Tese de

Doutorado

SUPERSIMETRIAS ESTENDIDAS EM TEORIAS DE GAUGE COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Wander Gomes Ney

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Setembro de 2005

À minha querida esposa Vanuza, pelo amor que me inspira.

Aos meus pais Wilson e Marilda, por tanto incentivo na minha caminhada até aqui.

Agradecimentos

- A Deus que criou todas as coisas, desde os fundamentos da natureza até o dom da vida;

- Ao professor Helayel, por ser um excelente orientador, não somente em relação a esse trabalho de tese, mas na minha caminhada científica;

- Aos professores do CBPF que com tanta boa vontade conseguem repassar tantos conhecimentos;

- Aos integrantes da Banca Examinadora desta tese;

- Ao amigo Wesley pelo apoio em tantas horas e pelas discussões e trabalhos que fizemos juntos;

- A todos os amigos e colegas do DCP;

- Aos funcionários, pelo eficiente e agradável apoio: Rosangela, Elisete e Myriam;

- Ao CEFETCampos pelo incentivo à minha capacitação;

-Ao CNPq pelo período de bolsas que recebi;

- À minha querida tia Mariza, pelo carinho, amizade e acolhida com tanto amor;

- À Nair pelo cuidado que tem tido comigo em toda minha vida;

- À minha querida família, pelo amor, carinho e exemplo: meus irmãos e cunhados, Marlon e Márcia, Wilsinho e Jacqueline, Betinho e Micheli, Marquinho e Lorena, meus sobrinhos queridos, Arthur, Luma e Luísa, minha querida tia Lúcia e demais tios, minhas vovós, Neide e Zizica, meus sogros, Lena e Paulo, meus amigos Nanato, Ana Paula, Dedé e Renata;

- À minha igreja de Guarus.

RESUMO

A questão central desta tese é o estudo da supersimetria no âmbito das teorias de gauge que assinalam violação da simetria de Lorentz. Como procedimento de trabalho, utilizamos mecanismos de redução dimensional e partimos de teorias definidas em dimensões superiores para obtermos, após devidas reduções, as versões supersimétricas estendidas correspondentes em dimensões inferiores. Propomos as versões $N = 2$- e $N = 4$-supersimétricas, em $D = 4$, das teorias que apresentam quebra da simetria de Lorentz através de termo do tipo Chern-Simons. As supersimetrias obtidas são realizada on-shell quando a redução dimensional é ordinária, e off-shell quando a redução baseada no método das transformações de Legendre. Analisamos as ações em componentes e verificamos o surgimento de cargas centrais no caso das realizações off-shell com violação da simetria de Lorentz.

ABSTRACT

This thesis sets out to pursue the investigation of supersymmetry in connection with Lorentz-violating gauge theories. To carry out our study, we adopt dimensional reduction techniques and we start off from higher dimensions so as to attain, upon suitable reductions, the corresponding extended supersymmetric versions in lower dimensions. We propose here the $N = 2$- and $N = 4$- $D = 4$ versions of the theories with Chern-Simons-like Lorentz-breaking term. On-shell supersymmetries appear for the ordinary dimensional reduction scheme; on the other hand, if the reduction is performed by means of the Legendre transformation prescription, supersymmetry is off-shell realised in the lower dimensions. We analyse the component-field actions and the appearance of central charges is pointed out in the case of the off-shell realisations with Lorentz symmetry violation.

Índice

Introdução

A formulação de modelos físicos para as interações fundamentais no processo de construção de teorias quânticas de campos para objetos puntiformes é baseada em alguns princípios fundamentais, entre os quais a covariância de Lorentz e a invariância sob simetrias de gauge apropriadas na contrução dos Lagrangeanos e das ações dessas teorias. Entretanto, mecanismos de quebra destas simetrias têm sido propostos e discutidos em vista de um número de evidências fenomenológicas e experimentais. Podemos citar o mecanismo de Higgs na quebra espontânea de simetria pela configuração do vácuo, a inclusão de um termo de massa no modelo de gauge Abeliano que faz quebrar a simetria de gauge, entre outras situações onde a simetria é quebrada espontaneamente, explicitamente ou dinamicamente. Nesta tese, estamos interessados em abordar a quebra da simetria de Lorentz no contexto de teorias de gauge Abelianas supersimétricas.

Trabalhos em torno da quebra da simetria de Lorentz apresentam algumas evidências fenomenológicas e experimentais, tais como em [19, 6, 24, 23, 18]. Observações astrofísicas indicam que a simetria de Lorentz deve ser sutilmente violada, de modo a corresponder a certas anisotropias no espaço-tempo. Assim, surgiu a necessidade da investigação de teorias onde se mantém a simetria de gauge, mas a simetria do espaço-tempo fosse violada. Deste modo, têm sido pesquisadas principalmente teorias de gauge onde é acrescentado no Lagrangeano um termo de quebra da simetria de Lorentz. Como proposto por Jackiw em [19], um termo do tipo Chern-Simons deve ser considerado contendo um quadri-vetor de fundo constante que mantenha a invariância de gauge, mas que viole a simetria de Lorentz do espaço-tempo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\kappa}p_{\lambda}.$$

Este quadri-vetor de fundo, p_{λ}, indica uma direção preferencial no espaço-tempo quebrando, assim, a invariância de Lorentz. Esta quebra deve ocorrer de um modo suave, de tal forma que se preservem os resultados das observações já realizadas (que sabemos possuir a invariância de Lorentz) e conduza, em uma determinada escala, a resultados condizentes com as observações citadas anteriormente (que levam a uma violação dessa simetria). Podemos observar que o termo de quebra da simetria de Lorentz mantém a invariância de gauge, já que p_{λ} é um vetor de fundo constante, então, a transformação de gauge Abeliana $\delta A_{\mu} = \partial_{\mu}\chi$, aplicada ao termo de Chern-Simons, nos fornece (integrando por partes):

$$\delta\mathcal{L}_{br} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\chi\partial_{\nu}A_{\kappa}(\partial_{\mu}p_{\lambda} - \partial_{\lambda}p_{\mu}) = 0,$$

já que a derivada do vetor de fundo é nula. A idéia da violação da simetria de Lorentz vem sendo ampliada para outras teorias. No caso da Relatividade Geral, foi proposto em [17], em analogia com o que foi feito no Eletromagnetismo, a inclusão do termo de Chern-Simons (estendido para 4 dimensões e modificado para incluir o vetor constante de fundo) na ação de Hilbert-Einstein.

Muitos estudos vêm sendo feitos em torno da quebra na simetria de Lorentz. Em especial, no contexto da supersimetria, a questão da violação de Lorentz tem sido considerada na literatura em diferentes formulações. Na ref. [14], a supersimetria é apresentada através da introdução do vetor de fundo modificando a álgebra da teoria. Nas refs. [8, 1], é proposta a versão $N = 1$-supersimétrica do termo de Chern-Simons através do formalismo superespaço-supercampo convencional, onde é definido um supercampo escalar que acomoda o vetor de fundo. Para isto, é mostrada a conveniência de se definir o vetor de fundo como o gradiente de uma função escalar, $s = \alpha + p_\mu x^\mu$, onde α e p_μ são constantes. Na ref. [21], os autores adotam a idéia dos operadores de quebra da simetria de Lorentz.

Nesta tese, considerando a importância das supersimetrias estendidas em conexão com as teorias de gauge, vamos propor as generalizações supersimétricas $N = 2-$ e $N = 4-$ estendidas de uma teoria de gauge Abeliana, com o termo de quebra da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons no espaço-tempo tipo Minkowski em 4 dimensões ($D = 4$). Serão proposta duas classes para cada supersimetrização estendida mensionada: a "on-shell" e a "off-shell". Na supersimetria "on-shell", para o Lagrangeano ter a invariância da supersimetria, é necessária a imposição das equações de campo; esta supersimetrização pode ser encontrada na ref. [29]. Já na supersimetrização off-shell, a invariância do Lagrangeano independe das equações de campos. Este segundo caso pode ser encontrado na ref. [26].

Existem alguns procedimentos para se construir versões supersimétricas $N-$estendidas de uma teoria. Em um deles, podemos partir diretamente dos campos-componentes propondo Lagrangeanos que tenham invariância sob transformações de supersimetria com N parâmetros espinoriais, como proposto para teorias de gauge em [20, 15]. Em outro método mais conveniente, podemos usar a formulação em supercampos imersos em um superespaço com N coordenadas Grassmannianas, como proposto em [16]. O procedimento que consideramos mais adequado nesta tese é o da redução dimensional, através do qual podemos partir de teorias de dimensões superiores com uma única supersimetria e obtermos, após a redução dimensional, modelos de dimensões inferiores com supersimetrias estendidas $N > 1$ [22, 11, 12]. Nesta tese, partimos apenas do setor bosônico da versão $N = 1$ do modelo de gauge Abeliano com termo de violação da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons em 6 e 10 dimensões dimensionais, procedendo, posteriormente às reduções dimensionais abaixo:

$$N = 1, D = 6 \Longrightarrow N = 2, D = 4$$

e

$$N = 1, D = 10 \Longrightarrow N = 4, D = 4.$$

Os Lagrangeanos obtidos descrevem os setores bosônicos das versões supersimétricas estendidas. Utilizamos o formalismo superespaço-supercampo de $N = 1$ para descrevermos a versão supersimétrica estendida completa (setor bosônico + setor fermiônico) da teoria.

O procedimento de reduções dimensionais para obter estes modelos supersimétricos estendidos é possível devido ao fato de que, em teorias $N = 1$-supersimétricas em 6 e em 10 dimensões, o setor bosônico tem o mesmo número de graus de liberdade do setor bosônico destas teorias em 4 dimensões com $N = 2$ e $N = 4$ supersimetrias, respectivamente. Uma vez que os setores bosônicos estendidos são identificados, podemos adotar uma formulação de superespaço-supercampo de $N = 1$ em $D = 4$ para escrever os supermultipletos de gauge e de violação da simetria de Lorentz. Assim, finalmente, estabelecemos seu acoplamento dentro da ação supersimétrica $N = 2-$ e $N = 4-$ estendida descrita em um superespaço com $N = 1$. O resultado é mostrado em termos de campos componentes e, assim, chegamos às ações que são versões supersimétricas estendidas do modelo de gauge Abeliano com o termo tipo Chern-Simons que viola a simetria de Lorentz.

Esta tese é baseada em um conjunto de trabalhos realizados em meu período de doutoramento [27, 28, 29, 26]. Propomos as versões supersimétricas estendidas através de duas técnicas de redução dimensional diferentes. No Capítulo 1, utilizamos a técnica de redução dimensional ordinária, o que resulta na ação supersimétrica estendida realizada on-shell. O método de redução dimensional ordinário é também conhecido como redução "à la Scherk" [9, 10]. Este método é bem simples e tem a característica de levar em conta que os campos na dimensão reduzida não possuem nenhuma dependência nas coordenadas extras das dimensões superiores. Essa hipótese facilita o procedimento técnico da redução dimensional, pois simplesmente consideramos as derivadas dos campos em relação a estas "coordenadas extras" como sendo nulas, e definimos as componentes dos campos vetoriais e tensoriais ao longo das dimensões extras como novos campos na teoria.

A outra técnica de redução dimensional que utilizamos nesta tese é discutida nos

Capítulos 2 e 3. Esta técnica, que pode ser encontrada na ref. [12], é conhecida como redução dimensional "à la Legendre" e se baseia nas transformações de Legendre do Lagrangeano em relação às coordenadas a serem reduzidas. Neste caso, o Lagrangeano reduzido é como se fosse uma "densidade Hamiltoniana", mas não obtida a partir da invariância do Lagrangeano por translação temporal explícita, mas por translação em relação à coordenada a ser reduzida. Como podemos ver, este método não é tão direto quanto o método "à la Scherk"; nele os campos mantêm a dependência das "coordenadas extras" do Lagrangeano na dimensão superior, enquanto que a ação não possui tal dependência. Nesta tese, faremos para cada modelo a redução dimensional "à la Legendre" aplicada apenas a uma dimensão. Uma característica importante é que os campos no Lagrangeano reduzido devem obedecer às equações de campo na dimensão superior. Com isto, aparecem as translações em relação à coordenada reduzida, que podem ser interpretadas como transformações de cargas centrais. Devido ao aparecimento dos campos auxiliares, esta técnica permite que o Lagrangeano supersimétrico estendido tenha realização off-shell.

A estrutura geral desta tese encontra-se organizada como segue: no Capítulo 1, adotamos a técnica de redução dimensional "à la Scherk" para contruirmos as versões on-shell com $N = 2$ e $N = 4$ supersimetrias do modelo de gauge Abeliano com o termo de quebra de simetria de Lorentz. Uma vez que partimos do setor bosônico do modelo $N = 1$, o Lagrangeano reduzido obtido corresponde ao setor bosônico do modelo supersimétrico estendido; assim, utilizando o formalismo de superespaço-supercampo de $N = 1$, podemos completar o Lagrangeano com o setor fermiônico e os campos auxiliares necessários. Como dito anteriormente, escolhemos as supersimetrizações $N = 2$ e $N = 4$ estendidas em $D = 4$ devido à sua importância em teorias de campos, mas a possibilidade de utilização deste método pode ser ampliada para outras supersimetrias em outras dimensões, desde que tenhamos um mesmo número de graus de liberdade nas dimensões superiores e na dimensão reduzida.

No Capítulo 2, adotamos a técnica de redução dimensional "à la Legendre"; propomos a supersimetrização $N = 2$-estendida realizada off-shell do modelo de gauge Abeliano em $D = 3$. Escolhemos partir do Lagrangeano com supersimetria-$N = 1$ em componentes, de modo a analisar, de uma forma mais simples, e com mais detalhes, tanto o setor bosônico quanto o setor fermiônico correspondentes ao Lagrangeano, às transformações de supersimetria e à álgebra referente às transformações. Também, apresentamos a supersimetrização estendida na versão on-shell. Em ambos os casos, as transformações de supersimetria-$N = 1$ em $D = 4$, após a redução para $D = 3$, apresentam dois parâmetros espinoriais caracterizando as $N = 2$ supersimetrias. Comparamos os resultados obtidos a partir das duas técnicas e observamos que a álgebra de Lie da versão off-shell apresenta uma transformação de carga central, que está associada à dependência dos campos em $D = 3$ na coordenada reduzida x^3 de $D = 4$. Esta dependência está relacionada ao uso da técnica de redução dimensional á la Scherk.

No Capítulo 3, aplicamos as duas técnicas de redução dimensional abordadas nos Capítulos anteriores para propor as versões supersimétricas $N = 2, 4$ do modelo de gauge Abeliano com o termo de quebra da simetria de Lorentz, agora, com realização off-shell. Em ambos os casos, partimos dos Lagrangeanos bosônicos em suas versões com dimensões mais altas e reduzimos "à la Scherk" para $D = 5$; então, reduzimos "à la Legendre" o Lagrangeano obtido para $D = 4$. Da mesma forma que no Capítulo 1, os Lagrangeanos obtidos são os setores bosônicos das versões $N = 2$ e $N = 4$ supersimétricas do modelo, só que agora off-shell, já que uma das dimensões foi reduzida "à la Legendre". Utilizamos o formalismo de supercampos em um superespaço de $N = 1$ para achar o Lagrangeano completo (bósons + férmions). Analisamos o Lagrangeano em campos componentes e as transformações de cargas centrais para este modelo. Um Apêndice segue, onde se mostram as convenções utilizadas e algumas relações úteis na construção dos Lagrangeanos estudados nos Capítulos 1 e 3.

Finalizando o trabalho, apresentamos, no Capítulo 4, as Conclusões Gerais e Perspectivas de Novos Encaminhamentos, onde discutimos os métodos adotados para a construção dos modelos supersimétricos estendidos e explicitamos possíveis trabalhos que darão continuidade às idéias e técnicas aqui desenvolvidas.

Capítulo 1

Supersimetrias-$N = 2, 4$ on-shell da teoria de gauge Abeliana com violação da simetria de Lorentz

Muito tem sido estudado a respeito da questão da violação de Lorentz nos modelos de gauge, onde é incluido um termo de violação da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons, proposto em [19]. Nesse contexto, tem sido abordada em vários trabalhos a necessidade da preservação da supersimetria nas teorias com violação da simetria de Lorentz. Em especial, ocorre a necessidade de também ser tratadas essas teorias com o número de supersimetrias $N > 1$. Neste capítulo queremos propor uma generalização supersimétrica $N = 2$ e $N = 4$ estendidas realizadas on-shell para o termo de Chern-Simons de quebra da simetria de Lorentz. A versão off-shell será assunto no próximo capítulo.

Na busca por essas generalizações supersimétricas estendidas, partimos dos modelos de gauge Abeliano com o termo de quebra do tipo Chern-Simons nos espaço-tempo de dimensões $D = 6$ e $D = 10$ e adotamos o método de redução dimensional ordinário (à la Sherk), para obtermos uma seção bosônica em $D = 4$ dos modelos supersimétricos $N = 2$ e $N = 4$ estendidos, respectivamente. Isto é possível porque em teorias $N = 1$-supersimétricas em 6 e em 10 dimensões, o setor bosônico tem o mesmo número de graus de liberdade do setor bosônico destas teorias em 4 dimensões com $N = 2$ e $N = 4$ supersimetrias respectivamente [22, 11]. Uma vez que os setores bosônicos são identificados, adotamos uma formulação de superespaço-supercampo de $N = 1$ em $D = 4$ para escrever os supermultipletos de gauge e de violação de Lorentz de fundo para finalmente estabelecer seu acoplamento dentro da ação supersimétrica $N = 2$ e $N = 4$ estendida descrita em um superespaço com $N = 1$. A partir da ação supersimétrica estendida do modelo em termos de supercampos, escrevemos a ação em campos componentes e analizamos a influência dos novos campos dinâmicos e auxiliares na teoria.

A organização geral deste capítulo é a seguinte: na Seção 2, nós apresentamos o método de redução dimensional á la Scherk e aplicamos ao modelo de gauge Abeliano para a redução $D = 6 \rightarrow D = 4$. Em uma subseção apresentamos a versão supersimétrica $N = 2$-estendida do modelo de gauge Abeliano em termos de uma formulação superespaço-supercampo de $N = 1$, e assim, em termos de campos componentes. Na seção 3, nós focamos na tarefa de montar a versão $N = 2$-supersimétrica do termo de Chern-Simons de violação da simetria de Lorentz. Nas seções 4 e 5 trataremos da apresentação $N = 4$-supersimétrica do modelo de gauge Abeliano e do termo de Chern-Simons respectivamente. Finalmente, na seção 6, apresentamos a conclusão com os comentários.

1.1 Redução dimensional "à la Scherk": aplicação ao modelo de gauge Abeliano para $D = 6 \rightarrow D = 4$

O método de redução dimensional ordinário, também conhecido como redução dimensional "à la Scherk", se baseia no argumento de que os campos da teoria não possuem dependência nas coordenadas correspondentes as dimensões a serem reduzidas. Isso implica que as derivadas dos campos em relação a essas coordenadas são tomadas como nulas. Além disso, devemos explicitar as componentes dos campos (no caso vetoriais, tensoriais e espinorias) que correspondem as da dimensões mantidas e as da dimensões extras. Essas componentes extras da dimensão superior são redefinidas como novos campos na teoria.

Vamos aplicar esse método para o modelo de gauge Abeliano reduzindo de $D = 6$ para $D = 4$ [15, 5]. O Lagrangeano de Maxwell em 6 dimensões é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \tag{1.1}$$

onde $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. A conexão $A_{\hat{\mu}}$ pode ser redefinida como:

$$A_{\hat{\mu}} \rightarrow (A_{\mu}, \varphi_1, \varphi_2),$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$. Note que mantivemos as 6 componentes da conexão em 4 dimensões. Agora, consideramos que os campos não têm nenhuma dependência em relação as coordenadas espaço-temporais x^4, x^5 a serem reduzidas. O Lagrangeano em $D = 4$ obtido é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi^*, \tag{1.2}$$

onde pudemos colocar os dois campos escalares em um complexo: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$.

1.1.1 Versão $N = 2$-supersimétrica do modelo de gauge Abeliano

Nesta subseção, vamos utilizar o fato que as teorias em dimensão $D = 6$ tem o mesmo número de graus de liberdade que sua versão $N = 2$-supersimétrica em $D = 4$. Assim, apresentada na equação (1.2) a redução dimensional ordinário do modelo de gauge Abeliano, temos que esse é o setor bosônico da ação supersimétrica $N = 2$ estendida. A completa generalização supersimétrica $N = 2$-estendida do modelo (setor bosônico +

setor fermiônico) pode ser construída usando o formalismo de supercampo em um $N = 1$-superespaço que tem como coordenadas: $(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}_{\dot{a}})$ [22]. A supersimetrização da teoria acima é realizada combinando supercampos em um $N = 1$-superespaço como multipletos que acomodam os campos ordinários e seus respectivos parceiros supersimétricos. Os supercampos que possuem a tarefa de acomodar os campos bosônicos e seus parceiros fermiônicos são o escalar, Φ, e o vetorial, V, imersos no superespaço $N = 1 - D = 4$ e que constituem um multipleto vetorial (Φ, V) de $N = 2 - D = 4$.

O campo vetorial V no gauge de Wess-Zumino é escrito como:

$$V = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}^2\theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2 D, \tag{1.3}$$

e satisfais o vínculo de realidade, $V = V^\dagger$. O supercampo escalar é escrito como

$$\Phi = \varphi + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi + \sqrt{2}\theta\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 f, \tag{1.4}$$

$$\bar{\Phi} = \varphi^* - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^* - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + \bar{\theta}^2 f^*, \tag{1.5}$$

e obedece a condição de quiralidade: $\bar{D}\Phi = D\bar{\Phi} = 0$[1].

O $N = 1$-multipleto scalar Φ é composto de spins $(\frac{1}{2}, 0)$ e o multipleto vetorial V abrange os spins $(1, \frac{1}{2})$. Assim, o hipermultiplete vetorial (Φ, V) em $N = 2$ é composto por spins $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ [22].

A $N = 2$-extensão supersimétrica da ação de Maxwell que contém o Lagrangeano de gauge (1.2) é escrito como:

$$\mathcal{S} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}[\bar{\Phi}\Phi + \frac{1}{2}W^\alpha W_\alpha \delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{2}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\delta(\theta^2)], \tag{1.6}$$

[1] As convensões necessárias estão apresentadas no Apêndice.

onde o tensor intensidade de campo Abeliano em termos de supercampos é dado por:

$$W_a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a V_{WZ}, \qquad \bar{W}_{\dot{a}} = -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_{\dot{a}} V_{WZ}, \tag{1.7}$$

tendo a condição de quiralidade: $\bar{D}W = D\bar{W} = 0$ e $DW = \bar{D}\bar{W}$. Este espandido em termos de θ, tem a forma:

$$\begin{aligned} W_a &= \lambda_a + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\lambda_a - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\lambda_a + 2\theta_a D - i\theta^2\bar{\theta}^{\dot{a}}\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu D \qquad (1.8)\\ &+\sigma^{\mu\nu}_a{}^b\theta_b F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}_a{}^b\sigma^\rho_{b\dot{a}}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\rho F_{\mu\nu} - i\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{a}}\theta^2. \end{aligned}$$

Escrevendo em componentes, o Lagrangeano do modelo tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + D^2 + D^{*2} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + \frac{1}{2}GG^* \tag{1.9}$$

Como podemos notar, a ação (1.6) ou (1.9) é invariante sobre as transformações supersimétricas com $N = 1$, mas está supersimetria é mais ampla, e exibe invariância para $N = 2$.

1.2 Versão $N = 2$-supersimétrica do termo de quebra da simetria de Lorentz

Agora, vamos procurar pela versão $N = 2$-supersimétrica do termo de quebra da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons. Usando o fato do setor bosônico para $N = 2$ em $D = 4$ ser o mesmo do setor bosônico para $N = 1$ em $D = 6$, partimos definindo o termo em $D = 6$ e então fazemos a redução dimensional "à la Scherk" para $D = 4$. O Lagrangeano do setor de gauge com o termo de Chern-Simons em $D = 4$ proposto originalmente em [19] é

$$\mathcal{L}_{br} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa p_\lambda, \tag{1.10}$$

onde p_λ é um vetor de fundo constante que determina uma direção preferencial no espaço-tempo quebrando a simetria de Lorentz. Adotamos em $D = 6$ o termo de Chern-Simons na forma

$$\mathcal{L}_{br} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}} A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\kappa}}T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}}. \tag{1.11}$$

O tensor constante $T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ que existe no pano de fundo do espaço-tempo tem 20 componentes, e pode ser redefinido como

$$T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \rightarrow (R_{\rho\sigma}; S_{\rho\sigma}; \partial_\mu v; \partial_\mu u),$$

onde $\hat{\mu} = \mu, 4, 5$, e consideramos que não há dependencia dos campos nas cooordenadas x^4, x^5. Os campos $R_{\rho\sigma}$ e $S_{\rho\sigma}$ tem 6 componentes cada um, e as outras 8 componentes são redefinidas como 2 vetores que podemos escrever como gradientes dos campos escalares v e u. Assim, o número de componentes é reduzida para 14.

Como foi mostrado na seção anterior, também redefinimos o campos de gauge como $A_{\hat{\mu}} \equiv (A_\mu; \varphi_1; \varphi_2)$. Notemos que $\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}} A_{\hat{\mu}}A_{\hat{\kappa}}\partial_{\hat{\nu}}T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = 0$, então obtemos, depois de integrar por partes, o seguinte Lagrangeano reduzido:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{br} &= -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}A_\kappa\partial_\lambda v + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi_1 R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi_2 S_{\kappa\lambda} \\ &\quad +\frac{1}{2}\varphi_1\partial_\nu\varphi_2\partial^\nu u - \frac{1}{2}\varphi_2\partial_\nu\varphi_1\partial^\nu u. \end{aligned} \tag{1.12}$$

De modo a fazer a supersimetrização do Lagrangeano (1.12) usando o formalismo de superespaço, é conveniente definir alguns campos complexos uma vez que os supercampos são definidos contendo esse tipo de campos. Definimos esses campos complexos como

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} - i\tilde{S}_{\mu\nu}, \\ H_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - i\tilde{R}_{\mu\nu} \\ \varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2, \\ r &= t + iu, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$s = w + iv,$$

Note que tivemos que introduzir os novos campos escalares reais t e w que são campos bosônicos que não aparecem no Lagrangeano bosônico (1.12). Esses campos serão necessários na versão supersimétrica para manter o balanço entre graus de liberdade bosônicos e fermiônicos presentes nos supercampos escalares definidos contendo campos escalares complexos. Cada campo tensorial, $R_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}$, aparecem como a parte real de um campo tensorial complexo cuja parte imaginária é dada em termos de seus respectivos campos duais, como podemos ver em (1.13) e podemos achar em. [25], não tendo assim introduzido novos campos tensoriais.

Os supercampos para o setor de gauge já foram definido anteriormente. Agora, definimos os supercampos que contém os campos de fundo mais seus respectivos parceiros supersimétricos. Esses supercampos são $N = 1$-multipletos que formam um $N = 2$-hipermultipleto, $(S, R, \Sigma_a, \Omega_a)$. Os supercampos escalares que acomodam os campos s, s^*, r e r^* são, respectivamente:

$$S = s + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu s - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box s + \sqrt{2}\theta\xi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 h, \tag{1.14}$$

$$\bar{S} = s^* - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu s^* - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box s^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\xi} + \bar{\theta}^2 h^*, \tag{1.15}$$

$$R = r + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu r - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box r + \sqrt{2}\theta\zeta - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\zeta\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 g, \tag{1.16}$$

$$\bar{R} = r^* - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu r^* - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box r^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\zeta} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta} + \bar{\theta}^2 g^*, \tag{1.17}$$

estes satisfazem as condições de quiralidade: $\bar{D}S = D\bar{S} = \bar{D}R = D\bar{R} = 0$.

Os supercampos espinoriais que contém $R_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu}$ e seus respectivos campos duais são definidos como

$$\begin{aligned}\Sigma_a &= \tau_a + \theta^b(\varepsilon_{ba}\rho + \sigma_{ba}^{\mu\nu}B_{\mu\nu}) + \theta^2 F_a + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\tau_a \\ &+ i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^b\partial_\mu(\varepsilon_{ba}\rho + \sigma_{ba}^{\mu\nu}B_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\tau_a,\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\Sigma}_{\dot{a}} &= \bar{\tau}_{\dot{a}} + \bar{\theta}_{\dot{b}}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^{*} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}B^{*}_{\mu\nu}) + \bar{\theta}^{2}\bar{F}_{\dot{a}} - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{\tau}_{\dot{a}} \\
&\quad -i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\theta_{\dot{b}}\partial_{\mu}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^{*} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}B^{*}_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}\Box\bar{\tau}_{\dot{a}},
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{a} &= \chi_{a} + \theta^{b}(\varepsilon_{ba}\phi + \sigma^{\mu\nu}_{ba}H_{\mu\nu}) + \theta^{2}G_{a} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\chi_{a} \\
&\quad +i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\theta^{b}\partial_{\mu}(\varepsilon_{ba}\phi + \sigma^{\mu\nu}_{ba}H_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}\Box\chi_{a},
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{\dot{a}} &= \bar{\chi}_{\dot{a}} + \bar{\theta}_{\dot{b}}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\phi^{*} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}H^{*}_{\mu\nu}) + \bar{\theta}^{2}\bar{G}_{\dot{a}} - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{\chi}_{\dot{a}} \\
&\quad -i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\theta_{\dot{b}}\partial_{\mu}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\phi^{*} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}H^{*}_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^{2}\bar{\theta}^{2}\Box\bar{\chi}_{\dot{a}},
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

que também são campos quirais: $\bar{D}_{\dot{b}}\Sigma_a = D_b\bar{\Sigma}_{\dot{a}} = \bar{D}_{\dot{b}}\Omega_a = D_b\bar{\Omega}_{\dot{a}} = 0$. Podemos notar que tivemos que introduzir mais dois campos escalares complexos extras, que são os campos de fundo, ρ e ϕ, para manter a iqualdade entre os graus de liberdade bosônico e fermiônico dentro dos multipletos espinoriais.

Agora, estamos interessados em montar a ação supersimétrica. Para isso, devemos identificar as dimensões dos campos e dos supercampos definidos. Baseado na análise dimensional em relação a dimensão de massa $[m] = 1$, temos que as dimensões dos campos no Lagrangeano (1.12) são dadas por:

$$
\begin{aligned}
[A_{\mu}] &= 1, \quad [\varphi_1] = [\varphi_2] = 1, \quad [v] = 0, \\
[R_{\kappa\lambda}] &= [S_{\kappa\lambda}] = 1, \quad [u] = 0.
\end{aligned}
$$

Para verificar as dimensões dos supercampos devemos notar que:

$$
[\theta] = [\bar{\theta}] = -\frac{1}{2},
$$

então

$$
[\int d\theta] = [\int d\bar{\theta}] = [\frac{\partial}{\partial\theta}] = [\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}] = +\frac{1}{2}
$$

e

$$[d^4x] = -4, \qquad [\int d^2\theta] = [\int d^2\bar{\theta}] = +1, \qquad [\int d^4\theta] = +2, \qquad [\int d^4x d^4\theta] = -2.$$

Como a dimensão do supervolume é -2, o integrando (Lagrangeano) deve ter dimensão 2. Partindo da definição dos supercampos e da dimensão dos campos bosônicos, podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
[\Phi] &= [\bar{\Phi}] = 1, \quad [V] = 0, \quad [W_a] = [\bar{W}_{\dot{a}}] = \frac{3}{2}, \\
[S] &= [\bar{S}] = 0, \quad [\Sigma_a] = [\bar{\Sigma}_{\dot{a}}] = [\Omega_a] = [\bar{\Omega}_{\dot{a}}] = \frac{1}{2}, \quad [R] = [\bar{R}] = 0.
\end{aligned}$$

Baseado nessa análise dimensional, e analizando o Lagrangeano bosônico (1.12), propomos a seguinte ação supersimétrica, S_{br}:

$$\begin{aligned}
S_{br} &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}[\frac{1}{4}W^a(D_aV)S + \frac{1}{4}\bar{W}_{\dot{a}}(\bar{D}^{\dot{a}}V)\bar{S} \\
&\quad + \frac{i}{4}\delta(\bar{\theta})W^a(\Phi + \bar{\Phi})\Sigma_a - \frac{i}{4}\delta(\theta)\bar{W}_{\dot{a}}(\Phi + \bar{\Phi})\bar{\Sigma}^{\dot{a}} \\
&\quad + \frac{1}{4}\delta(\bar{\theta})W^a(\Phi - \bar{\Phi})\Omega_a - \frac{1}{4}\delta(\theta)\bar{W}_{\dot{a}}(\Phi - \bar{\Phi})\bar{\Omega}^{\dot{a}} \\
&\quad + \frac{1}{4}\Phi\bar{\Phi}(\bar{R} + R)],
\end{aligned} \tag{1.22}$$

que é invariante sobre as transformações de gauge Abelianas:

$$\delta V = \Lambda - \bar{\Lambda} \tag{1.23}$$

$$\delta\Phi = \delta\bar{\Phi} = \delta S = \delta\bar{S} = \delta R = \delta\bar{R} = \delta\Sigma_a = \delta\bar{\Sigma}^{\dot{a}} = 0. \tag{1.24}$$

Em termos de supercampos, dividimos o Lagrangeano em dois setores:

Setor de gauge : $\{V, \Phi, \bar{\Phi}\}$

Setor de fundo : $\{S, \bar{S}, \Omega_a, \bar{\Omega}^{\dot{a}}, \Sigma_a, \bar{\Sigma}^{\dot{a}}, R, \bar{R}\}$.

e, em componentes, esses dois setores contém os campos a seguir:

$$
\begin{aligned}
Setor\ de\ gauge\ bos\hat{o}nico &: \quad \{A_\mu, \varphi, \varphi^*\} \\
Setor\ de\ gauge\ fermi\hat{o}nico &: \quad \{\lambda, \bar{\lambda}, \psi, \bar{\psi}\} \\
Setor\ de\ fundo\ bos\hat{o}nico &: \quad \{s, s^*, R_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}, \rho, \rho^*, \phi, \phi^*, r, r^*\} \\
Setor\ de\ fundo\ fermi\hat{o}nico &: \quad \{\xi, \bar{\xi}, \tau, \bar{\tau}, F, \bar{F}, \chi, \bar{\chi}, G, \bar{G}, \zeta, \bar{\zeta}\}.
\end{aligned}
$$

Entretanto, observamos que a ação (1.22) é invariante sobre as transformações de supersimetria para $N = 1$. Os campos-componentes da teoria com $N = 2$ supersimetrias são acomodados nos $N = 1$-supercampos dados nas equações (1.14)-(1.21). De fato, a ação (1.22) demonstra uma supersimetria maior, a $N = 2$-supersimetria, realizada em termos da formulação de $N = 1$-superespaço.

O Lagrangeano (1.22) na versão de campos-componentes é mostrado a seguir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{br} \; = \; & \frac{i}{8}\partial_\mu(s - s^*)\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}A_\nu - \frac{1}{8}(s + s^*)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D^2(s + s^*) \\
& -\frac{1}{2}is\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \frac{1}{2}is^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\xi + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\xi} \\
& +\frac{1}{4}\lambda\lambda h + \frac{1}{4}\bar{\lambda}\bar{\lambda}h^* - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\xi D - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\xi}D \\
& \frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi + \varphi^*)(B_{\kappa\lambda} + B^*_{\kappa\lambda}) + \frac{i}{8}F^{\mu\nu}(B_{\mu\nu} - B^*_{\mu\nu})(\varphi + \varphi^*) \\
& -\frac{i\sqrt{2}}{8}\tau\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tau\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(\varphi + \varphi^*) \\
& -\frac{1}{4}\bar{\tau}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(\varphi + \varphi^*) + \frac{i\sqrt{2}}{4}\psi\sigma^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\lambda + \frac{i\sqrt{2}}{4}\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}B^*_{\mu\nu}\bar{\lambda} \\
& -\frac{i}{2}D(\varphi + \varphi^*)\rho + \frac{i}{2}D^*(\varphi + \varphi^*)\rho^* \\
& +\frac{i\sqrt{2}}{8}\lambda\psi\rho - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\lambda}\bar{\psi}\rho^* - \frac{i\sqrt{2}}{4}D\psi\tau + \frac{i\sqrt{2}}{4}D^*\bar{\psi}\bar{\tau} \qquad (1.25) \\
& +\frac{i}{4}f\lambda\tau - \frac{i}{4}f^*\bar{\lambda}\bar{\tau} + \frac{i}{4}(\varphi + \varphi^*)\lambda F - \frac{i}{4}(\varphi + \varphi^*)\bar{\lambda}\bar{F} \\
& -\frac{i}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi - \varphi^*)(H_{\kappa\lambda} + H^*_{\kappa\lambda}) + \frac{1}{8}F^{\mu\nu}(H_{\kappa\lambda} - H^*_{\kappa\lambda})(\varphi - \varphi^*) \\
& -\frac{\sqrt{2}}{8}\chi\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{2}}{8}\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}F_{\mu\nu} - \frac{i}{4}\chi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(\varphi - \varphi^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{i}{4}\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(\varphi-\varphi^{*})+\frac{\sqrt{2}}{4}\psi\sigma^{\mu\nu}H_{\mu\nu}\lambda-\frac{\sqrt{2}}{4}\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}H^{*}_{\mu\nu}\bar{\lambda}\\
&-\frac{1}{2}D(\varphi-\varphi^{*})\phi+\frac{1}{2}D^{*}(\varphi-\varphi^{*})\phi^{*}\\
&+\frac{\sqrt{2}}{8}\lambda\psi\phi+\frac{\sqrt{2}}{8}\bar{\lambda}\bar{\psi}\phi^{*}-\frac{\sqrt{2}}{4}D\psi\chi-\frac{\sqrt{2}}{4}D^{*}\bar{\psi}\bar{\chi}\\
&+\frac{1}{4}f\lambda\chi+\frac{1}{4}f^{*}\bar{\lambda}\bar{\chi}+\frac{1}{4}(\varphi-\varphi^{*})\lambda G-\frac{1}{4}(\varphi-\varphi^{*})\bar{\lambda}\bar{G}\\
&+\frac{1}{8}\varphi\partial_{\mu}\varphi^{*}\partial^{\mu}(r-r^{*})-\frac{1}{8}\varphi^{*}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}(r-r^{*})\\
&+\frac{1}{4}\partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi^{*}(r+r^{*})-\frac{1}{8}\varphi\varphi^{*}\Box(r+r^{*})-\frac{i}{4}\psi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}(r+r^{*})\\
&+\frac{1}{4}ff^{*}(r+r^{*})-\frac{i}{4}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}\partial_{\mu}r^{*}\\
&-\frac{i}{4}\varphi\zeta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}-\frac{i}{4}\varphi^{*}\psi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\zeta}-\frac{i}{4}\psi\sigma^{\mu}\bar{\zeta}\partial_{\mu}\varphi^{*}\\
&+\frac{1}{4}\varphi f^{*}g+\frac{1}{4}f\varphi^{*}g^{*}-\frac{1}{4}f^{*}\psi\zeta-\frac{1}{4}f\bar{\psi}\bar{\zeta}.
\end{aligned}
$$

Ressaltamos algumas partes do Lagrangeano acima correspondentes a ação bosônica (1.12) na ação completa em campos-componentes acima:

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{8}\partial_{\mu}(s-s^{*})\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}A_{\nu} &= -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}A_{\kappa}\partial_{\lambda}v,\\
\frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi+\varphi^{*})(B_{\kappa\lambda}+B^{*}_{\kappa\lambda}) &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi_{1}R_{\kappa\lambda},\\
-\frac{i}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi-\varphi^{*})(H_{\kappa\lambda}+H^{*}_{\kappa\lambda}) &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi_{2}S_{\kappa\lambda},\\
\frac{1}{8}\varphi\partial_{\mu}\varphi^{*}\partial^{\mu}(r-r^{*})-\frac{1}{8}\varphi^{*}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}(r-r^{*}) &= \frac{1}{2}\varphi_{1}\partial_{\nu}\varphi_{2}\partial^{\nu}u-\frac{1}{2}\varphi_{2}\partial_{\nu}\varphi_{1}\partial^{\nu}u.
\end{aligned}
$$

Podemos notar que o Lagrangeano (1.25) descreve o setor bosônico (1.12) mais seu correspondente setor fermiônico. Identificamos na ação (1.25) a versão supersimétrica para $N=1$ do termo de Chern-Simons presente em [8], onde o primeito termo é o proposto em [19], onde foi considerado o vetor de fundo constante como o gradiente de um campo escalar. Como o vetor gradiente é uma constante, temos que o campo escalar deve ter a forma $s=\alpha+\beta^{\mu}x_{\mu}$. Notamos no Lagrangeano a presença dos campos escalares bosônicos reais, $t=s+s^{*}$ e $u=r+r^{*}$, e dos campos escalares complexos, ρ e ϕ, que não aparecem no Lagrangeano (1.12). Esses campos escalares aparecem na generalização supersimétrica para manter o mesmo número de graus de liberdade entre férmions e bósons. Podemos notar que os campos bosônicos $D, D^*, f, f^*, h, h^*, g$ e g^* não tem dinâmica, e funcionam como campos auxiliares.

1.3 Versão $N = 4$-supersimétrica do modelo de gauge Abeliano

Assim como foi feito para o caso $N = 2$-supersimétrico, podemos utilizar o método de redução dimensional ordinário para obtermos um modelo de gauge com $N = 4$ supersimetrias realizado on-shell. De modo a acharmos do setor bosônico para esse modelo, correspondendo ao mesmo número de graus de liberdade, devemos partir do Lagrangeano de gauge em $D = 10$. O setor bosônico de gauge pode ser obtido através de uma redução dimensional de $D = 10$ para $D = 4$. O Lagrangeano de Maxwell em 10 dimensões é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \tag{1.26}$$

onde $\hat{\mu} = \mu, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$. A conexão $A_{\hat{\mu}}$ pode ser redefinida como:

$$A_{\hat{\mu}} \rightarrow (A_\mu, \varphi^I,\ I = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Note que as dez componetes de campo são mantidas. Fazendo a redução dimensional ordinária para $D = 4$, adotamos o fato que os campos não têm dependência das coordenadas $x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9$, obtemos então o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi^I \partial^\mu \varphi^I. \tag{1.27}$$

Este é o setor bosônico da versão supersimétrica $N = 4$-estendida do Lagrangeano (1.26). A supersimetrização da teoria acima é realizada definindo supercampos no $N = 1$-superespaço como multipletos contendo os campos e seus parceiros supersimétricos. Os supercampos que contém estes campos são seis supercampos escalares quirais, Φ^I, e um supercampo vetorial, V, escritos no $N = 1$-superespaço. Estes campos juntos formam um hipermutipleto vetorial (Φ^I, V) na supersimetria $N = 4$-estendida.

O campo vetorial V como foi definido em (1.3) satisfaz a condição de realidade $V = V^\dagger$. Os seis supercampos escalares são escritos como

$$\Phi^I = \varphi^I + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^I - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi^I + \sqrt{2}\theta\psi^I - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi^I\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 f^I, \tag{1.28}$$

$$\bar{\Phi}^I = \varphi^{*I} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^{*I} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi^{*I} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^I + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^I + \bar{\theta}^2 f^{*I}, \tag{1.29}$$

onde obedecem a condição de quiralidade: $\bar{D}\Phi^I = D\bar{\Phi}^I = 0$.

A ação, que nos dá a ação $N = 4$-supersimétrica correspondente a Lagrangian (1.27), é obtida em termos de supercampos e é dada por

$$\mathcal{S} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}[\bar{\Phi}^I\Phi^I + \frac{1}{2}W^\alpha W_\alpha\delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{2}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\delta(\theta^2)], \tag{1.30}$$

onde "superfield-strength" Abeliano foi definido em (1.7).

Podemos notar que a ação (1.30) é invariante sobre as transformações $N = 1$-supersimétricas e que esta também tem a invariância para $N = 4$. O Lagrangeano do modelo, em campos-componentes, adquire a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + D^2 + D^{*2} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu\varphi^{*I} - \frac{i}{2}\psi^I\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^I + \frac{1}{2}G^I G^{*I} \tag{1.31}$$

.

1.4 Versão $N = 4$-supersimétrica do termo de quebra da simetria de Lorentz

A generalização supersimétrica $N = 4$ estendida do termo de Chern-Simons Abeliano que quebra a simetria de Lorentz em $D = 4$ pode ser contruído, assim como o termo de gauge, dentro de um superespaço de $N = 1$, com coordenadas $(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}_{\dot{a}})$ [22]. Nesse sentido, escrevemos o termo de Chern-Simons para $D = 10$ e fazemos a redução dimensional para $D = 4$. Propomos para $D = 10$ o termo de Chern-Simons na forma

$$\mathcal{L}_{br} = \frac{1}{7!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\delta}\hat{\tau}\hat{\beta}\hat{\gamma}} A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\kappa}}T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\delta}\hat{\tau}\hat{\beta}\hat{\gamma}}. \tag{1.32}$$

O tensor de fundo $T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$ tem 120 componentes, podendo então ser redefinido como

$$T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}} \longrightarrow (R^I_{\rho\sigma}; \partial_\mu v; \partial_\mu u^{IJ}),$$

onde $\hat{\mu} = \mu, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ é um índice do espaço-tempo e $I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ é um índice interno. Nessa nova redefinição, temos 6 tensores anti-simétricos $R^I_{\rho\sigma}$ com 6 componentes cada e 15 vetores escritos como gradientes de 15 campos escalares representados pelos índices anti-simétricos I, J. Assim, devido a definição desses gradientes, o número de componentes é reduzido para 52. O campo de gauge foi redefinido na seção anterior: $A_{\hat{\mu}} \rightarrow (A_\mu; \varphi^I)$. De forma a fazer a redução dimensional á la Scherk, consideramos nenhuma dependência dos campos com as coordenadas $x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9$.

Observando que $\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\delta}\hat{\tau}\hat{\beta}\hat{\gamma}} A_{\hat{\mu}}A_{\hat{\kappa}}\partial_{\hat{\nu}}T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\delta}\hat{\tau}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = 0$, obtemos, integrando por partes, a Lagrangian a seguir:

$$\mathcal{L}_{br} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}A_\kappa\partial_\lambda v + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi^I R^I_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\varphi^I\partial_\nu\varphi^J\partial^\nu u^{IJ}. \tag{1.33}$$

De forma análoga a que foi feita no caso $N = 2$, temos que definir alguns campos reais de forma a completar os campos complexos que são encontrados nos supercampos. Assim, definimos esses campos complexos como:

$$\begin{aligned}
B^I_{\mu\nu} &= R^I_{\mu\nu} - i\tilde{R}^I_{\mu\nu}, \\
\hat{\varphi}^I &= \varphi^I + i\beta^I, \\
r^{IJ} &= t^{IJ} + iu^{IJ}, \\
s &= w + iv.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Note que os novos campos escalares introduzidos, β^I, t^{IJ} e w, não estão presentes no Lagrangeano bosônico (1.33). Como já mensionamos, esses campos são introduzidos na versão supersimétrica para manter o mesmo número de graus de liberdade entre os setores bosônicos e fermiônicos de acordo com as definições dos supercampos. Observe que cada campo tensorial, $R^I_{\mu\nu}$, aparece como a parte real de campos tensoriais complexos, cuja parte imaginária é dada pelo seus respectivos duais.

Agora, definimos os supercampos que acomodam os campos fundamentais do setor de quebra e seus respectivos parceiros supersimétricos. Esses supercampos são $N = 1$-multipletos que combinados forma um $N = 4$-hipermultipleto, (S, R^{IJ}, Σ^I_a). O supercampo escalar que acomoda os campos s, s^*, r^{*iJ} e r^{IJ} são, respectivamente, S e $\bar{S}$ (definidos nas equações (1.14) e (1.15)), e R^{IJ} e $\bar{R}^{IJ}$ como definições abaixo:

$$R^{IJ} = r^{IJ} + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu r^{IJ} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box r^{IJ} + \sqrt{2}\theta\zeta^{IJ} - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\zeta^{IJ}\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 g^{IJ}, \tag{1.35}$$

$$\bar{R}^{IJ} = r^{*IJ} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu r^{*IJ} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box r^{*IJ} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\zeta}^{IJ} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}^{IJ} + \bar{\theta}^2 g^{*IJ}. \tag{1.36}$$

Estes, satisfazendo as condições de quiralidade: $\bar{D}S = D\bar{S} = \bar{D}R^{IJ} = D\bar{R}^{IJ} = 0$.

Os supercampos espinoriais que contém os campos tensoriais $R^I_{\mu\nu}$, seus respectivos duais e parceiros supersimétricos são escritos como:

$$\begin{aligned}\Sigma^I_a &= \tau^I_a + \theta^b(\varepsilon_{ba}\rho^I + \sigma^{\mu\nu}_{ba}B^I_{\mu\nu}) + \theta^2 F^I_a + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\tau^I_a \\ &\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^b\partial_\mu(\varepsilon_{ba}\rho^I + \sigma^{\mu\nu}_{ba}B^I_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\tau^I_a,\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}^I_{\dot{a}} &= \bar{\tau}^I_{\dot{a}} + \bar{\theta}_{\dot{b}}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^{*I} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}B^{*I}_{\mu\nu}) + \bar{\theta}^2\bar{F}^I_{\dot{a}} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\tau}^I_{\dot{a}} \\ &\quad - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta_{\dot{b}}\partial_\mu(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^{*I} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}B^{*I}_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\bar{\tau}^I_{\dot{a}},\end{aligned} \tag{1.38}$$

que também são quirais $\bar{D}_{\dot{b}}\Sigma^I_a = D_b\bar{\Sigma}^I_{\dot{a}} = 0$. Podemos notar que nos supercampos espinoriais, tivemos que introduzir seis campos escalares complexos de fundo extras, ρ^I, de modo a manter a igualdade entre os números de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos.

Baseado em análise dimensional para o setor bosônico, como feito para o caso $N = 2$, e notando que alguns supercampos agora possuem índices de simetria interna, propomos a seguinte ação $N = 4$-supersimétrica:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{br} &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}[\frac{1}{4}W^a(D_aV)S + \frac{1}{4}\bar{W}_{\dot{a}}(\bar{D}^{\dot{a}}V)\bar{S} + \frac{i}{4}\delta(\bar{\theta})W^a(\Phi^I + \bar{\Phi}^I)\Sigma^I_a \qquad (1.39)\\
&-\frac{i}{4}\delta(\theta)\bar{W}_{\dot{a}}(\Phi^I + \bar{\Phi}^I)\bar{\Sigma}^{\dot{a}I} + \frac{1}{4}\Phi^I\bar{\Phi}^J(R^{IJ} - \bar{R}^{IJ})],
\end{aligned}
$$

que é invariante sobre transformações de gauge:

$$
\begin{aligned}
\delta V &= \Lambda - \bar{\Lambda} &(1.40)\\
\delta\Phi^I &= \delta\bar{\Phi}^I = \delta S = \delta\bar{S} = \delta R^{IJ} = \delta\bar{R}^{IJ} = \delta\Sigma^I_a = \delta\bar{\Sigma}^{\dot{a}I} = 0. &(1.41)
\end{aligned}
$$

Em termos de supercampos, podemos dividir o Lagrangeano de $N = 4$ em dois setores:

$$
\begin{aligned}
\textit{Setor de gauge} &: \{V, \Phi^I\}\\
\textit{Sector de fundo} &: \{\Sigma^I_a, \bar{\Sigma}^{\dot{a}I}, S, \bar{S}, R^{IJ}, \bar{R}^{IJ}\},
\end{aligned}
$$

que, em componentes, esses dois setores se apresentam como a seguir:

$$
\begin{aligned}
\textit{Setor de gauge bosônico} &: \{A_\mu, \varphi^I, \varphi^{*I}\}\\
\textit{Setor de gauge fermiônico} &: \{\lambda, \bar{\lambda}, \psi^I, \bar{\psi}^I\}\\
\textit{Setor de fundo bosônico} &: \{s, s^*, R^I_{\mu\nu}, \rho^I, \rho^{*I}, r^{IJ}, r^{*IJ}\}\\
\textit{Setor de fundo fermiônico} &: \{\xi, \bar{\xi}, \tau^I, \bar{\tau}^I, F^I, \bar{F}^I, \zeta^{IJ}, \bar{\zeta}^{IJ}\}.
\end{aligned}
$$

Podemos observar que a ação (1.39) é invariante sobre transformações $N = 1$-supersimétricas e que existe uma invariância maior, a da $N = 4$-supersimetria. Que neste caso é on-shell.

Este Lagrangeano-$N=4$ em sua versão em campos componentes é mostrado a seguir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{br} = {} & \frac{i}{8}\partial_\mu(s-s^*)\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}A_\nu - \frac{1}{8}(s+s^*)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D^2(s+s^*) \\
& -\frac{1}{2}is\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \frac{1}{2}is^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\xi + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\xi} \\
& +\frac{1}{4}\lambda\lambda h + \frac{1}{4}\bar{\lambda}\bar{\lambda}h^* - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\xi D - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\xi}D \\
& \frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi^I+\varphi^{*I})(B^I_{\kappa\lambda}+B^{*I}_{\kappa\lambda}) + \frac{i}{8}F^{\mu\nu}(B^I_{\mu\nu}-B^{*I}_{\mu\nu})(\varphi^I+\varphi^{*I}) \\
& -\frac{i\sqrt{2}}{8}\tau^I\sigma^{\mu\nu}\psi^I F_{\mu\nu} - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\tau}^I\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}^I F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tau^I\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(\varphi^I+\varphi^{*I}) \\
& -\frac{1}{4}\bar{\tau}^I\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(\varphi^I+\varphi^{*I}) + \frac{i\sqrt{2}}{4}\psi^I\sigma^{\mu\nu}B^I_{\mu\nu}\lambda + \frac{i\sqrt{2}}{4}\bar{\psi}^I\bar{\sigma}^{\mu\nu}B^*_{\mu\nu}\bar{\lambda}^I \\
& -\frac{i}{2}D(\varphi^I+\varphi^{*I})\rho^I + \frac{i}{2}D^*(\varphi^I+\varphi^{*I})\rho^{*I} \\
& +\frac{i\sqrt{2}}{8}\lambda\psi^I\rho^I - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\lambda}\bar{\psi}^I\rho^{*I} - \frac{i\sqrt{2}}{4}D\psi^I\tau^I + \frac{i\sqrt{2}}{4}D^*\bar{\psi}^I\bar{\tau}^I \\
& +\frac{i}{4}f^I\lambda\tau^I - \frac{i}{4}f^{*I}\bar{\lambda}\bar{\tau}^I + \frac{i}{4}(\varphi^I+\varphi^{*I})\lambda F^I - \frac{i}{4}(\varphi^I+\varphi^{*I})\bar{\lambda}\bar{F}^I \\
& +\frac{1}{8}\varphi^I\partial_\mu\varphi^{*J}\partial^\mu(r^{IJ}+r^{*IJ}) - \frac{1}{8}\varphi^{*J}\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu(r^{IJ}+r^{*IJ}) \\
& +\frac{1}{4}\partial^\mu\varphi^I\partial_\mu\varphi^{*J}(r^{IJ}-r^{*IJ}) - \frac{1}{8}\varphi^I\varphi^{*J}\Box(r^{IJ}-r^{*IJ}) - \frac{i}{4}\psi^I\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^J(r^{IJ}-r^{*IJ}) \\
& +\frac{1}{4}f^If^{*J}(r^{IJ}-r^{*IJ}) + \frac{i}{4}\psi^I\sigma^\mu\bar{\psi}^J\partial_\mu r^{*IJ} \\
& -\frac{i}{4}\varphi^I\zeta^{IJ}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^J + \frac{i}{4}\varphi^{*J}\psi^I\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}^{IJ} + \frac{i}{4}\psi^I\sigma^\mu\bar{\zeta}^{IJ}\partial_\mu\varphi^{*J} \\
& +\frac{1}{4}\varphi^If^{*J}g^{IJ} - \frac{1}{4}f^I\varphi^{*J}g^{*IJ} - \frac{1}{4}f^{*J}\psi^I\zeta^{IJ} + \frac{1}{4}f^I\bar{\psi}^J\bar{\zeta}^{IJ}.
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

Podemos verificar a presença do setor bosônico (1.33) através das relações dadas a seguir:

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{8}\partial_\mu(s-s^*)\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}A_\nu &= -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}A_\kappa\partial_\lambda v, \\
\frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi^I+\varphi^{*I})(B^I_{\kappa\lambda}+B^{*I}_{\kappa\lambda}) &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi^I R^I_{\kappa\lambda}, \\
\frac{1}{8}\varphi^I\partial_\mu\varphi^{*J}\partial^\mu(r^{IJ}+r^{*IJ}) - \frac{1}{8}\varphi^{*J}\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu(r^{IJ}+r^{*IJ}) &= \frac{1}{2}(\varphi^I\partial_\nu\varphi^J+\beta^I\partial_\nu\beta^J)\partial^\nu u^{IJ}.
\end{aligned}
$$

Podemos notar que o Lagrangeano (1.42) acomoda o setor bosônico (1.33). Re-obtemos aqui o setor de $N=1$- e o setor $N=2$-supersimétrico para o termo de quebra de simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons presentes na ref. [8] e na equação(1.25), respectivamente. Notamos que o Lagrangeano de $N = 4$ é bastante similar a de $N = 2$, mas agora, existindo um índice interno em vários campos. Os campos β^I, t, u^{IJ} e ρ^{IJ}, que não aparecem no Lagrangeano bosônico (1.33), foram introduzidos de modo a manter a iqualdade entre os números de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Podemos ver que os campos bosônicos $D, D^*, f^I, f^{*I}, h, h^*, g^{IJ}$ e g^{*IJ} funcionam como campos auxiliares. Os campos bosônicos $s, s^*, R^I_{\mu\nu}, \rho^I, \rho^{*I}, r^{IJ}, r^{*IJ}$ e os campos fermiônicos $\xi, \bar{\xi}, \tau^I, \bar{\tau}^I, F^I, \bar{F}^I, \zeta^{IJ}, \bar{\zeta}^{IJ}$ funcionam como campos de fundo, tendo como função quebrar a simetria de Lorentz.

1.5 Comentários finais

No importante contexto do estudo das teorias de gauge onde é incluido o termo de Chern-Simons que mantém a invariante de gauge, mas com a simetria de Lorentz violada, propusemos aqui as versões Abelianas supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ estendidas desse modelo. A ação de $N = 2$ em termos de supercampos pode ser escrita somando as equações (1.6) e (1.22) e o Lagrangeano correspondente, em campos-componentes, pode ser obtido somando as equações (1.9) e (1.25). Para o modelo em $N = 4$, em supercampos a ação é dada pela soma das equações (1.30) e (1.39), e em campos-componentes, pela soma de (1.31) e (1.42).

Estas generalizações supersimétricas estendidas puderam ser achadas de um modo simples com a ajuda do método de redução dimensional; aqui, escolhemos o método "à la Scherk", que nos forneceu uma ação invariante on-shell, mas também é interessante contemplar outras possibilidades, tais como o método "à la Legendre" ou à la Kaluza-Klein ou outros. No próximo capítulo utilizaremos o método de redução "à la Legendre" para uma das coordenadas tipo-espaço, isto nos possibilitará acharmos uma ação invariante off-shell.

Capítulo 2

Redução dimensional "à la Legendre" e supersimetrias estendidas off-shell

No capítulo anterior desenvolvemos as versões supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ estendidas realizadas on-shell para o modelo de gauge Abeliano com o termo de quebra da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons (ref. [29]). Utilizamos para isso a técnica de redução dimensional ordinária (à la Scherk) para os setor bosônicos em $D = 6$ e $D = 10$ respectivamente. Esse procedimento foi possível porque os setores bosônicos na dimensão reduzida ($D = 4$) correspondiam aos setores bosônicos de suas generalizações supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ estendidas respectivamente. Utilizamos o formalismo superespaço-supercampo para $N = 1$ para obtermos os Lagrangeanos completos (setor bosônico + setor fermiônico) das teorias. Notamos que a técnica de redução dimensional trás um grande simplificação na obtenção das teorias supersimétricas estendidas já que não precisamos trabalhar com superespaços estendidos.

Na maior parte dos casos é usada a técnica de redução dimensional ordinária devido a sua maior simplicidade. Na realidade, existem na literatura várias técnicas de redução dimensional, tais como "à la Scherk" [9, 10], "à la Legendre" [12], à la Kaluza-Klein [13, 2], à la Witten-Manton [3, 7, 4], entre outras. No presente capítulo, apresentamos a técnica de redução dimensional baseada nas transformações de Legendre, também chamada de redução dimensional "à la Legendre". Essa técnica está apresentada no artigo [12] onde é mostrado que a supersimetria estendida tem realização off-shell se for obtida através do procedimento de redução dimensional desde que a técnica "à la Legendre" seja aplicada a uma das coordenadas tipo-espaço. Esse artigo aplica a técnica de redução dimensional "à la Legendre" na construção das versões supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ estendidas da teoria de Yang-Mills em $D = 4$ realizadas off-shell. De uma forma diferente, é abordado no artigo [11] a extensão supersimétrica obtida através da redução dimensional "à la Scherk" do modelo de Yang-Mills $N = 1$-supersimétrico em componentes em $D = 6$ e em $D = 10$ respectivamente. Nesse caso observamos que as supersimetrias obtidas são realizadas on-shell.

A técnica de redução dimensional "à la Legendre" não é tão direta como a técnica "à la Scherk", sua idéia principal é baseada no Hamiltoniano com a diferença de não ser com respeito ao tempo, mas com respeito a coordenada a ser reduzida (pode ser reduzida "à la Legendre" mais de uma dimensão, porém, este caso não será de interesse neste trabalho). Nesta técnica, os campos e o Lagrangeano reduzido dependem da coordenada extra, mas a ação reduzida não tem essa dependência. Deste modo, os campos têm que obedecer às equações de campo na dimensão superior. Essas equações se tornam vínculos do Lagrangeano reduzido. Os momentos canônicos correspondentes as coordenadas reduzidas aparecem como campos auxiliares no caso supersimétrico, o que vai permitir um fechamento off-shell da álgebra já que esta fecha sem a exigência das equações de campo na dimensão reduzida. Outra consequência importante dessa técnica de redução é a dependência dos campos na dimensão extra. As translações em relação a coordenadas extra correspondem às transformações de cargas centrais onde a dimensão extra pode ser interpretada como carga central.

De forma a analizarmos as diferenças entre as supersimetrizações estendidas obtidas a partir das técnicas de redução dimensional "à la Legendre" e "à la Scherk", abordaremos as reduções dimensionais partindo da teoria de gauge Abeliana $N = 1$-supersimétrica on-shell em componentes em $D = 4$ reduzindo para $D = 3$. Com isso, propomos a versão $N = 2$-supersimétrica realizada off-shell do modelo de gauge planar ($D = 3$) utilizando a técnica de redução dimensional "à la Legendre" e discutimos a diferença com a versão on-shell obtida através da técnica "à la Scherk". Como partimos do Lagrangeano e das transformações de supersimetria em componentes, podemos analizar mais claramente as transformações e a álgebra de $N = 2$-supersimetria em $D = 3$.

A divisão deste capítulo é dada em quatro seções. Na primeira seção, apresentamos a técnica de redução dimensional "à la Legendre" e então na segunda seção aplicamos essa técnica para propor uma versão $N = 2$-supersimétrica realizada off-shell do modelo de gauge Abeliano em $D = 3$. Nessa seção investigamos as transformações de supersimetria em $D = 3$ que correspondem a transformações com $N = 2$ supersimetrias. Como os campos dependem da coordenada extra, a álgebra de $N = 2$, que contém o comutador entre duas transformação de supersimetria, aparece com a translação em relação a coordenada extra, que é interpretada como transformação de carga central. Na terceira seção apresentamos a versão on-shell desse modelo $N = 2$-supersimétrico obtido através da redução dimensional "à la Scherk" e fazemos uma comparação com os resultado obtidos na segunda seção. Observamos que a versão "à la Scherk" pode ser obtida a partir da "à la Legendre" introduzindo no Lagrangeano a equação de campo para o campo auxiliar. Como uma consequência esperada, o Lagrangeano antes off-shell volta a ser on-shell. A não dependência dos campos em relação a coordenada reduzida faz com que a álgebra obtida não possua a transformação de carga central que aparece para a redução "à la Legendre". Nessa comparação avaliamos as vantagens da utilização da redução dimensional "à la Legendre". Na quarta seção apresentamos os comentários finais.

2.1 A técnica de redução dimensional "à la Legendre"

Nesta tese, utilizamos duas técnicas de redução dimensional: a redução "à la Scherk", já apresentada no capítulo anterior, e a redução "à la Legendre" que será apresentada nesta seção. Nas seções seguintes aplicaremos as técnicas de redução dimensional "à la Scherk" e "à la Legendre" para fazer a redução dimensional de $D = 4$ para $D = 3$ do modelo de gauge Abeliano $N = 1$-supersimétrico realizado on-shell.

Como de interesse nessa tese, apresentaremos a técnica aplicada na redução de apenas uma dimensão, já que isso é suficiente para termos os campos auxiliares que permitem uma supersimetrização estendida off-shell. A dimensão a ser reduzida pode ser correspondente a qualquer uma das coordenada, no entanto, vamos apresentar a técnica aplicada ao Lagrangeano em D dimensões reduzindo a coordenada tipo-espaço x^{D-1}. Consideramos que para o espaço-tempo de dimensão D, uma coordenada é tipo-tempo e as demais $D-1$ coordenadas são do tipo-espaço.

A técnica de redução dimensional "à la Legendre" se baseia em uma situação particular da transformação de Legendre do Lagrangeano. A idéia é semelhante a do formalismo Hamiltoniano. A densidade Hamiltoniana é a transformação de Legendre do Lagrangeano (como conveniente, chamamos a densidade Lagrangeana simplesmente de Lagrangeano) com respeito ao tempo. Sabemos que a densidade Hamiltoneana tem uma dependência no tempo ($\frac{d}{dt}\mathcal{H} \neq 0$), mas a Hamiltoneana é invariante sobre translações temporais ($\frac{d}{dt}H = 0$). A idéia é partir de um Lagrangeano $\mathcal{L}_D$ em D dimensões (com coordenadas $x^0, ..., x^{D-1}$) e obter o Lagrangeano $\mathcal{L}_{D-1}$ (em $D-1$ dimensões) como um tipo de "densidade Hamiltoneana" com respeito a coordenada x^{D-1}.

O Lagrangeano reduzido $\mathcal{L}_{D-1}$, ao contrário do método "à la Scherk", depende da coordenada x^{D-1}:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{D-1}}{\partial x^{D-1}} \neq 0. \tag{2.1}$$

Entretanto, a ação reduzida deve ser independente de x^{D-1}:

$$\frac{\partial S_{D-1}}{\partial x^{D-1}} = 0. \tag{2.2}$$

De modo a achar o Lagrangeano $\mathcal{L}_{D-1}$ a partir do Lagrangeano $\mathcal{L}_D$, fazemos um procedimento similar ao que é feito para obter a Hamiltoneana, mas de uma forma diferente, não é feito em respeito ao tempo, mas em respeito a coordenada x^{D-1}. Supomos que $\mathcal{L}_D$ seja um Lagrangeano de um campo qualquer $\varphi = (\varphi, A_{\hat{\mu}}, \Psi, ...)$ e suas derivadas e que não tenha dependência explícita em x^{D-1} (apenas implícita):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial x^{D-1}} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}} + \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{\hat{\mu}}\varphi}\frac{\partial \partial_{\hat{\mu}}\varphi}{\partial x^{D-1}}, \tag{2.3}$$

onde $\hat{\mu} = 0, ..., D-1$. Se fizermos a integração por partes, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial x^{D-1}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \varphi} - \partial_{\hat{\mu}}\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{\hat{\mu}}\varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}} + \partial_{\hat{\mu}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{\hat{\mu}}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right). \tag{2.4}$$

Considerando que as equações de campo em D dimensões são satisfeitas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \varphi} - \partial_{\hat{\mu}}\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{\hat{\mu}}\varphi} = 0, \tag{2.5}$$

então (2.4) passa a ter a forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial x^{D-1}} = \partial_{\hat{\mu}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{\hat{\mu}}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right). \tag{2.6}$$

Considerando $\mu = 0, ..., D-2$, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial x^{D-1}} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{\mu}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right) + \partial_{D-1}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{D-1}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right). \tag{2.7}$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial x^{D-1}}\left(\mathcal{L}_D - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{D-1}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_\mu \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right). \tag{2.8}$$

Se integramos essa expressão no $D-1$-volume no espaço-tempo:

$$\frac{\partial}{\partial x^{D-1}}\int d^{D-1}x\left(\mathcal{L}_D - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{D-1}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right) = \int d^{D-1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_\mu \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}\right), \tag{2.9}$$

notamos que o termo no lado direito da equação (2.9) se torna uma integral na hipersuperfície e assim temos que a integral é nula porque φ deve ser tomada fixo. Então, podemos definir um Lagrangeano $\mathcal{L}_{D-1}$ que pode ser tomada como o negativo da "Hamiltoneana" com respeito a coordenada x^{D-1} como:

$$\mathcal{L}_{D-1} = -\mathcal{H}_D = \mathcal{L}_D - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{D-1}\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{D-1}}. \tag{2.10}$$

Nesse Lagrangeano reduzida, novos campos auxiliares aparecem; eles são relacionados com o momento canonico:

$$\pi^{\hat{\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \partial_{D-1}\varphi}. \tag{2.11}$$

Esses campos auxiliares tem a função de deixar a superalgebra fechada off-shell na dimensão reduzida.

O procedimento para a obtenção da versão do Lagrangeano na dimensão reduzida é feito através da equação (2.10), onde também devemos explicitar as componentes da dimensão extra dos campos definindo novos campos.

Notamos que para definir (2.10) como um Lagrangeano em $D-1$ dimensões, as aquações de campo em D dimensões (2.5) tem que ser satisfeitas. Essas equações se tornam vínculos em D que determinam como os campos físicos e auxiliares transformam sobre as translações em x^{D-1}. Essas translações em x^{D-1} correspondem às transformações de cargas centrais na superálgebra reduzida.

2.2 Versão $N = 2$-supersimétrica off-shell do modelo de gauge Abeliano em $D = 3$

Da mesma forma que no Capítulo 1, nos baseamos na equivalência entre o número de graus de liberdade de uma teoria de dimensão superior com $N = 1$ e uma teoria de dimensão menor com supersimetria estendida $N > 1$. Vimos que o número de supersimetrias é determinado quando reduzimos a dimensão da teoria de dimensão superior. Nesta seção utilizamos a técnica de redução dimensional "à la Legendre" para partir de um modelo em $D = 4$ que possui o mesmo números de graus de liberdade que sua versão $N = 2$-supersimétrica em $D = 3$. O modelo em questão é a versão $N = 1$-supersimétrica on-shell do modelo de gauge Abeliano em $D = 4$ cujo Lagrangeano é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{i}{2}\overline{\Psi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi, \tag{2.12}$$

onde $A_{\hat{\mu}}$ e Ψ são os campos de gauge e de gaugino respectivamente. O campo de gauge $A_{\hat{\mu}}$ possui quatro componentes, tendo três graus de liberdade off-shell e dois graus de liberdade on-shell. O campo de gaugino Ψ tem quatro componentes, tendo quatro graus de liberdade off-shell e dois on-shell. Em geral para se ter uma supersimetria off-shell são introduzidos campos auxiliares.

Em $D = 3$, o campo de gauge bosônico é formado pelo campo vetorial A_{μ} que tem dois graus de liberdade off-shell e um on-shell. Os campos de gauginos em $D = 3$ são dado por espinores de duas componentes que possuem, cada um, dois graus de liberdade off-shell e um on-shell. Quando reduzimos a dimensão da teoria de $D = 4 \Rightarrow D = 3$[1], o número de graus de liberdade das teorias em ambas dimensões são os mesmos. Com a teoria de dimensão reduzida ($D = 3$) tendo esses novos campos e as transformações de supersimetria tendo dois parâmetros espinoriais de transformação, temos que o Lagrangeano reduzido corresponde ao modelo de gauge com duas supersimetrias.

[1]Convencionamos o símbolo $\rightarrow$ para a redução dimensional "à la Scherk" e o símbolo $\Rightarrow$ para a redução "à la Legendre".

O Lagrangeano (2.12) é invariante on-shell sobre as transformações de supersimetria em $D = 4$:

$$\begin{aligned} \delta A_{\hat{\mu}} &= i\bar{\epsilon}\Gamma_{\hat{\mu}}\Psi, \\ \delta\Psi &= \Sigma_4^{\hat{\mu}\hat{\nu}} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\epsilon, \\ \delta\overline{\Psi} &= -F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\bar{\epsilon}\Sigma_4^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde

$$\Sigma_4^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{4}[\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\nu}}] \quad .$$

são os geradores do grupo de Lorentz em $D = 4$. As transformações de supersimetria acima formam um grupo de invariância, onde podemos determinar o comutador entre duas transformações de supersimetria como:

$$\begin{aligned} [\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}]A_{\hat{\mu}} &= 2i(\bar{\epsilon}_{2A}\Gamma_{AB\hat{\mu}}\Sigma_{BC}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\epsilon_{1C} - \bar{\epsilon}_{1A}\Gamma_{AB\hat{\mu}}\Sigma_{BC}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\epsilon_{2C})\partial_{\hat{\kappa}}A_{\hat{\nu}}, \\ [\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}]\Psi_A &= 2i\Sigma_{4AB}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\epsilon_{2B}\bar{\epsilon}_{1C} - \epsilon_{1B}\bar{\epsilon}_{2C})\Gamma_{\hat{\nu}CD}\partial_{\hat{\mu}}\Psi_D \\ [\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}]\overline{\Psi}_A &= 2i\Sigma_{4AB}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\epsilon_{2B}\bar{\epsilon}_{1C} - \epsilon_{1B}\bar{\epsilon}_{2C})\Gamma_{\hat{\nu}CD}\partial_{\hat{\mu}}\Psi_D. \end{aligned}$$

Explicitamos os índices espinoriais $A, B, C, D = 1, 2, 3, 4$ de modo a ficar clara a estrutura dos comutatores. Como podemos notar, o comutador entre transformações de supersimetria resulta em uma translação no espaço-tempo. Já é conhecido que se a supersimetria for estendida devem aparecer, além das translações, também as cargas centrais. Quando obtemos a versão supersimétrica estendida a partir da redução dimensional, a carga central pode ser dada pela dimensão extra. Assim, se os campos da teoria tiverem dependência dessa coordenada extra, a translação no espaço-tempo de dimensão superior implicará na translação no espaço-tempo de dimensão inferior mais a transformação de carga central. Com isso, é conveniente manter a dependência dos campos na dimensão extra, mas para isso, a redução dimensional recomendada é a baseada nas transformações de Legendre que foi apresentada na seção anterior.

De modo a fazermos a redução dimensional $D = 4 \Rightarrow D = 3$ é conveniente escrever o campo de gauge $A_{\hat{\mu}}$ explicitando sua componente 3 como $A_{\hat{\mu}} = (A_\mu, \varphi)$, onde consideramos $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3$ e $\mu = 0, 1, 2$. O campo do gaugino Ψ em $D = 4$ pode ser escrito na representação de Majorana como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix},$$

onde χ e ψ são dois espinores independentes de duas componentes cada um. Definimos o parâmetro espinorial ϵ como

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

onde α e β são dois parâmetros espinorias independentes de duas componentes cada uma.

Utilizaremos as matrizes Γ^μ sendo imaginárias na representação de Majorana:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\gamma^0 = \sigma_y, \quad \gamma^1 = i\sigma_z, \quad \gamma^2 = i\sigma_x.$$

e σ_x, σ_y e σ_z são as matrizes de Pauli.

Deste modo, temos que

$$\overline{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi} & -\bar{\chi} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \end{pmatrix}$$

e se explicitarmos as componentes dos geradores do grupo de Lorentz $\Sigma^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, temos que:

$$\Sigma_4^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \Sigma^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_4^{\mu 3} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ -\gamma^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ são os geradores do grupo de Lorentz em $D = 3$.

De modo a obtermos o Lagrangeano $N = 2$-supersimétrica realizada off-shell, procedemos fazendo a redução dimensional da coordenada tipo-espaço x^3 usando a técnica da transformação de Legendre. Através dessa técnica, o Lagrangeano $\mathcal{L}_3$ é obtido pela equação (2.10), fazendo:

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 - \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \partial_3 A_{\hat{\mu}}} \partial_3 A_{\hat{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \partial_3 \Psi} \partial_3 \Psi - \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \partial_3 \overline{\Psi}} \partial_3 \overline{\Psi}. \tag{2.14}$$

Assim, aplicando a expressão (2.14) para o Lagrangeano (2.12), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{3\nu} F^{3\nu} + F^{3\mu} \partial_\mu \varphi \\ &\quad + \frac{i}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \overline{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi. \end{aligned} \tag{2.15}$$

O próximo passo é definir o campo auxiliar:

$$F_{3\mu} \equiv \eta_\mu, \qquad F_3{}^{\mu} = -F^{3\mu} \equiv \eta^\mu.$$

Então, o Lagrangeano adquire a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_\mu \eta^\mu - \eta^\mu \partial_\mu \varphi \\ &\quad + \frac{i}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \overline{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como mostrado na seção anterior, para esse Lagrangeano ser invariante, é necessário que sejam obedecidas as equações de campo em $D = 4$. Essas equações constituem vínculos entre os campos em $D = 3$. Para o campo $A_{\hat{\nu}}$, a equação de campo é dada por:

$$\partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0. \tag{2.17}$$

Considerando $\hat{\nu} = 3$, temos que

$$\partial_\mu \eta^\mu = 0 \tag{2.18}$$

e para $\hat{\nu} = \nu$, temos que

$$\partial_3 \eta^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu}. \tag{2.19}$$

A equação de campo para Ψ é

$$\frac{i}{2} \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \overline{\Psi} = 0. \tag{2.20}$$

Esta equação nos dá em $D = 3$ duas equações independentes:

$$\partial_3 \overline{\chi} = -i \partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu \tag{2.21}$$

e

$$\partial_3 \overline{\psi} = i \partial_\mu \overline{\chi} \gamma^\mu. \tag{2.22}$$

A equação de campo para $\overline{\Psi}$ é

$$\frac{i}{2} \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Psi = 0 \tag{2.23}$$

o que nos dá as duas equações independentes

$$\partial_3 \chi = i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \tag{2.24}$$

e

$$\partial_3 \psi = -i \gamma^\mu \partial_\mu \chi. \tag{2.25}$$

Substituindo diretamente o vínculo (2.18) no Lagrangeano (2.16), obtemos:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_\mu \eta^\mu + \frac{i}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \overline{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi. \tag{2.26}$$

Podemos observar que o Lagrangeano reduzido (2.26) não contém o campo escalar φ que aparece na versão on-shell. No presente caso esse campo escalar funcionou como um multiplicador de Lagrange para a equação (2.18). Porém, como podemos notar, o Lagrangeano contém todos graus de liberdade correspondentes a versão $N=2$-supersimétrica off-shell já que além do Lagrangeano (2.26) o campo η_μ deve satisfazer a equação (2.18).

As translações na coordenada x^3 (eqs.2.19,2.21,2.22,2.24,2.25) correspondem as transformações de cargas centrais da álgebra de $N=2$ supersimetrias que logo veremos presente na álgebra.

Agora, vamos analisar a invariância $N=2$-supersimétrica. Começamos fazendo a redução dimensional das transformações de supersimetria (2.13):

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= i\overline{\alpha}\gamma_\mu\chi + i\overline{\beta}\gamma_\mu\psi,\\
\delta\varphi &= -\bar{\alpha}\psi + \bar{\beta}\chi,\\
\delta\chi &= \Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\alpha + i\gamma^\mu\eta_\mu\beta,\\
\delta\overline{\chi} &= -F_{\mu\nu}\overline{\beta}\Sigma^{\mu\nu} - i\eta_\mu\overline{\alpha}\gamma^\mu,\\
\delta\psi &= -i\gamma^\mu\eta_\mu\alpha + \Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\beta,\\
\delta\bar{\psi} &= -F_{\mu\nu}\bar{\alpha}\Sigma^{\mu\nu} + i\eta_\mu\overline{\beta}\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Cada uma dessas transformações em $D=3$ possuem dois parâmetros independentes que caracterizam duas transformações independentes de supersimetria (o que já era esperado já que $N=2$). Assim, temos que as transformações de $N=2$ podem ser dadas por:

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= i\overline{\alpha}\gamma_\mu\chi, & \delta A_\mu &= i\overline{\beta}\gamma_\mu\psi,\\
\delta\varphi &= -\bar{\alpha}\psi, & \delta\varphi &= \bar{\beta}\chi,\\
\delta\chi &= \Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\alpha, & \delta\chi &= i\gamma^\mu\eta_\mu\beta,\\
\delta\overline{\chi} &= -F_{\mu\nu}\overline{\beta}\Sigma^{\mu\nu}, & \delta\overline{\chi} &= -i\eta_\mu\overline{\alpha}\gamma^\mu,\\
\delta\psi &= \Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\beta, & \delta\psi &= -i\gamma^\mu\eta_\mu\alpha,\\
\delta\bar{\psi} &= -F_{\mu\nu}\bar{\alpha}\Sigma^{\mu\nu}, & \delta\bar{\psi} &= i\eta_\mu\overline{\beta}\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

A álgebra de Lie que correspondem a essas transformações contém os comutadores entre transformações de supersimetria que são dados por:

$$\begin{aligned}
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]A_\mu &= 2i(\overline{\alpha}_2\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\alpha_1 - \overline{\alpha}_1\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\alpha_2)\partial_\kappa A_\nu, \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]A_\mu &= 2i(\overline{\beta}_2\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\beta_1 - \overline{\beta}_1\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\beta_2)\partial_\kappa A_\nu, \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]A_\mu &= (\overline{\beta}_a\gamma_{ab\mu}\gamma^\nu_{bc}\alpha_c + \overline{\alpha}_a\gamma_{ab\mu}\gamma^\nu_{bc}\beta_c)\eta_\nu, \\
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]\chi_a &= 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}(\alpha_{2b}\overline{\alpha}_{1c} - \alpha_{1b}\overline{\alpha}_{2c})\gamma_{\nu cd}\partial_\mu\chi_d, \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]\chi_a &= -i\gamma^\mu_{ab}(\beta_{2b}\overline{\beta}_{1c} - \beta_{1b}\overline{\beta}_{2c})(\partial_\mu\chi_c - \gamma_{\mu cd}\gamma^\nu_{de}\partial_\nu\chi_e), \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]\chi_a &= i\gamma^\mu_{ab}\beta_b\overline{\alpha}_c(-\gamma_\mu\gamma^\nu\partial_\nu\psi_c + \partial_\mu\psi_c) - 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}\overline{\beta}_c\alpha_b\gamma_{cd\nu}\partial_\mu\psi_d, \\
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]\psi_a &= -i\gamma^\mu_{ab}(\alpha_{2b}\overline{\alpha}_{1c} - \alpha_{1b}\overline{\alpha}_{2c})(\partial_\mu\psi_c - \gamma_{\mu cd}\gamma^\nu_{de}\partial_\nu\psi_e), \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]\psi_a &= 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}(\beta_{2b}\overline{\beta}_{1c} - \beta_{1b}\overline{\beta}_{2c})\gamma_{\nu cd}\partial_\mu\psi_d, \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]\psi_a &= i\gamma^\mu_{ab}\alpha_b\overline{\beta}_c(-\gamma_\mu\gamma^\nu\partial_\nu\chi_c - \partial_\mu\chi_c) + 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}\overline{\beta}_c\alpha_b\gamma_{cd\nu}\partial_\mu\chi_d.
\end{aligned}$$

onde utilizamos as translações de x^3: (2.24,2.25). Podemos observar que os comutadores de duas transformações de supersimetria resultam na translação no espaço-tempo de $D = 3$ mais a transformação de carga central (dada pela translação de x^3), que aparece nos termos:

$$\begin{aligned}
&i\gamma^\mu_{ab}(\beta_{2b}\overline{\beta}_{1c} - \beta_{1b}\overline{\beta}_{2c})\gamma_{\mu cd}\gamma^\nu_{de}\partial_\nu\chi_e, \\
&-i\gamma^\mu_{ab}\beta_b\overline{\alpha}_c\gamma_\mu\gamma^\nu\partial_\nu\psi_c, \\
&i\gamma^\mu_{ab}(\alpha_{2b}\overline{\alpha}_{1c} - \alpha_{1b}\overline{\alpha}_{2c})\gamma_{\mu cd}\gamma^\nu_{de}\partial_\nu\psi_e, \\
&-i\gamma^\mu_{ab}\alpha_b\overline{\beta}_c\gamma_\mu\gamma^\nu\partial_\nu\chi_c.
\end{aligned}$$

O Lagrangeano obtido (2.26) é invariante frente as transformações (2.28) sem depender das equações de campo de $D = 3$, o que caracteriza uma realização off-shell. Note que a exigência da equação de campo em $D = 4$ implica que os campos devem satisfazer a equação (2.18).

2.3 Comparação com a versão on-shell

Agora vamos analizar os resultados obtidos na seção anterior fazendo uma comparação entre a obtenção de modelos de supersimetria estendida através das técnicas de redução dimensional á la Legendre e á la Scherk. De uma forma mais simples, o Lagrangeano (2.12) reduzido de $D = 4 \rightarrow D = 3$ utilizando a técnica de redução dimensional "à la Scherk" nos fornece:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\overline{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi, \tag{2.29}$$

onde nesse caso os campos de gauge não possuem a dependência na coordenada reduzida x^3. Observe que o Lagrangeano (2.29) pode ser obtido a partir do Lagrangeano off-shell (2.26) se eliminarmos o campo auxiliar η_μ através de sua equação de campo. Para fazermos isso, temos que lembrar que a equação (2.18) tem que ser satisfeita. Assim, só podemos aplicar a equação de Euler-Lagrange para η_μ se reintroduzirmos o multiplicador de Lagrange φ no Lagrangeano off-shell, ou seja, aplicando na equação (2.16). Fazendo isso, obtemos a partir da equação de Euler-Lagrange:

$$\eta_\mu = -\partial_\mu\varphi,$$

que corresponde a definição do campo auxiliar se os campos não dependem da coordenada x^3. Com isso, o Lagrangeano fica na forma 2.29 voltando a possuir invariânia on-shell. Como podemos notar, o campo auxiliar η_μ passa a ser definido tendo $\partial_3 A_\mu = 0$ quando impomos a obediência de sua equação de campo em $D = 3$. Isso mostra como o Lagrangeano on-shell não possui a dependência na coordenada extra x^3.

No caso das transformações de supersimetria em $D = 3$, considerando a não dependência dos campos na coordenada x^3, temos:

$$\delta A_\mu \;=\; i\overline{\alpha}\gamma_\mu\chi, \qquad \delta A_\mu = i\overline{\beta}\gamma_\mu\psi,$$

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= -\bar{\alpha}\psi, & \delta\varphi &= \bar{\beta}\chi, \\
\delta\chi &= \Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\alpha, & \delta\chi &= -i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\varphi\beta, \\
\delta\bar{\chi} &= -F_{\mu\nu}\overline{\beta}\Sigma^{\mu\nu}, & \delta\bar{\chi} &= i\partial_{\mu}\varphi\overline{\alpha}\gamma^{\mu}, \\
\delta\psi &= \Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\beta, & \delta\psi &= i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\varphi\alpha, \\
\delta\bar{\psi} &= -F_{\mu\nu}\bar{\alpha}\Sigma^{\mu\nu}, & \delta\bar{\psi} &= -i\partial_{\mu}\varphi\overline{\beta}\gamma^{\mu}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde podemos notar que o campo auxiliar η_μ não mais aparece. O comutador entre essas transformações de supersimetria é dada por:

$$\begin{aligned}
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]A_\mu &= 2i(\overline{\alpha}_2\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\alpha_1 - \overline{\alpha}_1\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\alpha_2)\partial_\kappa A_\nu, \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]A_\mu &= 2i(\overline{\beta}_2\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\beta_1 - \overline{\beta}_1\gamma_\mu\Sigma^{\kappa\nu}\beta_2)\partial_\kappa A_\nu, \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]A_\mu &= -(\overline{\beta}_a\gamma_{ab\mu}\gamma^{\nu}_{bc}\alpha_c + \overline{\alpha}_a\gamma_{ab\mu}\gamma^{\nu}_{bc}\beta_c)\partial_\nu\varphi, \\
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]\chi_a &= 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}(\alpha_{2b}\overline{\alpha}_{1c} - \alpha_{1b}\overline{\alpha}_{2c})\gamma_{\nu cd}\partial_\mu\chi_d, \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]\chi_a &= -i\gamma^{\mu}_{ab}(\beta_{2b}\overline{\beta}_{1c} - \beta_{1b}\overline{\beta}_{2c})\partial_\mu\chi_c, \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]\chi_a &= (i\gamma^{\mu}_{ab}\beta_b\overline{\alpha}_d - 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}\overline{\beta}_c\alpha_b\gamma_{cd\nu})\partial_\mu\psi_d, \\
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]\psi_a &= -i\gamma^{\mu}_{ab}(\alpha_{2b}\overline{\alpha}_{1c} - \alpha_{1b}\overline{\alpha}_{2c})\partial_\mu\psi_c, \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]\psi_a &= 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}(\beta_{2b}\overline{\beta}_{1c} - \beta_{1b}\overline{\beta}_{2c})\gamma_{\nu cd}\partial_\mu\psi_d, \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]\psi_a &= (-i\gamma^{\mu}_{ab}\alpha_b\overline{\beta}_d + 2i\Sigma^{\mu\nu}_{ab}\overline{\beta}_c\alpha_b\gamma_{cd\nu})\partial_\mu\chi_d, \\
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]\varphi &= -i(\overline{\alpha}_2\gamma^{\mu}\alpha_1 - \overline{\alpha}_1\gamma^{\mu}\alpha_2)\partial_\mu\varphi, \\
[\delta_{\beta_1}, \delta_{\beta_2}]\varphi &= -i(\overline{\beta}_2\gamma^{\mu}\beta_1 - \overline{\beta}_1\gamma^{\mu}\beta_2)\partial_\mu\varphi, \\
[\delta_\alpha, \delta_\beta]\varphi &= 2(\overline{\beta}\Sigma^{\mu\nu}\alpha - \overline{\alpha}\Sigma^{\mu\nu}\beta)\partial_\mu A_\nu.
\end{aligned}$$

Uma característica importante desse método "à la Scherk" é que a álgebra acima só se fecha on-shell o que significa que o Lagrangeano (2.29) só possui a invariância das transformações (2.30) se forem satifeitas as equações de campo em $D = 3$. Observe que como os campos não possuem dependência na coordenada x^3, então o comutador entre as transformações de supersimetria resultam apenas nas translações no espaço-tempo de

$D = 3$. Com isso, a álgebra não adquire a transformação de carga central como no caso "à la Legendre". Podemos observar que a álgebra acima é igual a álgebra off-shell obtida sem a presença das transformações de cargas centrais e incluindo o comutador para o campo φ. Isso também pode ser visto a partir da álgebra off-shell quando os campos dependiam da coordenada extra: se as equações de campo em $D = 3$ tiverem que ser satisfeitas (álgebra on-shell) as translações (2.19,2.21,2.22,2.24,2.25) ficam nulas e assim deixamos de ter cargas centrais.

2.4 Comentários finais

Neste capítulo apresentamos a técnica de redução dimensional "à la Legendre" e discutimos suas vantagens propondo a generalização $N = 2$-supersimétrica do modelo de gauge Abeliano em $D = 3$ realizado off-shell. Fizemos uma comparação entre os resultados obtidos através da redução dimensional "à la Legendre" e "à la Scherk". Uma das vantagens da utilização da técnica "à la Legendre" é o aparecimento de um campo auxiliar que possibilita o Lagrangeano ser invariante off-shell. Outra vantagem é que os campos dependem da coordenada extra da dimensão superior, o que faz com que a álgebra de Lie contenha como comutador entre duas transformações de supersimetria uma translação com respeito a coordenada extra. Essa translação na coordenada extra corresponde a transformação de carga central e a coordenada extra assume o papel de carga central.

Capítulo 3

Supersimetrias-$N = 2, 4$ off-shell da teoria de gauge Abeliana com violação da simetria de Lorentz

No capítulo anterior apresentamos a técnica de redução dimensional baseada nas transformações de Legendre (técnica "à la Legendre"). Vimos as vantagens dessa técnica diante da redução dimensional ordinária ("à la Scherk"). A obtenção da versão planar $N = 2$-supersimétrica off-shell do modelo de gauge abeliano mostrou que para a obtenção de um modelo supersimétrico estendido off-shell devemos utilizar esse tipo de técnica. O resultado off-shell também pode ser obtido para outras dimensões, mesmo se reduzirmos apenas uma das coordenadas "à la Legendre" enquanto as demais reduzirmos "à la Scherk" [12].

No presente capítulo, propomos as versões supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ estendidas, realizadas off-shell, em $D = 4$, do modelo de gauge Abeliano com o termo de quebra da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons utilizando as técnicas de redução dimensional "à la Scherk" e "à la Legendre". Da mesma forma que no Capítulo 1, partimos dos setores bosônicos do modelo para $N = 1$ em $D = 6$ e $D = 10$, com a diferença de agora reduzirmos "à la Legendre" uma das coordenadas tipo-espaço. Com a redução "à la Legendre" a teoria recebe alguns campos auxiliares relacionados com os momentos conjugados correspondentes as transformações de Legendre. Esses campos auxiliares permitem que a álgebra da supersimetria estendida feche off-shell. Como discutido no Capítulo 2, as translações em respeito a coordenada reduzida ("à la Legendre") podem ser identificadas como transformações de cargas centrais. Como partimos apenas dos setores bosônicos, a teoria completa (setor bosônico + setor fermiônico) é obtida, assim como no Capítulo 1, usando o formalismo de supercampo-superespaço de $N = 1$.

Nas primeira e terceira seções deste capítulo utilizamos os métodos de redução dimensional "à la Scherk" e "à la Legendre" ao modelo de gauge Abeliano com o termo de violação da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons em $D = 6$ e $D = 10$, respectivamente, reduzindo até a dimensão $D = 4$. Em ambas aplicações, reduzimos "à la Scherk" as coordenadas tipo-espaço até obtermos a versão $D = 5$ do modelo, e então, reduzimos mais uma coordenada tipo-espaço usando a técnica de redução dimensional "à la Legendre" para obtermos o modelo em $D = 4$. Os resultados do procedimento dessas seções são úteis nas segunda e quarta seções. Isso porque os Lagrangeanos reduzidos a partir de $D = 6$ e $D = 10$ correspondem, respectivamente, aos setores bosônicos referentes a generalização supersimétrica $N = 2$ e $N = 4$ estedida do modelo proposto. Assim, nas segunda e quarta seções, propomos, respectivamente, as versões $N = 2$- e $N = 4$- supersimétricas off-shell completa (setores bosônico + fermiônico) do modelo de gauge Abeliano com o termo de quebra da simetria de Lorentz utilizando o formalismo de supercampos no superespaço de $N = 1$. Na quinta seção apresentamos os comentários finais.

3.1 Redução $6D \rightarrow 5D \Rightarrow 4D$ do modelo de gauge Abeliano com termo de quebra da simetria de Lorentz

Na referência [12], foi mostrado a relação da generalização $N = 2$-supersimétrica realizada off-shell do modelo de Yang-Mills aplicando as duas técnicas de redução dimensional, mensionadas nos capítulos anteriores, partindo do modelo $N = 1$-supersimétrico em componentes em $D = 6$. Nesta seção vamos aplicar essas técnicas de redução dimensional para a versão Abeliana do setor bosônico do modelo acrescentando o termo de quebra de simetria de Lorentz em $D = 6$. O Lagrangeano reduzido é o setor bosonico de sua generalização supersimétria $N = 2$ estendida realizada off-shell que será aplicada na próxima seção para a construção do modelo supersimétrico completo (setores bosônico + fermiônico). Para obtermos esse setor bosônico da versão off-shell do modelo é necessário procedermos fazendo a redução de $D = 6$ para $D = 4$ em duas etapas: primeiro reduzimos "à la Scherk" $D = 6 \rightarrow D = 5$ uma coordenada tipo-espaço x^5, e então, reduzimos $D = 5 \Rightarrow D = 4$ outra coordenada tipo-espaço x^4 usando a técnica da transformação de Legendre.

Como apresentado no Capítulo 1, o modelo de gauge Abeliano com termo do tipo Chern-Simons que quebra a simetria de Lorentz em $D = 4$, proposto por [19], tem a forma:

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa p_\lambda, \tag{3.1}$$

sendo p_λ um vetor constante de fundo que quebra a simetria de Lorentz. Como também proposto no Capítulo 1 e em [29], a versão em $D = 6$ da Lagrangian (3.1) pode ser dada como:

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\rho}\hat{\lambda}\hat{\sigma}}A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\kappa}}T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}}, \tag{3.2}$$

onde $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Primeiramente reduzimos a dimensão do Lagrangeano (3.2) de $D = 6 \rightarrow D = 5$ "à la

Scherk". Nesta técnica, é considerado que os campos não dependem da coordenada extra x^4 a ser reduzida ($\partial_4 A_{\hat{\mu}} = 0$). Assim, o Lagrangeano reduzido em $D = 5$ toma a forma a seguir:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2}\partial_{\hat{\mu}}\varphi\partial^{\hat{\mu}}\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\kappa}}R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}} + \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}\varphi T_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}, \tag{3.3}$$

onde $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3, 4, \quad \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}5} \equiv \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}$ e redefinimos os campos de gauge como

$$(A_{\hat{\mu}}) \to (A_{\hat{\mu}},\, \varphi),$$

e os campos de fundo como

$$(T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}}) \to (R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}},\, T_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}).$$

Podemos notar que em $D = 5$ a teoria têm como campos de gauge: um escalar e um vetorial; e têm como campos de fundo: um tensorial rank-2 e um rank-3 (este último podendo ser considerado seu dual que é um tensor de rank-2).

O próximo passo é fazer a redução dimensional $D = 5 \Rightarrow D = 4$ "à la Legendre" do Lagrangeano em $D = 5$ (3.3). Substituindo (3.3) em

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_5 - \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \partial_4 A_{\hat{\nu}}}\frac{\partial A_{\hat{\nu}}}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \partial_4 \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}, \tag{3.4}$$

e explicitando o índice 4, obtemos o Lagrangeano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 \;=\; & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{4\mu}F^{4\mu} + \partial_\mu\phi F^{4\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\partial_4\varphi\partial^4\varphi \\ & + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa p_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\phi R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\varphi S_{\kappa\lambda} + \phi\partial_\mu\varphi t^\mu, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda 4} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$, e redefinimos os campos de gauge como

$$(A_{\hat{\mu}},\, \varphi) \Rightarrow (A_\mu,\, \phi,\, \varphi),$$

e os campos de fundo como

$$(R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}},\, T_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}) \Rightarrow (p_\lambda,\, R_{\lambda\rho},\, S_{\kappa\lambda},\, t^\mu). \tag{3.6}$$

Agora, podemos notar que a teoria em $D = 4$ têm como campos de gauge: um vetorial e dois escalares; e têm como campos de fundo: dois vetoriais (um é tomado como o dual de um tensor rank-3) e dois tensoriais rank-2.

Os momentos canônicos com respeito a x^4 são:

$$\pi(A_\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial\partial_4 A_\mu} = -F^{4\mu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\nu R_{\kappa\lambda}, \tag{3.7}$$

$$\pi(\varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial\partial_4 \varphi} = \partial^4\varphi - A_\mu t^\mu. \tag{3.8}$$

Definimos os campos auxiliares como

$$F_{4\mu} \equiv \eta_\mu, \qquad F_4{}^{\mu} = -F^{4\mu} \equiv \eta^\mu, \qquad \partial_4\varphi = -\partial^4\varphi \equiv G. \tag{3.9}$$

Estes campos serão necessários para fechar a superálgebra off-shell. Substituíndo essas definições no Lagrangeano (3.5), temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu\eta^\mu - \eta^\mu\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{1}{2}GG \\ & +\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa p_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\phi R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\varphi S_{\kappa\lambda} + \phi\partial_\mu\varphi t^\mu.\end{aligned} \tag{3.10}$$

O Lagrangeano em $D = 4$ (3.10) será invariante off-shell apenas se os vínculos impostos pelas equações de campo em $D = 5$ relativos com o Lagrangeano (3.3) forem satisfeitas. A equação de campo para $A_{\hat{\nu}}$ é apresentada a seguir:

$$\partial_{\hat{\mu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}F_{\hat{\mu}\hat{\kappa}}R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}} + \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}\partial_{\hat{\mu}}\varphi T_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = 0. \tag{3.11}$$

Considerando $\hat{\nu} = 4$, temos que

$$\partial_\mu \eta^\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} R_{\kappa\lambda} - \partial_\mu \varphi t^\mu = 0, \tag{3.12}$$

e tomando $\hat{\nu} = \nu$,

$$\partial_4 \eta^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} F_{\mu\kappa} p_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} \partial_\mu \varphi S_{\kappa\lambda} - \varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} \eta_\mu R_{\kappa\lambda} + G t^\mu. \tag{3.13}$$

A equação de campo para φ é apresentada a seguir:

$$\partial_{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\mu}} \varphi - \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} T_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = 0. \tag{3.14}$$

Explicitando as componentes de $D = 4$, esta equação pode ser escrita como

$$\partial_4 C = \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} F_{\mu\nu} S_{\lambda\rho} - \eta_\mu t^\mu. \tag{3.15}$$

Note que o vínculo (3.12) pode simplicar o Lagrangeano para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu \eta^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} G G \\ &\quad + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\kappa p_\lambda + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} \varphi S_{\kappa\lambda}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde o campo ϕ funciona como um multiplicador de Lagrange. Note que os campos ainda devem satisfazer a equação (3.12). As equações (3.13) e (3.15) podem ser vistas como a parte bosônica das transformações de cargas centrais na versão $N = 2$-supersimétrica. Desse modo, as transformações de supersimetria fornecidas explicitamente em $D = 4$ vão conter as translações de x^4 que são interpretadas como transformações de cargas centrais. Então, notamos que a dimensão extra funciona como uma carga central na superálgebra em $D = 4$. Esses resultados são possíveis porque usamos a técnica de redução dimensional "à la Legendre". Uma outra interessante observação é que a ação do Lagrangeano obtido é independente das translações em x^4. embora os campos dependem dessa coordenada.

Para isso é exigido que o Lagrangeano obedeça todos os vínculos impostos pelas equações de campo (3.11,3.14) em $D = 5$.

3.2 A versão off-shell $N = 2$-supersimétrica do modelo de gauge Abeliano com termo de quebra da simetria de Lorentz

A versão on-shell da extensão $N = 2$-supersimétrica do modelo de gauge com termo de quebra da simetria de Lorentz foi proposto no Capítulo 1 onde foi utilizada apenas a técnica de redução dimensional "à la Scherk". Nesta seção, estamos interessados na determinação de uma versão $N = 2$-supersimétrica do modelo realizada off-shell. Desse modo, da mesma forma que no Capítulo 1, consideramos que o setor bosônico para $N = 1$ em $D = 6$ é o mesmo que o setor bosônico para $N = 2$ em $D = 4$. De modo a supersimetrização ocorrer off-shell, é necessário reduzir uma das coordenadas usando a técnica de redução dimensional "à la Legendre". Isso permite o aparecimento de campos auxiliares que fazem a superálgebra fechar off-shell em $D = 4$.

Na seção anterior, fizemos a redução dimensional $6 \rightarrow 5$ "à la Scherk" e $5 \Rightarrow 4$ "à la Legendre" e obtivemos o Lagrangeano bosônico (3.16) em $D = 4$. É conveniente considerarmos o campo vetorial de fundo da teoria como um gradiente de um campo escalar ($p_\mu = \partial_\mu s$), então escrevemos o Lagrangeano na forma a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu\eta^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}G_1G_1 \\ &\quad +\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa\partial_\lambda s_1 + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi_1 S_{\kappa\lambda}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Note que redefinimos os campos reais φ, s e G. Isto é necessário para que acomodemos esses campos como campos componentes bosônico nos supercampos quirais. Para isso, temos que definir os campos complexos:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2\\ s &= s_2 + is_1,\\ G &= G_1 + iG_2.\end{aligned}$$

Observe que introduzimos no modelo mais um campo de gauge, um campo de fundo e um campo auxiliar para construírmos os campos escalares complexos. Um vez que temos o setor bosônico para a teoria $N = 2$-supersimétrica, procedemos a supersimetrização usando a formulação de supercampos em um superespaço de $N = 1$ com supercoordenadas $(x^\mu, \theta^a, \bar{\theta}_{\dot{a}})$. As convensões usadas são as mesmas do capítulo anterior e dadas no apêndice 1.

Definimos um supercampo vetorial V no gauge de Wess-Zumino contendo o campo vetorial de gauge A_μ da forma:

$$V = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}^2\theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2 D, \tag{3.18}$$

o qual satisfaz a condição de realidade $V = V^\dagger$. O supercampo que acomoda o tensor intensidade de campo Abeliano $F_{\mu\nu}$ é do por:

$$W_a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a V_{WZ}, \qquad \bar{W}_{\dot{a}} = -\frac{1}{4}D^2\bar{D}_{\dot{a}}V_{WZ}, \tag{3.19}$$

o qual satisfaz a condição de quiralida: $\bar{D}W = D\bar{W} = 0$ e $DW = \bar{D}\bar{W}$.

O supercampo vetorial que contém o campo auxiliar η^μ não é invariante de gauge (já que η^μ não é um campo de gauge), então, é necessário definir este supercampo na forma completa:

$$U = u + \theta\alpha + \bar{\theta}\bar{\alpha} + \theta^2 M + \bar{\theta}^2 M^* + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\eta_\mu + \theta^2\bar{\theta}\bar{\beta} + \bar{\theta}^2\theta\beta + \theta^2\bar{\theta}^2 E, \tag{3.20}$$

o qual satisfaz a condição de realidade $U = U^{\dagger}$.

Os supercampos escalares que acomodam os campos escalares de gauge φ, φ^* e os campos auxiliares G, G^* são definidos como:

$$\Phi = \varphi + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\varphi - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi + \sqrt{2}\theta\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\theta} + \theta^2 G, \tag{3.21}$$

$$\bar{\Phi} = \varphi^* - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\varphi^* - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi} + \bar{\theta}^2 G^*. \tag{3.22}$$

Os supercampos escalares que acomodam os campos escalares de fundo s, s^* e seus parceiros supersimétricos são escritos como:

$$S = s + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}s - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box s + \sqrt{2}\theta\xi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_{\mu}\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta} + \theta^2 h, \tag{3.23}$$

$$\bar{S} = s^* - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}s^* - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box s^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\xi} + \bar{\theta}^2 h^*, \tag{3.24}$$

estes satisfazendo a condição de quiralidade: $\bar{D}\Phi = D\bar{\Phi} = \bar{D}S = D\bar{S} = 0$. Observe que introduzimos na teoria mais um campo de gauge, um campo auxiliar e um campo de fundo, através das definições dos campos complexos. Estes foram necessários de modo a haver a acomodação nos supercampos quirais.

Os supercampos espinoriais que acomodam o campo tensorial $S_{\mu\nu}$, seus duais e seus parceiros supersimétricos são escritos como

$$\begin{aligned}\Sigma_a &= \tau_a + \theta^b(\varepsilon_{ba}\rho + \sigma^{\mu\nu}_{ba}S_{\mu\nu}) + \theta^2 F_a + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\tau_a \\ &\quad + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\theta^b\partial_{\mu}(\varepsilon_{ba}\rho + \sigma^{\mu\nu}_{ba}S_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\tau_a,\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_{\dot{a}} &= \bar{\tau}_{\dot{a}} + \bar{\theta}_{\dot{b}}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^* - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}S^*_{\mu\nu}) + \bar{\theta}^2\bar{F}_{\dot{a}} - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{\tau}_{\dot{a}} \\ &\quad - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\theta_{\dot{b}}\partial_{\mu}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^* - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}S^*_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\bar{\tau}_{\dot{a}},\end{aligned} \tag{3.26}$$

que também satisfazem as condições de quiralidade $\bar{D}_{\dot{b}}\Sigma_a = D_b\bar{\Sigma}_{\dot{a}} = 0$.

Agora, estamos interessados na construção da versão off-shell $N = 2$-supersimétrica do Lagrangeano (3.1) usando o formalismo de $N = 1$-supercampo. Como já escrito na seção anterior, o setor bosônico para esse Lagrangeano é dada por (3.16). Deste modo, o próximo passo é procurar por um modelo supersimértrico em termos de supercampos que contém esse setor bosônico e seu correspondente setor fermiônico. Primeiro, é útil analizar as dimensões em massa dos supercampos definidos previamente:

$$
\begin{aligned}
[V] &= 0, \quad [W_a] = [\bar{W}_{\dot{a}}] = +\frac{3}{2}, \quad [\Phi] = [\bar{\Phi}] = +1, \\
[U] &= [\bar{U}] = +1, \quad [S] = [\bar{S}] = 0, \quad [\Sigma_a] = [\bar{\Sigma}_{\dot{a}}] = +\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Baseado nessa dimensionalidade, e analisando o Lagrangeano bosônico (3.16), propomos a seguinte ação supersimétrica $\mathcal{S}_{br}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{br} &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}[\frac{1}{2}W^\alpha W_\alpha \delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{2}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\delta(\theta^2) + \frac{1}{2}\bar{\Phi}\Phi - UU \\
&+\frac{1}{2}W^a(D_aV)S + \frac{1}{2}\bar{W}_{\dot{a}}(\bar{D}^{\dot{a}}V)\bar{S} \\
&+\frac{i}{4}\delta(\bar{\theta})W^a(\Phi + \bar{\Phi})\Sigma_a - \frac{i}{4}\delta(\theta)\bar{W}_{\dot{a}}(\Phi + \bar{\Phi})\bar{\Sigma}^{\dot{a}}].
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

O Lagrangeano desta ação em campos-componentes tem a forma a seguir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{br} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + D^2 + D^{*2} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + \frac{1}{2}GG^* \\
&-\frac{1}{2}\eta^\mu\eta_\mu + \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} - MM^* - 2uE \\
&+\frac{i}{4}\partial_\mu(s - s^*)\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}A_\nu - \frac{1}{4}(s + s^*)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D^2(s + s^*) \\
&-is\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - is^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\xi} \\
&+\frac{1}{2}\lambda\lambda h + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{\lambda}h^* - \sqrt{2}\lambda\xi D - \sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\xi}D \\
&\frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi + \varphi^*)(R_{\kappa\lambda} + R^*_{\kappa\lambda}) + \frac{i}{8}F^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - R^*_{\mu\nu})(\varphi + \varphi^*) \\
&-\frac{i\sqrt{2}}{8}\tau\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tau\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(\varphi + \varphi^*)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(\varphi+\varphi^{*})+\frac{i\sqrt{2}}{4}\psi\sigma^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\lambda+\frac{i\sqrt{2}}{4}\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}B^{*}_{\mu\nu}\bar{\lambda}\\
&-\frac{i}{2}D(\varphi+\varphi^{*})\rho+\frac{i}{2}D^{*}(\varphi+\varphi^{*})\rho^{*}\\
&+\frac{i\sqrt{2}}{8}\lambda\psi\rho-\frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\lambda}\bar{\psi}\rho^{*}-\frac{i\sqrt{2}}{4}D\psi\tau+\frac{i\sqrt{2}}{4}D^{*}\bar{\psi}\bar{\tau}\\
&+\frac{i}{4}f\lambda\tau-\frac{i}{4}f^{*}\bar{\lambda}\bar{\tau}+\frac{i}{4}(\varphi+\varphi^{*})\lambda F-\frac{i}{4}(\varphi+\varphi^{*})\bar{\lambda}\bar{F}.
\end{aligned}
$$

Este Lagrangeano é invariante sobre a $N=2$-superálgebra em $4D$. Quando a superálgebra em $5D$ tem o índice 4 explicitado, obtemos a superálgebra em $4D$ que adquire transformações de cargas centrais que correspondem às translações nas coordenadas x^4, obtidas em (3.13, 3.15). Assim, a quinta dimensão é interpretada como carga central e é consequência da necessidade da obediência das equações de campo em $5D$. Essas transformações são dadas a seguir:

$$
\begin{aligned}
\delta_Z\eta^{\nu} &= \partial_{\mu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}F_{\mu\kappa}p_{\lambda}-\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\eta_{\mu}R_{\kappa\lambda}+\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\partial_{\mu}\varphi S_{\kappa\lambda}-Gt^{\mu}\\
&\quad +parceiros\ supersim\acute{e}tricos\ ferm\hat{i}\hat{o}nicos, \qquad (3.29)\\
\delta_Z G &= \partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\rho}F_{\mu\nu}S_{\lambda\rho}-\eta_{\mu}t^{\mu}\\
&\quad +parceiros\ supersim\acute{e}tricos\ ferm\hat{i}\hat{o}nicos. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

As transformações de cargas centrais acima fornecem apenas o setor bosônico, isso porque partimos apenas do Lagrangeano bosônico em $6D$. Uma vez que tenhamos o termo fermiônico reduzido (em $4D$), estamos habilitados a restaurar o setor fermiônico da teoria original em $6D$. Com isso, nossas transformações de cargas centrais em $4D$ vão naturalmente mostrar os campos fermiônicos de acordo com os graus de liberdade bosônicos. Isso pode ser apresentado em um trabalho posterior.

Podemos notar que o Lagrangeano off-shell obtido neste capítulo é mais simples do que o Lagrangeano on-shell obtida no capítulo anterior. Isso ocorre em virtude do vínculo (3.12) imposto pelas equações de campo em 5 dimensões. Porém, temos que os campos também devem obedecer a equação (3.37) imposta pelas equações de campo. Esses resultados são consequências da utilização da técnica de redução dimensional baseada nas transformações de Legendre reduzindo uma das coordenadas tipo-espaço.

No Lagrangeano (3.28), podemos notar o termo de Maxwell e o termo proposto por Jackiw em [19] e também podemos notar a generalização $N = 1$-supersimétrica do modelo nas cinco primeiras linhas do Lagrangeano (3.28). Podemos também notar que o Lagrangeano tem o setor bosônico (3.16) mais o setor fermiônico e os campos auxiliares presentes nos supercampos.

3.3 Redução $10D \to 5D \Rightarrow 4D$ do modelo de gauge Abeliano com termo de quebra da simetria de Lorentz

Usando a mesma idéia trabalhada para $N = 2$, podemos obter o setor bosônico da versão supersimétrica $N = 4$-estendida off-shell do modelo (3.1), porém, para fazer isso, precisamos partir de um Lagrangeano em $D = 10$. Isto pode ser feito através da redução dimensional $D = 10 \to D = 5$ usando a técnica "à la Scherk" e então reduzindo $D = 5 \Rightarrow D = 4$ "à la Legendre". Como podemos ver no Capítulo 1 e em [29], o Lagrangeano do modelo em $D = 10$ pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{10} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{7!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\kappa}}T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}, \tag{3.31}$$

onde $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

É conveniente para facilitar os cálculos, considerarmos o dual do tensor de rank-7 presente no termo de violação da simetria de Lorentz, embora vamos continuar a mostrar os resultados na forma convencional de Chern-Simons. A redução dimensional "à la Scherk" $D = 10 \to D = 5$ das coordenadas tipo-espaço x^5, x^6, x^7, x^8, x^9 é feita diretamente considerando nenhuma dependência dos campos com respeito a essas coordenadas. O

Lagrangeano reduzido toma a forma a seguir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_5 &= -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2}\partial_{\hat{\mu}}\varphi^I\partial^{\hat{\mu}}\varphi^I + \frac{1}{2}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}A_{\hat{\kappa}}R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}} \\
&+\frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}A_{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\nu}}\varphi^I T^I_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} + \frac{1}{4!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}\varphi^I\partial_{\hat{\mu}}\varphi^J T^{IJ}_{\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

onde $\hat{\mu} = 0,1,2,3,4$, o índice interno $I = 1,2,3,4,5$ e $\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}56789} \equiv \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}$. Os campos de gauge foram redefinidos como:

$$(A_{\hat{\mu}}) \rightarrow (A_{\hat{\mu}},\, \varphi^I),$$

e os campos de fundo como

$$(T_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}) \rightarrow (R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}},\, T^I_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}},\, T^{IJ}_{\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}).$$

Podemos notar que o Lagrangeano em $D = 5$ tem como campos de gauge: um vetorial e cinco escalares; e como campos de fundo: um tensorial rank-2, cinco tensoriais rank-3 (trabalhamos com seu dual que é rank-2) e dez tensoriais rank-4 (trabalhamos com seu dual que é um campo tensorial).

Agora, procedemos realizando a redução dimensional da coordenada tipo-espaço x^4 usando a técnica da transformação de Legendre. Esta redução trará campos auxiliares que permitirão a superálgebra do Lagrangeano completo (setor bosônico + setor fermiônico) estar fechada off-shell. Nesta técnica, o Lagrangeano em $D = 4$ é obtida fazendo

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_5 - \frac{\partial\mathcal{L}_5}{\partial\partial_4 A_{\hat{\nu}}}\frac{\partial A_{\hat{\nu}}}{\partial x^4} - \frac{\partial\mathcal{L}_5}{\partial\partial_4\varphi^I}\frac{\partial\varphi^I}{\partial x^4}. \tag{3.33}$$

Aplicando (3.33) no Lagrangeano (3.32), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{4\mu}F^{4\mu} + \partial_\mu\phi F^{4\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu\varphi^I - \frac{1}{2}\partial_4\varphi^I\partial^4\varphi^I \\
&+\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa p_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\phi R_{\kappa\lambda} \\
&+\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\varphi^I S^I_{\kappa\lambda} + \phi\partial_\mu\varphi^I t^{I\mu} + \varphi^I\partial_\mu\varphi^J t^{IJ\mu},
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda 4}$, e redefinimos os campos de gauge como

$$(A_{\hat{\mu}}, \varphi^I) \Rightarrow (A_\mu, \phi, \varphi^I),$$

e os campos de fundo como

$$(R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}}, T^I_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}, T^{IJ}_{\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}) \Rightarrow (p_\lambda, R_{\lambda\rho}, S^I_{\kappa\lambda}, t^{I\mu}, t^{IJ\mu}, t^{IJ}).$$

Notamos que a teoria em $D = 4$ contém como campos de gauge: um vetorial e seis escalares; e como campos de "backgroung": dezesseis vetoriais (dado por um vetor e quinze duais de tensores de rank-3), dez escalares (dados por dez duais de tensores de rank-4) e seis tensoriais de rank-2.

Os momentos canônicos para o Lagrangeano (3.32) são dados a seguir:

$$\begin{aligned} \pi(A_\mu) &= \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \partial_4 A_\mu} = -F^{4\mu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\nu R_{\kappa\lambda}, \\ \pi(\varphi) &= \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \partial_4 \varphi^I} = \partial^4 \varphi^I - A_\mu t^{I\mu} + \varphi^J t^{IJ}. \end{aligned}$$

Definimos os novos campos auxiliares como

$$F_{4\mu} \equiv \eta_\mu, \quad F_4{}^\mu = -F^{4\mu} \equiv \eta^\mu, \quad \partial_4 \varphi^I = -\partial^4 \varphi^I \equiv G^I.$$

Substituindo essas definições no Lagrangeano (3.34), esta fica com a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu\eta^\mu - \eta^\mu\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu\varphi^I + \frac{1}{2}G^I G^I + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa p_\lambda \quad (3.35) \\ &+\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\phi R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu\varphi^I S^I_{\kappa\lambda} + \phi\partial_\mu\varphi^I t^{I\mu} + \varphi^I\partial_\mu\varphi^J t^{IJ\mu}. \end{aligned}$$

A equação de campo obtida a partir do Lagrangeano (3.32) em termos de $A_{\hat{\nu}}$ é dada por:

$$\partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \varepsilon^{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} F_{\hat{\mu}\hat{\kappa}} R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}} + \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}}\partial_{\hat{\mu}}\varphi^I T^I_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = 0. \tag{3.36}$$

Considerando $\hat{\nu} = 4$, temos que

$$\partial_\mu \eta^\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} R_{\kappa\lambda} - \partial_\mu \varphi^I t^{I\mu} = 0, \tag{3.37}$$

e considerando $\hat{\nu} = \nu$, temos que

$$\partial_4 \eta^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} F_{\mu\kappa} p_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} \partial_\mu \varphi^I S^I_{\kappa\lambda} - \varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda} \eta_\mu R_{\kappa\lambda} + G^I t^{I\mu}. \tag{3.38}$$

A equação de campo para φ é dada por

$$\partial_{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\mu}} \varphi^I - \frac{1}{3!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} T^I_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} - \frac{2}{4!}\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} \partial_{\hat{\mu}} \varphi^J T^{IJ}_{\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = 0. \tag{3.39}$$

Tomando a componente $\hat{\mu} = 4$, chegamos na expressão

$$\partial_4 G^I = \partial_\mu \partial^\mu \varphi^I - \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} F_{\mu\nu} S^I_{\lambda\rho} - \eta_\mu t^{I\mu} - 2\partial_\mu \varphi^J t^{IJ\mu} - 2G^J t^{IJ}. \tag{3.40}$$

Note que o vínculo (3.12) pode diretamente simplificar o Lagrangeano para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 \;=\; & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu \eta^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^I \partial^\mu \varphi^I + \frac{1}{2}G^I G^I \\ & + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\kappa p_\lambda + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} \varphi^I S^I_{\kappa\lambda} + \varphi^I \partial_\mu \varphi^J t^{IJ\mu}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Como no caso da redução de $D = 6$ para $D = 4$, o campo ϕ funciona como um multiplicador de Lagrange. Os campos ainda devem satisfazer a equação (3.37) e as translações em x^4 (3.38,3.40) correspondem a parte bosônica das transformações de cargas centrais na superálgebra da versão supersimétrica de $N = 4$ e $D = 4$.

3.4 A versão off-shell $N = 4$-SUSY do modelo de gauge Abeliano com termo de quebra da simetria de Lorentz

De modo a construir a versão $N = 4$-supersimétrica realizada off-shell do modelo de gauge Abeliano com termo de quebra de simetria de Lorentz, procedemos de forma similar a que fizemos na segunda seção, mas agora, partimos do Lagrangeano bosônico (3.41) obtido através da redução dimensional $10D \rightarrow 5D$ e $5D \Rightarrow 4D$. Da mesma forma que na segunda seção, vamos considerar os campos vetoriais como o gradiente de campos escalares ($p_\mu = \partial_\mu s$, $t^{IJ\mu} = \partial^\mu u^{IJ}$), então o Lagrangeano bosônico fica dada como a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_\mu\eta^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1^I\partial^\mu\varphi_1^I + \frac{1}{2}G_1^I G_1^I \\
&\quad + \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\kappa\partial_\lambda s_2 + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}\varphi_1^I S_{\kappa\lambda}^I + \varphi_1^I\partial_\mu\varphi_1^J\partial^\mu u_1^{IJ}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Redefinimos os campos reais φ^I, s e G^I de modo a definir campos complexos que são campos componentes bosônicos acomodados nos supercampos quirais. Definimos os campos complexos como:

$$\begin{aligned}
\varphi^I &= \varphi_1^I + i\varphi_2^I, \\
s &= s_2 + is_1, \\
G^I &= G_1^I + iG_2^I, \\
u^{IJ} &= u_1^{IJ} + iu_2^{IJ}.
\end{aligned}$$

Procedemos a supersimetrização construindo a extensão em $N = 1$-supercampos do Lagrangeano (3.42). Os supercampos que acomodam o campo de gauge A_μ, o campo escalar de fundo s e o campo vetorial auxiliar η^μ com seus parceiros supersimétricos são os mesmos definidos na seção anterior, dados por (3.18, 3.23, 3.24, 3.20), respectivamente. Os supercampos quirais que acomodam os cinco campos escalares reais de gauge φ_1^I, e introduzindo mais cinco campos reais φ_2^I que não aparecem no Lagrangeano (3.41), são dados, respectivamente como:

$$\Phi^I = \varphi^I + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^I - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi^I + \sqrt{2}\theta\psi^I - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi^I\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 G^I, \tag{3.43}$$

$$\bar{\Phi}^I = \varphi^{*I} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^{*I} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\varphi^{*I} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^I + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^I + \bar{\theta}^2 G^{*I}, \tag{3.44}$$

os quais satisfazem as condições de quiralidade: $\bar{D}\Phi^I = D\bar{\Phi}^I = 0$. Os supercampos quirais que acomodam u^{IJ} e u^{*IJ} são

$$R^{IJ} = u^{IJ} + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu u^{IJ} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box u^{IJ} + \sqrt{2}\theta\zeta^{IJ} - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\zeta^{IJ}\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta^2 g^I, \tag{3.45}$$

$$\bar{R}^{IJ} = u^{*IJ} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu u^{*IJ} - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box u^{*IJ} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\zeta}^{IJ} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}^{IJ} + \bar{\theta}^2 g^{*I}, \tag{3.46}$$

e também satisfazem as condições de quiralidade $\bar{D}R^{IJ} = D\bar{R}^{IJ} = 0$.

Os supercampos espinoriais que contém os campos $S^I_{\mu\nu}$, seus duais e seus parceiros supersimétricos são escritos como

$$\begin{aligned}\Sigma^I_a &= \tau^I_a + \theta^b(\varepsilon_{ba}\rho^I + \sigma^{\mu\nu}_{ba}S^I_{\mu\nu}) + \theta^2 F^I_a + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\tau^I_a \\ &\quad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^b\partial_\mu(\varepsilon_{ba}\rho^I + \sigma^{\mu\nu}_{ba}S^I_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\tau^I_a,\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}^I_{\dot{a}} &= \bar{\tau}^I_{\dot{a}} + \bar{\theta}_{\dot{b}}(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^{*I} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}S^{*I}_{\mu\nu}) + \bar{\theta}^2\bar{F}^I_{\dot{a}} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\tau}^I_{\dot{a}} \\ &\quad - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta_{\dot{b}}\partial_\mu(-\varepsilon^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\rho^{*I} - \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{b}}{}_{\dot{a}}S^{*I}_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box\bar{\tau}^I_{\dot{a}}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

que também são quirais $\bar{D}_{\dot{b}}\Sigma^I_a = D_b\bar{\Sigma}^I_{\dot{a}} = 0$.

Agora, estamos interessados na construção da versão $N = 4$-supersimétrica realizada off-shell do Lagrangeano (3.1). O setor bosônico da versão supersimétrica do Lagrangeano é dada por (3.41). Primeiramente, procuramos por um modelo supersimétrico em termos de $N = 1$-supercampos. As dimensões em massa para os novos supercampos são dados por:

$$[\Phi^I] = [\bar{\Phi}^I] = +1, \qquad [\Sigma^I_a] = [\bar{\Sigma}^I_{\dot{a}}] = +\frac{1}{2}, \qquad [R^{IJ}] = [\bar{R}^{IJ}] = 0.$$

Baseado na dimensionalidade, e analizando o Lagrangeano bosônico (3.41), propomos a seguinte ação supersimétrica, S_{br}:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{br} &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}[\frac{1}{2}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\delta(\theta^2) + \frac{1}{2}W^{\alpha}W_{\alpha}\delta(\bar{\theta}^2) + \frac{1}{2}\bar{\Phi}^I\Phi^I \\
&\quad -UU + \frac{1}{2}W^a(D_aV)S + \frac{1}{2}\bar{W}_{\dot{a}}(\bar{D}^{\dot{a}}V)\bar{S} \\
&\quad +\frac{i}{4}\delta(\bar{\theta})W^a(\Phi^I + \bar{\Phi}^I)\Sigma^I_a - \frac{i}{4}\delta(\theta)\bar{W}_{\dot{a}}(\Phi^I + \bar{\Phi}^I)\bar{\Sigma}^{I\dot{a}} \\
&\quad +\frac{1}{2}\Phi^I\bar{\Phi}^J(R^{IJ} - \bar{R}^{IJ})].
\end{aligned} \tag{3.49}$$

O Lagrangeano em sua versão em campos-componentes é escrita como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{br} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} + D^2 + D^{*2} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi^I\partial^{\mu}\varphi^{*I} - \frac{i}{2}\psi^I\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}^I + \frac{1}{2}G^IG^{*I} \\
&\quad -\frac{1}{2}\eta^{\mu}\eta_{\mu} + \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} - MM^* - 2uE \\
&\quad +\frac{i}{4}\partial_{\mu}(s - s^*)\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}A_{\nu} - \frac{1}{4}(s + s^*)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D^2(s + s^*) \\
&\quad -is\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - is^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\bar{\xi} \\
&\quad +\frac{1}{2}\lambda\lambda h + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{\lambda}h^* - \sqrt{2}\lambda\xi D - \sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\xi}D \\
&\quad \frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}(\varphi^I + \varphi^{*I})(S^I_{\kappa\lambda} + S^{*I}_{\kappa\lambda}) + \frac{i}{8}F^{\mu\nu}(S^I_{\mu\nu} - S^{*I}_{\mu\nu})(\varphi^I + \varphi^{*I}) \\
&\quad -\frac{i\sqrt{2}}{8}\tau^I\sigma^{\mu\nu}\psi^IF_{\mu\nu} - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\tau}^I\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}^IF_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tau^I\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda}(\varphi^I + \varphi^{*I}) \\
&\quad -\frac{1}{4}\bar{\tau}^I\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda(\varphi^I + \varphi^{*I}) + \frac{i\sqrt{2}}{4}\psi^I\sigma^{\mu\nu}S^I_{\mu\nu}\lambda + \frac{i\sqrt{2}}{4}\bar{\psi}^I\bar{\sigma}^{\mu\nu}S^{I*}_{\mu\nu}\bar{\lambda}^I \\
&\quad -\frac{i}{2}D(\varphi^I + \varphi^{*I})\rho^I + \frac{i}{2}D^*(\varphi^I + \varphi^{*I})\rho^{*I} \\
&\quad +\frac{i\sqrt{2}}{8}\lambda\psi^I\rho^I - \frac{i\sqrt{2}}{8}\bar{\lambda}\bar{\psi}^I\rho^{*I} - \frac{i\sqrt{2}}{4}D\psi^I\tau^I + \frac{i\sqrt{2}}{4}D^*\bar{\psi}^I\bar{\tau}^I \\
&\quad +\frac{i}{4}f^I\lambda\tau^I - \frac{i}{4}f^{*I}\bar{\lambda}\bar{\tau}^I + \frac{i}{4}(\varphi^I + \varphi^{*I})\lambda F^I - \frac{i}{4}(\varphi^I + \varphi^{*I})\bar{\lambda}\bar{F}^I \\
&\quad +\frac{1}{4}\varphi^I\partial_{\mu}\varphi^{*J}\partial^{\mu}(u^{IJ} + u^{*IJ}) - \frac{1}{4}\varphi^{*J}\partial_{\mu}\varphi^I\partial^{\mu}(u^{IJ} + u^{*IJ})
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$+\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi^I\partial_\mu\varphi^{*J}(u^{IJ}-u^{*IJ})-\frac{1}{4}\varphi^I\varphi^{*J}\Box(u^{IJ}-u^{*IJ})-\frac{i}{2}\psi^I\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^J(u^{IJ}-u^{*IJ})$$
$$+\frac{1}{2}G^IG^{*J}(u^{IJ}-u^{*IJ})+\frac{i}{2}\psi^I\sigma^\mu\bar{\psi}^J\partial_\mu u^{*IJ}$$
$$-\frac{i}{2}\varphi^I\zeta^{IJ}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^J+\frac{i}{2}\varphi^{*J}\psi^I\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\zeta}^{IJ}+\frac{i}{2}\psi^I\sigma^\mu\bar{\zeta}^{IJ}\partial_\mu\varphi^{*J}$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^IG^{*J}g^{IJ}-\frac{1}{2}G^I\varphi^{*J}g^{*IJ}-\frac{1}{2}G^{*J}\psi^I\zeta^{IJ}+\frac{1}{2}G^I\bar{\psi}^J\bar{\zeta}^{IJ}.$$

Este $N=4$-Lagrangeano contém os termos correspondentes as versões $N=1$ e $N=2$. As transformações em x^4 dadas por (3.38,3.40) funcionam como transformações de cargas centrais na superálgebra em $D=4$. Essas transformações são dadas como

$$\begin{aligned}
\delta_Z\eta^\nu &= \partial_\mu F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}F_{\mu\kappa}\partial_\lambda s+\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\partial_\mu\varphi^I S^I_{\kappa\lambda}-\varepsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\eta_\mu R_{\kappa\lambda}+G^I\partial^\mu u^I \\
&\quad +parceiros\ supersim\acute{e}tricos\ fermi\hat{o}nicos, \qquad (3.51)\\
\delta_Z G^I &= \partial_\mu\partial^\mu\varphi^I-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\kappa\lambda\rho}F_{\mu\nu}S^I_{\lambda\rho}-\eta_\mu t^{I\mu}-2\partial_\mu\varphi^J\partial^\mu u^{IJ}-2G^Jt^{IJ} \\
&\quad +parceiros\ supersim\acute{e}tricos\ fermi\hat{o}nicos. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Como já mensionado na seção anterior, os termos fermiônicos das transformações de cargas centrais podem aparecer em trabalhos posteriores.

3.5 Comentários finais

Neste capítulo, obtemos as generalizações supersimétricas $N=2$ e $N=4$ estendidas realizadas off-shell do modelo de gauge Abeliano com termo de violação da simetria de Lorentz do tipo Chern-Simons partindo do setor bosônico da versão $N=1$-supersimétrica desse modelo em $D=6$ e $D=10$ respectivamente, ambas realizadas on-shell. Os resultados obtidos puderam ser realizados off-shell porque usamos a técnica de redução dimensional baseada nas transformações de Legendre para reduzir uma das coordenadas tipo-espaço. Fazendo isso, vimos que o Lagrangeano adquiriu campos auxiliares que fizeram com que a superálgebra ficasse fechada off-shell. Como no capítulo anterior, vimos o aparecimento de transformações de cargas centrais que é consequência da translação com respeito a coordenada reduzida com essa técnica. Devido ao nosso procedimento apresentamos apenas a parte bosônica das transformações de cargas centrais, porém, as transformações completas podem ser obtidas usando o formalismo de supercampos. Em um trabalho posterior, devemos discutir as cargas centrais com mais profundidade e suas relações com as configurações topológicas que que devem ser achadas nas extensões $N = 2$- e $N = 4$-supersimétricas do modelo de gauge com termo de quebra de simetria de Lorentz.

Capítulo 4

Conclusões gerais e perspectivas de novos encaminhamentos

Os resultados obtidos nesta tese mostram um caminho mais simples na busca da generalização supersimétrica N-estendida de teorias em D dimensões, para o que partimos de sua versão em uma dimensão superior a D com $N = 1$, e utilizamos métodos de redução dimensional. Este procedimento é possível devido ao fato de as teorias nas dimensões reduzidas possuirem os mesmos graus de liberdade que as teorias em suas versões supersimétricas estendidas. A redução dimensional faz com que os campos de um Lagrangeano nas dimensões superiores sejam redefinidos em um número maior de campos no Lagrangeano reduzido (preservando os graus de liberdade). Com isto, os parâmetros espinorias das transformações de supersimetria são também redefinidos em N novos parâmetros, caracterizando assim, uma invariância com N supersimetrias.

Devido à importância do estudo do comportamento da violação da simetria de Lorentz no cenário atual das teorias para interações fundamentais a altíssimas energias, propusemos, nos Capítulos 1 e 2, as versões supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ estendidas do modelo de gauge Abeliano com um termo de Chern-Simons que quebra a simetria de Lorentz em um espaço-tempo de $D = 4$. No Capítulo 1, apresentamos separadamente as versões $N = 2$- e $N = 4$-supersimétricas para o setor de gauge e para o setor de quebra. Fizemos isto porque, no caso da redução dimensional ordinária (à la Scherk), os Lagrangeanos completos (setor de gauge + setor de fundo) são dados simplesmente pela soma destes setores. Como discutimos, os Lagrangeanos obtidos através da técnica de redução dimensional "à la Scherk" de um Lagrangeano $N = 1$-supersimétrico nas dimensões superiores propostas apresentam uma invariância de supersimetria on-shell, tanto para $N = 1$ quanto para sua extensão $N > 1$. No Capítulo 2, apresentamos a técnica de redução dimensional que se baseia na transformação de Legendre do Lagrangeano em relação à coordenada a ser reduzida. Com isto, utilizando essa técnica para uma das coordenadas tipo-espaço (para as demais, utilizamos o método ordinário), obtivemos as versões $N = 2$- e $N = 4$-supersimétricas realizadas off-shell para o modelo de gauge Abeliano com o termo de quebra da simetria de Lorentz. Escolhemos fazer diretamente a redução dimensional do Lagrangeano completo (setor de gauge + setor de fundo), já que a técnica de redução dimensional "à la Legendre" exige que as equações de campo nas dimensões superiores sejam satisfeitas.

Nos Capítulos 1 e 2, escolhemos partir apenas dos setores bosônicos do Lagrangeano. Com isto, pudemos propor as versões supersimétricas estendidas do modelo, utilizando o formalismo de supercampos em um superespaço de $N = 1$. Este procedimento torna os cálculos mais simples do que se partíssemos do Lagrangeano em sua dimensão inferior a $D = 4$ (sem usar a redução dimensional) em superespaço estendido com $N > 1$.

No Capítulo 3, não utilizamos o formalismo de supercampos, mas partimos do Lagrangeano completo (setor bosônico + setor fermiônico) $N = 1$-supersimétrico on-shell em componentes em um espaço-tempo de $D = 4$, para construirmos um Lagrangeano planar com $N = 2$ supersimetrias. Essa construção foi feita de duas formas: utilizamos as técnicas de redução dimensional "à la Legendre" e "à la Scherk". Mostramos as transformações de supersimetria em $D = 3$ obtidas a partir dessas técnicas, e observamos a presença da carga central para o caso reduzido "à la Legendre". Constatamos a importância de se levar em conta a dependência dos campos nas dimensões extras após a redução dimensional, mesmo que a ação não apresente tal dependência e, assim, a importância da redução dimensional baseada nas transformações de Legendre.

Tendo sido possível contruir as versões supersimétricas $N = 2$ e $N = 4$ com os métodos de redução dimensional adotados, um conjunto de possibilidades se abre como possíveis novos encaminhamentos para futuras colaborações. Em primeiro lugar, pode-se investigar a álgebra completa em termos de supercampos e componentes para os Capítulos 1 e 3, observando o aparecimento de cargas centrais. Isto seria bastante interessante, pois nos possibilitaria relacionar o vetor ou tensor que realiza a violação da simetria de Lorentz à carga central e, assim, chegar a possíveis valores para a mesma a partir dos resultados obtidos para o parâmetro de quebra no contexto das observações cosmológicas ou astrofísicas.

Um outro possível desdobramento seria a análise do espectro de excitações dos bósons de gauge em termos das condensações dos férmions de fundo que quebram a simetria de Lorentz. Não se tem na literatura qualquer referência ao estudo de propagadores mistos entre campos de gauge e campos fermiônicos. Estes são claramente resultados da violação da simetria de Lorentz. O fato de bósons de gauge poderem transitar para graus de liberdade fermiônicos, e vice-versa, pode ser bastante interessante em conexão com os fenômenos recentemente discutidos das "γ-and X-ray bursts". Estes fenômenos podem ser uma assinatura da violação da simetria de Lorentz a altíssimas energias, e férmions oriundos de uma supersimetria do universo primordial, como gauginos e gravitinos, poderiam transitar, já a nível-árvore, o que pode descrever a produção abundante de radiação eletromagnética. Esta é uma questão relevante e nossos resultados podem fornecer um caminho para a modelagem do fenômeno.

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos as convenções utilizadas nos capítulos 1 e 3. Também apresentaremos algumas relações úteis envolvendo essas convenções.

As matrizes σ^{μ} e $\bar{\sigma}^{\mu}$ em $D = 4$ são definidas como

$$\sigma^{\mu} = (1, \sigma^{i}), \qquad \bar{\sigma}^{\mu} = (1, -\sigma^{i}),$$

onde σ^{i} são as matrizes de Pauli.

O geradores do grupo $SO(3,1)$ são representados pelas matrizes

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}).$$

Um relação útil envolvendo as matrizes σ é

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{a}b}\sigma^{\kappa}_{b\dot{b}}\bar{\sigma}^{\lambda\dot{b}a} = 2(\eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} + i\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}),$$

onde $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$. As coordenadas de Grassmmanian θ e $\bar{\theta}$ têm seu índices levantados e abaixados como:

$$\theta^a = \varepsilon^{ab}\theta_b, \qquad \theta_a = \varepsilon_{ab}\theta^b, \qquad \bar{\theta}^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{b}}\bar{\theta}_{\dot{b}}, \qquad \bar{\theta}_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\theta}^{\dot{b}},$$

onde $\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = \varepsilon_{\dot{2}\dot{1}} = 1$ and $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$, $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$, $\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon^{\dot{b}\dot{a}}$, $\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{\dot{b}\dot{a}}$.

A derivada covariante no superespaço é definida como:

$$D_a = \partial_a + i\sigma^\mu_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu, \qquad \bar{D}_{\dot{a}} = -\bar{\partial}_{\dot{a}} - i\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu.$$

Referências

[1] A.P. Baêta Scarpelli, H.J. Belich, J.L. Boldo, L.D. Colatto, J.A. Helaÿel-Neto e A.L.M.A. Nogueira, *Nucl. Phys.* B- *Supp.*127, 105 (2004).

[2] A. Salam e J. Strathdee, *Ann. of Physics*, **141**, 316-352 (1982).

[3] D.I. Olive e P.C. West, *Nucl. Phys.* **B 217**, 248 (1983).

[4] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 121 (1977).

[5] F. Gliozzi, J. Scherk e D. Olive, *Nucl. Phys.* B 122, 253 (1977).

[6] For an overview see, e.g., *CPT and Lorentz Symmetry II*, edited by V.A. Kostelecký (World Scientific, Singapore,2002).

[7] G. Chapline e N.S. Manton, *Nucl. Phys.* **B 184**, 391 (1981).

[8] H.J. Belich, J.L. Boldo, L.D. Colatto, J.A. Helaÿel-Neto e A.L.M.A. Nogueira, *Phys. Rev.* **D 68** 065030 (2003).

[9] J. Scherk e J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B 153**, 61 (1979).

[10] J. Scherk, Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories, LPTENS 78/21 SPIRES entry *Invited talk given at NATO Advanced Study Inst. on Gravitation: Recent Developments*, Cargese, France, Jul 10-29, 1978.

[11] L. Brink, J. Schwarz e J. Scherk, *Nucl. Phys.* B 121, 77 (1977).

[12] M.F. Sohnius, K.S. Stelle e P.C. West, *Nucl. Phys.* **B 173**, 127 (1980).

[13] M.J. Duff, Modern Kaluza-Klein Theories, Imperial/TP/83-84/45 SPIRES entry *Lectures given at Kaluza-Klein Workshop*, Chalk River, Canada, Aug 11-16, 1983.

[14] M. S. Berger e V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* **D 65**, 091701 (2002); M. S. Berger, *Phys. Rev.* **D 68**. 115005 (2003).

[15] P. Fayet, *Nucl. Phys.* **B** 113, 135 (1976).

[16] R. Grimm, M. Sohnius e J. Wess, *Nucl. Phys.* **B** 133, 275-284 (1978).

[17] R. Jackiw, S.-Y. Pi, *Phys. Rev.* **D 68** 104012 (2003).

[18] R. Lehnert e R. Potting, *Phys.Rev.* **D 70**, 125010 (2004) Erratum-ibid. **D70,** 129906 (2004).

[19] S. Carroll, G. Field e R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D 41**, 1231 (1990).

[20] S. Ferrara e B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B** 79, 413 (1974).

[21] S. G. Nibbelink e M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 081601.

[22] S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Rocek e W. Siegel, Superspace or One Thousand and one Lessons in Supersymmetry (Benjamin, Massachusetts, 1983).

[23] V.A. Kostelecký e R. Lehnert, *Phys. Rev.* **D 63**, 065008 (2001).

[24] V.A. Kostelecký, *Phys. Rev.* **D 69**, 105009 (2004).

[25] V. E. R. Lemes, A.L.M.A. Nogueira e J.-A. Helaÿel-Neto, *International Journal of Modern Physics* **A**, Vol. 13, No. 18 (1998) 3145.

[26] W.G. Ney, J.A. Helaÿel-Neto, W. Spalenza, Off-shell Extended Supersymmetries and Lorentz-violating Abelian Gauge Teories, hep-th/0502037.

[27] W.G. Ney, J.A. Helaÿel-Neto, W. Spalenza, *Phys.Lett.***B** 587,143-149 (2004).

[28] W.G. Ney, J.A. Helaÿel-Neto, W. Spalenza, Proc.Sci.WC2004:046,2004.

[29] W.G. Ney, J.A. Helaÿel-Neto, W. Spalenza, The N = 2 and N = 4 Supersymmetric Extensions of the Lorentz and CPT-Violating Term in Abelian Gauge Theories, hep-th/0410287.

"Supersimetria Estendida em Teorias de Gauge com violação da Simetria de Lorentz"

Wander Gomes Ney

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto - Presidente

Ilya Chápiro – UFJF

Íon Vancea – UFRRJ

Francesco Toppan

Sebastião Alves Dias

Sérgio José Duarte Barbosa – Suplente

Rio de Janeiro, 17 de março de 2006