

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ASPECTOS DIMENSIONAIS DA CONSISTÊNCIA DE
CÁLCULOS PERTURBATIVOS EM TEORIA QUÂNTICA DE
CAMPOS**

ALAN ESPINOSA MAICÁ

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO - 2010

**ASPECTOS DIMENSIONAIS DA CONSISTÊNCIA DE
CÁLCULOS PERTURBATIVOS EM TEORIA QUÂNTICA DE
CAMPOS**

por

Alan Espinosa Maicá

Dissertação de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
(CBPF/MCT) como requisito para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Orientador: Orimar Antônio Battistel

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

2010

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ASPECTOS DIMENSIONAIS DA CONSISTÊNCIA DE CÁLCULOS PERTURBATIVOS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

AUTOR: ALAN ESPINOSA MAICÁ

ORIENTADOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL

Local e Data da Defesa: Rio de Janeiro, 29 de março de 2010.

Uma nova estratégia para manipulação e cálculos envolvendo amplitudes divergentes em soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos tem sido aplicada para o estudo de alguns problemas para os quais a consistência no tratamento de divergências desempenha papel crucial, em teorias e modelos formulados em dimensão espaço-temporal quatro. Tendo em vista o sucesso obtido com a aplicação da estratégia de cálculo e considerando-se a não existência de restrições de aplicabilidade, torna-se natural considerar investigações em teorias e modelos formulados em outras dimensões. Tendo isto em mente, no contexto do presente trabalho, considera-se o estudo de amplitudes perturbativas associadas à Eletrodinâmica Quântica, ao nível um “loop”, com particular interesse no tensor de polarização do vácuo, em dimensões espaço-temporais dois, três, quatro. Nos resultados obtidos, aspectos importantes podem ser destacados. Como tal, é possível perceber que, a partir dos resultados obtidos no contexto da técnica utilizada, pode-se obter um mapeamento naqueles resultados obtidos com a utilização de métodos tradicionais de regularização, particularmente com a Regularização Dimensional. Além disto, a generalização do procedimento e dos resultados para, dimensões espaço-temporais quaisquer, parece ser perfeitamente possível. Isto permite colocar as investigações em cinco e seis dimensões, seqüências naturais dos estudos, no contexto de uma sistematização única. É perfeitamente possível vislumbrar que, para as amplitudes da Eletrodinâmica Quântica, ao nível um loop, as relações de simetria poderão ser satisfeitas naturalmente e as amplitudes estarão livres de ambigüidades apesar do caráter não renormalizável das teorias correspondentes. A consistência desejada é obtida com a identificação de relações específicas entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência, denominadas de relações de consistência., completamente análogas àquelas identificadas em dimensão quatro. Pode-se perceber, a partir dos resultados já obtidos para as referidas amplitudes, que, quando estes são escritos em termos de um conjunto apropriado de funções (que representam as partes finitas) e de um conjunto adequado de objetos básicos divergentes, estas exibem formas universais.

Palavras-chaves: Amplitudes, Divergências, Consistência, Estratégia.

ABSTRACT

Masters Physics
Brazilian Centre for Research in Physics (CBPF)

DIMENSIONAL ASPECTS OF THE CONSISTENCY IN QUANTUM FIELD THEORY PERTURBATIVE CALCULATIONS

AUTHOR: ALAN ESPINOSA MAICÁ

SUPERVISOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL

Defense's Place and Date: Rio de Janeiro, 29th March, 2010.

A new strategy for manipulations and calculations involving divergents amplitudes, associated to perturbatives solutions of Quantum Fields Theories, has been recently applied in the study of some physical problems where the consistency in the treatment of divergences plays a crucial role, in theories and models formulated in 4D space-time dimension. Given the obtained success with the application of the mentioned calculational strategy and the absence of any restrictions of aplicability, it becomes natural to consider investigations in theories and models formulated in other space-time dimensions. Having this in mind, in the context of the present work, it is considered the study of perturbative amplitudes associated to the Quantum Electrodynamics, at the one "loop" level, spending special attention to the vacuum polarization tensor. The evaluation of such amplitude is considered in details, in space-time dimensions two, three and four. In the results so obtained, important aspects can be emphasized. Among them, it is possible to notice that, starting from the results obtained in the context of the used technique, a perfect map can be obtained between these results and those obtained within the context of traditional regularization methods. In particular with those produced by using the Dimensional Regularization technique. Besides, the generalization of the procedure to other space-time dimensions, not considered here, it seems to be perfectly possible. This allows us to put the investigations in five and six dimensions, natural sequences of the studies, in the context of a unique point of view. In addition, it is possible to conclude that at any space-time dimension, for the Quantum Electrodynamics amplitudes at the one-loop level, the symmetry relations or ward identities will naturally be obtained satisfied and the amplitudes will be free from ambiguities, in spite of the non renormalizable character of the corresponding theories. The desired consistency is obtained after the identification of specific relations among purely divergent integrals having the same divergence degrees, denominated as consistency relations, in a completely similar way to those previously identified in 4D dimension. It can be also noted that mathematical structures analogous of the structure functions introduced in 4D calculations in order to systematize the finite part of the amplitudes, can be easily identified allowing us to put the results for all Feynman integrals in universal forms in any space-time dimension.

Keys-Words: Amplitudes, Divergences, Consistence, Strategy.

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	A Eletrodinâmica Quântica	2
1.1.1	Divergências na EDQ	3
1.1.2	Relações entre funções de Green	4
1.2	Técnicas de Regularização e métodos alternativos	7
2	A ESTRATÉGIA PARA O CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYN-	
	MAN	11
3	CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN	14
3.1	Introdução	14
3.2	Cálculo das integrais de Feynman em 2D	14
3.2.1	Cálculo de I_1	15
3.2.2	Cálculo de $(I_1)_\mu$	15
3.2.3	Cálculo de I_2	16
3.2.4	Cálculo de $(I_2)_\mu$	16
3.2.5	Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$	16
3.3	Cálculo das integrais de Feynman em 3D	17
3.3.1	Cálculo de I_1	17
3.3.2	Cálculo de $(I_1)_\mu$	17
3.3.3	Cálculo de I_2	18
3.3.4	Cálculo de $(I_2)_\mu$	18
3.3.5	Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$	19
3.4	Cálculo das integrais de Feynman em 4D	20
3.4.1	Cálculo de I_1	20

3.4.2	Cálculo de $(I_1)_\mu$	20
3.4.3	Cálculo da I_2	21
3.4.4	Cálculo de $(I_2)_\mu$	21
3.4.5	Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$	22
4	AMPLITUDES FÍSICAS EM 2D	24
4.1	Cálculo da Função de Green de Um Ponto Vetorial	24
4.2	Cálculo da Função de Green de Dois Pontos Tensorial	25
5	AMPLITUDES FÍSICAS EM 3D	28
5.1	Cálculo da Função de Green de Um Ponto Vetorial	28
5.2	Cálculo da Função de Green de Dois Pontos Tensorial	29
6	AMPLITUDES FÍSICAS EM 4D	31
6.1	Cálculo da Função de Green de Um Ponto Vetorial	31
6.2	Cálculo da Função de Green de Dois Pontos Tensorial	32
7	AMBIGUIDADES, RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E IDENTIDADES DE WARD	35
7.1	Introdução	35
7.2	Ambiguidades	35
7.3	Relações entre funções de Green	36
7.4	Identidades de Ward	37
8	OBJETOS BÁSICOS DIVERGENTES VERSUS REGULARIZAÇÕES	40
8.1	Regularização Dimensional	40
8.2	Regularização Covariante de Pauli-Villars	41
8.3	Cálculo de Termos de Superfície	43
9	CONCLUSÕES	45
A	A ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC	47
A.1	Representação Das Matrizes De Dirac Em $D = 3 + 1$	47
A.2	Representação Das Matrizes De Dirac Em $D = 2 + 1$	50
B	PARAMETRIZAÇÃO DE FEYNMAN	52

C INTEGRAÇÃO DIMENSIONAL

57

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama para contribuição ao espalhamento elétron-elétron na QED. O laço possui uma divergência ultravioleta.	4
-----	--	---

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A Teoria Quântica de Campos (TQC) [1] fornece um quadro teórico para a formulação de modelos de mecânica quântica de sistemas classicamente descritos por campos ou (especialmente no contexto da matéria condensada) sistemas de muitos corpos. TQC é amplamente utilizada em física de partículas e física da matéria condensada. A maioria das teorias modernas de física de partículas, incluindo o modelo padrão, são formuladas como uma TQC. Tais teorias são usadas em muitas circunstâncias, especialmente aquelas em que o número de partículas varia, por exemplo, na teoria BCS [2] da supercondutividade.

Em TQC perturbativa (TQCp), as forças entre as partículas são mediadas por outras partículas. A força electromagnética entre dois elétrons é compreendida como uma troca de fótons. Bosóns intermediários medeiam a força fraca e glúons medeiam a força forte. Não existe atualmente nenhuma teoria quântica completa que descreva a força gravitacional, mas muitas das teorias propostas postulam a existência de uma partícula, o gráviton, que a intermediaria. As partículas portadoras de força são partículas virtuais e, por definição, não podem ser detectadas na interação da força. A noção de "partícula mediadora de força" vem da teoria de perturbação.

A teoria de perturbação, em TQC, é um método de aproximação para descrever um sistema complicado (teoria com interação) em termos de um mais simples (teoria livre). A idéia é começar com a teoria livre (um único campo) para a qual a solução matemática é conhecida, e adicionar um "perturbador" (a corrente ou termo de interação) que representa uma perturbação fraca para o sistema. Se a perturbação não for muito grande ou, dito de outra maneira, se o parâmetro que acompanha o termo de interação (a constante de acoplamento) for pequeno, diversas quantidades físicas associadas ao sistema perturbado podem, a partir de considerações de continuidade, ser expressas como "correções" as quantidades físicas da teoria livre. Essas correções, sendo "pequenas" em relação ao tamanho das quantidades da teoria livre, podem ser calculadas utilizando métodos aproximados, como a série assintótica. Podemos, portanto, estudar uma TQC com interação com base em nosso conhecimento a respeito da teoria livre. Assim, a solução de uma TQC da-se em termos de uma série em torno do parâmetro de acoplamento e a quantização

é feita tomando-se os coeficientes da série perturbativa ordem a ordem do parâmetro de acoplamento, dessa forma, obtemos as correções quânticas (ou radiativas) a teoria livre. No entanto, os coeficientes em cada ordem da série perturbativa são constituídos, em geral, pelo produto de distribuições o que não pode ser consistentemente definido como foi provado por Laurent Schwartz [3], que recebeu a medalha Fields pelo seu trabalho sobre distribuições em 1950. Este fato nos conduz as divergências de uma TQC. Tais divergências aparecem na forma de integrais de Feynman e podem ser abordadas, atualmente, de três maneiras, aparentemente, distintas: via TQC em abordagem causal [4], via técnicas de regularização cujas mais tradicionais são a regularização de Pauli-Villars (PV) [5] e Regularização Dimensional (RD) [6] e via abordagem autoconsistente de O. A. Battistel [7]. É no contexto desta última que desenvolvemos um estudo a cerca dos aspectos dimensionais da consistência de cálculos perturbativos em TQC, utilizando a Eletrodinâmica Quântica (EDQ) como cenário para nossos estudos.

Neste capítulo, detalharemos as motivações e os objetivos de tal estudo, mas antes disso, apresentaremos, de maneira breve, uma revisão histórica e de aspectos gerais da TQC e, conseqüentemente, da EDQ, com o intuito de prover recursos para apresentarmos as motivações e os objetivos de nossos estudos.

1.1 A Eletrodinâmica Quântica

A primeira teoria razoavelmente completa da EDQ, que incluía tanto o campo eletromagnético (fótons) e a matéria eletricamente carregada (elétrons), foi criada por Paul Dirac em 1927 [8]. Esta teoria quântica do campo poderia ser usada para modelar processos importantes, como a emissão de um fóton por um elétron decaindo em um estado quântico de menor energia, um processo em que ocorre alteração no número de partículas - um átomo no estado inicial torna-se um átomo com um fóton a mais no estado final.

Apesar de seu sucesso inicial, a EDQ foi atormentada por várias dificuldades teóricas. Muitas, aparentemente, envolvendo inócuas quantidades físicas, tais como a mudança de energia dos estados de elétrons, devido à presença do campo electromagnético, geraram infinitos - um resultado absurdo - quando calculadas utilizando a EDQ. Este "problema de divergência" foi solucionado durante a década de 1940 por Bethe, Tomonaga, Schwinger, Feynman e Dyson, através do procedimento conhecido como renormalização. Esta fase de desenvolvimento culminou com a construção da teoria moderna da EDQ. Começando em 1950 com o trabalho de Yang e Mills, a EDQ foi generalizada a uma classe de TQC conhecida como teoria de calibre. A década de 1960 e 1970 viu a formulação de uma teoria de calibre agora conhecida como "modelo padrão da física de partículas", que descreve todas as partículas elementares conhecidas e as interações entre elas.

1.1.1 Divergências na EDQ

Ao desenvolver a EDQ em 1930, Max Born, Werner Heisenberg, Pascual Jordan e Paul Dirac descobriram que no cálculo perturbativo muitas das integrais eram divergentes. As divergências aparecem nos cálculos envolvendo diagramas de Feynman com laços fechados contendo momentos internos de partículas virtuais.

Embora as partículas virtuais obedeçam a conservação de energia e momento, elas podem assumir qualquer valor para estas quantidades, mesmo aqueles que não são permitidos pela relação relativística de energia-momento para a massa observada destas partículas. Isto é, $E^2 - |\vec{p}|^2$ não é, necessariamente, a massa da partícula nesse processo (por exemplo, a massa de um fóton pode ser diferente de zero). Essa partícula é chamado off-shell. Quando há um laço, o momento das linhas internas não é unicamente determinado pelos momentos das linhas externas. A variação da energia de uma partícula no laço pode ser contrabalançada por uma variação igual e oposta na energia de outra partícula também no laço. Então, para encontrar a amplitude de um processo envolvendo um laço deve-se integrar sobre todas as combinações possíveis de energia e momento presentes no interior do laço.

As integrais originadas por este processo são muitas vezes divergentes, i.e, dão como resposta uma quantidade indeterminada, infinita. Um tipo de divergência, é a divergência ultravioleta (UV). Esta pode ser descrita como segue:

- * A região na integral onde todas as partículas do laço têm energia e momento grandes.
- * Comprimentos de onda muito pequenos e flutuações de alta frequência dos campos, na integral de caminho do campo.
- * Tempo próprio muito curto entre a emissão e absorção de uma partícula, se o laço for pensado como uma soma sobre todos os caminhos da partícula.

Então, essas divergências estão relacionadas a fenômenos que ocorrem em distâncias e tempos muito pequenos.

Existem exatamente três diagramas divergentes a nível 1-laço na EDQ.

1. um fóton cria um par elétron-pósitron virtual que, em seguida aniquila-se, este é o diagrama de polarização do vácuo.
2. um elétron que rapidamente emite e absorve um fóton virtual, chamado de auto-energia.
3. um elétron emite um fóton, emite um segundo fóton, e reabsorve o primeiro. Este processo é mostrado na figura 1.1, e é chamado de renormalização do vértice.

Os três diagramas divergentes correspondem a três parâmetros na teoria:

1. a normalização do campo Z.
2. a massa do elétron.
3. a carga do elétron.

A segunda classe de divergências, chamada de divergência infravermelho, é devido as partículas sem massa, como o fóton.

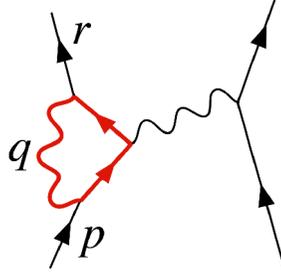


Figura 1.1: Diagrama para contribuição ao espalhamento elétron-elétron na QED. O laço possui uma divergência ultravioleta.

O diagrama da figura 1.1 mostra uma das diversas contribuições a nível 1-laço do espalhamento elétron-elétron em EDQ. O elétron, no lado esquerdo do diagrama, representado pela linha sólida, chega com o 4-momento p^μ e sai com 4-momento r^μ . Ele emite um fóton virtual carregando $r^\mu - p^\mu$ que transfere energia e momento para outro elétron. Mas neste diagrama, antes que isso aconteça, ele emite um fóton virtual carregando um 4-momento q^μ , e reabsorve este depois de emitir um outro fóton virtual. A conservação de energia e momento, não determina o 4-momento q^μ unicamente, por isso todas as possibilidades contribuem igualmente e devemos considera-las, integrando sobre todas.

1.1.2 Relações entre funções de Green

A Lagrangiana da EDQ é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde,

- γ^μ são as matrizes de Dirac;
- ψ é um campo 2-espinor de partículas de spin 1/2;
- $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$, é o "psi barrado" ou adjunto de Dirac;
- A_μ é o 4-potencial covariante;
- $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante de calibre;
- $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o tensor do campo eletromagnético;
- e é a constante de acoplamento, igual a carga do elétron;

As equações de Euler-Lagrange para o campo espinorial são obtidas a partir da equação:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.2)$$

os dois termos dessa última expressão, obtidos a partir da Lagrangiana (1.1), são:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = \partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu), \quad (1.3)$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = - (e\gamma^\mu A_\mu + m) \bar{\psi}. \quad (1.4)$$

Substituindo (1.3) e (1.4) em (1.2) obtemos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m) \bar{\psi} = 0, \quad (1.5)$$

tomando o complexo conjugado:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi = 0. \quad (1.6)$$

Reescrevendo esta última expressão:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = -e (\gamma^\mu A_\mu) \psi, \quad (1.7)$$

onde o termo do lado esquerdo do sinal de igualdade é a equação de Dirac original, ou seja, a equação de movimento para o campo livre, e o lado direito representa a interação com o campo eletromagnético.

Agora vamos obter a equação de movimento para A_μ :

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0, \quad (1.8)$$

desenvolvendo os dois termos desta expressão,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (1.9)$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.10)$$

De onde sai que:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (1.11)$$

assim obtemos a corrente vetorial para o férmion massivo de spin 1/2, já que $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$ faz parte das equações de Maxwell na forma covariante e j^μ é a corrente. Estabelecemos, dessa maneira, um mecanismo para construir um conjunto de correntes, no contexto da álgebra espinorial. Este será útil para determinar relações entre funções de Green perturbativas. Definimos $j_i(x)$ como

$$j_i(x) = \bar{\psi}(x) \Gamma_i \psi(x), \quad (1.12)$$

onde Γ_i são as matrizes (apêndice A) responsáveis pelas propriedades de transformação das correntes. Elas são elementos do conjunto

$$[\hat{1}; \gamma_{2\omega+1}; \gamma_\mu; \gamma_\mu \gamma_{2\omega+1}], \quad (1.13)$$

que caracterizam, respectivamente, as densidades:

- Escalar

$$S(x) = \bar{\psi}(x) [\hat{1}] \psi(x) \quad (1.14)$$

- Pseudo-escalar

$$P(x) = \bar{\psi}(x) [\gamma_{2\omega+1}] \psi(x) \quad (1.15)$$

- Vetorial

$$V_\mu(x) = \bar{\psi}(x) [\gamma_\mu] \psi(x) \quad (1.16)$$

- Axial-vetor

$$A_\mu(x) = \bar{\psi}(x) [\gamma_\mu \gamma_{2\omega+1}] \psi(x), \quad (1.17)$$

em qualquer dimensão par. Em dimensões ímpares as pseudo correntes estão ausentes desde que $\gamma_{2\omega+1}$ não existe. As densidades tensoriais serão consideradas em outra ocasião [9].

Uma importante propriedade do modelo, relativo às relações de simetria, é o valor para o divergente das correntes. Estas são dadas por

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu(x) = 0 \\ \partial_\mu A^\mu(x) = 2mP(x). \end{cases} \quad (1.18)$$

As relações de comutação a tempos iguais podem ser estabelecidas a partir de propriedades do campo fermiônico. Através da derivada do produto das correntes pode-se estabelecer relações entre as funções de Green da teoria e, conseqüentemente, relações de simetria.

Semelhantes relações podem ser construídas com a utilização direta das amplitudes perturbativas na ordem escolhida. Em mais baixa ordem, com o propagador fermiônico

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (1.19)$$

é possível construir funções de n-pontos. Exemplos destas são as funções de um e dois pontos as quais podem ser definidas como:

- i) Funções de um ponto:

$$T^i(k_1, m) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \right\}, \quad (1.20)$$

- ii) Funções de dois pontos:

$$T^{ij}(k_1, m; k_2, m) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \Gamma_j \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}. \quad (1.21)$$

Nas expressões (1.20) e (1.21), k_1 e k_2 representam escolhas arbitrárias para os momentos internos. Na função de dois pontos a quantidade $q = k_1 - k_2$ será identificada como o momento externo. Por sua vez a quantidade $Q = k_1 + k_2$ será completamente indefinida. Isto significa que *qualquer dependência de alguma amplitude física na quantidade Q implicará em ambiguidades.*

Na nossa notação os índices superiores, das funções de um e dois pontos, estão relacionados com os respectivos índices de Lorentz, por isso, $\Gamma_i = \gamma_\mu$ implica em $T_\mu^V(k_1, m)$, onde, o índice superior V refere-se à uma quantidade vetorial. Da mesma maneira, $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ implicam em $T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_2, m)$, onde, os índices superiores VV referem-se a uma quantidade tensorial (ou vetor-vetor). Para simplificar, de agora em diante, removeremos o argumento das funções de dois pontos desde que nenhum papel será desempenhado por este na presente discussão. No que diz respeito às funções de um ponto, manteremos a rotulação pois existem diferentes possibilidades que devem ser distinguidas. As relações entre funções de Green podem ser obtidas através da identificação de identidades sem que qualquer aspecto relacionado à operação de integração seja utilizado. Como tal consideremos a identidade

$$q^\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} = \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} - \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]}. \quad (1.22)$$

Depois de tomar o traço e integrar sobre o momento k em ambos os lados, obtemos uma relação entre duas amplitudes físicas.

$$q^\mu T_{\nu\mu}^{VV} = T_\nu^V(k_2, m) - T_\nu^V(k_1, m), \quad (1.23)$$

Esta relação é válida para qualquer dimensão espaço-temporal e implica que quando a amplitude VV é explicitamente calculada e, depois disso, contraída com o momento externo, no resultado então obtido, deve ser possível identificar a diferença entre duas funções de um ponto, previamente calculadas no contexto do mesmo procedimento. A relação acima deve ser satisfeita sem que qualquer escolha seja feita para as eventuais arbitrariedades envolvidas. O valor identicamente nulo para o lado direito da equação (1.23), o qual reflete a *conservação da corrente vetorial* ou a *invariância de calibre*, deve ser obtido após a utilização de propriedades universais das estruturas divergentes envolvidas as quais devem implicar na anulação automática das estruturas de um ponto, conforme exigido pelo teorema de Furry. Em outras palavras, as condições para um cálculo consistente da função VV devem ser as mesmas, do ponto de vista matemático, as quais são necessárias para um cálculo consistente da função de um ponto vetorial. Este aspecto específico é utilizado, no presente trabalho, para as discussões a respeito da existência de possíveis *relações de consistência* nas manipulações envolvendo divergências em cálculos perturbativos em 2,3 e 4 dimensões espaço-temporais do que nos ocuparemos nos próximos capítulos.

1.2 Técnicas de Regularização e métodos alternativos

Dado que a quantidade " $\infty - \infty$ " (infinito menos infinito) não é bem definida, e a fim de admitir a idéia de cancelar divergências, as integrais divergentes são manipuladas usando a teoria de limites, em um processo conhecido como regularização. Trata-se de uma modificação essencialmente arbitrária no integrando, de um laço, denominada *regulador*.

Este pode fazer com que energias e momentos grandes decresçam rapidamente de maneira que as integrais tornem-se convergentes ou finitas.

Muitos tipos diferentes de reguladores são utilizados nos cálculos de TQC, cada um com suas vantagens e desvantagens. Um dos mais populares no uso moderno é a RD, que controlou as integrais divergentes considerando-as em um espaço com um número fictício de dimensões fracionárias. Outro é a PV, que adiciona partículas fictícias a teoria com massas muito grandes, de tal forma que integrais de laços envolvendo partículas massivas cancelam os laços com momentos grandes.

No entanto, sérios problemas conceituais de TQCp estão relacionados as técnicas de regularização. É bem conhecido o fato da EDQ planar que, quando considerada no contexto das técnicas de regularização, fornece uma resposta ambígua para questões fundamentais onde a geração dinâmica de massa para o fóton é diferente de zero [10]. De fato, utilizando PV obtem-se massa nula enquanto que com a RD obtem-se massa diferente de zero. Como observado em [10] não há uma regra para decidir por um único regulador. PV é preferido por uns, pois procede com expressões mais regulares, entretanto, outros [11] preferem a RD pelo fato de PV fornecer o valor indesejado da massa nula para o fóton, neste caso em específico. De fato, as técnicas de regularização desempenham um papel fundamental em TQCp. Desde o advento de técnicas como PV e RD, talvez as mais utilizadas das técnicas, muitas outras foram criadas. Abaixo, listamos algumas das técnicas que comumente encontramos em trabalhos onde problemas envolvendo TQCp são considerados, seguidas do ano em que foram propostas:

- Regularização de Pauli-Villares [5], 1949;
- Regularização Dimensional [6], 1972;
- Regularização por Redução Dimensional [12], 1979;
- Regularização pelo método dos Operadores [13], 1986;

Tais técnicas consistem em um algoritmo com o qual é possível manipular integrais divergentes presentes no cálculo de amplitudes físicas no contexto de TQCp. Diante de tamanha variedade de diferentes algoritmos, podemos formular a seguinte pergunta: Por que os Físicos, e também os Matemáticos, propuseram tantas técnicas de regularização? A resposta a esta pergunta nos remete a questões como “*restrição de aplicabilidade*” e “*ambiguidade do regulador*”, propriedades indesejáveis mas que, no entanto, parecem ser de caráter intrínseco a tais técnicas. A restrição de aplicabilidade refere-se a impossibilidade de, no contexto específico de uma determinada técnica, calcular alguma amplitude física divergente, enquanto que, ambiguidade do regulador refere-se a resultados diferentes obtidos com o cálculo de uma mesma amplitude no contexto de diferentes técnicas. Todas as técnicas aqui citadas possuem estas propriedades. É possível ainda, e muito provável, que nenhuma técnica de regularização, até então proposta, esteja isenta destas propriedades. Portanto, uma resposta especulativa a esta questão, é a possibilidade de que Físicos e Matemáticos tenham proposto tantas técnicas com o intuito de encontrar um algoritmo livre destas propriedades.

O fato, de que os fenômenos previstos por uma teoria não devam depender das diferentes técnicas de cálculo empregadas para descrevê-los, nos permite questionar sobre a possibilidade de que as técnicas de regularização, como sendo apenas um procedimento matemático para o cálculo de grandezas físicas no contexto de TQCp, devam ser equivalentes, no sentido de que deveriam nos fornecer os mesmos resultados para uma mesma grandeza física calculada. Dito isto, é razoável querer formular uma demonstração onde a equivalência das técnicas é comprovada. Mas justo pelas restrições de aplicabilidade e ambiguidade do regulador, que tal tarefa não deve ser fácil ou, nem mesmo possível. Pois, devido a estas propriedades, é que uma técnica pode ser aplicada ao cálculo de uma grandeza física e diferir em seu resultado quando comparado ao resultado obtido com o uso de outra técnica, no cálculo da mesma grandeza física (ambiguidade do regulador) ou, ainda, é possível que nem se possa comparar os resultados, já que o problema em questão pode estar dentre aqueles relacionados a restrição de aplicabilidade de uma das técnicas. Podemos citar como exemplo, a esta questão, o fato da RD não ser aplicável ao cálculo de amplitudes axiais, aquelas que contêm a matriz γ_5 em $(1 + 3)D$ ou suas análogas, em outras dimensões. Também é verdade que quantidades topológicas que só existem em dimensões inteiras figuram dentre as restrições de aplicabilidade da RD. No caso de PV, a técnica faz com que a teoria perca a simetria de calibre além, como já dissemos, de expressar a ambiguidade do regulador. Sendo assim, como exigir que tais técnicas sejam equivalentes se nem mesmo são aplicáveis ao cálculo de uma mesma grandeza física e, ainda, quando o são, podem fornecer resultados ambíguos? Então, exigir que técnicas de regularização sejam equivalentes para o cálculo de quantidades físicas, como qualquer método matemático que não devesse intervir nos resultados previstos pela teoria, só faz sentido em situações específicas onde as técnicas podem ser aplicadas e não apresentam ambiguidade entre os resultados, fora isso, não pode-se garantir qualquer equivalência entre as técnicas e a tentativa de atribuir um possível caráter de universalidade, é uma atitude ingênua.

O fato das técnicas de regularização possuírem estas propriedades, leva a inconsistência no cálculo de amplitudes físicas divergentes, no contexto de TQCp. Portanto, a escolha por uma única técnica de regularização para calcular as predições da teoria nos leva a comprometer a consistência da própria teoria. Assim, nos deparamos com uma questão preocupante: Como garantir que ao propormos uma nova TQCp e efetuarmos os cálculos de suas eventuais amplitudes físicas divergentes e, conseqüentemente, das grandezas físicas, não estaremos comprometendo os resultados e, portanto, a consistência da teoria? Pretendemos, neste trabalho, contribuir para uma resposta a esta questão.

É neste contexto que buscamos um caminho alternativo a manipulação de amplitudes físicas divergentes. A utilização do método desenvolvido por O. A. Battistel [7], um procedimento autoconsistente e universal, sem restrições de aplicabilidade conhecidas até o momento, e sem a necessidade de um regulador, elemento que define uma técnica de regularização. De fato, o procedimento que escolhemos, para manipular as integrais di-

vergentes, não consiste em uma técnica de regularização e, até onde tem sido aplicado [14] tem apresentado-se como uma alternativa robusta quando comparada as técnicas de regularização comumente utilizadas. O robusto, como veremos, está justamente relacionado com a consistência da teoria, rigorosamente, requisitada a cada etapa do cálculo das amplitudes físicas divergentes. O objetivo específico deste trabalho é apresentar em detalhes a aplicação desta técnica e sempre que possível ressaltar suas vantagens com relação as técnicas de regularização. Este paralelo é de fundamental importância para justificar o apreço da técnica que utilizamos, no entanto, como já dissemos, o foco deste trabalho é detalhar a implementação da técnica e ressaltar as suas vantagens e não o de apresentar um estudo sobre as técnicas de regularização. Com este fim, escolhemos como cenário a EDQ. Durante muitos anos discutiu-se as questões conceituais da EDQ diretamente relacionadas com os aspectos operacionais das técnicas de regularização e, ainda hoje, não há um consenso sobre tais questões, como podemos observar nestes trabalhos [10], [15], [16]. As aplicações da EDQ como um modelo para diversos fenômenos físicos, alguns já citados aqui, também não figuram no foco deste trabalho, que visa apenas os aspectos teóricos relevantes aos cálculos das amplitudes físicas divergentes, oriundas desta teoria, por isso, não consideraremos o estudo de nenhuma das aplicações da EDQ, enquanto modelo para determinados fenômenos físicos.

O método desenvolvido por O. A. Battistel baseia-se em observações que culminam em determinadas relações entre integrais com o mesmo grau de divergência, denominadas Relações de Consistência (RC). As RC têm mostrado-se [14] um artifício necessário e suficiente para garantir uma TQCp livre de ambiguidades. O método de O. A. Battistel é potencialmente instrutivo pois fornece um esquema único e universal para o cálculo de amplitudes físicas divergentes e porque não necessita de nenhum tipo de regulador para calcular integrais divergentes já que estas não são manipuladas, calculadas, no contexto do método, a medida que uma nova regra de Feynman é implementada, anterior a de integração nos laços. Este insight garante uma vantagem ao método, pois como já comentamos, certos resultados são fruto de um regulador em particular [10]. As RC são constituídas a partir do teorema de Furry, relações entre as funções de Green e identidades de Ward-Slavnov-Taylor, preservando, com isso, as simetrias da teoria e tornando-a autoconsistente a medida que esta torna-se livre de ambiguidades. Esta abordagem, autoconsistente, é um atributo exclusivo do método de O. A. Battistel e, por isso, nos referimos, neste trabalho, a uma teoria abordada no contexto deste método de TQCp autoconsistente.

Uma outra abordagem possível, mas que não consideraremos neste trabalho, para uma TQCp é a chamada *TQCp causal* [4], onde as divergências UV são evitadas desde o início, através da realização de cálculos bem definidos com operações matemáticas apenas no âmbito da teoria da distribuição. No entanto o método é bastante técnico e exige um elevado nível de conhecimento matemático.

CAPÍTULO 2

A ESTRATÉGIA PARA O CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN

O método que utilizaremos nas investigações tem sido aplicado com sucesso em diferentes problemas onde o papel das divergências típicas dos cálculos perturbativos desempenha papel importante. Entre estes estudos podemos citar: **violação das simetrias de Lorentz e CPT induzida por correções Radiativas** [18, 19, 20, 21, 22], **o poder de predição do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)**, [23] [24][25] [26, 27, 28, 29], **anomalias em identidades de ward para funções de três pontos** [30], [31], [32], **ambiguidades e relações de simetria em amplitudes divergentes envolvendo densidades fermiônicas tensoriais** [33], **arbitrariedades, anomalia AV e geração de massa em D=1+1**, [30][34].

Ao invés de especificar alguma regularização, adotamos uma estratégia alternativa [35] para realizar todos os cálculos. A fim de justificar as manipulações intermediárias, assumiremos a presença de uma distribuição regularizadora genérica apenas de modo implícito. Isto pode ser esquematicamente representado por

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) &\rightarrow \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aqui os Λ_i 's são parâmetros da distribuição genérica $G(k, \Lambda_i^2)$ que, além de garantir o caráter finito da integral modificada, deve possuir duas propriedades bastante gerais. Ela deve ser par no momento de integração k para que a invariância de Lorentz seja preservada, bem como deve possuir um “limite de conexão” bem definido, i.e.,

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k^2, \Lambda_i^2) = 1. \quad (2.2)$$

A primeira das propriedades exigidas implica na anulação de integrais ímpares no momento de integração enquanto que a segunda garante, em particular, que os valores das integrais finitas de uma amplitude não serão modificados. Note que estas exigências são completamente gerais e estão de acordo com qualquer regularização razoável. Depois destas suposições podemos manipular o integrando das integrais divergentes usando identidades para gerar uma expressão matemática onde todas as divergências estarão contidas em estruturas independentes dos momentos (arbitrários) internos. Devido ao fato de que em amplitudes perturbativas sempre temos propagadores, uma identidade adequada para ser utilizada a fim de viabilizar a forma matemática desejada é a seguinte

$$\frac{1}{(k+k_i)^2-m^2} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1} [(k+k_i)^2 - m^2]}, \quad (2.3)$$

onde k_i é (em princípio) uma escolha arbitrária para o rótulo do momento carregado por uma linha interna. O valor de N deve ser escolhido de modo adequado a fim de evitar esforço algébrico desnecessário. Ele deve ter o menor valor possível que permita o último dos termos da soma acima estar presente em uma integral finita. Como consequência, todas as partes dependentes dos momentos das amplitudes podem ser integradas sem quaisquer restrições devido à exigência do limite de conexão. Nas estruturas divergentes obtidas deste modo, por outro lado, nenhuma suposição adicional é assumida e, na presente discussão, elas serão escritas como uma combinação de objetos básicos. Em 2D eles são dados por

$$\nabla_{\mu\nu}^{(2)} = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \quad (2.4)$$

$$i_{log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (2.5)$$

Em 3D, por outro lado, eles são

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)} = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \quad (2.6)$$

$$I_{lin}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (2.7)$$

e em 4D

$$\begin{aligned} \square_{\alpha\beta\mu\nu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\beta}k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\nu}k_{\beta}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\mu}k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\Delta_{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (2.9)$$

$$\nabla_{\mu\nu}^{(4)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\nu}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)}, \quad (2.10)$$

$$I_{log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (2.11)$$

$$I_{quad}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (2.12)$$

É importante enfatizar que com esta estratégia é possível mapear as expressões finais obtidas nos resultados correspondentes a outras técnicas, devido ao fato de que todos os passos são perfeitamente válidos dentro de prescrições de regularizações razoáveis, incluindo a técnica da Regularização Dimensional (RD). É necessário para tal apenas calcular as estruturas divergentes obtidas de acordo com o método específico com o qual desejamos estabelecer o mapeamento.

Depois das definições estabelecidas, podemos considerar o cálculo de amplitudes físicas. Para tal tomaremos a função de um ponto vetorial assim como a função de dois pontos tensorial (Vetor-Vetor). Estas amplitudes estão relacionadas através de relações entre funções de Green (1.23), bem como em relações de simetria, para as quais, em seções futuras, verificaremos sobre que condições a correspondente identidade de Ward deve ser preservada.

CAPÍTULO 3

CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN

3.1 Introdução

Como será visto no que se segue, a fim de que possamos realizar as investigações pretendidas, algumas integrais de Feynman terão que ser manipuladas e calculadas. Neste capítulo antecipamos quais são estas integrais e apresentamos o cálculo destas no contexto da estratégia que adotamos. Estas estruturas matemáticas são definidas pelas expressões abaixo.

- Com um propagador:

$$\left[(I_1); (I_1)_\mu \right] = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{[1; k_\mu]}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \quad (3.1)$$

- Com dois propagadores:

$$\left[(I_2); (I_2)_\mu; (I_2)_{\mu\nu} \right] = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{[1; k_\mu; k_\mu k_\nu]}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \quad (3.2)$$

Para especificar a dimensão em que se deseja calcular essas integrais basta estabelecer o valor de ω conforme a dimensão desejada. Assim, para as dimensões espaço-temporais do nosso interesse, 2, 3 e 4, temos $\omega = 1$, $\omega = \frac{3}{2}$ e $\omega = 2$, respectivamente.

3.2 Cálculo das integrais de Feynman em 2D

Conforme foi dito, basta estabelecer o valor $\omega = 1$ nas expressões (3.1) e (3.2) que obtemos as integrais desejadas na dimensão espaço-temporal dois.

3.2.1 Cálculo de I_1

O primeiro passo a ser considerado para o cálculo de uma das integrais das expressões (3.1) e (3.2), no contexto da estratégia de cálculo descrita no capítulo 2, é efetuar a contagem de potência dos k 's, no numerador e no denominador do integrando, para, com isso, verificar se a integral é divergente ou finita. No caso particular da (I_1) observamos que esta é uma integral divergente. Portanto, fazemos uso da identidade (2.3) e obtemos o seguinte resultado

$$I_1 = \int_{\Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (3.3)$$

O primeiro termo do lado direito do sinal de igualdade é uma integral divergente e a identificamos como o objeto básico divergente dado pela expressão (2.5), assim,

$$i_{\log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (3.4)$$

O segundo termo do lado direito do sinal de igualdade é uma integral finita. Após aplicarmos a parametrização (B.4), obtemos um valor identicamente nulo, portanto

$$(I_1) = i_{\log}(m^2) \quad (3.5)$$

3.2.2 Cálculo de $(I_1)_{\mu}$

Pela contagem de potência dos k 's, no numerador e no denominador do integrando, observamos que a $(I_1)_{\mu}$ é uma integral divergente. Aplicando a identidade (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} (I_1)_{\mu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad - k_1^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - 2k_1^{\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] (k_{\mu})}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nessa expressão, todos os termos ímpares no momento de integração k , o primeiro e o segundo termos do lado direito do sinal de igualdade, são identicamente nulos devido a imposição da preservação da invariância de Lorentz no processo de regularização. O terceiro termo é uma integral divergente e deve ser escrita em termos dos objetos básicos divergentes definidos em (2.4) e (2.5). O quarto termo é uma integral finita e com o uso da parametrização (B.5) obtemos um valor identicamente nulo para ela. Com isso teremos

$$(I_1)_{\mu} = -k_1^{\nu} \nabla_{\mu\nu}^{(2)} - k_1^{\nu} g_{\mu\nu} i_{\log}(m^2). \quad (3.7)$$

3.2.3 Cálculo de I_2

Pela contagem de potência dos k 's, observamos que a I_2 é uma integral finita e, por isso, pode ser calculada explicitamente. Com uso da parametrização (B.4) obtemos que

$$I_2 = \frac{i}{(4\pi)} Z_0^{-1}(q^2; m^2). \quad (3.8)$$

Onde introduzimos, em notação simplificada, as funções de estrutura para as partes finitas de funções de dois pontos em 2D, definidas como

$$Z_k^{-1}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = \int_0^1 dz \frac{z^k}{q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}. \quad (3.9)$$

A integração da expressão acima, sobre o parâmetro de Feynman z , pode ser facilmente efetuada mas, para o presente propósito isto não é relevante, portanto, mantemos a representação integral.

3.2.4 Cálculo de $(I_2)_\mu$

Pela contagem de potência dos k 's, observamos que a $(I_2)_\mu$ também é uma integral finita. Para calculá-la utilizamos a parametrização (B.4) e, dessa forma, obtemos que

$$(I_2)_\mu = -\frac{Q_\mu}{2} \left[\frac{i}{(4\pi)} Z_0^{-1}(q^2; m^2) \right]. \quad (3.10)$$

Observando o resultado encontrado anteriormente para (I_2) , expressão (3.8), podemos escrever que

$$(I_2)_\mu = -\frac{Q_\mu}{2} I_2. \quad (3.11)$$

3.2.5 Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$

Fazendo a contagem de potência dos k 's, observamos que a $(I_2)_{\mu\nu}$ é uma integral divergente. Aplicando a identidade (2.3) convenientemente obtemos

$$\begin{aligned} (I_2)_{\mu\nu} &= \int_\Lambda \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O primeiro dos termos do lado direito da igualdade é uma integral divergente e não a manipulamos. Para a segunda integral aplicamos a parametrização (B.5) e para a terceira a parametrização (B.8) e, dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
(I_2)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\nabla_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{2}i_{\log}(m^2) \\
&+ \frac{i}{(4\pi)} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[Z_2^{-1}(q^2; m^2) - \frac{Z_0^{-1}(q^2; m^2)}{4} \right] \\
&+ \frac{i}{(4\pi)} Q_\mu Q_\nu \frac{Z_0^{-1}(q^2; m^2)}{4}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3 Cálculo das integrais de Feynman em 3D

As integrais que precisamos calcular em 3D são estabelecidas tomando $\omega = \frac{3}{2}$ nas expressões (3.1) e (3.2). Feito isto, consideramos uma a uma as integrais.

3.3.1 Cálculo de I_1

Pela contagem de potência dos k 's constatamos que a (I_1) é uma integral divergente, assim, aplicamos a identidade (2.3) e obtemos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
&- \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]}{(k^2 - m^2)^2} \\
&+ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2]}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

O primeiro termo do lado direito do sinal de igualdade refere-se a uma integral linearmente divergente e é definida em termos do objeto básico (2.7), assim

$$I_{lin}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \tag{3.15}$$

Eliminando os termos ímpares momento de integração k , e considerando a parametrização (B.5) obtemos que

$$(I_1) = I_{lin}(m^2) \tag{3.16}$$

3.3.2 Cálculo de $(I_1)_\mu$

A contagem de potência dos k 's nos revela que a integral $(I_1)_\mu$ é divergente. Assim aplicamos a identidade (2.3), que nos fornece

$$\begin{aligned}
 (I_1)_\mu &= \int_\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)} \\
 &\quad - \int_\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\
 &\quad + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
 &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^3 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_1)^2 - m^2]}. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Eliminando os termos ímpares momento de integração k , considerando a parametrização (B.6) e definindo as integrais divergentes em termos dos objetos básicos (2.6) e (2.7), obtemos que

$$(I_1)_\mu = -k_{1\nu} \nabla_{\mu\nu}^{(3)} - k_{1\nu} I_{lin}(m^2). \tag{3.18}$$

3.3.3 Cálculo de I_2

A contagem de potência dos k 's nos revela que I_2 em 3D, assim como em 2D, é uma integral finita e, por isso, pode ser calculada diretamente. Sendo assim, consideramos a parametrização (B.4) e obtemos que

$$(I_2) = \left(\frac{i}{4\pi}\right) \frac{1}{2} \left[Z_0^{-1/2}(q^2, m^2) \right]. \tag{3.19}$$

Onde o resultado do cálculo das integrais finitas foi escrito, com notação simplificada, em termos das funções

$$Z_k^{-1/2}(q^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2) = (-) \frac{1}{2} \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{1/2}}. \tag{3.20}$$

3.3.4 Cálculo de $(I_2)_\mu$

Para $(I_2)_\mu$ a contagem de potência dos k 's nos revela que esta é uma integral divergente. Deste modo, aplicamos a identidade (2.3) e obtemos que

$$\begin{aligned}
 (I_2)_\mu &= \int_\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\
 &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] k_\mu}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
 &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

De posse dessa expressão, seguimos o procedimento idêntico aos casos anteriormente considerados. Tomamos auxílio nas parametrizações (B.5) e (B.8) e escrevemos os resultados das integrais finitas em termos das funções definidas em (3.20). Assim,

$$(I_2)_\mu = - \left(\frac{i}{4\pi} \right) \frac{1}{4} Q_\mu \left[Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2) \right]. \quad (3.22)$$

Para chegar a este resultado utilizamos, ainda, a relação dada por

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2) = \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2) \quad (3.23)$$

3.3.5 Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$

Considerando a potência dos k 's para a $(I_2)_{\mu\nu}$ observamos que esta é uma integral divergente, portanto, aplicamos a identidade (2.3) ao seu integrando e, dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} (I_2)_{\mu\nu} &= \int_\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2][2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2][2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Novamente, eliminando os termos ímpares, aplicando as parametrizações (B.6) e (B.9), e a definição (3.20) para o resultado do cálculo das integrais finitas, obtemos

$$\begin{aligned} (I_2)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu}^{(3)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_{lin}(m^2) \\ &\quad + \left(\frac{i}{4\pi} \right) \frac{1}{2} [q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} q^2] \left[\frac{Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2)}{8} - \frac{[m^2] Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2)}{2q^2} - \frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2q^2} \right] \\ &\quad + \left(\frac{i}{4\pi} \right) \frac{1}{8} [Q_\mu Q_\nu] \left[Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para chegarmos a este resultado utilizamos ainda, a relação

$$Z_2^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2) = -\frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2q^2} + \frac{3}{8} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2) - \frac{m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2)}{2q^2} \quad (3.26)$$

juntamente com (3.23).

3.4 Cálculo das integrais de Feynman em 4D

Na dimensão espaço-temporal quatro, as integrais de Feynman de interesse para nossos estudos são determinadas tomando $\omega = 2$ nas expressões (3.1) e (3.2). Feito isto, consideramos uma à uma essas integrais e seus respectivos desenvolvimentos.

3.4.1 Cálculo de I_1

Considerando a contagem de potência dos k 's, observamos que I_1 é uma integral divergente e, por isso, aplicamos a identidade (2.3) com $N = 2$, a partir da qual obtemos que

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
& - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_1)^2 - m^2]}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Seguindo o procedimento descrito nos casos anteriores, utilizando a parametrização (B.6) e definindo as integrais divergentes em termos dos objetos básicos (2.9) e (2.12), obtemos

$$(I_1) = I_{quad}(m^2) + k_{1\mu}k_{1\nu} [\Delta_{\mu\nu}]. \tag{3.28}$$

3.4.2 Cálculo de $(I_1)_{\mu}$

Considerando a contagem de potência dos k 's, observamos que I_1 também é uma integral divergente e, por isso, aplicamos, novamente, a identidade (2.3), a partir da qual obtemos que

$$\begin{aligned}
(I_1)_{\mu} = & + \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_{\mu})}{(k^2 - m^2)} \\
& - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] (k_{\mu})}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2 (k_{\mu})}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^3 (k_{\mu})}{(k^2 - m^2)^4} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^4 (k_{\mu})}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_1)^2 - m^2]}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Seguindo o procedimento padrão, aplicando a parametrização adequada, neste caso a expressão (B.7), e definindo as integrais divergentes em termos dos objetos básicos (2.8)-(2.12), obtemos que

$$\begin{aligned} (I_1)_\mu &= -k_{1\mu} I_{quad}(m^2) - k_{1\beta} \left[\nabla_{\beta\mu}^{(4)} \right] - \frac{1}{3} k_{1\beta} k_{1\alpha} k_{1\nu} [\square_{\alpha\beta\mu\nu}] \\ &\quad - \frac{1}{3} k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} [\triangle_{\alpha\beta}] + \frac{1}{3} k_1^2 k_{1\nu} [\triangle_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.4.3 Cálculo da I_2

A contagem de potência dos k 's nos revela que I_2 em 4D, diferentemente do que ocorreu nas dimensões anteriormente consideradas, é divergente. Assim, para que possa ser calculada, no contexto da estratégia que adotamos, devemos primeiramente manipulá-la adequadamente. Isto é feito com a aplicação da identidade (2.3). Isto nos fornece

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando agora a parametrização (B.8) e definindo a integral divergente em termos do objeto básico (2.11), obtemos

$$(I_2) = I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0^0(q^2; m^2). \quad (3.32)$$

Aqui introduzimos, em notação simplificada, as estruturas básicas para funções de dois pontos em 4D, definidas por

$$Z_k^0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left(\frac{q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}{(-\lambda^2)} \right). \quad (3.33)$$

3.4.4 Cálculo de $(I_2)_\mu$

Novamente pela contagem de potência dos k 's nos deparamos com uma integral divergente a partir da qual, aplicando a identidade (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
(I_2)_\mu &= \int_\wedge \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] [2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Usando as parametrizações (B.6) e (B.9), escrevendo as integrais divergentes em termos dos objetos básicos (2.8) – (2.12) e o resultado das integrais finitas conforme a definição (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
(I_2)_\mu &= -\frac{1}{2} Q_\alpha \Delta_{\alpha\mu} \\
&\quad - \frac{1}{2} Q_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0^0(q^2; m^2) \right\}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

3.4.5 Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$

Aplicando a identidade (2.3), dado o caráter divergente, revelado pela contagem de potência dos k 's, da $(I_2)_{\mu\nu}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 (I_2)_{\mu\nu} = & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
 & - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
 & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
 & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
 & - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
 & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] [2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
 & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]^2 [2(k \cdot k_1) + k_1^2] k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
 & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
 & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2] [2(k \cdot k_1) + k_1^2]^2 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
 & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_1) + k_1^2]^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Para completar o cálculo, eliminamos os termos ímpares, aplicamos as parametrizações (B.7) e (B.10), e escrevemos o resultado das integrais finitas em termos da definição (3.33). Assim,

$$\begin{aligned}
 (I_2)_{\mu\nu} = & + \frac{1}{2} \nabla_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) - (k_1^2 + k_2^2) \frac{1}{4} \Delta_{\mu\nu} - (k_1^2 + k_2^2) \frac{1}{4} g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) \\
 & + (k_{1\xi} k_{1\beta} + k_{2\xi} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\xi}) \frac{1}{6} \{ \square_{\mu\nu\beta\xi} + g_{\xi\beta} \Delta_{\mu\nu} + g_{\xi\nu} \Delta_{\beta\mu} + g_{\xi\mu} \Delta_{\beta\nu} \} \\
 & + (k_{1\xi} k_{1\beta} + k_{2\xi} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\xi}) \frac{1}{6} \{ g_{\xi\beta} g_{\mu\nu} + g_{\xi\nu} g_{\beta\mu} + g_{\xi\mu} g_{\beta\nu} \} I_{\log}(m^2) \\
 & + \frac{i}{(4\pi)^2} [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \left[-Z_2^0(q^2; m^2) + \frac{1}{4} Z_0^0(q^2; m^2) \right] \\
 & - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{Q_\mu Q_\nu}{4} [Z_0^0(q^2; m^2)]. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

O resultado acima completa o conjunto necessário de ingredientes para o desenvolvimento das investigações que procederemos nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 4

AMPLITUDES FÍSICAS EM 2D

Neste capítulo efetuaremos o cálculo das amplitudes físicas presentes na identidade (1.13). Para este fim seguiremos sempre um mesmo procedimento. Primeiramente efetuamos o cálculo dos traços de Dirac para colocar as amplitudes em termos de uma combinação de integrais de Feynman. Então notaremos que as integrais necessárias para tal são precisamente aquelas que calculamos no capítulo anterior. Substituiremos o resultado lá obtido e obteremos uma expressão para as amplitudes consideradas.

4.1 Cálculo da Função de Green de Um Ponto Vetorial

Para o cálculo da função de Green de um ponto vetorial em 2D [34] fazemos $\omega = 1$ e $\Gamma_i = \gamma_\mu$ na expressão (1.10) e, assim, obtemos a expressão desejada, dada por

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}. \quad (4.1)$$

Para escrevermos T_μ^V como uma combinação de integrais de Feynman, primeiro utilizamos a seguinte identidade

$$\frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} = \frac{(\not{k} + \not{k}_1) + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]}, \quad (4.2)$$

que nos fornece

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{(\not{k} + \not{k}_1) + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (4.3)$$

Em seguida, tendo

$$(\not{k} + \not{k}_1) = (k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha. \quad (4.4)$$

Ficamos com

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{(k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}, \quad (4.5)$$

ou

$$T_\mu^V(k_1, m) = Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k+k_1)^\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2]} + Tr \{ \gamma_\alpha \} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{m}{[(k+k_1)^2 - m^2]}. \quad (4.6)$$

Após tomarmos os traços de Dirac (Apêndice A), obtemos

$$T_\mu^V(k_1, m) = 2 \left\{ \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2]} + k_{1\mu} \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (4.7)$$

Isto significa que devemos calcular as integrais de Feynman

$$[(I_1); (I_1)_\mu] = \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k_\mu]}{[(k+k_1)^2 - m^2]}. \quad (4.8)$$

Substituindo os resultados obtidos para estas integrais, equações (3.5) e (3.7), na expressão (4.7), temos

$$T_\mu^V(k_1, m) = -2k_1^\alpha [\nabla_{\alpha\mu}^{(2)}]. \quad (4.9)$$

4.2 Cálculo da Função de Green de Dois Pontos Tensorial

Agora, consideramos o cálculo da função de Green de dois pontos tensorial em 2D, para isso, tomamos $\omega = 1$, $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ na expressão (1.11), assim, obtemos a seguinte expressão

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\bar{k} + \bar{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\bar{k} + \bar{k}_2) - m} \right\}. \quad (4.10)$$

A amplitude acima é comumente denominada Tensor de Polarização do Vácuo.

Para escrever $T_{\mu\nu}^{VV}$ como uma combinação de integrais de Feynman, primeiro utilizamos a seguinte identidade

$$\gamma_\mu \frac{1}{(\bar{k} + \bar{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\bar{k} + \bar{k}_2) - m} = \frac{\gamma_\mu (\bar{k} + \bar{k}_1 + m)}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \frac{\gamma_\nu (\bar{k} + \bar{k}_2 + m)}{[(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (4.11)$$

Com isso, obtemos a expressão para T^{VV}

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu (\bar{k} + \bar{k}_1 + m)}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \frac{\gamma_\nu (\bar{k} + \bar{k}_2 + m)}{[(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} \quad (4.12)$$

Utilizando o resultado dado pela expressão (4.4) podemos escrever

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu [(k+k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m] \gamma_\nu [(k+k_2)^\beta \gamma_\beta + m]}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (4.13)$$

ou

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &+ Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{m (k+k_2)^\beta}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &+ Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{m (k+k_1)^\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &+ Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Após tomarmos os traços de Dirac (Apêndice A), identificamos a relação

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (T^{PP}), \quad (4.15)$$

onde definimos

$$T_{\mu\nu} = 2 \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_2)_\mu (k+k_1)_\nu]}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} T^{PP} &= - \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \\ &- \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(k+k_2)^2 - m^2]} \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para obter o resultado anterior reorganizamos T^{PP} com a utilização da identidade

$$(k+k_i) \cdot (k+k_j) = \frac{1}{2} [(k+k_i)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m^2] - \frac{1}{2} [(k_i - k_j)^2 - 2m^2]. \quad (4.18)$$

Para finalizar o cálculo da amplitude VV é necessário solucionar as integrais

$$\left[(I_2); (I_2)_\mu; (I_2)_{\mu\nu} \right] = \int_{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k_\mu; k_\mu k_\nu]}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (4.19)$$

Com os resultados (3.8), (3.10) e (3.13) podemos explicitar T^{PP} e $T_{\mu\nu}$. Assim,

$$T^{PP} = -2 [i_{log}] + q^2 \frac{i}{(4\pi)} Z_0^{-1}(q^2; m^2), \quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= 2\nabla_{\mu\nu}^{(2)} + 2g_{\mu\nu}i_{\log} \\
&\quad - \left(\frac{i}{\pi}\right) \frac{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2}{q^2} \left[1 + \frac{(4m^2 - q^2)}{4} Z_0^{-1}(q^2; m^2)\right] \\
&\quad - \left(\frac{i}{4\pi}\right) [q_\mu q_\nu Z_0^{-1}(q^2; m^2)].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Consequentemente, para a expressão correspondente à amplitude tensorial $T_{\mu\nu}^{VV}$, temos

$$T_{\mu\nu}^{VV} = - \left(\frac{i}{\pi}\right) \frac{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2}{q^2} [1 + m^2 Z_0^{-1}(q^2; m^2)] + 2\nabla_{\mu\nu}^{(2)}. \tag{4.22}$$

CAPÍTULO 5

AMPLITUDES FÍSICAS EM 3D

5.1 Cálculo da Função de Green de Um Ponto Vetorial

Para o cálculo da função de Green de um ponto vetorial em 3D tomamos $\omega = \frac{3}{2}$ e $\Gamma_i = \gamma_\mu$ na expressão (1.10), o que nos fornece

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \right\}. \quad (5.1)$$

Para escrever T_μ^V como uma combinação de integrais de Feynman podemos, como nos casos anteriores, primeiro reescrever (5.1) na forma

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{(\not{k} + \not{k}_1) + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.2)$$

Sabendo a definição (4.4) obtemos

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{(k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}, \quad (5.3)$$

ou

$$T_\mu^V(k_1, m) = Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k + k_1)^\alpha}{[(k + k_1)^2 - m^2]} + Tr \{ \gamma_\alpha \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{[(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (5.4)$$

Após tomar os traços de Dirac (Apêndice A), obtemos

$$T_\mu^V(k_1, m) = 2 \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2]} + k_{1\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.5)$$

De onde identificamos as seguintes integrais de Feynman

$$\left[(I_1); (I_1)_\mu \right] = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[1; k_\mu]}{[(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (5.6)$$

Com a obtenção dos resultados (3.16) e (3.18), temos

$$T_\mu^V(k_1, m) = (-) 2k_{1\alpha} \left[\nabla_{\mu\alpha}^{(3)} \right]. \quad (5.7)$$

5.2 Cálculo da Função de Green de Dois Pontos Tensorial

Agora, consideramos o cálculo da função de Green de dois pontos tensorial em 3D, para isso, tomamos $\omega = \frac{3}{2}$, $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ na expressão (1.11) e, com isso, obtemos a seguinte expressão

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (5.8)$$

Essa expressão refere-se ao Tensor de Polarização do Vácuo em 3D.

Para escrever $T_{\mu\nu}^{VV}$ como uma combinação de integrais de Feynman, primeiro reescrevemos (5.8) na forma

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1 + m)}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \frac{\gamma_\nu (\not{k} + \not{k}_2 + m)}{[(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (5.9)$$

e, com o auxílio da expressão (4.4), obtemos

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu [(k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m] \gamma_\nu [(k + k_2)^\beta \gamma_\beta + m]}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (5.10)$$

ou

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_2)^\beta}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &+ Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m (k + k_2)^\beta}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &+ Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m (k + k_1)^\alpha}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &+ Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Após o cálculo dos traços de Dirac (Apêndice A), obtemos o seguinte resultado

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (T^{PP}) + 2im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_\alpha (I_2), \quad (5.12)$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ é o tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita definido por

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu\nu\alpha) \text{ é uma permutação par de } (123), \\ -1 & \text{se } (\mu\nu\alpha) \text{ é uma permutação ímpar de } (123), \\ 0 & \text{nos outros casos (alguns ou todos os índices iguais)} \end{cases} \quad (5.13)$$

e, $T_{\mu\nu}$ e T^{PP} são dadas por (4.19) e (4.20), respectivamente, com a devida mudança na dimensão de integração. A fim de completar o cálculo da amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ devemos avaliar as integrais

$$\left[(I_2); (I_2)_\mu; (I_2)_{\mu\nu} \right] = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[1; k_\mu, k_{\mu\nu}]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.14)$$

Com os resultados obtidos para as integrais, expressões (3.19), (3.22) e (3.25), podemos reescrever as estruturas $T_{\mu\nu}$ e T^{PP} . Assim,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2 \left[\nabla_{\mu\nu}^{(3)} \right] + 2g_{\mu\nu} [I_{lin}(m^2)] \\ &+ \frac{1}{2} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[\left(\frac{q^2 + 4m^2}{q^2} \right) [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)] - \frac{2\sqrt{-m^2}}{q^2} \right] \\ &+ g_{\mu\nu} q^2 [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)] \end{aligned} \quad (5.15)$$

e

$$T^{PP} = -2 [I_{lin}(m^2)] - q^2 [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)]. \quad (5.16)$$

Finalmente, substituindo estes resultados na expressão (5.12), temos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= 2 \left[\nabla_{\mu\nu}^{(3)} \right] \\ &+ \left(\frac{i}{4\pi} \right) [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q^2 + 4m^2}{q^2} \right) [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)] - \frac{\sqrt{-m^2}}{q^2} \right] \\ &- 2im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} q_\alpha [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

CAPÍTULO 6

AMPLITUDES FÍSICAS EM 4D

6.1 Cálculo da Função de Green de Um Ponto Vetorial

Para o cálculo da função de Green de um ponto vetorial em 4D tomamos $\omega = 2$ e $\Gamma_i = \gamma_\mu$ na expressão (1.10), o que nos fornece

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}. \quad (6.1)$$

Para escrever T_μ^V como uma combinação de integrais de Feynman, utilizamos, mais uma vez, a identidade (4.2), assim

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{(\not{k} + \not{k}_1) + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (6.2)$$

Com o auxílio da expressão (4.4), temos que

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{(k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\} \quad (6.3)$$

ou

$$T_\mu^V(k_1, m) = Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k + k_1)^\alpha}{[(k + k_1)^2 - m^2]} + Tr \{ \gamma_\alpha \} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m}{[(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (6.4)$$

Após o cálculo dos traços de Dirac (Apêndice A), obtemos o seguinte resultado

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2]} + k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \right\}. \quad (6.5)$$

De onde identificamos as seguintes integrais de Feynman

$$\left[(I_1); (I_1)_\mu \right] = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[1; k_\mu]}{[(k + k_1)^2 - m^2]}. \quad (6.6)$$

Substituindo os resultados obtidos para estas integrais, expressão (3.28) e (3.30), temos

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \left\{ -k_{1\beta} \nabla_{\beta\mu}^{(4)} - \frac{k_{1\beta} k_{1\alpha} k_{1\nu}}{3} \square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{k_1^2 k_{1\nu}}{3} \Delta_{\nu\mu} + \frac{2}{3} k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} \Delta_{\alpha\beta} \right\}. \quad (6.7)$$

6.2 Cálculo da Função de Green de Dois Pontos Tensorial

Agora, consideramos o cálculo da função de Green de dois pontos tensorial em 4D, para isso, tomamos $\omega = 2$, $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ na expressão (1.11) para obter a seguinte expressão

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (6.8)$$

Essa é a expressão para o Tensor de Polarização do Vácuo em 4D.

Devemos escrever $T_{\mu\nu}^{VV}$ como uma combinação de integrais de Feynman. Para tanto seguimos o procedimento adotado nos casos anteriores. Primeiro reescrevemos (6.8) como

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1 + m)}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \frac{\gamma_\nu (\not{k} + \not{k}_2 + m)}{[(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (6.9)$$

e, em seguida, como

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu [(k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m]}{[(k + k_1)^2 - m^2]} \frac{\gamma_\nu [(k + k_2)^\beta \gamma_\beta + m]}{[(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}, \quad (6.10)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \right\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_2)^\beta}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \right\} \\ &+ Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{m^2}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \right\} \\ &+ Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \right\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{m (k + k_2)^\beta}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \right\} \\ &+ Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \right\} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{m (k + k_1)^\alpha}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Após o cálculo dos traços de Dirac (Apêndice A), obtemos o seguinte resultado

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (T^{PP}). \quad (6.12)$$

Onde as estruturas $T_{\mu\nu}$ e T^{PP} são análogas àquelas definidas em (4.19) e (4.20) com a amplitude mudada na dimensão apropriada de integração.

Com a identidade (4.21) reescrevemos T^{PP} e, com alguma manipulação algébrica, $T_{\mu\nu}$. Obtemos, então

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & 8 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} \\ & + 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{Q_\nu k_\mu + Q_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} \\ & + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{Q_\mu Q_\nu - q_\mu q_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} T^{PP} = & +2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k_1 - k_2)^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} \\ & - 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} + \frac{1}{[(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

A partir dessas expressões identificamos as seguintes integrais de Feynman, além de (3.27),

$$\left[(I_2); (I_2)_\mu; (I_2)_{\mu\nu} \right] = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[1; k_\mu; k_\mu k_\nu]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (6.15)$$

Com os resultados das expressões (3.32), (3.35) e (3.37), as quantidades T^{PP} e $T_{\mu\nu}$ ficam

$$\begin{aligned} T^{PP} = & 4 \left\{ -I_{quad}(m^2) + \frac{q^2}{2} [I_{log}(m^2)] \right. \\ & \left. - \frac{q^2}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(q^2; m^2) \right\} \\ & - [q_\alpha q_\beta] \Delta_{\alpha\beta} \\ & - [Q_\alpha Q_\beta] \Delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{4}{3} [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \left\{ I_{log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{2m^2 + q^2}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \right\} \\ & - [T^{PP}] g_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} = & +4[\nabla_{\mu\nu}^{(4)}] + (q_\alpha q_\beta) \left[\frac{1}{3}\square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{3}\Delta_{\mu\beta}g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\nu} - g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu} \right] \\
& + (q_\alpha Q_\beta - Q_\alpha q_\beta) \left[\frac{1}{3}\square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{3}\Delta_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} + \frac{1}{3}\Delta_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} \right] \\
& + (Q_\alpha Q_\beta) [\square_{\alpha\beta\mu\nu} - \Delta_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - \Delta_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - 3\Delta_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}]. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Deste modo a expressão para a amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ fica

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \frac{4}{3}[q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \left\{ I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \right\} + A_{\mu\nu}. \tag{6.19}$$

CAPÍTULO 7

AMBIGUIDADES, RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES DE GREEN E IDENTIDADES DE WARD

7.1 Introdução

Nos cálculos das amplitudes, realizados no capítulo anterior, foi necessário manipular integrais de Feynman divergentes. O grau de divergência variou desde o logaritmico até o cúbico. Em virtude do grau de divergência envolvido, estas manipulações devem ser feitas com muito cuidado sob pena de contaminar as amplitudes físicas com ambiguidades, o que pode levar à violação de relações algébricas envolvendo as amplitudes, válidas antes que a operação de integração seja efetuada. Como estamos interessados na construção de uma estratégia consistente, antes de prosseguir nesta direção devemos estar certos de que os passos efetuados até aqui possuem a consistência exigida. Com este objetivo podemos nos questionar se as manipulações e os cálculos efetuados preservaram a relação entre funções de Green (1.23) pertinente às amplitudes consideradas. A referida relação, válida em qualquer dimensão, implica que quando a amplitude VV é calculada explicitamente e, após isto, é efetuada a contração desta com o momento externo, no resultado obtido deve ser possível a identificação da diferença entre duas amplitudes vetoriais de um ponto, previamente calculadas no contexto do mesmo método que a amplitude VV teve sua expressão obtida. Neste capítulo nos ocuparemos, da verificação da validade deste relação bem como da identificação e caracterização de possíveis termos ambíguos.

7.2 Ambiguidades

Em todas as funções de Green calculadas, T_ν^V e $T_{\nu\mu}^{VV}$, correspondentes às dimensões 2, 3 e 4, expressões (4.9)-(4.25), (5.7)-(5.16), (6.7)-(6.21), respectivamente, é possível notar a presença de termos onde existem dependências nos momentos internos, que aparecem em

combinações arbitrárias. Esta dependência caracteriza o que chamamos de ambigüidades relacionadas às escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas. Estes termos são identificados a seguir:

Em 2D:

$$T_{\mu}^V(k_1; m) = T_{\mu}^V(amb) = -2(k_1)^{\alpha} [\nabla_{\alpha\mu}^{(2)}]. \quad (7.1)$$

Em 3D:

$$T_{\mu}^V(k_1; m) = T_{\mu}^V(amb) = (-) 2k_{1\alpha} [\nabla_{\mu\alpha}^{(3)}]. \quad (7.2)$$

Em 4D:

$$T_{\mu}^V(k_1; m) = T_{\mu}^V(amb) = 4 \left\{ -k_{1\beta} \nabla_{\beta\mu}^{(4)} - \frac{k_{1\beta} k_{1\alpha} k_{1\nu}}{3} \square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{k_{1\alpha}^2 k_{1\nu}}{3} \Delta_{\nu\mu} + \frac{2}{3} k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} \Delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (7.3)$$

e

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV}(amb) = & + [q_{\alpha} Q_{\beta} - Q_{\alpha} q_{\beta}] \left[\frac{1}{3} \square_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{3} \Delta_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} + \frac{1}{3} \Delta_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} \right] \\ & + Q_{\alpha} Q_{\beta} [\square_{\alpha\beta\mu\nu} - \Delta_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - \Delta_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - 3\Delta_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Onde o "amb" no argumento das funções refere-se apenas a parte ambigua da função. No caso das funções de um ponto o resultado obtido é completamente ambiguo.

7.3 Relações entre funções de Green

No capítulo 1 obtemos a expressão (1.23), as relações entre as funções de Green, que nos servem como guia para estabelecer se o método que utilizamos para o tratamento das amplitudes físicas divergentes é candidato, ou não, a um método consistente. Ou seja, é essencial que as funções de Green de um e dois pontos satisfaçam essas relações, após terem sido calculadas no contexto de uma técnica específica, para que esta tenha a possibilidade de ser uma técnica consistente.

A partir das expressões (4.9)-(4.25), (5.7)-(5.16), (6.7)-(6.21), podemos verificar se os cálculos e manipulações efetuados no contexto do método utilizado neste trabalho preservaram as relações estabelecidas pela expressão (1.23). É importante observar que até o presente momento não efetuamos nenhuma escolha para as arbitrariedades envolvidas nos cálculos das amplitudes físicas consideradas. Assim, temos

- Em 2D:

Contraíndo a expressão (4.25) com o momento externo, $q^\mu = (k_1 - k_2)^\mu$, temos

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 2 (k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(2)}(m). \quad (7.5)$$

A partir desse resultado é possível identificar a diferença de duas funções de Green de um ponto vetoriais. Ou seja,

$$2 (k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(2)}(m) = T_\mu^V(k_2, m) - T_\mu^V(k_1, m). \quad (7.6)$$

Portanto, a relação estabelecida pela expressão (??) foi preservada.

- Em 3D:

Procedendo da mesma maneira que no caso anterior temos

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 2 (k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m). \quad (7.7)$$

De onde temos que

$$2 (k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m) = T_\mu^V(k_2, m) - T_\mu^V(k_1, m). \quad (7.8)$$

E, novamente, a relação (??) é satisfeita.

- Em 4D:

Repetindo os passos anteriores, temos

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = (k_1 - k_2)^\mu A_{\mu\nu}. \quad (7.9)$$

É fácil identificar que isto significa

$$(k_1 - k_2)^\mu A_{\mu\nu} = T_\mu^V(k_2, m) - T_\mu^V(k_1, m). \quad (7.10)$$

Assim, a citada relação entre funções de Green é obedecida ainda com a presença dos objetos potencialmente ambíguos, para todas as dimensões aqui consideradas, o que garante a consistência desejada para as operações realizadas até aqui.

7.4 Identidades de Ward

No que diz respeito as identidades de Ward a análise é igualmente simples. É fácil verificar que as propriedades

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\nu\mu}^{VV} = 0 \quad (7.11)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\nu\mu}^{VV} = 0 \quad (7.12)$$

$$T_\nu^V = 0 \quad (7.13)$$

determinadas pela invariância de gauge, expressão (7.7) e (7.8), e pelo teorema de Furry, expressão (7.9), serão satisfeitas, se (e somente se), as seguintes condições forem garantidas por uma eventual regularização:

- Em 2D

$$\nabla_{\mu\nu}^{(2)reg} = 0, \quad (7.14)$$

- Em 3D

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)reg} = 0 \quad (7.15)$$

- e em 4D

$$\begin{aligned} \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{reg} &= 0 \\ \nabla_{\mu\nu}^{(4)reg} &= 0 \\ \Delta_{\mu\nu}^{reg} &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

As condições acima serão denominadas **Relações de Consistência (RC)**. Elas representam as propriedades que devem ser exigidas a qualquer método de regularização a fim de que se possa fornecer resultados consistentes para o cálculo de amplitudes físicas do cálculo perturbativo, a despeito do possível caráter divergente destas.

Considerando as RC, as expressões (4.9), (4.25), (5.7), (5.17), (6.7) e (6.19), referentes aos resultados obtidos para as funções de um e dois pontos, devem ser reescritas como

Em 2D:

$$T_{\mu}^V(k_1, m) = 0. \quad (7.17)$$

$$T_{\mu\nu}^{VV} = - \left(\frac{i}{\pi} \right) \frac{q_{\mu}q_{\nu} - g_{\mu\nu}q^2}{q^2} [1 + m^2 Z_0^{-1}(q^2; m^2)]. \quad (7.18)$$

Em 3D:

$$T_{\mu}^V(k_1, m) = 0. \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= \left(\frac{i}{4\pi} \right) [q_{\mu}q_{\nu} - g_{\mu\nu}q^2] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q^2 + 4m^2}{q^2} \right) [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)] - \frac{\sqrt{-m^2}}{q^2} \right] \\ &\quad - 2im\varepsilon_{\mu\nu\alpha}q_{\alpha} [Z_0^{1/2}(q^2, m^2)]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Em 4D:

$$T_{\mu}^V(k_1, m) = 0. \quad (7.21)$$

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \frac{4}{3}[q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu}q_{\nu}] \left\{ I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0(q^2; m^2) \right] \right\}. \quad (7.22)$$

Com isso, é possível observar que as funções de um ponto são todas nulas conforme exigido pelo teorema de Furry e, torna-se fácil mostrar que a contração das funções de dois pontos com o momento externo também são nulas, conforme exigido pelas identidades de Ward.

CAPÍTULO 8

OBJETOS BÁSICOS

DIVERGENTES VERSUS

REGULARIZAÇÕES

Nas seções anteriores, abordando exemplos específicos de um conjunto de amplitudes, consideramos os aspectos ambiguidades e relações de simetria. Todas as condições foram postas em termos de diferenças entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência. Dos resultados obtidos com a presente estratégia de cálculo, podemos obter o correspondente fornecido por métodos de regularizações tradicionais ou filosofias equivalentes. Para tal, é necessário apenas especificar o valor atribuído aos objetos (2.4) – (2.12) pelo método adotado. Nesta seção queremos analisar como tratamentos representativos de divergências especificam o valor destes objetos.

8.1 Regularização Dimensional

Para a avaliação das integrais dos momentos na técnica da RD, consideramos como ponto de partida a validade da expressão

$$I(2\omega, \alpha, q) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (8.1)$$

Em situações onde as integrais divergentes são ($\alpha \leq \omega$) admitimos que o integrando $I(2\omega, \alpha, q)$ é uma função analítica da variável ω , esta última, uma quantidade contínua e complexa. Do lado direito a função Gamma é trocada pela continuação analítica da função de Euler (na região $\alpha \leq \omega$): a função de Weierstrass. As divergências emergirão como pólos em valores específicos para ω . Um aspecto importante para presente discussão é que uma vez que o resultado (8.1) foi claramente estabelecido podemos usar isto para produzir relações entre integrais sem qualquer cuidado com os aspectos relacionados com as eventuais divergências. As relações específicas que interessam, podem ser produzidas

pela diferenciação adequada de ambos os lados da eq. (8.1) relativo ao momento Q , e depois disto, levando Q à zero. Seguindo este procedimento podemos estabelecer

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega}} \quad (8.2)$$

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega - 1}} \quad (8.3)$$

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{4} [g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}] \times \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega - 2}}. \quad (8.4)$$

A comparação com os resultados pode ser usada para identificar as relações

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \quad (8.5)$$

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \quad (8.6)$$

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{24k_\nu k_\mu k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^4} = g_{\mu\nu} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{4k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} + g_{\mu\beta} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{4k_\xi k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} + g_{\nu\beta} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{4k_\xi k_\mu}{(k^2 - m^2)^3}. \quad (8.7)$$

Assim, as relações de consistência que emergiram em nossa análise das amplitudes consideradas estão automaticamente satisfeitas na técnica da RD. É possível dizer que a consistência da RD reside precisamente neste fato. Os resultados produzidos pela técnica são automaticamente isentos de ambigüidades e levam à preservação das simetrias. É importante ressaltar que no contexto do método da RD é permitido efetuar “shifts” no momento de integração, mas esta não é uma operação compulsória. As propriedades (8.2)-(8.4) eliminam toda a possível dependência nas escolhas dos momentos de linhas internas. Devido a esta conclusão, é fácil visualizar que em problemas onde a técnica da RD pode ser aplicada, se considerarmos, $\nabla_{\mu\nu}^{(2)}$, $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}$, $\square_{\alpha\beta\mu\nu} = \nabla_{\mu\nu}^{(4)} = \Delta_{\mu\nu} = 0$, e escrevermos os objetos i_{log} , I_{log} , I_{lin} e I_{quad} (tomando em seus coeficientes os valores apropriados para os traços das matrizes γ , $Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 2^\omega g_{\mu\nu}$, e assim por diante) de acordo com as expressões diretamente ditadas pela eq. (8.1), um mapeamento perfeito pode ser estabelecido.

8.2 Regularização Covariante de Pauli-Villars

Para o cálculo das integrais de Feynmann divergentes no contexto da prescrição de Pauli-Villars (PV) [36], inicialmente consideramos a substituição

$$I(m) \longrightarrow \sum_{i=0} a_i I(\Lambda_i), \quad (8.8)$$

onde $a_0 = 1$ e $\Lambda_0 = m$. Todos os outros parâmetros a_i e Λ_i , precisam ser escolhidos de tal modo à construir uma superposição que conduza aos resultados desejáveis, guiado, por exemplo, pela manutenção de identidades de Ward. Em termos desta prescrição, consideramos o valor das três diferenças pertinentes nos cálculos em 4D: Primeiro,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\ &= \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} \right\} \\ &= \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_i^2}{(k^2 - \Lambda_i^2)^3} \right\} = \sum_{i=0} a_i \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Para satisfazer todas as condições de consistência anteriores é preciso escolher um conjunto de a_i 's de forma que $\sum_{i=0} a_i = 0$. A próxima condição, relativa à $\square_{\alpha\beta\mu\nu}$, leva ao resultado

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu} = [g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] \sum_{i=0} a_i \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left(-\frac{5}{6} \right) \right\}, \quad (8.10)$$

que é, então, previamente satisfeita, simultaneamente, com a mesma escolha de coeficientes para o caso anteriormente considerado. A relação que envolve divergências quadráticas ($\nabla_{\mu\nu}^{(4)}$) pode ser avaliada da mesma maneira

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu\nu}^{(4)} &= \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} \right\} \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{2} \sum_{i=0} a_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Assim, escolhemos, além do $\sum_i a_i = 0$, os valores para a_i e Λ_i de forma que $\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0$, para que possamos obter $\nabla_{\mu\nu}^{(4)} = 0$. Não há nenhum fato novo nas condições derivadas anteriores. De fato, elas são as mesmas usadas no tratamento da QED, guiadas pela manutenção da invariância de “gauge” do tensor de polarização do vácuo, do cancelamento do diagrama “tad-pole” da auto-energia do elétron e assim por diante. Para completar esta subseção é necessário mostrar como um resultado correspondente ao método de Pauli-Villars pode ser extraído dos resultados obtidos no contexto da estratégia utilizada por nós para o cálculo de amplitudes perturbativas. O primeiro passo é, obviamente, tomar $\square_{\alpha\beta\mu\nu} = \nabla_{\mu\nu}^{(4)} = \Delta_{\mu\nu} = 0$, e avaliar os objetos divergentes restantes de acordo com a prescrição de PV submetidos às condições $\sum_i a_i = 0$, e $\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0$, ditados pelas investigações acima consideradas.

Explicitamente, para o objeto divergente quadrático

$$\begin{aligned}
 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} &= \sum_{i=0} a_i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)} \\
 &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{a_0}{k^2 - \Lambda_0^2} + \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2} + \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right\} \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ k^4(a_0 + a_1 + a_2) \right. \\
 &\quad \left. - k^2 [a_0(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) + a_1(\Lambda_0^2 + \Lambda_2^2) + a_2(\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2)] \right. \\
 &\quad \left. + a_0\Lambda_1^2\Lambda_2^2 + a_1\Lambda_0^2\Lambda_2^2 + a_2\Lambda_1^2\Lambda_0^2 \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{(k^2 - \Lambda_0^2)(k^2 - \Lambda_1^2)(k^2 - \Lambda_2^2)} \right\}. \tag{8.12}
 \end{aligned}$$

A condição que $\sum_i a_i = 0$, se aparece no coeficiente k^4 que é o de maior potência da integral do momento. A condição $\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0$ está presente no coeficiente de k^2 . As escolhas feitas foram ditadas pelas condições de consistência desta estratégia mas é interessante notar que elas são ingredientes óbvios para garantir a regularizabilidade da integral divergente correspondente. Com esta prescrição objetivamos acrescentar potências de k^2 no denominador para modificar o comportamento na região de valores altos do momento do integrando por isso as potências de k^2 que surgem no numerador devem ser eliminadas. Resolvendo as equações de modo a satisfazer as condições adequadas obtemos a expressão

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \frac{(m^2 - \Lambda_1^2)}{(k^2 - \Lambda_1^2)} \frac{(m^2 - \Lambda_2^2)}{(k^2 - \Lambda_2^2)}, \tag{8.13}$$

e, devido ao caráter finito do integrando modificado, a solução é imediata. Os casos correspondentes aos objetos divergentes básicos para cálculos em 2D e 3D estão automaticamente contemplados nas discussões precedentes.

8.3 Cálculo de Termos de Superfície

Na literatura sobre divergências em Teoria Quântica de Campos há outro procedimento que desempenha um papel importante: a avaliação explícita de termos de superfície. Estes cálculos são considerados quando “shifts” no momento do integração são feitos para relacionar uma escolha específica para o momento das linhas internas com outra destas possíveis escolhas. Isto é freqüentemente usado na verificação das identidades de Ward que envolvem situações onde a RD não pode ser usada. O mais notável destas é no estudo das violações de relações de simetria na amplitude triangular AVV em 4D [37] [38]. Devido ao fato de, na prescrição que adotamos, os cálculos foram efetuados tomando as escolhas mais gerais possíveis para os rótulos dos momentos de linhas internas, e que nenhum “shift” foi efetuado nos passos executados, é possível mapear nossos resultados

também naqueles correspondentes a esse procedimento específico. Tudo que precisamos é relacionar as Relações de Consistência com termos de superfície. Esta não é uma tarefa difícil se considerarmos adequadas identidades tais como

$$\frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^\alpha} \right) = \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^\alpha} - 2\alpha \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^{\alpha+1}}. \quad (8.14)$$

Assim, se integrarmos ambos os lados no momento k , temos

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^\alpha} \right) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^\alpha} - 2\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^{\alpha+1}}. \quad (8.15)$$

Agora tomando $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ obtemos

$$\bullet \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)} \right) = -\nabla_{\mu\nu}^{(4)} \quad (8.16)$$

$$\bullet \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \right) = -\Delta_{\mu\nu}, \quad (8.17)$$

e, seguindo o mesmo procedimento, podemos também obter

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k_\mu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \right) = -\square_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (8.18)$$

No lado esquerdo das últimas três equações temos uma integral de uma diferencial total, que é um termo de superfície conforme o teorema de Gauss. Quando o integrando é convergente ou logaritmicamente divergente na região de valores altos para o momento, os termos de superfície se anulam. Em casos diferentes destes não. Podemos avaliar os valores destes termos e relacioná-los aos objetos básicos $\square_{\alpha\beta\mu\nu}$, $\nabla_{\mu\nu}^{(4)}$ e $\Delta_{\mu\nu}$. Como tal, $\Delta_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{32\pi^2}$ e $\square_{\alpha\beta\mu\nu} = [g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] \frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{6}\right)$. Estes valores podem ser encontrados em muitos artigos ou livros no tratamento de anomalias triangulares (em 4D). É importante notar que se esta interpretação é adotada para o cálculo de $\Delta_{\mu\nu}$ e $\square_{\alpha\beta\mu\nu}$ estas quantidades são finitas e bem definidas. O aspecto principal é que, neste ponto de vista específico, as condições que obtivemos para a satisfação das relações entre funções de Green e identidades de Ward consideradas, as quais denominamos Relações de Consistência, não serão satisfeitas. Por conseguinte, as amplitudes calculadas nas seções anteriores não estarão isentas de ambigüidades. Devido a isto os pontos de vista representados pelos métodos de Pauli-Villars e RD, no que diz respeito às divergências em cálculos perturbativos de teorias quânticas de campos, em particular aqueles para a QED, são claramente conflitantes com o ponto de vista representado pela abordagem denominada de cálculo de termos de superfície.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES

Nos capítulos anteriores verificamos que o conteúdo divergente de todas as amplitudes consideradas pode ser escrito em termos de uns poucos objetos básicos, equações (2.4)-(2.12). Toda a arbitrariedade é preservada devido ao caráter geral da estratégia adotada para o cálculo das integrais de Feynman divergentes. Este procedimento permite enfatizar quais são as escolhas relevantes que devemos fazer nos cálculos perturbativos em geral para que possamos atribuir um valor definido para as amplitudes físicas. Dos resultados obtidos, dentro da estratégia adotada, é possível mapear qualquer técnica tradicional de regularização correspondente ou filosofia equivalente. Dessa forma, torna-se possível expressar de um modo claro os aspectos relativos à regularização, ambigüidades e relações de simetria.

As regularizações podem ser classificadas em duas classes básicas. Em uma primeira classe podemos colocar as regularizações que satisfazem

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{reg} = \nabla_{\mu\nu}^{(2\omega)reg} = \Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0, \quad (9.1)$$

ou seja, que obedecem ao conjunto de condições que denominamos Relações de Consistência. Nesta classe encontramos a técnica da RD que constitui a ferramenta mais popular para manipulações e cálculos envolvendo divergências em cálculos perturbativos de teorias quânticas de campos. Em uma segunda classe de regularizações podemos colocar aqueles métodos tais que

$$\left(\square_{\alpha\beta\mu\nu}^{reg}; \nabla_{\mu\nu}^{(2\omega)reg}; \Delta_{\mu\nu}^{reg} \right) \neq 0. \quad (9.2)$$

Nesta classe encontramos os métodos baseados em cálculos de termos de superfície. Esta interpretação para os objetos divergentes básicos pode ser encontrada comumente na literatura dedicada a justificar as anomalias triangulares perturbativas (onde RD não pode ser diretamente aplicada).

No que diz respeito aos aspectos ambigüidades e relações de simetria, as duas classes definidas acima são completamente conflitantes e conduzem a uma descrição drasticamente diferente de amplitudes perturbativas.

- **Ambigüidades:** dado o fato de que termos potencialmente ambíguos de todas as amplitudes sempre são multiplicados por um dos objetos (7.10)-(7.12), a primeira classe de regularizações eliminará completamente as ambigüidades. Para a segunda classe, as amplitudes físicas poderão ser ambíguas tal que, para atribuímos algum significado a estas, devemos fazer escolhas para as quantidades não-físicas presentes. O poder de predição das teorias quânticas de campos em geral, e em particular a QED, é claramente afetado. As predições não podem ser feitas de modo unívoco, simetrias fundamentais podem ser quebradas, tais como a homogeneidade do espaço-tempo, e assim por diante.
- **Relações de Simetria:** Observamos que os termos potencialmente violadores de simetrias sempre são multiplicados por um dos objetos (7.10)-(7.12), tal qual no caso dos termos ambíguos. Porém, devemos observar que todos os termos ambíguos são violadores de simetrias mas que termos potencialmente violadores de simetrias não são sempre ambíguos. A última sentença significa que a segunda classe de regularizações não pode conduzir a resultados consistentes simplesmente porque existem casos onde nenhuma escolha possível para as arbitrariedades é capaz de evitar as violações em relações de simetria.

As generalizações para outras dimensões, além daquelas consideradas aqui, parecem ser perfeitamente possíveis. Isto faz com que o método utilizado aqui represente uma eficiente ferramenta para conduzir investigações em problemas relacionados a teorias formuladas em dimensões maiores, particularmente naquelas ímpares ou em situações envolvendo pseudo-amplitudes em dimensões pares, como é o caso das anomalias.

APÊNDICE A

A ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC

Toda vez que desejamos descrever a dinâmica de partículas relativísticas de spin $\frac{1}{2}$ somos remetidos à equação de Dirac. Em tal equação aparecem as chamadas matrizes γ de Dirac que obedecem a uma álgebra não comutativa, ou seja, seguem as relações de anti-comutação. Em razão disto na definição e no decorrer dos cálculos das amplitudes físicas que consideramos no contexto deste trabalho, somos levados a fazer uso de propriedades que envolvem manipulações com as matrizes γ . Ao compararmos a álgebra das matrizes γ em uma dimensão física par com a álgebra destas em uma dimensão ímpar, percebemos diferenças importantes. Neste trabalho consideremos as matrizes e suas propriedades para os casos específicos de $D = 1 + 1$, $D = 2 + 1$ e $D = 3 + 1$. No entanto, tomamos como exemplo para a representação dessas matrizes as dimensões $D = 3 + 1$, a partir da qual é fácil obter uma representação para as demais dimensões, e $D = 2 + 1$, como um exemplo para uma dimensão ímpar. Estabelecendo, desta maneira, a representação das matrizes em uma dimensão par e em uma dimensão ímpar, respectivamente.

A.1 Representação Das Matrizes De Dirac Em $D = 3 + 1$

Neste apêndice fizemos uma apresentação das matrizes γ de Dirac e, estabelecemos os resultados que foram utilizados e que decorrem das propriedades destas matrizes.

Inicialmente consideremos uma representação para as matrizes $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Podemos adotar

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

As matrizes definidas acima satisfazem a relação de anticomutação

$$\gamma_\rho \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\rho = 2g_{\mu\rho} I, \quad (\text{A.2})$$

onde I é a matriz identidade. Definimos ainda a matriz γ_5 como

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad (\text{A.3})$$

que fica

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

e $\sigma_{\mu\nu}$ como

$$\sigma_{\nu\mu} = \frac{i}{2} [\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu]. \quad (\text{A.5})$$

Assim temos as propriedades

$$\gamma_\rho \gamma^\rho = 4, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho = -2\gamma_\mu, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} \gamma^\rho = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_5 \gamma_5 = I, \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu \quad (\text{A.10})$$

e

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} = -i (g_{\mu\rho} \gamma_\nu - g_{\rho\nu} \gamma_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5). \quad (\text{A.11})$$

A contração de *matrizes* γ com quadrivetores, representado por

$$\mathcal{A} = A_\mu \gamma^\mu, \quad (\text{A.12})$$

leva a identidades tais como:

$$\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} = 2A \cdot B, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_\mu \mathcal{A} + \mathcal{A} \gamma_\mu = 2A_\mu, \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_\mu \mathcal{A}\mathcal{B} \gamma_\mu = 4A \cdot B, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma_\mu \mathcal{A} \gamma_\mu = 2\mathcal{A} \quad (\text{A.16})$$

e

$$\gamma_\mu \mathbb{A} \mathbb{B} \mathbb{C} \gamma_\mu = -2 \mathbb{C} \mathbb{B} \mathbb{A}. \quad (\text{A.17})$$

É interessante considerar também os traços envolvendo *matrizes* γ . Temos

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4(g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}), \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\rho) &= 4 \{ (g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu})g_{\rho\lambda} \\ &\quad (g_{\lambda\nu}g_{\mu\beta} - g_{\lambda\beta}g_{\mu\nu} + g_{\lambda\mu}g_{\beta\nu})g_{\rho\alpha} \\ &\quad (g_{\lambda\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\lambda\beta}g_{\alpha\nu} + g_{\lambda\alpha}g_{\beta\nu})g_{\rho\mu} \\ &\quad (g_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} - g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} + g_{\lambda\alpha}g_{\mu\nu})g_{\rho\beta} \\ &\quad (g_{\lambda\beta}g_{\alpha\mu} - g_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta} + g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta})g_{\rho\nu} \}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5) = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\nu) = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha) = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.28})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho) = 0 \quad (\text{A.29})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\lambda \gamma_\tau) &= 4 \{ g_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\tau} - g_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\sigma\lambda\tau} + g_{\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\lambda\tau} \\ &\quad + g_{\sigma\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} - g_{\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} + g_{\lambda\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Podemos construir matrizes obedecendo à algebra indicada em (A.2) em qualquer dimensão previamente escolhida. Em dimensões pares os resultados abtidos acima são essencialmente idênticos exceto pelo fator vindo do traço da matriz unidade.

A.2 Representação Das Matrizes De Dirac Em $D = 2 + 1$

Tomando como modelo a dimensão $D = 3 + 1$. Começaremos então por definir uma representação para as matrizes $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2)$. Adotaremos[39]

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.31}$$

As matrizes σ^i , são as usuais matrizes de Pauli. O conjunto das matrizes satisfaz à relação de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I,\tag{A.32}$$

onde I é a matriz identidade, e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\tag{A.33}$$

e à relação de comutação

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha.\tag{A.34}$$

Na equação acima, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ é o tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita normalizado a 1 para $\mu\nu\alpha = 012$ e as correspondentes permutações pares e a -1 , para as permutações ímpares. Das relações (A.32) e (A.34) decorre que

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} I - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha.\tag{A.35}$$

Com isso podemos estabelecer relações úteis para as manipulações pretendidas nas amplitudes. Como tal teremos

$$\gamma_\nu \gamma^\nu = 3\tag{A.36}$$

$$\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu = -\gamma_\mu.\tag{A.37}$$

A contração de matrizes γ com quadrivetores é representada por

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu.\tag{A.38}$$

Podemos facilmente estabelecer às identidades

$$\not{k}\not{p} + \not{p}\not{k} = 2k \cdot p,\tag{A.6}$$

$$\gamma_\mu \not{k} + \not{k} \gamma_\mu = 2k_\mu, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^\mu \not{k} \not{p} \gamma_\mu = \not{p} \not{k} + 2k \cdot p, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu = -\not{k} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\gamma^\mu \not{k} \not{p} \not{q} \gamma_\mu = -2\not{q} \not{p} \not{k} + \not{k} \not{p} \not{q}. \quad (\text{A.10})$$

Consideremos agora os traços envolvendo as matrizes γ . Teremos

$$\text{Tr} \{I\} = 2, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Tr} \{\gamma_\mu\} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\text{Tr} \{\gamma_\mu \gamma_\nu\}}{2} = g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\text{Tr} \{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta\}}{2} = -i\varepsilon_{\nu\beta\mu}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\text{Tr} \{\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta\}}{2} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \varepsilon_{\alpha\eta\mu} \varepsilon_{\nu\beta\eta}, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\text{Tr} \{\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\phi\}}{2} = -ig_{\beta\phi} \varepsilon_{\alpha\nu\mu} - g_{\mu\alpha} i\varepsilon_{\beta\phi\nu} + i\varepsilon_{\beta\phi\omega} \varepsilon_{\nu\omega\eta} \varepsilon_{\nu\omega\eta} \quad (\text{A.16})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\text{Tr} \{\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\phi \gamma_\theta\}}{2} &= g_{\phi\theta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\phi\theta} \varepsilon_{\nu\beta\delta} \varepsilon_{\alpha\delta\mu} - \varepsilon_{\phi\theta\beta} \varepsilon_{\alpha\nu\mu} \\ &\quad - g_{\mu\alpha} \varepsilon_{\phi\theta\sigma} \varepsilon_{\beta\sigma\nu} + \varepsilon_{\phi\theta\sigma} \varepsilon_{\beta\sigma\omega} \varepsilon_{\nu\omega\eta} \varepsilon_{\alpha\eta\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A construção das matrizes que obedecem a álgebra definida em (A.32) e (A.34) pode ser feita em qualquer dimensão previamente escolhida. Diferenças significativas existem quando as dimensões são pares ou ímpares[40]. Como tal, podemos ver que não é possível estabelecer uma matriz γ^{3+1} (análoga a matriz γ^5 na dimensão $D = 4$) que anticomute com todas as matrizes γ^μ estabelecidas no conjunto acima. O que se materializa no fato de não ser possível definir transformações quirais (e consequentemente simetria quiral) na dimensão $D = 3$ (e demais dimensões ímpares). Os resultados acima obtidos são essencialmente idênticos àqueles de outras dimensões ímpares exceto pelo valor do traço da matriz identidade.

APÊNDICE B

PARAMETRIZAÇÃO DE FEYNMAN

No cálculo das amplitude físicas divergentes, em especial no cálculo da função de Green de um ponto vetorial e da função de Green de dois pontos tensorial, que são os objetos de estudo para os propósitos deste trabalho, é necessário a adoção de uma estratégia de cálculo para tratar das integrais de Feynman divergentes. No contexto da estratégia de cálculo que utilizamos neste trabalho, aplicamos a identidade (2.3), a qual gera uma expressão matemática em que termos estão contidos em integrais divergentes independentes dos momentos (arbitrários) internos e termos que estão presentes em integrais finitas, logo em seguida é necessário efetuar o cálculo dessas integrais finitas, para tanto, consideramos o uso de uma técnica denominada *Parametrização de Feynman*. A parametrização de Feynman possibilita uma reorganização dos integrandos a fim de simplificar a integração permitindo colocar as integrais de Feynman em uma forma genérica, o que simplifica a integração nos momentos. A estratégia consiste em utilizar identidades para reescrever os integrandos. A mais simples destas identidades é a seguinte:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2}. \quad (\text{B.1})$$

Entretanto todas as identidades estão contidas numa expressão geral. Todas as formas de interesse podem ser obtidas a partir da relação

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n]^n}. \quad (\text{B.2})$$

Os a_i 's que aparecem na expressão podem ser, e geralmente são, propagadores das partículas correspondentes às linhas internas do diagrama considerado, ao qual está associada a integral que se deseja calcular. Estes propagadores podem aparecer repetidos nas integrais. Quando isto acontecer, para obter a identidade necessária à parametrização basta que derivemos a expressão acima em relação ao parâmetro que aparece repetido. Com isto temos por exemplo,

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 \dots a_n} = n! \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) x_1}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n]^{n+1}}. \quad (\text{B.3})$$

Para o cálculo das integrais de Feynman necessárias para o estudo da Eletrodinâmica Quântica são úteis as seguintes identidades

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z+a]^2}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{[(b-a)z+a]^3}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{a^3b} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2dz}{[(b-a)z+a]^4}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{a^4b} = 4 \int_0^1 \frac{(1-z)^3dz}{[(b-a)z+a]^5}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^3}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{a^2bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^4}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{a^3bc} = 12 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)^2dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^5}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{[(c-a)z+(b-a)y+(d-a)x+a]^4} \quad (\text{B.11})$$

e

$$\frac{1}{a^2bcd} = 24 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{(1-y-z-x)dx}{[(c-a)z+(b-a)y+(d-a)x+a]^5}. \quad (\text{B.12})$$

Para ilustrar o uso da técnica consideremos uma típica integral de Feynman em 4D, a integral finita da expressão (3.27), que chamaremos de $(I_1)_{finita}$:

$$(I_1)_{finita} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2(k \cdot k_2) + k_2^2]^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (\text{B.13})$$

Observe que no denominador da integral $(I_1)_{finita}$, temos um termo entre parenteses elevado ao cubo e outro termo entre colchetes elevado a potência um. Podemos identificar o primeiro termo como a^3 e o segundo como b . Assim, podemos parametrizar por:

$$\frac{1}{a^3b} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2dz}{[(b-a)z+a]^4}. \quad (\text{B.14})$$

Onde, definimos

$$a = (k^2 - m^2) \quad (\text{B.15})$$

e

$$b = [(k + k_2)^2 - m^2] \quad (\text{B.16})$$

Então,

$$\begin{aligned}
[(b-a)z+a] &= [(k+k_2)^2 - m^2 - k^2 + m^2]z + k^2 - m^2 \\
&= [k^2 + 2(k \cdot k_2) + k_2^2 - k^2]z + k^2 - m^2 \\
&= [2(k \cdot k_2) + k_2^2]z + k^2 - m^2 \\
&= k^2 + 2z(k \cdot k_2) + zk_2^2 - m^2 \\
&= k^2 + 2z(k \cdot k_2) + z^2k_2^2 - z^2k_2^2 + zk_2^2 - m^2 \\
&= (k^2 + 2z(k \cdot k_2) + z^2k_2^2) + z(1-z)k_2^2 - m^2 \\
&= (k + zk_2)^2 + z(1-z)k_2^2 - m^2 \\
&= k'^2 + Q(z).
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Onde, definimos

$$k' = (k + zk_2) \tag{B.18}$$

e

$$Q(z) = z(1-z)k_2^2 - m^2. \tag{B.19}$$

Agora, efetuamos o shift, ou seja, consideramos as definições (B.18) e (B.19), e as substituímos no numerador do integrando, assim,

$$\begin{aligned}
[2(k \cdot k_2) + k_2^2] &= 2\left(\left[k' - zk_2\right] \cdot k_2\right) + k_2^2 \\
&= 2\left(k' \cdot k_2\right) - 2zk_2^2 + k_2^2 \\
&= 2\left(k' \cdot k_2\right) + (1-2z)k_2^2.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

É importante observar que

$$\frac{\partial Q(z)}{\partial z} = (1-2z)k_2^2. \tag{B.21}$$

Logo,

$$[2(k \cdot k_2) + k_2^2] = \left[2\left(k' \cdot k_2\right) + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)\right]. \tag{B.22}$$

Reescrevendo a $(I_1)_{finita}$, temos que

$$(I_1)_{finita} = 3 \int_0^1 (1-z)^2 dz \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[2\left(k' \cdot k_2\right) + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)\right]^3}{[k'^2 + Q(z)]^4}. \tag{B.23}$$

Desenvolvendo o numerador, temos

$$\begin{aligned}
\left[2(k' \cdot k_2) + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)\right]^3 &= \left[4(k' \cdot k_2)^2 + 4(k' \cdot k_2) \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad \times \left[2(k' \cdot k_2) + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)\right] \\
&= 8(k' \cdot k_2)^3 + 8(k' \cdot k_2)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right) \\
&\quad + 2(k' \cdot k_2) \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^2 + 4(k' \cdot k_2) \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right) \\
&\quad + 4(k' \cdot k_2) \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^3 \\
&= 8(k' \cdot k_2)^3 + 12(k' \cdot k_2)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right) \\
&\quad + 6(k' \cdot k_2) \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^3 \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(I_1)_{finita} &= +24 \int_0^1 (1-z)^2 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k' \cdot k_2)^3}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
&\quad + 36 \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right) dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k' \cdot k_2)^2}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
&\quad + 18 \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^2 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k' \cdot k_2)}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
&\quad + 3 \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^3 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 + Q(z)]^4}. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Ou,

$$\begin{aligned}
(I_1)_{finita} &= +24 (k_2^\mu k_2^\nu k_2^\alpha) \int_0^1 (1-z)^2 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k'_\mu k'_\nu k'_\alpha)}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
&\quad + 36 (k_2^\mu k_2^\nu) \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right) dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k'_\mu k'_\nu)}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
&\quad + 18 (k_2^\mu) \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^2 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k'_\mu)}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
&\quad + 3 \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\right)^3 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 + Q(z)]^4}. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Impondo a invariância de Lorentz e renomeando $(I_1)_{finita}$ para $(I_1)'_{finita}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(I_1)'_{finita} = & +36 (k_2^\mu k_2^\nu) \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z} \right) dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k'_\mu k'_\nu)}{[k'^2 + Q(z)]^4} \\
& +3 \int_0^1 (1-z)^2 \left(\frac{\partial Q(z)}{\partial z} \right)^3 dz \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 + Q(z)]^4}. \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

Essa é a forma genérica na qual as integrandos de Feynman podem ser colocados após a parametrização.

APÊNDICE C

INTEGRAÇÃO DIMENSIONAL

No Apêndice B consideramos um recurso matemático para o tratamento de integrais de Feynman e ilustramos a aplicação deste ao considerar uma destas integrais. A forma genérica para o integrando, qualquer que seja a integral, sempre poderá ser a mesma. Assim, para calcular tais integrais, isto é, integrar nos momentos, basta considerar as formas genéricas oferecidas pela parametrização de Feynman

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\alpha, \dots)}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (\text{C.1})$$

É possível entretanto evitar esta multiplicidade de integrais, deduzindo um resultado geral do qual podem ser extraídos todos os outros necessários. O cálculo de integrais de Feynman torna-se enormemente facilitado através desta sistemática. Trata-se da extensão $n = m + 1$ -dimensional, da forma genérica das integrais nos momentos oferecida pela parametrização de Feynman. Tratando-se de um resultado de grande utilidade, justifica-se a discussão com uma certa riqueza de detalhes.

Nós tomamos como ponto de partida a mais simples das integrais na forma oferecida pela parametrização de Feynman e definimos;

$$I(Q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (\text{C.2})$$

De início eliminamos o termo ímpar efetuando a mudança

$$\begin{aligned} (k^2 + 2Q \cdot k - H^2) &= [(k + Q)^2 - (Q^2 + H^2)] \\ &= k'^2 - M^2, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde definimos:

$$K' = k + Q \quad (\text{C.4})$$

e

$$M^2 = Q^2 + H^2. \quad (\text{C.5})$$

Com isso a integral fica:

$$I(Q) = \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - M^2]^\alpha}. \quad (\text{C.6})$$

Agora, abandonando a linha em k , fazemos uma extensão para $m + 1 = n$ dimensões do espaço dos momentos (tipo Minkowski);

$$I(Q, n) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha}. \quad (\text{C.7})$$

Então teremos:

$$\begin{cases} d^n k = dk_0 dk_1 dk_2 \dots dk_m = dk_0 d^m \mathbf{k} \\ k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \\ \mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Assim $I(Q, n)$ ficará:

$$I(Q, n) = \int d^m \mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon)^2]^\alpha} \right\}. \quad (\text{C.9})$$

A integração em k_0 pode ser facilmente efetuada se nós identificamos, no plano complexo k_0 , os pólos do integrando.

Com o contorno C escolhido, a integral de $f(k_0)$;

$$f(k_0) = \frac{1}{\left\{ k_0^2 - [(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon]^2 \right\}^\alpha}, \quad (\text{C.10})$$

se anula. Observemos ainda que $f(k_0)$ cai abruptamente com k_0 grande (tanto quanto $\alpha > 1$). Isto é:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [f(k_0)] \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}}. \quad (\text{C.11})$$

Então a contribuição sobre o contorno circular C se anula e apenas restam as contribuições sobre os eixos. Fazemos a conveniente mudança de variável

$$k_0 \longrightarrow ik_{m+1}, \quad (\text{C.12})$$

com k_{m+1} real. Com isso a integral em k_0 fica

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1} f(ik_{m+1}), \quad (\text{C.13})$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[(ik_{m+1})^2 - \left((\mathbf{K}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon \right)^2 \right]^\alpha}, \quad (\text{C.14})$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i(-1)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[k_{m+1}^2 + \mathbf{K}^2 + i\epsilon \right]^\alpha}. \quad (\text{C.15})$$

Isto quer dizer que passamos, na prática, para um espaço euclidiano n-dimensional

$$\begin{cases} k_\mu = (k_1, k_2, \dots, k_{m+1}) \\ k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{m+1}^2 \\ d^n k = dk_1 dk_2 \dots dk_{m+1}. \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por:

$$\int_{Mink.} \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\alpha} = (-1)^{-\alpha} \int_{Eucl.} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \quad (C.17)$$

Agora expressamos o espaço euclideano n -dimensional em coordenadas polares;

$$\begin{cases} k_1 = k \operatorname{sen} \theta_m \operatorname{sen} \theta_{m-1} \dots \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 \\ k_2 = k \operatorname{sen} \theta_m \operatorname{sen} \theta_{m-1} \dots \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 \\ \text{" " "} \\ \text{" " "} \\ \text{" " "} \\ k_{m+1} = k \cos \theta_m. \end{cases} \quad (C.18)$$

O elemento de volume será dado por:

$$\int d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \operatorname{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m. \quad (C.19)$$

A integral nos momentos fica, com isso, na forma:

$$I(Q, n) = (-1)^\alpha \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \operatorname{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{k^m dk}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \quad (C.20)$$

Já que o integrando somente depende de k^2 , podemos integrar nos ângulos. Para tal tomamos auxílio nos resultados:

$$i) \int_0^\pi \operatorname{sen}^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}, \quad (C.21)$$

$$ii) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (C.22)$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \int_0^\pi \operatorname{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m = \\ & = (2\pi) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1 + 1)} \right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + 1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \right] \dots \\ & \dots \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+m-1}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (C.23)$$

$$= \frac{(2\pi)(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \quad (C.24)$$

ou seja, obtivemos:

$$\int d\Omega_m = \frac{2(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \quad (C.25)$$

Voltando com este resultado para a integral:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i (\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2 + M^2)^\alpha}, \quad (\text{C.26})$$

a qual, usando a expressão para a função Beta de Euler, fornece:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i (\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)\right)}{(M^2)^{\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)} \Gamma(\alpha)}. \quad (\text{C.27})$$

Com $m + 1 = n$, fica:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(2)^n \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}} (\pi)^{m+1 - \left(\frac{m+1}{2}\right)}}, \quad (\text{C.28})$$

ou ainda:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \quad (\text{C.29})$$

A forma da expressão justifica a definição:

$$n \equiv 2\omega, \quad (\text{C.30})$$

que então nos fornecerá:

$$I(Q, \omega) = \frac{i \Gamma(\alpha - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.31})$$

que é o resultado desejado. A presença da função $\Gamma(\alpha - \omega)$ nos diz que o resultado obtido é válido para $\alpha > \omega$, ou seja, para integrais finitas. As demais formas genéricas que aparecem em (C.1) podem ser obtidas a partir desta. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu(Q, 2\omega) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}, \quad (\text{C.32})$$

primeiro derivamos o lado esquerdo $I(Q, 2\omega)$ em relação ao momento externo Q_μ ;

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} \right\} = -2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}}. \quad (\text{C.33})$$

A seguir derivamos o lado direito de (C.29),

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}} \right\} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha - \omega) (\alpha - \omega) (-2Q_\mu)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}}. \quad (\text{C.34})$$

Deste modo, igualando ambos os lados, teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha - \omega) (\alpha - \omega) (Q_\mu)}{\alpha \Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \\ &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-) \Gamma(\alpha + 1 - \omega) Q_\mu}{\Gamma(\alpha + 1) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega + 1}}. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Definindo $\alpha' = \alpha + 1$, uma vez que α é arbitrário, temos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}. \quad (\text{C.36})$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras integrais necessárias para os cálculos de amplitudes. Uma vez que estamos tratando aqui de integrais finitas, ω pode ser tomado na dimensão física $\omega = 2$ nos resultados.

A seguir apresentamos os resultados para integrais comumente encontradas nos cálculos de amplitudes físicas consideradas neste trabalho.

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \quad (\text{C.37})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu + \delta_{\alpha\nu} Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2\omega + 2) Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega - 1) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta} Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha} Q_\mu Q_\beta + \\ &\quad \left. + \delta_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta} Q_\mu Q_\nu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&+ \frac{\frac{1}{2} ((2\omega + 4) Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\alpha\beta} Q^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\
&\left. + \frac{\frac{1}{4} (2\omega + 2) \delta_{\alpha\beta} \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right] \quad (C.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^4 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&+ \frac{(2\omega + 2) Q^2 \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\
&\left. + \frac{\omega(\omega + 1) \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right]. \quad (C.45)
\end{aligned}$$

É interessante notar que decorrem destes resultados as seguintes propriedades:

$$i) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} f(k^2) k_\mu = \text{zero} \quad (C.46)$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2) \quad (C.47)$$

$$iii) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4\omega(\omega + 1)} (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2). \quad (C.48)$$

Os resultados deduzidos acima são suficientes para a solução de todas as integrais de Feynman consideradas no presente trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Weinberg, S. Quantum Field Theory, Vols. I to III, 2000, Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- [2] Artigos de BCS:
 - * L. N. Cooper, "Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas", Phys. Rev 104, 1189 - 1190 (1956).
 - * J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Microscopic Theory of Superconductivity", Phys. Rev. 106, 162 - 164 (1957).
 - * J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of Superconductivity", Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
- [3] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.
- [4] H. Epstein, V. Glaser, Ann. Inst. H. Poincaré (A), Phys. Théor. 19 (1973) 211 295.
- [5] W. Pauli e F. Villars. On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory. Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949).
- [6] Referências para a técnica de Regularização Dimensional:
 - * G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. Nucl. Phys. B44, 189 (1972).
 - * C. G. Bollini and J. J. Giambiagi. Remarks concerning the renormalized coupling constants of the gauge theories. Nuovo Cimento 12B, 20 (1972).
- [7] O. A. Battistel. Uma Nova Estratégia para Manipulações e Cálculos Envolvendo Divergências em TQC. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil (1999).
- [8] Dirac, P.A.M. (1927). The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 114, p. 243.
- [9] O.A. Battistel and G. Dallabona, Phys. Rev. D**65**, 125017 (2002).
- [10] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. Topologically massive gauge theories. Ann. Phys., 140:372–411, 1982.
- [11] O. H. Girotti, M. Gomes, J. L. de Lyra, R. S. Mendes, J. R. S. Nascimento, and A. J. da Silva, Phys. Rev. Lett. 69 (1992), 2623.
- [12] Warren Siegel. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction. Phys. Lett. B84:193,1979.

- [13] D. G. C. McKeon and T. N. Sherry. Operator regularization and one-loop Green's functions. *Phys. Rev.*, D35:3854, 1987.
- [14] Referências de aplicações do método de O. A. Battistel
- * O. A. Battistel, G. Dallabona, G. Krein. Predictive Formulation of the Nambu-Jona-Lasinio Model. *Phys. Rev.* D77:065025-1, 2008.
 - * R. L. S. Farias, G. Dallabona, G. Krein, O. A. Battistel. Extension of the Nambu-Jona-Lasinio model predictions at high densities and temperatures using an implicit regularization scheme. *Phys. Rev.* C77:065201-1, 2008.
 - * O. A. Battistel, G. Krein, G. Dallabona, R. L. S. Farias. Cutoff-independent regularization of four-fermion interactions for color superconductivity. *Phys. Rev.* C:1-4, 2006.
 - * O. A. Battistel, G. Dallabona. Scale ambiguities in perturbative calculations and the value for the radiatively induced Chern-Simons term in extended QED. *Phys. Rev.* D72:1-16, 2005.
 - * O. A. Battistel. From arbitrariness to anomalies in two-dimensional perturbative calculations. *Journal of Phys.* G30:543, 2004.
- [15] G. Scharf, W. F. Wreszinski, B. M. Pimentel and J. L. Tomazell. Causal Approach to $(2 + 1)$ - Dimensional QED. *Ann. of Phys.* 231 (1994), 185.
- [16] B.M. Pimentel and J.L. Tomazelli. What Is Wrong with Pauli-Villars Regularization in QED3? *Prog. Theor. Phys.* 95 (1996), p. 1217.
- [17] O.A. Battistel and G. Dallabona, *Phys. Rev.* D**65**, 125017 (2002).
- [18] O. A. Battistel e G. Dallabona, *Nucl. Phys.* B**610** 317 (2001).
- [19] O. A. Battistel e G. Dallabona, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **27**, L53-L60 (2001).
- [20] O. A. Battistel e G. Dallabona, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **28**, 2539 (2002).
- [21] O.A. Battistel and G. Dallabona, *Eur. Phys. J. C* **1**, 001 (2003).
- [22] O. A. Battistel e G. Dallabona, *Phys. Rev.* D**72**, 045009 (2005).
- [23] O. A. Battistel e M. C. Nemes, *Phys. Rev.* D**59** 055010 (1999).
- [24] O. A. Battistel, O. L. Battistel, A. Blin, B. Hiller e M. C. Nemes, *Regularization free systematic treatment of amplitudes and related Ward identities in an $SU(2)$ version of NJL Model*, XIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu (1998); O. A. Battistel, O. L. Battistel e G. Dallabona, *Meson properties in the $SU(2)$ NJL model*, XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, (2002).
- [25] O. A. Battistel, and G. I. Krein, *Mod. Phys. Lett.* **A18**, 2255 (2002).
- [26] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel *Phys. Rev.* C**73**, 018201 (2006).
- [27] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel, *Extension of the Nambu-Jona-Lasinio model at high densities and temperature using an implicit regularization scheme (trabalho aceito para publicação em Phys. Lett. B)*.

- [28] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel, (*trabalho aceito para publicação em Nucl. Phys. A*).
- [29] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel, AIP Conf. Proc. 739 (2005) 431.
- [30] O. A. Battistel e O. L. Battistel, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 1979-2017 (2002).
- [31] O. A. Battistel e G. Dallabona, Phys. Rev. D**65** 125017 (2002).
- [32] O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, 1-22 (2002).
- [33] G. Dallabona e O. A. Battistel, Phys. Rev. D**70**, 065017 (2004).
- [34] O.A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).
- [35] O.A. Battistel, *PhD Thesis (1999)*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil.
- [36] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 433 (1949).
- [37] J.S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60**, 47 (1969); R. Jackiw, Int.J.Mod.Phys. B**14**, 2011 (2000).
- [38] S.B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino and E. Witten, *Current algebra and anomalies*, World Scientific, Singapore (1985).
- [39] S.Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann.Phys.(N.Y) **140**, 372(1982).
- [40] B. de Witt e J. Smith, "Field Theory in Particle Physics", North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986), Capítulo XX.