

TESE DE  
DOUTORADO

# Modelagem Estocástica da Vorticidade em Fluxos Turbulentos

FRANCISCO AUGUSTO SILVA NOBRE

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS – CBPF  
RIO DE JANEIRO, MAIO DE 2004

# Dedicatória

À Brisa, minha mulher e grande amor,

Por amenizar a turbulência da vida com seu  
companheirismo e amor.

À meus filhos, Feynman, Werner e Marília,

Pela alegria e paciência inconsciente.

# Agradecimentos

Luca Moriconi, pela orientação;

Helayel, pelo apóio, amizade e formação;

Tião, pela consciência de grupo e postura que passa a todos estudantes;

Humberto, pelo apóio em minhas estadas no Rio e amizade desenvolvida;

Marcony, pela amizade consolidada e pelo suporte quando da minha chegada ao Rio;

Primos Rose e Paracampos, pelo tratamento familiar, “cuidados”, e por tudo mais;

Sr. Gilmar, Alexandre (passarinho), Marcelo, Erwin, D. Valéria, os “Álvaros” e Manuel, pelos bons momentos ;

Julio Adrião, Cícero, Maria Ana, Sarah, por uma amizade recente, mas sincera.

Myriam e Rosa da biblioteca, pelo suporte;

Amigos do Departamento de Física da URCA, Eduardo e Francisco;

Meus pais e irmãos, pela torcida;

CAPES pela bolsa de Doutorado;

Cidade do Rio de Janeiro;

# Resumo

Estudar o fenômeno da turbulência não é uma tarefa trivial, o que tem levado este problema a ser atacado sob diversos aspectos, experimentais, computacionais e teóricos, os quais têm por fundamento as equações de Navier-Stokes e a Teoria de Kolmogorov para turbulência. Utilizando-se de procedimentos teóricos, via teoria de campos, e métodos computacionais, seguimos na linha de analisar a turbulência como sendo gerada pela dinâmica de vórtices, tendo em mente o processo de cascata de energia. Estudamos a evolução de um tubo de vorticidade submetido a forças estocásticas de larga escala, através de uma formulação alternativa para turbulência, a qual tem por base o modelo de plaquetas e o método funcional de Martin-Siggia-Rose (MSR). Encontramos que para diferentes definições de forças estocásticas, a ação  $S$  apresenta diferentes dependências com relação à  $\eta$  (raio da seção transversal de um tubo de vorticidade definido em torno do comprimento de dissipação de Kolmogorov) e a mesma dependência quadrática com o campo de velocidade. Em seguida, por meio de algoritmos computacionais, quantificamos a fractalidade de uma linha de vórtice fechada com dinâmica definida pelo modelo comentado anteriormente, o qual leva este vórtice para uma dimensão fractal próxima a 2.5, sendo este valor também encontrado por Chorin, através de modelos dinâmicos para a evolução de filamentos de vórtices. Estudamos, adicionalmente, a Função Distribuição de Probabilidade (PDF) da vorticidade em magnetohidrodinâmica, a fim de se evidenciar o fenômeno da intermitência neste contexto. Temos como ferramentas básicas a formulação de MSR e o método de instantons, permitindo-nos obter uma regra de soma para a estatística da vorticidade do campo  $Z^\pm_\alpha$  (combinações lineares dos campos de velocidade e magnético) e um decaimento algébrico para a cauda da PDF da vorticidade do campo magnético, dado por  $\rho(\omega) \sim (\omega_b)^{-2}$ , e analogamente para a vorticidade do campo de velocidade.

# Abstract

Turbulence is a difficult problem in physics that requires different tools such as experimental, computational and theoretical approaches. Investigations concerning turbulence are based in general, as a starting point, on the Navier-Stokes equations and the Kolmogorov phenomenological theory. We study in this thesis the way turbulence is produced via vortex dynamical mechanisms, having in mind the energy cascade picture. Our mathematical tools are provided by both field theory and numerical methods.

Through an alternative formulation of the turbulence problem, we study the evolution of a vortex tube subject to stochastic forces defined at large scales. Our formulation relies on two essential grounds: the plaquette model and the functional method of Martin-Siggia-Rose (MSR). We find that for different stochastic forces, the action  $S$  will depend in a different way upon  $\eta$  (radius of the vortex tube cross-section, defined around the Kolmogorov dissipation length), but will have in general a quadratic dependence upon the velocity field. Furthermore, using appropriate algorithms we also have explored the fractal structure of a closed vortex line whose dynamics is governed by a model derived from our formulation. This leads to vortices with fractal dimensions given approximately by 2.5, which agrees with the result found by Chorin, who studied dynamical models for the evolution of vortex filaments. Finally, we turn our attention to the Probability Density Function (PDF) of vorticity in magnetohydrodynamics, in order to investigate the intermittency phenomenon in this context. We rely here on the MSR formulation and the so-called “instanton method”. We obtain a summation rule for the vorticity statistics of the field  $Z^\pm_\alpha$  (linear combinations of the velocity and magnetic fields). We are able to find an algebraic decay for the PDF tail of the magnetic field vorticity, given by  $\rho(\omega) \sim (\omega_b)^{-2}$ . A similar result follows for the usual vorticity field.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Turbulência e Teoria de Campos</b>	<b>8</b>
2.1	Número de Reynolds . . . . .	9
2.2	Teoria de Kolmogorov . . . . .	13
2.2.1	Cascata de Richardson . . . . .	14
2.2.2	Lei dos 2/3 . . . . .	15
2.2.3	Lei de dissipação finita de energia . . . . .	15
2.3	O Fenômeno da Intermittência . . . . .	18
2.4	Formalismo de Martin-Siggia-Rose . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Dinâmica de Tubos de Vorticidade</b>	<b>25</b>
3.1	Perturbações Infravermelhas . . . . .	27
3.2	Modelagem Estocástica . . . . .	34
3.2.1	Simulações Numéricas . . . . .	37
3.2.2	Resultados Numéricos . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Magnetohidrodinâmica Estocástica</b>	<b>50</b>
4.1	Equações Básicas da Magnetohidrodinâmica e Formalismo de Instantons . . . . .	51
4.2	Limite Viscoso . . . . .	55
4.3	Números de Reynolds Grandes . . . . .	58
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>66</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas do século XIX foram realizados por O. Reynolds e Lord Rayleigh [1, 2], os primeiros estudos sistemáticos sobre o fenômeno da turbulência. Porém, sabemos que os primeiros registros de estudos de escoamentos turbulentos reportam-se a mais de 500 anos, à Leonardo da Vinci. Suas observações, curiosamente, sugerem a idéia de cascata de energia, antecipando qualitativamente os trabalhos de Richardson e Kolmogorov [3, 4], e as contribuições mais recentes de Mandelbrot e Frish [5, 6].

O fenômeno da Turbulência não se restringe apenas ao escoamentos de fluidos. Podemos verificar comportamentos turbulentos em vários sistemas dinâmicos, como na evolução da Bolsa de Valores ou no crescimento de uma cidade, por exemplo. A turbulência está associada a processos altamente difusivos e dissipativos, sendo um fenômeno rotacional e tridimensional, mesmo que teoricamente, com o formalismo adequado, possamos estudá-la em outras dimensões espaciais [7]. Os fluxos turbulentos possuem peculiaridades importantes, como sua instabilidade e imprevisibilidade, visto que uma pequena perturbação pode rapidamente levar à fortes distorções no desenho do fluido. Esta tese restringe-se diretamente ao estudo da turbulência em fluidos, porém devemos ter em mente a possibilidade de aplicações a outros fenômenos similares.

A princípio, podemos estudar o fenômeno da turbulência tendo como base soluções das equações de Navier-Stokes. Esta abordagem, porém, não é fácil, devido a natureza



essencialmente não-linear destas equações. No intuito de superar esta dificuldade, e em busca de um melhor entendimento dos fenômenos da turbulência, nos últimos anos tem sido desenvolvidas estratégias alternativas de análise, como métodos de teoria de campos [8], e diversos algoritmos de simulação numérica [9].

A teoria fenomenológica desenvolvida por Kolmogorov publicada em 1941 (K41) [4], propõe-se a superar algumas dificuldades associadas as equações de Navier-Stokes, seguindo o caminho alternativo de entender o mecanismo físico subjacente à turbulência. Anterior à K41, temos a idéia do processo de cascata de energia de Richardson [3], na qual ocorre uma fragmentação de estruturas coerentes (folhas de vorticidade, vórtices, “eddies”) levando a uma transmissão de energia para todo o movimento do fluido, criando “eddies” em escalas cada vez menores até uma certa escala  $\eta$ , onde a fragmentação é interrompida, e ocorre a dissipação de energia. Kolmogorov desenvolveu e formulou numa linguagem mais precisa as idéias de cascata de energia de Richardson [3], introduzindo hipóteses adicionais sobre a natureza caótica de um fluido em regime completamente turbulento.

A teoria K41, considera que as flutuações de velocidade em um fluido sejam homogêneas, isotrópicas e quase estacionárias, de um ponto de vista estatístico. Assim, em escalas suficientemente pequenas, a turbulência é caracterizada por um fluxo médio de energia  $\bar{\epsilon}$ , e pela dissipação na escala  $\eta$ . Considera também, que a estatística de pequena escala em turbulência, obedece a uma lei de escala, sendo esta teoria baseada no conceito de auto-similaridade no “inertial range” ( $\eta \ll r \ll L$ , sendo  $\eta$  o comprimento de escala de Kolmogorov, no qual a dissipação de energia predomina, e  $L$  é a escala integral, onde acontece a injeção de energia no fluido). No processo de fragmentação de vórtices (cascata de energia), assume-se que a taxa de energia transferida  $\epsilon$ , seja uma quantidade constante. Contudo é provável que, mesmo que a taxa de transferência de energia seja realmente independente da escala, fortes flutuações introduzam um comprimento de escala no problema, modificando o comportamento de escala. Surge aqui a necessidade de se pensar no fenômeno da intermitência.

O fato da teoria K41 não prever a intermitência como um fenômeno presente em um fluido, levou a várias críticas, levantadas principalmente por Landau [10], sendo esta considerada uma teoria incompleta. O próprio Kolmogorov e Obukhov desenvolveram uma teoria modificando à K41. Estas modificações levaram a K62 [11, 12], onde podemos dizer, que basicamente é modificada a lei que define a dependência da função de estrutura do campo de velocidade, sugerindo a introdução de uma análise fractal.

Tem-se discutido que a intermitência seja devida a singularidades das equações de Navier-Stokes no limite de pequena viscosidade. Foi proposto por Mandelbrot [5], que estas singularidades estariam concentradas no conjunto  $U \subset \mathbb{R}^3$  com dimensão não-inteira de Hausdorff [13], levando a idéia que o fenômeno da intermitência possa ser entendido através de uma fractalidade no processo de cascata de energia. Os vórtices são gerados em cascatas, ocupando progressivamente escalas menores sem que preencham todo o volume do fluido, levando de fato ao aparecimento de uma estrutura multifractal. O modelo multifractal é fisicamente ligado ao fenômeno de intermitência [15], isto é, a existência de fortes flutuações de campos de velocidade.

A intermitência em um fluido, também pode ser avaliada pela função distribuição de probabilidade (PDF) de quantidades como diferença de velocidades, circulação ou vorticidade, as quais fornecem informações sobre o comportamento estatístico do fluido turbulento. Tal procedimento tem-se mostrado bastante eficiente para avaliar os efeitos da intermitência num fluido em regime completamente turbulento. Como um exemplo recente, a análise teórica da estatística da circulação feita por Migdal [8], sugere-se que a cauda da PDF da circulação, avaliada para um contorno fechado contido no “inertial range”, possua um comportamento gaussiano. Porém, através de simulações numéricas, a PDF exibe um decaimento de exponencial estendida [9]. Na referência [17], foi reproduzido teoricamente os resultados observados em [9], com a introdução do formalismo de instantons [18].

Nos últimos anos, a vorticidade  $\vec{\omega}$  tem se firmado como o grande objeto de estudo na análise de fenômenos turbulentos em fluidos. Vale recordar a relação entre vorticidade e

circulação, que, pelo teorema de Stokes, podemos escrever da seguinte maneira:

$$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_s \vec{\omega} \cdot d\vec{s}, \quad (1.1)$$

onde

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (1.2)$$

Assim, podemos escrever o módulo da vorticidade em termos da circulação como

$$\omega = \frac{1}{\pi R^2} \Gamma, \quad (1.3)$$

no limite em que  $R \rightarrow 0$ .

As chamadas linhas de vórtice, representam as linhas de campo formadas pela campo de vorticidade,  $\vec{\omega}$ , a qual é semelhante ao campo magnético, com divergência zero e tendendo sempre a “loops” fechados, como pode obtido a partir da definição 1.2. Porém, é comum na literatura tratarem-se modelos de filamentos de vórtices. O estudo da dinâmica de vórtices tem sido um dos alvos principais para o entendimento da turbulência [54]. Neste sentido, é importante mencionar os trabalhos de Chorin, com seus modelos cinemáticos [16, 19, 20, 21], e também contribuições de modelos de filamentos de vórtice de Saffman e outros [54, 22].

No Capítulo 2 desta tese, revisamos a fenomenologia de fluidos turbulentos. Iniciamos com as idéias básicas sobre o número de Reynolds, o qual quantifica o estado turbulento de um fluido. Discutimos alguns pontos da teoria de Kolmogorov, observando que esta constitui-se como um ponto de partida geral para descrever o regime turbulento de um fluido, e introduzimos também algumas idéias sobre o fenômeno da intermitência. Estudamos, em seguida, a formulação de teoria de campos de Martin-Siggia-Rose (método funcional) para o cálculo das funções de correlação de velocidade, definindo assim um formalismo devotado à análise estatística da turbulência.

O Capítulo 3, segue no sentido de desenvolver, via método de Martin-Siggia-Rose e considerando uma rede cúbica de vórtices, um modelo físico de primeiros princípios para estudar a turbulência [23]. Em seguida, simulamos numericamente a evolução uma

linha de vórtice fechado, com dinâmica governada pelo modelo estocástico desenvolvido [24]. Estudamos analiticamente o comportamento da ação, considerando um tubo de vorticidade com seção transversal de raio na escala de Kolmogorov, para várias formas de função de correlação força-força. Na seção onde expomos nossas simulações numéricas, estamos particularmente interessados em estudar a fractalidade a que nossa linha de vórtice chegará, tendo como dinâmica o modelo de plaquetas desenvolvido numa seção anterior.

O formalismo funcional de Martin-Siggia-Rose (MSR) [26], combinado com o estudo das equações de campos pelo método de instantons, leva-nos no Capítulo 4, a analisarmos o problema da turbulência em magnetohidrodinâmica [25]. Estudamos a estatística da vorticidade dos campos de velocidade e magnético em regimes laminar e turbulento, por meio do formalismo de MSR e do método de ponto-de-sela. No estado completamente turbulento, obtivemos um decaimento suave para da cauda da Função Distribuição de Probabilidade (PDF) da vorticidade, diferenciando-se de uma gaussiana, evidenciando assim o caráter intermitente do fluido.

No Capítulo 5, faremos as considerações finais, conclusões e perspectivas de investigações futuras a partir do trabalho desenvolvido nesta tese

## Capítulo 2

# Turbulência e Teoria de Campos

No decorrer deste capítulo descreveremos a fenomenologia básicas de fluidos turbulentos [6, 10, 4] e ntroduziremos algumas idéias sobre o número de Reynolds, com o seu papel de quantificar o estado turbulento de um fluido, e a teoria de Kolmogorov com sua cascata de energia, constituindo-se como uma primeira teoria mais completa para descrever o regime turbulento de um fluido. Faremos também uma breve discussão sobre o fenômeno da intermitência [6, 31], fenômeno este que não foi previsto pela teoria de Kolmogorov (K41). Na última seção, abordaremos de forma objetiva a formulação de teoria de campos de Martin-Siggia-Rose para o cálculo das funções de correlação de velocidade [6, 26, 32], levando a análise estatística da turbulência.

Consideremos as equações de Navier Stokes, escritas como se segue:

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha = -\partial_\alpha P + f_\alpha + \nu \partial^2 v_\alpha, \quad (2.1)$$

$$\partial_\alpha v_\alpha = 0. \quad (2.2)$$

Acima,  $v_\alpha$  é o campo de velocidade,  $P$  é a pressão,  $f_\alpha$  uma força externa e  $\nu$  a viscosidade. O papel da pressão é assegurar o vínculo de incompressibilidade, dado por (2.2). Aplicando o operador divergente na equação de Navier-Stokes e usando o vínculo

de incompressibilidade do fluido, teremos que

$$\partial_t v_\alpha + \Pi_{\alpha\gamma} v_\beta \partial_\beta v_\gamma = \Pi_{\alpha\gamma} f_\gamma + \nu \partial^2 v_\alpha, \quad (2.3)$$

onde  $\Pi_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma / \partial^2$ , é o projetor sobre modos transversos. O termo não-linear de (2.3) é associado à convecção, representando interações entre vórtices em diferentes comprimentos de escala, e o termo de viscosidade é responsável pela dissipação de energia, através da difusão. Nesta linha, podemos também escrever a equação de Helmholtz

$$\partial_t \omega_\alpha + v_\beta \partial_\beta \omega_\alpha - \omega_\beta \partial_\beta v_\alpha = \nu \partial^2 \omega_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \partial_\beta f_\lambda, \quad (2.4)$$

onde definimos

$$\omega_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \partial_\beta v_\lambda, \quad (2.5)$$

a vorticidade associada ao campo de velocidade.

Partimos do pressuposto que a equação de Navier Stokes possa descrever o fluido completamente, desde seu regime laminar, até um estado completamente turbulento, o que tem se mostrado bastante satisfatório. Mesmo alguns modelos físicos desenvolvidos, como por exemplo os que são implementados via métodos funcionais, partem deste pressuposto. A teoria física de Kolmogorov para turbulência parte de outros pressupostos, como a cascata de energia, dissipação de energia numa escala definida e análise dimensional, representando esta, uma poderosa ferramenta para o estudo da turbulência.

## 2.1 Número de Reynolds

O número de Reynolds é uma quantidade adimensional útil para analisarmos o grau de turbulência em que se encontra um fluido, o qual mede a relação entre o grau de convecção e difusão do mesmo. Analisando a equação de Navier-Stokes, e assumindo que não existem forças externas atuando sobre o sistema, teremos então uma competição direta entre os processos de convecção e difusão. Podemos definir duas escalas de tempo, correspondendo a diferentes regimes físicos. Temos um tempo característico da convecção

e um outro tempo característico devido a difusão. Se o termo de convecção em (2.3) poder ser descartado, então a difusão é o processo dominante, e a dinâmica do fluido será completamente descrita pela equação de calor

$$\partial_t v_\alpha + \partial_\alpha P = \nu \partial^2 v_\alpha. \quad (2.6)$$

O número de Reynolds é comumente escrito como

$$Re = \frac{LV}{\nu}. \quad (2.7)$$

Pela definição acima temos que quando  $Re \rightarrow 0$ , a difusão será muito mais importante que a convecção, implicando num fluxo laminar. Quando  $Re$  cresce, diferentes porções do fluido são misturadas por convecção, até chegarmos a turbulência. Considerando o escoamento de um fluido por um canal, por exemplo,  $L$  e  $V$  serão o tamanho de um objeto imerso no fluido e a velocidade “rms” do fluido, respectivamente. Se pensarmos na turbulência causada por forças externas aleatórias,  $L$  pode ser considerada como o comprimento de correlação força-força.

No sentido de entendermos melhor o exposto acima, faremos transformações nas equações de Navier-Stokes que nos levem a definição da equação (2.7). Utilizando as transformações abaixo

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, \\ t' &= \frac{Vt}{L}, \\ v' &= \frac{v}{V}, \\ P' &= \frac{P}{\rho V^2}, \end{aligned} \quad (2.8a)$$

onde  $L$  é o comprimento de escala macroscópico, equivalente ao comprimento de injeção de energia no fluido,  $V$  é a velocidade global do fluido e  $\rho$  é densidade do fluido, e desconsiderando a existência de forças estocásticas, podemos escrever

$$\partial'_t v'_\alpha + v'_\beta \partial'_\beta v'_\alpha + \partial'_\alpha P = \frac{1}{Re} \partial'^2 v'_\alpha, \quad (2.9)$$

onde  $R_e = \frac{VL}{\nu}$ , será o número de Reynolds, como escrito em (2.7).

Podemos escrever ainda

$$R_e = \frac{V}{L/(L^2/\nu)}, \quad (2.10)$$

o que nos leva a

$$R_e = \frac{t_d}{t_c}, \quad (2.11)$$

onde

$$t_d = \frac{L^2}{\nu} \quad (2.12)$$

tem a ordem do tempo de difusão, e

$$t_c = \frac{L}{V} \quad (2.13)$$

a ordem do tempo de convecção. Numa análise simples do resultado acima, observamos que números de Reynolds pequenos estão associados a  $t_d \ll t_c$ , prevalecendo um fluxo laminar, e números de Reynolds grandes, seguem de  $t_c \ll t_d$ , o que implica em um fluido em estado turbulento.

A definição acima para o número de Reynolds, utiliza-se de quantidades macroscópicas como velocidade do fluido, por exemplo, o que torna esta grandeza não muito bem fixada. Para obtenção de resultados experimentais e numéricos num determinado fluxo turbulento, convencionalmente, usa-se o número de Reynolds definido na micro-escala Reynolds-Taylor [6],  $R_\lambda$ . Este é definido como se segue.

$$R_\lambda = \frac{\lambda\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\nu}, \quad (2.14)$$

onde  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  é a média quadrática das flutuações da velocidade (visto que são flutuações de velocidade que provocam um regime turbulento para um fluido), e  $\lambda$  é a escala de comprimento de Taylor definida como

$$\frac{1}{\lambda^2} \equiv \frac{\langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle}. \quad (2.15)$$



Podemos obter relações entre o número de Reynolds e o número de Taylor-Reynolds [33], considerando inicialmente que a taxa de transferência de energia  $\epsilon$  pode ser escrita [10, 4] como

$$\epsilon = \frac{c_\epsilon \langle v^3 \rangle}{L}, \quad (2.16)$$

onde  $c_\epsilon$  é uma constante adimensional e  $L$  é a escala integral. Na micro-escala  $\lambda$  de Taylor, para um fluido isotrópico [10], teremos

$$\epsilon = 15\nu \langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle. \quad (2.17)$$

Assim, usando as equações (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17), escrevendo

$$R_e = \frac{L\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\nu}$$

e considerando que a constante adimensional  $c_\epsilon(R_e)$  tenha uma dependência com o número de Reynolds, podemos escrever

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{15R_e}{c_\epsilon(R_e)}}, \quad (2.18)$$

onde, pela referência [33], temos

$$c_\epsilon(R_e) \propto \left( \frac{1}{R_e} + \sqrt{1 + \frac{1}{R_e^2}} \right). \quad (2.19)$$

Com estas definições podemos constatar, que para número de Reynolds elevados,  $c_\epsilon(R_e)$  assume um valor constante. Isto implica em

$$R_{e_\lambda} \propto (R_e)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

E para número de Reynolds pequenos, temos

$$c_\epsilon(R_e) \propto \frac{1}{R_e}, \quad (2.21)$$

levando ao resultado abaixo.

$$R_{e_\lambda} \propto R_e. \quad (2.22)$$

Isto sugere, que para número de Reynolds intermediários possamos ter

$$R_{e_\lambda} \propto (R_e)^\alpha \quad (2.23)$$

Onde  $0.5 < \alpha < 1.0$ .

Nos trabalho de Lohse e Frisch [33, 6], encontramos uma análise aprofundada para os números de Reynolds e Taylor-Reynolds.

## 2.2 Teoria de Kolmogorov

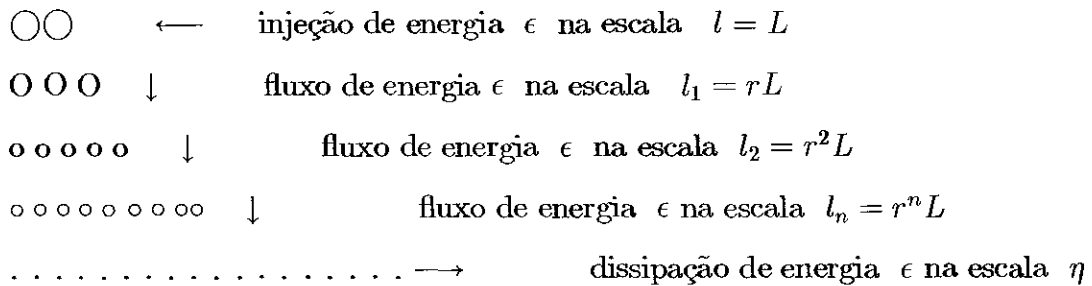
Em 1941, Kolmogorov [4] propôs a teoria de cascata para a turbulência, estabelecendo por um simples argumento dimensional a queda de energia no espaço de Fourier, para a região de número de onda grandes. O mecanismo de cascata de energia previsto por Lord Richardson [3], vários anos antes do trabalho de Kolmogorov, pode ser entendido através de uma análise qualitativa da equação de Navier-Stokes. O termo de convecção na equação de Navier-Stokes representa um acoplamento entre diferentes modos do campo de velocidade no espaço de Fourier. Por outro lado, o termo de viscosidade implica que a dissipação de energia é mais intensa para números de onda grandes. A idéia de Kolmogorov, combinando esses dois efeitos, é que num processo completamente turbulento, vórtices quebram-se em pedaços menores até chegarem a um tamanho mínimo onde ocorre a dissipação. Conjectura-se que exista uma cascata de energia de grandes para pequenas escalas, caracterizada por uma taxa de transferência de energia  $\epsilon$ , a qual é constante e independente da viscosidade. Esta hipótese é razoável, somente se a taxa de transferência de energia não flutua fortemente na escala em que o processo é observado.

Na teoria de Kolmogorov pode-se distinguir essencialmente três processos diferentes: A energia fornecida ao sistema, a qual ocorre numa escala dada por  $0 \leq k < 1/L$ , onde  $L$  é a escala de comprimento de correlação das forças aleatórias externas. A energia gerada em grandes escalas, transmitida para pequenos número de onda através da região  $1/L < k < 1/\eta$ . Finalmente, para escalas dadas por  $k > 1/\eta$ , a energia é completamente dissipada, através da aniquilação de pequenos vórtices.

Richardson [3] foi o primeiro a avançar no entendimento do mecanismo físico que atua na turbulência para números de Reynolds grandes. No seu trabalho, um fluido completamente turbulento, consiste numa certa hierarquia de vórtices. Em uma certa escala surgem instabilidades, provocando a fragmentação de vórtice e o surgimento de vórtices em escalas inferiores.

### 2.2.1 Cascata de Richardson

Um fluxo turbulento pode ser entendido então, como um conjunto hierarquico de vórtices de vários comprimentos de escala  $l$ . A energia é introduzida na escala integral  $L$ , e interações não lineares causam a quebra destes vórtices, levando-os para escalas cada vez menores, com a dissipação de energia tornando-se significativa para um comprimento de escala  $l$ , comparado a escala de dissipação  $\eta$ , como no diagrama abaixo



Aqui  $r$  é o fator de escala, sendo  $0 < r < 1$  e  $l_n = r^n L$  e  $\eta = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . O valor  $r = \frac{1}{2}$  é comumente escolhido, dentro de um quadro fenomenológico.

A consideração do processo de cascata carrega as duas suposições de K41. A invariância de escala no “inertial range” e a localidade das interações, onde o fluxo de energia é proporcional ao comprimento de escala.

Seguiremos agora com as duas leis empíricas básicas de Kolmogorov para um fluido completamente turbulento.

## 2.2.2 Lei dos 2/3

Podemos também definir algumas quantidades que caracterizam as propriedades estatísticas de um fluido turbulento, como a função de correlação 2-pontos para o campo de velocidade

$$G(|\vec{x} - \vec{y}|) = \langle v(\vec{x}, t)v(\vec{y}, t) \rangle \quad (2.24)$$

e as funções de estrutura

$$S_n = \langle |v(\vec{x}) - v(\vec{y})|^n \rangle \quad (2.25)$$

Mesmo que tenhamos indicado que as funções de correlação (funções de estrutura), precisem de dois pontos espaciais distintos, muitas vezes essas medidas são feitas somente em um ponto espacial, e as separações temporais são convertidas em separações espaciais, sendo este procedimento conhecido, como Hipótese de Taylor.

A lei dos 2/3 diz basicamente que num fluido turbulento, e para pontos separados pela distância  $l$  dentro do “inertial range”, a média do quadrado do incremento da velocidade  $\langle (\delta v(l))^2 \rangle$  é proporcional a  $l^{\frac{2}{3}}$ . Assim, podemos escrever a expressão

$$\langle (\delta(v(l)))^2 \rangle \sim l^{\frac{2}{3}} \quad (2.26)$$

para a função de estrutura de 2-pontos no “inertial range”, definido por

$$\eta \ll l \ll L, \quad (2.27)$$

sendo  $\eta$  é a escala de Kolmogorov, onde a dissipação devido a viscosidade torna-se significativa, e  $L$  é a escala integral, ou a escala na qual o sistema recebe energia.

Dados experimentais no domínio do tempo (Hipótese de Taylor), mostram que realmente a função de estrutura longitudinal de segunda ordem obedece a lei de potência (2.26), para turbulência homogênea e isotrópica.

## 2.2.3 Lei de dissipação finita de energia

Começaremos por considerar que a dissipação de energia por unidade de massa, em um fluido turbulento, é uma quantidade finita. Por uma análise dimensional simples, chegare-

mos a um resultado, o qual está de acordo (ou pelo menos bem próximo) com resultados de simulações numéricas e dados experimentais, no “inertial range”. A lei de potência para o espectro energia  $E(k)$ , no espaço dos momentos obedece a proporcionalidade  $E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$ . Observa-se também que para grandes  $k$ , no “range” de dissipação, o decaimento torna-se  $E(k) \propto k^{-n}$ , onde  $n > \frac{5}{3}$  (os efeitos de intermitência começam a interferir no processo) [15].

Não existe teoria para deduzir a Lei dos  $\frac{2}{3}$  para a função de estrutura  $S_2(l)$  e a Lei de Dissipação Finita da Energia. No entanto é possível formular hipóteses que sejam compatíveis com estas leis, e as quais levam a predições adicionais. O mecanismo responsável pela geração de um fluxo turbulento não são minimamente consistentes com as simetrias das Equações de Navier Stokes. Se considerarmos o caso simples da turbulência gerada por um corpo rígido, como um cilindro, a invariância sob translação espacial é trivialmente quebrada. Experimentos sugerem algumas formas de homogeneidade e isotropia num fluido turbulento para números de Reynolds grandes. Por exemplo, fazendo um fluido turbulento passar por uma grade, poderíamos recupera esta simetria.

Podemos formular uma primeira hipótese, na qual, se  $R_e \rightarrow \infty$ , todas as possíveis simetrias da Equação de Navier Stokes são restauradas (no sentido estatístico) para pequenas escalas  $l$ , e longe das bordas, sendo  $l \ll L$ , onde  $L$  a escala integral. A hipótese da restauração das simetrias da equação de Navier-Stokes para altos números de Reynolds, propõe então, que as propriedades estatísticas para o incremento de velocidade sejam invariantes sob rotações simultâneas de  $l$  e  $\delta v$  (isotropia), como também para paridade reversa. Devido a invariância de escala, precisamos introduzir uma segunda hipótese, a qual assevera que um fluxo turbulento é auto-similar para pequenas escalas espaciais, e tem um único expoente  $h$ , tal que

$$\delta v(x, \lambda l) = \lambda^h \delta v(x, l) \quad (2.28)$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , e para todo  $x$ ,  $l$  e  $\lambda l$ , muito pequenos comparados com a escala integral  $L$ . Como veremos,  $h$  será igual a  $\frac{1}{3}$ . Este resultado virá do postulado da Lei de Dissipação finita de Energia, o qual será expresso em mais uma hipótese. A terceira

hipótese diz que um fluido turbulento têm uma taxa média de transmissão de energia por unidade de massa  $\epsilon$ , finita, mantidas a escala integral  $L$  e as flutuações de velocidades  $v_0$  fixas, e  $\nu \rightarrow 0$ .

Na verdade estas hipóteses são um tanto diferentes das usadas por Kolmogorov em 1941 (K41). A segunda suposição de K41 foi que limite  $Re \rightarrow \infty$ , todas as propriedades estatísticas de pequena escala são únicas e universalmente determinadas pela escala  $l$  e a taxa média de transmissão de energia  $\epsilon$ . Esta suposição de K41 leva a Lei dos  $\frac{2}{3}$  como veremos a seguir.

Considere a função de estrutura de segunda ordem,

$$S_2(l) = \langle (v(x) - v(y))^2 \rangle, \quad (2.29)$$

a qual tem dimensão  $[L]^2[T]^{-2}$ . A taxa média de energia transmitida por unidade de massa  $\epsilon$  tem dimensão  $[L]^2[T]^{-3}$ . Pela segunda hipótese de K41, por análise dimensional e considerando

$$\frac{1}{2} \langle (v(x) - v(y))^2 \rangle = \int dk E(k) \exp(ik(x - y)), \quad (2.30)$$

onde  $E(k)$  é o “espectro de energia” num fluido turbulento, e

$$\epsilon = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k dk E(k), \quad (2.31)$$

é a taxa média de energia transferida, temos uma forma mais precisa da Lei dos 2/3 escrita como

$$S_2(l) = C_2 \epsilon^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}}, \quad (2.32)$$

onde  $C_2$  é uma constante universal adimensional. Dados experimentais mostram que a K41 é bem observada com  $C_2 = 2.0 \pm 0.4$  [34]. Podemos ainda escrever

$$S_2(l) \sim l^{2h}, \quad (2.33)$$

onde só é consistente para  $h = \frac{1}{3}$ , e podemos estender isso para

$$S_p(l) = C_p \epsilon^{\frac{p}{3}} l^{\frac{p}{3}}, \quad (2.34)$$

no caso da função de estrutura  $S_p(l)$ . De (2.29) e (2.30), podemos escrever que

$$S_2(l) \propto \int dk E(k). \quad (2.35)$$

De acordo com a lei dos 2/3 ( $S_2(l) = C_2 \epsilon^{2/3} l^{2/3}$ ), utilizando (2.35) e realizando a transformada de Fourier da função de estrutura de segunda ordem, obtemos  $k^{-5/3}$  para o espectro de energia  $E(k)$ , e por análise dimensional, podemos chegar a

$$E(\epsilon, k) = C_{k0} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.36)$$

onde  $k$  é o número de onda médio, e  $C_{k0}$  é uma constante universal adimensional. A equação (2.36) é a famosa lei de potência para o espectro de energia num processo totalmente turbulento.

A suposição sobre o comportamento suave, da taxa de dissipação de energia no processo de fragmentação dos vórtices (base da K41), não é confirmada por dados experimentais [15], evidenciando efeitos de intermitência no fluido. Dessa forma há a necessidade de se desenvolver uma teoria que inclua tais efeitos. Levando a necessidade de desenvolver uma teoria que inclua tais efeitos no comportamento das funções de estrutura.

## 2.3 O Fenômeno da Intermitência

Uma característica muito importante da turbulência é a sua natureza intermitente. Este fenômeno pode ser entendido como a existência de fortes flutuações no fluido, em períodos de tempo muito curtos, separados por longos períodos de escoamentos laminares (porém instáveis). Sob o aspecto teórico, a intermitência se traduz em uma PDF de cauda não-gaussiana [18]. Uma forma não muito rigorosa de quantificarmos a intermitência, porém ilustrativa, será apresentar a seguir.

Suponha uma função aleatória  $v(t)$  estacionária,

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}^3} du \exp(i\omega t) \tilde{v}(\omega) \quad (2.37)$$

a qual podemos considerá-la auto-similar e traduzindo as fortes flutuações de velocidade no fluido. Considerando que estas flutuações de velocidade estejam associadas à turbulência

a partir de uma certa frequência de oscilação, poderemos filtrar este sinal, como escrito abaixo

$$v_{\Omega}(t) = \int_{|\omega| > \Omega} du \exp(i\omega t) \tilde{v}(\omega), \quad (2.38)$$

onde  $\Omega$  é a frequência a partir da qual o fluido entra em regime turbulento. Podemos então considerar a função  $v_{\Omega}$  aleatória e intermitente. Definimos agora a função de “flatness”  $F(v)$ , a qual dará a medida da intermitência de uma função,

$$F(v) = \frac{\langle (v(t))^4 \rangle}{\langle (v(t)^2) \rangle^2}. \quad (2.39)$$

Se a função de “flatness” cresce ao passarmos para a função  $v_{\Omega}(t)$ , dizemos que esta função gera turbulência para pequenos intervalos de tempo.

Podemos considerar agora o sinal  $v_{\tau}(t)$ , o qual é diferente zero para intervalos de tempo escolhidos aleatoriamente. Consideremos que a soma desses intervalos de tempo é  $\tau$ , o qual é uma fração do tempo total que se observa o sinal. Assumiremos que nos intervalos de tempo em que a função  $v_{\tau}(t)$  é diferente de zero todos os momentos provoquem turbulência, assim

$$\begin{aligned} \langle v_{\tau}^2 \rangle &= \tau \langle v^2 \rangle, \\ \langle v_{\tau}^4 \rangle &= \tau \langle v^4 \rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

E calculamos então a função de “flatness”

$$F_{\tau}(v) = \frac{\langle [v_{\tau}(t)]^4 \rangle}{\langle [v_{\tau}(t)^2] \rangle^2} = \frac{\tau \langle [v(t)]^4 \rangle}{\tau^2 \langle [v(t)^2] \rangle^2} = \frac{1}{\tau} F(v). \quad (2.41)$$

Devido a mudança do valor da função de “flatness”, podemos dizer que  $v_{\tau}(t)$  é uma função intermitente. O resultado acima nos diz também que o inverso da função de “flatness”, nos dá a medida do tempo em que a função  $v_{\tau}(t)$  é diferente de zero.

Com nossa definição nenhuma gaussiana e nenhum sinal auto-similar são intermitentes, porque seu “flatness”  $F(\Omega)$  é independente de  $\Omega$ . Logo, se assumimos que  $v(t)$  tem um



incremento auto-similar com expoentes de escala  $h$ , então para algum  $\lambda > 0$ , e assumindo a lei

$$v_{\lambda\Omega} = \lambda^{-h} v_{\Omega}, \quad (2.42)$$

quando  $\Omega \rightarrow \lambda\Omega$ , teremos

$$\frac{\langle [v_{\lambda\Omega}(t)]^4 \rangle}{\langle [v_{\lambda\Omega}(t)]^2 \rangle^2} = \frac{\lambda^{-4h} \langle [v_{\Omega}(t)]^4 \rangle}{\lambda^{-4h} \langle [v_{\Omega}(t)]^2 \rangle^2} = \frac{\langle [v_{\Omega}(t)]^4 \rangle}{\langle [v_{\Omega}(t)]^2 \rangle^2}. \quad (2.43)$$

Assim, como já admitido, o sinal não é intermitente.

Mas ainda fica a indagação se a turbulência é auto-similar ou intermitente, pois construímos um sinal intermitente, partindo de um sinal auto-similar. Resultados experimentais dos sinais de velocidade em um jato de um fluido, de  $R_{\lambda} \sim 700$  [36], revelam uma natureza auto-similar, porém este mesmo sinal quando filtrado para frequências suficientemente altas, revela-se então um sinal intermitente. Isto acontece para frequências comparadas ou menores que aquelas da escala de dissipação de Kolmogorov.

Existe um outro questionamento, mas este é direcionado a K41, no sentido que esta teoria não leva em consideração os efeitos de intermitência. A questão que parece ficar evidente é que a estatística para pequenas escalas carrega uma dependência não somente sobre  $\bar{\epsilon}$  (taxa média de dissipação de energia), mas também sob as flutuações de  $\epsilon(x)$ . Experimentos para grandes números de Reynolds tem levado a lei de escala como escrita abaixo

$$\langle (\delta(v(l)))^p \rangle >_{\alpha} l^{g(p)}. \quad (2.44)$$

Pórem com  $g(p) \neq p/2$ , contrariando as predições de K41. Mesmo sendo pequena a diferença dos resultados encontrados entre a teoria K41 e os resultados experimentais, torna-se necessário uma outra forma de abordar regimes completamente turbulentos, no intuito de incluir os efeitos de intermitência. Esta é, basicamente, a crítica de Landau à teoria K41.

Estas diferenças entre a teoria K41 e os resultados experimentais, levaram o próprio Kolmogorov, como também Obukhov [11, 12], a modificarem a K41. No intuito de estudar

os efeitos intermitentes, consideraram as flutuações de dissipação de energia, modificando basicamente a lei de estrutura para

$$\langle (\delta(v(l)))^p \rangle \propto l^{\frac{p}{3}} \langle \tilde{\epsilon}^{\frac{p}{3}} \rangle, \quad (2.45)$$

o que pode sugerir uma abordagem fractal ou multifractal.

Um caminho simples para modificar a K41, consiste em considerar que a turbulência acontece numa estrutura fractal, de dimensão,  $D_f < 3$ . Nesta dimensão então, teremos a taxa de dissipação de energia  $\epsilon(x)$  uniformemente distribuída. É como se os efeitos da intermitência na distribuição de  $\epsilon(x)$ , fossem concentradas em uma região de dimensão fractal. Neste contexto, a função de estrutura será escrita como na equação (2.44), com

$$g(p) = \left( \frac{D_f - 2}{3} \right) p + (3 - D_f). \quad (2.46)$$

No limite de  $D_f = 3$  recaímos no resultado de K41. Neste contexto,  $\epsilon(x)$  não está distribuído por todo o fluido como em K41.

O modelo multifractal consiste no comportamento não-linear de  $g(p)$ , quando escrevemos

$$\langle (\delta(v(l)))^p \rangle \propto \int d\rho(h) l^{hp} l^{3-d(h)} \propto l^{g(p)}, \quad (2.47)$$

onde para um dado valor de  $p$ ,  $g(p)$  depende de um valor particular de  $h$ , o qual determina a dimensão fractal  $d(h)$ . Pelo método do ponto-de-sela

$$g(p) = \min_h \{ hp + 3 - d(h) \}. \quad (2.48)$$

É importante observar que o caso da homogeneidade fractal, corresponde ao limite do caso multifractal, quando  $d(h) = D_f$ , e  $h = (D_f - 2)/3$ .

## 2.4 Formalismo de Martin-Siggia-Rose

O formalismo funcional de Martin-Siggia-Rose (MSR) [26] pode ser aplicado em uma grande classe de problemas. Este formalismo possibilita que a partir de uma equação

diferencial possa ser escrito um funcional suficientemente generalizado, o qual contém informações sobre a estatística do sistema considerado. Possibilita escrever, a partir da equação de Navier Stokes, a chamada ação de Martin-Siggia-Rose, e, a partir disto, pode-se fazer todo um tratamento estatístico para observáveis como a vorticidade, por exemplo.

Partindo agora para uma apresentação geral do método, considere o campo de velocidade  $v_\alpha$ , regido pela equação estocástica de Navier Stokes

$$\partial_t v_\alpha + \Pi_{\alpha\gamma} v_\beta \partial_\beta v_\gamma = \Pi_{\alpha\gamma} f_\gamma + \nu \partial^2 v_\alpha, \quad (2.49)$$

onde  $f_\gamma(x, t)$  é a força estocástica que atua no fluido. Podemos considerar a função de correlação força-força escrita da forma abaixo

$$\langle f_\alpha(x, t) f_\beta(x', t') \rangle = h \delta_{\alpha, \beta} \delta(t - t') F(|x - x'|), \quad (2.50)$$

sendo  $F(|x - x'|)$ , uma função que cai rapidamente para  $|x - x'| > L$ . Considerando  $\bar{v}_\alpha$  uma solução da equação de Navier Stokes para uma realização de  $f_\gamma(x, t)$ , podemos escrever a delta funcional

$$\delta[v_\alpha - \bar{v}_\alpha] = \prod_{x, t} \delta(v_\alpha - \bar{v}_\alpha). \quad (2.51)$$

Escrevendo agora o funcional gerador  $Z[j]$  para todas as realizações de  $v$ , e impondo a delta funcional acima, teremos

$$Z[j] = \Omega \int Dv \delta[v_\alpha - \bar{v}_\alpha] \exp(i \int d^3 \vec{x} dt j_\alpha(\vec{x}, t) v_\alpha(\vec{x}, t)). \quad (2.52)$$

Considerando todas as realizações da força estocástica para as soluções das equações de Navier-Stokes, reescrevemos o funcional gerador  $Z[j]$  como

$$\begin{aligned} Z[j] &= \Omega \int Df P[f] \int Dv J(v) \delta[\partial_t v_\alpha + \\ &\quad \Pi_{\alpha\beta} v_\beta \partial_\beta v_\gamma - \nu \partial^2 v_\alpha - \Pi_{\alpha\gamma} f_\gamma] \times \\ &\quad \exp(i \int d^3 \vec{x} dt j_\alpha(\vec{x}, t) v_\alpha(\vec{x}, t)). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Acima,  $J(v)$  é o Jacobiano da transformação levada a cabo na delta funcional. Reescrevendo a delta funcional na sua forma exponencial, teremos

$$\begin{aligned}
Z[j] &= \Omega \int Df P[f] \int D\hat{v} Dv J(v) \\
&\exp\left(\int d^3x dt \hat{v}(\partial_t v_\alpha + \Pi_{\alpha\beta} v_\beta \partial_\beta v_\gamma - \right. \\
&\left. \nu \partial^2 v_\alpha - \Pi_{\alpha\gamma} f_\gamma) + i \int d^3\vec{x} dt j_\alpha(\vec{x}, t) v_\alpha(\vec{x}, t)\right),
\end{aligned} \tag{2.54}$$

sendo  $\hat{v}$  um campo auxiliar.

Podemos resumir o formalismo de teoria quântica de campos desenvolvido por Martin, Siggia e Rose [26, 32], como uma redefinição do funcional gerador, através da introdução de campos auxiliares,  $\hat{v}$ . Assim, depois de algumas manipulações algébricas, o funcional de MSR pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
Z_{msr}[j] &= \Omega \int D\hat{v} Dv \exp(-S_{msr}[v, \hat{v}] + \\
&i \int d^3\vec{x} dt j_\alpha(\vec{x}, t) v_\alpha(\vec{x}, t)).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Acima, a ação de MSR é definida como

$$\begin{aligned}
S_{msr}[v, \vec{v}] &= i \int d^3\vec{x} dt \hat{v}_\alpha (\partial_\alpha v_\alpha + \Pi_{\alpha\gamma} v_\beta \partial_\beta v_\gamma - \nu \partial^2 v_\alpha) \\
&+ h \int d^3\vec{x}_1 d^3\vec{x}_2 dt \hat{v}_\alpha(\vec{x}_1, t) \hat{v}_\beta(\vec{x}_2, t) \\
&\Pi_{\alpha\beta} F(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Por simplicidade, como pode ser constatado acima, consideramos o Jacobiano da transformação como unitário. Tal procedimento é usual na literatura, e isto não é totalmente arbitrário, pois se considerarmos o tempo como uma variável discreta, encontraremos, de fato, um jacobiano unitário [32]. No APÊNDICE A, mostraremos que para tempos contínuos, seria necessário introduzir campos auxiliares de Grassman [32] para a ação de Martin, Siggia e Rose.

Um dos problemas de interesse atual em turbulência, é avaliar a função distribuição de probabilidade (PDF) de observáveis dependentes da velocidade ( $O[v_\alpha]$ ), como a diferença

de velocidades em turbulência unidimensional e a circulação, ou vorticidade, em 2 e 3 dimensões. Definindo a PDF como

$$P(O[v_\alpha]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \langle \exp(i\lambda O(v_\alpha)) \rangle, \quad (2.57)$$

Deveremos calcular o funcional gerador  $Z$ , para a ação de Martin, Siggia e Rose modificada, como abaixo.

$$S_{msr\lambda}[v, \hat{v}] = S[v, \hat{v}] + i\lambda O(v). \quad (2.58)$$

O formalismo de Martin, Siggia e Rose é fortemente recomendado quando temos por objetivo, realizar um tratamento estatístico a partir de equações fundamentais de campos.

A teoria de Kolmogorov, as técnicas de teoria de campos utilizadas para a criação de modelos físicos que possam descrever a turbulência, e os algoritmos numérico desenvolvidos tanto no sentido de resolver numericamente as equações de Navier-Stokes como para simular a evolução de quantidades físicas regidas por modelos cinemáticos ou dinâmicos, podem ser encarados como uma forma de tentar superar as dificuldades quando se busca soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes. Um ganho significativo para o entendimento da turbulência seria a solução analítica da equação de Navier Stokes, sendo este talvez o maior problema em aberto da turbulência, o qual passa por avanços matemático para resolução de equações diferenciais. Neste sentido, o Clay Mathematics Institute, coloca na lista do “Millenium Prize Problem” a questão da análise da equação de Navier-Stokes, colocando como problema fundamental analisar a suavidade e se existem soluções físicas razoáveis para a equação de Navier-Stokes. Um outro ponto que deve ser superado, é um melhor entendimento sobre o papel dos fenômenos de intermitência na geração de fluidos turbulentos, sendo este, um ponto que o próprio Kolmogorov abordou em 1961.

## Capítulo 3

# Dinâmica de Tubos de Vorticidade

O estudo de regimes completamente turbulentos em um fluido tem sido um grande desafio, tanto sob o aspecto experimental, quanto teórico e computacional.

A dinâmica de vórtices tem desempenhado um importante papel para o entendimento da turbulência para número de Reynolds grandes. Sob o ponto de vista teórico, podemos seguir a idéia de obtermos uma solução geral das equações de Navier-Stokes, a qual acreditamos descrever um fluido em todo o espectro de valores de número de Reynolds. Tal procedimento não é muito trivial, apesar dos avanços obtidos por Bachelor [15]. Aqui não adotaremos este procedimento.

Um intenso estudo de dinâmica de vórtices tem sido realizado nas últimas décadas [54], levando a um maior entendimento da turbulência, principalmente no que diz respeito a construção de modelos físicos para estrutura de um fluido turbulento, o que tem levado a resultados que podem ser comparados com dados experimentais e numéricos. Abordaremos aqui, o problema da turbulência no contexto da dinâmica de vórtices, e para isso, desenvolveremos um modelo físico para o comportamento do fluido na faixa inercial. Simulamos a evolução de um vórtices fechado, e então faremos um paralelo com resultados de simulação numérica encontrados na literatura [16, 19, 20, 21]. Particularmente, estamos interessados em desenvolver um modelo físico que descrevam a turbulência, e na análise da natureza fractal por trás da turbulência.

Na primeira seção deste capítulo, com a ajuda do método funcional de Martin-Siggia-Rose, desenvolvemos um modelo dinâmico para turbulência, e em seguida consideramos que este possa descrever o comportamento de um tubo de vórtice com seção transversal de raio no “range” de dissipação. Estudamos o comportamento da ação para diferentes funções de correlação força-força, quando verificamos que estas funções nos levam a diferentes dependências da ação com relação ao parâmetro  $\eta$ , porém com a mesma dependência com o campo  $\Psi_\alpha \equiv \dot{x}_\alpha - v_\alpha$ . Acreditamos que, analisando o espectro de energia vindos dos modelos considerados, possamos descrever resultados numéricos já encontrados na literatura, como os de Farge et.al.[41], os quais, através do método de decomposição de “wavelets”, constataram transferência de energia do fluxo coerente para o fluxo incoerente proporcional a  $k^2$ .

Como mais uma opção ao entendimento de regimes completamente turbulentos, os métodos de simulação numérica surgem como uma ferramenta adicional, a qual mostra-se bastante útil no estudo de fluidos turbulentos com números de Reynolds grandes. As técnicas de simulação numérica, têm sido bastante empregadas para avaliar a teoria de Kolmogorov [9, 41, 39], revelando a natureza intermitente da turbulência. A idéia de que a evolução de um fluido completamente turbulento seja dominada por estruturas de filamentos de vórtices, tem sido bastante explorada por modelos cinemáticos [19, 20, 45, 46], sendo isto evidenciado em simulações diretas das equações de Navier-Stokes [40]. Inspirados pela existência de fenômenos intermitentes em um fluido, e o pressuposto que o transporte de energia num fluido turbulento esteja concentrado num conjunto com dimensão não inteira de Hausdorff [13], muitos são os trabalhos que se propõem avaliar a natureza fractal da turbulência [19, 21, 14], tanto no sentido de estudar a dissipação de energia, como a evolução de um vórtice num fluido com número de Reynolds grandes. Chorin [19], estudou através de simulações numéricas, a dinâmica de uma linha de vórtice confinado a uma caixa periódica num fluido turbulento tri-dimensional, obtendo que este evolui para uma dimensão fractal próxima a 2.5. O mesmo valor foi obtido também em outro trabalho de Chorin [20], para o modelo de filamentos de vórtices.

Nossa proposta é, usando o modelo estocástico de larga escala com “cutoff” infravermelho, o qual será apresentado na primeira seção deste capítulo, implementar a simulação numérica de *uma linha* de vórtice fechada, e, considerando a aproximação auto-induzida [42], estudarmos a fractalidade desta linha de vórtice fechada, para diferentes intensidades da força estocástica atuando no fluido.

Observamos, para o caso puro da simulação auto-induzida, que o vórtice evolui para uma dimensão fractal de 1.69. Valor este muito próximo da dimensão fractal de um polímero (self avoiding walk), sendo semelhante também, ao obtido na referência [20] para o modelo de filamentos de vórtices, onde foi obtido a dimensão fractal de 1.66. Já quando o vórtice é submetido a forças estocásticas de larga escala, encontramos uma dimensão fractal tendendo para 2.5, mesmo para pequenos valores de  $D$  (parâmetro que dimensiona o valor da força estocástica), resultado este, semelhante também ao de Chorin [19, 20]. Pode ser avaliado visualmente, através das figuras apresentadas ao longo deste capítulo, o quanto o vórtice adquire uma forma de “novelo” para  $D > 0$ , enquanto que para  $D = 0$ , por maior que seja o tempo de simulação, a forma adquirida pelo vórtice é semelhante a de um polímero.

### 3.1 Perturbações Infravermelhas

Aplicamos o formalismo de teoria de campos para estudar a dinâmica de tubos de vórtices fechados, submetidos a forças estocásticas de larga escala, e escreveremos nossas equações em termos da vorticidade  $\omega$ . Construiremos nosso modelo considerando *uma rede* de vórtices, e depois analisaremos o caso particular de um vórtice fechado com seção transversal de raio da ordem de  $\eta$ , muito menor que o comprimento  $L$  do vórtice considerado.

Supomos que as equações de Navier-Stokes descrevam um fluido completamente turbulento, e que este seja incompressível.

$$\begin{aligned}\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha &= v \partial^2 v_\alpha - \partial_\alpha P + f_\alpha, \\ \partial_\alpha v_\alpha &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$



Onde  $f_\alpha = f_\alpha(\vec{x}, t)$ , é a força externa aleatória com distribuição gaussiana, definida para grandes comprimentos de escala  $L$ , com função de correlação de 2-pontos:

$$\langle f_\alpha(\vec{x}, t) f_\beta(\vec{x}', t') \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') F(|\vec{x} - \vec{x}'|). \quad (3.2)$$

Aplicando o operador rotacional ( $\epsilon_{\alpha\beta\lambda} \partial_\beta$ ) na equação acima, obtemos a equação de Helmholtz

$$\partial_t \omega_\alpha + v_\beta \partial_\beta \omega_\alpha - \omega_\beta \partial_\beta v_\alpha = v \partial^2 \omega_\alpha + f_\alpha^*, \quad (3.3)$$

onde

$$f_\alpha^* = \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \partial_\beta f_\lambda, \quad (3.4)$$

a qual pode ser entendida como uma força estocástica dual, e definimos

$$\omega_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \partial_\beta v_\lambda, \quad (3.5)$$

como a vorticidade do campo de velocidade.

Iniciando o procedimento funcional de Martin-Siggia-Rose, temos o funcional gerador

$$Z = N \int D\hat{\omega} D\omega \exp(iS). \quad (3.6)$$

Onde  $N$  é uma constante de normalização com a ação de Martin-Siggia-Rose

$$\begin{aligned} S = & \int dt d^3 \vec{x} \hat{\omega} (\partial_t \omega_\alpha + v_\beta \partial_\beta \omega_\alpha - \omega_\beta \partial_\beta v_\alpha - v \partial^2 \omega_\alpha) \\ & + i \int dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \hat{\omega}_\alpha(\vec{x}, t) D_{\alpha\beta} \left( |\vec{x} - \vec{x}'| \right) \hat{\omega}_\beta(\vec{x}', t'), \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde a função de correlação força-força, vem escrita como abaixo,

$$\langle f_\alpha^*(\vec{x}, t) f_\alpha^*(\vec{x}', t') \rangle = \epsilon_{\alpha\rho\sigma} \epsilon_{\beta\gamma\eta} \partial_\rho \partial'_\gamma \langle f_\sigma(\vec{x}, t) f_\eta(\vec{x}', t') \rangle \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & = \Pi_{\alpha\beta} F \left( |\vec{x} - \vec{x}'| \right) \delta(t - t') \\ & = D_{\alpha\beta} \left( |\vec{x} - \vec{x}'| \right) \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\Pi_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \partial_\beta - \delta_{\alpha\beta} \partial^2). \quad (3.10)$$

No espaço de Fourier, temos

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{\partial^2}). \quad (3.11)$$

Neste momento vale um parêntese. Existem várias possibilidades de escolhas de  $F$ , e uma questão interessante a discutir, é se diferentes escolhas levam a diferentes resultados físicos. Um exemplo usual de função de correlação força-força no espaço de Fourier é

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{8\pi m D} (k^2 + m^2)^{-2}. \quad (3.12)$$

Uma outra forma para a função de correlação é

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{8\pi m D} (k^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.13)$$

sugerida por teorias baseadas no grupo de renormalização [43, 44]. Podemos considerar também

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{8\pi m d} (k^2 + m^2)^{-1}. \quad (3.14)$$

Neste seção abordaremos estas três formas para a força estocástica, e avaliaremos a que resultados físicos ela nos levarão.

Para nosso modelo, consideraremos uma rede cúbica, formada por plaquetas [6] com parâmetro de rede  $\epsilon$ , muito menor que a escala de kolmogorov . Escreveremos que cada plaqueta possa ser representada por  $P = (\vec{x}_p, \hat{x}_\alpha)$ , e que tenha como borda uma linha de vórtice, a qual carrega o fluxo de vorticidade  $\phi_\alpha(\vec{x}_p, t)$ . Temos que  $\vec{x}_p$  é o vetor posição comum a três plaquetas e  $\hat{x}_\alpha$  um vetor unitário normal, o qual define a orientação das plaquetas (figura 3.1).

Consideraremos a plaqueta  $P = (\vec{x}_p, \hat{x}_\alpha)$  com borda  $\partial P$  parametrizada pelo vetor  $x_\alpha(s)$ , onde  $s$  é o parâmetro de comprimento sobre uma borda,  $0 \leq s \leq 4\epsilon$ , onde  $\epsilon$  é o parâmetro de rede. O campo de vorticidade associado a estas plaquetas será escrito como

$$\omega_\alpha = \phi_\sigma(\vec{x}_p, t) \delta(n_1) \delta(n_2) \frac{d}{ds} x_\alpha(s) \quad (3.15)$$

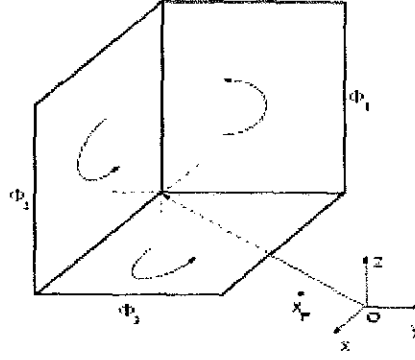


Figura 3.1:

onde  $n_1$  e  $n_2$  dá a direção normal para a linha de vórtice. Substituindo a expressão acima na ação de Martin-Siggia-Rose, poderamos chegar a forma abaixo para a ação, onde

$$\begin{aligned}
 S = & \int dt \sum_P \oint_{\partial P} dx_\alpha [\dot{\phi}(\vec{x}_p, t) \hat{\omega}_\alpha + \phi_\sigma(\vec{x}_p, t) F_{\alpha\beta} v_\beta \\
 & + v \phi_\sigma(\vec{x}_p, t) \partial_\beta F_{\alpha\beta}] \\
 & + \frac{i}{2} \int dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' F_{\alpha\beta}(\vec{x}_p, t) F \left( \left| \vec{x} - \vec{x}' \right| \right) F_{\alpha\beta}(\vec{x}'_p, t).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Podemos observar que temos aqui uma semelhança com a teoria de gauge, existindo invariância sob a transformação  $\hat{\omega}_\alpha \rightarrow \hat{\omega}_\alpha + \partial_\alpha \Lambda$ , com o campo dual  $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$  definido como

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}(\vec{x}, t), \tag{3.17}$$

levando-nos

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\phi}_\gamma(\vec{x}, t), \\
 \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= \hat{\phi}_\alpha \hat{\phi}_\alpha, \\
 dx_\alpha F_{\alpha\beta} v_\beta &= \hat{\phi}_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx_\alpha v_\gamma.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Em termos de  $\hat{\phi}_\alpha$ , e considerando o vínculo  $\partial_\alpha \hat{\phi}_\alpha = 0$ , a ação de MSR pode ser escrita

como

$$S = \int dt d^3 \vec{x} \Pi_{\alpha\beta} L_{\beta}(\vec{x}, t) \widehat{\phi}_{\alpha}(\vec{x}, t) \quad (3.19)$$

$$+ i \int dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \widehat{\phi}_{\alpha}(\vec{x}, t) F\left(\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|\right) \widehat{\phi}_{\alpha}(\vec{x}', t),$$

com

$$L_{\alpha}(\vec{x}, t) = - \sum_P \oint_{\partial P} dx_{\gamma}' \epsilon_{\alpha\beta\sigma} [\dot{\phi}_{\sigma}(\vec{x}'_P, t) \partial^{-2} \partial_{\beta} \delta^3(x - x') \quad (3.20)$$

$$+ \phi_{\sigma}(\vec{x}'_P, t) v_{\beta}(\vec{x}', t) \delta^3(\vec{x}' - \vec{x})$$

$$- v_{\phi_{\sigma}}(\vec{x}'_P, t) \partial_{\beta} \delta^3(\vec{x}' - \vec{x})].$$

Se integrarmos (3.19) em  $\widehat{\phi}_{\alpha}$ , encontramos

$$S = \frac{i}{4} \int dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' L_{\alpha}(\vec{x}, t) \Pi_{\alpha\beta} F^{-1}\left(\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|\right) L_{\beta}(\vec{x}', t), \quad (3.21)$$

a qual define a dinâmica de um tubo de vortex fechado, se considerarmos que a rede de vortex configure-se somente num vórtice, visto que as linhas internas das plaquetas se anulam.

Estamos trabalhando aqui com linhas de vórtice, o que nos leva a um problema. O campo de velocidade diverge sobre a linha de vórtice, [54]. Para contornarmos isso, consideramos que a linha de vórtice tenha uma seção transversal diferente de zero, com raio da ordem de  $\eta$ , na escala de Kolmogorov. Isto significa que impomos o “cutoff” ultravioleta  $k < \pi/\eta = k_o$  na teoria. Isto é equivalente a dizer que passamos a considerar um tubo de vórtice, o qual consideramos orientado na direção da coordenada  $x_3$  (eixo  $z$ ), com seção circular de raio igual a  $\eta$ . Tendo  $\vec{x} = (n_1, n_1, s)$ , escreveremos agora  $\vec{x} = (x, y, z)$  ou  $\vec{x} = (u_1, x_2, x_3)$ .

Iremos então avaliar como se comporta a ação para uma linha de vórtice, quando consideramos este com uma seção transversal diferente de zero. Impomos a função de parametrização  $g(x_1, x_2)$  nas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  (eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente) para o cálculo da ação (3.21), a qual será escrita como

$$g(x_1, x_2) = C e^{-(x_1^2 + x_2^2)/\eta^2}, \quad (3.22)$$

onde  $C = 1/(\pi\eta^2)$ , para  $\int dx_1 dx_2 C e^{-(x_1^2+x_2^2)/\eta^2} = 1$ . Inicialmente iremos trabalhar com a função de correlação escrita da forma  $(\partial^2 + m^2)^{-2}$  e o operador (3.10). Calculamos a ação  $S$  como escrita em (3.21), para

$$L_\alpha(\vec{x}, t) = - \int_\Gamma dx_3'' \epsilon_{\alpha\sigma 3} [\dot{\phi}(\vec{x}'', t) \partial''^{-2} \partial_\sigma'' + \phi(\vec{x}'', t) \Psi_\sigma(\vec{x}'', t) - v \phi(\vec{x}'', t) \partial_\sigma''] g(x_1'', x_2'') \delta^3(\vec{x}'' - \vec{x}) \quad (3.23)$$

e

$$L'_\beta(\vec{x}', t) = - \int_\Gamma dx_3''' \epsilon_{\beta\xi 3} [\dot{\phi}(\vec{x}''', t) \partial'''^{-2} \partial_\xi''' + \phi(\vec{x}''', t) \Psi_\xi(\vec{x}''', t) - v \phi(\vec{x}''', t) \partial_\xi'''] g(x_1''', x_2''') \delta^3(\vec{x}''' - \vec{x}'), \quad (3.24)$$

onde inserimos  $\Psi_\alpha \equiv v_\alpha \dot{x}_\alpha$ . Isto implica que consideramos flutuações no campo de velocidade ( $\dot{x}_\alpha$ ), esboçadas pelo campo  $\Psi_\alpha$ , o qual é responsável pelo transporte do tubo de vorticidade. Veremos que a maior contribuição para a ação (3.21) virão dos termos que trazem o produto  $\Psi_\sigma \Psi_\xi$ .

Os termos que incluem viscosidade devem ser considerados na análise de resultados, pois devemos considerar que, pela teoria de Kolmogorov, na escala de dissipação, temos que  $\eta \sim D^{-\frac{1}{4}} v^{\frac{3}{4}}$  [6, 4]. Neste contexto de tubo de vorticidade e da inclusão da função de parametrização  $g(x_1, x_2)$ , calculamos todos os termos gerados para ação (3.21), utilizando-se das expressões (3.23) e (3.24). Podemos destacar os termos que mais contribuíram para ação, sendo

$$S = \frac{i}{4} \int dt d^3 \vec{x} [I_1 + I_2], \quad (3.25)$$

com

$$I_1 = \int_\Gamma dx_3'' dx_3''' \epsilon_{\alpha\sigma 3} \epsilon_{\beta\xi 3} [\phi(\vec{x}'', t) \Psi_\sigma(\vec{x}'', t) g(x_1'', x_2'') \delta^3(\vec{x}'' - \vec{x})] (\partial_\alpha \partial_\beta - \delta_{\alpha\beta} \partial^2) \frac{1}{8\pi m D} (\partial^2 + m^2)^2 [\phi(\vec{x}''', t) \Psi_\xi(\vec{x}''', t) g(x_1''', x_2''') \delta^3(\vec{x}''' - \vec{x})] \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_{\Gamma} dx_3'' dx_3''' \epsilon_{\alpha\sigma 3} \epsilon_{\beta\xi 3} \\
& [\nu\phi(\vec{x}'', t) \partial_{\sigma}'' g(x_1'', x_2'') \delta^3(\vec{x}'' - \vec{x})] \\
& (\partial_{\alpha} \partial_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} \partial^2) \frac{1}{8\pi m D} (\partial^2 + m^2)^2 \\
& [\nu\phi(\vec{x}''', t) \partial_{\xi}''' g(x_1''', x_2''') \delta^3(\vec{x}''' - \vec{x})].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Assim, encontraremos

$$I_1 = \frac{\phi^2}{8\pi^3 m D \eta^6} \left[ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) \right] \int dx_3 \Psi^2(x_3, t), \tag{3.28}$$

e

$$I_2 = \frac{\phi^2 \nu^2}{4\pi^3 m D \eta^8} \left[ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + 3\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{6}\right) \right] \int_0^L dx_3. \tag{3.29}$$

Concluimos que a maior contribuição para a ação dará,

$$S \sim \frac{\phi^2}{m D \eta^6} \int dt dx_3^2 \Psi^2(x_3, t). \tag{3.30}$$

Vale destacar, que o termo de viscosidade quadrática  $I_2$ , é o que mais se aproxima do termo  $I_1$  com relação a dependência com o parâmetro  $\eta$ .

Para o caso de considerarmos a função de correlação força-força na forma  $(\partial^2 + m^2)^{-1}$ , obtemos que a maior contribuição vem de  $I_3$ , o qual tem semelhanças com o termo  $I_1$ , escrito como

$$I_3 = \frac{\phi^2}{16\pi^3 m D \eta^4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \int dx_3 \Psi^2(x_3, t). \tag{3.31}$$

Assim

$$S \sim \frac{\phi^2}{m D \eta^4} \int dt dx_3 \Psi^2(x_3, t) \tag{3.32}$$

Quando consideramos a função de correlação força-força no espaço de Fourier proporcional a  $(k^2 + m^2)^{-3/2}$ , efetuamos as cálculos diretamente no espaço dos momentos, visto a natureza do operador. No espaço de Fourier, podemos escrever a ação na forma

$$S = \frac{i}{16\pi^3} \int dt d^3 \vec{k} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{-1}(k) \tilde{L}_{\alpha}(-\vec{k}, t) \tilde{L}_{\beta}(\vec{k}, t), \tag{3.33}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha(\vec{k}, t) = & i \oint dx'_\gamma \epsilon_{\alpha\lambda\sigma} \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}') [\phi_\sigma(\vec{x}_p, t) \frac{k_\lambda}{k^2} \\ & + i \phi_\sigma(\vec{x}_p, t) \Psi_\lambda(\vec{x}', t) - v \phi_\sigma(\vec{x}_p, t) k_\lambda]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Temos considerado  $\delta^3(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 \vec{k} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}$ . Podemos encontrar

$$S \sim \frac{\phi^2}{mD\eta^5} \int dt dx_3 \Psi^2(x_3, t) \quad (3.35)$$

Observamos que os três modelos considerados trazem dependência diferente para a ação com relação ao parâmetro  $\eta$ .

Sabemos que a lei de potência para o espectro energia  $E(k)$  no “inertial range”, obedece a proporcionalidade  $E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$ , e que no “range” de dissipação, o decaimento torna-se  $E(k) \propto k^{-n}$ , onde  $n > \frac{5}{3}$  devido aos efeitos de intermitência. No trabalho de Farge et al. [41], através da análise de simulações numéricas via “wavelets”, encontrou-se uma pequena quantidade de fluxo coerente retendo quase a totalidade da energia do sistema, enquanto que uma grande quantidade de fluxo incoerente continha uma pequena quantidade de energia. Um fato interessante observado neste trabalho de Farge, é que na escala de dissipação, antes que haja a dissipação de energia, acontece uma transferência de energia do fluxo coerente para o fluxo incoerente proporcional a  $k^2$ . Motivados pelos resultados de Farge, acreditamos que a análise do espectro de energia  $E$  dos modelos estudados aqui, possa nos indicar qual a função de correlação força-força que nos leva a explicar estes resultados numéricos. Devemos partir do fato que  $\Psi \sim v$  e o espectro de energia  $E \sim \langle v^2 \rangle$ .

## 3.2 Modelagem Estocástica

Neste ponto, usaremos os resultados que chegamos na seção 3.1 para uma linha de vortex, e faremos certas considerações com o objetivo de tornar possível a simulação para dinâmica de um vórtice fechado, submetido a perturbações infravermelhas.

Utilizando as equações (3.20) e (3.21) para o caso de uma única plaqueta, desconsiderando o termo de viscosidade ( $\nu \rightarrow 0$ ,  $R_e \rightarrow \infty$ ) e considerando  $\dot{\Phi} = 0$ , podemos agora escrever, considerando a função de correlação força-força dada pela equação (3.14)

$$S = \frac{\Phi^2}{\tau d} \int_0^L ds [(\partial_s \Psi_i)^2 + m^2 \Psi_i^2], \quad (3.36)$$

com

$$\Psi_i \equiv v_i - \dot{x}_i. \quad (3.37)$$

Sendo  $v$  a velocidade de arraste do fluido, e  $\dot{x}_\sigma$  as flutuações da velocidade de cada ponto do vórtice, assim  $\Psi$  é responsável pelo transporte da linha de vórtice. Assim,  $i = 1, 2, 3$ ,  $s$  é a coordenada sobre o vórtice, e  $\tau$  o tempo estocástico. Consideramos a condição de contorno para o campo  $\Psi_i$  em  $L$  (o comprimento total do vórtice),

$$\Psi_i(s) = \Psi_i(s + L). \quad (3.38)$$

Podemos também escrever o campo  $\Psi_i(g)$  como a transformada,

$$\Psi_i(s) = \sum_k e^{iks} \tilde{\Psi}_i(k). \quad (3.39)$$

Impondo também que

$$\Psi_i(s) = \Psi_i^*(s), \quad (3.40)$$

teremos

$$\tilde{\Psi}_i(k) = \tilde{\Psi}_i^*(-k), \quad (3.41)$$

com

$$k = \frac{2\pi}{L}n, \quad (3.42)$$

sendo  $n \in \mathbb{Z}$ , e a princípio  $-\infty < n < \infty$ .



Discretizando a ação obtida, e escrevendo o resultado apenas para uma componente  $\tilde{\Psi}_i$  teremos

$$S = \frac{\Phi^2 L}{\tau d} \int_0^L ds \sum_n \sum_{n'} [(k^2 + m^2) e^{i(k+k')s}] \tilde{\Psi}(k) \tilde{\Psi}(k'), \quad (3.43)$$

obtendo a ação

$$S = \frac{\Phi^2 L}{\tau d} \sum_n \left| \tilde{\Psi}(k) \right|^2 (k^2 + m^2). \quad (3.44)$$

A densidade de probabilidade para  $\tilde{\Psi}(k)$  pode ser escrita como

$$P(\tilde{\Psi}) = C \exp \left[ -\frac{\Phi^2 L}{\tau d} \tilde{\Psi}^2(k) (k^2 + m^2) \right]. \quad (3.45)$$

Para simplificar a simulação, podemos aproximar  $P(\tilde{\Psi})$  por uma distribuição retangular, fazendo  $\left| \tilde{\Psi}(k) \right| \leq h(k)$ , onde

$$h(k) = \left[ \frac{\tau d}{\Phi^2 L} \frac{1}{(k^2 + m^2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.46)$$

Logo, escrevemos

$$-h(k) \leq \tilde{\Psi}(k) \leq h(k), \quad (3.47)$$

ou

$$\tilde{\Psi}(k) = h(k)A, \quad (3.48)$$

sendo  $-1 \leq A \leq 1$ , e  $A \in \mathbb{R}$ .

Calculamos o valor médio quadrático para  $\Psi_i(s)$ , escrevendo

$$\Psi_i(s) = \vec{\Psi}(s) = \Psi_1 \hat{x} + \Psi_2 \hat{y} + \Psi_3 \hat{z} \quad (3.49)$$

e fazendo agora média quadrática de  $\Psi_i(g)$ , teremos

$$\langle \Psi_i^2(s) \rangle = \langle \Psi_1^2 \rangle + \langle \Psi_2^2 \rangle + \langle \Psi_3^2 \rangle \approx 3 \langle \Psi_L^2 \rangle = \frac{3}{L} \int_0^L ds \langle \Psi^2(s) \rangle. \quad (3.50)$$

Tomando a transformada de Fourier, e usando a simplificação que leva a equação (3.48), temos

$$\langle \Psi_i^2(s) \rangle = 3 \sum_n h^2(k) \langle A^2 \rangle \quad (3.51)$$

com

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A^2 dA = \frac{1}{3}. \quad (3.52)$$

Portanto

$$\langle \Psi_i^2(s) \rangle = \sum_n h^2(k) = \sum_n \frac{\Delta k}{\frac{2\pi}{L}} h^2(k). \quad (3.53)$$

Usando (3.46) e levando (3.53) para o limite do contínuo,

$$\langle \Psi_i^2(s) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dk \frac{L}{2\pi} \frac{\tau D}{\Phi^2 L} \frac{1}{(k^2 + m^2)}. \quad (3.54)$$

Resolvendo a integral encontramos

$$\langle \Psi_i^2(s) \rangle = \frac{\tau D}{2\Phi^2 m}, \quad (3.55)$$

O que nos deixa aptos para implementar a simulação numérica.

### 3.2.1 Simulações Numéricas

Utilizando o exposto acima, em conjunto com os procedimentos de simulação numérica, encontramos a cada “loop” temporal da simulação,  $\tau$ , valores para  $\Psi(s)$ , e consequentemente  $\tilde{\Psi}(n)$ , sendo este a transformada de Fourier discretizada para o campo  $\Psi(s)$ . Realizando isto para todas as coordenadas espaciais de cada ponto do vórtice, com os valores de  $\tilde{\Psi}(n)$ , e utilizando também os procedimentos da simulação auto-induzida [16, 42], temos como encontrar o deslocamento que cada ponto do vórtice sofrerá, em cada intervalo de tempo  $\tau$ .

Devido ao “cutoff” ultra-violeta devemos impor que

$$-\tilde{n} \leq n \leq \tilde{n}. \quad (3.56)$$

Assim teremos  $N = 2\tilde{n} + 1$ , graus de liberdade, o que equivale a termos nosso vórtice composto por  $N$  pontos e comprimento total  $L$ . Escrevemos

$$\Delta = \frac{L}{N}, \quad (3.57)$$

onde  $\Delta$ , é o passo médio de deslocamento de cada ponto do vórtice, o qual deverá ser o menor possível, dependendo do tempo de simulação. Exigiremos que o passo estocástico seja muito pequeno. Assim, faremos

$$\frac{\tau D}{2\Phi^2 m} \ll \Delta^2 \quad (3.58)$$

Como também o passo determinístico, devido a velocidade auto-induzida, deverá satisfazer a

$$|v| \tau \ll \Delta \quad (3.59)$$

Considerando o “cutoff” ultravioleta,

$$|v| < \frac{\Phi}{\Delta}, \quad (3.60)$$

surge uma outra condição para passo estocástico induzido,

$$|v| \tau < \frac{\Phi \tau}{\Delta}, \quad (3.61)$$

o que implica que devemos ter o intervalo de tempo  $\tau$ , suficientemente pequeno para satisfazer a equação (3.61). Exigindo o passo estocástico muito menor que o passo  $\Delta$ , temos uma outra condição

$$\frac{\Phi \tau}{\Delta} \ll \Delta \implies \Phi \tau \ll \Delta^2 \quad (3.62)$$

Fixamos na simulação,

$$\Phi = 1, \quad (3.63)$$

$$L = 1,$$

$$m = 1.$$

Escrevemos  $m = 1$  também, porque  $m = L^{-1}$  (perturbação infra-vermelha). Usando as equações (3.58) ou (3.62) obtemos também que o tempo estocástico obedeça a

$$\tau \ll \frac{\Delta^2}{1}. \quad (3.64)$$

Em nossa simulação, usamos como vórtice inicial um anel circular levemente perturbado, composto por 400 pontos ( $N = 400$ ), com  $\tilde{n} = 200$  ( $-\tilde{n} \leq n \leq \tilde{n}$ ), e para satisfazer as condições impostas acima, além das condições (3.63), fizemos  $\tau = 10^{-6}$ .

Com as condições definidas acima, simulamos a dinâmica de nosso vórtice, para diferentes valores de intensidade da força estocástica. Para  $D = 0$  (simulação auto-induzida pura), com um tempo de evolução do vórtice de 800 unidades de tempo, e para  $D = 0.01$ ,  $D = 1.0$  e  $D = 30.0$ , o tempo de evolução do vórtice foi de 400 unidades de tempo. Os resultados obtidos serão mostrados e discutidos a seguir.

### 3.2.2 Resultados Numéricos

As figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, representam a configuração final de um vórtice, inicialmente circular e ligeiramente perturbado, depois de submetidos ao modelo estocástico desenvolvido na seção 3.1, para diferentes valores do parâmetro  $D$ . Quando consideramos a simulação auto-induzida, o que equivale fazer  $D = 0$ , podemos constatar visualmente pela figura 3.2, a aparência de um polímero para a configuração final de nosso vórtice. Mais a frente, iremos obter para esta configuração do vórtice, uma dimensão fractal igual a 1.69. Sendo este valor, muito próximo da dimensão fractal de um polímero. A figura 3.2, é resultado de um tempo de evolução igual a 800 unidades de tempo, porém este vórtice foi avaliado também num tempo de 400 unidades de tempo, quando já mostrava-se com uma configuração semelhantes ao da figura 3.2.

Analisando as configurações finais do vórtice, para outros três valores do parâmetro  $D$  ( $D = 0.01$ ,  $D = 1.0$ ,  $D = 30.0$ ), através das figuras 3.3, 3.4 e 3.5, podemos constatar uma grande diferença no aspecto final dos vórtices se comparados a configuração da figura 3.2. Diferente da situação auto-induzida, os vórtices apresentam-se bastante emaranhados, numa forma de novelo, para um tempo de evolução de 400 unidades de tempo, e apresentam

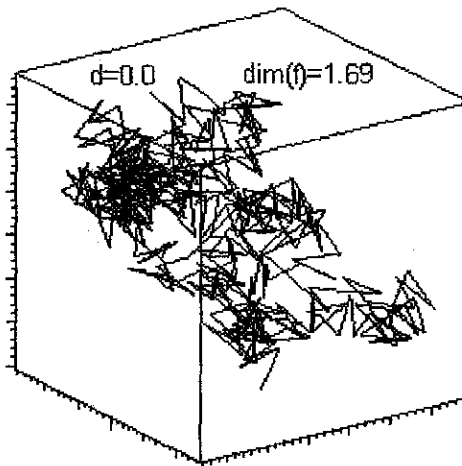


Figura 3.2:

uma dimensão fractal que tende para o valor de 2.5, resultado também obtido por Chorin [19], em seu estudo da dinâmica de filamentos de vórtices.

Um ponto importante a ser destacado, refere-se a simulação para  $D = 0.01$  (figura 3.3). Pois, mesmo para um pequeno valor do parâmetro  $D$ , a configuração final do vórtice já revela-se com uma configuração final e uma dimensão fractal, semelhante aos casos com  $D = 1.0$  e  $D = 30.0$  (figuras 3.4 e 3.5, respectivamente). Isto revela, que uma pequena perturbação no fluido, já conduz o vórtice para uma configuração final semelhante a que obtemos, por exemplo, para  $D = 30.0$ .

A simulação para  $D = 30.0$ , revelou uma dimensão fractal muito próxima de 2.5 (figura 3.5). Fazendo-nos acreditar que, uma força estocástica mais intensa, leva o vórtice mais rapidamente a sua configuração estável.

As figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, descrevem a distribuição final dos 400 pontos representativos do nosso vórtice circular. Com esta distribuição de pontos, poderemos avaliar a natureza fractal para o qual nosso modelo conduziu o vórtice. Faremos isso, avaliando a

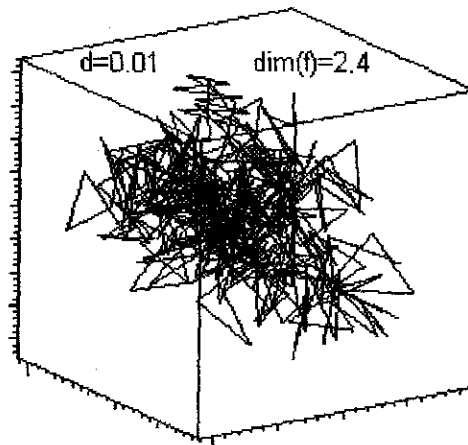


Figura 3.3:

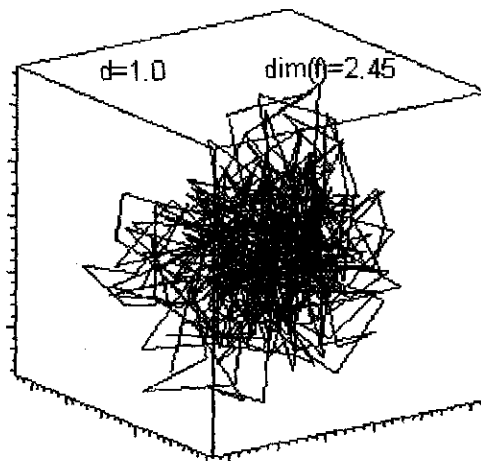


Figura 3.4:

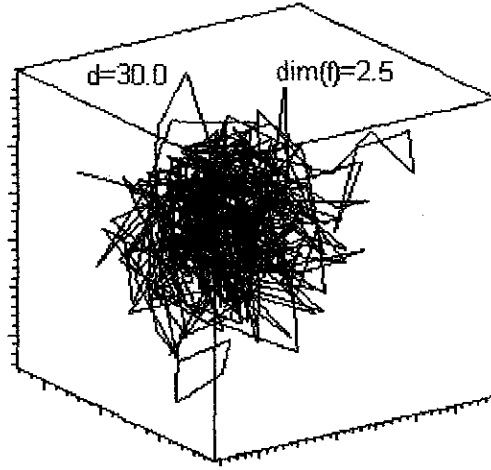


Figura 3.5:

função de estrutura  $S_q(r)$ , a qual será escrita como

$$S_q(r) = \langle n(r)^q \rangle \quad (3.65)$$

onde  $n(r)$ , é o número de pontos dentro de uma esfera de raio  $r$ , e  $\langle n(r)^q \rangle \sim r^{f(q)}$ . Traçando o gráfico do  $\log(S_q(r)) \times \log(r)$  para diferentes valores de  $q$ , e realizando o “fitting” linear sobre cada curva obtida, podemos determinar a função  $f(q)$ . Se  $f(q)$  for linear, dizemos que o vórtice se distribui como fractal. Em outro caso, teríamos uma distribuição multifractal.

Iremos inicialmente avaliar a fractalidade de nosso modelo para  $q = 2$ , e depois, avaliaremos para outros valores de  $q$  (com o objetivo de verificar se a configuração final dos vórtices corresponde a um fractal ou multifractal). Na figura 3.6, temos os gráficos de  $\log(S_2(r)) \times \log(r)$  para diferentes valores do parâmetro  $D$ . Assim como nas figuras 3.3, 3.4 e 3.5, onde a disposição final dos vórtices são muito semelhantes, verificamos pela figura 3.6, uma grande semelhança também nas curva do  $\log(S_2(r)) \times \log(r)$  para alguns valores de  $D$ . Esta semelhança se traduz na inclinação do “fitting” linear sobre curvas de

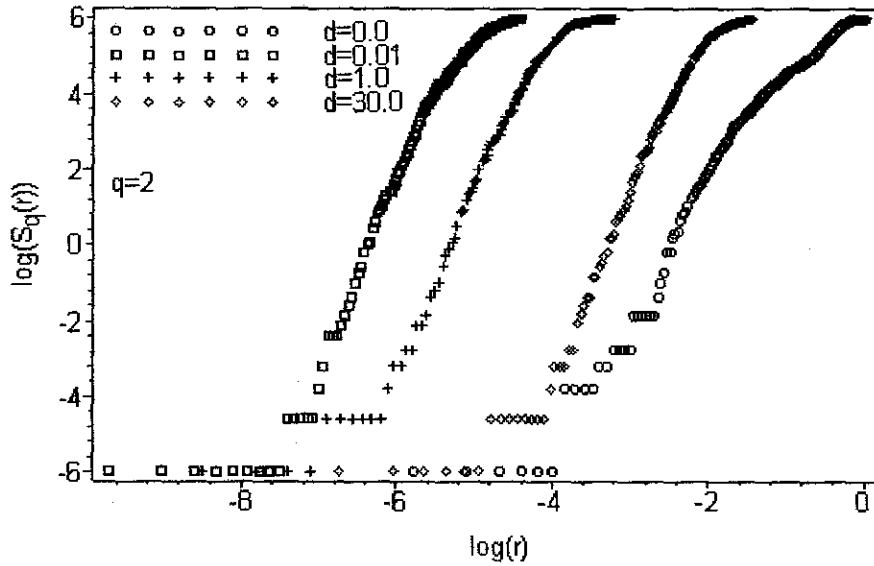


Figura 3.6:

$\log(S_2(r)) \times \log(r)$ , para  $D = 0.01, 1.0, 30.0$  (figuras 3.8, 3.9 e 3.10). Ao mesmo tempo, podemos perceber também a diferença de inclinação em relação ao caso em que  $D = 0$  (figura 3.7, simulação auto-induzida).

No intuito de obtermos a dimensão fractal,  $\dim(f)$ , de cada configuração final do vórtice para diferentes valores de  $D$ , e então constatarmos se estas diferenças visuais serão confirmadas na assinatura da dimensão de cada configuração final do vórtice, passemos à análise dos resultados numéricos.

A figura 3.7 mostra o “fitting” sobre a curva do gráfico  $\log(S_2(r)) \times \log(r)$  para  $D = 0.0$ , sendo encontrado  $f(2) = 3.39$ , o que nos leva a uma dimensão fractal  $\dim(f) = 1.69$ . Sendo esta dimensão, muito semelhante a dimensão fractal de um polímero.

A figura 3.6, evidencia que o “fitting” linear nas curvas para  $D = 0.01, 1.0, 30.0$ , deve ter uma inclinação maior que a da curva para  $D = 0.0$ , o que nos levará a uma dimensão fractal maior também. As figuras 3.8, 3.9 e 3.10, mostram o “fitting” sobre as curvas dos gráficos  $\log(S_2(r)) \times \log(r)$  para os demais valores de  $D$  analisados ( $D = 0.01, 1.0,$



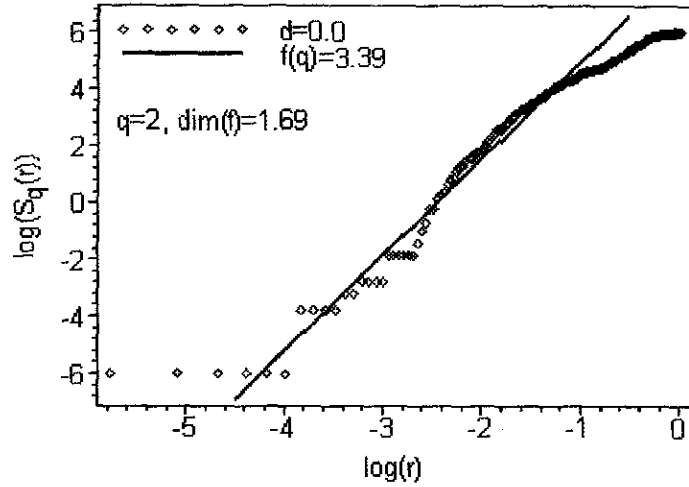


Figura 3.7:

30.0). Para estes três valores de  $D$ , encontramos  $f(2)$  tendendo para um valor igual a 5, o que nos leva a uma dimensão fractal tendendo para 2.5, sendo esta a dimensão fractal encontra por Chorin [16], em seu modelo de filamentos de vórtices, como já comentado..

Como exemplo, apresentaremos agora, a análise da fractalidade da configuração final dos vórtices com o parâmetro  $D = 0$  e  $D = 30.0$ , considerando diferentes valores de  $q$ . Nosso objetivo é verificarmos se modelo apresentado na seção 3.1, leva os vórtices a uma distribuição fractal ou multi-fractal. A figura 3.11 mostra a curva  $\log(S_q(r)) \times \log(r)$  para quatro diferentes valores de  $q$  ( $q = 1, 2, 4, 8$ ), considerando a situação auto-induzida ( $D = 0$ ). Já a figura 3.12, mostra as curvas  $\log(S_q(r)) \times \log(r)$ , para os mesmos valores de  $q$  anteriormente escritos, com  $D = 30.0$ . Ou seja, o vórtice agora será submetido a uma intensa força estocástica.

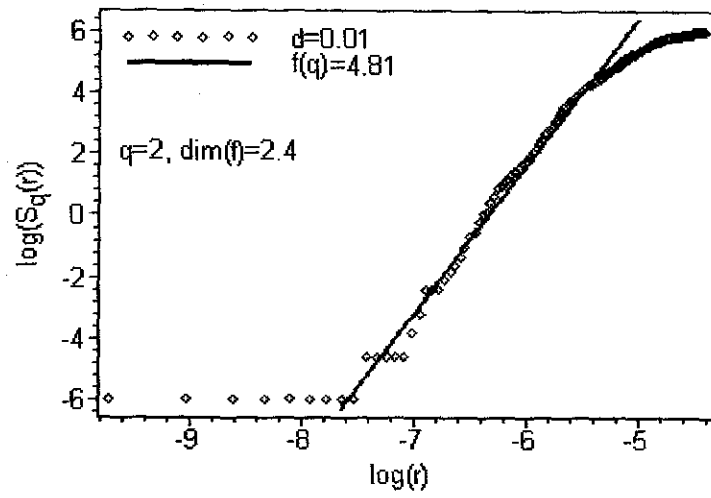


Figura 3.8:

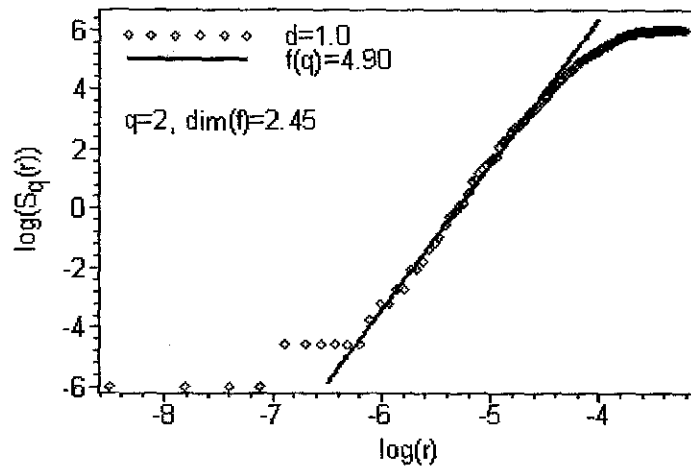


Figura 3.9:

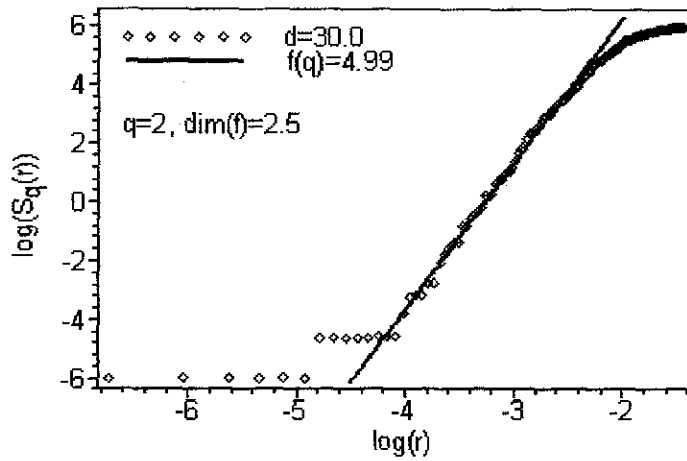


Figura 3.10:

	$D = 0.0$	$D = 30.0$
$q = 1, f(1)$	1.6957	2.4938
$q = 2, f(2)$	3.3890	4.9872
$q = 4, f(4)$	6.7809	9.9708
$q = 8, f(8)$	13.5610	19.8803
$q = 14, f(14)$	23.7260	34.2650

Tabela 3.1

Procurando agora, o melhor “fitting” linear sobre cada curva obtida, podemos determinar que o tipo de função é  $f(q)$ . Para as duas situações exemplificadas ( $D = 0.0$  e  $D = 30.0$ ), montamos a Tabela 3.1, com a qual podemos fazer os gráficos mostrados nas figuras 3.13 e 3.14. Estes gráficos mostram que a função  $f(q)$  é linear. Confirmando assim o caráter fractal do modelo apresentado.

Podemos constatar ainda, que para  $D = 0.01$  e  $D = 1.0$ , a natureza dos vórtices

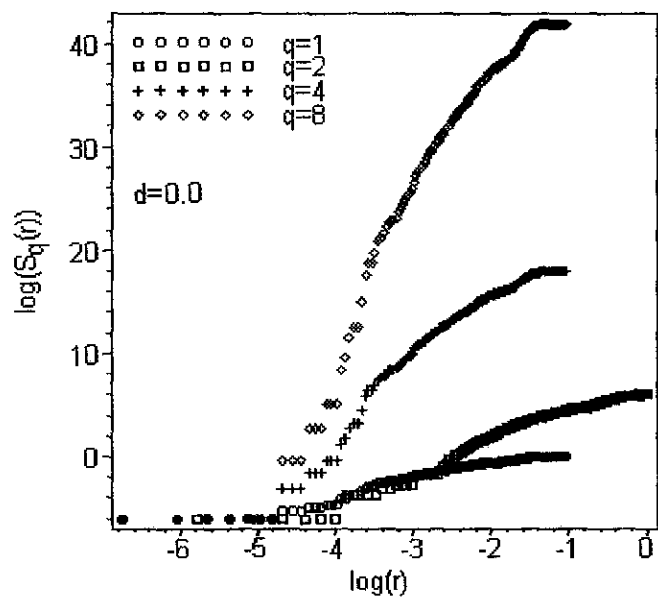


Figura 3.11:

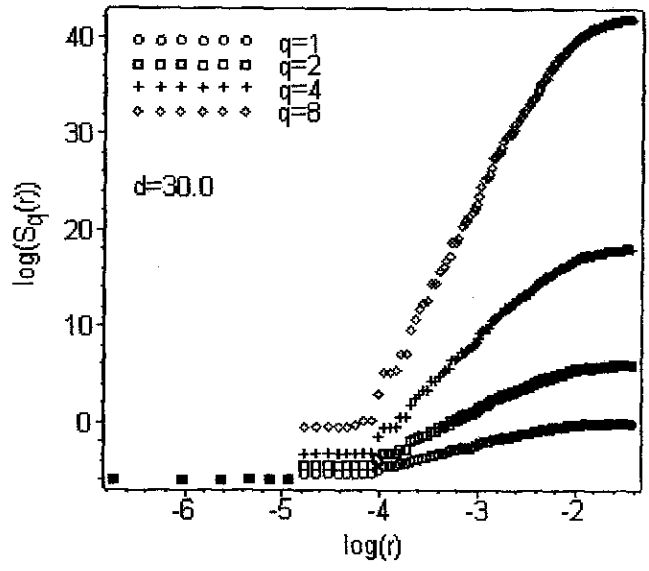


Figura 3.12:

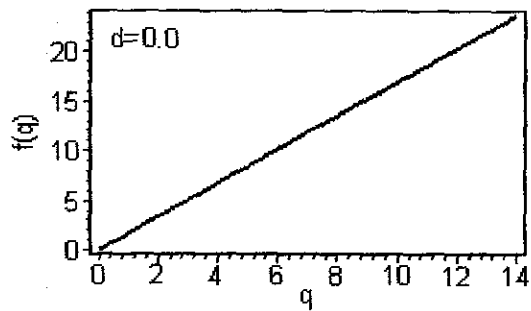


Figura 3.13:

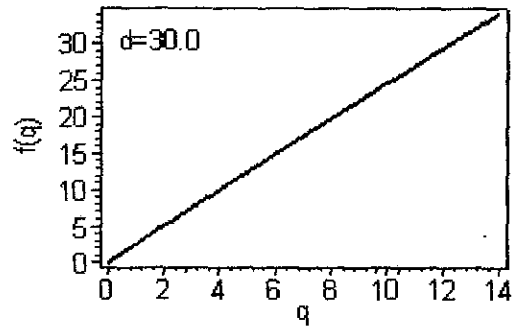


Figura 3.14:

também é equivalente ao modelo fractal. Esta é uma característica do modelo físico desenvolvido.

# Capítulo 4

## Magnetohidrodinâmica Estocástica

A velocidade não é o único objeto de estudo a ser considerado em um fluido, nem é o único que pode ter a propriedade de variar ponto a ponto. Podemos ter, por exemplo, a variação de densidade em diferentes pontos do fluido. Este fluido também pode ser um condutor e carregar uma corrente elétrica de densidade  $j$ , a qual varia de ponto a ponto em magnitude e direção. Podemos ter também campo magnético, e ainda temperatura. Assim, o número de campos necessários para descrever o estado completo de um fluido, dependerá do grau de complexidade do problema. Existem fenômenos interessantes quando consideramos fluxo de cargas elétricas e campos magnéticos como partes dominantes no comportamento do fluido, formando o assunto principal da magnetohidrodinâmica.

Neste capítulo analisamos o problema da turbulência em magnetohidrodinâmica, visto o pouco entendimento deste problema, e em face do expressivo volume de dados vindos de observações astrofísicas, como “sunspots” e o efeito dínamo [37]. Mais especificamente, estudaremos a estatística da vorticidade dos campos de velocidade e magnético nos regimes laminar e turbulento por meio do formalismo de Martin-Siggia-Rose (MSR) [26] e o método de ponto-de-sela, o que nos levará a contribuições para o comportamento da cauda da Função Distribuição de Probabilidade (PDF), evidenciando um caráter intermitente.

Na primeira seção deste capítulo, mostraremos os elementos básicos do formalismo, e definiremos as equações de um fluido estocástico em termos das variáveis de Elsasser [38]

(contribuições lineares da velocidade e do campo magnético), com as quais a ação de MSR e as correspondentes equações de ponto-de-sela são escritas. Na seção seguinte introduzimos de forma objetiva a técnica de instantons, onde discutimos o problema das flutuações das equações da magnetohidrodinâmica no limite viscoso, comprovando que neste caso a vorticidade é governada por uma estatística gaussiana exata. Na terceira seção consideramos o limite em que a viscosidade desaparece, trabalhando então com números de Reynolds grandes, quando o processo turbulento comanda a evolução do fluido. Neste caso, a aplicação direta do método de ponto-de-sela não é apropriada, como pode ser visto por um simples argumento dimensional [18, 17]. Para superarmos este problema, provocaremos a quebra da integral de trajetória, em termos de graus de liberdade rápidos e lentos, sendo esta caracterização a base física do método empregado. Obtemos uma regra de soma, para a estatística da vorticidade do campo  $z_\alpha^\pm$ . Encontramos uma expressão assintótica para a cauda da PDFs da vorticidade, levando ao decaimento algébrico  $1/\omega^2$  (sendo a mesma para a vorticidade dos campos de velocidade e magnético). Este resultado indica a existência de fortes efeitos de intermitência na turbulência magnetohidrodinâmica.

## 4.1 Equações Básicas da Magnetohidrodinâmica e Formalismo de Instantons

Trabalhamos com um fluido tridimensional, o qual será descrito pelos campos de velocidade e magnético,  $v_\alpha(\vec{x}, t)$  and  $b_\alpha(\vec{x}, t)$ , os quais consideramos serem submetidos a forças estocásticas de larga escala. Faremos uma escolha em que os campos de velocidade e magnético tenham a mesma unidade, e então poderemos escrever as equações da magnetohidrodinâmica para os campos de velocidade e magnético, em termos das variáveis de Elsasser [38] como

$$z_\alpha^\pm = (v_\alpha \pm b_\alpha). \quad (4.1)$$



Assim, escrevemos as equações de Navier-Stokes para a magnetohidrodinâmica,

$$\begin{aligned}\partial_t z_\alpha^\pm + z_\beta^\mp \partial_\beta z_\alpha^\pm &= -\partial_\alpha P^\pm + \nu_+ \partial^2 z_\alpha^\pm + \nu_- \partial^2 z_\alpha^\mp + f_\alpha^\pm, \\ \partial_\alpha z_\alpha^\pm &= 0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde  $\nu_\pm = (\nu \pm \nu_b)/2$  são parâmetros de viscosidade, responsáveis por efeitos dissipativos, e  $f_\alpha^\pm = (f_\alpha \pm g_\alpha)$  são forças externas aleatórias, as quais obedecem uma estatística gaussiana, definidas através das funções de correlações abaixo (4.3). Temos que  $f_\alpha$  e  $\nu$ , são respectivamente, a força aleatória e a viscosidade usual, associada ao campo de velocidade, assim como  $g_\alpha$  e  $\nu_b$ , representam a força aleatória e uma viscosidade associada ao campo magnético

$$\begin{aligned}\langle f_\alpha^\pm(\vec{x}, t) \rangle &= \langle f_\alpha^\pm(\vec{x}, t) f_\beta^\mp(\vec{x}', t') \rangle = 0, \\ \langle f_\alpha^\pm(\vec{x}, t) f_\beta^\pm(\vec{x}', t') \rangle &= 2\delta(t-t')[D_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{x}-\vec{x}') \pm D_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x}-\vec{x}')] \equiv \\ &\delta(t-t')D_{\alpha\beta}^\pm(\vec{x}-\vec{x}'),\end{aligned}\tag{4.3}$$

com

$$\begin{aligned}D_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{x}-\vec{x}') &= \langle f_\alpha(\vec{x}, t) f_\beta(\vec{x}', t') \rangle = \langle g_\alpha(\vec{x}, t) g_\beta(\vec{x}', t') \rangle = \\ &D_1 \exp(-|\vec{x}-\vec{x}'|^{2p}/L_1^{2p}) \delta_{\alpha\beta}, \\ D_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x}-\vec{x}') &= \langle f_\alpha(\vec{x}, t) g_\beta(\vec{x}', t') \rangle = D_2 \exp(-|\vec{x}-\vec{x}'|^{2p}/L_2^{2p}) \delta_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Acima,  $L_1$  and  $L_2$  são comprimentos de escala onde o mecanismo de injeção de energia acontece, e  $p > 0$  parametriza o decaimento exponencial da função de correlação força-força.

É importante determinar funcionais dos campos de velocidade e magnético que possam trazer informações sobre a natureza intermitente da cauda da função de distribuição de probabilidade. Uma boa escolha, como discutido na introdução, é a vorticidade dos campos  $\vec{z}^\pm$ , como escrito abaixo,

$$\vec{\omega}^\pm = \vec{\nabla} \times \vec{z}^\pm.\tag{4.5}$$

No contexto da circulação, escrevemos

$$\Gamma^\pm = \oint_c \vec{z}^\pm \cdot d\vec{x}. \quad (4.6)$$

A integral é calculada no instante de tempo  $t = 0$ , e assumimos que a evolução do fluido tenha sido iniciada em  $t = -\infty$ . O contorno de integração  $c$  escolhido é uma circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$ , com a coordenada  $z = 0$ , orientado no sentido anti-horário. Pelo teorema de Stokes, também podemos escrever o módulo da vorticidade para as variáveis de Elsasser, em termos da circulação como

$$\omega^\pm = \frac{1}{\pi R^2} \Gamma^\pm, \quad (4.7)$$

no limite em que  $R \rightarrow 0$ . Temos então que  $R$  é um comprimento contido na faixa dissipativa. Assim, podemos ter em mente que a PDF da variável vorticidade pode ser definida como

$$\rho(\omega^+, \omega^-) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^+ \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^- \exp(i\lambda^+ \omega^+ + i\lambda^- \omega^-) Z(\lambda^+, \lambda^-), \quad (4.8)$$

Com o funcional característico

$$Z(\lambda^+, \lambda^-) = \langle \exp[-i\lambda^+ \omega^+ - i\lambda^- \omega^-] \rangle. \quad (4.9)$$

Consideraremos aqui o mapeamento analítico  $\lambda^\pm \rightarrow i\lambda^\pm$ , assim no limite de grandes  $\lambda^\pm$  o funcional característico evidenciará as contribuições para grandes flutuações da vorticidade.

Estudaremos a equação diferencial estocástica (4.2) numa formulação de teoria de campos, utilizando-se do formalismo de MSR [26] (discutido no segundo capítulo desta tese), o qual nos permite escrever a seguinte expressão para a integral de trajetória

$$Z(i\lambda^+, i\lambda^-) = \int D\hat{z}^\pm Dz^\pm DP^\pm DQ^\pm \exp(-S), \quad (4.10)$$

onde a ação de MSR será

$$\begin{aligned}
S = & -i \int d^3 \vec{x} dt [\hat{z}_\alpha^+ (\partial_t z_\alpha^+ + z_\beta^- \partial_\beta z_\alpha^+ - \nu_+ \partial^2 z_\alpha^- \nu_- \partial^2 z_\alpha^- \\
& + \partial_\alpha P^+) + \hat{z}_\alpha^- (\partial_t z_\alpha^- + z_\beta^+ \partial_\beta z_\alpha^- - \nu_+ \partial^2 z_\alpha^- - \nu_- \partial^2 z_\alpha^+ + \partial_\alpha P^-) \\
& + Q^+ \partial_\alpha z_\alpha^+ + Q^- \partial_\alpha z_\alpha^-] \\
& + \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \hat{z}_\alpha^+ (\vec{x}, t) D_{\alpha\beta}^+ (\vec{x} - \vec{x}') \hat{z}_\beta^+ (\vec{x}', t) \\
& + \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \hat{z}_\alpha^- (\vec{x}, t) D_{\alpha\beta}^- (\vec{x} - \vec{x}') \hat{z}_\beta^- (\vec{x}', t) - \lambda^+ \omega^+ - \lambda^- \omega^-.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O papel dos campos  $P^\pm$  e  $Q^\pm$  é somente o de implementar os vínculos  $\partial_\alpha z_\alpha^\pm = \partial_\alpha \hat{z}_\alpha^\pm = 0$  (vínculos de incompressibilidade e ausência de monopólos magnéticos, respectivamente), para que os mesmos sejam considerados no cálculo das equações de ponto de sela. Consideramos a simplificação do Jacobiano unitário [32] na equação (4.10), como já discutido no segundo capítulo desta tese.

Com o intuito de estudarmos configurações específicas do fluido no limite de grandes  $\lambda^+$  e  $\lambda^-$ , podemos, a partir da equação (4.11), calcular as derivadas funcionais com relação a cada campo considerado. Obtemos então as equações de ponto-de-sela

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha z_\alpha^\pm &= 0, \\
\partial_\alpha \hat{z}_\alpha^\pm &= 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

e

$$\partial_t z_\alpha^\pm + z_\beta^\mp \partial_\beta z_\alpha^\pm - \nu_+ \partial^2 z_\alpha^\pm - \nu_- \partial^2 z_\alpha^\mp + \partial_\alpha P^\pm = -i \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^\pm (|\vec{x} - \vec{x}'|) \hat{z}_\beta^\pm (\vec{x}', t), \tag{4.13}$$

$$\partial_t \hat{z}_\alpha^\pm - z_\beta^\mp \partial_\beta \hat{z}_\alpha^\pm + \hat{z}_\alpha^\pm \partial_\beta z_\beta^\mp + \hat{z}_\beta^\mp \partial_\alpha z_\beta^\mp + \nu_+ \partial^2 \hat{z}_\alpha^\pm + \nu_- \partial^2 \hat{z}_\alpha^\mp + \partial_\alpha Q^\pm = -i \lambda^\pm \frac{\delta \omega^\pm}{\delta z_\alpha^\pm}, \tag{4.14}$$

com

$$\frac{\delta \Gamma^\pm}{\delta z_\alpha^\pm} = \epsilon_{3\beta\alpha} \frac{x_\beta}{r_\perp} \delta(r_\perp - R) \delta(z) \delta(t), \tag{4.15}$$

onde  $r_\perp = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

Nosso trabalho, a partir de agora, será analisar situações limites para o escoamento do fluido. Resolveremos inicialmente as equações de ponto de sela (4.13) e (4.14) para o caso de números de Reynolds pequenos, e chegaremos a uma distribuição Gaussiana para a PDF da vorticidade do campo  $z_\alpha^\pm$ , evidenciando um escoamento laminar. Na situação em que consideramos números de Reynolds grandes, no regime completamente turbulento, existem dificuldades bem conhecidas na resolução das equações de ponto-de-sela usando diretamente o formalismo de instantons, que serão superadas usando o método desenvolvido na ref. [17], onde graus de liberdade lentos e rápidos são separados na integração funcional. Com este procedimento chegaremos a um decaimento proporcional a  $|\omega|^{-2}$ , para a cauda da PDF da vorticidade.

## 4.2 Limite Viscoso

No limite viscoso, os termos de convecção não são desconsiderados na equação de fluidos, e os termos de viscosidade prevalecem. Faremos  $p = 1$  em (4.4), como um exemplo instrutivo, onde a PDF poderá ser encontrada exatamente. As equações de ponto-de-sela (4.13) e (4.14) podem agora ser reescritas por

$$\begin{aligned}\partial_t z_\alpha^\pm + \nu_+ \partial^2 z_\alpha^\pm - \nu_- \partial^2 z_\alpha^\mp &= -i \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^\pm (|\vec{x} - \vec{x}'|) \hat{z}_\beta^\pm(\vec{x}', t), \\ \partial_t \hat{z}_\alpha^\pm + \nu_+ \partial^2 \hat{z}_\alpha^\pm + \nu_- \partial^2 \hat{z}_\alpha^\mp &= -i \lambda^\pm \frac{\delta \omega^\pm}{\delta z_\alpha^\pm}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Usando as equações (4.11) e (4.16), é possível escrever a ação de ponto-de-sela na forma simples

$$S(\lambda, \lambda_b) = -\lambda \omega - \lambda_b \omega_b, \quad (4.17)$$

onde usamos  $\lambda^\pm = (\lambda \pm \lambda_b)/2$ , e a definição abaixo para as vorticidades,

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\nabla} \times \vec{v}, \\ \vec{\omega}_b &= \vec{\nabla} \times \vec{b}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

É também necessário definir os campos auxiliares  $\hat{v}_\alpha$  e  $\hat{b}_\alpha$ ,

$$\hat{z}_\alpha^\pm = (\hat{v}_\alpha \pm \hat{b}_\alpha)/2. \quad (4.19)$$

Precisamos, a partir de agora, encontrar soluções para os campos de velocidade e magnético, para a coordenada  $z = 0$  e  $t = 0$ . Escreveremos  $v_\alpha(\vec{x}_\perp, 0)$  e  $b_\alpha(\vec{x}_\perp, 0)$ , onde  $\vec{x}_\perp$  é o  $\vec{x}$  perpendicular, o qual substituiremos na equação (4.17).

Podemos reescrever as equações (4.16) como o conjunto de equações diferenciais acopladas,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \nu \partial^2)v_\alpha &= -i \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^{(1)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) \hat{v}_\beta(\vec{x}', t) \\ &\quad -i \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^{(2)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) \hat{b}_\beta(\vec{x}', t), \\ (\partial_t + \nu \partial^2)\hat{v}_\alpha &= -i \lambda \epsilon_{3\beta\alpha} \frac{x_\beta}{r_\perp} \delta(r_\perp - R) \delta(z) \delta(t), \\ (\partial_t - \nu_b \partial^2)b_\alpha &= -i \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^{(1)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) \hat{b}_\beta(\vec{x}', t) \\ &\quad -i \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^{(2)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) \hat{v}_\beta(\vec{x}', t), \\ (\partial_t + \nu_b \partial^2)\hat{b}_\alpha &= -i \lambda_b \epsilon_{3\beta\alpha} \frac{x_\beta}{r_\perp} \delta(r_\perp - R) \delta(z) \delta(t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aplicando  $(\partial_t + \nu \partial^2)$  sobre a primeira equação listada em (4.20) e usando também as equações para  $\hat{v}_\alpha$  e  $\hat{b}_\alpha$ , teremos

$$[\partial_t^2 - \nu^2 (\partial^2)^2]v_\alpha(\vec{x}, t) = -F_\alpha(\vec{x}, t), \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} F_\alpha(\vec{x}, t) &= -\lambda \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^{(1)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) \epsilon_{3\gamma\beta} \frac{x'_\gamma}{r'_\perp} \delta(r'_\perp - R) \delta(z') \delta(t) \\ &\quad - \left( \frac{\partial_t + \nu \partial^2}{\partial_t + \nu_b \partial^2} \right) \lambda_b \int d^3 \vec{x}' D_{\alpha\beta}^{(2)}(|\vec{x} - \vec{x}'|) \epsilon_{3\gamma\beta} \frac{x'_\gamma}{r'_\perp} \delta(r'_\perp - R) \\ &\quad \times \delta(z') \delta(t) \simeq \frac{D_1 \lambda 2\pi R^2}{L_1^2} \epsilon_{3\beta\alpha} x_\beta \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{L_1^2}\right) + \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\left( \frac{\partial_t + \nu \partial^2}{\partial_t + \nu_b \partial^2} \right) \frac{D_2 \lambda_b 2\pi R^2}{L_1^2} \epsilon_{3\beta\alpha} x_\beta \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{L_2^2}\right). \quad (4.23)$$

No espaço de Fourier, a equação (4.22) torna-se

$$(\xi^2 + \nu^2 k^4) \tilde{v}_\alpha(\vec{k}, \xi) = \tilde{F}_\alpha(\vec{k}). \quad (4.24)$$

Obtemos, assim,

$$v_\alpha(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3\vec{k} d\xi \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\xi t)}{\xi^2 + \nu^2 k^4} \left[ \frac{\tilde{F}_\alpha^{(1)}(\vec{k})}{k^2} + \left(\frac{i\xi - \nu k^2}{i\xi - \nu_b k^2}\right) \tilde{F}_\alpha^{(2)}(\vec{k}) \right], \quad (4.25)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha^{(1)}(\vec{k}) &= -i\epsilon_{3\beta\alpha} k_\beta \frac{D_1 \lambda \pi^{\frac{1}{2}} R^2}{4} \exp\left(-\frac{L_1^2 k^2}{4}\right), \\ \tilde{F}_\alpha^{(2)}(\vec{k}) &= -i\epsilon_{3\beta\alpha} k_\beta \frac{D_2 \lambda_b \pi^{\frac{1}{2}} R^2}{4} \exp\left(-\frac{L_2^2 k^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Neste ponto estamos interessados em conhecer  $v_\alpha(\vec{x}_\perp, 0)$ , assim segue-se da equação (4.25),

$$v_\alpha(\vec{x}_\perp, 0) = \int d^3\vec{k} \exp(i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp) \frac{1}{k^2} \left[ \frac{\tilde{F}_\alpha^{(1)}(\vec{k})}{4\pi\nu} + \frac{\tilde{F}_\alpha^{(2)}(\vec{k})}{2\pi(\nu + \nu_b)} \right]. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.26) em (4.27), encontramos

$$v_\alpha(\vec{x}_\perp, 0) = \frac{\pi R^2}{3} \left[ \frac{D_1 \lambda}{2\nu} + \frac{D_2 \lambda_b}{(\nu + \nu_b)} \right] \epsilon_{3\beta\alpha} x_\beta. \quad (4.28)$$

De forma análoga, podemos encontrar,

$$b_\alpha(\vec{x}_\perp, 0) = \frac{\pi R^2}{3} \left[ \frac{D_1 \lambda_b}{2\nu_b} + \frac{D_2 \lambda_b}{(\nu + \nu_b)} \right] \epsilon_{3\beta\alpha} x_\beta. \quad (4.29)$$

De (4.17), (4.28) e (4.29), obtemos a ação de ponto-de-sela

$$S(\lambda, \lambda_b) = -\lambda^2 \eta_1 - \lambda_b^2 \eta_2 - \lambda \lambda_b \eta_3. \quad (4.30)$$

onde

$$\eta_1 = \frac{D_1 \pi^2 R^4}{3\nu}, \quad \eta_2 = \frac{D_1 \pi^2 R^4}{3\nu_b}, \quad \eta_3 = \frac{4D_2 \pi^2 R^4}{3(\nu + \nu_b)}. \quad (4.31)$$

Fazendo agora  $\lambda \rightarrow -i\lambda$  e  $\lambda_b \rightarrow -i\lambda_b$ , para recuperar a definição original destes parâmetros, temos

$$Z(\lambda, \lambda_b) \propto \exp(-\lambda^2 \eta_1 - \lambda_b^2 \eta_2 - \lambda \lambda_b \eta_3). \quad (4.32)$$

Usando as definições para a vorticidades dos campos de velocidade e magnético da equação (4.18), nos obtemos, da equação (4.9), a PDF Gaussiana como esperado, pois estamos trabalhando com um fluido não turbulento, para números de Reynolds pequenos.

$$\rho(\Gamma, \Gamma_b) = \left(\frac{1}{4\pi^2 \zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\eta_2 \omega^2}{4\zeta} - \frac{\eta_1 \omega_b^2}{4\zeta} + \frac{\eta_3 \omega \omega_b}{4\zeta}\right], \quad (4.33)$$

com a condição

$$\zeta = \eta_1 \eta_2 - \frac{\eta_3^2}{4} > 0. \quad (4.34)$$

Esta condição pode ser reescrita como

$$\sqrt{\frac{\nu}{\nu_b}} + \sqrt{\frac{\nu_b}{\nu}} > \frac{2D_2}{D_1}. \quad (4.35)$$

Segue-se das (4.3) e (4.4) que a desigualdade acima é sempre satisfeita (de fato,  $D_1 > D_2$  quando o lado esquerdo da (4.35) é maior que 2). Se considerarmos aqui,  $D_2 = 0$ , o qual dá  $\eta_3 = 0$ , encontramos a PDF para a vorticidade

$$\rho(\Gamma, \Gamma_b) = \left( \frac{1}{4\pi^2 \eta_1 \eta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{4\eta_1} - \frac{\omega_b^2}{4\eta_2} \right]. \quad (4.36)$$

### 4.3 Números de Reynolds Grandes

Para número de Reynolds grandes, consideramos  $\nu, \nu_b \rightarrow 0$ , quando esperamos obter, efeitos de intermitência atuando na estatística do fluido. Consideramos que o raio  $R$  do contorno  $c$  é muito menor que  $L_1$  and  $L_2$  (escalas onde a energia é injetada no sistema).

Nossa grande dificuldade aqui, quando trabalharmos com a viscosidade tendendo a zero, será um resultado “no-go” [18]. A ação de ponto-de-sela calculada da solução da equação (4.14) dependerá necessariamente de  $\lambda^\pm$  de uma forma incompatível com a simetria de paridade. Analisando as equações de ponto-de-sela, veremos que estas são invariantes sob um conjunto de transformações de escala [17, 18], o que implica que a ação de ponto-de-sela tem forma geral  $S^{(0)} \sim \lambda^{3/2}$ , para  $\lambda^\pm \equiv \lambda$  e  $\nu \rightarrow 0$ . Esta dependência sob  $\lambda$  é a mesma encontrada em turbulência de Burgers para a estatística de diferenças de velocidade [48, 27]. Na ref. [17], encontramos procedimento para solução deste problema, onde se coloca um recurso alternativo da formulação de integral de trajetória de MSR.

Abordaremos agora a definição alternativa ao método de ponto-de-sela, que será aplicada para o caso em que trabalhamos com número de Reynolds grandes. Tem sido sugerido através de experimentos numéricos de turbulência [9] que o “strain tensor” não flutua

fortemente como a vorticidade. Caracterizaremos a simetria e anti-simetria dos graus de liberdade como variáveis de flutuações lentas e rápidas, respectivamente. Nos permitiremos considerar agora expressões lineares para os campos  $z_\alpha^\pm$ , os quais serão escritos como

$$z_\alpha^\pm(\vec{x}, t) = \sigma_{\alpha\beta}^\pm(t)x_\beta, \quad (4.37)$$

com as derivadas do tensor velocidade satisfazendo à  $\sum_\alpha \sigma_{\alpha\alpha}^\pm = 0$ , devido as vínculos de incompressibilidade e a ausência de monopólos magnéticos. Consideramos também a forma quadrática para os campos de pressão  $P^\pm$ ,

$$P^\pm = A_{\alpha\beta}^\pm x_\alpha x_\beta. \quad (4.38)$$

Assim, o termo de gradiente  $\partial_\alpha P^\pm$  será cancelado exatamente nas equações (4.14). Podemos então reescrever as equações (4.14), e ficarmos com as equações da evolução temporal da parte anti-simétrica de  $\sigma_{\alpha\beta}^\pm$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma_{\alpha\beta}^{\pm\bar{s}} &= -(\sigma^{\pm s}\sigma^{\mp\bar{s}} + \sigma^{\pm\bar{s}}\sigma^{\mp s})_{\alpha\beta} \\ &\quad -i \int d^3\vec{x} \partial_{[\alpha} D_{\beta]\gamma}^\pm(|\vec{x}|) \hat{z}_\gamma^\pm(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{\pm s} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}^\pm + \sigma_{\beta\alpha}^\pm), \quad \sigma_{\alpha\beta}^{\pm\bar{s}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}^\pm - \sigma_{\beta\alpha}^\pm), \\ \partial_{[\alpha} D_{\beta]\gamma}^\pm(|\vec{x}|) &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha D_{\beta\gamma}^\pm(|\vec{x}|) - \partial_\beta D_{\alpha\gamma}^\pm(|\vec{x}|)). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Segue-se da ref. [17] que podemos definir a integral de trajetória de MSR pelo funcional característico

$$Z(i\lambda^+, i\lambda^-) = \int D\sigma^{\pm s} \int D\hat{z}^\pm D z^\pm D P^\pm D Q^\pm D \tilde{Q}^\pm \exp(-\tilde{S}), \quad (4.41)$$

com  $\sigma^{\pm s} = \sigma^{\pm s}(x, y, t)$  e a ação

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= S - \frac{i}{2} \int dx dy dt \tilde{Q}_{\alpha\beta}^+(x, y, t) \cdot [\partial_\alpha z_\beta^+|_{z=0} + \partial_\beta z_\alpha^+|_{z=0} - 2\sigma_{\alpha\beta}^{+s}(x, y, t)] \\ &\quad - \frac{i}{2} \int dx dy dt \tilde{Q}_{\alpha\beta}^-(x, y, t) \cdot [\partial_\alpha z_\beta^-|_{z=0} + \partial_\beta z_\alpha^-|_{z=0} - 2\sigma_{\alpha\beta}^{-s}(x, y, t)]. \end{aligned} \quad (4.42)$$



Esta forma funcional (4.41) é obtida impondo,

$$1 = \int D\sigma^{\pm s} D\tilde{Q}^{\pm} \exp(S - \tilde{S}), \quad (4.43)$$

no integrando da (4.10) ( $Z(i\lambda^+, i\lambda^-) = \int D\hat{z}^{\pm} D z^{\pm} D P^{\pm} D Q^{\pm} \exp(-S)$ ). A ordem da integração é trocada, para escrever a integral sobre  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm s}$  como a última a ser feita. Esta passagem matemática é motivada pelo fato que a taxa “strain tensor”,  $\sigma^{\pm s}$ , faz o papel do “background” quase estático para as flutuações de vorticidade.

A partir deste ponto, retomamos a idéia central de aplicar o método de ponto-de-sela. Faremos isto para a ação  $\tilde{S}$ , tratando  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm s}$  como campo fixo externo. A equação de ponto-de-sela para  $\hat{z}_{\alpha}^{\pm}$ , na (4.14), passa agora para

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{z}_{\alpha}^{\pm} - \hat{z}_{\beta}^{\mp} \partial_{\alpha} z_{\beta}^{\mp} + z_{\beta}^{\mp} \partial_{\beta} \hat{z}_{\alpha}^{\pm} + \hat{z}_{\beta}^{\pm} \partial_{\beta} z_{\alpha}^{\mp} + \nu_+ \partial^2 \hat{z}_{\alpha}^{\pm} \\ + \nu_- \partial^2 \hat{z}_{\alpha}^{\mp} + \partial_{\alpha} Q^{\pm} + \partial_{\beta} (\delta(z) \tilde{Q}_{\beta\alpha}^{\pm}) + i\lambda^{\pm} \frac{\delta\omega^{\pm}}{\delta z_{\alpha}^{\pm}} = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

Existem ainda duas equações adicionais, associadas as variações dos campos  $\tilde{Q}_{\alpha\beta}^{\pm}$ ,

$$\partial_{\alpha} z_{\beta}^{\pm} |_{z=0} + \partial_{\beta} z_{\alpha}^{\pm} |_{z=0} - 2\sigma_{\alpha\beta}^{\pm s}(x, y, t) = 0. \quad (4.45)$$

Para procurar soluções das equações de ponto-de-sela (4.14), percebemos que ela são invariantes sob rotações em torno do eixo  $z$ . A forma mais geral de um tensor com simetria axial é

$$\sigma^{\pm}(t) = \begin{bmatrix} a^{\pm}(t) & \chi^{\pm}(t) & 0 \\ -\chi^{\pm}(t) & a^{\pm}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -2a^{\pm}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Pela expressão  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm s} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}^{\pm} + \sigma_{\beta\alpha}^{\pm})$ , somos levados a substituir  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm s}$  pelos campos  $a^{\pm}(t)$  da expressão (4.46), assim trabalharemos com a representação das flutuações lentas dos campos  $z_{\alpha}^{\pm}$ . Esta aproximação significa fazer

$$\int D\sigma_{\alpha\beta}^{\pm s} \rightarrow \int D a^{\pm}(t), \quad (4.47)$$

na integral de trajetória (4.41). Se formos capazes de integrar a expressão exatamente para  $Z(\lambda^\pm)$ , mantendo  $a^\pm(t)$  fixo, a PDF da circulação será escrita como

$$\rho(\omega^\pm) = \int Da^\pm \bar{\rho}[a^\pm] \rho[\omega^\pm | a^\pm], \quad (4.48)$$

Onde  $\bar{\rho}[a^\pm]$  é a função densidade de probabilidade para fixar a parte simétrica definida por  $a^\pm(t)$ , e  $\rho[\omega^\pm | a^\pm]$  é o PDF condicional para se obter  $\omega^\pm$ , num “background” dado por  $a^\pm(t)$ .

Nosso objetivo final em termos de cálculos, é encontrar a solução para os campos  $\chi^\pm(t)$ , que carregam informações sobre as flutuações rápidas do campos  $z_\alpha^\pm(\vec{x}, t)$ , para em seguida, encontrar a equação de ponto de sela  $\tilde{S}$  e obter o comportamento estatístico da vorticidade.

Usando (4.15), (4.37), (4.46), e fazendo o limite em que a viscosidade vai para zero,  $\nu \rightarrow 0$ , nos podemos escrever (4.44) como

$$\begin{aligned} & \partial_t \hat{z}_\alpha^\pm - \sigma_{\beta\alpha}^\mp \hat{z}_\beta^\mp + \sigma_{\beta\gamma}^\mp x_\gamma \partial_\beta \hat{z}_\alpha^\pm + \partial_\alpha Q^\pm + \partial_\beta (\delta(z) \tilde{Q}_{\beta\alpha}^\pm) = \\ & = i\lambda^\pm \epsilon_{3\alpha\beta} \frac{x_\beta}{r_\perp} \delta(r_\perp - R) \delta(z) \delta(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Temos agora um conjunto completo de equações acopladas dadas pela equações (4.39) e (4.49). Uma observação crucial é que o termo de viscosidade na (4.44) tem sinal oposto, se comparado com os que aparecem nas equações de fluidos usuais. Impomos, portanto, que  $\hat{z}_\alpha^\pm = 0$ , para  $t > 0$ . Desta forma, (4.49) nos dá a condição de borda

$$\hat{z}_\alpha^\pm(\vec{x}, 0^-) = i\lambda^\pm \epsilon_{3\beta\alpha} \frac{x_\beta}{r_\perp} \delta(r_\perp - R) \delta(z). \quad (4.50)$$

Faremos também  $\hat{z}_\alpha^\pm(\vec{x}, t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow -\infty$ . A equação (4.49) para  $\hat{z}_\alpha^\pm(\vec{x}, t)$  pode ser resolvido através “ansatz”

$$\hat{z}_\alpha^\pm(\vec{x}, t) = \epsilon_{3\beta\alpha} x_\beta \delta(z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\pm(t) r_\perp^{n-1} \delta^{(n)}(r_\perp - R), \quad (4.51)$$

onde  $\delta^{(n)}(r_\perp - R) = d^n \delta(r_\perp - R) / dr_\perp^n$ . O problema de encontrar  $\hat{z}_\alpha^\pm$  é levado agora para o cálculo de  $c_n^\pm(t)$ . A condição de borda (4.50) torna-se

$$\begin{aligned} c_0^\pm(0^-) &= i\lambda^\pm, \\ c_n^\pm(0^-) &= 0, \quad (n > 0) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nos encontramos, substituindo (4.51) em (4.49),

$$\frac{d}{dt}C_n = [A - (2 + n)B]C_n - BC_{n-1}, \quad (4.53)$$

com  $C_{-1} \equiv 0$  e

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & a^-(t) \\ a^+(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} a^-(t) & 0 \\ 0 & a^+(t) \end{bmatrix},$$

$$C_n(t) = \begin{bmatrix} c_n^+(t) \\ c_n^-(t) \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Portanto, nós escrevemos  $Q = 0$ , e

$$\tilde{Q}^\pm(r_\perp, t) = -2\chi^\pm(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\pm(t) \int_0^{r_\perp} d\xi \xi^n \delta^{(n)}(\xi - R). \quad (4.55)$$

Uma solução exata para  $C_n(t)$  pode ser encontrada no caso onde  $[A, B] = 0$ . Matrizes A e B comutam somente se  $a^+(t) = a^-(t) \equiv a(t)$ , o que significa que

$$\partial_\alpha b_\beta + \partial_\beta b_\alpha = 0,$$

$$\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha = 2a(t) \cdot (\delta_{\alpha\beta} - 3\delta_{3\alpha}\delta_{3\beta}). \quad (4.56)$$

Pela equação (4.56), com as flutuações implementadas, observamos que a taxa de variação do campo magnético é nula. Até mesmo pela necessidade de viabilidade do cálculo, somos compelidos a estudar a PDF condicional das variáveis de circulação numa configuração de fluxo onde (4.56) é verificada. Esta restrição não é tao severa, pois ainda seremos capazes de encontrar predições bem definidas para flutuações de intermitência das circulações dos campos de velocidade e magnética.

A solução exata da (4.53) é dada por

$$C_n(t) = \frac{i}{n!} e^{-\int_0^t dt' (2B-A)} \left( e^{-\int_0^t dt' B} - 1 \right)^n \tilde{\lambda}, \quad (4.57)$$

onde

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

A série infinita (4.51) pode ser somada de forma exata para os campos, em termos de  $\hat{v}_\alpha$  e  $\hat{b}_\alpha$ . Lembrando que  $\hat{z}_\alpha^\pm = (\hat{v}_\alpha \pm \hat{b}_\alpha)/2$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{v}_\alpha(\vec{x}, t) &= i\lambda\epsilon_{3\beta\alpha}\frac{x_\beta}{r_\perp}\delta(r_\perp - Re^{\int_0^t dt' a(t')})\delta(z), \\ \hat{b}_\alpha(\vec{x}, t) &= i\lambda_b\epsilon_{3\beta\alpha}\frac{x_\beta}{r_\perp}e^{-2\int_0^t dt' a(t')}\delta(r_\perp - Re^{\int_0^t dt' a(t')})\delta(z). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para encontrar a ação de ponto-de-sela  $\tilde{S}^{(0)}$ , é necessário fixar  $\chi^\pm(t)$ . Usando (4.46), escrevemos as equações. (4.39) como

$$\frac{d}{dt}\chi^\pm + a(\chi^+ + \chi^-) = -i \int d^3\vec{x} \partial_{[1} D_{2]_\alpha}^\pm(|\vec{x}'|)\hat{z}_\alpha^\pm(\vec{x}, t). \quad (4.60)$$

Substituindo as soluções para  $\hat{z}_\alpha^\pm(\vec{x}, t)$  na (4.60), obtemos, para  $t < 0$ ,

$$\frac{d}{dt}\chi^\pm + a(\chi^+ + \chi^-) = [l_1^\pm + l_2^\pm e^{-2\int_0^t dt' a(t')}]e^{2p\int_0^t dt' a(t')}, \quad (4.61)$$

onde

$$\begin{aligned} l_1^\pm &= -2\pi p R^{2p} \lambda \left( \frac{D_1}{L_1^{2p}} \pm \frac{D_2}{L_2^{2p}} \right), \\ l_2^\pm &= \mp 2\pi p R^{2p} \lambda_b \left( \frac{D_1}{L_1^{2p}} \pm \frac{D_2}{L_2^{2p}} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

A idéia agora é considerar os efeitos de configurações independentes do tempo,  $a(t) = a$ . Portanto, reescreveremos a integral de trajetória dos campos arbitrários  $a(t)$  por uma integração ordinária em  $a$ , faremos  $\chi^\pm(t) \rightarrow 0$ , para  $t \rightarrow -\infty$ , o que ocorre somente se  $a > 0$  e  $p > 1$ . Implementando estas condições, obtemos

$$\chi^\pm(t) = \frac{(2p+1)l_1^\pm - l_1^\mp}{4ap(p+1)} \exp[2pat] + \frac{(2p-1)l_2^\pm - l_2^\mp}{4ap(p-1)} \exp[2(p-1)at]. \quad (4.63)$$

A ação de ponto-de-sela pode ser escrita agora como

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(0)} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dt \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' [\hat{z}_\alpha^+(\vec{x}, t) D_{\alpha\beta}^+(\vec{x} - \vec{x}') \hat{z}_\beta^+(\vec{x}', t) \\ &\quad + \hat{z}_\alpha^-(\vec{x}, t) D_{\alpha\beta}^-(\vec{x} - \vec{x}') \hat{z}_\beta^-(\vec{x}', t)] - \lambda^+ \omega^+ - \lambda^- \omega^-. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Usando (4.59) e (4.61), podemos calcular a forma quadrática de  $\lambda$  e  $\lambda_b$  para a ação  $\tilde{S}^{(0)}$ . Com a ajuda da notação introduzida na análise do limite viscoso, (4.30) ( $S(\lambda, \lambda_b) = -\lambda^2\eta_1 - \lambda_b^2\eta_2 - \lambda\lambda_b\eta_3$ ), temos

$$\eta_1 = \frac{D_1 p f(p)}{L_1^{2p}(p+1)}, \quad \eta_2 = \frac{D_1 p f(p)}{L_1^{2p}(p-1)}, \quad \eta_3 = \frac{2D_2 f(p)}{L_2^{2p}}, \quad (4.65)$$

onde, em termos de funções gamma,

$$f(p) = \frac{\pi^2 R^{2(p+1)}}{a} \left[ 2 - \frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+2)} \right]. \quad (4.66)$$

Exigimos que a ação de ponto-de-sela  $\tilde{S}^{(0)}$  seja positiva definida (depois do mapeamento analítico  $\lambda^\pm \rightarrow i\lambda^\pm$ ), o que implica em  $f(p) > 0$ , isto é  $p < 2$ , e ainda que  $p > 1$ . Assim, nosso formalismo é indicado para uma teoria não-viscosa onde  $1 < p < 2$  (o que acontece em particular para  $D_2 = 0$ ). Porém, a condição abaixo também for satisfeita

$$\frac{1}{p^2} > 1 - \left[ \frac{D_1 L_2^{2p}}{D_2 L_1^{2p}} \right]^2. \quad (4.67)$$

É interessante observar que  $\eta_2$  diverge para  $p \rightarrow 1$ , assim, a PDF da vorticidade torna-se mais larga neste limite. Este fato pode ser interpretado fisicamente como devido a um desacoplamento progressivo dos campos magnéticos e de velocidade para  $p$  unitário, numa realização de fluxo onde o campo magnético desaparece. O campo de velocidade se comportará do mesmo modo que na turbulência hidrodinâmica pura, embora a circulação magnética torne-se fortemente difusa, sob a ação de forças estocásticas externas.

Utilizando as definições de  $\eta$ 's em (4.65), a PDF condicional para as variáveis de circulação,  $\rho(\omega, \omega_b | a)$ , podemos obter uma expressão de forma semelhante a definida em (4.33).

$$\rho(\omega, \omega_b | a) \sim \exp \left[ -\eta_2 \omega^2 - \eta_1 \omega_b^2 + \eta_3 \omega \omega_b \right]. \quad (4.68)$$

No qual, pela dependência de  $f(p)$ , temos

$$\rho(\omega, \omega_b | a) \sim \exp \left[ -\frac{\omega^2}{a} - \frac{\omega_b^2}{a} + \frac{\omega \omega_b}{a} \right]. \quad (4.69)$$

Obtemos agora, lembrando (4.48) ( $\rho(\omega^\pm) = \int Da^\pm \bar{\rho}[a^\pm] \rho[\omega^\pm | a^\pm]$ ), a PDF da vorticidade como

$$\rho(\omega, \omega_b) = \int_0^\infty da \bar{\rho}(a) \rho(\omega, \omega_b | a). \quad (4.70)$$

Esta é uma regra de soma assintótica para grandes valores de  $\omega$  ou  $\omega_b$ .

Supondo que a função desconhecida  $\bar{\rho}(a)$  tenha um limite finito para  $a \rightarrow 0$ , somos levados assim, a um decaimento algébrico da cauda da PDF

$$\rho(\omega, \omega_b) \sim \left[ \frac{D_1 p}{L_1^{2p}(p-1)} \omega^2 + \frac{D_1 p}{L_1^{2p}(p+1)} \omega_b^2 - \frac{2D_2}{L_2^{2p}} \omega \omega_b \right]^{-3/2}, \quad (4.71)$$

um resultado que sinaliza a natureza intermitente das flutuações da vorticidade em turbulência magnetohidrodinâmica. Em particular, podemos obter da (4.71) a cauda da PDF para a vorticidade magnética como

$$\rho(\omega_b) = \int d\omega \rho(\omega, \omega_b) \sim |\omega_b|^{-2}. \quad (4.72)$$

Um comportamento análogo segue-se para a PDF da vorticidade da velocidade.

$$\rho(\omega) = \int d\omega_b \rho(\omega, \omega_b) \sim |\omega|^{-2} \quad (4.73)$$

Com maior probabilidade o sistema magnetohidrodinâmico ocupa estados onde, por exemplo, o campo magnético é pequeno, o que nos permite conjecturar, que os resultados (4.72) e (4.73) sejam resultados gerais, válidos além de uma seleção específica de ensembles num regime completamente turbulento. É importante mencionar que cálculos similares para o caso puro de turbulência, revela flutuações de menor intermitência para a cauda da PDF da vorticidade  $\rho(\omega) \sim |\omega|^{-3}$ . Não temos uma explicação, pelo fato de termos encontrado um decaimento algébrico da PDFs, no limite de grandes  $\lambda^\pm$ , mais suave que o encontrado em outros trabalhos.

# Capítulo 5

## CONCLUSÕES

O bom entendimento do fenômeno da turbulência não pode ser considerado como um empreendimento trivial, porém a grande gama de ferramentas disponíveis (experimentais, computacionais e teóricas) tem levado a um melhor conhecimento do fenômeno, trazendo grandes expectativas para maiores avanços. Nesta tese seguimos a linha de analisarmos a turbulência como sendo gerada pela dinâmica de vórtices, e particularmente, nos interessamos por três pontos :

- Analisar a evolução caótica de um tubo de vorticidade;
- Quantificar a fractalidade de uma linha de vórtice através de simulações numéricas;
- Estudar a função distribuição de probabilidade da vorticidade em magnetohidrodinâmica.

Desenvolvemos um modelo dinâmico para descrever um fluido em regime turbulento com número de Reynolds grande, e estudamos como se comporta a ação quando consideramos um tubo de vorticidade submetido a diversas formas de função de correlação força-força. Acreditamos que diferentes formas de função de correlação força-força, possam nos levar à resultados físicos diferentes, possivelmente incluindo algum modelo que descreva resultados numéricos e experimentais. No contexto de “wavelets”, já se observa que na escala de dissipação, antes que haja a dissipação de energia, acontece uma transferência de energia do fluxo coerente para o fluxo incoerente proporcional a  $k^2$ . No que diz

respeito a resultados numéricos, quando estamos interessados no aspectos da fractalidade de uma linha de vórtice fechada, esta mesma teoria descrita acima, mostrou-se satisfatória para reproduzir resultados de modelos cinemáticos descritos na literatura.

No capítulo 4 desta tese, estudamos a Função Distribuição de Probabilidade (PDF) da vorticidade, no contexto da magnetohidrodinâmica estocástica. Para o caso do limite viscoso, encontramos uma forma gaussiana para a PDF da vorticidade. No limite não-viscoso, consideramos o tensor  $\partial_\alpha z_\beta^\pm + \partial_\beta z_\alpha^\pm$  como um background quase estático, com o intuito de contornar o problema dimensional dos vínculos impostos na ação de ponto-de-sela no formalismo original de integral de trajetória. Como resultado final para o caso não-viscoso, obtivemos uma regra de soma para a estatística das variáveis de vorticidade e predições quantitativas para o decaimento algébrico da cauda da PDF.

Como resultados principais podemos destacar:

- Propusemos o modelo de plaqueta via técnica funcional de Martin-Siggia-Rose, e o aplicamos a uma linha de vórtice. Em seguida consideramos um tubo de vorticidade de raio da seção transversal  $\eta$ , na escala de dissipação, e analisamos o comportamento da ação para funções de correlação força-força proporcional a  $k^{-n}$ . Encontramos que para  $n = 2, 3$  e  $4$ , a ação se comporta respectivamente a  $S \sim \frac{1}{\eta^4}, \frac{1}{\eta^5}, \frac{1}{\eta^6} (\int dt dx_3 \Psi^2(x_3, t))$ , onde  $\Psi_\alpha \equiv \dot{x}_\alpha - v_\alpha$  é o campo responsável pela evolução do tubo de vorticidade. Estes resultados nos torna aptos a estudar o espectro de energia para cada teoria considerada;

- Considerando uma linha de vórtice fechado, observado numa simulação numérica auto-induzida, encontramos uma dimensão fractal de 1.69 (valor muito próximo da dimensão fractal de um polímero). Já quando simulamos o vórtice submetido ao modelo de plaquetas com uma função de correlação força-força proporcional a  $(k^2 + m^2)^{-1}$  encontramos uma dimensão fractal tendendo para 2.5 (valor também encontrado utilizando-se de modelos cinemáticos), mesmo para forças estocástica de pequena intensidade.

- Na análise da magnetohidrodinâmica, obtivemos uma regra de soma para estatística da vorticidade do campo  $z_\alpha^\pm$  e encontramos um decaimento para a cauda da PDF da vorticidade magnética como  $\rho(\omega_b) \sim |\omega_b|^{-2}$ , e um comportamento análogo para a cauda



da PDF da vorticidade da velocidade,  $\rho(\omega) \sim |\omega|^{-2}$ , evidenciando uma forte intermitência.

Como perspectivas imediatas vindas desta tese, podemos destacar:

- Estudar como se comporta o espectro de energia para os três modelos estudados no Capítulo 3, verificando a validade do modelo e para qual função de correlação força-força conseguimos reproduzir resultados numéricos e experimentais;

- Estudar a fractalidade, quando simulamos a evolução de uma linha de vórtice fechada regida pelo modelo físico desenvolvido nesta tese, considerando funções de correlação força-força proporcionais a  $(k^2 + m^2)^{-2}$  e  $(k^2 + m^2)^{-3/2}$ ;

- Aplicar o modelo dinâmico desenvolvido nesta tese, para simular a evolução de filamentos de vórtice;

- Analisar a magnetohidrodinâmica considerando flutuações do campo  $z^\pm$  em torno das soluções das equações de ponto-de-sela;

- Estudar o efeito da quebra de paridade no modelo de magnetohidrodinâmica desenvolvido nesta tese.

A equação de Navier-Stokes, talvez seja a ferramenta mais empregada para o estudo da turbulência, tanto sob o aspecto teórico, quanto computacional. Muito dos modelos físicos desenvolvidos empregando as técnicas funcionais, por exemplo, partem destas equações, e estes modelos podem ser empregados na implementação de algoritmos que simulam numericamente a evolução de objetos físicos, como por exemplo uma linha de vórtice fechada. Uma outra possibilidade ainda, é a solução numérica destas equações sob as mais diversas possibilidades de funções de correlação força-força. No entanto, é a teoria de Kolmogorov (K41), apesar de não prever os fenômenos de intermitência, que nos leva a resultados notáveis quando comparados com dados experimentais.

Visto a grande dificuldade de solução analítica das equações de Navier-Stokes e a constatação de que a teoria de Kolmogorov já está bem estabelecida, fica como um grande caminho a ser seguido, a busca por modelos físicos e a aplicação de técnicas de simulação numérica para um maior entendimento do fenômeno da turbulência.

Podemos colocar também como perspectivas, a possível interação com grupos experi-

mentais, e então caminhar para um trabalho que possa integrar teoria, análise computacional e experimental.

# Capítulo 6

## APÊNDICE A

Vejamos um exemplo simples para ilustrar o cálculo do Jacobiano de uma transformação. Iremos calcular o Jacobiano para o caso da turbulência Burgers (1+1 dimensões).

Iniciaremos com a definição:

$$\int dx \delta(x) f(x) = f(0). \quad (6.1)$$

Considere a igualdade abaixo,

$$\int dx \delta(x) f(x) = \int dx J(x) \delta(ax) f(x), \quad (6.2)$$

onde  $J(x)$  é chamado Jacobiano da transformação. Qual deve ser o Jacobiano, para que essa igualdade seja satisfeita?

Considere a integral abaixo, fazendo  $ax \rightarrow x'$ , teremos

$$\int dx \delta(ax) f(x) = \frac{1}{a} \int dx' \delta(x') f\left(\frac{x'}{a}\right) = \frac{1}{a} f(0). \quad (6.3)$$

Assim, comparando as equações (6.1), (6.2) e 6.3, podemos dizer que

$$J(x) = \frac{\delta(ax)}{\delta x}, \quad (6.4)$$

o que equivale fazer  $\delta(x) \rightarrow a\delta(ax)$ , ou ainda  $J(x) = a$ . Iremos assumir agora que para duas variáveis de integração teremos,

$$\int dx dy \delta(x) \delta(y) f(x) f(y) = \int dx dy J(x, y) \delta(ax) \delta(ay) f(x) f(y), \quad (6.5)$$

onde  $J(x, y) = ab$ , para satisfazer a igualdade. Poderemos escrever então que

$$J(x, y) = \det M_{\alpha\mu}(x, y) \quad (6.6)$$

e

$$M_{\alpha\mu}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\delta(ax)}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta(ay)}{\delta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Generalizando o exposto acima, para as equações de Navier-Stoke, podemos escrever que

$$M_{\alpha\mu}(x, y) = \frac{\delta}{\delta v_\mu} [(\partial_t v_\alpha + \Pi_{\alpha\beta} v_\sigma \partial_\sigma v_\beta - \nu \partial^2 v_\alpha - \Pi_{\alpha\beta} f_\beta)], \quad (6.8)$$

onde podemos encontrar

$$\begin{aligned} M_{\alpha\mu}(x, y) &= \delta_{\alpha\mu} \delta^3(x - y) \partial_t \delta(t - t') + \\ &\quad \Pi_{\alpha\beta} \delta_{\sigma\mu} \delta^3(x - y) \delta(t - t') \partial_\sigma v_\beta + \\ &\quad \Pi_{\alpha\beta} v_\sigma \partial_\sigma \delta_{\beta\mu} \delta^3(x - y) \delta(t - t') - \nu \partial^2 \delta^3(x - y) \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Se considerarmos o problema da turbulência Burgers (turbulência em  $(1 + 1)$  dimensões), ficaremos com uma matriz diagonal  $2 \times 2$ , e voltaremos ao exemplo simples da (6.5), para a qual temos  $J(x, y) = \det M_{\alpha\mu}(x, y) = ab$ . Considere os campos anticomutantes de Grassmann  $c_1, c_2, \bar{c}_1$  e  $\bar{c}_2$  com as propriedades gerais

$$c^2 = 0, \quad \int dc = 0 \text{ e } \int dcc = 1, \quad (6.10)$$

e a integral

$$\int d\bar{c}_1 dc_1 dc_2 d\bar{c}_2 \exp(\bar{c}_\alpha M_{\alpha\mu} c_\mu), \quad (6.11)$$

com

$$\bar{c}_\alpha M_{\alpha\mu} c_\mu = a\bar{c}_1 c_1 + b\bar{c}_2 c_2. \quad (6.12)$$

Expandindo a exponencial de (6.11) considerando (6.12), e usando as propriedades (6.10), encontraremos

$$\exp(a\bar{c}_1c_1 + b\bar{c}_2c_2) = 1 - a\bar{c}_1c_1 - b\bar{c}_2c_2 - \bar{c}_1c_1\bar{c}_2c_2ab. \quad (6.13)$$

Integrando, achamos

$$\int d\bar{c}_1dc_1dc_2d\bar{c}_2 \exp(\bar{c}_\alpha M_{\alpha\mu}c_\mu) = ab. \quad (6.14)$$

Assim, para Turbulência em  $(1 + 1)$  dimensões (Turbulência de Burgers), o Jacobiano poderá ser escrito como

$$J[v] = \int d\bar{c}_1dc_1dc_2d\bar{c}_2 \exp(\bar{c}_\alpha M_{\alpha\mu}c_\mu), \quad (6.15)$$

causando assim modificação na ação de Martin-Siggia-Rose, na qual teremos que implementar a contribuição dos campos de Grassmann.

# Referências Bibliográficas

- [1] O. Reynolds, *Phil. Trans. R, Soc, London A* **174**, 935 (1883).
- [2] Lord Rayleigh, *Proc. London Math. Soc.* **11**, 57 (1880).
- [3] L.F. Richardson, *Weater Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, Cambridge (1922).
- [4] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 9 (1941). Reprinted in *Proc. R. Soc. London A* **434**, 9 (1991).
- [5] B.B. Mandelbrot, *J. Fluid. Mech*, **62** 331 (1974); B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York (1983).
- [6] U. Frisch, *Turbulence - The Legancy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridg (1995).
- [7] J.M. Burgers, *Adv. Appl. Mech.* **1**, 171 (1948).
- [8] A. Migdal, *Int. J. Mod. Phys.* **9**, 1197 (1994).
- [9] N. Cao, S. Chen and K.R. Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 616 (1996).
- [10] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition. Pergamon Press, Oxford (1987).
- [11] A.N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962) .
- [12] A.M. Obukhov, *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962) .

- [13] F. Hausdorff, *Mathematische Annalen* **79**, 157 (1919).
- [14] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani, *J. Phys. A* **17**, 3521 (1984).
- [15] G.K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1953).
- [16] A.J. Chorin, *Vorticity and Turbulence*, Springer, Berlin (1994).
- [17] L. Moriconi and F.I. Takakura, *Phys. Rev. E* **58**, 3187 (1998).
- [18] G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev and A. Migdal, *Phys. Rev. E* **54**, 4896 (1996).
- [19] A.J. Chorin, *Commun. Math. Phys.* **83**, 517-535 (1982)
- [20] A.J. Chorin, *Commun. Math. Phys.* **132**, 519-536 (1990)
- [21] A.J. Chorin, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1947 (1988).
- [22] D.W. Moore and P.G. Saffman, *Phil Trans. R. Soc. London Ser. A* **272**:403-29.
- [23] L. Moriconi and F.A.S. Nobre, "*Stochastic Modeling of Vortex Entanglement*", cond-mat/0404745.
- [24] L. Moriconi and F.A.S. Nobre, work in progress.
- [25] L. Moriconi and F.A.S. Nobre, *Phys. Rev. E* **65**, 036302 (2002).
- [26] P.C. Martin, E.D. Siggia and H.A. Rose, *Phys. Rev. A* **8**, 423 (1973).
- [27] V. Gurarie and A. Migdal, *Phys. Rev. E* **54**, 4908 (1996).
- [28] M. Jansen, O. Vielweger, U. Fasternrath and J Hadju, *Introduction to the Theory of Integer Quantum Hall Effect*, VCH, Weinhen (1994).
- [29] P. Brax, J. L. Meunier and R. Peschanski, *Z. Phys. C* **62**, 649 (1994).
- [30] G. Paladin and A. Vulpiani, *Phys. Rep.* **156**, 147 (1987).

- [31] F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger and R.A. Antonia, *J. Fluid Mech.* **140**, 63 (1984).
- [32] J. Zinn-Justin, *Field Theory and Critical Phenomena*, Claredon Press Oxford (1989).
- [33] D. Lohse, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3223 (1994).
- [34] K. Sreenivasan, *Phys. Fluids* **7**, 2778 (1995).
- [35] H.W. Wyld, *Ann. Phys.* **14**, 143 (1961).
- [36] Y. Gayne, *Contribution à l'étude expérimentale de l'intermittence de la turbulence à petiti échelle*, Thèse de Docteur-Ingénieur de Grenoble, (1980); F. Anselmet, Y. Gayne and J. Hopfinger, *J. Fluid. Mech* **140**, 63-89, (1983).
- [37] E. Battaner, *Astrophysical Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1996).
- [38] W.M. Elsasser, *Phys. Rev.* **79**, 183 (1950).
- [39] Z.S. She, E. Jackson and S.A. Orszag, *Nature* **344**, 226 (1990); I. Hosokawa and K. Yamamoto, *J. Phys. Soc. Japan* **59**, 401 (1990).
- [40] Z.S. She and E. Lévéque, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336 (1994).
- [41] M Farge, G. Pellegrino and K. Schneider, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 054501-1 (1994).
- [42] T.F. Buttke, *Jounal Computation Physics* **76**, 301-326 (1988).
- [43] V. Yakhot and S.A. Orszag, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1722 (1986).
- [44] L.M. Smith ans S.L. Woodruff, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30**, 275 (1998).
- [45] T. Araki, M. Tsubota and S.K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 145301-1 (2002).
- [46] D. Kivotides and A. Leonard, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 155301-1 (2001); D. Kivotides and A. Leonard, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 234503-1 (2003)
- [47] A. Chekhlov and V.Yakhot, *Phys. Rev. E* **52**, 5681 (1995).

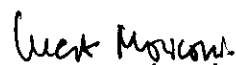


- [48] A.M. Polyakov, *Phys. Rev. E* **52**, 6183 (1995).
- [49] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford, CA (1982).
- [50] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, vol.2. Wiley, New York (1971).
- [51] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccone, C. Baudet, F. Massaioli and S. Succi, *Phys. Rev. E* **48**, R29 (1993).
- [52] E.A. Novikov, *Zh. Exper. Teor. Fiz.* **47**, 1919 (1964).
- [53] H.A. Rose and P.-L. Sulem, *J. Phys. France*, 441 (1978).
- [54] P.G. Saffman and D.I. Pullin, *Annu. Rev. Fluid.* **30**, 31-51 (1998).

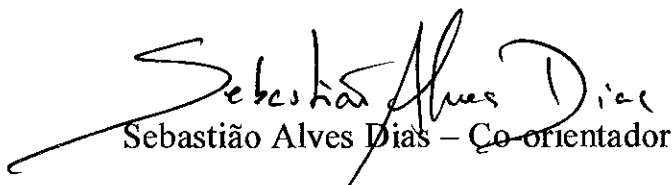
# **“MODELAGEM ESTOCÁSTICA DA VORTICIDADE EM FLUXOS TURBULENTOS”**

***Francisco Augusto Silva Nobre***

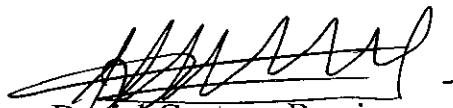
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Ministério da Ciência e Tecnologia, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



Luca Moriconi – Presidente/Orientador



Sebastião Alves Dias – Co-orientador

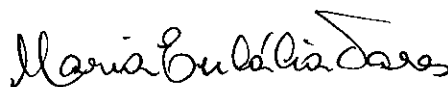


Daniel Gustavo Barci

*Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz.*  
Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz



Francesco Toppan



Maria Eulália Vares

Rio de Janeiro, 15 de junho de 2004