

Tese de
Doutorado

**Valor Esperado no Vácuo de Observáveis
Locais na Presença de Fronteiras**

Robson Brito Rodrigues

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, maio de 2004.

Resumo

Apresentamos uma análise local das flutuações do vácuo a um laço associadas com um campo escalar quântico e com um campo eletromagnético quântico na presença de fronteiras retangulares.

Inicialmente consideramos um campo escalar sem massa definido em um espaço Euclidiano quadri-dimensional confinado no interior de um guia de ondas de seção reta retangular. Para identificar as divergências das flutuações do vácuo usamos um procedimento de regularização analítica. As divergências que ocorrem nas flutuações do vácuo a um laço caem em duas classes : divergências do espaço-tempo de Minkowski que são renormalizadas pelos contra-termos usuais e divergências de parede e de aresta. Finalmente, discutimos como generalizar nossos cálculos para um campo escalar massivo definido em um espaço Euclidiano de dimensão genérica.

Usando o método do núcleo de calor e a continuação analítica da função zeta, calculamos o tensor momento energia do vácuo associado a um campo escalar sem massa minimalmente acoplado e a mesma quantidade associada a um campo escalar conformalmente acoplado, confinados no interior de um guia de ondas infinitamente longo e confinados dentro de uma cavidade retangular. Seguindo uma abordagem desenvolvida por Actor em como extrair resultados globais da descrição local divergente, calculamos o tensor momento energia fisicamente mensurável do vácuo associado a estes campos. Mostramos então que a integração das componentes destes tensores na região interior das cavidades produz os resultados globais conhecidos. A dependência local da energia do vácuo renormalizada para configurações onde a energia total é positiva e negativa é apresentada através de uma análise numérica usando ambos os tensores. Das componentes dos tensores, obtemos as forças locais de Casimir em todas as paredes introduzindo uma estrutura externa. Ambos os tensores produzem a mesma força local a qual é sempre atrativa quando os modos externos são incluídos. Usando o método de Bromwich-Borgnis, calculamos também o tensor momento energia do vácuo associado ao campo eletromagnético que pode ser expresso através de dois problemas de contorno escalares através dos vetores

de Hertz. Mostramos que a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo associada ao campo eletromagnético não possui dependência nas coordenadas espaciais no interior de um guia de ondas (como acontece entre placas paralelas) mas possui dependência nas coordenadas no interior de uma cavidade retangular. Introduzindo novamente uma estrutura externa, mostramos que a força local é sempre atrativa quando os modos externos são incluídos como no caso escalar. Finalmente, como uma aplicação, derivamos o efeito Scharnhorst no interior de um guia de ondas e no interior de uma cavidade retangular. Mostramos que a variação do índice de refração é não-uniforme em ambos os casos e a velocidade de propagação da luz pode ser maior ou menor do que c dependendo das coordenadas espaciais e dos parâmetros globais.

Abstract

An local analysis of one-loop vacuum fluctuations associated with a quantum scalar field and with a quantum electromagnetic field confined by rectangular boundaries is presented.

We first consider a massless scalar field defined in a four-dimensional Euclidean space confined in the interior of a infinite waveguide of rectangular cross section. To identify the divergences of the vacuum fluctuations we use an analytic regularization procedure. The divergences which occur in the one-loop vacuum fluctuations fall into two distinct classes: local ones that are renormalized by the introduction of the usual bulk counterterms, and surface and edge divergences. We present the detailed form of the surface and edge divergences. Finally we discuss how to generalize our calculations for a confined massive scalar field defined in a higher dimensional Euclidean space.

Using the heat kernel method and the analytic continuation of the zeta function, we calculate the canonical and improved vacuum stress tensors associated with a massless scalar field confined in the interior of an infinitely long rectangular waveguide and confined in the interior of a rectangular cavity. Following the approach developed by Actor on how to extract global results from the divergent local description, we obtained physical measurable vacuum stress energy tensors. We show that integration of the components of these tensors over the cavities produces the well-known global results. The local dependence of the renormalized energy for special configurations when the total energy is positive and negative are presented using the canonical and improved stress tensor. From the stress tensors we obtain the local Casimir forces in all walls by introducing a particular external configuration. Both fields produce the same local force which is always attractive when the external modes are included. Using the Bromwich-Borgnis method, which reduce the electromagnetic problem to two scalar boundary value problems through the Hertz vectors, we calculate the vacuum stress energy tensor associated with this field. We show that the vacuum energy density of the electromagnetic field has no position dependence in a rectangular waveguide (as between parallel plates) but have a position dependence in the interior of a rectangular cavity. Introducing again a particular external configuration,

we show that the local force is always attractive as the scalar case when the external modes are included. As an application we derive the Scharnhorst effect in the interior of a waveguide and in the interior of a rectangular cavity. We show that in both cases the shift in the refractive index acquire a position dependence and the light velocity can be greater or smaller than c depending on the space point in the interior of the cavities and on the global length parameters.

A Renata, Adelino, Lêda, Kássia, Simone e Gabriel, as pessoas que mais amo no mundo.

Agradecimentos

- Ao CBPF e ao Cnpq pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador Nami F. Svaiter.
- A Raphael D. M. De Paola e Gabriel F. Hidalgo.
- Ao grupo de efeito Casimir da UFRJ.
- À Renata, por seu amor, compreensão e por tudo que teve de ouvir de física.
- A minha família, por seu apoio e paciência (em especial a Adelino, meu pai, pela revisão gramatical da referência [41]).

Índice

1	Introdução	1
2	As flutuações do vácuo no interior de um guia de ondas retangular	9
2.1	Flutuações do vácuo de um campo escalar no interior de um guia de ondas retangular	9
2.2	Análise das divergências de superfície nas flutuações do vácuo na aproximação de um laço	17
2.3	As flutuações do vácuo na aproximação um laço no interior de um guia de ondas em um espaço Euclidiano d -dimensional.	25
3	O tensor momento energia do vácuo	32
3.1	Introdução	32
3.2	O tensor momento energia do vácuo de um campo escalar acoplado minimalmente ou conformalmente	35
3.2.1	Formalismo básico	35
3.2.2	O tensor momento energia fisicamente mensurável do vácuo	40
3.2.3	O interior do guia de ondas retangular	43
3.2.4	O guia de ondas retangular inserido em uma estrutura externa . . .	70
3.2.5	A cavidade retangular	74
3.3	O tensor momento energia do vácuo do campo eletromagnético	84
3.3.1	Formalismo básico	84
3.3.2	O guia de ondas retangular	86
3.3.3	A cavidade retangular	90
3.4	Propagação de ondas eletromagnéticas em um vácuo não-trivial	96
3.4.1	Introdução	96
3.4.2	O efeito Scharnhorst entre placas paralelas	101
3.4.3	O efeito Scharnhorst no interior de cavidades retangulares	104
4	Conclusões	109

Lista de Figuras

3.1	Densidade de energia do vácuo quando $a = b$ (campo escalar minimalmente acoplado sob condições de Dirichlet).	58
3.2	Densidade de energia do vácuo quando $a = b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Dirichlet).	59
3.3	Densidade de energia do vácuo quando $a = 2b$ (campo escalar minimalmente acoplado sob condições de Dirichlet).	59
3.4	Densidade de energia do vácuo quando $a = 2b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Dirichlet).	60
3.5	Densidade de energia do vácuo quando $a = b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Neumann).	60
3.6	Densidade de energia do vácuo quando $a = 2b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Neumann).	61
3.7	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = a$ (Dirichlet).	66
3.8	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = (1.2) a$ (Dirichlet).	66
3.9	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 2a$ (Dirichlet).	67
3.10	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 10a$ (Dirichlet).	67
3.11	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = a/2$ (Neumann).	68
3.12	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = a$ (Neumann).	68
3.13	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 5a$ (Neumann).	69
3.14	Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 10a$ (Neumann).	69
3.15	Densidade de força que age no pistão do guia em $x_2 = 0$ quando $b = a$ (campo escalar sob condições de Dirichlet).	73
3.16	Densidade de força que age no pistão do guia em $x_2 = 0$ quando $b = 2a$ (campo escalar sob condições de Dirichlet).	73
3.17	Densidade de força que age no pistão da cavidade em $x_2 = 0$ quando $a = b = c$ (campo escalar sob condições de Dirichlet).	84
3.18	Densidade de energia do vácuo do campo eletromagnético quando $a = b = c$ nos planos $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$ e $x_3 = \frac{1}{16}$	93
3.19	Densidade de força que age no pistão da cavidade em $x_2 = 0$ quando $a = b = c$ (campo eletromagnético).	96

Capítulo 1

Introdução

A obtenção de uma energia divergente associada a um campo quântico descrevendo um sistema no estado de vácuo é uma consequência direta do processo de quantização canônica de campos clássicos, já que esta não fixa a ordem de operadores que não comutam. Esta divergência é formalmente removida fixando a ordem destes operadores através de uma prescrição (o ordenamento normal de Wick), levando a uma energia do vácuo nula. Esta prescrição é baseada no argumento de que somente diferenças de energia podem ser medidas e a remoção de uma constante não altera as equações de Heisenberg. No entanto a energia do estado fundamental de um campo quântico não deve ser corretamente definida pelo ordenamento normal pois existem diversos efeitos físicos associados com um valor não-nulo desta quantidade.

Em 1948 Casimir [1] demonstrou que duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras em um espaço-tempo quadridimensional devem se atrair com uma força de magnitude $F(L) \propto \frac{1}{L^4}$, onde L é a distância entre as placas. A existência desta força pode ser atribuída as modificações das flutuações do vácuo associadas ao campo eletromagnético causadas pela presença de cada placa. A previsão de Casimir foi verificada experimentalmente dez anos depois e confirmada com medidas mais precisas recentemente

[2]. O estado de energia mais baixa do campo eletromagnético quântico está também associado a existência de vários outros efeitos físicos [3] como por exemplo a diferença entre os níveis de energia $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ do átomo de hidrogênio (o “Lamb shift”), o fenômeno de emissão espontânea, o momento anômalo do elétron ou as forças de Van der Waals.

Para definir corretamente a energia do vácuo temos de levar em consideração o fato de que campos quânticos só podem ser medidos quando interagem com a matéria ou com campos externos, i.e., quando estão em interação com “objetos” clássicos. Uma descrição idealizada desta situação pode ser conseguida exigindo que os campos satisfaçam a determinadas condições de fronteira. Como os modos do campo são alterados nesta situação, a energia de ponto-zero também se modifica. Em geral, a energia renormalizada do vácuo é definida como a diferença entre a energia de ponto-zero do campo na presença de vínculos externos e em sua ausência respectivamente. Esta definição é somente formal, pois as quantidades nela envolvidas são divergentes e a subtração deve ser combinada com um esquema de regularização.

Qualquer variação nos vínculos externos induzem mudanças na energia do vácuo que agora é considerada uma quantidade mensurável. A principal consequência desta definição é que agora o vácuo de um campo quântico não é mais considerado um estado com propriedades triviais e sim um meio que reage à distorções. Os efeitos atribuídos ao vácuo podem ser interpretados como sua resposta a ação de vínculos externos.

Dois métodos são empregados no cálculo da energia do vácuo utilizando a definição acima. Quando as fronteiras podem ser caracterizadas por um conjunto de parâmetros globais, podemos obter a energia total de um campo quântico pelo método de soma dos modos. A energia é então expressa diretamente em termos de somas infinitas das

autofrequências dos modos normais e as forças globais que agem nas fronteiras podem ser obtidas através da derivada da energia com relação ao parâmetro apropriado. No caso de não existirem parâmetros globais que caracterizem o sistema, este método não é aplicável. Como exemplo considere a interseção de um plano infinito e um semi-plano infinito sob condições de Dirichlet por um ângulo reto. Como não existe nenhum parâmetro global nesta geometria, a energia total é nula, embora exista um fluxo de momento presente que não pode ser calculado com o método global.

No método local, tratamos o vácuo como um meio elástico sujeito a deformações e calculamos o valor esperado no vácuo do tensor momento energia renormalizado em todo o espaço e diretamente desta quantidade podemos obter as forças locais de Casimir em todas as fronteiras. Quando as forças locais são independentes da posição estas devem coincidir com as forças uniformes calculadas usando a energia total do sistema. No caso do campo eletromagnético na presença de fronteiras formadas por placas paralelas [4], cilindros circulares [5] ou superfícies esféricas [6] [7], as forças locais são uniformes e a coincidência acima é verificada.

O primeiro cálculo local do efeito Casimir foi feito em 1969 por Brown e Maclay [8]. Estes autores calcularam o valor esperado no vácuo do tensor momento energia renormalizado do campo eletromagnético, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$, na presença de duas placas paralelas perfeitamente condutoras, ou seja, a versão local do efeito Casimir original. O resultado foi um tensor diagonal e uniforme entre as placas. Se as placas estão colocadas na direção perpendicular ao eixo \hat{x}_1 separadas por uma distância a , o tensor é dado pela expressão

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{\pi^2}{720a^4} \text{diag}(-1, -3, 1, 1). \quad (1.1)$$

A forma deste tensor pode ser obtida usando argumentos de simetria [9] [10] (ele só pode

depender da métrica de Minkowski e do vetor normal às placas), além da equação de conservação do tensor momento energia na forma covariante e o fato de que ele possui o traço nulo (o fator numérico só pode ser obtido através do cálculo direto).

Quando não há fronteiras, devido à invariância translacional do espaço-tempo de Minkowski, quantidades locais como $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ e $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ são necessariamente uniformes. Entretanto, na presença de uma fronteira, plana por exemplo, a invariância translacional é quebrada na direção perpendicular a esta, e espera-se que as quantidades locais mencionadas acima sejam não-uniformes nesta situação. De fato, entre duas placas perfeitamente condutoras as funções $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ e $\langle \mathbf{B}^2 \rangle$ não são uniformes, mas divergem quando o ponto do espaço em que são calculadas se aproxima das placas (estas são chamadas de divergências de superfície). Quando estas funções são combinadas para o cálculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$, é possível mostrar que as contribuições não-uniformes são canceladas resultando na expressão (1.1).

No caso do campo escalar canônico (ou minimalmente acoplado) com massa nula, vamos assumir que a condição de Dirichlet para este campo é análoga à condição de contorno que os campos elétricos e magnéticos satisfazem nos condutores. O resultado equivalente é

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{\pi^2}{1440a^4} \text{diag} \langle -1, -3, 1, 1 \rangle + \frac{\pi^2}{48a^2} \frac{3 - 2 \sin^2(\pi x_1/a)}{\sin^4(\pi x_1/a)} \text{diag} \langle -1, 0, 1, 1 \rangle \quad (1.2)$$

O segundo termo da equação (1.2) diverge quando $x_1 \rightarrow 0$ ou $x_1 \rightarrow a$, levando a uma energia por unidade de área infinita quando integrado entre as placas. O comportamento divergente deste tensor levou Boyer a especular que o campo eletromagnético seria único e que não haveria análogo do efeito Casimir para o campo escalar de massa nula. DeWitt [10] argumentou que o aparecimento desta divergência está ligado ao fato de que o traço do

tensor momento energia do campo escalar canônico não é nulo. No lugar dele deveríamos usar o campo escalar conformalmente acoplado, cujo tensor momento energia possui o traço nulo. Realmente para o campo conformalmente acoplado (sob condições de Dirichlet ou Neumann) temos

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{\pi^2}{1440a^4} \text{diag}(-1, -3, 1, 1) \quad (1.3)$$

Entretanto, cálculos posteriores feitos por Candelas e Deutsch [11] mostraram que o cancelamento das divergências para o campo eletromagnético e para o campo escalar conformalmente acoplado entre placas não representa o comportamento genérico destes tensores. Na presença de uma fronteira com alguma curvatura (mesmo pequena) o tensor momento energia de campos conformalmente invariantes se comporta perto da fronteira como ϵ^{-3} , onde ϵ é a distância até a fronteira, com um coeficiente proporcional a soma das principais curvaturas da superfície. Os autores argumentaram ainda que as divergências de superfície não são do tipo usual que podem ser removidas através do processo de renormalização. São divergências reais pois tem sua origem relacionada com as condições de contorno clássicas que modelam um condutor perfeito e não podem ser realizadas fisicamente. No caso de fronteiras reais, como placas metálicas, valores infinitos de $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ ou outros observáveis locais são evitados porque tais fronteiras não são perfeitamente condutoras para todas as frequências. Uma placa metálica é um bom refletor das ondas eletromagnéticas abaixo da frequência de plasma do material mas se torna relativamente transparente para altas frequências. Em um condutor imperfeito (real) com um comprimento de penetração característico δ , ondas com uma frequência suficientemente alta (comprimento de onda pequeno) penetram um número significativo de comprimentos de onda até serem atenuadas e portanto não “vêm” a posição precisa da fronteira. Em out-

ras palavras, a superfície de um condutor real está a uma distância δ de onde as condições de contorno são satisfeitas.

Podemos demonstrar heurísticamente o mecanismo pelo qual a imposição condições de fronteira leva ao aparecimento de divergências de superfície em $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$. Considere a função de Wightman $G^+(x, y)$ do campo escalar na presença de uma fronteira $\partial\Omega$. Vamos admitir que $G^+(x, y)$ obedece a condições de Dirichlet na fronteira

$$G^+(x, y) = 0 \quad (x \in \partial\Omega \text{ ou } y \in \partial\Omega) \quad (1.4)$$

Como veremos na seção 3.2.1, podemos obter formalmente $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ através da aplicação de um determinado operador diferencial na função $G^+(x, y)$ e então tomar o limite $y \rightarrow x$. A função $G^+(x, y)$ contém a mesma divergência ultravioleta da função livre $G_0^+(x, y)$ quando $y \rightarrow x$

$$G_0^+(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 (x - y)^2} \quad (1.5)$$

A renormalização de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ é feita subtraindo a função livre, que como discutimos anteriormente, é exatamente a função na ausência da fronteira.

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{ren} = \lim_{y \rightarrow x} \tau_{\mu\nu} [G^+(x, y) - G_0^+(x, y)] \quad (1.6)$$

onde $\tau_{\mu\nu}$ é um determinado operador diferencial. Se $x \notin \partial\Omega$ a subtração (1.6) faz de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{ren}$ uma quantidade finita. Entretanto se $x \in \partial\Omega$, devido a condição (1.4), $G^+(x, y)$ se anula e a equação (1.6) só não terá a mesma singularidade que a função (1.5) no limite $y \rightarrow x$ caso ocorra algum cancelamento após a aplicação de $\tau_{\mu\nu}$ (como vimos este é o caso do campo escalar conformalmente acoplado entre placas), mas em geral tal cancelamento não ocorre.

Como discutimos anteriormente, o fato de que observáveis locais assumem um valor

infinito nas fronteiras não significa que estes valores não possuam um significado físico. Ao contrário, estas divergências são uma consequência da imposição de condições de contorno que não podem ser realizadas fisicamente. Em outras palavras, no caso de uma fronteira real o valor destas funções cresce na fronteira mas assume um valor finito.

Um exemplo conhecido da realidade física das divergências de superfície é a região de uma quina constituída por dois planos condutores que se interceptam formando em um ângulo α . É possível mostrar [11] que $\langle T_{00}(x) \rangle_{ren}$ diverge como r^{-4} , onde r é a distância até a quina. No limite $r \rightarrow \infty$ e $\alpha \rightarrow 0$ de maneira que $r\alpha = a$ permaneça constante, esta configuração se torna a de duas placas paralelas separadas por uma distância a . Esta consistência obviamente não seria obtida caso o termo r^{-4} fosse removido por uma renormalização *ad hoc*.

Considere um campo escalar conformalmente acoplado no interior de uma cavidade perfeitamente condutora limitada por uma fronteira constituída de diferentes partes, em que cada parte é responsável por uma divergência de superfície. Quando a cavidade tem um formato retangular, as paredes, arestas e quinas dão contribuições separadas para o tensor momento energia do vácuo. As contribuições que divergem nas paredes são canceladas mas não há maneira de redefinir o tensor momento energia para eliminar as contribuições das arestas e quinas (no caso do campo eletromagnético, as divergências de quinas ou arestas podem se cancelar como veremos, mas não ao mesmo tempo). Como já foi mencionado, na presença de uma fronteira curva as divergências de superfície também não podem ser eliminadas e as arestas e quinas imitam esta propriedade. Desta maneira, o tensor momento energia do vácuo não é uniforme em uma configuração deste tipo e esta pode ser considerada como um “modelo de brinquedo” exatamente solúvel do caso

em que as fronteiras são curvas. O cálculo global pode oferecer no máximo uma descrição média desta situação mas é incapaz de reproduzir as forças locais exatas.

Na situação descrita no parágrafo anterior, a integração das componentes do tensor momento energia na região interna da cavidade leva a quantidades globais infinitas. Como os termos que divergem na fronteira só dependem dos parâmetros que definem sua forma e não dos parâmetros globais que medem a distância entre diferentes partes desta, tradicionalmente tais divergências são descartadas sob a alegação de que estas não dão contribuição para o efeito Casimir global. Obviamente tal procedimento não procura nenhum significado físico para as divergências de superfície. De fato, uma interpretação proposta por Dowker e Kennedy [12] sugere que o método local fornece o tensor momento energia do vácuo correto para qualquer ponto no interior da cavidade limitada pela fronteira mas deixa de valer na fronteira. Haveria então uma contribuição definida somente na fronteira que agiria como um contra-termo de superfície, cancelando as divergências e levando a uma energia total finita. Este foi o ponto de vista adotado na referência [14] e no capítulo 2 onde vamos estudar as flutuações do vácuo de um campo escalar no interior de um guia de ondas de seção reta retangular. Veremos que esta quantidade possui divergências nas paredes e arestas.

No capítulo 3 adotaremos a interpretação sugerida por Actor [13] para relacionar o efeito Casimir global com a descrição local divergente. Esta consiste em interpretar o efeito Casimir global como sendo causado pela interação entre as deformações causadas pelas fronteiras, que são matematicamente descritas pelas divergências de superfície.

Capítulo 2

As flutuações do vácuo no interior de um guia de ondas retangular

2.1 Flutuações do vácuo de um campo escalar no interior de um guia de ondas retangular

Nesta seção e na próxima iremos investigar o comportamento das flutuações do vácuo na aproximação de um laço associadas a campo escalar massivo definido no interior de um guia de ondas infinito de seção reta retangular [14]. Por simplicidade, trabalharemos usando a versão Euclidiana da teoria de campos. Desta forma vamos assumir que o campo escalar está definido em um espaço Euclidiano quadridimensional, onde as duas últimas coordenadas estão definidas sobre toda reta real, enquanto que as duas primeiras que chamaremos x_1 e x_2 , estão definidas no intervalo $[0, a]$ e $[0, b]$, respectivamente. Sem perda de generalidade, vamos assumir condições de contorno de Dirichlet nas fronteiras. Casos mais gerais (condições de contorno de Neumann ou Robin) seguem o mesmo procedimento. O campo sem auto-interação está definido na região

$$\Omega = \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) : 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b \subset \mathbf{R}^4, \quad (2.1)$$

com condições de contorno de Dirichlet em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$, e também em $x_2 = 0$ e $x_2 = b$.

Como enfatizado previamente, a perda de invariância translacional introduz divergências

nas paredes e nas arestas.

Neste capítulo desenvolveremos o formalismo matemático que nos permitirá calcular a função de Schwinger de dois pontos para pontos coincidentes no interior do guia de ondas. Como iremos utilizar a princípio a regularização dimensional, estaremos trabalhando em um espaço Euclidiano d -dimensional. Para identificar a estrutura das divergências de parede e de aresta, vamos utilizar o procedimento de regularização analítica. À rigor, para usarmos o procedimento de regularização analítica, teríamos que introduzir um parâmetro $(\mu)^{4-d}$ onde μ possui dimensão de massa. Isto é necessário pois extensões analíticas devem ser feitas apenas sobre quantidades adimensionais. Como não faremos nenhuma expansão em torno de um valor particular de d , para simplificar até o final desta seção faremos $\mu = 1$ (subentende-se que todas as expressões estão multiplicadas por $(\mu)^{4-d}$). Usando a representação espectral da função de Schwinger, a expressão das flutuações do vácuo na aproximação de um laço que denominaremos $T_{DD}(x_1, x_2, a, b, d) = \langle \varphi^2(x_1, x_2) \rangle$ pode ser escrita como :

$$T_{DD}(x_1, x_2, a, b, d) = \frac{4}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n_1\pi x_1}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n_2\pi x_2}{b}\right) \times \int d^{d-2}p \frac{1}{(\vec{p}^2 + (\frac{n_1\pi}{a})^2 + (\frac{n_2\pi}{b})^2 + m^2)}. \quad (2.2)$$

Usando uma simples identidade trigonométrica ($\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$), podemos reescrever a expressão acima como :

$$T_{DD}(x_1, x_2, a, b, d) = T(a, b, d) + T(x_1, a, b, d) + T(x_2, a, b, d) + T(x_1, x_2, a, b, d), \quad (2.3)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação acima é dado por

$$T(a, b, d) = \frac{4}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{1}{(\vec{p}^2 + (\frac{n_1\pi}{a})^2 + (\frac{n_2\pi}{b})^2 + m^2)}. \quad (2.4)$$

O segundo termo da Eq.(2.3), $T(x_1, a, b, d)$ é dado por

$$T(x_1, a, b, d) = -\frac{1}{2}T(a, b, d) + \frac{2}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{\cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right)}{\left(\vec{p}^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2 + m^2\right)}. \quad (2.5)$$

A expressão para $T(x_2, a, b, d)$ tem a mesma forma funcional que $T(x_1, a, b, d)$ trocando-se apenas x_1 por x_2 e a por b . Finalmente, o último termo do lado direito da Eq. (2.3) pode ser escrito como :

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, a, b, d) &= \frac{1}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{1}{\left(\vec{p}^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2 + m^2\right)} \\ &\times \left(1 - \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) - \cos\left(\frac{2n_2\pi x_2}{b}\right) + \right. \\ &\left. + \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{2n_2\pi x_2}{b}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

É fácil verificar que a Eq.(2.6) contém as mesmas contribuições que as Eqs.(2.4) e (2.5) e simples manipulações algébricas nos permitem escrever

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2; a, b, d) &= \frac{1}{4}T(a, b, d) - \frac{1}{2} \left[T(x_1, a, b, d) + \frac{1}{2}T(a, b, d) \right] + \\ &- \frac{1}{2} \left[T(x_2, a, b, d) + \frac{1}{2}T(a, b, d) \right] + N(x_1, x_2; a, b, d). \end{aligned} \quad (2.7)$$

O termo que contém as divergências de aresta, $N(x_1, x_2, a, b, d)$, é dado por

$$N(x_1, x_2, a, b, d) = \frac{1}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{\left(\cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{2n_2\pi x_2}{b}\right)\right)}{\left(\vec{p}^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2 + m^2\right)}. \quad (2.8)$$

Vamos estudar cada uma destas contribuições separadamente. Note que a contribuição das flutuações do vácuo dadas por $T(a, b, d)$ é independente das coordenadas e diverge para $d = 4$. A regularização desta contribuição será estudada na próxima seção. Para estudar a estrutura analítica de $T(x_1, a, b, d)$ vamos nos concentrar somente na parte dependente da coordenada x_1 dada por

$$T(x_1, a, b, d) + \frac{1}{2}T(a, b, d) = \frac{2}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{\cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right)}{\left(\vec{p}^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2 + m^2\right)}. \quad (2.9)$$

Uma das somas da Eq.(2.9) pode ser feita usando-se a seguinte identidade geométrica [15] [16] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2 + A^2} = -\frac{1}{2A^2} + \frac{\pi}{2A} \frac{\cosh A(\pi - t)}{\sinh \pi A}. \quad (2.10)$$

Usando a Eq.(2.10), podemos escrever a Eq.(2.9) como

$$T(x_1, a, b, d) + \frac{1}{2}T(a, b, d) = R_1(a, b, d) + R_2(x_1, a, b, d) \quad (2.11)$$

onde cada um dos termos $R_1(a, b, d)$ e $R_2(x_1, a, b, d)$ são dados por:

$$R_1(a, b, d) = -\frac{1}{(2\pi)^{d-2} ab} \sum_{n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{1}{(\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_2\pi}{b})^2)} \quad (2.12)$$

e

$$R_2(x_1, a, b, d) = \frac{1}{(2\pi)^{d-2} b} \sum_{n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_2\pi}{b})^2}} \times \frac{\cosh((a - 2x_1)\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_2\pi}{b})^2})}{\sinh(a\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_2\pi}{b})^2})}. \quad (2.13)$$

Da mesma forma temos $T(x_2, a, b, d) + \frac{1}{2}T(a, b, d) = I_1(a, b, d) + I_2(x_2, a, b, d)$, onde $I_1(a, b, d) = R_1(a, b, d)$ e $I_2(x_2, a, b, d)$ pode ser obtido de $R_2(x_1, a, b, d)$ trocando x_1 por x_2 e a por b . A expressão de $R_1(a, b, d)$ será regularizada na próxima seção. Para achar a estrutura analítica de $I_2(x_2, a, b, d)$ e $R_2(x_1, a, b, d)$, vamos nos concentrar em $I_2(x_2, a, b, d)$.

Integrando sobre o ângulo sólido , i.e usando o fato de que $d^d p = p^{d-1} dp d\Omega_d$ e $\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$

temos :

$$I_2(x_2, a, b, d) = \frac{1}{a} h(d) \sum_{n_1=1}^{\infty} \int dp p^{d-3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_1\pi}{a})^2}} \quad (2.14)$$

$$\times \frac{\cosh((b - 2x_2)\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_1\pi}{a})^2})}{\sinh(b\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + (\frac{n_1\pi}{a})^2})} \quad (2.15)$$

onde a função $h(d)$ é dada por :

$$h(d) = \frac{2}{(2\sqrt{\pi})^{d-2} \Gamma(\frac{d-2}{2})}. \quad (2.16)$$

Fazendo a mudança de variáveis $v = \left(\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, e voltando ao caso 4-dimensional podemos escrever $I_2(x_2, a, b, d)|_{d=4} \equiv I_2(x_2, a, b)$ como :

$$I_2(x_2; a, b) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\alpha_{n_1}}^{\infty} dv \frac{\cosh((b - 2x_2)v)}{\sinh bv} \quad (2.17)$$

onde o limite inferior da integral acima é dado por

$$\alpha_{n_1} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2}. \quad (2.18)$$

Note que no caso $d \neq 4$ a situação é totalmente diferente pois neste caso o termo $(v^2 - m^2 - \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2)^{\frac{d-4}{2}}$ aparecerá no integrando da Eq.(2.14). Como consequência deste fato, as manipulações algébricas que permitem a regularização analítica de $R_2(x_1, a, b, d)$ e $I_2(x_2, a, b, d)$ (assim como de outras expressões) contém um grau de dificuldade um pouco maior. A generalização será apresentada na próxima seção.

Usando identidades trigonométricas podemos escrever a Eq.(2.17) como

$$I_2(x_2, a, b) = I_{21}(x_2, a) + I_{22}^+(x_2, a, b) + I_{22}^-(x_2, a, b) \quad (2.19)$$

onde :

$$I_{21}(x_2, a) = \frac{1}{4\pi x_2 a} \sum_{n_1=1}^{\infty} \exp\left(-2x_2 \sqrt{m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2}\right), \quad (2.20)$$

e :

$$I_{22}^{\pm}(x_2, a, b) = \frac{1}{4\pi x_2 a} \sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{b\alpha_{n_1}}^{\infty} dq (\coth q - 1) \exp(\pm \frac{2x_2 q}{b}). \quad (2.21)$$

No caso em que $m = 0$, podemos somar a série geométrica $I_{21}(x_2, a)|_{m=0}$ e obtemos

$$I_{21}(x_2, a)|_{m=0} = \frac{1}{4\pi a x_2} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - 1}. \quad (2.22)$$

Nas próximas seções vamos fazer uso dos polinômios e dos números de Bernoulli. Consequentemente, vamos introduzir esta expansão de Laurent para estudar o comportamento

de $I_{21}(x_2, a)|_{m=0}$ na vizinhança de $x_2 = 0$. Para achar a parte principal da série de Laurent de $I_{21}(x_2, a)|_{m=0}$ em torno de $x_2 = 0$ vamos usar os polinômios de Bernoulli, os quais são definidos pela função geratriz

$$\frac{te^{x_1 t}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_1) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi, \quad (2.23)$$

e os números de Bernoulli $B_n = B_n(x_1 = 0)$, ($B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, \dots$). Usando esta expansão de Laurent encontramos

$$I_{21}(x_2, a)|_{m=0} = \left(\frac{B_0}{8\pi^2 (x_2)^2} + \frac{B_1}{4\pi x_2 a} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)^{n-1} \right). \quad (2.24)$$

Usando novamente a Eq.(2.10) para efetuar uma das somas da Eq.(2.8), podemos escrever

$$N(x_1, x_2, a, b, d) = N_1(x_1, a, b, d) + N_2(x_1, x_2, a, b, d) \text{ onde :}$$

$$N_1(x_1, a, b, d) = -\frac{1}{2(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{\cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right)}{\left(\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2\right)} \quad (2.25)$$

e

$$N_2(x_1, x_2, a, b, d) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}a} \sum_{n_1=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{\cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right)}{\sqrt{\left(\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2\right)}} \times \frac{\cosh\left((b - 2x_2)\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2}\right)}{\sinh\left(b\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2}\right)}. \quad (2.26)$$

Usando novamente a Eq.(2.10) podemos escrever $N_1(x_1, a, b, d) = N_{11}(a, b, d) + N_{12}(x_1, a, b, d)$,

onde $N_{11}(a, b, d)$ e $N_{12}(x_1, a, b, d)$ são dados por

$$N_{11}(a, b, d) = \frac{1}{4(2\pi)^{d-2}ab} \int d^{d-2}p \frac{1}{(\vec{p}^2 + m^2)}, \quad (2.27)$$

e

$$N_{12}(x_1, a, b, d) = -\frac{1}{4(2\pi)^{d-2}b} \int d^{d-2}p \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \frac{\cosh\left((a - 2x_1)\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right)}{\sinh\left(a\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right)}. \quad (2.28)$$

A expressão dada pela Eq.(2.27) será regularizada na próxima seção. Integrando sobre o ângulo sólido na expressão de $N_{12}(x_1, x_2, a, b, d)$, mudando de variáveis e considerando novamente o caso particular $d = 4$, i.e. definindo $N_{12}(x_1, a, b, d)|_{d=4} \equiv N_{12}(x_1, a, b)$ temos

$$N_{12}(x_1, a, b) = -\frac{1}{8\pi b} \int_m^\infty dv \frac{\cosh((a - 2x_1)v)}{\sinh av}. \quad (2.29)$$

Usando identidades trigonométricas, encontramos :

$$\begin{aligned} N_{12}(x_1, a, b) = & -\frac{1}{8\pi ab} \left[\frac{a}{2x_1} e^{-2x_1 m} + \frac{1}{2} \int_{am}^\infty dq (\coth q - 1) e^{2qx_1/a} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{am}^\infty dq (\coth q - 1) e^{-2qx_1/a} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Note que a Eq.(2.30) possui divergências de parede quando $x_1 \rightarrow 0$ e $x_1 \rightarrow a$. A estrutura das divergências de $N_{12}(x_1, a, b)$ será estudada posteriormente.

Como próximo passo, vamos investigar a parte das flutuações do vácuo que contém as divergências de aresta e é dada por $N_2(x_1, x_2, a, b)$. Integrando novamente sobre o ângulo sólido, mudando de variáveis ($d = 4$), a expressão para $N_2(x_1, x_2, a, b)|_{d=4} \equiv N_2(x_1, x_2, a, b)$ é dada por

$$N_2(x_1, x_2, a, b) = \frac{1}{4a} \sum_{n_1=1}^\infty \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \int_{\alpha_{n_1}}^\infty dv \frac{\cosh((b - 2x_2)v)}{\sinh bv}, \quad (2.31)$$

onde α_{n_1} está definido na Eq.(2.18). Usando-se identidades trigonométricas podemos escrever $N_2(x_1, x_2, a, b)$ como

$$N_2(x_1, x_2, a, b) = N_{21}(x_1, x_2, a) + N_{22}(x_1, x_2, a, b), \quad (2.32)$$

onde :

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{8ax_2} \sum_{n_1=1}^\infty \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \exp(-2x_2\alpha_{n_1}) \quad (2.33)$$

e

$$N_{22}(x_1, x_2, a, b) = \frac{1}{4a} \sum_{n_1=1}^\infty \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \int_{\alpha_{n_1}}^\infty dv (\coth(bv) - 1) \cosh 2vx_2. \quad (2.34)$$

Até o final desta seção vamos assumir $m = 0$. Usando o núcleo de Poisson dado por

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\phi = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \phi + r^2}, \quad 0 \leq r < 1, \quad (2.35)$$

podemos obter uma expressão fechada para a Eq.(2.33), para pontos fora das fronteiras.

Note que $N_{21}(x_1, x_2, a, b)$ diverge para $x_2 \rightarrow 0$ para qualquer x_1 . Vamos estudar o comportamento de $N_{21}(x_1, x_2, a, b)$ perto das arestas $x_1 = 0, x_2 = 0$ e também $x_1 = a, x_2 = 0$.

Usando o núcleo de Poisson a função $N_{21}(x_1, x_2, a, b)$ em $x_1 = 0$ ou $x_1 = a$ é dada por

$$N_{21}(x_1, x_2, a)|_{x_1=0} = \frac{1}{16ax_2} - \frac{1}{16ax_2} \frac{\exp\left(\frac{4\pi x_2}{a}\right)}{\exp\left(\frac{4\pi x_2}{a}\right) + 1} + \frac{1}{16ax_2} \frac{1}{\exp\left(\frac{4\pi x_2}{a}\right) + 1}. \quad (2.36)$$

Novamente usando a função geratriz dos números de Bernoulli podemos encontrar a parte principal da expansão de Laurent de $N_{21}(x_1, x_2, a, b)|_{x_1=0}$ em torno de $x_2 = 0$, e também de $N_{21}(x_1, x_2, a, b)|_{x_1=a}$ em torno de $x_2 = 0$. A expansão em torno $x_2 = 0$ fornece para $N_{21}(x_1, x_2, a, b)|_{x_1=0}$

$$N_{21}(x_1, x_2, a)|_{x_1=0} = \frac{B_0}{64\pi (x_2)^2} + \frac{B_1}{16ax_2} + O(x_2). \quad (2.37)$$

Note que a Eq.(2.33) possui duas divergências de aresta, uma em $x_1 = x_2 = 0$ e outra em $x_1 = a, x_2 = 0$. Para investigar as divergências da Eq.(2.34) vamos reescrever $N_{22}(x_1, x_2, a, b)$ como

$$N_{22}(x_1, x_2, a, b) = N_{22}^+(x_1, x_2, a, b) + N_{22}^-(x_1, x_2, a, b) \quad (2.38)$$

onde

$$N_{22}^{\pm}(x_1, x_2, a, b) = \frac{1}{8ab} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \int_{\alpha_{n_1} b}^{\infty} dq (\coth q - 1) \exp\left(\pm \frac{2qx_2}{b}\right). \quad (2.39)$$

Na próxima seção, vamos mostrar que a função $N_{22}^+(x_1, x_2, a, b)$ possui divergências de parede quando $x_2 \rightarrow b$ para qualquer x_1 , e também duas divergências de aresta, uma em

$x_1 = 0$, $x_2 = b$ e outra em $x_1 = a$, $x_2 = b$. Note também que a função $N_{22}^-(x_1, x_2, a, b)$ é finita para x_1, x_2 . Usando uma combinação de regularizações dimensional e da função zeta, na próxima seção vamos regularizar as flutuações do vácuo na aproximação de um laço no guia de ondas de seção reta retangular.

2.2 Análise das divergências de superfície nas flutuações do vácuo na aproximação de um laço

O propósito desta seção é regularizar analiticamente as expressões das flutuações do vácuo à um laço obtidas na seção anterior, contidas na Eq.(2.3).

Vamos inicialmente regularizar as expressões independentes das coordenadas (note que na referência [14] a regularização destes termos foi feita usando regularização dimensional). A primeira expressão a ser regularizada é $T(a, b, d)$ dada pela equação (2.4). Vamos utilizar o método da função zeta (global) [17]–[20] e sua relação com o núcleo de calor para regularizar esta quantidade (no próximo capítulo vamos introduzir o método da função zeta bilocal e estudaremos sua relação com a zeta global). Introduzindo um fator de convergência s (também chamado de corte algébrico), a expressão anterior pode ser escrita como $T(a, b, d, s = 1)$ onde

$$T(a, b, d, s) = \frac{4}{(2\pi)^{d-2}ab} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \frac{1}{\left(\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2\right)^s} \quad (2.40)$$

A expressão (2.40) é convergente para $\text{Re } s > d/2$. Como temos de calcular o seu valor em $s = 1$ vamos procurar a extensão analítica desta quantidade para $\text{Re } s < d/2$. Em termos do núcleo de calor a expressão (2.40) fica

$$T(a, b, d, s) = \frac{4}{(2\pi)^{d-2}ab} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} K(t) \quad (2.41)$$

onde definimos o núcleo de calor como

$$K(t) = (2\pi)^{2-d} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \int d^{d-2}p \exp \left[-t \left(\vec{p}^2 + m^2 + \left(\frac{n_1\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b} \right)^2 \right) \right] \quad (2.42)$$

A integral na variável p é gaussiana e fornece o seguinte resultado

$$(2\pi)^{2-d} \int_{-\infty}^{\infty} d^{d-2}p \exp(-t p^2) = (4\pi t)^{(2-d)/2} \quad (2.43)$$

A expressão (2.42) fica

$$\begin{aligned} K(t) &= (4\pi t)^{(2-d)/2} \exp(-t m^2) \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^{\infty} \exp \left[-t \left(\frac{n_1\pi}{a} \right)^2 \right] \sum_{n_2=1}^{\infty} \exp \left[-t \left(\frac{n_2\pi}{b} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

As somas anteriores podem ser reescritas usando uma identidade da função teta de Jacobi

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp(-r^2 x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{q^2 \pi^2}{x} \right) \quad (2.45)$$

Vamos calcular primeiro o caso $m = 0$. Neste caso a expressão (2.44) fica

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{(4\pi t)^{(2-d)/2}}{4} - \frac{b}{2} (4\pi t)^{(1-d)/2} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \exp \left[- (q_2 b)^2 / t \right] + \\ &\quad - \frac{a}{2} (4\pi t)^{(1-d)/2} \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \exp \left[- (q_1 a)^2 / t \right] + \\ &\quad + ab (4\pi t)^{-d/2} \sum_{q_1, q_2=-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left[(q_1 a)^2 + (q_2 b)^2 \right] / t \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Substituindo a expressão (2.46) na expressão (2.41) e usando a integral [15]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \exp\left(-\frac{A}{t}\right) &= A^s \Gamma(-s), & A > 0 \quad \text{Re } s < 0 \\ &= 0 & \text{para } A = 0, \text{ qualquer } s \end{aligned} \quad (2.47)$$

Temos

$$T(a, b, d, s, m = 0) = \frac{4}{ab} \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ -\frac{b}{2} (4\pi)^{(1-d)/2} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \left[(q_2 b)^2 \right]^{s+(1-d)/2} \Gamma \left(\frac{d-1}{2} - s \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a}{2} (4\pi)^{(1-d)/2} \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} [(q_1 a)^2]^{s+(1-d)/2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2} - s\right) + \\
 & + ab (4\pi)^{-d/2} \sum_{q_1, q_2=-\infty}^{\infty} [(q_1 a)^2 + (q_2 b)^2]^{s-d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} - s\right) \} \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

A expressão acima é a extensão analítica procurada. Excluindo os termos $q_2 = 0$, $q_1 = 0$ e $(q_1, q_2) = (0, 0)$ do segundo, terceiro e quarto termos do lado direito da Eq.(2.48), temos finalmente

$$\begin{aligned}
 T(a, b, d) &= T(a, b, d, s = 1, m = 0) \\
 &= -4 \left(\frac{1}{ab^{d-3}} + \frac{1}{ba^{d-3}} \right) (4\pi)^{(1-d)/2} \zeta(d-3) \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) + \\
 &+ 4 (4\pi)^{-d/2} \sum_{(q_1, q_2)'=-\infty}^{\infty} [(q_1 a)^2 + (q_2 b)^2]^{1-d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

onde $(q_1, q_2)'$ significa $(q_1, q_2) \neq (0, 0)$. Note que a expressão acima contém um pólo na função zeta de Riemann e um pólo na função zeta de Epstein bi-dimensional para $d = 4$ [21]. Entretanto quantidades observáveis como o potencial efetivo dependem somente da derivada da expressão (2.48) com relação a s .

No caso em que $m \neq 0$ o núcleo de calor é dado pela expressão (2.46) multiplicada pelo fator $\exp(-tm^2)$. Usando a integral [15]

$$\int_0^{\infty} dt t^{s-1} \exp\left(-tm^2 - \frac{A^2}{t}\right) = 2 \left(\frac{A}{m}\right)^s K_s(2mA) \quad (2.50)$$

onde $K_s(z)$ é a função de Bessel modificada, além da integral

$$\int_0^{\infty} dt t^{s-1} \exp(-tm^2) = m^{-2s} \Gamma(s) \quad (2.51)$$

Encontramos

$$T(a, b, d, s) = \frac{4}{ab} \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{(4\pi)^{(2-d)/2} (m)^{-2s+d-2} \Gamma\left(s + \frac{2-d}{2}\right)}{4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& -b(4\pi)^{(1-d)/2} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \left[\frac{q_2 b}{m} \right]^{s+(1-d)/2} K_{s-(1-d)/2}(2mq_2 b) + \\
& -a(4\pi)^{(1-d)/2} \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \left[\frac{q_1 a}{m} \right]^{s+(1-d)/2} K_{s-(1-d)/2}(2mq_1 a) + \\
& + \frac{ab}{2} (4\pi)^{-d/2} \sum_{(q_1, q_2)'=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{(q_1 a)^2 + (q_2 b)^2}}{m} \right]^{s-d/2} \\
& \times K_{s-d/2} \left(2m\sqrt{(q_1 a)^2 + (q_2 b)^2} \right) \} \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Onde na expressão anterior $T(a, b, d) = T(a, b, d, s = 1)$.

Seguindo exatamente o mesmo procedimento para $R_1(a, b, d)$ encontramos para $m = 0$

$$R_1(a, b, d, m = 0) = -\frac{2}{ab^{d-3}} (4\pi)^{(1-d)/2} \zeta(d-3) \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \quad (2.53)$$

onde novamente temos um pólo em $d = 4$. Para $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
R_1(a, b, d) &= \frac{(4\pi)^{(2-d)/2}}{2ab} (m)^{d-4} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \\
& - \frac{(4\pi)^{(1-d)/2}}{a} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \left[\frac{q_2 b}{m} \right]^{(3-d)/2} K_{(3-d)/2}(2mq_2 b) \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento para $N_{11}(a, b, d, m = 0)$ e usando (2.47) é possível mostrar que a contribuição deste termo é nula. Para $m \neq 0$

$$N_{11}(a, b, d) = \frac{(4\pi)^{(2-d)/2}}{4ub} (m)^{d-4} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \quad (2.55)$$

A próxima quantidade a regularizar é $R_2(x_1, a, b, d)$ e também $I_2(x_2, a, b, d)$. Como ambos os casos são equivalentes, vamos estudar somente a expressão dada por $R_2(x_1, a, b, d)$. É instrutivo estudar primeiro o caso mais simples $b \gg a$ o qual nos dará uma indicação do comportamento mais geral. Considere um espaço Euclidiano d -dimensional. Definindo $R_2(x_1, a, b, d)|_{b \gg a} = r_2(x_1, a, d)$, temos :

$$r_2(x_1, a, d) = \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}p \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{\cosh((a - 2x_1)\sqrt{p^2 + m^2})}{\sinh(a\sqrt{p^2 + m^2})}. \quad (2.56)$$

Vamos novamente usar o fato de que $d^{d-1}p = p^{d-2}dp d\Omega_{d-1}$ e $\int d\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ e nos limitar ao caso $m = 0$. Definindo $h_2(d)$ por :

$$h_2(d) = \frac{1}{2^{d-2}\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma(\frac{d-1}{2})}, \quad (2.57)$$

é possível escrever $r_2(x_1, a, d)|_{m=0}$ como

$$\begin{aligned} r_2(x_1, a, d)|_{m=0} &= \frac{1}{2}h_2(d) \left[\int_0^\infty dk k^{d-3}(\coth ka - 1) \cosh 2kx_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty dk k^{d-3}e^{-2kx_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Na primeira integral, para k grande, $(\coth ka - 1)$ tem o comportamento: $(\coth ka - 1) \sim e^{-2ka}$. Além disso, a segunda integral na equação acima é convergente para $x_1 \neq 0$. Vamos definir $t = ka$ e $q = kx_1$ na primeira e na segunda integral acima respectivamente. Logo a Eq.(2.58) pode ser escrita como [22] :

$$\begin{aligned} r_2(x_1, a, d)|_{m=0} &= \frac{1}{2a^{d-2}}h_2(d) \int_0^\infty dt t^{d-3}(\coth t - 1) \cosh\left(\frac{2x_1 t}{a}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2x_1^{d-2}}h_2(d) \int_0^\infty dq q^{d-3}e^{-2q}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

O segundo termo da equação acima nos dá o resultado bem conhecido de que para um campo escalar de massa nula $\langle \varphi^2(x_1) \rangle$ diverge como $\frac{1}{x_1^2}$ (em um espaço-tempo 4-dimensional) quando $x_1 \rightarrow 0$ [23]. Para analisar o comportamento de $r_2(x_1, a, d)|_{m=0}$ em torno de $x_1 = a$, vamos usar a representação integral da função gamma,

$$\int_0^\infty dt t^{\mu-1}e^{-\nu t} = \frac{1}{\nu^\mu}\Gamma(\mu), \quad \text{Re}(\mu) > 0, \quad \text{Re}(\nu) > 0 \quad (2.60)$$

e também a representação integral do produto da função gamma com a função zeta de Hurwitz

$$\int_0^\infty dt t^{\mu-1}e^{-\alpha t}(\coth t - 1) = 2^{1-\mu}\Gamma(\mu)\zeta\left(\mu, \frac{\alpha}{2} + 1\right) \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad \text{Re}(\mu) > 1, \quad (2.61)$$

onde $\zeta(s, u)$ é a função zeta de Hurwitz definida por [15]

$$\zeta(s, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s}, \quad \text{Re}(s) > 1, \quad u \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2.62)$$

Logo, usando as Eqs.(2.60), (2.61) e (2.62) na Eq.(2.59) temos :

$$\begin{aligned} r_2(x_1, a, d)|_{m=0} &= \frac{1}{2} h_2(d) \frac{1}{a^{d-2}} \left[2^{2-d} \Gamma(d-2) \left(\zeta(d-2, \frac{x_1}{a} + 1) + \zeta(d-2, -\frac{x_1}{a} + 1) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{(2x_1)^{d-2}} h_2(d) \Gamma(d-2). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Usando a definição da função zeta de Hurwitz podemos escrever :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^{d-2}} \left(\zeta(d-2, \frac{x_1}{a} + 1) + \zeta(d-2, -\frac{x_1}{a} + 1) \right) = \\ &\frac{1}{a^{d-2}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1 + (1 + \frac{x_1}{a}))^{d-2}} + \frac{1}{(a-x_1)^{d-2}} + \\ &+ \frac{1}{a^{d-2}} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1 + (1 - \frac{x_1}{a}))^{d-2}}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Vemos que a expressão regularizada de $r_2(x_1, a, d)|_{m=0}$ possui dois pólos de ordem $(d-2)$ em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$. Note que os resíduos dos pólos em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$ são independentes de a . A mesma análise pode ser feita para $I_2(x_2, a, b, d)$ assumindo $a \gg b$. Na próxima seção o caso geral será estudado.

Finalmente, vamos analisar $N_{21}(x_1, x_2, a)$ e $N_{22}(x_1, x_2, a, b)$, dados respectivamente por

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{8ax_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) e^{-\frac{2n_1\pi x_2}{a}} \quad (2.65)$$

e

$$N_{22}(x_1, x_2, a, b) = \frac{1}{4ab} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \int_{\frac{n_1\pi}{a}}^{\infty} dq (\coth q - 1) \cosh\left(\frac{2qx_2}{b}\right). \quad (2.66)$$

Para achar a estrutura analítica de $N_{21}(x_1, x_2, a)$ podemos expandir o termo geral da soma em série de potências, trocar a ordem dos somatórios e estender analiticamente a função zeta que aparecerá. Em geral, este processo produz um termo extra que é gerado

ao se trocar a ordem do somatório convergente das funções exponenciais \sum_m com o novo somatório divergente \sum_k (para uma descrição detalhada do método, veja as refs. [24] [25] [26]). No nosso caso este termo se anula devido a potência de n_1 . Vamos expressar a soma que aparece na Eq.(2.65) em termos da variável complexa $z = ix_1 - x_2$:

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{8ax_2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \exp\left(\frac{2n_1\pi z}{a}\right) \right\}. \quad (2.67)$$

A expansão em torno de $z = 0$ produz :

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{8ay} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^k \frac{(z)^k}{k!} \zeta(-k) + \left(\frac{a}{2\pi}\right) z^{-1} - 1 \right\}. \quad (2.68)$$

Vemos que a divergência de aresta está contida no termo $1/z$. Tomando a parte real :

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{16\pi [(x_2)^2 + (x_1)^2]} - \frac{1}{8ax_2} f_1(z), \quad (2.69)$$

onde $f_1(z)$ é uma função analítica para qualquer z e é dada por :

$$f_1(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^k \frac{(z)^k}{k!} \zeta(-k) \right\}. \quad (2.70)$$

A expansão em torno de $z = ia$ produz :

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{8ax_2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^k \frac{(z - ia)^k}{k!} \zeta(-k) - \left(\frac{a}{2\pi}\right) (z - ia)^{-1} \right\}. \quad (2.71)$$

Tomando a parte real de $1/(z - ia)$, temos :

$$N_{21}(x_1, x_2, a) = -\frac{1}{16\pi [(x_2)^2 + (x_1 - a)^2]} - \frac{1}{8ax_2} f_2(z), \quad (2.72)$$

onde $f_2(z)$ é também uma função analítica para qualquer z , e é dada por:

$$f_2(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^k \frac{(z - ia)^k}{k!} \zeta(-k) \right\}. \quad (2.73)$$

Para achar a estrutura analítica de $N_{22}(x_1, x_2, a, b)$, é suficiente analisar a quantidade $N_{22}^+(x_1, x_2, a, b)$, a qual é dada pela Eq.(2.66) (a outra quantidade $N_{22}^-(x_1, x_2, a, b)$ é finita

em todo espaço). Para calcular a integral da Eq.(2.66), podemos escrever $\coth(bv)$ em termos de funções exponenciais e expandir o integrando em série de potências. A integral é trivial e fornece o resultado

$$N_{22}^+(x_1, x_2, a, b) = -\frac{1}{8ab} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-2\left(1 - \frac{x_2}{b} + k\right)\frac{n_1\pi b}{a}\right]}{\left(1 - \frac{x_2}{b} + k\right)}. \quad (2.74)$$

Este resultado pode ser escrito em termos da função transcendente de Lerch $\Phi(z, c, v)$ a qual é definida como [27] :

$$\Phi(z, c, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(v+k)^c}. \quad (2.75)$$

Esta definição é válida somente para $|z| < 1$, mas usando continuação analítica $\Phi(z, c, v)$ pode ser definida em todo plano complexo z . Esta função possui singularidades em $z = 1$ e $c = 0$ ou $c = 1$ e quando v é um inteiro negativo e quando $\text{Re}(c)$ é também um inteiro negativo. Note que somente o termo $k = 0$ possui uma divergência de parede quando $x_2 = b$. A parte restante da série em k é finita em todo o espaço e a chamaremos $F(x_1, x_2, a, b)$. Usando o mesmo procedimento usado para analisar $N_{21}(x_1, x_2, a)$, vamos definir $z = (b - x_2) + ix_1$ e expandir o termo $k = 0$ em torno de $z = 0$ ou em torno de $z = ia$. Logo, temos

$$N_{22}^+(x_1, x_2, a, b) = B(x_1, x_2, a, b) + F(x_1, x_2, a, b), \quad (2.76)$$

onde a primeira expansão $B(x_1, x_2, a, b)$ é dada por

$$B(x_1, x_2, a, b) = -\frac{1}{16\pi \left[(x_1)^2 + (x_2 - b)^2\right]} - \frac{1}{8a(x_2 - b)} h_1(z), \quad (2.77)$$

onde $h_1(z)$ é uma função analítica para qualquer z e é dada por

$$h_1(z) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^k \frac{(z)^k}{k!} \zeta(-k) \right\}. \quad (2.78)$$

Note que neste caso $B(x_1, x_2, a, b)$ possui uma divergência de aresta em $x_1 = 0, x_2 = b$.

Para a segunda expansão, $B(x_1, x_2, a, b)$ é dado por

$$B(x_1, x_2, a, b) = \frac{1}{16\pi [(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2]} - \frac{1}{8a(x_2 - b)} h_2(z), \quad (2.79)$$

onde $h_2(z)$ é uma função analítica para qualquer z e é dada por

$$h_2(z) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^k \frac{(z - ia)^k}{k!} \zeta(-k) \right\}. \quad (2.80)$$

Note que neste caso $B(x_1, x_2, a, b)$ possui uma divergência de aresta para $x_1 = a, x_2 = b$.

Na próxima seção vamos mostrar como é possível generalizar nossa análise para um campo escalar massivo em um espaço Euclidiano genérico.

2.3 As flutuações do vácuo na aproximação um laço no interior de um guia de ondas em um espaço Euclidiano d -dimensional.

Nesta seção vamos discutir como generalizar a análise anterior para um espaço Euclidiano de d dimensões, sendo $d-2$ coordenadas livres enquanto x_1 e x_2 estão definidas no intervalo $[0, a]$ e $[0, b]$ com condições de contorno de Dirichlet nas fronteiras. Como discutido em seções anteriores as flutuações do vácuo podem ser escritas como :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(x_1, x_2) \rangle &= \frac{1}{4} T(a, b, d) + \frac{1}{2} (R_1(a, b, d) + I_1(a, b, d)) + \\ &\quad \frac{1}{2} (R_2(x_1, a, b, d) + I_2(x_2, a, b, d)) + N(x_1, x_2, a, b, d). \end{aligned} \quad (2.81)$$

As extensões analíticas das quantidades $T(a, b, d)$ e $I_1(a, b, d)$ para d genérico já foram discutidas na seção anterior. Para regularizar $I_2(x_2, a, b, d)$ voltamos à equação (2.14) para d genérico

$$I_2(x_2, a, b, d) = I_{21}(x_2, a, d) + I_{22}(x_2, a, b, d), \quad (2.82)$$

onde as funções $I_{21}(x_2, a, d)$ e $I_{22}(x_2, a, b, d)$ são dadas por

$$I_{21}(x_2, a, d) = \frac{1}{a} h(d) \sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\alpha_{n_1}}^{\infty} dv (v^2 - m^2 - (\frac{n_1\pi}{a})^2)^{\frac{d-4}{2}} \exp(-2vx_2), \quad (2.83)$$

e

$$I_{22}(x_2, a, b, d) = \frac{1}{a} h(d) \sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\alpha_{n_1}}^{\infty} dv (v^2 - m^2 - (\frac{n_1\pi}{a})^2)^{\frac{d-4}{2}} (\coth bv - 1) \cosh 2vx_2. \quad (2.84)$$

Onde α_{n_1} e $h(d)$ são definidos pelas Eqs.(2.18) e (2.16) respectivamente. Usando a representação integral das funções de Bessel modificadas do terceiro tipo (ou funções de Macdonald) $K_\nu(x_1)$:

$$\int_u^{\infty} (x^2 - u^2)^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{2u}{\mu})^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) K_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu), \quad (2.85)$$

que é válida para $u > 0$, $Re \mu > 0$ e $Re \nu > 0$, $I_{21}(x_2, a, b, d)$ pode ser escrita como

$$I_{21}(x_2, a, b, d) = \frac{1}{a} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{d-1}} \sum_{n_1=1}^{\infty} (\frac{\alpha}{x_2})^{\frac{d-3}{2}} K_{\frac{d-3}{2}}(2\alpha x_2). \quad (2.86)$$

Usando o limite assintótico da função de Bessel para argumentos pequenos na Eq. (2.86) é possível mostrar que $I_{21}(x_2, a, d)$ contém divergências de parede.

A expressão $I_{22}(x_2, a, b, d)$ pode ser regularizada tanto no caso massivo quanto no caso sem massa. Para simplificar vamos considerar o caso sem massa (o caso massivo segue o mesmo procedimento). Para regularizar $I_{22}(x_2, a, b, d)|_{m=0}$, note pelas Eqs.(2.83) e (2.84) que quando d é par ($d > 4$) a potência do binômio é um inteiro e a série obtida pelo teorema binomial de Newton contém um número finito de termos. Quando d é ímpar a série contém um número infinito de termos. Vamos considerar o caso ímpar (o caso par segue o mesmo procedimento) [28] [29] [30].

A representação em série de $(1 - (\frac{n_1\pi}{va})^2)^{\frac{d-4}{2}}$ é dada por :

$$(1 - (\frac{n_1\pi}{va})^2)^{\frac{d-4}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_p^k (\frac{n_1\pi}{va})^{2k}, \quad (2.87)$$

onde C_p^k são os coeficientes binomiais generalizados, dados por : $C_p^0 = 1, C_p^1 = \frac{p}{1!}, C_p^2 = \frac{1}{2!}p(p-1), \dots, C_p^k = \frac{1}{k!}(p(p-1)\dots(p-k+1))$ e $p = \frac{d-4}{2}$. Note que a generalização da série binomial é válida mesmo para um expoente complexo p . Em outras palavras para $v > \frac{n_1\pi}{a}$ a série de potência em p é convergente em qualquer lugar, e logo também uma função contínua de p no plano complexo d . Definindo as quantidades: $C^{(1)}(d, k) = (-1)^k C_p^k h(d)$, $C^{(2)}(d, k) = \pi^{2k} C^{(1)}(d, k)$ e $C^{(3)}(d, k) = \frac{\Gamma(d-3-2k)}{2^{d-3-2k}} C^{(2)}(d, k)$ e após a mudança de variáveis, usando a Eq.(2.87) na Eq.(2.84), $I_{22}(x_2; a, b, d)|_{m=0}$ fica

$$I_{22}(x_2, a, b, d)|_{m=0} = \frac{1}{ab^{d-3}} \sum_{k=0}^{\infty} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \times \int_{\frac{n_1\pi b}{a}}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right), \quad (2.88)$$

onde $C^{(2)}(d, k)$ é uma função analítica em todo plano complexo d . Vamos analisar as divergências de parede da Eq.(2.88) separando $I_{22}(x_2, a, b, d)|_{m=0}$ como :

$$I_{22}(x_2, a, b, d)|_{m=0} = I_{22}^<(x_2, a, b, d) + I_{22}^>(x_2, a, b, d), \quad (2.89)$$

onde

$$I_{22}^<(x_2, a, b, d) = \frac{1}{ab^{d-3}} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \times \int_{\frac{n_1\pi b}{a}}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right), \quad (2.90)$$

e

$$I_{22}^>(x_2, a, b, d) = \frac{1}{ab^{d-3}} \sum_{k \geq \frac{d-4}{2}} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \times \int_{\frac{n_1\pi b}{a}}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right). \quad (2.91)$$

Vamos analisar as divergências que aparecem na Eq.(2.90). Usando o fato que $\int_{\alpha}^{\infty} f(u)du = \int_0^{\infty} f(u)du - \int_0^{\alpha} f(u)du$, podemos escrever a Eq.(2.90) como

$$I_{22}^<(x_2, a, b, d) = I_{22}^a(x_2, a, b, d) + I_{22}^b(x_2, a, b, d), \quad (2.92)$$

onde

$$I_{22}^a(x_2, a, b, d) = \frac{1}{ab^{d-3}} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \times \int_0^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right), \quad (2.93)$$

e

$$I_{22}^b(x_2, a, b, d) = -\frac{1}{ab^{d-3}} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \times \int_0^{\frac{n_1\pi b}{a}} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right). \quad (2.94)$$

Expandindo $\cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right)$ em série de potências, podemos escrever a integral que aparecerá em $I_{22}^b(x_2, a, b, d)$ em termos da integral de Debye. Entretanto para estudar $I_{22}^a(x_2, a, b, d)$ é suficiente obter as divergências de $I_{22}^<(x_2, a, b, d)$. Novamente, podemos escrever a integral que aparece na Eq.(2.93) em termos do produto das funções zeta, Gamma e zeta de Hurwitz. Logo temos :

$$I_{22}^<(x_2, a, b, d)|_{m=0} = -\frac{1}{ab^{d-3}} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \times \int_0^{\frac{n_1\pi b}{a}} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right) + \frac{1}{2ab^{d-3}} C^{(3)}(d, 0) \times \left(\zeta\left(d-3, -\frac{x_2}{b} + 1\right) + \zeta\left(d-3, \frac{x_2}{b} + 1\right) \right). \quad (2.95)$$

Como $C^{(3)}(d, 0)$ é analítica em todo plano complexo d , suas divergências de superfície tem a mesma forma já estudada antes.

Para regularizar $N(x_1, x_2, a, b, d)$ escrevemos esta quantidade na forma :

$$N(x_1, x_2, a, b, d) = N_{11}(a, b, d) + N_{12}(x_1, a, b, d) + N_2(x_1, x_2, a, b, d), \quad (2.96)$$

onde como antes, o termo $N_{11}(a, b, d)$ é nulo. No caso de $N_{12}(x_1, a, b, d)$ partindo da Eq.(2.28) integrando sobre o ângulo sólido e mudando de variáveis podemos escrever $N_{12}(x_1, a, b, d)$ como

$$N_{12}(x_1, a, b, d) = N_{12}^a(x_1, b, d) + N_{12}^b(x_1, a, b, d), \quad (2.97)$$

onde

$$N_{12}^a(x_1, b, d) = -\frac{1}{4b}h(d) \int_m^\infty dv (v^2 - m^2)^{\frac{d-4}{2}} e^{-2vx_1}, \quad (2.98)$$

e

$$N_{12}^b(x_1, a, b, d) = -\frac{1}{4b}h(d) \int_m^\infty dv (v^2 - m^2)^{\frac{d-4}{2}} (\coth av - 1) \cosh 2vx_1. \quad (2.99)$$

Usando a representação integral das funções de Bessel modificadas do terceiro tipo dada pela Eq.(2.85), podemos escrever a Eq.(2.98) como

$$N_{12}^a(x_1, b, d) = -\frac{1}{b} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{d-1}} \left(\frac{m}{x_1}\right)^{\frac{d-3}{2}} K_{\frac{d-3}{2}}(2mx_1). \quad (2.100)$$

Para calcular $N_{12}^b(x_1, a, b, d)$, vamos inicialmente estudar o caso sem massa. Mudando de variáveis e usando a Eq.(2.61) temos

$$\begin{aligned} N_{12}^b(x_1, a, b, d)|_{m=0} &= -\frac{1}{a^{d-3}b} \frac{h(d)}{2^d} \Gamma(d-3) \\ &\times \left(\zeta(d-3, \frac{x_1}{a} + 1) + \zeta(d-3, -\frac{x_1}{a} + 1) \right). \end{aligned} \quad (2.101)$$

No caso massivo, após a mudança de variáveis podemos expandir o fator $(1 - \frac{m^2}{v^2})^{\frac{d-4}{2}}$ em $N_{12}^b(x_1, a, b, d)$. Considerando d ímpar temos

$$\begin{aligned} N_{12}^b(x_1, a, b, d) &= -\frac{1}{4a^{d-3}b} h(d) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_p^k (ma)^{2k} \\ &\times \int_{ma}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh \frac{2ux_1}{a}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Vamos escrever $N_{12}^b(x_1, a, b, d)$ em termos da função zeta de Hurwitz. Novamente escrevemos $N_{12}^b(x_1, a, b, d)$ como :

$$N_{12}^b(x_1, a, b, d) = N_{12}^{b<}(x_1, a, b, d) + N_{12}^{b>}(x_1, a, b, d), \quad (2.103)$$

onde

$$\begin{aligned} N_{12}^{b<}(x_1, a, b, d) &= -\frac{1}{4a^{d-3}b} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(1)}(d, k)(am)^{2k} \\ &\times \int_{am}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_1}{a}\right), \end{aligned} \quad (2.104)$$

e

$$\begin{aligned} N_{12}^{b>}(x_1, a, b, d) &= -\frac{1}{4a^{d-3}b} \sum_{k \geq \frac{d-4}{2}}^{\infty} C^{(1)}(d, k)(am)^{2k} \\ &\times \int_{am}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_1}{a}\right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Vamos analisar primeiro $N_{12}^{b<}(x_1, a, b, d)$. Usando $\int_{\alpha}^{\infty} f(u)du = \int_0^{\infty} f(u)du - \int_0^{\alpha} f(u)du$, podemos escrever a Eq.(2.104) como:

$$\begin{aligned} N_{12}^{b<}(x_1, a, b, d) &= -\frac{1}{4a^{d-3}b} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(3)}(d, k)\left(\frac{am}{\pi}\right)^{2k} \times \\ &\times \left(\zeta\left(d-3-2k, -\frac{x_1}{a} + 1\right) + \zeta\left(d-3-2k, \frac{x_1}{a} + 1\right) \right) + \\ &+ \frac{1}{4a^{d-3}b} \sum_{k=0}^{k < \frac{d-4}{2}} C^{(1)}(d, k)(am)^{2k} \\ &\times \int_0^{am} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_1}{a}\right), \end{aligned} \quad (2.106)$$

onde $N_{12}^{b<}(x_1, a, b, d)$ contém uma divergência de parede quando $x_1 \rightarrow a$. Considere agora o termo $N_{12}^{b>}(x_1, a, b, d)$ Quando d é par, para $x_1 < a$ a integral que aparece na Eq.(2.105) é convergente. Quando d é ímpar podemos expandir $\cosh\left(\frac{2ux_1}{a}\right)$ em série de potências. A integral que aparecerá na Eq.(2.105) requer uma generalização da integral de Debye.

Os cálculos que vamos apresentar podem ser usados para escrever $N_2(x_1, x_2, a, b, d)$ na mesma forma. Infelizmente, não é possível calcular analiticamente a soma em n_1 e vamos somente escrever as expressões restantes :

$$N_2(x_1, x_2, a, b) = N_{21}(x_1, x_2, a, d) + N_{22}(x_1, x_2, a, b, d), \quad (2.107)$$

onde

$$N_{21}(x_1, x_2, a, d) = \frac{1}{2\pi a} h(d) \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \int_{\alpha}^{\infty} dv (v^2 - m^2 - \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2)^{\frac{d-4}{2}} e^{-2vx_2}, \quad (2.108)$$

e

$$N_{22}(x_1, x_2, a, b, d) = \frac{1}{2\pi a} h(d) \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \int_{\alpha}^{\infty} dv (v^2 - m^2 - \left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2)^{\frac{d-4}{2}} (\coth bv - 1) \cosh 2vx_2. \quad (2.109)$$

onde α e $h(d)$ são definidos pelas Eqs.(2.18) e (2.16). Considere $N_{21}(x_1, x_2, a, b, d)$ no caso sem massa. Usando a mesma representação integral das funções de Bessel modificadas que usamos antes temos

$$N_{21}(x_1, x_2, a, d)|_{m=0} = \frac{2}{a(2\sqrt{\pi})^{d+1}} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \left(\frac{n_1\pi}{ax_2}\right)^{\frac{d-3}{2}} K_{\frac{d-3}{2}}\left(\frac{2n_1\pi x_2}{a}\right). \quad (2.110)$$

A expressão de $N_{22}(x_1, x_2, a, b, d)$ no caso sem massa para d ímpar fica :

$$N_{22}(x_1, x_2, a, b, d)|_{m=0} = \frac{1}{2\pi ab^{d-3}} \sum_{k=0}^{\infty} C^{(2)}(d, k) \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{2k} \cos\left(\frac{2n_1\pi x_1}{a}\right) \times \int_{\frac{n_1\pi b}{a}}^{\infty} du u^{d-4-2k} (\coth u - 1) \cosh\left(\frac{2ux_2}{b}\right). \quad (2.111)$$

O mesmo procedimento usado para analisar $I_{22}(x_2, a, b, d)$ pode ser repetido aqui. Infelizmente não podemos efetuar a soma em n_1 que aparece na Eq.(2.111). Entretanto, a mesma análise que fizemos no final da seção 1.2 pode ser feita para estudar as divergências de aresta que aparecem nas flutuações do vácuo em espaço Euclidiano d -dimensional.

Capítulo 3

O tensor momento energia do vácuo

3.1 Introdução

Considere um campo escalar livre, minimalmente acoplado e sem massa em um espaço-tempo 4-dimensional na presença uma fronteira plana isolada localizada em $x_1 = 0$ na qual o campo obedece a condições de contorno de Dirichlet (vamos considerar que não há campo em $x_1 < 0$ e portanto o campo está confinado na região $x_1 \geq 0$). Utilizando o método da subseção seguinte, podemos mostrar que o tensor momento energia do vácuo na presença deste plano é dado por

$$\begin{aligned}\langle T_{00}(x_1) \rangle &= -\langle T_{ii}(x_1) \rangle = -\frac{1}{16\pi^2 (x_1)^4} \quad i > 1 \\ \langle T_{11} \rangle &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Todas as outras componentes são nulas. A divergência de superfície presente em $\langle T_{00}(x_1) \rangle$ pode ser interpretada como a energia de criação da fronteira [13] [31] (a auto-energia) ou a energia necessária para deformar o vácuo uniforme antes da presença da fronteira. A deformação (definida em todo espaço além da fronteira) e a fronteira podem ser vistas como um único objeto definido pelo meio elástico deformado, cujas forças internas estão em equilíbrio e portanto não produzem nenhum efeito Casimir global. Matematicamente esta situação é expressa pelo fato do fluxo de momento na direção normal a

fronteira ser nulo.

Considere agora um plano de Dirichlet isolado localizado em $x_1 = a$ que produz uma densidade de energia do vácuo definida em toda região $x_1 \leq a$ (também não há campo em $x_1 > a$). Quando os dois planos estão presentes, a presença de uma segunda fronteira e sua deformação causada no vácuo se sobrepõe à deformação da primeira, fazendo com que a deformação causada por uma fronteira antes isolada esteja agora limitada à região $0 \leq x_1 \leq a$. A função (3.1) não se prolonga mais em todo espaço mas é “cortada” pela presença de outra fronteira. Nesta situação as forças internas não estão mais em equilíbrio, o que leva a existência do efeito Casimir global. Esta interpretação foi desenvolvida por Actor na referência [13], onde o autor usou o método da função zeta local para obter o potencial efetivo global integrando a densidade lagrangiana efetiva local divergente, considerando um campo escalar confinado no interior de um guia de ondas retangular e no interior de uma cavidade retangular.

Neste capítulo vamos usar a função zeta bilocal para obter o tensor momento energia do vácuo de um campo escalar minimalmente acoplado, de um campo escalar conformalmente acoplado e de um campo eletromagnético na presença de fronteiras retangulares. Na subseção (3.2.2) vamos usar a interpretação descrita no parágrafo anterior para definir o tensor momento energia fisicamente mensurável do vácuo. As componentes deste tensor assumem um valor finito nas fronteiras e a integração destas na região do interior da cavidade produz os resultados globais conhecidos (esta correspondência só foi testada em fronteiras retangulares entretanto a conjectura do autor [13] é de que esta seja válida para uma fronteira de formato genérico).

Na subseção (3.2.3) vamos calcular o tensor momento energia do vácuo de um campo

escalar minimalmente acoplado e de um campo escalar conformalmente acoplado considerando inicialmente os campos confinados no interior de um guia de ondas retangular e no interior de uma cavidade retangular. Vamos investigar como o tensor momento energia fisicamente mensurável do vácuo depende do acoplamento com o espaço-tempo, das condições de contorno e dos parâmetros globais considerando somente o interior de um guia de ondas retangular.

Em seguida na subseção (3.2.4) vamos inserir o guia de ondas no interior de uma estrutura de forma que o tensor momento energia seja conhecido em qualquer região e vamos investigar como as forças locais dependem das condições de contorno e dos parâmetros globais. Quando os modos externos possuem exatamente as mesmas divergências de superfície dos modos internos, a força é bem definida devido a subtração do fluxo de momento entre as duas regiões. Como foi observado anteriormente [32] e confirmado nos sistemas investigados neste capítulo, no caso de fronteiras retangulares as forças locais são independentes do tensor para condições de contorno de Dirichlet. No caso de condições de Neumann, as forças locais dependem do tensor mas seu sentido possui o mesmo comportamento qualitativo. Em seguida repetiremos a análise para o caso da cavidade retangular.

Na seção (3.3) vamos estender a análise anterior para o caso do campo eletromagnético e calcular a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo no interior de um guia de ondas retangular e no interior de uma cavidade retangular. Vamos comparar o resultado com o caso escalar para entender sob o ponto de vista local porque certos termos do resultado global existem no caso escalar e não existem no caso eletromagnético. Novamente vamos inserir o guia de ondas e a cavidade retangular no interior de uma estrutura e calcular as forças locais nas paredes.

Finalmente na seção (3.4) estudaremos o efeito Scharnhorst dentro de um guia de ondas e dentro de uma cavidade retangular. Devido a presença de arestas e quinas, veremos que a variação do índice de refração não é uniforme nesta situação. Seguindo o que foi feito para a tensor momento energia do vácuo vamos definir um índice de refração fisicamente mensurável que possui um valor finito nas fronteiras. Estudaremos ainda como a variação da velocidade da luz depende dos parâmetros globais e das coordenadas espaciais.

3.2 O tensor momento energia do vácuo de um campo escalar acoplado minimalmente ou conformalmente

3.2.1 Formalismo básico

Nesta seção vamos descrever o procedimento básico para calcular o tensor momento energia renormalizado do vácuo de um campo escalar real na presença de fronteiras. Nossa abordagem a esse problema será baseada no método da função zeta bilocal.

O tensor momento energia canônico de um campo escalar real sem massa é dado por

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi] \quad (3.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Podemos escrever o valor esperado no vácuo de $T_{\mu\nu}(x)$ (agora considerado como um operador) dado pela eq.(3.2) como

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right] \langle \phi(x) \phi(y) \rangle, \quad (3.3)$$

onde $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$ é a função de Wightman.

Considere um espaço-tempo curvo definido pela métrica $g_{\mu\nu}$. A Lagrangeana do campo escalar adquire um termo adicional (baseado em argumentos dimensionais) ξR onde R é o escalar de Ricci. Quando $\xi = 0$ voltamos ao caso do campo escalar canônico no espaço-

tempo de Minkowski e o campo é chamado de minimalmente acoplado. Para que em uma transformação conforme da métrica, as equações de movimento fiquem invariantes pode-se mostrar que devemos escolher $\xi = 1/6$ e o tensor momento energia correspondente (que pode ser obtido pela derivada funcional da ação com respeito a métrica) é chamado de conformalmente acoplado. Tomando o limite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, voltando ao caso do espaço-tempo de Minkowski, obtemos um tensor diferente do caso minimalmente acoplado, já que o novo tensor possui o traço nulo. Este tensor também foi proposto de maneira *ad hoc* sem sair do contexto do espaço-tempo de Minkowski (usando a ambiguidade na definição do tensor momento energia já que a adição de uma derivada total a esta quantidade não altera a corrente conservada) por C.G. Callan et al. [33] como um tensor “menos divergente” e também é chamado de tensor momento energia “novo e melhorado”.

O tensor momento energia conformalmente acoplado é dado por

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{3} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} (\phi \partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu \partial_\nu \phi \cdot \phi + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) \right], \quad (3.4)$$

A relação equivalente para $\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle$ é

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{\mu\nu}(x) \rangle &= \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) \right] \langle \phi(x) \phi(y) \rangle, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considere um campo escalar real em quatro dimensões interagindo com fronteiras clássicas. O campo pode ser descrito pela decomposição de Fourier

$$\phi(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \left[a_n e^{-ix_0\omega_n} \phi_n(\mathbf{x}) + a_n^\dagger e^{ix_0\omega_n} \phi_n^*(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Assumindo que a variedade é estática, é possível mostrar que existe um conjunto completo de modos espaciais $\{\phi_n(\mathbf{x})\}$ que satisfazem uma equação do tipo

Schrödinger

$$-\Delta\phi_n(\mathbf{x}) = \omega_n^2\phi_n(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

e sobre esses modos vamos impor certas condições de contorno. Como o conjunto de modos $\phi_n(\mathbf{x})$ é ortonormal e completo, as relações de comutação a tempos iguais do campo com o seu momento canonicamente conjugado implicam em relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação.

Usando as relações de comutação entre os operadores de aniquilação e criação e a equação (3.6), podemos escrever a quantidade $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ como

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \sum_n \frac{1}{2\omega_n} \exp(-i(x_0 - y_0)\omega_n)\phi_n(\mathbf{x})\phi_n^*(\mathbf{y}). \quad (3.8)$$

Aplicando os operadores diferenciais das Eqs.(3.3) e (3.5) na função de Wightman dada pela Eq.(3.8) e tomando o limite $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$, podemos escrever as componentes dos tensores em termos de somas dos modos do campo. Para as componentes de $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle$ temos

$$\langle T_{00}(x)\rangle = \frac{1}{4} \sum_n \omega_n |\phi_n|^2 + \frac{1}{4} \sum_n \frac{1}{\omega_n} |\vec{\nabla}\phi_n|^2 \quad (3.9)$$

e

$$\langle T_{ii}(x)\rangle = \frac{1}{4} \sum_n \omega_n |\phi_n|^2 - \frac{1}{4} \sum_n \frac{1}{\omega_n} |\vec{\nabla}\phi_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{\omega_n} |\partial_i\phi_n|^2 \quad (3.10)$$

não há soma para índices i repetidos. Para ϕ_n real e para ondas planas

$$\langle T_{0i}(x)\rangle = 0 \quad (3.11)$$

e finalmente

$$\langle T_{ij}(x)\rangle = \frac{1}{4} \sum_n \frac{1}{\omega_n} [\partial_i\phi_n\partial_j\phi_n^* + \partial_j\phi_n\partial_i\phi_n^*] \quad i \neq j. \quad (3.12)$$

Para as componentes de $\langle\Theta_{\mu\nu}(x)\rangle$ temos

$$\langle\Theta_{00}(x)\rangle = \frac{5}{12} \sum_n \omega_n |\phi_n|^2 + \frac{1}{12} \sum_n \frac{1}{\omega_n} |\vec{\nabla}\phi_n|^2 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{ii}(x) \rangle &= \frac{1}{3} \sum_n \frac{1}{\omega_n} |\partial_i \phi_n|^2 + \frac{1}{12} \sum_n \omega_n |\phi_n|^2 - \frac{1}{12} \sum_n \frac{1}{\omega_n} |\vec{\nabla} \phi_n|^2 + \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_n \frac{1}{\omega_n} [\phi_n \partial_i^2 \phi_n^* + (\partial_i^2 \phi_n) \phi_n^*] \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde novamente não há soma sobre i ,

$$\langle \Theta_{0i}(x) \rangle = \langle T_{0i}(x) \rangle = 0, \quad (3.15)$$

$$\langle \Theta_{ij}(x) \rangle = \frac{1}{6} \sum_n \frac{1}{\omega_n} [\partial_i \phi_n \partial_j \phi_n^* + \partial_j \phi_n \partial_i \phi_n^*] - \frac{1}{12} \sum_n \frac{1}{\omega_n} [\phi_n \partial_i \partial_j \phi_n^* + (\partial_i \partial_j \phi_n) \phi_n^*] \quad i \neq j. \quad (3.16)$$

Todas as somas acima divergem e necessitam de processos de regularização e renormalização. Podemos regularizar as somas escrevendo-as em termos da função zeta bilocal (e de suas derivadas espaciais)

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu^{2s} \sum_n (\omega_n^2)^{-s} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{y}), \quad (3.17)$$

(s complexo). Para um espaço-tempo 4-dimensional a soma converge para $Re(s) > \frac{3}{2}$ (introduzimos um parâmetro μ com dimensões de massa para se ter um quantidade adimensional elevada a uma potência complexa). Considere como exemplo a densidade de energia do campo conformalmente acoplado. Em termos da função zeta bilocal a Eq. (3.13) fica

$$\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{5}{12} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \left[\zeta(s = -\frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \zeta(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \quad (3.18)$$

e expressões similares para as outras componentes. Como temos de calcular a função zeta bilocal na região $Re(s) < \frac{3}{2}$ temos de defini-la nesta região através do processo de continuação analítica na variável s . A função zeta bilocal está relacionada com o núcleo de calor através de uma transformada de Mellin

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad Re s > \frac{3}{2} \quad (3.19)$$

onde o núcleo de calor $K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y})$ obedece a equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathbf{P}} \right) K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (3.20)$$

onde $\hat{\mathbf{P}}$ é um operador. No caso em que $\hat{\mathbf{P}} = -\Delta$ a equação (3.20) se torna a equação de calor. Sua solução é dada por

$$K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_n e^{-t\omega_n^2} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{y}), \quad t > 0. \quad (3.21)$$

E obedece a condição inicial

$$K(t = 0 | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.22)$$

Assumindo inicialmente $\text{Re } s > \frac{3}{2}$ podemos calcular a transformada de Mellin e então continuar o resultado para $\text{Re } s < \frac{3}{2}$, para obter a representação da zeta bilocal nesta região. Na expressão obtida podemos identificar a função zeta bilocal livre (que contém uma divergência ultravioleta usual do espaço-tempo de Minkowski no limite $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$) e todas as divergências de fronteira. Os termos restantes formam somas convergentes. Por simplicidade vamos novamente escolher $\mu = 1$ porque nenhum resultado obtido até o fim deste capítulo vai depender deste parâmetro (se outros métodos de regularização fossem usados o resultado poderia depender de μ).

Devido ao fator exponencial na equação (3.21), a soma que define o núcleo de calor é sempre convergente para $t > 0$ e não possui divergências de superfície como veremos explicitamente (essa quantidade obedece às condições de contorno nas fronteiras). Por essa razão a parte diagonal do núcleo de calor pode ser integrada na presença de fronteiras e a passagem para a descrição global é direta. Usando a ortonormalidade dos modos podemos escrever a integral de volume da parte diagonal da equação (3.21) como

$$\int d^3x K(t | \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_n e^{-t\omega_n^2} \int d^3x \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n^*(\mathbf{x})$$

$$K(t) = \sum_n e^{-t\omega_n^2} \quad (3.23)$$

onde $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$. A transformada de Mellin da expressão (3.23) produz a função zeta global que já foi utilizada no capítulo anterior. No caso da função zeta local, só podemos calcular a integral de volume na região $\text{Re } s > 3/2$. Como veremos explicitamente, na presença de fronteiras, a função zeta adquire divergências de superfície na região $\text{Re } s < 3/2$ o que torna a passagem para o caso global menos trivial.

3.2.2 O tensor momento energia fisicamente mensurável do vácuo

Como dissemos na seção (3.1), a origem do efeito Casimir global pode ser interpretada a partir do desequilíbrio nas forças internas causado quando as fronteiras “cortam” umas as outras. Nesta subseção vamos definir um tensor momento energia bem comportado nas fronteiras como a *variação* desta quantidade que mede este desequilíbrio. Vamos comparar o valor esperado no vácuo do tensor momento energia do sistema com a mesma quantidade em um estado de vácuo onde este é entendido como sendo o sistema obtido colocando todas as fronteiras infinitamente afastadas. Desta maneira podemos identificar no tensor momento energia do vácuo a contribuição das fronteiras isoladas.

Considere um campo quântico no interior de uma cavidade retangular obedecendo a condições de contorno nas paredes da cavidade. A definição do tensor energia momento fisicamente mensurável do vácuo é (esta nomenclatura não diz respeito a medida do tensor e sim ao fato de que somente a variação do tensor possui relevância física [34])

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{fis} = \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\Omega} - \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_0 \quad (3.24)$$

Na expressão anterior $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ corresponde ao tensor momento energia do vácuo na presença das fronteiras (Ω é a região interior da cavidade) enquanto que $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_0$ corresponde

a essa mesma quantidade quando as fronteiras estão infinitamente afastadas (o que não é o mesmo que destruir as fronteiras e portanto esta definição difere da definição (1.6)). Podemos calcular quantidades globais integrando a equação acima. A energia de Casimir total por exemplo está relacionada com a integral da densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo nas regiões onde as respectivas funções da equação (3.24) estão definidas

$$\langle E_{cas} \rangle = \int_{\Omega} \langle T_{00}(x) \rangle - \int_{\text{todo espaço}} \langle T_{00}(x) \rangle_0 \quad (3.25)$$

A definição (3.25) é somente formal porque as duas quantidades que aparecem no seu lado direito são divergentes. Suponha que consigamos separar na expressão de $\int_{\Omega} \langle T_{00}(x) \rangle$ antes de integrar, um termo que possa ser reescrito como a contribuição das fronteiras isoladas (vamos exemplificar este procedimento mais adiante). Neste caso podemos definir a densidade de energia fisicamente mensurável como o resultado da subtração dessas duas quantidades regularizadas *antes* da integração, i.e.,

$$\int_{\Omega} \langle T_{00}(x) \rangle_{fis} = \int_{\Omega} \langle T_{00}(x) \rangle - \int_{\text{todo espaço}} \langle T_{00}(x) \rangle_0 \quad , \quad (3.26)$$

onde o integrando $\langle T_{00}(x) \rangle_{fis}$ é bem comportado nas fronteiras e sua integral sobre Ω produz a energia de Casimir total. As outras componentes fisicamente mensuráveis podem ser definidas da mesma forma. Posteriormente vamos relacionar a força total com a integral do fluxo de momento fisicamente mensurável.

Como exemplo do procedimento vamos calcular a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo de um campo escalar minimalmente acoplado na presença de dois planos de Dirichlet localizados em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$. Usando por exemplo a função zeta bilocal podemos mostrar que a densidade de energia pode ser escrita como a soma de duas

partes

$$\langle T_{00}(x_1) \rangle = \langle T_{00}(x_1) \rangle_D + \langle T_{00}(x_1) \rangle_F \quad , \quad (3.27)$$

onde

$$\langle T_{00}(x_1) \rangle_D = (4\pi)^{-2} [(x_1 - a)^{-4} + (x_1)^{-4}] \quad (3.28)$$

$$\langle T_{00}(x_1) \rangle_F = (4\pi)^{-2} \left[\sum_{n=-\infty}^{-2} (na + x_1)^{-4} + \sum_{n=1}^{\infty} (na + x_1)^{-4} - \frac{\pi^4}{90a^4} \right], \quad (3.29)$$

e D e F significam divergente na fronteira e finito na fronteira respectivamente. A integral de $\langle T_{00}(x_1) \rangle_D$ na região $0 \leq x_1 \leq a$ produz um resultado divergente. Já a integral dos dois primeiros termos de $\langle T_{00}(x_1) \rangle_F$ na mesma região produz um resultado finito e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} (na + a - x_1)^{-4} dx_1 + \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} (na + x_1)^{-4} dx_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-na}^{(1-n)a} (x_1 - a)^{-4} dx_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} (x_1)^{-4} dx_1 \end{aligned}$$

Somando todas as integrais da expressão (3.29) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^a \langle T_{00}(x_1) \rangle_F dx_1 &= (4\pi)^{-2} \int_{-\infty}^0 (x_1 - a)^{-4} dx_1 + (4\pi)^{-2} \int_a^{\infty} (x_1)^{-4} dx_1 + \\ & - \int_0^a \frac{\pi^2}{1440a^4} dx_1 \quad . \quad (3.30) \end{aligned}$$

Note que as duas primeiras integrais no segundo membro são convergentes porque a integração é feita fora da região onde os integrandos divergem. Usando as Eqs.(3.27)-(3.30), a integral de $\langle T_{00}(x_1) \rangle$ na região $0 \leq x_1 \leq a$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_0^a \langle T_{00}(x_1) \rangle dx_1 &= \int_0^a (4\pi)^{-2} [(x_1 - a)^{-4} + (x_1)^{-4}] dx_1 + \\ & + (4\pi)^{-2} \int_{-\infty}^0 (x_1 - a)^{-4} dx_1 + (4\pi)^{-2} \int_a^{\infty} (x_1)^{-4} dx_1 + \\ & - \int_0^a \frac{\pi^2}{1440a^4} dx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (4\pi)^{-2} \int_{-\infty}^a (x_1 - a)^{-4} dx_1 + \\
&\quad + (4\pi)^{-2} \int_0^{\infty} (x_1)^{-4} dx_1 - \int_0^a \frac{\pi^2}{1440a^4} dx_1
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Como foi mencionado anteriormente, a densidade de energia do vácuo de um plano isolado em $x_1 = a$ ($x_1 = 0$) está definida somente em $x_1 \leq a$ ($x_1 \geq 0$). Note que os dois primeiros termos divergentes não dependem de nenhum parâmetro global e correspondem às contribuições para a densidade de energia do vácuo dos planos isolados sendo portanto exatamente cancelados usando a Eq.(3.26), produzindo $\langle T_{00} \rangle_{fis} = -\pi^2/1440a^4$.

3.2.3 O interior do guia de ondas retangular

Nesta seção vamos calcular o valor esperado no vácuo do tensor momento energia de um campo escalar acoplado minimalmente ou conformalmente no interior de um guia de ondas retangular e usar a definição da subseção anterior para obter o tensor momento energia fisicamente mensurável. Como foi dito anteriormente, esta quantidade é ambígua pois é definida a menos de uma derivada total. Vamos analisar como a forma da densidade de energia fisicamente mensurável depende dos tensores mencionados.

Considere o guia de ondas retangular orientado ao longo do eixo x_3 , de tal forma que o campo obedece a condições de contorno de Dirichlet (D) ou Neumann (N) em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$ e também em $x_2 = 0$ e $x_2 = b$. Quando o campo obedece a condições de contorno de Dirichlet, a parte espacial dos modos é dada por

$$\phi_{m_1, m_2}(\mathbf{x}) = \left(\frac{4}{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_3 x_3}, \tag{3.32}$$

onde $m_{1,2} = 1, 2, 3, \dots$; $-\infty < k_3 < \infty$ e $\omega_n^2 = \left(\left(\frac{m_1 \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{b}\right)^2 + k_3^2\right)$, onde n denota o índice coletivo (m_1, m_2, k_3) .

Quando o campo obedece a condições de contorno de Neumann, a parte espacial dos modos é dada por

$$\phi_{m_1, m_2}(\mathbf{x}) = \left(\frac{4}{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_3 x_3}, \quad (3.33)$$

com $m_{1,2} = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $-\infty < k_3 < \infty$. No caso de c.c. de Dirichlet, substituindo as Eqs.(3.32) na Eq.(3.21) o núcleo de calor pode ser escrito como

$$\begin{aligned} K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_m e^{-t\omega_m^2} \phi_m(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{ab}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{m_1, m_2=1}^{\infty} \\ &\quad \times \exp\left\{-t \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{b}\right)^2 + (k_3)^2 \right]\right\} \\ &\quad \times \exp[ik_3(x_3 - y_3)] \\ &\quad \times \sin\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{m_1 \pi y_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi y_2}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

A parte do núcleo proveniente das direções livres pode ser integrada usando:

$$\frac{1}{2\pi} \int dk_3 e^{-t(k_3)^2} e^{ik_3(x_3 - y_3)} = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x_3 - y_3)^2}{4t}\right], \quad (3.35)$$

que produz

$$\begin{aligned} K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{4}{ab} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x_3 - y_3)^2}{4t}\right] \\ &\quad \times \sum_{m_1=1}^{\infty} \exp\left[-t \left(\frac{m_1 \pi}{a}\right)^2\right] \sin\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m_1 \pi y_1}{a}\right) \\ &\quad \times \sum_{m_2=1}^{\infty} \exp\left[-t \left(\frac{m_2 \pi}{b}\right)^2\right] \sin\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi y_2}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

No caso de c.c. de Neumann, a expressão correspondente pode ser obtida com a troca $\sin \rightarrow \cos$ e $\sum_{m_i=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{m_i=0}^{\infty}$ $i = 1, 2..$ Usando as identidades trigonométricas

$$\sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2) \quad (3.37)$$

$$\cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2) \quad (3.38)$$

para as c.c. de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente e em seguida uma das identidades das funções teta de Jacobi

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-m^2 x) \cos(m2\pi h) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-(n+h)^2 \frac{\pi^2}{x}\right] \quad (3.39)$$

podemos escrever o núcleo de calor como

$$\begin{aligned} K(t | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(x_3 - y_3)^2}{4t}\right] \\ &\times \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{[2n_1 a + (x_1 - y_1)]^2}{4t}\right] \mp \exp\left[-\frac{[2n_1 a + (x_1 + y_1)]^2}{4t}\right] \right\} \\ &\times \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{[2n_2 b + (x_2 - y_2)]^2}{4t}\right] \right. \\ &\left. \mp \exp\left[-\frac{[2n_2 b + (x_2 + y_2)]^2}{4t}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a c.c. de Dirichlet (Neumann). Como discutido anteriormente, para achar a função zeta bilocal zeta precisamos calcular a transformada de Mellin do núcleo de calor. Todos os termos da Eq.(3.40) podem ser integrados usando [15]

$$\int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{A}{t}\right) = A^{s-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right), \quad \text{Re } s < \frac{3}{2}. \quad (3.41)$$

Calculando a transformada de Mellin usando a Eq.(3.41) temos

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} (Z^{--} \mp Z^{-+} \mp Z^{+-} + Z^{++}), \quad (3.42)$$

onde as funções $Z^{\pm\pm} = Z^{\pm\pm}(n_1, n_2, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ são dadas por

$$Z^{\pm\pm} = \left[\left(n_1 a + \frac{(x_1 \pm y_1)}{2} \right)^2 + \left(n_2 b + \frac{(x_2 \pm y_2)}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - y_3}{2} \right)^2 \right]^{s-\frac{3}{2}}. \quad (3.43)$$

Vamos identificar as divergências ultravioleta e as divergências de parede e aresta que existem na função zeta local $\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y})$. O termo $Z^{--}(0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ é

a contribuição do espaço-tempo de Minkowski e contém uma divergência ultravioleta no limite $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$.

Os termos $Z^{-+}(0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{-+}(0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+-}(0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ e $Z^{+-}(-1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ são identificados com as divergências de parede; por exemplo $Z^{-+}(0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_2 - b)^{2s-3}$ diverge quando $x_2 \rightarrow b$ para $\text{Re } s < 3/2$.

Os termos $Z^{++}(0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{++}(0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{++}(-1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ e $Z^{++}(-1, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ são divergências de aresta; por exemplo $Z^{++}(-1, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \left((x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2\right)^{s-3/2}$ diverge quando $x_1 \rightarrow a$ e quando $x_2 \rightarrow b$ ao mesmo tempo.

O aparecimento ou não destas divergências no valor esperado no vácuo do tensor momento energia vai depender da sua forma específica.

Como vimos na subsecção 2.1.1, as componentes de $\langle T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \rangle$ podem ser escritas em termos de somas de modos. Em termos da função zeta bilocal e de suas derivadas espaciais, estas somas ficam

$$\sum_n \omega_n |\phi_n|^2 = \zeta\left(s = -\frac{1}{2} \mid \mathbf{x}, \mathbf{x}\right) = -\frac{1}{16\pi^2} A_0(\mathbf{x}), \quad (3.44)$$

onde a expressão de $A_0(\mathbf{x})$ é dada por

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad \mp \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad \mp \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad + \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Os outras somas ficam

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} |\partial_i \phi_n|^2 = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \zeta\left(s = \frac{1}{2} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}\right). \quad (3.46)$$

Substituindo a Eq.(3.42) na Eq.(3.46) para $i = 1$, temos

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} |\partial_1 \phi_n|^2 = -\frac{1}{4\pi^2} B_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{16\pi^2} A_1(\mathbf{x}), \quad (3.47)$$

onde as funções $B_1(\mathbf{x})$ e $F_1(\mathbf{x})$ são definidas por

$$\begin{aligned} B_1(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a]^2 \\ &\quad \mp \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_1 a]^2 + \\ &\quad \pm \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1]^2 + \\ &\quad - \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1]^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad \mp \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad \pm \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad - \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para $i = 2$,

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} |\partial_2 \phi_n|^2 = -\frac{1}{4\pi^2} B_2(\mathbf{x}) + \frac{1}{16\pi^2} A_2(\mathbf{x}), \quad (3.50)$$

onde as funções $B_2(\mathbf{x})$ e $A_2(\mathbf{x})$ são definidas por

$$\begin{aligned} B_2(\mathbf{x}) &= \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b]^2 \\ &\quad \pm \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_2 b + x_2]^2 + \\ &\quad \mp \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b]^2 + \\ &\quad - \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_2 b + x_2]^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

e

$$\begin{aligned}
 A_2(\mathbf{x}) = & \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\
 & \pm \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} + \\
 & \mp \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\
 & - \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2}. \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

Para $i = 3$

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} |\partial_3 \phi_n|^2 = \frac{1}{16\pi^2} A_0(\mathbf{x}). \tag{3.53}$$

Para calcular $\langle T_{ij}(x) \rangle$ precisamos obter

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \partial_i \phi_n \partial_j \phi_n^* = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \zeta(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.54}$$

Para $i = 2$ e $j = 1$, temos

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \partial_2 \phi_n \partial_1 \phi_n^* = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \partial_1 \phi_n \partial_2 \phi_n^* = -\frac{A_{21}(\mathbf{x})}{4\pi^2}, \tag{3.55}$$

onde a função $A_{21}(\mathbf{x})$ é definida por

$$\begin{aligned}
 A_{21}(\mathbf{x}) = & \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b] [n_1 a] + \\
 & \mp \left[(n_2 b + x_2)^2 + (n_1 a)^2 \right]^{-3} [n_2 b + x_2] [n_1 a] + \\
 & \pm \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1] [n_2 b] + \\
 & - \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1] [n_2 b + x_2]. \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Na primeira linha, para um determinado n_1 o somatório em n_2 é ímpar e portanto se anula (o mesmo acontece no somatório em n_1 para um determinado n_2). Na segunda e terceira linhas os somatórios são ímpares em n_1 e n_2 respectivamente e também se anulam. Logo,

$A_{21}(\mathbf{x})$ fica

$$A_{21}(\mathbf{x}) = - \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1] [n_2 b + x_2]. \quad (3.57)$$

Note que esta função se anula quando $x_2 = 0$ ou $x_1 = 0$.

Para $i = 3$ e $j = 1$ e para $i = 3$ e $j = 2$, temos

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \partial_3 \phi_n \partial_1 \phi_n^* = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \partial_3 \phi_n \partial_2 \phi_n^* = 0. \quad (3.58)$$

Para calcular $\langle \Theta_{ii}(x) \rangle$ precisamos obter

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_i^2 \phi_n^* = \sum_n \frac{1}{\omega_n} (\partial_i^2 \phi_n) \phi_n^* = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)^2 \zeta(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.59)$$

Para $i = 1$

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_1^2 \phi_n^* = \frac{1}{4\pi^2} B_{11}(\mathbf{x}) - \frac{1}{16\pi^2} A_0(\mathbf{x}), \quad (3.60)$$

onde a função $B_{11}(\mathbf{x})$ é definida por

$$\begin{aligned} B_{11}(\mathbf{x}) = & \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left\{ \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a]^2 \right. \\ & \mp \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_1 a]^2 + \\ & \mp \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1]^2 + \\ & \left. + \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} [n_1 a + x_1]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para $i = 2$

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_2^2 \phi_n^* = \frac{1}{4\pi^2} B_{22}(\mathbf{x}) - \frac{1}{16\pi^2} A_0(\mathbf{x}), \quad (3.62)$$

onde a função $B_{22}(\mathbf{x})$ pode ser obtida de $B_{11}(\mathbf{x})$ com a troca $x_1 \leftrightarrow x_2$ e $n_1 a \leftrightarrow n_2 b$. Para

$i = 3$

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_3^2 \phi_n^* = -\frac{1}{16\pi^2} A_0(\mathbf{x}). \quad (3.63)$$

Finalmente para obter $\langle \Theta_{ij}(x) \rangle$ precisamos calcular

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_i \partial_j \phi_n^* = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \zeta(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.64)$$

Para $i = 1$ e $j = 2$

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_1 \partial_2 \phi_n^* = \sum_n \frac{1}{\omega_n} \phi_n \partial_2 \partial_1 \phi_n^* = -\frac{A_{12}(\mathbf{x})}{4\pi^2}. \quad (3.65)$$

Substituindo os resultados das Eqs.(3.44), (3.47), (3.50), (3.53), (3.55) e (3.58) nas Eqs. (3.9-3.12), podemos escrever as componentes de $\langle T_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \rangle$ em termos das funções definidas anteriormente. Para a densidade de energia do vácuo do campo minimalmente acoplado obtemos

$$\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} (B_1(\mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x})) + \frac{1}{64\pi^2} (A_1(\mathbf{x}) + A_2(\mathbf{x}))$$

Podemos escrever esta quantidade como a soma de duas partes

$$\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D + \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F, \quad (3.66)$$

onde D e F significam divergente na fronteira e finito na fronteira respectivamente. Em forma explícita

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D &= \frac{1}{32\pi^2} \{ [(x_1)^2 + (x_2)^2]^{-2} + [(a - x_1)^2 + (b - x_2)^2]^{-2} + \\ &\quad + [(x_1)^2 + (b - x_2)^2]^{-2} + [(a - x_1)^2 + (x_2)^2]^{-2} \} + \\ &\quad \mp \frac{1}{16\pi^2} \{ [x_2]^{-4} + [b - x_2]^{-4} + [x_1]^{-4} + [a - x_1]^{-4} \} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F &= -\frac{1}{32\pi^2} \{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-2} + \\ &\quad - \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} + \\ &\quad \pm 2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0), (0, -1)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} ([n_2 b + x_2]^2 - [n_1 a]^2) + \\ &\quad \pm 2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0), (-1, 0)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} \\ &\quad \times ([n_1 a + x_1]^2 - [n_2 b]^2) \}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Na primeira soma acima estamos excluindo uma divergência usual do espaço-tempo de Minkowski. Nas outras somas estamos excluindo as divergências de superfície, que estão agrupadas na definição de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$. Na segunda soma, excluimos as divergências de aresta, i.e., as divergências nos pontos $(x_1, x_2) = (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$ que estão contidas nas duas primeiras linhas da definição de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$. Na terceira soma excluimos as divergências de parede, $x_1 = 0, a$ e $x_2 = 0, b$ que estão contidas na última linha da definição de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$. As outras componentes são

$$\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{32\pi^2} A_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{16\pi^2} (B_1(\mathbf{x}) - B_2(\mathbf{x})) + \frac{1}{64\pi^2} (A_1(\mathbf{x}) - A_2(\mathbf{x})) \quad (3.69)$$

A parte finita na fronteira á dada por

$$\begin{aligned} \langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle_F &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0)} \left[-3(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right] \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} + \right. \\ &\quad \pm 2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0), (0, -1)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad + \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} \\ &\quad \left. \times \left[(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2 \right] \right\} \quad (3.70) \end{aligned}$$

$$\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{32\pi^2} A_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{16\pi^2} (B_2(\mathbf{x}) - B_1(\mathbf{x})) + \frac{1}{64\pi^2} (A_2(\mathbf{x}) - A_1(\mathbf{x}))$$

Novamente, a parte finita na fronteira á dada por

$$\begin{aligned} \langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle_F &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0)} \left[-3(n_2 b)^2 + (n_1 a)^2 \right] \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} + \right. \\ &\quad \pm 2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0), (-1, 0)} \left[(n_2 b)^2 + (n_1 a + x_1)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad + \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} \\ &\quad \left. \times \left[(n_2 b + x_2)^2 - 3(n_1 a + x_1)^2 \right] \right\} \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$\langle T_{33}(\mathbf{x}) \rangle = -\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.72)$$

$$\langle T_{12}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{21}(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} A_{12}(\mathbf{x}) \quad (3.73)$$

$$\langle T_{23}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{32}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{31}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{13}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{0i}(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_{i0}(\mathbf{x}) \rangle = 0. \quad (3.74)$$

Vemos que $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle$ e $\langle T_{33}(\mathbf{x}) \rangle$ possuem divergências em todas as paredes e em todas as arestas. A relação entre a densidade de energia e as componentes $\langle T_{ii}(\mathbf{x}) \rangle$ onde i é uma direção com invariância translacional é uma propriedade geral do tensor momento energia na presença de fronteiras estáticas [36]. Já as componentes $\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle$ e $\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle$, além de possuírem divergências de aresta, possuem divergências somente nas paredes $x_2 = 0, b$ e $x_1 = 0, a$ respectivamente. Em outras palavras, o fluxo de momento na direção perpendicular as paredes não possui divergências de parede. Note também que $\langle T_{12}(\mathbf{x}) \rangle$ e $\langle T_{21}(\mathbf{x}) \rangle$ se anulam nas paredes.

Para o campo escalar conformalmente acoplado temos

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle &= -\frac{1}{48\pi^2} A_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{48\pi^2} (B_1(\mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x})) + \frac{1}{192\pi^2} (A_1(\mathbf{x}) + A_2(\mathbf{x})) \\ &= \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D + \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Explicitamente

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D &= -\frac{1}{96\pi^2} \left\{ [(x_1)^2 + (x_2)^2]^{-2} + [(a - x_1)^2 + (b - x_2)^2]^{-2} + \right. \\ &\quad \left. + [(x_1)^2 + (b - x_2)^2]^{-2} + [(a - x_1)^2 + (x_2)^2]^{-2} \right\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-2} + \\ &\quad \pm \frac{1}{24\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)} (n_2 b)^2 [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} + \\ &\quad \pm \frac{1}{24\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)} (n_1 a)^2 [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} \\ &\quad - \frac{1}{96\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)'} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Na primeira soma acima, excluímos uma divergência ultravioleta usual $(n_1, n_2) = (0, 0)$. Na quarta soma, excluímos as divergências de aresta $(n_1, n_2) = (0, 0), (-1, -1), (-1, 0), (0, -1)$ que estão contidas na definição de $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$. Como esperado, vemos que $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle$ não possui divergências de parede, somente de aresta. As outras componentes são

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{11}(\mathbf{x}) \rangle &= -\frac{1}{16\pi^2} B_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{48\pi^2} B_2(\mathbf{x}) - \frac{1}{24\pi^2} B_{11}(\mathbf{x}) + \frac{1}{64\pi^2} A_1(\mathbf{x}) - \frac{1}{192\pi^2} A_2(\mathbf{x}) \\ \langle \Theta_{11}(\mathbf{x}) \rangle_F &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [-3(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2] [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} + \right. \\ &\quad \pm \frac{8}{3} \sum_{(n_1, n_2)} (n_1 a)^2 [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} \\ &\quad \left. \times [(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{22}(\mathbf{x}) \rangle &= -\frac{1}{16\pi^2} B_2(\mathbf{x}) + \frac{1}{48\pi^2} B_1(\mathbf{x}) - \frac{1}{24\pi^2} B_{22}(\mathbf{x}) + \frac{1}{64\pi^2} A_2(\mathbf{x}) - \frac{1}{192\pi^2} A_1(\mathbf{x}) \\ \langle \Theta_{22}(\mathbf{x}) \rangle_F &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [-3(n_2 b)^2 + (n_1 a)^2] [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} + \right. \\ &\quad \pm \frac{8}{3} \sum_{(n_1, n_2)} (n_2 b)^2 [(n_2 b)^2 + (n_1 a + x_1)^2]^{-2} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} \\ &\quad \left. \times [(n_2 b + x_2)^2 - 3(n_1 a + x_1)^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\langle \Theta_{33}(\mathbf{x}) \rangle = -\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.80)$$

$$\langle \Theta_{12}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Theta_{21}(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{24\pi^2} A_{12}(\mathbf{x}) \quad (3.81)$$

$$\langle \Theta_{23}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Theta_{32}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Theta_{31}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Theta_{13}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Theta_{0i}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Theta_{i0}(\mathbf{x}) \rangle = 0. \quad (3.82)$$

Novamente vemos que as componentes não-nulas não possuem divergências de parede, somente de aresta. Podemos verificar também que no caso de condições de Dirichlet

$$\langle \Theta_{11}(x_1 = 0, x_2, x_3) \rangle = \langle T_{11}(x_1 = 0, x_2, x_3) \rangle \text{ e } \langle \Theta_{22}(x_1, x_2 = 0, x_3) \rangle = \langle T_{22}(x_1, x_2 = 0, x_3) \rangle.$$

Ou seja, o fluxo de momento na direção perpendicular a parede é independente do tensor.

Esta propriedade também é verificada no caso de placas isoladas e placas paralelas [32].

Vamos usar agora a definição (3.26) para calcular a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo dos campos escalares conformalmente acoplado e minimalmente acoplado. Para isso temos de identificar na integral da densidade de energia do vácuo dentro do guia de ondas, $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b$, a contribuição das fronteiras isoladas. Usando a notação da ref.[13], a integral do quarto termo da Eq.(3.77) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \zeta_F(2|x_1, x_2) &= \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, x_2) \\ &= 4 \left[\int_a^\infty \int_b^\infty + \int_a^\infty \int_0^b + \int_0^a \int_b^\infty \right] dx dy \\ &\quad \times \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.83)$$

onde

$$\zeta_F(2|x_1, x_2) = \sum_{(n_1, n_2)' = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} \quad (3.84)$$

Note que o lado direito da Eq.(3.83) corresponde a cada uma das divergências de aresta integradas sobre o quadrante apropriado fora do guia de ondas, i.e., longe dos pontos onde as divergências ocorrem. A soma da integral (divergente) de $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_B$ dentro do guia de ondas com a expressão (3.83) é então identificada com a integral das fronteiras isoladas sobre todo espaço e exatamente cancelada usando a definição (3.26).

A densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo é então dada por

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\ &\quad \pm \frac{1}{24\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)} \left[(n_2 b)^2 + (n_1 a + x_1)^2 \right]^{-3} (n_2 b)^2 + \end{aligned}$$

$$\pm \frac{1}{24\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2. \quad (3.85)$$

Note que esta função é bem definida nas fronteiras.

No caso do campo escalar minimalmente acoplado, a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo é dada por

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \\ &\mp \frac{1}{8\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\ &\pm \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1 \neq 0, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} + \\ &\mp \frac{1}{8\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)} \left[(n_2 b)^2 + (n_1 a + x_1)^2 \right]^{-3} (n_2 b)^2 + \\ &\pm \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_2 \neq 0, n_1 = -\infty}^{\infty} \left[(n_2 b)^2 + (n_1 a + x_1)^2 \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Para checar, vamos mostrar que a integral da densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo do campo escalar conformalmente acoplado fornece a energia total. A integral do primeiro termo da Eq.(3.85) dá

$$-\frac{ab}{32\pi^2} Z_2(2|a, b), \quad (3.87)$$

onde :

$$\begin{aligned} Z_2(2|a, b) &= \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} \\ &= 4 \sum_{(n_1, n_2)=1}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + 2\zeta(4) \left[a^{-4} + b^{-4} \right]. \end{aligned} \quad (3.88)$$

As integrações do segundo e terceiro termos da Eq.(3.85) podem ser feitas usando

$$\int_0^a dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(na + x)^2 + B \right]^{s-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} dt \left[t^2 + B \right]^{s-2} = 2 \int_0^{\infty} dt \left[t^2 + B \right]^{s-2} \quad (3.89)$$

onde a última integral é dada por

$$2 \int_0^\infty dt [t^2 + B]^{s-2} = B^{s-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2} - s)}{\Gamma(2 - s)} \quad B > 0. \quad (3.90)$$

O resultado é

$$\pm \frac{1}{24\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \sum_{(n_1, n_2)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} (n_2 b)^2 = \pm \frac{1}{32\pi b^2} \zeta(3), \quad (3.91)$$

$$\pm \frac{1}{24\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \sum_{(n_1, n_2)} [(n_2 b + x_2)^2 + (n_1 a)^2]^{-3} (n_1 a)^2 = \pm \frac{1}{32\pi a^2} \zeta(3), \quad (3.92)$$

onde $\zeta(s)$ é a função zeta de Riemann. Somando todos os resultados anteriores temos

$$\int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} = \frac{E_C}{\int_{-\infty}^\infty dx_3}, \quad (3.93)$$

onde

$$\frac{E_C}{\int_{-\infty}^\infty dx_3} = -\frac{ab}{32\pi^2} Z_2(2|a, b) \pm \frac{1}{32\pi} \zeta(3) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad (3.94)$$

é a energia de Casimir por unidade de comprimento ($Z_2(2|a, b)$ é definido pela Eq.(3.88)). Em geral, a energia total está relacionada com o potencial efetivo global definido no espaço Euclidiano através da relação [35]

$$E = \frac{V_{eff}}{2 \int_{-\infty}^\infty dx_0} \quad (3.95)$$

Substituindo a expressão (3.94) (considerando o caso de condições de Dirichlet) na expressão (3.95) vemos que o resultado concorda com o valor do potencial efetivo global associado com um campo escalar no interior de um guia de ondas retangular obtido na referência [13]. A energia total deste caso também foi calculada para valores específicos de a e b na referência [12].

No caso do campo escalar minimalmente acoplado, usando a Eq.(3.89) podemos integrar a função definida pela Eq. (3.86) da mesma maneira. O resultado da integração

do primeiro termo dá novamente a quantidade definida pela Eq.(3.87). As integrais do segundo e quarto termos dão como resultado $\mp\zeta(3) 3a^{-2} (32\pi)^{-1}$ e $\mp\zeta(3) 3b^{-2} (32\pi)^{-1}$ respectivamente enquanto que as integrais do terceiro e quinto termos dão $\pm\zeta(3) a^{-2} (8\pi)^{-1}$ e $\pm\zeta(3) 3b^{-2} (8\pi)^{-1}$ respectivamente. Somando todos os resultados encontramos novamente a energia total por unidade de comprimento dada pela Eq.(3.94).

Note que o termo uniforme presente na equação (3.85) é sempre negativo enquanto que os termos que dependem da distância até as paredes são sempre positivos. Como consequência, para um determinado ponto do espaço perto das arestas, a densidade de energia do vácuo é positiva e para um ponto afastado das arestas esta quantidade é negativa. Como é bem conhecido na literatura, no caso de condições de contorno de Dirichlet a energia total de um campo escalar no interior de um guia de ondas retangular pode ser positiva ou negativa dependendo dos parâmetros globais. Do ponto de vista local, isto ocorre porque quando as arestas estão próximas os termos que dependem da distância até as paredes são dominantes na densidade de energia e sua integração produz uma energia total positiva. As figuras (3.1) e (3.2) mostram a forma de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ e $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ no interior de um guia de ondas quadrado com c.c. de Dirichlet, assumindo $a = b = .4$ (os valores dos parâmetros foram escolhidos para que os gráficos ficassem em escala real). Vemos que estas quantidades são positivas para *todos* os pontos do espaço e produzem uma energia total positiva.

Note também que o campo escalar minimalmente acoplado assume um valor maior do que o campo escalar conformalmente acoplado nas fronteiras. Este comportamento pode ser entendido se lembrarmos que na presença de uma fronteira curva, campos que não são conformalmente invariantes divergem na fronteira como δ^{-4} (δ é a menor distância

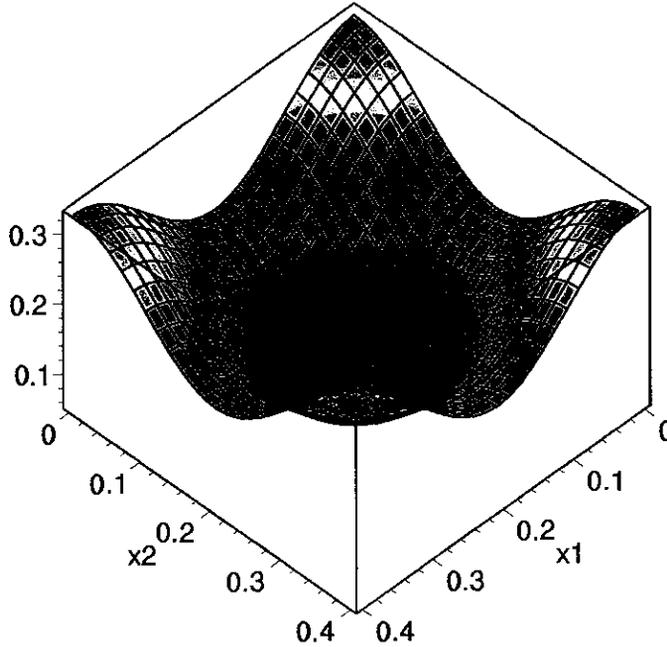


Figura 3.1: Densidade de energia do vácuo quando $a = b$ (campo escalar minimalmente acoplado sob condições de Dirichlet).

até a fronteira) enquanto que no caso de campos conformalmente invariantes o termo divergente é proporcional a δ^{-3} . As figuras (3.3) e (3.4) mostram $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ e $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ no caso em que $b = 2a$. Neste caso como as arestas estão afastadas, a contribuição da parte negativa de $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ é dominante e obtemos uma energia total negativa.

A figura (3.5) (não mais na escala real) mostra a forma de $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ no interior de um guia de ondas quadrado com condições de contorno de Neumann. Como as condições de Neumann aumentam o valor do campo na sua vizinhança, ao contrário das condições de Dirichlet que o diminui, a figura (3.5) tem a forma invertida da figura (3.2). A figura (3.6) mostra $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ para $b = 2a$. No caso de condições de Neumann o sinal da energia total não muda com os parâmetros globais do guia de ondas, como podemos verificar na expressão (3.94) que é sempre negativa.

Vamos calcular agora a densidade de força de Casimir local que age nas paredes do guia de ondas. Para isso, vamos usar a relação entre a densidade de força local e a

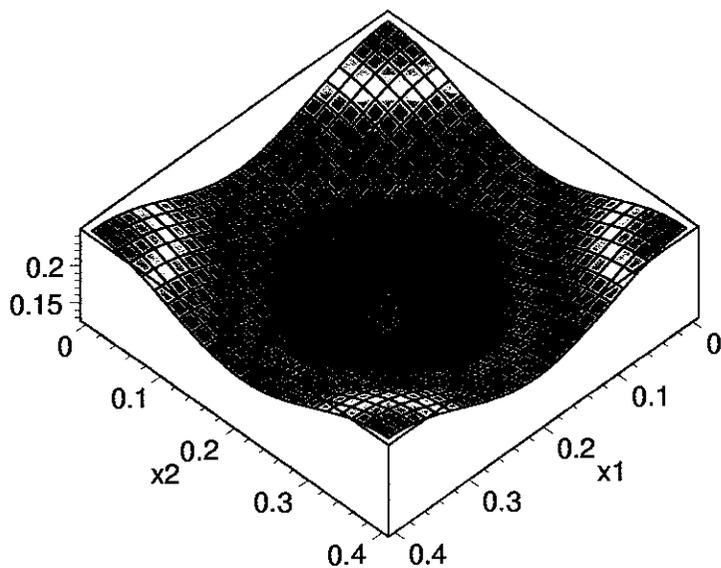


Figura 3.2: Densidade de energia do vácuo quando $a = b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Dirichlet).

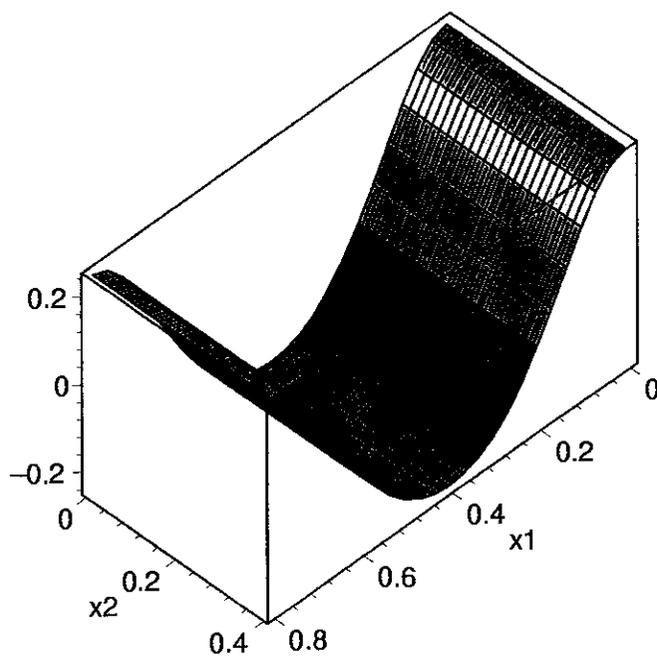


Figura 3.3: Densidade de energia do vácuo quando $a = 2b$ (campo escalar minimalmente acoplado sob condições de Dirichlet).

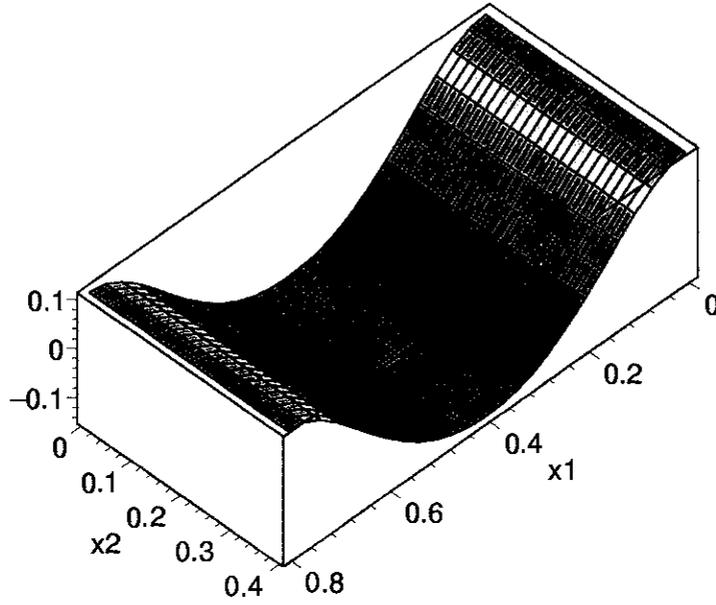


Figura 3.4: Densidade de energia do vácuo quando $a = 2b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Dirichlet).

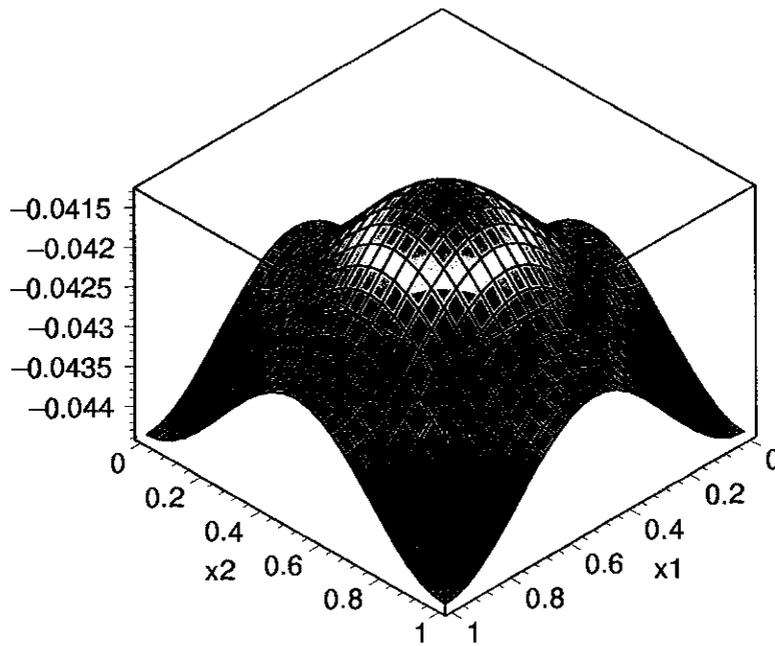


Figura 3.5: Densidade de energia do vácuo quando $a = b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Neumann).

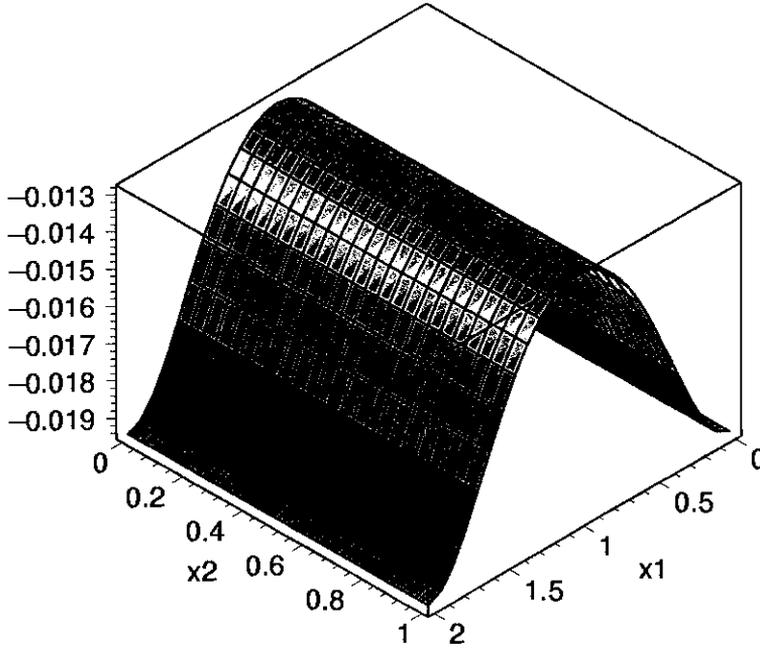


Figura 3.6: Densidade de energia do vácuo quando $a = 2b$ (campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Neumann) .

descontinuidade do tensor momento energia entre as paredes. As componentes espaciais do tensor momento energia representam a força que age em um elemento de área infinitesimal $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$ (\mathbf{n} é o vetor normal a superfície) em um ponto \mathbf{x}

$$dF_i(\mathbf{x}) = -T_{ij}(\mathbf{x}) dA_j \quad . \quad (3.96)$$

A força total que age em um elemento de volume localizado em \mathbf{x} pode ser obtida somando as forças que agem em toda a superfície que o envolve. Como exemplo considere a força na direção x_1 . Neste caso

$$\begin{aligned} dF_1(\mathbf{x}) = & [T_{11}(x_1) - T_{11}(x_1 + dx_1)] dx_2 dx_3 + \\ & + [T_{12}(x_2) - T_{12}(x_2 + dx_2)] dx_1 dx_3 + \\ & + [T_{13}(x_3) - T_{13}(x_3 + dx_3)] dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Podemos escrever a relação anterior para a componente i como

$$\frac{F_i(\mathbf{x})}{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{ij}(x^j = -\varepsilon) - T_{ij}(x^j = \varepsilon) \quad (3.98)$$

(vale a convenção de soma no índice j).

Para calcular a força, precisamos conhecer a solução da equação de Klein-Gordon na região exterior do guia de ondas, o que é um problema em aberto (o problema dos modos externos). Vamos considerar então somente a contribuição do interior do guia de ondas, assumindo que o campo está confinado em seu interior.

Considere a força local por unidade de comprimento que age no plano localizado em $x_1 = 0$ e é paralela ao eixo x_1 . Como as componentes $\langle T_{21}(\mathbf{x}) \rangle_{int}$ e $\langle T_{12}(\mathbf{x}) \rangle_{int}$ se anulam nas paredes e as componentes $\langle T_{31}(\mathbf{x}) \rangle_{int}$ e $\langle T_{13}(\mathbf{x}) \rangle_{int}$ são nulas em qualquer ponto, a expressão da força local é dada por

$$\frac{F(x_2)}{L} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\langle T_{11}(x_1 = -\varepsilon) \rangle - \langle T_{11}(x_1 = \varepsilon) \rangle] \quad (3.99)$$

Como já foi dito, vamos considerar que na região $x_1 < 0$ o valor de $\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle$ é nulo. Substituindo o valor de $\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle$ no interior do guia dado pela Eq. (3.70) quando $x_1 \rightarrow 0$ na Eq. (3.98), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{F(x_2)}{L} &= \frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} [3(n_1 a)^2 - (n_2 b)^2] + \\ &+ \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \{ [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} [3(n_2 b + x_2)^2 - (n_1 a)^2] + \\ &\mp 2 [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} \}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

Uma força igual e de sentido contrário existe no plano $x_1 = a$. No caso de condições de Dirichlet a componente $\langle \Theta_{11}(x_1 = 0, x_2) \rangle$ produz a mesma força.

Vamos identificar as divergências de parede da expressão (3.100). Para condições de contorno de Dirichlet, podemos reescrever as duas últimas linhas como

$$\frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \left(-4 [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} (n_1 a)^2 + [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} \right) \quad (3.101)$$

O primeiro termo desta expressão é finito nas fronteiras. O segundo termo pode ser reescrito como

$$\frac{1}{32\pi^2} \left(\sum_{n_1 \neq 0, n_2 = -\infty}^{\infty} [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} + \sum_{n_2 = -\infty}^{\infty} [(n_2 b + x_2)^2]^{-2} \right) \quad (3.102)$$

Note que na segunda parte da expressão (3.102), os termos $n_2 = 0, -1$ contém divergências de parede quando $x_2 \rightarrow 0$ ou $x_2 \rightarrow b$ respectivamente.

Vamos agora usar a definição (3.24) sob o sinal de integral para definir um fluxo de momento fisicamente mensurável. Para a componente $\langle T_{11}(x) \rangle$ a definição fica

$$\int \langle T_{11}(x) \rangle_{fis} = \int \langle T_{11}(x) \rangle_{\Omega} - \int_{\text{todo espaco}} \langle T_{11}(x) \rangle_0 \quad (3.103)$$

E no caso da região da parede $0 \leq x_2 \leq b$ esta definição fica

$$\begin{aligned} \int_0^b \langle T_{11}(x) \rangle_{fis} dx_2 &= \int_0^b \langle T_{11}(x) \rangle_{\Omega} dx_2 + \\ &- (4\pi)^{-2} \int_{-\infty}^b (x_2 - b)^{-2} dx_2 + \\ &- (4\pi)^{-2} \int_0^{\infty} (x_2)^{-2} dx_2 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Na segunda parte da expressão (3.102) os termos $n_2 = 0, -1$ definem a parte que diverge na fronteira enquanto que o restante dos termos $n_2 \neq 0, -1$ define a parte finita nas fronteiras. Esta última parte pode ser escrita como

$$\sum_{n_2 \neq 0}^{\infty} \int_0^b dx_2 [(n_2 b + x_2)^2]^{-2} = \int_{-\infty}^0 (x_2 - b)^{-2} dx_2 + \int_b^{\infty} (x_2)^{-2} dx_2 \quad (3.105)$$

Estes termos são cancelados usando a definição (3.104), juntamente com a integral das divergências de parede na região $0 \leq x_2 \leq b$. Logo, a força local fisicamente mensurável para c.c. de Dirichlet fica

$$\frac{F(x_2)_{fis}}{L} = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} [3(n_1 a)^2 - (n_2 b)^2] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} (-4) \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\
& + \sum_{n_1 \neq 0, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} \}. \quad (3.106)
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento, para c.c. de Neumann temos

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_2)_{fis}}{L} & = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} \left[3(n_1 a)^2 - (n_2 b)^2 \right] + \right. \\
& + \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} (-4) \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\
& \left. + 5 \sum_{n_1 \neq 0, n_2 = -\infty}^{\infty} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} \right\}. \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Vamos checar se a integral da força fisicamente mensurável sobre a região da parede $0 \leq x_2 \leq b$ fornece a força total por unidade de comprimento. A integral da primeira linha da expressão (3.106) (ou da expressão (3.107)) pode ser escrita como

$$-\frac{b}{32\pi^2} Z(2|a, b) + \frac{b}{8\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a]^2 \quad (3.108)$$

As integrais da segunda e terceira linhas podem ser feitas usando as Eqs. (3.89) e (3.90).

Para a segunda linha (de ambas expressões (3.106) e (3.107)) o resultado é

$$-\frac{3\zeta(3)}{32\pi a^3} \quad (3.109)$$

Para a terceira linha da expressão (3.106) o resultado é

$$\frac{1}{32\pi a^3} \zeta(3). \quad (3.110)$$

E para a terceira linha da expressão (3.107) o resultado é

$$\frac{5}{32\pi a^3} \zeta(3).$$

Somando todas as contribuições, vemos que o resultado concorda a força total em $x_1 = 0$ que pode ser obtida da expressão (3.94) e é dada por $F_C = \frac{\partial E_c}{\partial a}$ (a força em $x_1 = a$ é dada

por $-\frac{\partial E_c}{\partial a}$)

$$F_C = -\frac{b}{32\pi^2} Z_2(2|a, b) \mp \frac{\zeta(3)}{16\pi a^3} + \frac{b}{8\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_1 a]^2 \quad (3.111)$$

Vamos analisar como as forças locais calculadas acima dependem dos parâmetros globais do guia de ondas. Considere que toda a estrutura obedece a condições de contorno de Dirichlet. A figura (3.7) mostra a dependência em x_2 da força local que age no plano localizado em $x_1 = 0$ quando $a = b$. Neste caso o fluxo de momento repulsivo concentrado nas arestas é dominante produzindo uma força total repulsiva. As figuras (3.8) e (3.9) mostram a força que age no plano $x_1 = 0$ quando $b = (1.2) a$ e $b = 2a$ respectivamente. Quando as arestas se afastam, o fluxo de momento positivo no meio da parede passa a ser dominante produzindo uma força total atrativa. Conforme b cresce, a força em $x_1 = 0$ se comporta como a força de Casimir uniforme na configuração de placas paralelas como a figura (3.10) mostra.

No caso de condições de contorno de Neumann, quando $b = a/2$ e $b = a$ vemos pelas figuras (3.11) e (3.12) respectivamente que o valor da força troca de sinal, embora a energia total seja sempre negativa (contrariamente ao que é argumentado na referência [32]). Quando b cresce, a força em $x_1 = 0$ se concentra nas arestas, conforme as figuras (3.13) e (3.14) mostram para $b = 5a$ e $b = 10a$ respectivamente.

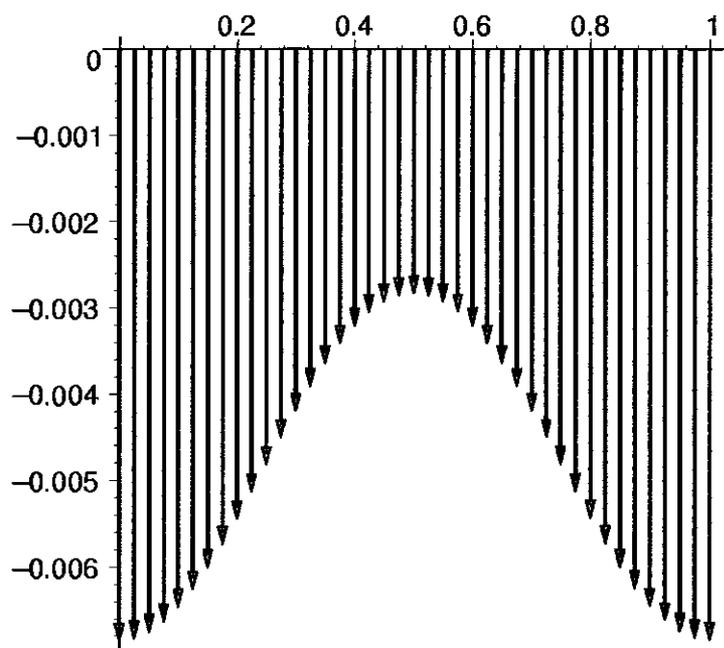


Figura 3.7: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = a$ (Dirichlet).

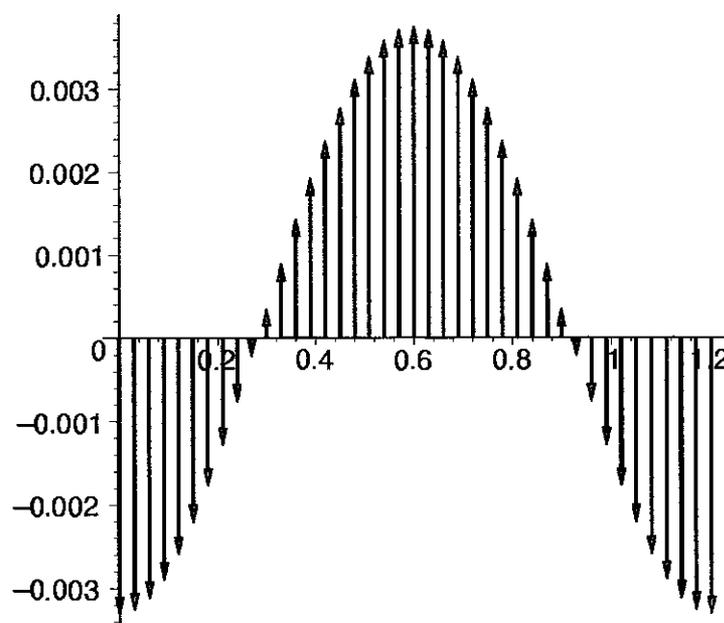


Figura 3.8: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = (1.2) a$ (Dirichlet).

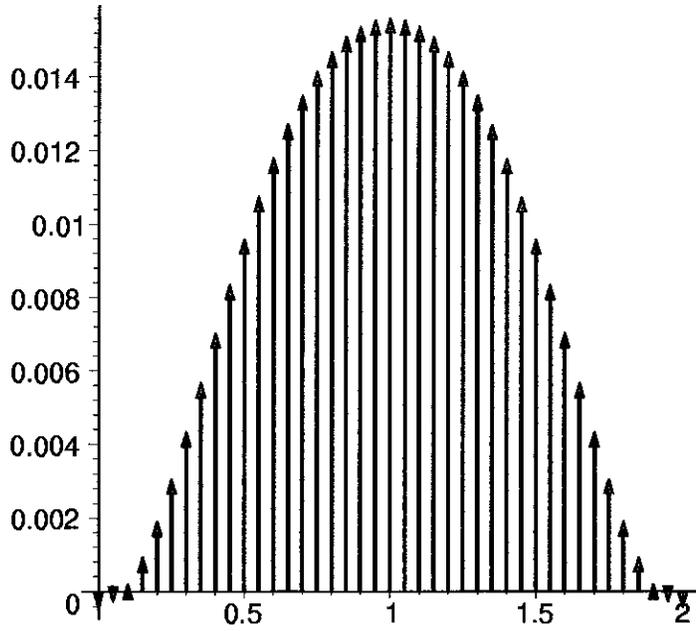


Figura 3.9: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 2a$ (Dirichlet).

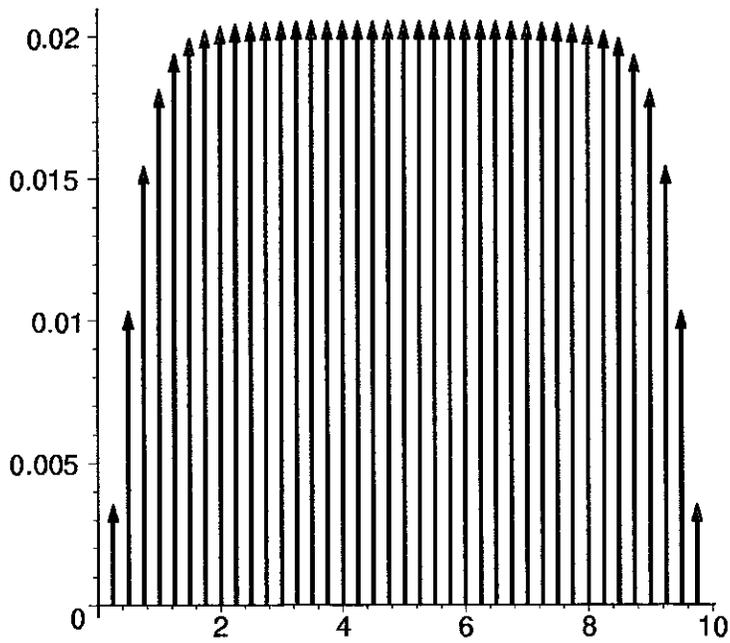


Figura 3.10: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 10a$ (Dirichlet).

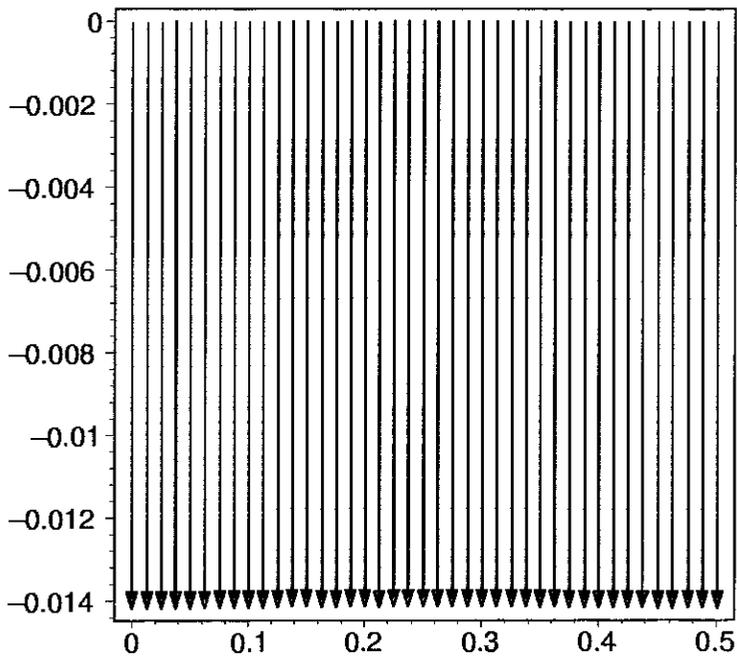


Figura 3.11: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = a/2$ (Neumann).

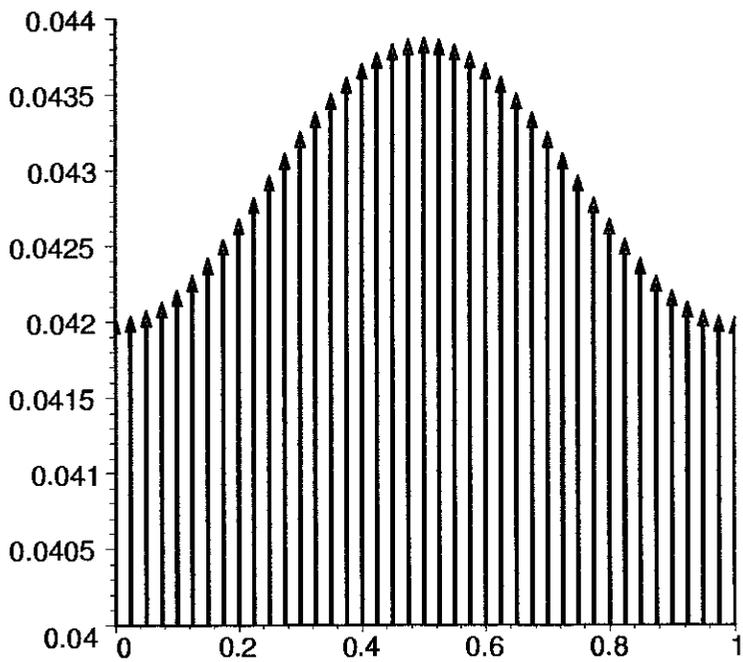


Figura 3.12: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = a$ (Neumann).

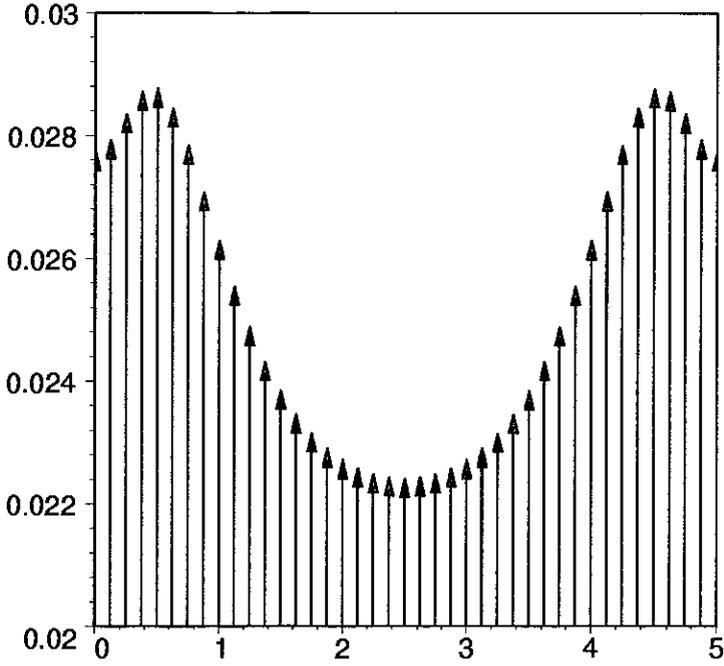


Figura 3.13: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 5a$ (Neumann).

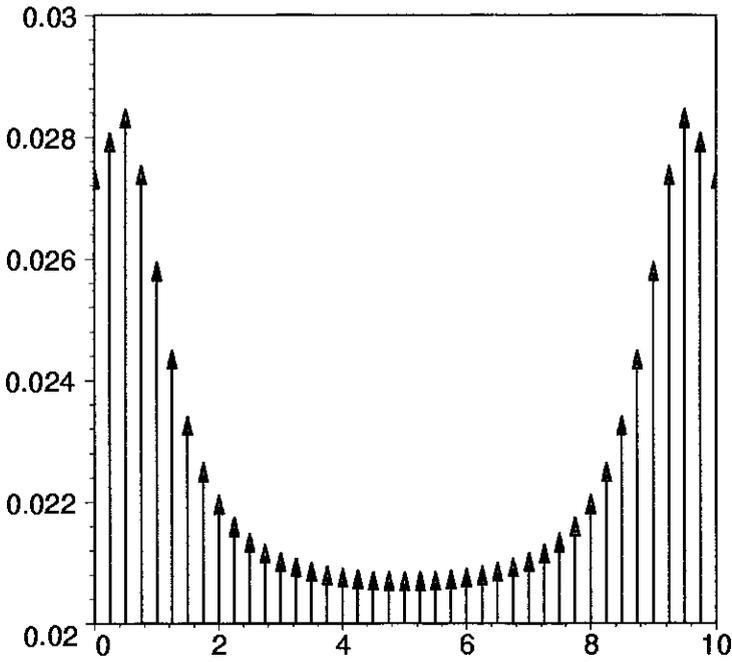


Figura 3.14: Densidade de força que age em $x_1 = 0$ quando $b = 10a$ (Neumann).

3.2.4 O guia de ondas retangular inserido em uma estrutura externa

Embora não conheçamos os modos na região fora do guia de ondas, podemos introduzir uma estrutura externa onde os modos do campo podem ser calculados de tal forma que a região interior da estrutura seja a região interna do guia de ondas (esta estrutura foi sugerida na referência [32]). Nesta configuração conhecemos os modos em todas as regiões e o tensor momento energia pode ser calculado em qualquer lugar. Uma maneira de implementar essa estrutura é conectar dois planos paralelos infinitos por duas tiras. Considere dois planos paralelos infinitos sob c.c. de Dirichlet posicionados em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$. Vamos conectar estes dois planos por duas tiras também sob c.c. de Dirichlet, posicionadas em $x_2 = 0$ e $x_2 = b$ (vamos analisar somente o caso de condições de contorno de Dirichlet, já que no caso de condições de Neumann a força dependerá do tensor usado). A região interior desta configuração é exatamente o guia de ondas. Nas regiões $x_1 > a$ e $x_1 < 0$ não há contribuições do tensor momento energia para as forças que agem nos dois planos infinitos ($\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle_{ext} = 0$ e a força que age na direção $x_1 = 0$ é exatamente a força calculada na subseção anterior). Nas regiões $0 < x_1 < a$, $x_2 > b$ e $0 < x_1 < a$, $x_2 < 0$, as componentes do tensor momento energia dão uma contribuição não-nula para as forças que agem nas tiras.

Considere a parede localizada em $x_2 = 0$ como uma parte móvel, um “pistão”. Para obter a força no plano $x_2 = 0$ precisamos do valor da componente $\langle T_{22}(x_2 = 0) \rangle$ no interior do guia de ondas. Substituindo o valor $x_2 = 0$ na Eq.(3.71) e rearrumando os termos temos

$$\langle T_{22}(x_2 = 0) \rangle_{int} = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \{ [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-2} - [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2]^{-2} +$$

$$\begin{aligned}
& -4 \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b]^2 + \\
& +4 \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b]^2 \}
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Na região externa podemos repetir o procedimento anterior para este caso para obter a função zeta bilocal e o tensor momento energia. Fazendo a substituição $\sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{b}\right) \rightarrow \sin k_2 x_2$ na Eq. (3.32) a parte do núcleo de calor na direção x_2 fica

$$\begin{aligned}
K(t | x_2, y_2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk_2 \exp \left[-t (k_2)^2 \right] \sin k_2 x_2 \sin k_2 y_2 \\
&= (4\pi t)^{-1/2} \exp \left[- (x_2 - y_2)^2 / 4t \right] + \\
&\quad - (4\pi t)^{-1/2} \exp \left[- (x_2 + y_2)^2 / 4t \right]
\end{aligned} \tag{3.113}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle_{ext} &= \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ (na)^{-4} + 2(na + x_1)^{-4} \\
&\quad - 3 \left[(na + x_1)^2 + (x_2)^2 \right]^{-2} + \\
&\quad + 4 (x_2)^2 \left[(x_2)^2 + (na + x_1)^2 \right]^{-3} \}.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

(uma equação similar existe para a tira localizada em $x_2 = b$). Para condições de Dirichlet, substituindo $x_2 = 0$ na Eq.(3.114) a componente fica

$$\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle_{ext} = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(na)^{-4} - (na + x_1)^{-4} \right] \tag{3.115}$$

A força local fica

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_1)}{L} &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(4 \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b]^2 + \right. \\
&\quad - 4 \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} [n_2 b]^2 + \\
&\quad \left. - \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} + \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-2} \right).
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Novamente uma força igual e de sentido contrário age no plano localizado em $x_2 = b$.

Vemos na figura (3.15) que a força no plano $x_2 = 0$ quando $a = b$ é atrativa. Quando $b = 2a$ vemos pela figura (3.16), que esta força não muda de sinal [37]. Isto ocorre porque o fluxo de momento repulsivo concentrado nas arestas no interior da cavidade é exatamente cancelado pelo fluxo atrativo na região externa tornando a força nas arestas nula.

Actor e Bender [32], conjecturaram que objetos distintos submetidos as mesmas condições de contorno sempre se atraem. Concluimos então que em consequência da estrutura externa o plano localizado em $x_2 = 0$ (o pistão) e o resto da estrutura podem ser considerados como objetos distintos para essas condições de contorno.

Podemos integrar os termos que dependem de x_1 na equação (3.116) usando as equações (3.89) e (3.90) e obtermos para a força global por unidade de comprimento

$$\begin{aligned} \frac{F}{L} = & \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \{ 4a [(n_1a)^2 + (n_2b)^2]^{-3} [n_2b]^2 + \\ & -a [(n_1a)^2 + (n_2b)^2]^{-2} - \frac{1}{16\pi b^3} \zeta(3) \end{aligned} \quad (3.117)$$

onde o último termo é a contribuição dos termos que dependem da distância até a aresta.

Note que ele é sempre repulsivo.

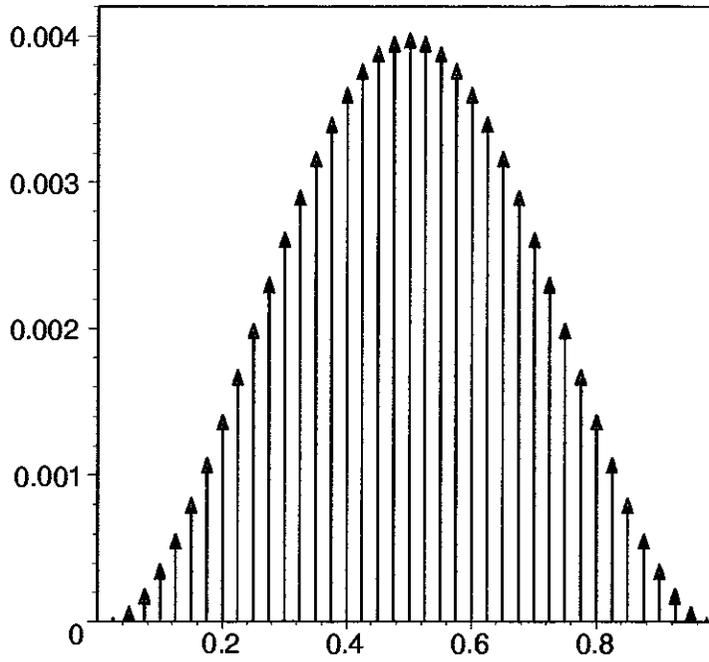


Figura 3.15: Densidade de força que age no pistão do guia em $x_2 = 0$ quando $b = a$ (campo escalar sob condições de Dirichlet).

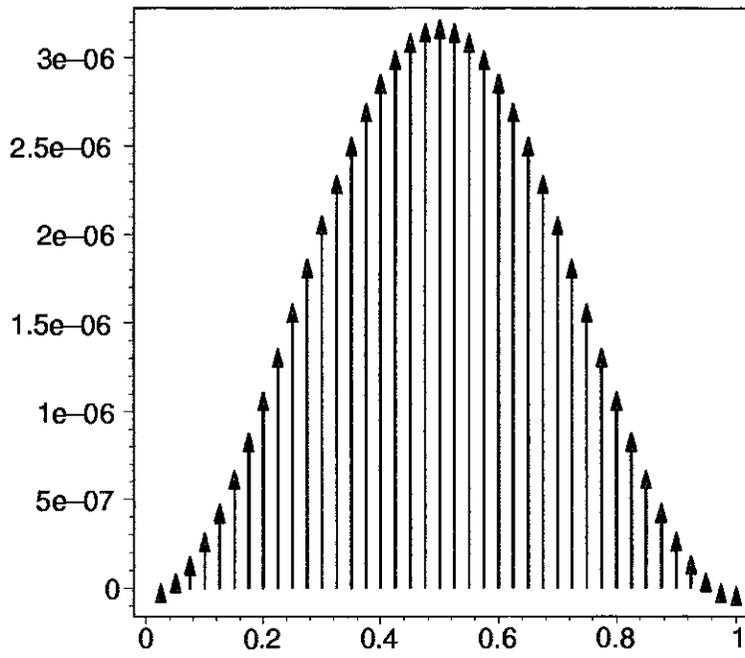


Figura 3.16: Densidade de força que age no pistão do guia em $x_2 = 0$ quando $b = 2a$ (campo escalar sob condições de Dirichlet).

3.2.5 A cavidade retangular

Nesta subsecção vamos calcular o tensor momento energia do vácuo de um campo escalar minimalmente ou conformalmente acoplado no interior de uma cavidade retangular sob condições de contorno de Dirichlet nas paredes. A principal motivação para este cálculo é a comparação com o caso eletromagnético que será calculado posteriormente. A parte espacial do modos é dada por

$$\phi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{x}) = \left(\frac{8}{abc}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{m_3 \pi x_3}{c}\right), \quad (3.118)$$

com $m_{1,2,3} = 1, 2, 3, \dots$

$$\omega_n^2 = \left(\left(\frac{m_1 \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_3 \pi}{c}\right)^2 \right),$$

Seguindo os mesmos passos da subsecção anterior, temos

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} (Z^{---} - Z^{--+} - Z^{-+-} + Z^{-++} + Z^{+--} + Z^{+-+} + Z^{++-} - Z^{+++}), \quad (3.119)$$

as funções $Z^{\pm\pm\pm} = Z^{\pm\pm\pm}(n_1, n_2, n_3, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, são dadas por

$$Z^{\pm\pm\pm} = \left[\left(n_1 a + \frac{(x_1 \pm y_1)}{2} \right)^2 + \left(n_2 b + \frac{(x_2 \pm y_2)}{2} \right)^2 + \left(n_3 c + \frac{(x_3 \pm y_3)}{2} \right)^2 \right]^{s-3/2} \quad (3.120)$$

A contribuição do espaço-tempo de Minkowski é dada pelo termo $Z^{---}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ e contém uma divergência ultravioleta no limite $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$. As divergências de superfície estão contidas nos seguintes termos

$$Z^{+---}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x}), Z^{+--+}(-1, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x}), Z^{-+-}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x}), Z^{-++}(0, -1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

$$Z^{+--+}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \text{ e } Z^{--+}(0, 0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \Rightarrow \text{divergências de parede.}$$

$Z^{++-}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{++-}(0, -1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+--}(-1, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+-}(-1, -1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$,
 $Z^{+--}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+--}(-1, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+-}(0, 0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+-}(-1, 0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$,
 $Z^{--+}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{--+}(0, -1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{--+}(0, 0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ e $Z^{--+}(0, -1, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$
 \Rightarrow divergências de aresta.

$Z^{+++}(0, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+++}(-1, 0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+++}(0, -1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+++}(0, 0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$,
 $Z^{+++}(-1, -1, 0, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+++}(-1, 0, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$, $Z^{+++}(0, -1, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x})$
e $Z^{+++}(-1, -1, -1, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \Rightarrow$ divergências de quina.

Para o campo escalar minimalmente acoplado a densidade de energia fica

$$\begin{aligned}
\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\
&\quad -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)^*} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
&\quad \times \left[(n_1 a + x_1)^2 - (n_2 b)^2 - (n_3 c)^2 \right] + \\
&\quad +\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)^{**}} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
&\quad \times \left[(n_1 a)^2 - (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right] + \\
&\quad +\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)^{***}} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\
&\quad \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 - (n_3 c + x_3)^2 \right]^2 + \\
&\quad +\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)^{****}} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
&\quad \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 - 3(n_3 c)^2 \right] + \\
&\quad +\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)^{*****}} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\
&\quad \times \left[(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] + \\
&\quad +\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)^{*****}} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\
&\quad \times \left[-3(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right], \tag{3.121}
\end{aligned}$$

onde

$(n_1, n_2, n_3)^*$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (-1, 0, 0)$

$(n_1, n_2, n_3)^{**}$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (0, -1, 0)$

$(n_1, n_2, n_3)^{***}$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (0, 0, -1)$

$(n_1, n_2, n_3)'$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (0, -1, -1), (0, 0, -1), (0, -1, 0)$

$(n_1, n_2, n_3)''$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (-1, 0, -1), (0, 0, -1), (-1, 0, 0)$

$(n_1, n_2, n_3)'''$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (-1, -1, 0), (0, -1, 0), (-1, 0, 0)$

Note que a densidade de energia no caso minimalmente acoplado diverge em todas as paredes e arestas mas não possui o termo que diverge na quina. Podemos reescrever a integral do termo $(n_2, n_3) = (0, 0)$ da segunda soma da equação (3.121) na região da cavidade como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^c dx_3 \left(\sum_{n_1=-\infty}^{-2} (n_1 a + x_1)^{-4} + \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} \right) \\ & = -\frac{bc}{16\pi^2} \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, 0) \end{aligned} \quad (3.122)$$

onde

$$\int_{ext} \zeta_D(2|x_1, 0) = \int_{-\infty}^0 (x_1 - a)^{-4} dx_1 + \int_a^{\infty} (x_1)^{-4} dx_1 = 2 \int_a^{\infty} (x_1)^{-4} dx_1 \quad (3.123)$$

As integrais dos termos $(n_1, n_3) = (0, 0)$ e $(n_1, n_2) = (0, 0)$ da terceira e quarta somas da equação (3.121) na região da cavidade podem ser reescritos analogamente. Usando a integral (3.90), a integral do termo $n_3 = 0$ na quinta soma da equação (3.121) pode ser escrito como

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^c dx_3 \zeta_F(2|x_1, x_2) = \frac{c}{32\pi^2} \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, x_2) \quad (3.124)$$

onde as funções $\zeta_F(2|x_1, x_2)$ e $\zeta_D(2|x_1, x_2)$ são definidas pelas Eqs. (3.84) e (3.83).

As contribuições do termo $n_2 = 0$ na quarta linha e do termo $n_3 = 0$ na sexta linha podem ser reescritos da mesma maneira. Juntando todos os resultados temos

$$\begin{aligned} \int_{ext} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ -bc \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, 0) - ac \int_{ext} \zeta_D(2|x_2, 0) - ab \int_{ext} \zeta_D(2|x_3, 0) \right\} + \\ &+ \frac{1}{32\pi^2} \left\{ a \int_{ext} \zeta_D(2|x_2, x_3) + b \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, x_3) + \right. \\ &\left. + c \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, x_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Novamente, quando somado com $\int_{\Omega} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$, este termo é cancelado usando a definição (3.26) e a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo fica

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\ &- \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{(n_2, n_3) \neq (0, 0)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\ &\times \left[(n_1 a + x_1)^2 - (n_2 b)^2 - (n_3 c)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{(n_1, n_3) \neq (0, 0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\ &\times \left[(n_1 a)^2 - (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_3 = -\infty}^{\infty} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0, 0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\ &\times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 - (n_3 c + x_3)^2 \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_3 \neq 0} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\ &\times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 - 3(n_3 c)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_1, n_3 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_2 \neq 0} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\ &\times \left[(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \neq 0} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\ &\times \left[-3(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.126)$$

Vamos checar se a integral da expressão acima na cavidade fornece a energia total. A

integral do primeiro termo dá

$$-\frac{abc}{32\pi^2} Z_3(2|a, b, c) \quad (3.127)$$

onde

$$Z_3(2|a, b, c) = \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} \quad (3.128)$$

As integrais do segundo, terceiro e quarto termos podem ser feitas usando [15]

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{\mu-1}}{[1 + \beta t]^\nu} = \beta^{-\mu} \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu - \mu)}{\Gamma(\nu)}, \quad |\arg \beta| < \pi; \Re \nu > \Re \mu > 0. \quad (3.129)$$

e novamente a Eq.(3.90). As integrais do quinto, sexto e sétimo termos podem ser feitas por aplicações sucessivas da Eq.(3.90). O resultado final é

$$\begin{aligned} E_C = & \frac{1}{32\pi^2} \{ -abc Z_3(2|a, b, c) + \\ & + 2\pi ac \sum_{(n_1, n_3)=1}^\infty \left[(n_1 a)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3/2} + \pi \zeta(3) (ca^{-2} + ac^{-2}) + \\ & + 2\pi bc \sum_{(n_2, n_3)=1}^\infty \left[(n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3/2} + \pi \zeta(3) (cb^{-2} + bc^{-2}) + \\ & + 2\pi ab \sum_{(n_1, n_2)=1}^\infty \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3/2} + \pi \zeta(3) (ba^{-2} + ab^{-2}) + \\ & - \frac{\pi^3}{3} (a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}) \}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Novamente, substituindo a quantidade dada pela expressão (3.130) na equação (3.95) vemos que ela obedece a relação com o potencial efetivo calculado na referência [13]. Note que a energia total no caso em que $a = b = c$ é negativa, fato bem conhecido na literatura [31]. Substituindo a função (3.119) na eq. (3.18) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F = & \frac{1}{8\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} -3 \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\ & \times \left[(n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (n_3 c)^2 \right]^2 + \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^2 + \\
& - \frac{1}{8\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)'''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + 5(n_3 c)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{6\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 - 2(n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{6\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)'} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\
& \times \left[-2(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] \\
& - \frac{1}{3\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)''''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \quad (3.131)
\end{aligned}$$

onde $(n_1, n_2, n_3)'''$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1), (-1, 0, 0), (-1, 0, -1), (-1, -1, 0), (-1, -1, -1)$.

Vemos que a densidade de energia $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle$ diverge nas arestas e quinas. Curiosamente neste caso, o tensor conformalmente acoplado possui mais divergências de superfície do que o tensor minimalmente acoplado. Repetindo o procedimento adotado para o tensor minimalmente acoplado podemos mostrar que a integral de $\langle \Theta_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis}$ também fornece a energia total.

Vamos agora inserir a cavidade retangular dentro do guia de ondas retangular da subseção anterior e calcular a densidade de força local através da descontinuidade do tensor momento energia na parede $x_2 = 0$. O valor da componente $\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle$ no interior

da cavidade é dada por

$$\begin{aligned}
\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle_{int} &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 - 3(n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right] \right. \\
&\quad \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
&\quad \sum_{(n_1, n_2, n_3)} 2 \left[(n_1 a + x_1)^2 - (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right] \\
&\quad \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
&\quad - 2 \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 - (n_2 b + x_2)^2 - (n_3 c)^2 \right] \\
&\quad \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
&\quad - \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} \\
&\quad - \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[3(n_1 a + x_1)^2 - (n_2 b)^2 - 2(n_3 c + x_3)^2 \right] \\
&\quad \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
&\quad + \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \\
&\quad \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
&\quad \sum_{(n_1, n_2, n_3)} 2 \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 - (n_3 c + x_3)^2 \right] \\
&\quad \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \quad (3.132)
\end{aligned}$$

Vemos que a expressão acima não diverge nas paredes $x_2 = 0, b$ da mesma forma que nos casos do guia de ondas e das placas paralelas. Para o campo conformalmente acoplado temos

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_{22}(\mathbf{x}) \rangle_{int} &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 - 3(n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right] \right. \\
&\quad \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
&\quad \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \frac{4}{3} \left[2(n_2 b)^2 - (n_3 c)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
& - \frac{4}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 - 2(n_2 b)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \\
& + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[-3(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
& + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 - 7(n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
& + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 - 3(n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
& + \frac{2}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 - (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \tag{3.133}
\end{aligned}$$

Integrando a parte fisicamente mensurável correspondente a qualquer uma das duas expressões anteriores na superfície da parede $x_2 = 0$ podemos obter a força total dada por $\frac{dE_C}{db}$. Note no entanto que neste caso $\langle T_{22}(x_1, x_2 = 0, x_3) \rangle \neq \langle \Theta_{22}(x_1, x_2 = 0, x_3) \rangle$. A componente $\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle$ na região externa é dada por

$$\begin{aligned}
\langle T_{22}(\mathbf{x}) \rangle_{ext} &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_3) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \right. \\
& \sum_{(n_1, n_3)} 2 \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\
& - 2 \sum_{(n_1, n_3)} \left[(n_1 a)^2 - (x_2)^2 - (n_3 c)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
& \left. - \sum_{(n_1, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{(n_1, n_3)} \left[3(n_1 a + x_1)^2 - 2(n_3 c + x_3)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
& + \sum_{(n_1, n_3)} \left[(n_1 a)^2 - 3(x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
& \sum_{(n_1, n_3)} 2 \left[(n_1 a + x_1)^2 + (x_2)^2 - (n_3 c + x_3)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \tag{3.134}
\end{aligned}$$

Para o campo conformalmente acoplado temos

$$\begin{aligned}
(\Theta_{22}(\mathbf{x}))_{ext} &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \right. \\
& - \frac{4}{3} \sum_{(n_1, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} (n_3 c)^2 + \\
& - \frac{4}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 \\
& + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[-3(n_1 a + x_1)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \\
& + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} + \\
& + \frac{1}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (x_2)^2 - 3(n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \\
& \times \left[(n_1 a)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
& + \frac{2}{3} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 - (x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right] \\
& \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} \tag{3.135}
\end{aligned}$$

Apesar do fluxo de momento perpendicular a parede depender do tensor, a densidade de força no pistão calculada em $x_2 = 0$ é novamente a mesma para o ambos os tensores.

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_3) = & \frac{1}{32\pi^2} \sum_{n_1, n_3=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2 \neq 0} \{ [(n_1 a)^2 - 3(n_2 b)^2 + (n_3 c)^2] \\
& \times [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2]^{-3} + \\
& \frac{4}{3} [2(n_2 b)^2 - (n_3 c)^2] \\
& \times [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2]^{-3} + \\
& -\frac{4}{3} [(n_1 a)^2 - 2(n_2 b)^2] \\
& \times [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-3} \\
& + \frac{1}{3} [-3(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2] \\
& \times [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2]^{-3} \\
& + \frac{1}{3} [(n_1 a + x_1)^2 - 7(n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2] \\
& \times [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-3} + \\
& + \frac{1}{3} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 - 3(n_3 c + x_3)^2]^{-2} \\
& \times [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-3} + \\
& + \frac{2}{3} [(n_1 a + x_1)^2 - (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2] \\
& \times [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-3} \} \quad (3.136)
\end{aligned}$$

A figura (3.17) mostra a densidade de força no pistão quando $a = b = c = 1$. Vemos que o fluxo de momento está dirigido no sentido positivo do eixo x_2 o que leva a uma densidade de força atrativa em todos os pontos do pistão. Note também que a força nas quinas é nula, devido ao cancelamento entre os modos internos e externos.

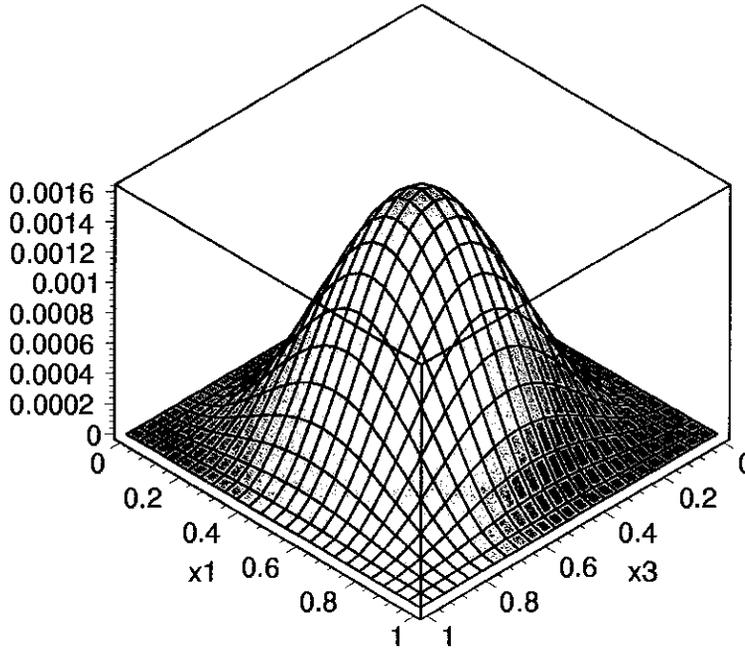


Figura 3.17: Densidade de força que age no pistão da cavidade em $x_2 = 0$ quando $a = b = c$ (campo escalar sob condições de Dirichlet).

3.3 O tensor momento energia do vácuo do campo eletromagnético

3.3.1 Formalismo básico

Nesta seção vamos utilizar o método de Bromwich-Borgnis [38] [11] [39] para obter o valor esperado no vácuo do tensor momento energia do campo eletromagnético na presença de fronteiras usando os modos de dois campos escalares sob c.c. de Dirichlet e Neumann. Devido a liberdade das transformações de calibre, podemos definir os campos elétricos e magnéticos em termos dos vetores de Hertz $\mathbf{\Pi}_e$ e $\mathbf{\Pi}_b$

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e + \frac{\partial \nabla \times \mathbf{\Pi}_b}{\partial t} \quad (3.137)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_b - \frac{\partial \nabla \times \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} \quad (3.138)$$

Vamos adotar a convenção de que os campos elétrico e magnético são expressos em termos de vetores de Hertz contendo somente uma componente não-nula

$$\mathbf{\Pi}_e = (\phi, 0, 0), \quad \mathbf{\Pi}_b = (\psi, 0, 0), \quad (3.139)$$

onde ϕ e ψ são campos escalares que podem ser quantizados da maneira usual. Usando as duas equações anteriores, os campos elétrico (\mathbf{E}) e magnético (\mathbf{B}) podem ser escritos como

$$\mathbf{E} = \left(-\nabla_{\perp}^2 \phi, \partial_0 \partial_3 \psi + \partial_2 \partial_1 \phi, -\partial_0 \partial_2 \psi + \partial_1 \partial_3 \phi \right) \quad (3.140)$$

$$\mathbf{B} = \left(-\nabla_{\perp}^2 \psi, -\partial_0 \partial_3 \phi + \partial_2 \partial_1 \psi, \partial_0 \partial_2 \phi + \partial_1 \partial_3 \psi, \right) \quad (3.141)$$

onde $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ e $\nabla_{\perp}^2 = \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3$. As constantes de normalização das funções de correlação dos campos elétrico e magnético podem ser obtidas exigindo que

$$\int_{cavidade} d^3 x \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_{n_1, n_2, n_3} \mathbf{E}_{m_1, m_2, m_3}^* + \mathbf{B}_{n_1, n_2, n_3} \mathbf{B}_{m_1, m_2, m_3}^* \right) = \frac{1}{2} \omega \delta_{n_1 m_1, n_2 m_2, n_3 m_3}$$

Essa condição é satisfeita se as constantes de normalização são dadas por [40] [39]

$$|N_{n_1, n_2, n_3}|^2 = \nabla_{\perp}^{-2}. \quad (3.142)$$

O valor esperado no vácuo do tensor momento energia associado ao campo eletromagnético é dado por

$$\langle T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \rangle = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \left\langle F_{\alpha\mu}(\mathbf{x}) F_{\beta}^{\mu}(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) F^{\mu\nu}(\mathbf{y}) \right\rangle. \quad (3.143)$$

Podemos calcular esta quantidade usando os campos ϕ e ψ através das Eqs.(3.140) e (3.141), calculando as funções de correlação de dois pontos apropriadas. Como exemplo considere a densidade de energia do vácuo

$$\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{y}) \rangle \quad (3.144)$$

Usando as Eqs. (3.140), (3.141), (3.142) e (3.8) na equação (3.144) podemos escrever a densidade de energia do vácuo em termos da função zeta bilocal associada aos campos ϕ e ψ definidos pela Eq.(3.17)

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle &= \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{4} [\zeta_\phi(s = -\frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_\psi(s = -\frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \zeta_\phi(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \zeta_\psi(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y})] \end{aligned} \quad (3.145)$$

Da mesma forma, a componente $\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle &= \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial y^3} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\zeta_\phi(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_\psi(s = \frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) + \\ &\quad \left. + \zeta_\phi(s = -\frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_\psi(s = -\frac{1}{2} | \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \end{aligned} \quad (3.146)$$

As c.c. eletromagnéticas $\mathbf{E}_\parallel = 0$ e $\mathbf{B}_\perp = 0$ nas paredes correspondem a uma combinação apropriada de c.c. de Dirichlet e Neumann para os campos ϕ e ψ .

3.3.2 O guia de ondas retangular

Considere o guia de ondas orientado ao longo do eixo x_3 . Devido a escolha feita para a direção dos vetores de Hertz na equação (3.139), as condições de contorno eletromagnéticas são satisfeitas se ϕ satisfaz condições de Dirichlet nas paredes que são paralelas a direção eixo x_1 e condições de Neumann nas paredes que são perpendiculares ao eixo x_1 e exatamente o contrário para o campo ψ . Considere o campo escalar ϕ obedecendo a condições de contorno de Dirichlet (D) em $x_2 = 0$ e $x_2 = b$ e Neumann (N) em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$. A parte espacial dos modos é dada por

$$\phi_{m_1, m_2}(\mathbf{x}) = \left(\frac{4}{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{m_1 \pi x_1}{a} \right) \sin \left(\frac{m_2 \pi x_2}{b} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_3 x_3}, \quad (3.147)$$

onde $m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $m_2 = 1, 2, 3, \dots$.

Considere o campo escalar ψ obedecendo a condições de contorno de Dirichlet (D) em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$ e Neumann (N) em $x_2 = 0$ e $x_2 = b$. A parte espacial dos modos é dada por

$$\psi_{m_1, m_2}(\mathbf{x}) = \left(\frac{4}{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_3 x_3}, \quad (3.148)$$

onde $m_1 = 1, 2, 3, \dots$ e $m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Repetindo o procedimento da subseção (3.2.3), podemos obter a função zeta bilocal associada aos campos ϕ e ψ . O resultado é

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} (Z^{--} \mp Z^{-+} \pm Z^{+-} - Z^{++}), \quad (3.149)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde ao campo ϕ (ψ) e as funções $Z^{\pm\pm}$ são dadas pela Eq. (3.43). Usando a Eq.(3.145) podemos escrever $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle$ como a soma da parte finita nas fronteiras com a parte que diverge nestas. Em forma explícita

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D &= -\frac{1}{16\pi^2} \{ [(x_1)^2 + (x_2)^2]^{-2} + [(a - x_1)^2 + (b - x_2)^2]^{-2} + \\ &+ [(x_1)^2 + (b - x_2)^2]^{-2} + [(a - x_1)^2 + (x_2)^2]^{-2} \} \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-2} + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2)'} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} \end{aligned} \quad (3.151)$$

Os limites de todas as somas vão de $-\infty$ a ∞ . Na expressão de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F$ excluimos na primeira soma a divergência do espaço-tempo de Minkowski e na segunda soma excluimos as divergências de aresta (os termos que contém as divergências de parede foram cancelados quando combinamos as funções ζ_ϕ e ζ_ψ).

Vamos identificar a contribuição das fronteiras isoladas na expressão $\int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F$.

Note que o segundo termo da Eq.(3.151) tem a mesma forma do quarto termo da Eq.(3.77)

e pode ser escrito como a integral dos termos que divergem nas arestas, *fora* do guia de ondas. Novamente, podemos somar este termo com a contribuição divergente

$\int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$ e o termo resultante é cancelado usando a definição (3.26).

Logo, a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo é dada pelo primeiro termo

$$\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-2}, \quad (3.152)$$

que é uniforme [41]. Vemos que a energia do vácuo por unidade de comprimento neste caso é sempre negativa, como foi observado na referência [42]. Este resultado difere do caso escalar sob condições de Dirichlet dado pela expressão (3.94) que pode ser positivo ou negativo.

Note que apesar do fato de que na configuração do guia de ondas as divergências de parede foram canceladas para o campo conformalmente acoplado e para o campo eletromagnético, a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo é não-uniforme no primeiro caso e uniforme no segundo. Como consequência, tanto para o campo minimalmente acoplado quanto para o campo conformalmente acoplado, a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo possui termos que dependem somente da distância às paredes (veja as expressões (3.86) e (3.85)) e quando integrados, estes termos dão origem a quantidades que são sempre positivas. No caso eletromagnético estes termos foram cancelados resultando na expressão (3.152).

Como foi observado por Candelas e Deutsch, a relação entre o tensor momento energia do campo escalar conformalmente acoplado e do campo eletromagnético não é trivial no caso geral como é entre placas. Como consequência, as arestas não imitam as propriedades de uma fronteira com curvatura para a densidade de energia do campo eletromagnético

no interior de um guia de ondas retangular.

Considere agora dois planos paralelos infinitos posicionados em $x_2 = 0$ e $x_2 = b$, conectados por duas tiras posicionadas em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$. Vamos calcular a densidade de força que age na tira $x_1 = 0$. Novamente, é fácil ver que a densidade de força é dada pela expressão

$$\frac{F(x_2)}{L} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\langle T_{11}(x_1 = -\varepsilon) \rangle - \langle T_{11}(x_1 = \varepsilon) \rangle] \quad (3.153)$$

Para calcular a componente $\langle T_{11}(x_1 = -\varepsilon) \rangle$ temos de conhecer a função zeta na região externa. Para o campo ϕ , fazendo a substituição $\cos\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \rightarrow \cos(k_1 x_1)$ na Eq. (3.147) onde k_1 é uma variável contínua, a parte do núcleo de calor na direção x_1 fica

$$\begin{aligned} K(t | x_1, y_1) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk_1 \exp(-t(k_1)^2) \cos k_1 x_1 \cos k_1 y_1 \\ &= (4\pi t)^{-1/2} \exp\left[-(x_1 - y_1)^2 / 4t\right] + \\ &\quad + (4\pi t)^{-1/2} \exp\left[-(x_1 + y_1)^2 / 4t\right] \end{aligned} \quad (3.154)$$

Para o campo ψ fazendo a substituição $\sin\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \rightarrow \sin(k_1 x_1)$ na Eq. (3.148), a expressão do núcleo de calor na direção x_1 fica dada pela Eq. (3.113) com a troca $x_2 \leftrightarrow x_1$ e $y_2 \leftrightarrow y_1$. As funções zeta correspondentes ficam

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} (Z^{--} \mp Z^{-+} \pm Z^{+-} + Z^{++}), \quad (3.155)$$

onde sinal superior (inferior) corresponde a função zeta associada ao campo ϕ (ψ). As funções $Z^{\pm\pm}$ são definidas por

$$Z^{\pm\pm} = \left[\left(\frac{(x_1 \pm y_1)}{2} \right)^2 + \left(n_2 b + \frac{(x_2 \pm y_2)}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - y_3}{2} \right)^2 \right]^{s - \frac{3}{2}}. \quad (3.156)$$

Logo, a componente externa é dada por

$$\begin{aligned} \langle T_{11}(x) \rangle_{ext} &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nb)^{-4} + \\ &\quad + \left[(x_1)^2 + (nb + x_2)^2 \right]^{-3} \left[(x_1)^2 - 3(nb + x_2)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.157)$$

Substituindo as funções definidas pela Eq. (3.149) na Eq.(3.146) obtemos para a componente interna

$$\begin{aligned} \langle T_{11}(x) \rangle_{int} &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \{ [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} [-3(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2] + \\ &\quad + [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} \\ &\quad \times [(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2] \} \end{aligned} \quad (3.158)$$

A densidade de força na tira $x_1 = 0$ fica

$$\begin{aligned} \frac{F(x_2)}{L} &= -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \{ [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2]^{-3} [-3(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2] + \\ &\quad + [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} [(n_1 a)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2] \} \end{aligned} \quad (3.159)$$

Esta força é sempre atrativa para quaisquer valores de a e b , ou seja tem o mesmo comportamento do caso escalar. Vemos que a força é não-uniforme. O último termo da equação (3.159) pode ser reescrito como

$$-3 [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-2} + 4 [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2]^{-3} (n_1 a)^2 \quad (3.160)$$

Usando as equações (3.89) e (3.90) podemos mostrar que a contribuição deste termo é nula e a força global por unidade de comprimento é dada somente pelo primeiro termo multiplicado por b . Assim como no caso da densidade de energia, vemos que os termos não-uniformes não dão contribuição para as quantidades globais no guia de ondas.

3.3.3 A cavidade retangular

No caso da cavidade retangular, o campo escalar ϕ obedece a c.c. de Neumann em $x_1 = 0, a$ e c.c. de Dirichlet em $x_2 = 0, b$ e $x_3 = 0, c$ (NDD). A parte espacial do modos é dada por

$$\phi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{x}) = \left(\frac{8}{abc} \right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{m_1 \pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{m_3 \pi x_3}{c}\right), \quad (3.161)$$

com $m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$, $m_{2,3} = 1, 2, 3 \dots$ e

$$\omega_n^2 = \left(\left(\frac{m_1 \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m_3 \pi}{c} \right)^2 \right),$$

O campo escalar ψ obedece a c.c. de Dirichlet em $x_1 = 0, a$ e c.c. de Neumann em $x_2 = 0, b$ e $x_3 = 0, c$ (DNN). A parte espacial dos modos é

$$\psi_{m_1, m_2, m_3}(\mathbf{x}) = \left(\frac{8}{abc} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{m_1 \pi x_1}{a} \right) \cos \left(\frac{m_2 \pi x_2}{b} \right) \cos \left(\frac{m_3 \pi x_3}{c} \right), \quad (3.162)$$

com $m_1 = 1, 2, 3, \dots$, $m_{2,3} = 0, 1, 2 \dots$

Seguindo os mesmos passos da subseção anterior, temos

$$\zeta(s | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)} \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} (Z^{----} \mp Z^{--++} \mp Z^{-+-} - Z^{-+++} + \pm Z^{+---} - Z^{+-++} - Z^{++-} \pm Z^{++++}), \quad (3.163)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a c.c. NDD (DNN) e as funções $Z^{\pm\pm\pm} = Z^{\pm\pm\pm}(n_1, n_2, n_3, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, são dadas pela eq. (3.120). Estas funções possuem obviamente as mesmas divergências que a função dada pela eq. (3.119).

Substituindo as Eqs.(3.163) na Eq.(3.145) podemos escrever novamente $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle$ como a soma de uma parte que é finita na fronteira com a outra parte que diverge na fronteira.

A parte finita na fronteira é

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\ &- \frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)'} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\ &- \frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_2 b)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)'''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} (n_3 c)^2, \quad (3.164)
 \end{aligned}$$

Os limites de todas as somas vão de $-\infty$ a ∞ . Na primeira soma excluimos a divergência do espaço-tempo de Minkowski e na segunda, quarta e sexta somas excluimos as divergências de aresta.

$(n_1, n_2, n_3)'$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (0, -1, -1), (0, 0, -1), (0, -1, 0)$

$(n_1, n_2, n_3)''$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (-1, 0, -1), (0, 0, -1), (-1, 0, 0)$

$(n_1, n_2, n_3)'''$ significa $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0), (-1, -1, 0), (0, -1, 0), (-1, 0, 0)$

As divergências de aresta estão contidas na definição de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$ e não vamos escrevê-las explicitamente (as divergências de parede e de quina foram canceladas quando combinamos as funções ζ_ϕ e ζ_ψ).

Vamos agora separar a contribuição das fronteiras isoladas da integral de $\langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_F$, dentro da cavidade, $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq c$.

Usando a integral (3.90), a contribuição do termo $n_1 = 0$ na segunda linha pode ser escrito como

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^c dx_3 \zeta_F(2|x_2, x_3) = -\frac{a}{8\pi^2} \int_{ext} \zeta_D(2|x_2, x_3) \quad (3.165)$$

onde as funções $\zeta_F(2|x_2, x_3)$ e $\zeta_D(2|x_2, x_3)$ são definidas pelas Eqs. (3.84) e (3.83).

As contribuições do termo $n_2 = 0$ na quarta linha e do termo $n_3 = 0$ na sexta linha podem ser reescritos da mesma maneira. Juntando todos os resultados temos

$$\int_{ext} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D = -\frac{1}{8\pi^2} \left\{ a \int_{ext} \zeta_D(2|x_2, x_3) + b \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, x_3) + c \int_{ext} \zeta_D(2|x_1, x_2) \right\}. \quad (3.166)$$

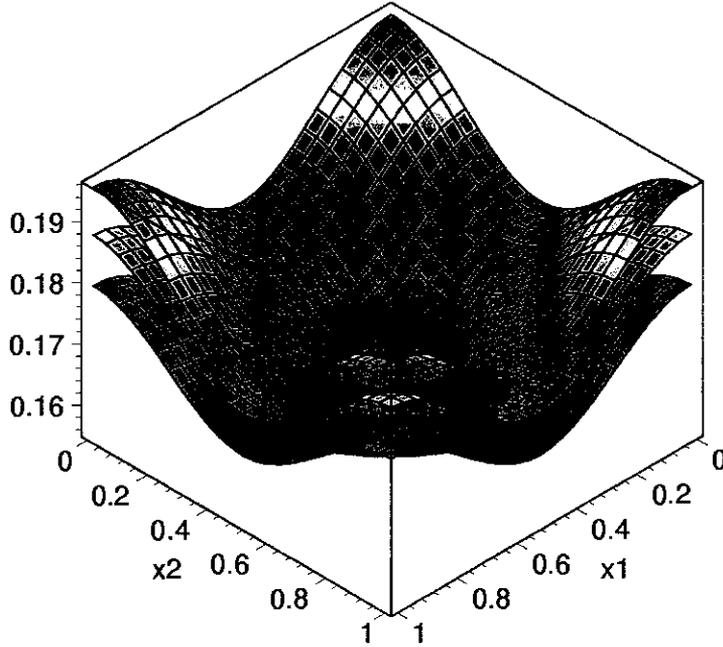


Figura 3.18: Densidade de energia do vácuo do campo eletromagnético quando $a = b = c$ nos planos $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$ e $x_3 = \frac{1}{16}$.

Novamente, quando somado com $\int_{\Omega} \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_D$, este termo é cancelado usando a definição (3.26) e a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo fica

$$\begin{aligned}
 \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} = & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2]^{-2} + \\
 & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \neq 0} [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-2} + \\
 & +\frac{1}{4\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} [(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-3} (n_1 a)^2 + \\
 & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1, n_3 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_2 \neq 0} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-2} + \\
 & +\frac{1}{4\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2]^{-3} (n_2 b)^2 + \\
 & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{n_3 \neq 0} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2]^{-2} + \\
 & +\frac{1}{4\pi^2} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} [(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2]^{-3} (n_3 c)^2. \quad (3.167)
 \end{aligned}$$

Vemos que esta função é não-uniforme. Sua forma está mostrada na figura (3.18) quando $a = b = c = 1$ e para os planos $x_3 = 1/2$, $x_3 = 1/4$ e $x_3 = 1/16$ respectivamente.

Como a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo cresce quando se aproxima das arestas, vemos que estas imitam corretamente as propriedades da curvatura neste caso.

Vamos verificar agora, que a integral da densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo dentro da cavidade fornece a energia total. A integral da primeira linha da Eq.(3.167) é dada por

$$-\frac{abc}{16\pi^2} Z_3(2|a, b, c), \quad (3.168)$$

onde $Z_3(2|a, b, c)$ é dada pela Eq.(3.128).

A integral da segunda linha fornece o resultado (a integral da quarta e sexta linhas podem ser feitas da mesma forma)

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^c dx_3 \sum_{n_2, n_3=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \neq 0} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} = -\frac{\pi}{48a}, \quad (3.169)$$

A integral da terceira linha fornece o resultado (note que este termo é finito nas fronteiras porque a contribuição de $n_1 = 0$ é nula) :

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^c dx_3 \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 = \frac{\pi}{24a} \quad (3.170)$$

A integral da quinta e sexta linhas podem ser feitas da mesma forma. O resultado é

$$\int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 \int_0^c dx_3 \langle T_{00}(\mathbf{x}) \rangle_{fis} = E_C \quad (3.171)$$

onde

$$E_C = -\frac{abc}{16\pi^2} Z_3(2|a, b, c) + \frac{\pi}{48} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (3.172)$$

é a energia de Casimir total, em concordância com [42] (para uma análise detalhada da energia total do vácuo do campo eletromagnético no interior de uma cavidade retangular,

veja [43]). Neste caso o valor da energia total para $a = b = c$ é positivo [31] diferindo novamente do caso escalar dado pela equação (3.130). No caso escalar, novamente os termos que dependem somente da distância até as paredes dão contribuições positivas quando integrados e os termos que dependem da distância até as arestas dão uma contribuição negativa. A comparação com o caso eletromagnético no entanto é menos trivial pois apesar dos termos de parede novamente se cancelarem, os termos de aresta dão uma contribuição positiva, o que determina o sinal da energia do cubo.

O valor da componente $\langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle$ no interior da cavidade é dada por

$$\begin{aligned}
 \langle T_{11}(\mathbf{x}) \rangle = & \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[-3(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right] \right. \\
 & \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
 & - \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right] \\
 & \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
 & - \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 - 3(n_3 c + x_3)^2 \right] \\
 & \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
 & \left. + \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \right\} \quad (3.173)
 \end{aligned}$$

Vamos inserir a cavidade retangular no guia de ondas da subseção anterior e calcular o valor da densidade de força local na parede $x_1 = 0$. O resultado é

$$\begin{aligned}
 F(x_2, x_3) = & -\frac{1}{16\pi^2} \left\{ \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[-3(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right] \right. \\
 & \times \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \\
 & - \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 - 3(n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right] \\
 & \left. \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} + \right\}
 \end{aligned}$$

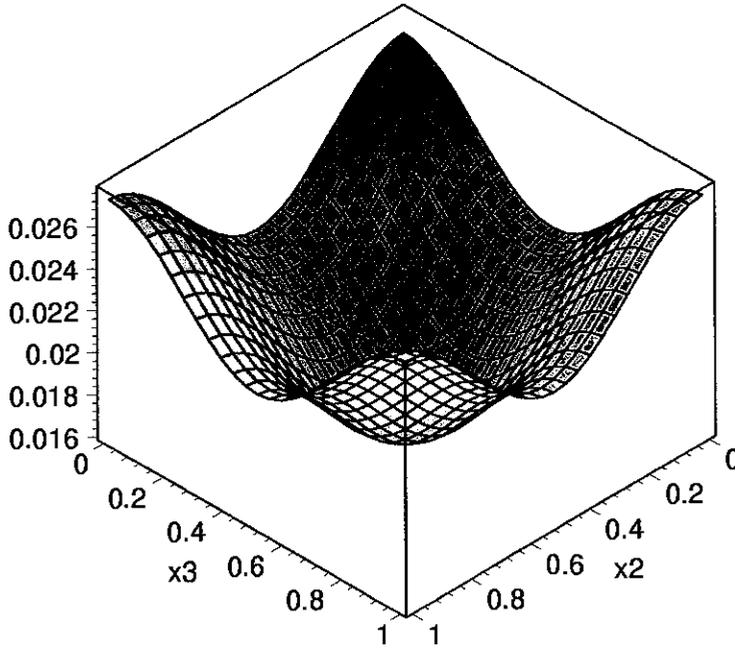


Figura 3.19: Densidade de força que age no pistão da cavidade em $x_2 = 0$ quando $a = b = c$ (campo eletromagnético).

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 - 3(n_3 c + x_3)^2 \right] \\
 & \times \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} + \\
 & + \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} \} \quad (3.174)
 \end{aligned}$$

A forma desta força está mostrada na figura (3.19). Ela é sempre atrativa para quaisquer valores de a, b e c . Note que embora as divergências nas arestas e quinas tenham sido canceladas pelos modos externos, a força não é nula nesta região. Ao contrário, ela assume seu valor máximo nela.

3.4 Propagação de ondas eletromagnéticas em um vácuo não-trivial

3.4.1 Introdução

Como foi enfatizado na introdução, o vácuo de um campo quântico pode ser visto como um análogo de um meio macroscópico (um “éter” [10]), imbuído de propriedades materiais.

As propriedades deste meio podem ser determinadas pela sua “resposta” à presença de campos externos ou fronteiras. A propagação da luz em um vácuo não-trivial é uma das manifestações das suas propriedades materiais.

Considere a propagação da luz na região entre dois planos paralelos perfeitamente condutores separados por uma distância a (a configuração original do efeito Casimir). Devido às condições de contorno nos condutores ($\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ e $\mathbf{B}_{\perp} = 0$) os valores esperados no vácuo dos quadrados das componentes dos campos e da densidade de energia diferem dos seus valores no espaço livre. Além disso, a descrição efetiva da eletrodinâmica quântica (que não contém o campo de Dirac mas somente o campo eletromagnético) induz (mesmo na ausência de condutores) não-linearidades nas Equações de Maxwell. Estas não-linearidades, juntamente com as variações induzidas pelos condutores nos valores esperados dos quadrados dos campos fazem com que a velocidade da luz entre os planos (e na direção normal a eles) exceda c . Este fenômeno é conhecido na literatura como efeito Scharnhorst [44] e como foi mostrado na referência [45], é totalmente compatível com a relatividade especial.

A variação da velocidade de propagação da luz foi também investigada nos casos em que o vácuo da eletrodinâmica quântica é modificado por campos magnéticos [46][47], campos gravitacionais [48] e temperatura [49]. Através de uma comparação entre estes casos, Latorre, Pascual e Tarrach [50] obtiveram uma fórmula de unificação relacionando a variação da velocidade da luz (na verdade a média desta quantidade somada sobre todas as polarizações e direções de propagação) com a densidade de energia do vácuo. Investigações posteriores [51] mostraram que a média sobre polarizações da variação da velocidade da luz está relacionada com o valor esperado no vácuo do tensor momento energia do campo

eletromagnético e pode ser obtida de uma relação mais geral, a chamada “condição de cone de luz” que é independente da Lagrangeana efetiva e representa uma generalização da fórmula de unificação. Esta relação pode ser obtida sem efetuar a média sobre polarizações e em geral, polarizações diferentes podem produzir variações diferentes de velocidade [52]. No caso do efeito Scharnhorst (propagação da luz entre placas paralelas), como a variação da velocidade da luz é independente da polarização, o fenômeno de birefringência está ausente no vácuo desta configuração [53].

Nesta seção vamos investigar a variação da velocidade de propagação da luz no interior de um guia de ondas retangular e no interior de uma cavidade retangular. Neste caso, polarizações diferentes produzem variações de velocidade diferentes. Em outras palavras, o vácuo destas configurações pode ser visto como um análogo de um meio birefringente. Além disso, certas divergências de superfície não se cancelam nestas configurações e o índice de refração diverge em determinadas fronteiras. Vamos então definir um índice de refração fisicamente mensurável através da comparação com uma quantidade global, de maneira análoga ao que fizemos nas seções anteriores.

Para enfatizar a analogia com um meio material, vamos considerar o vácuo como o análogo de um meio caracterizado por tensores de permissividade elétrica e magnética não-triviais. Usando a relação entre a Lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg e estes tensores, podemos obter a variação do índice de refração como foi feito por Barton [54]. Posteriormente vamos checar o resultado através da condição de cone de luz, somando sobre as polarizações.

Para frequências $\omega \ll m$ (m é a massa do elétron) e para campos com intensidade $\ll m^2/e$ ($\hbar = c = 1$ e e = carga do elétron), as correções não-lineares para a densidade

Lagrangeana são dadas pela densidade Lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg (nesta seção vamos usar unidades gaussianas para o campo eletromagnético)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + g \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right], \quad (3.175)$$

onde $g = \alpha^2/5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot \pi^2 m^4$ e α é a constante de estrutura fina.

Da Eq.(3.175) podemos obter as equações de Maxwell efetivas [55]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.176)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.177)$$

onde $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ e os vetores \mathbf{P} e \mathbf{M} são dados por :

$$\mathbf{P} = 4g (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{E} + 14g (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \quad (3.178)$$

$$\mathbf{M} = -4g (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{B} + 14g (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \quad (3.179)$$

Como as equações (3.176) e (3.177) tem a mesma forma das equações de Maxwell macroscópicas podemos interpretar os vetores \mathbf{P} e \mathbf{M} como os vetores de polarização e magnetização efetivos do vácuo. As relações entre \mathbf{D} e \mathbf{E} e entre \mathbf{B} e \mathbf{H} são dadas por

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (3.180)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j \quad (3.181)$$

Substituindo $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{e}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{b}$, onde os novos \mathbf{E} , \mathbf{B} são os campos quantizados e \mathbf{e} , \mathbf{b} os campos externos (clássicos) que descrevem a onda cuja propagação queremos estudar e mantendo somente termos lineares nos campos clássicos podemos obter as seguintes expressões para os tensores de suscetibilidade elétrica $\chi_{ij}^{(e)}$ e magnética $\chi_{ij}^{(m)}$

$$\chi_{ij}^{(e)} = 4g \left[\langle \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \rangle \delta_{ij} + 2 \langle E_i E_j \rangle \right] + 14g \langle B_i B_j \rangle \quad (3.182)$$

$$\chi_{ij}^{(m)} = 4g \left[-\langle \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \rangle \delta_{ij} + 2 \langle B_i B_j \rangle \right] + 14g \langle E_i E_j \rangle \quad (3.183)$$

O tensor dielétrico e o tensor de permitividade magnética são dados por

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} \quad (3.184)$$

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}^{(m)} = \delta_{ij} + \Delta\mu_{ij} \quad (3.185)$$

Considere a propagação de uma onda plana monocromática. Vamos assumir que a onda pode ser descrita na aproximação de ótica geométrica, exigindo que seu comprimento de onda seja muito menor que os parâmetros globais que caracterizam a cavidade. Desta forma, podemos obter a variação do índice de refração do vácuo através da variação dos tensores de susceptibilidade dielétrica e magnética do vácuo. Definindo o índice de refração $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ e substituindo nas equações de Maxwell (3.176) e (3.177) temos

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (3.186)$$

$$\mathbf{D} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (3.187)$$

Usando as relações (3.180) e (3.181) nas equações (3.187) e (3.186) e substituindo o valor de \mathbf{H} dado pela equação (3.186) na equação (3.187) temos

$$\varepsilon_{im}E_m = \varepsilon_{ijk}n_j \left(\mu^{-1}\right)_{kl} \varepsilon_{lmn}E_m n_n \quad (3.188)$$

onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita. As equações (3.188) são independentes se o determinante da matriz formada pelos coeficientes das componentes de \mathbf{E} se anula. Esta condição define a relação entre as componentes do índice de refração e as componentes dos tensores de susceptibilidade dielétrica e magnética do vácuo e é chamada de equação de Fresnel.

3.4.2 O efeito Scharnhorst entre placas paralelas

Considere o campo eletromagnético quântico na região entre duas placas paralelas perfeitamente condutoras localizadas em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$. Neste caso, é fácil ver que há

somente variação das componentes diagonais de ε_{ij} e μ_{ij} . Para calcular essas componentes precisamos das funções de correlação elétricas e magnéticas na região entre as placas. Podemos obter estas funções através da função zeta bilocal, escolhendo os vetores de Hertz na direção apropriada. Na direção do eixo x_1 temos por exemplo

$$\langle E_1 E_1 \rangle = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \zeta_{\phi_1} \left(s = \frac{1}{2} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) \quad (3.189)$$

$$\langle B_1 B_1 \rangle = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \zeta_{\psi_1} \left(s = \frac{1}{2} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \right) \quad (3.190)$$

Onde ζ_{ϕ_1} corresponde a função zeta bilocal associada com o campo escalar ϕ obedendo a condições de Dirichlet nas fronteiras paralelas a direção do eixo x_1 e condições de Neumann nas direções perpendiculares a direção do eixo x_1 . A quantidade ζ_{ψ_1} corresponde a função zeta bilocal associada com o campo escalar ψ (as condições para o campo ψ são obtidas fazendo a troca Dirichlet \rightarrow Neumann para as condições de ϕ). As funções ζ_{ϕ_1} e ζ_{ψ_1} são dadas por

$$\zeta(s \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(s)} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (Z^- \pm Z^+), \quad (3.191)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a função ζ_{ϕ_1} (ζ_{ψ_1}) e as funções Z^{\pm} são dadas por

$$Z^{\pm} = \left[\left(n_1 a + \frac{(x_1 \pm y_1)}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - y_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - y_3}{2} \right)^2 \right]^{s - \frac{3}{2}} \quad (3.192)$$

Logo, as equações (3.189) e (3.190) (em unidades gaussianas) ficam

$$\langle E_1 E_1 \rangle = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2a^{-4} \zeta(4) + \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} \right\} \quad (3.193)$$

$$\langle B_1 B_1 \rangle = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2a^{-4} \zeta(4) - \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} \right\} \quad (3.194)$$

As funções de correlação nas outras direções podem ser obtidas apontando os vetores de Hertz nessas direções e usando as condições de contorno correspondentes para ϕ e ψ . As

outras funções ficam

$$\langle E_2 E_2 \rangle = \langle E_3 E_3 \rangle = \frac{1}{4\pi} \left\{ -2a^{-4} \zeta(4) - 2 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} \right\} \quad (3.195)$$

$$\langle B_2 B_2 \rangle = \langle B_3 B_3 \rangle = \frac{1}{4\pi} \left\{ -2a^{-4} \zeta(4) + 2 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} \right\} \quad (3.196)$$

Considere uma onda plana monocromática se propagando na direção do eixo x_1 (na direção normal aos planos). Neste caso $\mathbf{n} = (n_1, 0, 0)$ e a equação de Fresnel, definida pelo determinante nulo da equação (3.188), fica

$$(n_1)^4 + \mu_{22}\mu_{33}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - (\mu_{22}\varepsilon_{33} + \mu_{33}\varepsilon_{22})(n_1)^2 = 0 \quad (3.197)$$

As soluções são

$$n_1 = \pm \sqrt{\mu_{22}\varepsilon_{33}} \quad (3.198)$$

$$n_1 = \pm \sqrt{\mu_{33}\varepsilon_{22}} \quad (3.199)$$

Somente o valor absoluto das soluções é fisicamente relevante e portanto existem somente duas relações de dispersão. A primeira solução corresponde a uma onda polarizada na direção do eixo x_3 enquanto que a segunda corresponde a uma onda polarizada na direção do eixo x_2 . No primeiro caso temos $\Delta\varepsilon \rightarrow \Delta\varepsilon_{33}$ e $\Delta\mu \rightarrow \Delta\mu_{22}$ e o índice de refração é dado por

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{(1 + \Delta\mu_{22})(1 + \Delta\varepsilon_{33})} \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}(\Delta\mu_{22} + \Delta\varepsilon_{33}) \Rightarrow \Delta n_1 = \frac{1}{2}(\Delta\mu_{22} + \Delta\varepsilon_{33}) \end{aligned} \quad (3.200)$$

onde somente termos até $O(\alpha^2)$ foram considerados. Usando as equações (3.182)-(3.185)

temos

$$\Delta\varepsilon_{33} = g \left\{ -12 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} - 44a^{-4} \zeta(4) \right\} \quad (3.201)$$

$$\Delta\mu_{22} = g \left\{ 12 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (n_1 a + x_1)^{-4} - 44a^{-4} \zeta(4) \right\} \quad (3.202)$$

Obtemos

$$\Delta n_1 = -\frac{22}{45} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 g \approx -1.55 \times 10^{-48} \left(\frac{cm}{a}\right)^4 \quad (3.203)$$

E a velocidade da luz na direção do eixo x_1 fica

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{c}{1 + \Delta n_1} \approx (1 - \Delta n_1) c > c \quad (3.204)$$

Como foi observado por Milonni e Svozil [56], esta variação é menor do que a incerteza na medida da velocidade (no caso em que uma placa é perfeitamente condutora e a outra infinitamente permeável [57], obtemos $v_1 < c$). Note que os termos que continham divergências de parede foram cancelados no cálculo de Δn_1 mas em geral estes termos não se cancelarão como veremos na próxima subseção.

Se a onda está polarizada na direção do eixo x_2 , devido as equações (3.195) e (3.196), obtemos o mesmo resultado. Como consequência, dois estados de polarização diferentes produzem a mesma variação do índice de refração e concluímos que não há birefringência nesta configuração.

Como os autores mostraram na referência [51] a média sobre polarizações da velocidade de propagação da luz em um vácuo não-trivial, está relacionada com o tensor momento energia do vácuo do campo eletromagnético através da condição de cone de luz

$$v^2 = 1 - Q \langle T^{\mu\nu} \rangle \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu \quad (3.205)$$

onde $\bar{k}_\mu = (v, \hat{\mathbf{k}})$ e Q é um fator que depende da Lagrangeana que descreve o sistema. No caso da Lagrangeana de Euler-Heisenberg, $Q = 22\alpha^2/45m^4$. Para o caso de propagação ao longo da direção do eixo x_1 , $\bar{k}_\mu = (v, 1, 0, 0)$ e a equação (3.205) fica

$$v^2 = \frac{1 - Q \langle T^{11} \rangle}{1 + Q \langle T^{00} \rangle} \quad (3.206)$$

Supondo $Q \langle T^{11} \rangle, Q \langle T^{00} \rangle \ll 1$ podemos escrever a relação anterior como

$$v = 1 - \frac{Q}{2} (\langle T^{11} \rangle + \langle T^{00} \rangle) \quad (3.207)$$

Usando a equação (1.1) é fácil ver que a velocidade dada pela equação (3.204) obedece a equação (3.207).

3.4.3 O efeito Scharnhorst no interior de cavidades retangulares

Vamos considerar o caso particular de uma onda se propagando no interior de um guia de ondas retangular (o caso da cavidade retangular segue um procedimento análogo). Considere o guia de ondas orientado ao longo do eixo x_3 . Para utilizar a aproximação de ótica geométrica, vamos admitir que a variação do índice de refração com respeito as coordenadas espaciais é pequena na escala do comprimento de onda da luz. Esta última condição pode ser testada explicitamente no final do cálculo.

Considere a direção de propagação paralela ao eixo x_1 . Neste caso a equação de Fresnel é dada por

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{\mu_{33} (\mu_{11} \mu_{22} - (\mu_{12})^2)} \times \{ \mu_{11} \varepsilon_{11} (n_1)^4 \\ & - \mu_{11} \mu_{33} (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12})^2) (n_1)^2 - \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} (\mu_{11} \mu_{22} - (\mu_{12})^2) (n_1)^2 \\ & + \mu_{11} \mu_{22} \mu_{33} \varepsilon_{33} (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12})^2) - \mu_{33} (\mu_{12})^2 \varepsilon_{33} (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - (\varepsilon_{12})^2) \} \quad (3.208) \end{aligned}$$

As soluções da equação (3.208) são dadas por

$$\begin{aligned} (n_1)^2 &= \varepsilon_{33} \left(\mu_{22} - \frac{(\mu_{12})^2}{\mu_{11}} \right) \\ &= (1 + \Delta \varepsilon_{33}) \left(1 + \Delta \mu_{22} - \frac{(\mu_{12})^2}{1 + \Delta \mu_{11}} \right) \quad (3.209) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n_1)^2 &= \mu_{33} \left(\varepsilon_{22} - \frac{(\varepsilon_{12})^2}{\varepsilon_{11}} \right) \\ &= (1 + \Delta \mu_{33}) \left(1 + \Delta \varepsilon_{22} - \frac{(\varepsilon_{12})^2}{1 + \Delta \varepsilon_{11}} \right) \quad (3.210) \end{aligned}$$

A solução (3.209) corresponde a uma onda polarizada na direção x_3 enquanto a solução (3.210) corresponde a uma onda polarizada na direção x_2 . Note que o último termo das equações (3.209) e (3.210) é de ordem (α^4). Como foi mostrado na referência [53], quando existe birefringência devido a presença destes termos, a soma sobre as polarizações não obedece a condição de cone de luz. Além disso, usando as equações (3.182)-(3.185) além das equações (3.140) e (3.141) podemos escrever as soluções em termos da função zeta bilocal e verificar explicitamente que estas possuem divergências de aresta, o que leva a uma velocidade de propagação nula nestes pontos. Como consequência, a pressão de radiação correspondente (que é inversamente proporcional à velocidade de propagação no meio) nas paredes $x_1 = 0, a$ é divergente quando integrada nesta região. Logo, de maneira análoga ao que fizemos para o tensor momento energia fisicamente mensurável do vácuo vamos definir um índice de refração fisicamente mensurável como a quantidade que corresponde a pressão de radiação fisicamente mensurável, onde a integral desta última fornece a pressão de radiação total nas paredes. Ignorando os termos de ordem (α^4) e considerando somente a parte finita nas fronteiras, a média sobre as polarizações da variação do índice de refração fornece o resultado

$$\begin{aligned} \Delta n_F(\mathbf{x}) = 11g\{ & -2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\ & + \sum_{(n_1, n_2)'} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} \\ & - 2 \sum_{(n_1, n_2)'} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_2 b + x_2)^2 \} \quad (3.211) \end{aligned}$$

onde $(n_1, n_2)'$ significa $(n_1, n_2) \neq (0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)$.

Podemos verificar que a expressão acima obedece a condição de cone de luz. Substituindo as equações (3.158) e (3.151) na equação (3.207) e usando o valor de Q para a Lagrangeana de Euler-Heisenberg obtemos para a média da velocidade o valor $v =$

$1 - \Delta n_F(\mathbf{x})$, onde a expressão de $\Delta n_F(\mathbf{x})$ é dada pela equação (3.211). Na parede $x_1 = 0$ o índice de refração fisicamente mensurável fica

$$\begin{aligned} \Delta n_{fis}(\mathbf{x}) = 11g \{ & -2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\ & + \sum_{n_1 \neq 0} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} \\ & - 2 \sum_{n_1 \neq 0} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_2 b + x_2)^2 \} \end{aligned} \quad (3.212)$$

Na parede $x_1 = a$ temos

$$\begin{aligned} \Delta n_{fis}(\mathbf{x}) = 11g \{ & -2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\ & + \sum_{n_1 \neq -1} \left[(n_1 a + a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-2} \\ & - 2 \sum_{n_1 \neq -1} \left[(n_1 a + a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 \right]^{-3} (n_2 b + x_2)^2 \} \end{aligned}$$

Ambas as velocidades podem ser maiores ou menores do que c dependendo dos parâmetros globais. Para $a = b$ a velocidade de qualquer raio é sempre menor do que c e portanto a pressão de radiação de todo o feixe é maior do que a pressão produzida por uma onda que se propaga com a velocidade c . Quando por exemplo $b = 2a$ a velocidade de um raio próximo das arestas $x_2 = 0, b$ é maior do que c enquanto que a velocidade de um raio próximo de $x_2 = b/2$ é menor do que c de forma que a pressão de radiação do feixe é menor do que a pressão produzida por uma onda que se propaga com a velocidade c . Note que entre as paredes, não podemos calcular a velocidade de propagação fisicamente mensurável pois não existe nenhuma quantidade macroscópica observável a disposição.

No caso da cavidade retangular, para uma onda se propagando na direção do eixo x_1 , usando as equações (3.164) (3.173) e (3.207) obtemos para a média sobre as polarizações

$$\Delta v(\mathbf{x}) = \frac{11g}{2} \left(-2 \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\
& + \sum_{(n_1, n_2, n_3)''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} + \\
& -2 \sum_{(n_1, n_2, n_3)'''} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a + x_1)^2 + \\
& + \sum_{(n_1, n_2, n_3)'} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\
& -2 \sum_{(n_1, n_2, n_3)'} \left[(n_1 a + x_1)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} (n_1 a + x_1)^2 \quad (3.213)
\end{aligned}$$

Como antes, a parte fisicamente mensurável na parede $x_1 = 0$ é então

$$\begin{aligned}
\Delta n_{fis}(\mathbf{x}) &= \frac{11g}{2} \left(-2 \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \right. \\
& +2 \sum_{n_1 \neq 0} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\
& + \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-2} + \\
& -2 \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b)^2 + (n_3 c + x_3)^2 \right]^{-3} (n_1 a)^2 + \\
& + \sum_{(n_1, n_3) \neq (0,0)} \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-2} + \\
& \left. -2 \sum_{(n_1, n_3) \neq (0,0)} (n_1 a)^2 \left[(n_1 a)^2 + (n_2 b + x_2)^2 + (n_3 c)^2 \right]^{-3} \right) \quad (3.214)
\end{aligned}$$

E uma expressão similar para a parede $x_1 = a$. Para $a = b = c$, $\Delta n_{fis}(\mathbf{x})$ é positivo para todos os pontos da parede e cresce quando se aproxima das quinas [41]. Como consequência a velocidade da luz é menor do que c em toda a parede. Para $b = 3a = 3c$, $\Delta v_{fis}(\mathbf{x})$ é positivo perto das quinas $(x_2, x_3) = (0, 0), (b, 0), (0, c), (b, c)$ e negativo no meio da parede. Isso significa que um raio se propagando perto das quinas tem uma velocidade menor do que c enquanto que um raio se propagando no meio da parede tem uma velocidade maior do que c .

A relação entre o índice de refração do vácuo e a densidade de energia do vácuo já foi enfatizada na literatura [57]. Da mesma forma que o índice de refração de materiais

ordinários está relacionada com a densidade do material, podemos dizer que nosso caso a densidade de energia fisicamente mensurável do vácuo faz o papel da densidade de um material não-homogêneo, que produz um índice de refração também não-homogêneo.

Capítulo 4

Conclusões

Nesta tese, estudamos alguns exemplos que exibiram a não-uniformidade das deformações do vácuo na presença de fronteiras. No capítulo 2, mostramos como é possível obter as flutuações do vácuo dentro de um guia de ondas retangular em um espaço Euclidiano quadri-dimensional. Mostramos também como é possível estender nossos resultados para um espaço Euclidiano d -dimensional.

No capítulo 3, estudamos o tensor momento energia do vácuo do campo escalar minimalmente acoplado e conformalmente acoplado dentro de um guia de ondas retangular e verificamos que a densidade de energia fisicamente mensurável é uma função diferente das coordenadas mas sua integral produz a mesma energia total. Já o fluxo de momento sobre as placas (e na direção normal a estas) é independente do tensor para condições de Dirichlet no guia de ondas mas depende do tensor na cavidade retangular. Calculamos também a densidade de força que age nas placas (que é independente do tensor no guia de ondas e na cavidade retangular). Para isso inserimos o guia de ondas e a cavidade retangular dentro de uma estrutura de forma que o tensor momento energia possa ser calculado em qualquer região. Mostramos que nesta situação o sentido do fluxo de momento não muda, quaisquer que sejam os valores dos parâmetros globais e que o valor

da força é nulo nas arestas e quinas. Estudamos ainda o caso eletromagnético dentro do guia de ondas e dentro de uma cavidade retangular. Mostramos que a densidade de energia fisicamente mensurável é uniforme no primeiro caso e não-uniforme no segundo. Logo, não há uma relação simples entre a densidade de energia do vácuo do campo escalar conformalmente acoplado sob condições de Dirichlet e a densidade de energia do vácuo do campo eletromagnético no guia de ondas. Desta forma, o número de graus de liberdade influencia as deformações do vácuo de uma maneira não-trivial. A relação entre o fluxo de momento dos dois campos também não é trivial mas possui o mesmo comportamento qualitativo pois o caso eletromagnético é sempre atrativo nesta configuração. Neste caso a força assume o valor máximo nas arestas e quinas.

Estudamos ainda o efeito Scharnhorst dentro de um guia de ondas retangular e dentro de uma cavidade retangular. Mostramos que em ambos os casos o índice de refração do vácuo é não-uniforme e a velocidade de propagação da luz pode ser maior ou menor do que c dependendo da posição dentro das cavidades e dos parâmetros globais.

Ao longo desta tese, tratamos o vácuo como um análogo de um meio material e estudamos suas propriedades na presença de arestas e quinas como um modelo simplificado de fronteiras curvas. Além das propriedades mecânicas, estudamos como a propagação da luz é afetada pelo vácuo modificado por essas fronteiras. Uma importante consequência deste ponto de vista é a possibilidade de interpretar a ação deste vácuo modificado como uma modificação efetiva das propriedades da métrica do espaço-tempo [58] [59]. No caso da configuração original do efeito Scharnhorst (a configuração de Casimir) é possível mostrar que a propagação da luz entre placas paralelas pode ser interpretada como se a luz se propagasse em uma métrica efetiva. O cálculo desta métrica pode ser feito por consid-

erações de simetria, usando os mesmos argumentos usados por DeWitt [10] para deduzir a forma geral do tensor momento energia do vácuo do campo eletromagnético entre placas [45]. Uma possível continuação desta tese seria o cálculo da métrica efetiva que descreveria a propagação da luz no interior de uma cavidade retangular perfeitamente condutora. O resultado esperado deste cálculo é uma métrica que depende das coordenadas espaciais no interior da cavidade.

Como foi mostrado na referência [60], a existência de divergências de superfície está ligada às relações de comutação que o campo e seu momento canonicamente conjugado devem satisfazer sobre a fronteira e de maneira mais geral, estas estarão sempre presentes quando um campo quântico interagir com um objeto clássico, por exemplo um potencial externo [61]-[65]. Uma abordagem que evita o aparecimento destas divergências, inicialmente proposto por Kennedy et al [66], consiste em tratar a fronteira como um objeto quântico. Esta idéia foi implementada por Ford e Svaiter [60] para produzir valores finitos na fronteira para observáveis como $\langle \phi^2 \rangle$ ou $\langle T_{00} \rangle$. A mesma idéia pode ser implementada no espaço-tempo Euclidiano (por sugestão do professor Nami F. Svaiter), acoplando os graus de liberdade de uma membrana e do campo eletromagnético. Para escalas macroscópicas uma membrana pode ser considerada assintoticamente plana mas para pequenas distâncias, a membrana flutuará da configuração planar. Se considerarmos um sistema composto de um campo e de uma membrana, é possível evitar o problema de introduzir contra-termos de superfície.

Referências

- [1] H.G.B. Casimir, Proc.K.Ned.Akad.Wet. **51**, 793 (1948).
- [2] S.K. Lamorcaux, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 5 ; U. Mohideen, A. Roy, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4549; A. Roy, U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 4380; A. Roy, C.-Y. Lin, U. Mohideen, Phys. Rev. D 60 (1999) 111101(R); B.W. Harris, F. Chen, U. Mohideen, Phys. Rev. A 62 (2000) 052109.
- [3] P.W. Millonni, "The Quantum Vacuum", Academic Press, Inc. NY (1994).
- [4] J. Schwinger, L.L. DeRaad and K.A. Milton, Ann. Phys. **115**, 1 (1978).
- [5] L.L. DeRaad and K.A. Milton, Ann. Phys. **136**, 229 (1981).
- [6] J. Schwinger, L.L. DeRaad and K.A. Milton, Ann. Phys. **115**, 338 (1978).
- [7] C.M. Bender and K.A. Milton, Phys. Rev. **D50**, 6547 (1994).
- [8] L.H. Brown and G.J. Maclay, Phys. Rev. **184**, 1272 (1969).
- [9] N.D. Birrell, P.C.W. Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [10] B.S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 259 (1975).
- [11] D. Deutsch and P. Candelas, Phys. Rev. **D20**, 3063 (1979).

- [12] J.S. Dowker and G. Kennedy, *J. Phys. A: Math. Gen* **11**, 895 (1978).
- [13] A.A. Actor, *Ann. Phys.* **230**, 303 (1994); *Fortschr. Phys.* **43**, 141 (1995).
- [14] R.B. Rodrigues and N.F. Svaiter, *Physica* **A328** (2003) 466.
- [15] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryshik, in *Table of Integrals and Products*, edited by A. Jeffrey, Academic Press, Inc., New York (1980).
- [16] G. Tolstov, *Fourier Series*, Dover Publications, Inc. New York, (1962).
- [17] S.W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **55**, 133 (1977).
- [18] A. Voros, *Comm. Math. Phys.* **110**, 439 (1987).
- [19] K. Kirsten, “Spectral functions in mathematics and physics”, Chapman-Hall CRC (2002).
- [20] J.S. Dowker and R. Critchley, *Phys. Rev. D* **13**, 3224 (1976).
- [21] K.Kirsten, *J. Math. Phys.* **32**, 3008 (1991).
- [22] C.D. Fosco and N.F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **42**, 5185, (2001).
- [23] S.A. Fulling, “Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime”, Cambridge University Press, Cambridge (1989), pp. 95-104.
- [24] A.A. Actor, *Fortschr. Phys.* **41**, 461 (1993).
- [25] M. Weldon, *Nucl. Phys.* **B270**, 79 (1986).
- [26] E. Elizalde and A. Romco, *Phys. Rev. D* **40**, 436 (1989).

- [27] Higher Transcendental Functions (Bateman Manuscript Project), edited by A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, McGraw-Hill, New York, (1953), Vol. I, p. 27.
- [28] N.F. Svaiter and B.F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **32**, 175 (1991).
- [29] C. De Calan, A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 1357 (1998).
- [30] G.N.J. Ananos, A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, *Nucl. Phys.* **B547**, 221 (1999).
- [31] V.M. Mostepanenko and N.N. Trunov, *Sov. Phys. Usp.* **31**, 965 (1988).
- [32] A.A. Actor and I. Bender, *Fortschr. Phys.* **44**, 281 (1996).
- [33] C.G. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **59**, 42 (1970);
- [34] G. Plunien, B. Muller and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 87 (1986).
- [35] K.A. Milton, "THE CASIMIR EFFECT - Physical Manifestations of Zero-Point Energy", World Scientific (2001).
- [36] A.A. Actor and I. Bender, *J. Phys. A: Math. Gen* **30**, 6737 (1997).
- [37] R.B. Rodrigues, N.F. Svaiter and R.D.M. De Paola. "Vacuum Stress Tensor of a Scalar Field in a Rectangular Waveguide". CBPF pre-print NF-015/01, **hep-th** 0110290.
- [38] E. Borgnis and C.H. Papas, *Electromagnetic Waveguides and Resonators*, in "Encyclopedia of Physics," v. XVI, pp. 285-422 (S. Flüge, Ed.), Springer Verlag, Berlin, (1958).

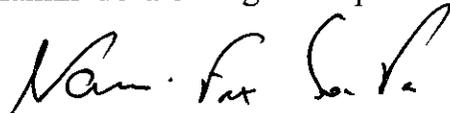
- [39] P. Candelas, *Ann. Phys.* **143**, 241 (1982).
- [40] Seção IV da referência [11].
- [41] R.B. Rodrigues and N.F. Svaiter, aceito para publicação no periódico *Physica A* (2004).
- [42] W. Lukosz, *Z. Phys.* **262**, 327 (1973).
- [43] G.J. Maclay, *Phys.Rev.* **A61**, 052110 (2000).
- [44] K. Scharnhorst, *Phys. Lett.* **B236**, 354 (1990).
- [45] M. Visser, *Ann. Phys.* **298**, 167 (2002).
- [46] S.L. Adler, *Ann. Phys.* **67**, 599 (1971).
- [47] E. Brezin and C. Itzykson, *Phys. Rev.* **D3**, 618 (1971).
- [48] I.T. Drumond and S.J. Hathrell, *Phys. Rev.* **D22**, 343 (1980).
- [49] R. Tarrach, *Phys. Lett.* **B133**, 259 (1983).
- [50] J. I. Latorre , P. Pascual and R. Tarrach, *Nucl. Phys.* **B437**, 60 (1995).
- [51] W. Dittrich and H. Gies, *Phys. Rev.* **D58**, 025004 (1998).
- [52] V.A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello and J.M. Salim, *Phys. Lett.* **B482**, 134 (2000).
- [53] S. Liberati, S. Sonego and M. Visser, *Phys. Rev.* **D63**, 085003 (2001).
- [54] G. Barton, *Phys. Lett.* **B237**, 559 (1990).

- [55] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, “Quantum Electrodynamics”, 2nd Ed. (Butterworth-Heinemann, 1982).
- [56] P.W. Milonni and K. Svozil, Phys. Lett. **B248**, 437 (1990).
- [57] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F.C. Santos and A. Tort, Phys. Lett. **B446**, 170 (1999).
- [58] M. Novello, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 4187, (2002).
- [59] M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim and R. Klippert, Phys. Rev. **D61**, 045001 (2000).
- [60] L.H.Ford and N.F.Svaiter, Phys. Rev. **D58**, 065007-1, (1998).
- [61] N. Graham and K. D. Olum, Phys. Rev. **D67**, 085014, (2003).
- [62] M. Bordag and J. Lindig, J. Phys. A: Math. Gen. **29** 4481, (1996).
- [63] A.A.Actor and I.Bender, Phys. Rev. **D52**, 358 (1995).
- [64] L.C.Albuquerque, Phys. Rev. **D55**, 7752 (1997)
- [65] F.Caruso, R.De Paola and N.F.Svaiter, Int. Journ. Mod. Phys. **A14**, 2077 (1999).
- [66] G.Kennedy, R.Critchley and J.S.Dowker, Ann. Phys. **125**, 346 (1980).

**“VALOR ESPERADO NO VÁCUO DE OBSERVÁVEIS
LOCAIS NA PRESENÇA DE FRONTEIRAS”**

Robson Brito Rodrigues

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Ministério da Ciência e Tecnologia, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



Nami Fux Svaiter – Presidente/Orientador

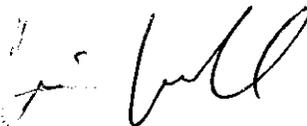


Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho

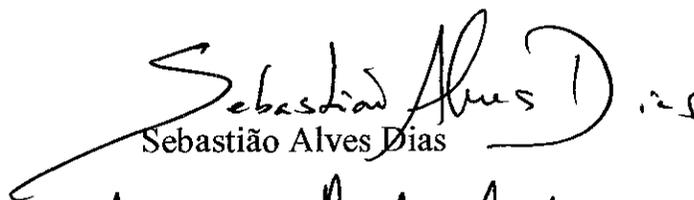


Marcus Venicius Couge Pinto

Marcus Venicius Couge Pinto



Mario Novello



Sebastião Alves Dias

Sebastião Alves Dias



Nelson Pinto Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 04 de junho de 2004