 \tag{3.14}$$

$$F_{[ij][k\ell]} = \frac{i}{2m}\left[\partial_\ell F_{[ij]k} - \partial_k F_{[ij]\ell} + \partial_j F_{[k\ell]i} - \partial_i F_{[k\ell]j}\right] \tag{3.15}$$

$$(\Box + m^2)\,F_{[ij][k\ell]} = 0 \tag{3.16}$$

$$F_{[ij][k\ell]} = -\frac{1}{2m^2}\partial^n\left[\partial_i F_{[nj][k\ell]} + \partial_j F_{[in][k\ell]} + \partial_k F_{[ij][n\ell]} + \partial_\ell F_{[ij][kn]}\right] \tag{3.17}$$

$$F_{[ij]k} = \frac{i}{m}\partial^\ell F_{[ij][k\ell]} \tag{3.18}$$

o primeiro dos quais, (3.12 - 14) sujeito a (3.5 - 7) pode ser obtido de (3.15 - 17) mais a relação (3.6, 8) e, reciprocamente, êste daquele, sendo portanto ambos sistemas de equações equivalentes entre si. Agora, posto que cada um deles e (3.9) implicam (3.11) para a função de Bergmann - Wigner definida por (3.10), os três conjuntos de equações serão equivalentes entre si. Assim, as equações (3.12 -17) mais as condições suplementares (3.4 - 8) constituem a forma tensorial das equações de Bargmann-Wigner. Em consequência, o formalismo destes últimos autores contém as duas teorias independentes mas equivalentes para partículas livres com spin 2.

COMPARAÇÃO COM AS EQUAÇÕES DE FIERZ-PAULI.

As equações de Fierz-Pauli para uma partícula com spin 2 são

$$\partial^j \phi_{j\ell} = 0 \tag{3.18}$$

$$(\Box + m^2)\phi_{jl} = 0. \tag{3.19}$$

onde, ϕ_{jl} é um tensor simétrico de 2a. órdem e traço nulo, com 9 componentes independentes.
Estas equações, (3.18), podem ser deduzidas de (3.12 - 17) e (3.4 - 9) se (3.9) define ϕ_{jl}, logo as equações (3.12 - 17) implicam as de Fierz-Pauli. Além disso se verifica que se se introduz (3.9) em (3.12 - 14) obtém-se:

$$F_{[ij][kl]} = \frac{1}{m^2}\left(\partial_i\partial_l\phi_{jk} - \partial_j\partial_l\phi_{ik} + \partial_k\partial_j\phi_{il} - \partial_k\partial_i\phi_{jl}\right) \tag{3.21}$$

$$F_{[ij]k} = -\frac{i}{m}\left(\partial_i\phi_{jk} - \partial_j\phi_{ik}\right) \tag{3.22}$$

que no formalismo de Fierz-Pauli pode-se considerar definições de o $F_{[ij][kl]}$ em têrmos de $F_{[ij]k}$ mas êstes tensores, (3.21) e (3.22), satisfazem as equações (3.12 - 17) sujeitas a (3.4 - 8) se ϕ_{jl} satisfaz (3.18). Concluimos, portanto, que as equações de Bargmann-Wigner e Fierz-Pauli são equivalentes, para partículas livres com spin 2.

O autor deseja expressar a sua profunda gratidão aos seguintes Professores:

- Ao Professor J. LEITE LOPES, que sugeriu os trabalhos nos quais se baseia esta tese, pela sua orientação e ensinamentos. A êle e ao Professor S. W. MAC DOWELL, é devedor do melhor de sua formação científica.

- Ao Professor J. TIOMNO, pelos ensinamentos recebidos durante sua permanência no C.B.P.F., e pelas sugestões e discussões sôbre assuntos tratados nêste trabalho.

- Ao Professor C. G. OLIVEIRA, pela sua colaboração em uma parte desta tese.

- Aos Professores H. G. de CARVALHO e G. FIALHO, pela cordial acolhida a êle dispensada no C.B.P.F. e C.L.A.F., respectivamente.

Também deseja o autor expressar seu reconhecimento ao C.L.A.F. pela concessão de uma bolsa para realizar êste trabalho. -

...ooOoo...

APÊNDICE

PROPRIEDADES DAS MATRIZES γ DE DIRAC, RELAÇÃO DE FIERZ. [11,19]

Como é conhecido, as matrizes γ de Dirac satisfazem às seguintes regras de comutação

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2g_{ij} \qquad (A.1)$$

Agora, se denotamos com γ^A o elemento genérico da seguinte ordenação de 16 matrizes:

tipo	propriedade de transformação
I	escalar
γ_i	vetor
$\gamma_i\gamma_j$	tensor de 2a. órdem
$\gamma_i\gamma_j\gamma_k$	pseudovetor
$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	pseudoescalar

é fácil verificar que

$$(\gamma^A)^2 = I$$

(I = matriz unitária)

e também que

$$Tr(\gamma^A) = 0 \qquad A \neq 1$$

$$Tr(\gamma^A\gamma^B) = \begin{cases} 4 & A=B \\ 0 & A\neq B \end{cases} \qquad (A.2)$$

Podemos convenientemente usar a representação em que as são Hermiteanas — . Como as γ^A são linearmente independentes qualquer matriz 4 x 4 pode ser expressa assim :

$$X = \sum_{A=1}^{16} c_A\gamma^A \qquad (A.3)$$

Logo, de (A.2)

$$T_r(X\gamma^A) = 4c_A$$

portanto

$$X = \sum_A c_A \gamma^A$$

$$= \sum_A \frac{1}{4} T_r(X\gamma^A)\gamma^A$$

$$= \frac{1}{4}\sum_A \sum_{\rho\lambda} X_{\rho\lambda}\gamma^A_{\lambda\rho}\gamma^A = \frac{1}{4}\sum_A \sum_{\rho\lambda} X_{\rho\lambda}\gamma^A_{\lambda\rho}\gamma^A$$

Considerando o elemento $\alpha\beta$ desta matriz, acha-se

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sum_A \sum_{\rho,\lambda=1}^{4} X_{\rho\lambda}\gamma^A_{\lambda\rho}\gamma^A_{\alpha\beta} \qquad \text{(A.4)}$$

Escolhemos agora um X especial

$$X_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\rho\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha=\sigma,\ \beta=\rho \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

onde

$$\delta_{\alpha\sigma} = \begin{cases} 1 & \alpha=\sigma \\ 0 & \alpha\neq\sigma \end{cases}$$

é o delta de Kronecker. Então a equação (A. 4) reduz-se à relação importante,

$$\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\rho\beta} = \frac{1}{4}\sum_A \gamma^A_{\rho\sigma}\gamma^A_{\alpha\beta}. \qquad \text{(A.5)}$$

Se F e G são matrizes arbitrárias 4 x 4, verifica-se então[19]

$$F_{\alpha\sigma}G_{\rho\beta} = \sum_{\alpha'\beta'}\sum_{\alpha\alpha'} F_{\alpha\alpha'}\delta_{\alpha'\sigma}\delta_{\rho\beta'}G_{\beta'\beta}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_A \gamma^A_{\rho\sigma}(F\gamma^A G)_{\alpha\beta} \qquad \text{(2.3)}$$

conhecida como relação de Fierz.

REFERÊNCIAS

1. Dirac, P.A.M., 1936, Proc. Roy. Soc. (London) A155, 447.
2. Ver por exemplo, Corson, E.M., Introduction to Tensors Spinors, and Relativistic Wave Equations, Blackie & Son, London
   Weaver, D.L., Hammer, C.L., Good, R.H., Phys. Rev. 135, 3241
3. Fierz, M., Helv. Phys. Acta, 12, 3 (1938); Fierz, M. and Pauli, W., 1939, Proc. Roy. Soc.(London) A173, 211
4. Bargmann, V. and Wigner, E.P., 1948, Proc. Nat.Acad.Sci., 34, 211
5. Kramers, H.A., Belinfante, F.J., Lubanski, J.K., 1941, Physica, 8, 597
6. R. Delbourgo et al. 1965, IC/65/2,10,37
7. V.E.Barnes et al., 1964, Phys. Rev.Lett. 12, 204
8. Rarita, W., Schwinger, J., 1941, Phys. Rev. 60, 61;
   Moldauer e Case, 1956, Phys.Rev. 102,279.
9. Leite Lopes, J., 1960, Relativistic Wave Equations, C.B.P.F., Rio de Janeiro.
10. Proca, A., 1936, 1938, Jour.Phys.Rad. 7, 347; 6, 61
11. Schweber-Bethe-de Hoffmann, Mesons and Fields, vol. I, sec. 3, 1956
12. Kemmer, N., 1939, Proc. Roy. Soc.(London), A173, 91
13. Belinfante, F.J., 1939, Physica, 6, 870
14. Ver por exemplo, Sakata-Taketani, Proc. Phys.Mat.Soc.(Japan) 22, 757, 1940
15. Gell Mann, M., CTSL-20, 1961; 1962, Phys.Rev. 125, 1067
    Neéman, Y., 1961, Nucl.Phys. 26,222
16. Gupta, S.N., 1954, Phys.Rev. 95, 1334; Gupta, K.K., 1952, Proc. Indian Acad.Sci. A35,255
17. Feshbach, H.,1955, Phys.Rev. 98,801;
18. Ver, por exemplo, de Santis, V., Phys.Rev.Lett. 13, 217, 1964
19. Umezawa, H., 1956, Quantum Field Theory, p.41, North-Holland Publ.Co.
20. Oliveira, C.G. e Vidal, A., An.Acad.Bras. Ci.35, 181/1963
21. Tonnelat, M.A., 1941, Com.Ren.212, 187; Ann.Phys.17,158;19,396,1944
22. Green, H.S., 1953, Phys.Rev.89,965,
23. Vidal, A. e MacDowell, S.W., 1963, Not.Fis.10,273 (a ser publicado em N.C.)
24. Duffin, R.J., 1938, Phys.Rev. 64, 1114