

TESE DE  
DOUTORADO

**Contribuição à Teoria do Campo de Spin-2  
Segundo o Formalismo de Fierz**

RONALDO PENNA NEVES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 2004

# Agradecimentos

A Mário Novello, pela sua orientação, pela amizade e pelo exemplo marcante de um cientista entusiasmado com o seu trabalho.

Aos participantes do “Pequeno Seminário”, sempre dispostos a colaborar com discussões interessantes, e que ajudam a dar ao Grupo de Cosmologia e Gravitação do CBPF a atmosfera agradável de um ambiente onde há muita seriedade e competência acadêmica, mas também calor humano.

A Renato Klippert, Santiago Perez Bergliaffa e Herman Mosquera Cuesta, com quem pude discutir algumas partes deste trabalho.

Ao colega e amigo Gustavo Dourado Barbosa, pelo convívio fraterno ao longo destes anos de doutorado, pelo companheirismo, pela solidariedade, e por ter me ensinado a apreciar o lado divertido dos filmes ruins.

A Myriam S. Coutinho, pela sua simpatia e disposição para ajudar os alunos do CBPF.

Aos meus pais, cujo apoio foi fundamental para a realização deste trabalho, por todo seu incentivo.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

# Resumo

Fazemos neste trabalho uma análise crítica da teoria NDL, mostrando que, contrariamente às esperanças de seus criadores, ela não é uma teoria consistente da gravitação. Esta teoria foi formulada usando-se a representação de Fierz para o campo de spin-2, com base em uma analogia entre o tensor de Fierz e o tensor do campo eletromagnético, e tendo a teoria de Born-Infeld como referência. Mostramos que os seus problemas decorrem de esta analogia ser imperfeita e limitada, examinando o problema de Cauchy e a teoria de perturbações.

Investigamos também a teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo, anteriormente considerada problemática, mostrando que a generalização para um espaço-tempo arbitrário do formalismo de Fierz leva a uma teoria que é naturalmente compatível com as equações de Einstein, descrevendo corretamente um campo de spin-2 que se propaga de forma causal. Aplicamos então esta teoria geral para o caso particular em que um campo de spin-2 se propaga no espaço-tempo de de Sitter (ou anti-de Sitter), e, comparando com a perturbação das equações de Einstein, encontramos uma relação precisa e isenta de arbitrariedades entre a massa do gráviton e a constante cosmológica. Mostramos assim que, se o gráviton possui uma massa, então o espaço-tempo de fundo fundamental para o vácuo deve ser o de anti-de Sitter, não o de Minkowski.

# Abstract

We make a critical analysis of the NDL theory, showing that, despite its creators' hopes, it is not a consistent theory of gravitation. This theory was formulated with the use of the Fierz description for the spin-2 field, based on an analogy between the Fierz tensor and the electromagnetic field tensor, and having Born-Infeld's theory as a reference. We show that its problems follow from this analogy's imperfections and limitations, examining the Cauchy problem and the perturbation theory.

We also investigate the linear theory for the spin-2 field in the curved spacetime, previously thought to be problematic, showing that the generalization of the Fierz formalism to an arbitrary spacetime leads to a theory which is naturally compatible with the Einstein equations, giving a correct description of a spin-2 field that propagates causally. We then apply this general theory to the special case of a spin-2 field propagating in the de Sitter (or anti-de Sitter) spacetime, and, by comparing with the perturbation of Einstein Equations, we arrive at a precise and unambiguous relation between the mass of the graviton and the cosmological constant. So, we show that, if the graviton has a mass, then the fundamental background spacetime for the vacuum should be anti-de Sitter, not Minkowski.

# Índice

Agradecimentos .....	iii
Resumo .....	iv
Abstract .....	v
Índice .....	vi
Convenções .....	ix
Introdução .....	1
Parte I – Crítica à teoria NDL .....	16
1 - Formulação de Fierz para a teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo plano .....	17
1.1 - Definições e notação .....	17
1.2 - Equação para o campo sem massa .....	19
1.3 - Simetrias da ação de Fierz-Pauli e do tensor de Fierz .....	22
1.4 - Tensor de energia-momento e teorema de Noether .....	25
1.5 - Problema de Cauchy e graus de liberdade .....	27
1.6 - Teoria do campo com massa .....	30
2 - NDL – Uma classe de teorias para o campo gravitacional .....	33
2.1 - Introdução / Motivação .....	33
2.2 - Ação da teoria e equações para o campo gravitacional na NDL .....	42

2.3 - Modelo tipo Born-Infeld: solução estática esféricamente simétrica para o vácuo . . .	46
2.3.1 - Os parâmetros PPN . . . . .	46
2.3.1 - Uma solução exata . . . . .	48
2.4 - Ondas gravitacionais . . . . .	52
2.5 - Leis de conservação . . . . .	56
3 - Múltiplas possibilidades . . . . .	61
3.1 - Dois limites newtonianos? . . . . .	61
3.1.1 - Primeiro caminho . . . . .	61
3.1.2 - Segundo caminho . . . . .	64
3.2 - O parâmetro PPN $\xi$ . . . . .	70
3.3 - Nova solução estática esféricamente simétrica para o vácuo . . . . .	73
3.4 - Quem é o campo gravitacional? . . . . .	76
4 - O problema de Cauchy e a teoria de perturbações na NDL . . . . .	79
4.1 - O problema de Cauchy . . . . .	79
4.1.1 - Propagação do campo no vácuo . . . . .	80
4.1.2 - Interação com a matéria . . . . .	89
4.2 - Perturbações . . . . .	91
4.2.1 - Equação para o vácuo . . . . .	92
4.2.2 - Equação completa . . . . .	94
4.3 - Comparação com Fierz-Pauli e Einstein . . . . .	99
Parte II – Teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo . . . . .	102
5 - Generalização do formalismo de Fierz para o espaço-tempo curvo . . . . .	103
5.1 - Introdução / Motivação . . . . .	103
5.2 - O tensor de Fierz no espaço-tempo curvo . . . . .	107

5.3 - A equação para o campo de spin-2 .....	109
5.4 - O acoplamento mínimo com o campo gravitacional .....	110
5.5 - O tensor de energia-momento .....	112
5.6 - As restrições à geometria e o problema de Cauchy .....	113
5.6.1 - Campo sem massa .....	114
5.6.2 - Campo com massa .....	116
5.7 - A causalidade da propagação .....	118
6 - Conseqüências para a interpretação da constante cosmológica .....	120
6.1 - Teoria para um campo de spin-2 no espaço-tempo de dS ou de AdS .....	120
6.1.1 - Campo sem massa .....	121
6.1.2 - Campo com massa .....	121
6.1.3 - A massa efetiva .....	122
6.2 - A massa do gráviton na relatividade geral .....	123
6.3 - Anti-de Sitter versus Minkowski .....	125
Conclusão .....	126
Apêndices .....	132
Apêndice A - Identidades envolvendo o tensor de Fierz e seus invariantes .....	133
Apêndice B - Cálculo do tensor de energia-momento de um campo de spin-2 sem massa no espaço-tempo plano .....	135
Apêndice C - O campo gravitacional estático de simetria esférica no vácuo segundo o for- malismo PPN .....	141
Apêndice D - Componentes da conexão métrica de Minkowski em coordenadas esféricas	143
Bibliografia .....	144

# Convenções

- Usamos o símbolo “:=” para indicar uma definição. A equação  $A := B$  significa: “ $A$  é definido como sendo igual a  $B$ .”
- Usamos o símbolo “ $\equiv$ ” para indicar uma identidade. A equação  $A \equiv B$  significa: “ $A$  é idêntico a  $B$ .”
- Os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3, representando as componentes espaciais dos tensores.
- A métrica de Minkowski é representada por  $\gamma_{\mu\nu}$ , em um sistema arbitrário de coordenadas, sendo reservada a notação  $\eta_{\mu\nu}$  para uma escolha específica:  $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .
- $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$  é a conexão métrica em Minkowski:  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda} := \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon\mu, \nu} + \gamma_{\varepsilon\nu, \mu} - \gamma_{\mu\nu, \varepsilon})$ .
- $\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}$  é o tensor de Levi-Civita no espaço-tempo plano, e  $\hat{\eta}_{\alpha\beta\rho\sigma}$  é a sua generalização para espaços-tempos curvos.
- O dual de um tensor é definido por:  $F^{*\alpha\beta} := \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ .
- Usamos as convenções de sinais (---) da referência [84]:

$$\rightrightarrows R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma_{\nu\alpha, \beta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\beta, \alpha}^{\mu} + \Gamma_{\varepsilon\beta}^{\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\varepsilon} - \Gamma_{\varepsilon\alpha}^{\mu} \Gamma_{\nu\beta}^{\varepsilon};$$

$$\rightrightarrows R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu};$$

$$\rightrightarrows R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu};$$

$$\rightrightarrows \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

- Simetrização e anti-simetrização:

$$\blacktriangleright A_{(\mu\nu)} = A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu};$$

$$\blacktriangleright A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}.$$

- Usamos uma vírgula para indicar a derivada simples, uma barra para a derivada covariante em Minkowski e um ponto-e-vírgula para a derivada covariante no espaço-tempo curvo:

$$\blacktriangleright A_{\mu,\nu} = A_{\mu,\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda};$$

$$\blacktriangleright A_{\mu;\nu} = A_{\mu;\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda}.$$

- O d'Alambertiano é designado por  $\square$  em Minkowski e por  $\tilde{\square}$  no espaço-tempo curvo.

# **Introdução**

Este trabalho está dividido em duas partes, que têm como objeto comum de estudo o campo de spin-2. Cada uma destas partes, no entanto, aborda uma questão diferente. Na Parte I, é feito um exame detalhado e crítico de uma certa teoria da gravitação; na Parte II, é construída uma teoria para lidar com campos de spin-2 no espaço-tempo curvo.

Embora possam haver, em princípio, vários campos de spin-2 na natureza, um deles se destaca por sua importância intrínseca: o campo gravitacional. Feynmann [1] apresentou uma argumentação convincente para a razão de o campo gravitacional ter spin igual a dois: se ele tivesse spin zero, a atração gravitacional entre gases quentes seria menor que entre gases frios; se tivesse spin de qualquer valor ímpar, as interações gravitacionais seriam tanto atrativas quanto repulsivas, enquanto sabemos que ela é apenas atrativa; e se tivesse spin de algum valor semi-inteiro, não poderiam haver campos gravitacionais estáticos, o que contraria a bem sucedida teoria newtoniana para baixas velocidades e campos gravitacionais fracos. Restam então os valores de spin pares, maiores ou iguais a dois. Assim, convém adotar a hipótese mais simples e supor que o campo gravitacional tem spin-2, deixando os valores mais altos como um recurso a ser utilizado caso esta hipótese se mostre insuficiente.

Desta forma, impõe-se a necessidade de se formular uma teoria para a gravitação que descreva o campo gravitacional como sendo um campo de spin-2. Há ainda duas propriedades importantes que esta teoria deve satisfazer: ela deve descrever a auto-interação do campo gravitacional e deve se conformar ao fato de esta interação ser de longo alcance. A auto-interação é inescapável, porque a

gravitação é um fenômeno de caráter universal, no sentido de que tudo o que existe interage gravitacionalmente. Não há nada que exista que não possua energia, e é a energia que produz e sente os efeitos da gravitação. Ora, se o campo gravitacional existe, ele possui energia, e portanto ele próprio produz e sente a força gravitacional, interagindo consigo mesmo. Podemos dizer que o campo gravitacional está condenado à auto-interação, como aquela famosa serpente que morde a própria cauda. Em geral, a auto-interação é descrita, matematicamente, por equações não-lineares, donde segue que a teoria para o campo gravitacional deve ser não-linear.

Surge neste ponto uma questão interessante: é um fato experimental que o campo gravitacional interage da mesma maneira com todos os demais campos, o que denominamos *acoplamento universal* (este é um dos aspectos do *princípio de equivalência*, que discutiremos mais adiante). Dado isto, é necessário que a auto-interação do campo gravitacional siga o mesmo modelo deste acoplamento universal, ou é possível que, embora a energia do campo gravitacional produza ela própria força gravitacional, o processo pelo qual isto ocorre seja diferente do que ocorre com os outros campos? Teremos ainda muito a dizer sobre esta questão; de fato, ela está no centro de toda a Parte I deste trabalho.

A outra propriedade importante que uma teoria da gravitação deve respeitar é o seu longo alcance. A atitude tradicional diante desta exigência é interpretá-la como descartando a possibilidade de o campo gravitacional ter massa não-nula. Esta interpretação se baseia na idéia de Yukawa de que o poder de uma interação mediada por um campo provido de massa decai exponencialmente com a distância, sendo assim de alcance limitado [2]. Teremos oportunidade, na Parte II desta tese, de mostrar que esta conclusão não é necessariamente verdadeira no caso específico da gravitação, e exibiremos uma teoria na qual o campo gravitacional possui massa não-nula sem perder a característica de ser de longo alcance.

Contudo, vamos por ora aceitar a hipótese de que o campo gravitacional seja descrito por um campo de spin-2, sem massa, em auto-interação. Uma série de autores, como o próprio Feynman [1], antes dele Kraichnan [3], Gupta [4] e Thirring [5], e ainda Weinberg [6-8] e Ogievetsky e

Polubarinov [9], chegaram a um resultado notável: a teoria da gravitação que emerge ao se considerar a hipótese que acabamos de descrever é precisamente a relatividade geral, a teoria da gravitação formulada por Einstein com base em argumentos geométricos [10,11]. Nesta teoria, a energia gravitacional atua de forma idêntica à de qualquer outra forma de energia, o que foi salientado pelo próprio Einstein no seu artigo de 1916 [10]. O que os autores acima descobriram é que a relatividade geral admite uma descrição alternativa, onde é empregada a linguagem da teoria de campos e não a da geometria riemanniana, envolvendo um campo de spin-2 e não o tensor métrico. Há trabalhos de data mais recente que exploram a equivalência entre estas duas linguagens [12], mas foi Deser, em 1970, quem apresentou a dedução mais compacta da relatividade geral, em termos da linguagem da teoria de campos, a partir da hipótese acima descrita [13].

Particularmente importante para nós é a confirmação feita por Wald, em 1986, de um resultado do qual já se suspeitava anteriormente: utilizando argumentos da teoria de perturbações, ele demonstrou que as únicas teorias não-lineares consistentes para um campo de spin-2 sem massa, e em interação com a matéria, são aquelas que possuem covariância geral, ou seja, cuja simetria de calibre é dada pela invariância por transformações de coordenadas – uma propriedade central da relatividade geral [14] (ver [15] para uma discussão refinada sobre a covariância geral na teoria einsteiniana). Como as demais teorias candidatas a apresentarem covariância geral – como aquelas em que termos quadráticos na curvatura do espaço-tempo são acrescentados à ação de Hilbert-Einstein – não correspondem a teorias para um campo de spin-2 puro, mas para mais de um campo em interação [16], a conclusão é que a relatividade geral é a única teoria que satisfaz plenamente a hipótese de que o campo gravitacional corresponda a um campo de spin-2 (puro) sem massa em auto-interação. Também Weinberg, por outro caminho, nos conduz a uma conclusão semelhante [6-8], assim como Ogievetsky e Polubarinov [9].

Apesar do inegável sucesso da relatividade geral quanto à confrontação com os dados experimentais [17-21], diversas teorias foram e continuam a ser formuladas como alternativas para a descrição dos fenômenos gravitacionais. Entre elas, a teoria de Brans-Dicke, na qual um campo

escalar substitui a constante gravitacional newtoniana [22], a teoria bimétrica de Rosen [23], a teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) [24-28], e várias outras [29,30] (ver também as referências em [17]). Estas teorias costumam ter em comum um desvio da hipótese descrita acima; em geral, elas contam com campos auxiliares, além do campo de spin-2, para descrever o campo gravitacional. Às vezes esses campos auxiliares são dinâmicos (como na teoria de Brans-Dicke e em WIST), às vezes são objetos absolutos, não apresentando uma evolução dinâmica (como na teoria de Rosen).

Boa parte dessas teorias alternativas é formulada de tal forma que elas concordem com a relatividade geral nas previsões para campos gravitacionais relativamente fracos, diferindo significativamente dela apenas nos casos em que o campo gravitacional é muito intenso. Os testes experimentais tendem a se concentrar em campos fracos, como o do sistema solar, sendo os campos fortes mais difíceis de serem submetidos à observação. O caso de campo gravitacional intenso usado com maior sucesso como teste entre teorias rivais é o estudo do pulsar binário, que é suficiente para eliminar da concorrência várias teorias [17,19].

Entretanto, uma segunda motivação para a criação de teorias alternativas para a gravitação pode ser encontrada na resistência que a relatividade geral oferece à unificação teórica formal da gravitação com as demais forças encontradas na natureza (as forças nucleares forte e fraca e a eletromagnética). Especialmente grave é o fato de a relatividade geral apresentar problemas quanto à quantização do campo gravitacional [31,32]. Estes problemas levaram alguns autores a propor novas formulações para a própria relatividade geral, empregando novas ferramentas que ajudassem a lidar com esta questão, e merecem ser citadas aqui as variáveis de Ashtekar, que definem um novo espaço de fase para a relatividade geral, simplificando os vínculos da teoria [33,34]. Estas variáveis correspondem a potenciais do tensor de curvatura conforme, o tensor de Weyl. Há também a teoria de Jordan-Lichnerowicz, na qual as equações do campo gravitacional são dadas em função da divergência do tensor de Weyl, e que se reduzem às equações de Einstein quando é feita uma escolha específica para as condições de contorno [35,36].

No contexto desta busca de alternativas para a descrição do campo gravitacional, não pode deixar de ser notada a existência de duas representações equivalentes para o campo de spin-2 no espaço-tempo plano. A representação tradicional lida com o tensor simétrico  $\varphi_{\mu\nu}$ , que na relatividade geral associa-se à métrica do espaço-tempo,  $g_{\mu\nu}$ . A outra possibilidade, proposta por Fierz e Pauli em 1939, utiliza um tensor de três índices,  $F_{\alpha\beta\mu}$ , que é anti-simétrico no primeiro par de índices e cíclico em todos os três [37,38]. A exploração das possibilidades oferecidas pela variável de Fierz, que ficou esquecida por muito tempo pela comunidade científica, foi retomada no CBPF, em uma seqüência de três teses de doutorado orientadas por M. Novello [39-41].

N. Pinto-Neto, na primeira destas teses [39,42], identificou a variável de Fierz com o limite de baixas energias do potencial de Lanczos, que possui as mesmas simetrias daquela e corresponde a um potencial do tensor de Weyl [43-45]. Ele formulou então uma teoria não-linear para a gravitação em termos desta variável, que ele denominou de Fierz-Lanczos, e mostrou que as equações resultantes correspondem às equações de Jordan-Lichnerowicz acrescidas de um termo que depende das derivadas do tensor de energia-momento do campo gravitacional. Estas equações são equivalentes às de Einstein modificadas por um termo quadrático na curvatura. Pinto-Neto mostrou que este termo adicional, embora não possa ser anulado por uma transformação de coordenadas, por ser um verdadeiro tensor, pode sê-lo por uma escolha de calibre para a variável de Fierz-Lanczos. Assim, a sua teoria corresponde a uma generalização da relatividade geral, contendo esta última como um caso particular [46]. Como existe alguma relação entre o potencial de Lanczos e as variáveis de Ashtekar, já que são ambos potenciais do tensor de Weyl – embora esta relação ainda não tenha sido explicitada –, ele concluiu que sua teoria pode colaborar para um melhor entendimento da questão da quantização do campo gravitacional.

Um outro caminho para a utilização da variável de Fierz foi seguido por L. R. de Freitas, que na segunda das teses acima citadas explorou as analogias entre o tensor de Fierz e o tensor do campo eletromagnético,  $F_{\mu\nu}$  [40]. Usando a variável de Fierz, ela estudou a quantização do campo de spin-

2 no caso linear [47], e desenvolveu também uma lagrangiana não-linear para o campo de spin-2, análoga à lagrangiana do eletromagnetismo não-linear de Born-Infeld [48-51], tendo como limite linear a teoria do campo de spin-2 de Fierz-Pauli [37,38]. Sua motivação era a de encontrar formas alternativas de descrever a interação gravitacional, projeto este que foi levado adiante por V. A. De Lorenci, na terceira tese de doutorado orientada por Novello envolvendo a variável de Fierz [41].

A teoria da gravitação resultante, denominada NDL em função de seus criadores, foi apresentada como uma alternativa viável à relatividade geral, tendo as características de uma teoria bimétrica – embora sendo bastante diferente da teoria bimétrica de Rosen [52,53]. A premissa básica sobre a qual se baseia esta teoria é um questionamento a respeito da validade do princípio de equivalência em sua versão forte (ver [17] para uma discussão detalhada sobre o princípio de equivalência). Em sua versão fraca (einsteiniana), segundo a qual a gravitação interage com todos os demais campos da natureza de uma forma universal, apresentando-se como a curvatura do espaço-tempo, este princípio tem abundante corroboração experimental [18-21]. No entanto, sua versão forte, que estende o mesmo princípio para a auto-interação do campo gravitacional, não possui comprovação experimental direta [21]. Apoiando-se então na analogia entre o tensor de Fierz e o tensor do campo eletromagnético, Novello, De Lorenci e de Freitas propuseram que a não-linearidade do campo gravitacional – descrito pelo tensor de Fierz – fosse formalmente semelhante à não-linearidade no caso do eletromagnetismo, tendo a teoria de Born-Infeld como referência. Com esta estratégia, eles desenvolveram uma teoria em que a interação entre o campo gravitacional e os demais campos respeita ao acoplamento universal, sendo a gravitação descrita pela curvatura do espaço-tempo, mas com a auto-interação do campo gravitacional sendo singularizada por um processo diferente, inspirado no eletromagnetismo não-linear.

As ondas eletromagnéticas, na teoria do eletromagnetismo não-linear no espaço-tempo plano, se deslocam seguindo geodésicas de uma métrica efetiva que não corresponde à métrica de Minkowski [54-56]. O mesmo acontece na NDL: nesta teoria, as ondas gravitacionais se propagam em uma geometria efetiva diferente daquela na qual se propagam todos os demais campos, de tal

forma que sua velocidade não coincide com a velocidade das ondas eletromagnéticas, como seria esperado pela relatividade geral [52,57,58]. De acordo com a NDL, as ondas gravitacionais podem até mesmo manifestar birrefringência [59].

Foi estudado o campo gravitacional estático com simetria esférica no vácuo, nesta teoria, tendo os autores concluído que ele está de acordo com os testes experimentais [41,52,60]. Houve também a sugestão de que a NDL descreve corretamente o pulsar binário [61]. Foi ainda argumentado que a diferença mais significativa entre as previsões da NDL e as da relatividade geral se daria em relação às ondas gravitacionais, uma vez que o princípio de equivalência, no que diz respeito à interação entre o campo gravitacional e os demais campos, continua a ser satisfeito nesta nova teoria [52,53].

Contudo, a NDL descreve (ou pretende descrever) o campo gravitacional como um campo de spin-2 puro, sem massa, em auto-interação – exatamente a hipótese que discutimos anteriormente. Como já salientamos, os trabalhos de vários autores, principalmente os de Wald [14], Ogievetsky e Polubarinov [9] e Weinberg [6-8], demonstram que a relatividade geral é a única teoria consistente para um campo gravitacional com estas características. Logo, a NDL falha no seu intento. Vários dos resultados acima mencionados não resistem a uma análise mais rigorosa. A solução citada para o campo gravitacional estático com simetria esférica no vácuo, por exemplo, não é única, o que acarreta problemas. A idéia de se singularizar a auto-interação do campo gravitacional, tratando-a como um processo distinto da interação entre o campo gravitacional e os demais campos, embora válida, não pode ser realizada satisfatoriamente no âmbito de uma teoria para um campo de spin-2 puro sem massa. Também a analogia entre o tensor de Fierz e o tensor do campo eletromagnético se mostra limitada, pois o segundo possui uma invariância de calibre que não encontra uma adequada correspondência no primeiro – e a importância da invariância de calibre não pode ser menosprezada.

Na Parte I deste trabalho, vamos submeter a NDL a uma investigação minuciosa e demonstrar que, contrariamente às alegações de seus autores, ela não é uma teoria viável para a gravitação. No Capítulo 1, apresentaremos a teoria linear do campo de spin-2 em Minkowski formulada na

linguagem do formalismo de Fierz. Este capítulo servirá também de base para todo o trabalho da Parte II. No Capítulo 2, faremos uma revisão dos pontos básicos da teoria NDL, que conta já com algumas correções – o tensor de energia-momento do campo gravitacional havia sido calculado anteriormente de forma incorreta [41,52]. Serão apresentadas, neste capítulo, a solução original para o campo estático esfericamente simétrico no vácuo, a propagação das ondas gravitacionais e a lei de conservação do momento e da energia.

No Capítulo 3, mostraremos que o limite newtoniano da NDL é problemático e que as primeiras correções pós-newtonianas são na verdade indeterminadas. Demonstraremos ainda o fato de a solução para o campo esfericamente simétrico e estático no vácuo não ser única, exibindo uma nova solução, e discutiremos a impropriedade da identificação do tensor de Fierz com o campo gravitacional nesta teoria.

Finalmente, no Capítulo 4 analisaremos o problema de Cauchy para o campo gravitacional na NDL e mostraremos que ele não corresponde verdadeiramente a um campo de spin-2, sendo portanto incoerente com seu próprio limite linear. Examinaremos também a perturbação das equações da NDL, seguindo os passos de Wald, e verificaremos que as equações da teoria são de fato inconsistentes. Terminaremos com uma comparação entre a NDL, a teoria linear da gravitação de Fierz-Pauli e a relatividade geral de Einstein, apontando as semelhanças e diferenças entre estas três teorias e fazendo um balanço crítico da situação da NDL. Os Apêndices contêm algumas informações úteis, com destaque para o cálculo detalhado do tensor de energia-momento do campo de spin-2 (e do campo gravitacional na NDL) no Apêndice B.

Na Parte II, abordaremos um outro tema bastante diferente: a teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo. Estaremos então lidando com um campo de spin-2 qualquer, não necessariamente relacionado à métrica do espaço-tempo; quanto ao campo gravitacional propriamente dito, estaremos em toda a Parte II assumindo a validade da relatividade geral (incluindo a constante cosmológica, quando conveniente).

Desde 1971, quando Aragone e Deser enfrentaram pela primeira vez esta questão, a descrição de um campo de spin-2 com ou sem massa, propagando-se em um espaço-tempo curvo arbitrário, tem sido considerada problemática [62]. Estes autores propuseram uma teoria em que as equações para o campo de spin-2 são derivadas de uma ação que imita a da relatividade geral, sendo a lagrangiana construída com um objeto de três índices que corresponde a uma versão linearizada do símbolo de Christoffel, com o tensor simétrico  $\varphi_{\mu\nu}$  no lugar da métrica:  $2\gamma_{\mu\nu}{}^\lambda := \varphi^\lambda{}_{\mu,\nu} + \varphi^\lambda{}_{\nu,\mu} - \varphi_{\mu\nu}{}^{,\lambda}$ . Eles mostraram então que as equações assim obtidas só descrevem adequadamente um campo de spin-2 quando o espaço-tempo de fundo tem o tensor de curvatura de Ricci proporcional à métrica, o que é incompatível com as equações de Einstein. Desta forma, é impossível, de acordo com a sua teoria, ter uma descrição coerente de um sistema formado por um campo de spin-2 e o campo gravitacional que ele, como qualquer outra matéria, deve produzir e sentir ao mesmo tempo.

Esta incompatibilidade com as equações de Einstein se relaciona com o número de graus de liberdade do campo. Em Minkowski, o campo de spin-2 possui dois graus de liberdade quando não tem massa, e cinco quando tem. No espaço-tempo curvo, a necessidade de que estes números sejam preservados impõe restrições sobre a geometria do espaço-tempo, o que no caso da teoria de Aragone-Deser corresponde a termos o tensor de Ricci proporcional à métrica. Quando o campo tem massa, a constante de proporcionalidade pode ter qualquer valor, mas quando o campo não tem massa, o tensor de Ricci deve se anular.

Uma outra questão que pode levar à imposição de condições adicionais sobre o sistema, quando temos uma interação envolvendo campos com spin maior do que um, é a causalidade da propagação. Neste tipo de interação, é possível que a causalidade seja violada mesmo que o número de graus de liberdade esteja correto. Não é o caso da teoria de Aragone-Deser: a preservação do número de graus de liberdade já é suficiente para garantir a causalidade, embora gere um terceiro problema, que é a incompatibilidade com a relatividade geral. Eles mesmos investigaram diversos

tipos de acoplamento entre o campo de spin-2 e o campo gravitacional, concluindo que são todos problemáticos [63,64].

A restrição à curvatura do espaço-tempo que descrevemos acima tem origem na quebra da simetria de calibre da teoria de Fierz-Pauli – a teoria linear do campo de spin-2 sem massa – quando passamos do espaço-tempo plano para o curvo. Uma maneira de se lidar com esta questão é impor que a lagrangiana tenha a simetria de calibre desejada, e verificar qual é a teoria resultante. Cutler e Wald seguiram este caminho, analisando o caso de coleções consistentes de campos de spin-2 sem massa em interação, o que contém como caso particular um campo de spin-2 sem massa interagindo com o campo gravitacional [65]. Eles mostraram que, nestas coleções, pelo menos um dos campos de spin-2 tem de ser do tipo-fantasma (*ghost field*) para que a teoria seja consistente. Estas coleções foram também investigadas por Boulanger *et al.* [66], com a imposição de a teoria se reduzir a uma soma de lagrangianas de Fierz-Pauli no limite de campos livres. Eles concluíram que não há um equivalente da teoria de Young-Mills para os campos de spin-2.

Entretanto, resultados positivos foram encontrados em um estudo recente sobre um campo de spin-2 com massa no espaço-tempo curvo, em interação não-mínima com o campo gravitacional, realizado por Buchbinder *et al.* [67]. Eles usaram uma lagrangiana escrita como uma série infinita no inverso da massa, e mostraram que o conjunto de equações obtidas é compatível com as equações de Einstein até a ordem de  $1/m$ . Eles mostraram ainda que o sistema tem o número correto de graus de liberdade e que a causalidade é preservada nesta mesma ordem. Mesmo assim, embora positivos, seus resultados são aproximados e só valem para o campo com massa.

Neste trabalho, vamos considerar um campo de spin-2, com ou sem massa, no espaço-tempo curvo, e vamos permitir que a curvatura do espaço-tempo sofra as restrições necessárias para que o sistema seja consistente. Para tanto, vamos recorrer ao formalismo de Fierz e generalizá-lo para espaços-tempos arbitrários. Veremos que as equações que o formalismo de Fierz nos fornece, tenha ou não massa o campo, são compatíveis com a relatividade geral e descrevem um campo de spin-2 com o número correto de graus de liberdade, propagando-se de forma causal. Tudo isto exige a

imposição de uma certa condição sobre a geometria, porém ela recai sobre o tensor de curvatura de Weyl, evitando o problema de incompatibilidade com as equações de Einstein que encontramos na teoria de Aragone-Deser [68].

A diferença entre a teoria que aqui expomos e a de Aragone-Deser é facilmente compreendida quando notamos que, dado que as derivadas covariantes não comutam no espaço-tempo curvo, a generalização das equações do campo de spin-2 em Minkowski para um espaço-tempo arbitrário não é trivial. Estas equações contêm derivadas segundas do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , de tal forma que, ao serem generalizadas para um espaço-tempo arbitrário, alguma escolha deve ser feita sobre a ordem das derivadas covariantes. Evidentemente, diferentes escolhas geram teorias que não são equivalentes. A escolha feita por Aragone e Deser é determinada pela lagrangiana que eles adotaram, que, como já mencionamos, tenta imitar a da relatividade geral. Mas não há realmente uma boa motivação para se adotar esta lagrangiana, e a teoria resultante, como vimos, é incompatível com a própria relatividade geral (na qual, ironicamente, ela busca inspiração). Apesar disto, esta teoria se tornou dominante na literatura.

O formalismo de Fierz, por sua vez, corresponde a uma verdadeira representação alternativa para o campo de spin-2, formulada como tal no espaço-tempo de Minkowski. Sua generalização para um espaço-tempo arbitrário, portanto, é bastante natural, e resulta também ser totalmente isenta de ambigüidades. A ordem das derivadas covariantes dada por esta generalização é diferente daquela da teoria de Aragone-Deser. Acontece então algo interessante: trocando a ordem das derivadas covariantes na equação para o campo, fazemos surgir nela termos proporcionais à curvatura, que podem ser vistos como provenientes de um acoplamento não-mínimo entre o campo de spin-2 e a gravitação. Desta forma, do ponto de vista de Aragone e Deser, nossas equações possuem um acoplamento não-mínimo. Inversamente, do ponto de vista do formalismo de Fierz, é a teoria de Aragone-Deser que apresenta um acoplamento não-mínimo. Assim, a utilização do formalismo de Fierz corresponde a uma redefinição da forma do acoplamento mínimo em relação à teoria anteriormente em voga. Pela mesma razão, nossas equações para o campo de spin-2 com massa

correspondem a um caso particular daquelas estudadas por Buchbinder *et al.*, com a diferença de serem as nossas exatas, com acoplamento mínimo, e totalmente compatíveis com as equações de Einstein em sua forma completa [68].

Convém lembrar aqui que Novello e Pinto-Neto realizaram anteriormente uma outra generalização do tensor de Fierz para o espaço-tempo curvo, identificando-o com o limite linear do potencial de Lanczos [39,42]. A generalização que apresentamos neste trabalho, ao contrário, mantém a relação linear entre o tensor de Fierz e o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , sendo este último considerado independente da métrica do espaço-tempo, que corresponde a um segundo campo de spin-2. Embora tenhamos adotado a representação de Fierz para um campo de spin-2 como nosso ponto de partida, Obukhov e Pereira mostraram que esta representação – e nossa teoria – tem origem no teleparalelismo, que é uma formulação da teoria da gravitação em termos da torção, e não da curvatura, sendo equivalente à relatividade geral descrita em (mais) uma nova linguagem [69].

Um caso particular importante da nossa teoria é a descrição de um campo de spin-2 se propagando no espaço-tempo de de Sitter ( $\Lambda > 0$ ), ou de anti-de Sitter ( $\Lambda < 0$ ), que é a solução fundamental (para o vácuo) das equações de Einstein com constante cosmológica. Quando o campo possui uma massa com o valor especial  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ , que só pode ser positiva em anti-de Sitter, a ação tem uma simetria de calibre análoga à do campo sem massa em Minkowski, de tal forma que o campo fica com apenas dois graus de liberdade. Isto nos levou a definir uma massa efetiva,  $M$ , tal que o campo possui dois graus de liberdade apenas quando  $M$  se nula, tendo cinco caso contrário [70].

Deser e Waldron, que estudaram recentemente este sistema, também encontraram um valor especial para a massa:  $m_*^2 = \frac{2}{3}\Lambda$  [71]. No entanto, quando o campo possui uma massa com este valor, em seu tratamento, ele tem quatro graus de liberdade, o que não acontece nunca na nossa teoria. Esta diferença, é claro, tem origem no fato de eles utilizarem as equações da teoria que criticamos acima. Nossa equação para o campo de spin-2 em de Sitter, além de amparada por uma teoria mais consistente, concorda com a equação utilizada por outros autores [72,73].

Constatamos também que o caso  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ , na nossa teoria, corresponde exatamente à perturbação das equações de Einstein no universo de anti-de Sitter. Assim, podemos identificar a constante cosmológica (negativa) com a massa (ao quadrado) do gráviton – não obstante tenha o gráviton uma massa efetiva nula e, logo, de acordo com nossa análise, apenas dois graus de liberdade [70].

A proposição de que haja uma conexão entre a constante cosmológica e a massa do gráviton não é nova, tendo já contado com defensores [74,75] e críticos [76,77]. A nossa argumentação é simples: 1) temos uma teoria geral, consistente, para campos de spin-2, com ou sem massa ( $m$ ), propagando-se em um espaço-tempo curvo; 2) em particular, esta teoria nos diz que, num espaço-tempo de (anti-) de Sitter, certas propriedades do sistema, tais como o número de graus de liberdade do campo, dependem de uma massa efetiva ( $M$ ), e não da massa real ( $m$ ); 3) a comparação dos resultados anteriores, que têm origem na utilização do formalismo de Fierz, com a perturbação das equações de Einstein no universo de (anti-) de Sitter, nos mostra que o gráviton tem uma massa efetiva ( $M$ ) nula, e portanto apenas dois graus de liberdade, mas sua massa real ( $m$ ) está relacionada à constante cosmológica pela equação  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ . A interpretação de qual é a massa real e qual é uma massa efetiva está enraizada no formalismo de Fierz, não sendo arbitrária. Concluimos então que há de fato uma conexão entre a massa real (ou verdadeira) do gráviton e a constante cosmológica.

Levando a sério esta conexão, diríamos que, se o gráviton possui uma massa não-nula, então existe uma constante cosmológica e seu sinal é negativo. Da mesma forma, a solução fundamental das equações de Einstein para o vácuo seria a de anti-de Sitter, e não a de Minkowski. Interpretaríamos o termo com a constante cosmológica, nas equações de Einstein, como um termo de massa, e a relatividade geral, aceitando este termo, tornar-se-ia uma teoria para um campo gravitacional com massa. Contudo, a interação gravitacional, nesta teoria, continuaria a ser de longo alcance, contrariando a hipótese segundo a qual a massa do gráviton levaria necessariamente a um potencial do tipo Yukawa [77,78]. (A dedução do potencial de Yukawa pressupõe a utilização da

métrica de Minkowski, que, na teoria em questão, não pode ser usada se o gráviton tem uma massa não-nula; não podemos, de acordo com nossos resultados, nos desfazer da curvatura da geometria de anti-de Sitter sem nos desfazermos igualmente da massa do gráviton, o que leva à necessidade de se rever o processo pelo qual é deduzido o potencial de Yukawa.) Assim, vemos que a teoria para um campo gravitacional com massa não-nula e interação de longo alcance que mencionamos no início desta Introdução é a própria segunda versão que Einstein propôs para a relatividade geral, em 1917, quando introduziu a constante cosmológica [79] – com a restrição de esta constante ser negativa.

Nosso roteiro será o seguinte: no Capítulo 5, faremos a generalização do formalismo de Fierz para o espaço-tempo curvo, e em seguida apresentaremos as equações para o campo de spin-2, com ou sem massa, discutindo a redefinição do acoplamento mínimo em relação à teoria de Aragone-Deser e a conseqüente redefinição do tensor de energia-momento do campo de spin-2. Analisaremos então o problema de Cauchy e as condições de consistência impostas sobre a geometria. Finalizaremos o capítulo com uma demonstração de que a propagação do campo de spin-2 é causal nesta teoria.

No Capítulo 6, examinaremos o caso particular de um campo de spin-2, com ou sem massa, se propagando no espaço-tempo de de Sitter ou de anti-de Sitter; definiremos então a massa efetiva, que determina o número de graus de liberdade do campo. Estudaremos a perturbação das equações de Einstein nesta geometria, e mostraremos a relação entre a massa do gráviton e a constante cosmológica em anti-de Sitter. Por fim, faremos algumas observações sobre a possibilidade do espaço-tempo de anti-de Sitter substituir o de Minkowski como a solução fundamental da teoria da gravitação.

Embora as duas partes desta tese tratem de temas distintos (a teoria NDL da gravitação e a teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo), elas têm uma unidade que vem do foco no campo de spin-2 e do uso do formalismo de Fierz – o que se insere num contexto de continuidade em relação a trabalhos anteriores realizados no CBPF [39-41]. É um dos objetivos deste trabalho deixar claras as vantagens, mas também as limitações, deste formalismo.

# **Parte I**

## **Crítica à teoria NDL**

# Capítulo 1

## Formulação de Fierz para a teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo plano

### 1.1 Definições e notação

O formalismo de Fierz é uma ferramenta alternativa para a descrição de campos de spin-2 [37,38]. Neste capítulo, vamos apresentar a formulação de Fierz para a teoria linear de um campo de spin-2 no espaço-tempo plano, o que servirá de base para todos os demais capítulos.

Antes de prosseguirmos, convém introduzir desde já uma notação fundamental. Adotaremos, para a métrica do espaço-tempo de Minkowski, em um sistema arbitrário de coordenadas, o símbolo  $\gamma_{\mu\nu}$ , reservando o tradicional  $\eta_{\mu\nu}$  para uma escolha específica:  $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Derivadas covariantes em relação à métrica  $\gamma_{\mu\nu}$  serão indicadas por meio de uma barra simples, ao passo que derivadas simples serão indicadas pelo uso de uma vírgula. Por exemplo:

$$A_{\mu|\nu} = A_{\mu,\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda},$$

onde  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$  é a conexão métrica construída com  $\gamma_{\mu\nu}$ .

Usualmente, representa-se o campo de spin-2 por um potencial simétrico  $\varphi_{\mu\nu}$ , que contém dez componentes independentes. No formalismo de Fierz, o campo é representado por um objeto de três índices,  $F_{\alpha\beta\mu}$ , sujeito às seguintes identidades:

$$F_{\alpha\beta\mu} + F_{\beta\alpha\mu} = 0, \tag{1.1}$$

$$F_{\alpha\beta\mu} + F_{\beta\mu\alpha} + F_{\mu\alpha\beta} = 0. \tag{1.2}$$

Ou seja:  $F_{\alpha\beta\mu}$  é anti-simétrico no primeiro par de índices e obedece à identidade cíclica.

Devido a estas simetrias, este tensor possui vinte componentes independentes. Sendo assim, ele pode representar uma combinação de dois campos de spin-2, o que, embora possa ser útil em algumas circunstâncias, não nos interessa neste momento. Para que tenhamos um único campo de spin-2 associado ao tensor  $F_{\alpha\beta\mu}$ , eliminamos dez das suas componentes, impondo uma identidade adicional:

$$F^*{}^{\alpha(\mu\nu)}{}_{\nu} = 0. \quad (1.3)$$

Usamos o asterisco para indicar o dual de um tensor,

$$F^*{}^{\alpha\beta\mu} = F^*{}^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma\mu}. \quad (1.4)$$

onde  $\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}$  é o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita no espaço-tempo plano. Vamos convencionar que os sinais de simetrização e anti-simetrização sejam dados, respectivamente, por  $A_{(\mu\nu)} = A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}$  e  $A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ .

Denominamos *tensor de Fierz* um tensor que obedece às identidades (1.1), (1.2) e (1.3). A identidade (1.2) pode ser escrita, equivalentemente, com a ajuda do operador de dualidade:

$$F^*{}_{\alpha\mu}{}^{\mu} = 0. \quad (1.5)$$

Como o tensor de Fierz é anti-simétrico no primeiro par de índices, podemos formar com ele um único traço:

$$F_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\lambda} := F_{\alpha\mu}{}^{\mu}. \quad (1.6)$$

Utilizando o traço (1.6), a identidade (1.3) pode ser posta sob a seguinte forma:

$$F_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{|\mu} + F_{\beta\mu}{}^{\lambda}{}_{|\alpha} + F_{\mu\alpha}{}^{\lambda}{}_{|\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\lambda} F_{[\mu|\beta]} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\lambda} F_{[\beta|\alpha]} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\lambda} F_{[\alpha|\mu]} = 0. \quad (1.7)$$

Contraindo os índices  $\lambda$  e  $\mu$ , na equação acima, vemos que a seguinte identidade é válida:

$$F_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} \equiv 0. \quad (1.8)$$

A identidade acima tem uma consequência importante: a divergência do tensor  $F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha}$  se anula identicamente, o que é facilmente demonstrável:

$$\begin{aligned} F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha\nu} &= F^{\alpha\mu\nu}_{|\alpha\nu} + F^{\alpha\nu\mu}_{|\alpha\nu} = \\ &= \left( F^{\alpha\mu\nu}_{|\nu} \right)_{|\alpha} + F^{\alpha\nu\mu}_{|\alpha\nu} = 0. \end{aligned}$$

O primeiro termo se anula por causa da identidade (1.8), e o segundo em virtude de (1.1). Então:

$$F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha\nu} \equiv 0. \quad (1.9)$$

No formalismo de Fierz, como vimos, o objeto fundamental que descreve o campo de spin-2 é o tensor  $F_{\alpha\beta\mu}$ . Todavia, a identidade (1.3) é uma condição necessária e suficiente para que haja um potencial simétrico  $\varphi_{\mu\nu}$ , tal que

$$2F_{\alpha\beta\mu} = \varphi_{\mu\alpha|\beta} - \varphi_{\mu\beta|\alpha} + \left( \varphi_{,\alpha} - \varphi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} \right) \gamma_{\beta\mu} - \left( \varphi_{,\beta} - \varphi_{\beta}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} \right) \gamma_{\alpha\mu}. \quad (1.10)$$

Introduzimos aqui o traço  $\varphi = \varphi_{\mu}{}^{\mu}$ . Esta equação pode ser escrita de uma forma mais compacta,

$$2F_{\alpha\beta\mu} = \varphi_{\mu[\alpha|\beta]} + F_{[\alpha} \gamma_{\beta]\mu}, \quad (1.11)$$

onde utilizamos

$$F_{\alpha} = \varphi_{,\alpha} - \varphi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}. \quad (1.12)$$

Assim, recuperamos, dentro do formalismo de Fierz, a representação usual do campo de spin-2. É interessante assinalar a semelhança da equação (1.10) com a relação entre o campo eletromagnético e seu potencial, dada por  $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ , e também que a identidade (1.3) corresponde a  $F^{*\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0$  na teoria eletromagnética.

## 1.2 Equação para o campo sem massa

A equação linear para um campo de spin-2 sem massa, no espaço-tempo plano, é

$$G^{(\ell)}{}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.13)$$

onde

$$G^{(\ell)}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[ \square \varphi_{\mu\nu} - \varphi^\alpha_{(\mu|v)|\alpha} + \varphi_{|\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} (\square \varphi - \varphi^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta}) \right]. \quad (1.14)$$

A notação  $G^{(\ell)}_{\mu\nu}$  é sugerida pela circunstância de a expressão acima corresponder exatamente à parte linear do tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu}$ . Isto não é de forma alguma uma coincidência; de fato, não tivesse o tensor de Einstein linearizado precisamente esta forma, o campo gravitacional na relatividade geral não corresponderia a um campo de spin-2.

Um cálculo direto nos mostra que a divergência de (1.14) é identicamente nula:

$$G^{(\ell)\ \nu}_{\ \mu|\nu} \equiv 0. \quad (1.15)$$

Isto corresponde, é claro, à parte linear da identidade de Bianchi contraída.

Uma das propriedades mais importantes do tensor de Fierz é que ele satisfaz à seguinte identidade, consequência direta de (1.10):

$$F^\alpha_{(\mu\nu)|\alpha} \equiv -2 G^{(\iota)}_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Utilizando a identidade cíclica, (1.2), verificamos que

$$\begin{aligned} F^{\alpha\nu\mu}_{|\alpha} &= -F^{\nu\mu\alpha}_{|\alpha} - F^{\mu\alpha\nu}_{|\alpha} = \\ &= -F^{\mu\alpha\nu}_{|\alpha} = F^{\alpha\mu\nu}_{|\alpha}. \end{aligned}$$

onde usamos também (1.8) e (1.1). Segue daí e de (1.16) que

$$F^\alpha_{\mu\nu|\alpha} \equiv -G^{(\iota)}_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Vemos, a partir de (1.16), que a identidade (1.9), que já demonstramos, nada mais é que a versão do formalismo de Fierz para (1.15). Nesta nova linguagem, a equação (1.13) se escreve como

$$F^\alpha_{(\mu\nu)|\alpha} = 0. \quad (1.18)$$

Esta é a equação que se obtém, através do princípio variacional, da seguinte ação:

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} [A - B] d^4x, \quad (1.19)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Einstein,

$$\kappa := \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (1.20)$$

e

$$A := F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu}, \quad (1.21)$$

$$B := F_{\alpha} F^{\alpha}. \quad (1.22)$$

Estes  $A$  e  $B$  são os invariantes que podemos formar com o tensor de Fierz. Além deles, existe apenas um terceiro,  $C$ , que construímos com o tensor dual:

$$C := F^{\ast}_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu}. \quad (1.23)$$

No Apêndice A, encontram-se algumas identidades envolvendo estes invariantes. Usaremos, freqüentemente, uma nova variável,  $U$ , que corresponde à lagrangiana da ação (1.19):

$$U := A - B. \quad (1.24)$$

Esta ação, denominada *ação de Fierz-Pauli*, fica então assim:

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} U d^4x. \quad (1.25)$$

Para obtermos a equação (1.18), utilizamos o seguinte fato:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\mu\nu|\alpha}} = -F^{\alpha(\mu\nu)}. \quad (1.26)$$

A variação de (1.25), portanto, nos dá:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \delta U d^4x = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ -F^{\alpha(\mu\nu)} \right] \delta \varphi_{\mu\nu|\alpha} d^4x = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)} \right]_{|\alpha} \delta \varphi_{\mu\nu} d^4x, \end{aligned}$$

donde resulta que (1.18) é a equação de Euler-Lagrange associada.

A ação de Fierz-Pauli pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-\gamma} G^{(\ell)}_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} d^4x, \quad (1.27)$$

o que decorre de (1.25) por uma integração por partes, desprezando-se uma integral de superfície e levando-se em conta (1.16).

### 1.3 Simetrias da ação de Fierz-Pauli e do tensor de Fierz

Quando o potencial  $\varphi_{\mu\nu}$  sofre uma transformação,  $\varphi_{\mu\nu} \rightarrow \varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \delta\varphi_{\mu\nu}$ , dada por

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{\mu|\nu} + \xi_{\nu|\mu}, \quad (1.28)$$

a ação de Fierz-Pauli permanece invariante:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \delta U d^4x = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha} \right] \delta\varphi_{\mu\nu} d^4x = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha} \right] \xi_{(\mu|\nu)} d^4x = \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha} \right] \xi_{\mu|\nu} d^4x = \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha\nu} \right] \xi_{\mu} d^4x = 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos a identidade (1.9) na última linha. O tensor de Fierz, no entanto, só fica invariante pela transformação (1.28) quando  $\xi_{\mu}$  é um gradiente; em geral, temos:

$$\delta F_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} X_{\alpha\beta\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}, \quad (1.29)$$

$$\delta F_{\alpha} = \frac{1}{2} X_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}, \quad (1.30)$$

onde

$$X_{\alpha\beta\mu}{}^{\lambda} := \left( \xi_{\alpha|\beta} - \xi_{\beta|\alpha} \right) \delta_{\mu}^{\lambda} + \left( \xi_{\sigma}{}^{|\sigma} \delta_{\alpha}^{\lambda} - \xi_{\alpha}{}^{|\lambda} \right) \gamma_{\beta\mu} - \left( \xi_{\sigma}{}^{|\sigma} \delta_{\beta}^{\lambda} - \xi_{\beta}{}^{|\lambda} \right) \gamma_{\alpha\mu}, \quad (1.31)$$

$$X_{\alpha}{}^{\lambda} := X_{\alpha\beta}{}^{\beta\lambda}. \quad (1.32)$$

O tensor  $X_{\alpha\beta\mu}{}^{\lambda}$ , anti-simétrico no primeiro par de índices, não obedece à identidade cíclica, mas  $X_{\alpha\beta\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda}$ , sim:

$$X_{\alpha\beta\mu}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} + X_{\beta\mu\alpha}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} + X_{\mu\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{|\lambda} \equiv 0. \quad (1.33)$$

Valem ainda as seguintes identidades:

$$X^{\alpha\beta\mu\lambda}{}_{|\lambda\alpha} \equiv 0, \quad (1.34)$$

$$X^{\alpha\beta\mu\lambda}{}_{|\lambda\mu} \equiv 0, \quad (1.35)$$

$$X^{\alpha\lambda}{}_{|\alpha\lambda} \equiv 0. \quad (1.36)$$

A equação (1.31) nos mostra que o tensor  $X^{\alpha\beta\mu\lambda}{}_{|\lambda}$  se anula quando  $\xi_\mu = \frac{1}{2}\zeta_{|\mu}$ , ou seja, que o tensor de Fierz mantém-se invariante pela transformação

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}. \quad (1.37)$$

Podemos mostrar que (1.28) é a transformação mais geral que deixa a ação de Fierz-Pauli invariante, definindo assim a simetria de calibre da teoria do campo linear de spin-2 no espaço-tempo plano. Seja

$$\varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}, \quad a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}; \quad (1.38)$$

então:

$$F'_{\alpha\beta\mu} = F_{\alpha\beta\mu} + F^{(a)}_{\alpha\beta\mu}. \quad (1.39)$$

onde

$$2 F^{(a)}_{\alpha\beta\mu} = a_\mu[\alpha|\beta] + F^{(a)}[\alpha\gamma\beta]_\mu. \quad (1.40)$$

Não é difícil verificar que

$$U' = U + \left( 2 F^{\alpha\beta\mu} + F^{(a)\alpha\beta\mu} \right) a_{\mu\alpha|\beta}. \quad (1.41)$$

A variação da ação, portanto, fica sendo:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} (U' - U) d^4x = \\ &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ F^{\beta(\alpha\mu)} + \frac{1}{2} F^{(a)\beta(\alpha\mu)} \right]_{|\beta} a_{\mu\alpha} d^4x. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Fazendo  $a_{\mu\nu} = \xi_{(\mu|\nu)}$  em (1.42) e integrando por partes, vemos que  $\delta S = 0$  por causa da identidade (1.9), como já sabíamos. A única outra possibilidade de  $\delta S$  se anular é termos  $a_{\mu\nu}$  anti-simétrico, já que  $a_{\mu\nu}$  nulo em (1.38) significa ausência de transformação. Mas  $a_{\mu\nu}$  anti-simétrico é proibido por hipótese, de tal forma que  $a_{\mu\nu} = \xi_{(\mu|\nu)}$  é a única maneira de que dispomos para anular  $\delta S$ . Ou seja: (1.28) é a transformação mais geral que deixa a ação de Fierz-Pauli invariante.



## 1.4 Tensor de energia-momento e teorema de Noether

De acordo com o teorema de Noether, existe, para uma dada lagrangiana, uma quantidade, o tensor de energia-momento, que descreve a conservação do momento e da energia associada à invariância da ação por translações [15]. Em uma teoria para o campo de spin-2, onde a lagrangiana é  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\gamma_{\mu\nu}; \varphi_{\mu\nu}; \varphi_{\mu\nu|\alpha})$  e a ação é

$$S = \int \sqrt{-\gamma} \mathcal{L} d^4x. \quad (1.45)$$

o tensor de energia-momento de Noether,  $\tau_{\mu}{}^{\nu}$ , é dado por

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha\beta|\nu}} \varphi_{\alpha\beta|\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.46)$$

No caso da lagrangiana de Fierz-Pauli,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa} U, \quad (1.47)$$

a expressão acima nos dá

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\kappa} \left[ F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu} + U \delta_{\mu}^{\nu} \right], \quad (1.48)$$

onde utilizamos (1.26). Calculando a divergência de (1.48), encontramos:

$$\begin{aligned} 4\kappa \tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} &= -F^{\nu(\alpha\beta)}{}_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu} - F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu\nu} - U{}_{,\mu} = \\ &= -F^{\nu(\alpha\beta)}{}_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu} - F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu\nu} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\alpha\beta|\nu}} \varphi_{\alpha\beta|\nu\mu} = \\ &= -F^{\nu(\alpha\beta)}{}_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu}, \end{aligned}$$

ou, recorrendo a (1.16):

$$\tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \frac{1}{2\kappa} G_{(\mu)}{}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu}. \quad (1.49)$$

Quando a equação (1.13) é satisfeita, o tensor de energia-momento obedece à lei de conservação

$$\tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (1.50)$$

Esta é, na verdade, a equação fundamental que o tensor de energia-momento deve satisfazer. Isto significa que este tensor, a exemplo do que acontece com a própria função lagrangiana, não é definido de forma unívoca. Podemos somar a  $\tau_{\mu}{}^{\nu}$  qualquer quantidade que tenha divergência identicamente nula, sem que isto altere o conteúdo da lei de conservação. O tensor de energia-momento de Noether dado em (1.48) não é simétrico, mas pode ser simetrizado por este processo. Definimos  $t_{\mu\nu}$ , o *tensor de energia-momento simétrico*, como sendo

$$t^{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-\gamma}\mathcal{L})}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-\gamma}\mathcal{L})}{\partial\gamma_{\mu\nu,\lambda}} \right] \right\}. \quad (1.51)$$

Quando  $\mathcal{L} = U/4\kappa$ , encontramos:

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -U\gamma^{\mu\nu} + 2 \left[ 2F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\mu}{}^{\nu} F^{\alpha}{}_{\alpha} \right] + \left[ F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\lambda} - F^{\alpha(\lambda\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\alpha(\lambda\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right]_{|\lambda} \right\}. \quad (1.52)$$

A divergência de (1.52) nos fornece a seguinte identidade:

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \frac{1}{2\kappa} \left[ \left( F^{\nu(\alpha\beta)} \right)_{|\nu} \varphi_{\beta\mu} \right]_{|\alpha} - \frac{1}{2} F^{\nu(\alpha\beta)}{}_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu} \right], \quad (1.53)$$

ou seja:

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv -\frac{1}{2\kappa} \left[ 2 \left( G_{(\nu)}{}^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu} \right)_{|\alpha} - G_{(\nu)}{}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu} \right]. \quad (1.54)$$

Os cálculos para se chegar a (1.52) e (1.53) são um tanto longos, e estão no Apêndice B. Novamente, quando (1.13) é satisfeita, temos que

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (1.55)$$

A relação entre estas duas formas para o tensor de energia-momento é a seguinte:

$$t_{\mu}{}^{\nu} \equiv \tau_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{\kappa} G_{(\nu)}{}^{\lambda\mu} \varphi_{\lambda\mu} + \theta_{\mu}{}^{\nu\lambda}{}_{|\lambda}, \quad (1.56)$$

onde

$$\theta^{\mu\nu\lambda} := \frac{1}{4\kappa} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\lambda} - F^{\alpha(\mu\lambda)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - 3 F^{\lambda\nu\alpha} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right]. \quad (1.57)$$

Quando a equação (1.13) é satisfeita, temos:

$$t_{\mu}{}^{\nu} = \tau_{\mu}{}^{\nu} + \theta_{\mu}{}^{\nu\lambda}{}_{|\lambda}. \quad (1.58)$$

Como  $\theta^{\mu\nu\lambda}$  é anti-simétrico no par de índices  $\nu\lambda$ , segue que  $\theta^{\mu\nu\lambda}{}_{|\lambda\nu} \equiv 0$ . Assim, a equação acima nos mostra que as duas versões do tensor de energia-momento que apresentamos são de fato equivalentes.

## 1.5 Problema de Cauchy e graus de liberdade

O tensor simétrico  $\varphi_{\mu\nu}$  possui dez componentes independentes; contudo, a equação (1.13) estabelece que o campo de spin-2 sem massa por ele descrito possui apenas dois graus de liberdade. Uma maneira de nos convencermos disto é analisarmos a propagação do campo quando são dadas certas condições iniciais.

Seja um sistema de coordenadas no qual  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ; vamos considerar como condições iniciais os valores das componentes de  $\varphi_{\mu\nu}$  e de suas primeiras derivadas, dados em uma hipersuperfície espacial  $\Sigma$ . Neste arranjo, vemos que as derivadas espaciais de qualquer ordem das componentes de  $\varphi_{\mu\nu}$  são conhecidas em  $\Sigma$ . Já as derivadas temporais de segunda ordem precisam ser encontradas através das equações da teoria, pois determinam a evolução temporal do campo através de diferentes hipersuperfícies espaciais, o que corresponde a uma foliação do espaço-tempo contínuo. A necessidade de se resolver equações de terceira ordem no tempo, ou de ordens superiores, é indesejável, pois costuma relacionar-se a dificuldades com a causalidade da propagação.

A equação (1.13), nestas condições, torna-se

$$\begin{cases} G^{(t)}{}_{ij} = 0 & (1.59a) \\ G^{(t)}{}_{0\mu} = 0, & (1.59b) \end{cases}$$

sendo os componentes das equações (1.59) dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2G_{ij}^{(\ell)} = \varphi_{ij,00} - \delta_{ij} \varphi_{kk,00} - \varphi_{ij,kk} + \varphi_{ik,jk} + \varphi_{jk,ik} + \\ \quad - \varphi_{0i,0j} - \varphi_{0j,0i} - \varphi_{kk,ij} + \varphi_{00,ij} + \delta_{ij} (\varphi_{ll,kk} + \\ \quad - \varphi_{00,kk} - \varphi_{kl,kl} + 2\varphi_{0k,0k}) \\ 2G_{0i}^{(\ell)} = \varphi_{0i,kk} - \varphi_{0k,ik} - \varphi_{ik,0k} + \varphi_{kk,0i} \\ 2G_{00}^{(\ell)} = 2\varphi_{0k,0k} - \varphi_{ll,kk} + \varphi_{kl,kl} \end{array} \right. \quad (1.60)$$

Os índices latinos, aqui como no decorrer de todo este trabalho, serão sempre usados como índices espaciais. Vale também a convenção da soma para os índices espaciais repetidos, salvo quando dito o contrário.

Podemos ver que (1.59a) corresponde a um sistema de seis equações para as componentes  $\varphi_{ij,00}$ ; são por isto denominadas *equações dinâmicas*. As equações (1.59b), por sua vez, não possuem derivadas segundas temporais, estabelecendo vínculos entre os dados iniciais na hipersuperfície  $\Sigma$ . As componentes  $\varphi_{0\mu,00}$  não estão presentes em nenhuma das equações, sendo assim arbitrárias. Este fato elimina quatro graus de liberdade, dentre os dez possíveis para o campo: ficamos apenas com os seis graus de liberdade descritos pelas seis equações (1.59a). Além disso, podemos eliminar mais quatro graus em virtude da simetria de calibre da teoria, descrita pela transformação (1.28). O campo possui, portanto, apenas dois graus de liberdade.

A simetria de calibre, que usamos nesta contagem, está intimamente relacionada à identidade (1.15) (ou (1.9)), como mostramos na Seção 1.3. Esta identidade é, na verdade, a responsável pela propagação para todo o espaço-tempo dos vínculos estabelecidos entre os dados iniciais em  $\Sigma$  pelas equações (1.59b). Para que isto fique claro, vamos escrever a identidade (1.15) da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{(\ell)}^{00}{}_{,0} + G_{(\ell)}^{0j}{}_{,j} = 0 \\ G_{(\ell)}^{i0}{}_{,0} + G_{(\ell)}^{ij}{}_{,j} = 0, \end{array} \right. \quad (1.61)$$

onde usamos  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Levando em conta as equações dinâmicas (1.59a), chegamos a:

$$\begin{cases} G_{(\ell)}^{00}{}_{,0} + G_{(\ell)}^{0j}{}_{,j} = 0 \\ G_{(\ell)}^{i0}{}_{,0} = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Este é um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem para as quatro componentes  $G_{(\ell)}^{0\mu}$ . Vemos imediatamente que  $G_{(\ell)}^{0\mu} = 0$  é uma solução deste sistema. De acordo com a teoria das equações diferenciais, a solução deste sistema é única para cada conjunto de condições iniciais; em particular,  $G_{(\ell)}^{0\mu} = 0$  é a solução única quando as condições iniciais são  $G_{(\ell)}^{0\mu} = 0$  na hipersuperfície  $\Sigma$ . Portanto, as equações (1.59b), dadas como condições iniciais em  $\Sigma$ , se propagam para todo o espaço-tempo por serem a solução única do sistema (1.62) nestas condições.

Alternativamente, podemos ver que o campo possui realmente apenas dois graus de liberdade, verificando que temos dez equações para serem resolvidas para as dez componentes do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  como incógnitas (as dez componentes da equação tensorial (1.13)), mas há ao todo oito equações de vínculos (quatro em (1.59b) e quatro em (1.15)). Vale a pena mencionar aqui que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , na teoria da relatividade geral de Einstein, se comporta como um campo de spin-2 sem massa, possuindo também apenas dois graus de liberdade, em conformidade com a análise que acabamos de fazer. O que apresentamos nesta seção se aplica quase sem retoques às equações de Einstein, embora elas sejam altamente não-lineares, com a identidade de Bianchi contraída desempenhando nesta teoria o mesmo papel que a identidade (1.15) na teoria linear [80,81].

Estes procedimentos de contagem de graus de liberdade serão retomados, em situações mais complexas, nos Capítulos 4 e 5, nos quais serão analisadas, respectivamente, as equações não-lineares da teoria NDL e as equações lineares para o campo de spin-2 no espaço-tempo curvo.

## 1.6 Teoria do campo com massa

Quando o campo de spin-2 considerado tem massa não-nula, devemos acrescentar um termo de massa à lagrangiana de Fierz-Pauli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa} \left[ U - \frac{m^2}{2} (\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \varphi^2) \right]. \quad (1.63)$$

A equação de Euler-Lagrange correspondente é

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu)\alpha} - m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi \gamma_{\mu\nu}) = 0, \quad (1.64)$$

ou, equivalentemente,

$$G^{(\nu)}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi \gamma_{\mu\nu}) = 0. \quad (1.65)$$

Tomando o traço de (1.64), encontramos:

$$F^{\alpha}{}_{\alpha} + \frac{3}{2} m^2 \varphi = 0. \quad (1.66)$$

Já a divergência de (1.64), por causa da identidade (1.9), nos dá

$$\varphi_{,\mu} - \varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (1.67)$$

o que corresponde, na linguagem do formalismo de Fierz, a

$$F_{\mu} = 0. \quad (1.68)$$

Introduzindo (1.68) em (1.66), descobrimos que

$$\varphi = 0. \quad (1.69)$$

Levando este resultado a (1.67), verificamos que devemos ter

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (1.70)$$

Como as equações (1.69) e (1.70) precisam ser satisfeitas, elas impõem ao campo cinco condições, de tal forma que este fica com cinco graus de liberdade. Dando novamente as condições iniciais para este sistema de equações numa hipersuperfície espacial  $\Sigma$ , como fizemos na seção anterior, vemos que as componentes  $0\mu$  da equação (1.65) continuam sendo (quatro) equações de

vínculos, como também o são as equações (1.70) e (1.69) (cinco equações). Como esta última deve valer em todo o espaço-tempo, ela requer um vínculo adicional:

$$\varphi_{,0} = 0. \quad (1.71)$$

Temos então um total de dez equações de vínculos, para um sistema de quinze equações a serem resolvidas, formado por (1.65), (1.69) e (1.70), o que confirma que o campo possui cinco graus de liberdade. A imposição da validade em todo o espaço-tempo das equações (1.69), (1.70) e (1.71), denominadas *vínculos secundários*, garante a propagação para todo o espaço-tempo das componentes  $0\mu$  da equação (1.65), os *vínculos primários*, desde que sejam dadas como condições iniciais em  $\Sigma$ .

O tensor de energia-momento, no caso do campo com massa, também adquire novos termos:

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -U \gamma^{\mu\nu} + 2 \left[ 2 F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\mu}{}_{\alpha} F^{\nu\alpha} \right] + \right. \\ \left. + \left[ F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\lambda} - F^{\alpha(\lambda\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\alpha(\lambda\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right]_{|\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \left( \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi^2 \right) \gamma^{\mu\nu} - 2m^2 \left( \varphi^{\mu\alpha} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - \varphi \varphi^{\mu\nu} \right) \right\}. \quad (1.72) \end{aligned}$$

O tensor de energia-momento de Noether se torna

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\kappa} \left[ F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu} + \left( U - \frac{m^2}{2} \left( \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi^2 \right) \right) \delta_{\mu}^{\nu} \right]. \quad (1.73)$$

A divergência de (1.73) nos dá

$$\tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} \equiv \frac{1}{2\kappa} G_{(\ell m)}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu}, \quad (1.74)$$

e a de (1.72) nos leva a

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} \equiv -\frac{1}{2\kappa} \left[ 2 \left( G_{(\ell m)}^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu} \right)_{|\alpha} - G_{(\ell m)}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu} \right], \quad (1.75)$$

onde definimos

$$G_{(\ell m)}^{\mu\nu} := G_{\mu\nu}^{(\ell)} + \frac{1}{2} m^2 \left( \varphi_{\mu\nu} - \varphi \gamma_{\mu\nu} \right). \quad (1.76)$$

A relação entre as duas formas do tensor de energia-momento é dada por

$$t_{\mu}{}^{\nu} \equiv \tau_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{\kappa} G_{(m)}{}^{\nu\lambda} \varphi_{\lambda\mu} + \theta_{\mu}{}^{\nu\lambda}{}_{|\lambda}, \quad (1.77)$$

onde  $\theta^{\mu\nu\lambda}$  é definido em (1.57). Quando a equação (1.65) é satisfeita, temos  $G^{(m)}{}_{\mu\nu} = 0$ , e vale a conservação do momento e da energia representada pelas equações (1.50) e (1.55).

Encerramos, com isto, nossa apresentação dos pontos básicos da teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo plano. Gostaríamos de salientar que o uso do formalismo de Fierz, embora totalmente opcional, não deixa de contribuir para a clareza das idéias, permitindo muitas vezes uma formulação mais compacta e eficiente para equações e objetos matemáticos, como é o caso, por exemplo, da própria lagrangiana da teoria,  $\mathcal{L} = U/4\kappa$ , onde  $U = F'_{\alpha\beta\mu} F'^{\alpha\beta\mu} - F'_{\alpha} F'^{\alpha}$ . A conversão para a linguagem tradicional, que lida apenas com o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  e suas derivadas, é realizada facilmente através das equações (1.10) e (1.16).

## Capítulo 2

# NDL – Uma classe de teorias para o campo gravitacional

### 2.1 Introdução / Motivação

A teoria linear da gravitação, investigada sistematicamente pela primeira vez em 1939 por Fierz e Pauli [37,38], baseia-se na lagrangiana para um campo de spin-2 sem massa, (1.47), e resulta na seguinte equação:

$$G_{(\ell)}^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Einstein definida em (1.20), e  $T^{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento de todos os campos não-gravitacionais e da matéria, derivado de uma lagrangiana  $\mathcal{L}_{mat}$ . Sua ação é

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} U d^4x - \frac{1}{2} \int \sqrt{-\gamma} T^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} d^4x. \quad (2.2)$$

Como (2.1) corresponde exatamente à parte linear das equações de Einstein, esta teoria pode ser usada para a obtenção de resultados aproximados, no regime de campos gravitacionais fracos, dentro do esquema da relatividade geral. Entretanto, tomada em si mesma ela é uma teoria inconsistente. O tensor  $T^{\mu\nu}$  que entra nestas equações é calculado no espaço-tempo plano, e, de acordo com (2.1) e (1.15), satisfaz à seguinte lei de conservação:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.3)$$

Isto significa que a teoria linear não leva em consideração os efeitos do campo gravitacional sobre a própria fonte. Ou seja: podemos ter, por exemplo, um objeto emitindo ondas gravitacionais sem perder energia alguma, o que é um absurdo.

Para corrigir esta inconsistência, é preciso mudar alguma coisa na teoria. O acréscimo de outros campos além do campo de spin-2, por exemplo, foi experimentado por Deser e Laurent [29] e também por Bollini et al. [30]. Contudo, para permanecer com uma teoria que contenha apenas um campo de spin-2, somos forçados a introduzir termos não-lineares nas equações. O problema reside então no fato de o lado esquerdo de (2.1) ter divergência identicamente nula, o que impõe uma lei de conservação sobre o objeto do lado direito desta equação. A lei de conservação assim obtida não pode ser senão a conservação da energia e do momento totais, incluindo as contribuições geradas pelo próprio campo gravitacional, sob pena de levar a inconsistências como a que descrevemos acima. A equação correta, portanto, deve ser

$$G_{(1)}{}^{\mu\nu} = -\kappa \left( T^{\mu\nu} + t_g{}^{\mu\nu} \right), \quad (2.4)$$

onde  $t_g{}^{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento do campo gravitacional. Da divergência de (2.4) resulta

$$\left( T^{\mu\nu} + t_g{}^{\mu\nu} \right)_{|\nu} = 0, \quad (2.5)$$

que é a lei de conservação do momento e da energia em sua forma completa.

A lagrangiana da teoria deve ser tal que o tensor  $t_g{}^{\mu\nu}$  que aparece em (2.4) seja exatamente o tensor de energia-momento simétrico resultante da formula (1.51), na qual entra esta mesma lagrangiana. Vimos que a lagrangiana de Fierz-Pauli,  $\mathcal{L} = U/4\kappa$ , produz o tensor de energia-momento  $t^{\mu\nu}$  dado em (1.52), mas leva à equação (2.1), na qual este tensor está ausente. Para incorporá-lo à equação, precisamos de um novo termo na lagrangiana, de  $O(\varphi^3)$ ; porém, este termo modificaria também o próprio tensor de energia-momento do campo de spin-2, que passaria a conter termos de  $O(\varphi^3)$ . Teríamos então que acrescentar mais um termo à lagrangiana, de  $O(\varphi^4)$ , para corrigir o  $t^{\mu\nu}$  que aparece na equação, e assim sucessivamente. A lagrangiana correta seria então aquela encontrada no limite deste processo, após infinitas correções:

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)} + \dots, \quad (2.6)$$

onde o primeiro termo é  $\overset{(1)}{\mathcal{L}} = U/4\kappa$ . O tensor de energia-momento seria, então:

$$t_g^{\mu\nu} = t_{(1)}^{\mu\nu} + t_{(2)}^{\mu\nu} + t_{(3)}^{\mu\nu} + \dots, \quad (2.7)$$

onde  $t_{(1)}^{\mu\nu}$  é dado por (1.52).

Este procedimento para se obter uma teoria consistente da gravitação a partir da teoria do campo de spin-2 no espaço-tempo plano foi sugerido inicialmente por Kraichnan [3] e Gupta [4], e também mais tarde por Feynman [1] e Ogievetsky e Polubarinov [9]. Deser [13] apresentou uma análise mais compacta deste tema, que também foi abordado, mais recentemente, por Grischuck, Petrov e Popova [12]. Estes autores obtiveram ainda um resultado muito importante: a teoria definida pelo procedimento que acabamos de explicar é idêntica à teoria da relatividade geral de Einstein, que se mostra apenas descrita em uma linguagem diferente. A relação entre as duas linguagens, a do campo de spin-2  $\varphi_{\mu\nu}$  em Minkowski e a da geometria riemanniana, na qual o campo gravitacional é descrito pela métrica  $g_{\mu\nu}$ , é dada pela seguinte equação:

$$g_{\mu\nu} := \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

(Na verdade, podem ser indiferentemente usadas outras definições, tais como  $g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}$  ou  $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})$ ; a teoria consistente resultante do processo acima descrito é sempre a relatividade geral, independentemente da escolha feita. A definição que damos em (2.8), neste contexto, é ditada por questões de conveniência.) Através de (2.8), descobre-se que (2.4) nada mais é do que uma nova versão para as equações de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

$$T^{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right] \right\}. \quad (2.11)$$

Também (2.6) nos leva à ação de Hilbert-Einstein:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat} d^4x. \quad (2.12)$$

A divergência de (2.9), devido à identidade de Bianchi contraída,

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0, \quad (2.13)$$

onde usamos o ponto-e-vírgula para designar a derivada covariante em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$ , de tal forma que

$$g_{\mu\nu}{}_{;\alpha} \equiv 0, \quad (2.14)$$

nos diz que devemos ter

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.15)$$

Esta equação é exatamente equivalente a (2.5), e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$T^{\mu\nu}{}_{|\nu} + K^{\mu}{}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} + K^{\nu}{}_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda} = 0, \quad (2.16)$$

onde definimos

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} := \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Delta^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

sendo  $\Delta^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  e  $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ , respectivamente, as conexões métricas construídas com  $\gamma_{\mu\nu}$  e com  $g_{\mu\nu}$ :

$$\Delta^{\lambda}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon\mu}{}_{;\nu} + \gamma_{\varepsilon\nu}{}_{;\mu} - \gamma_{\mu\nu}{}_{;\varepsilon}), \quad (2.18)$$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\lambda\varepsilon} (g_{\varepsilon\mu}{}_{;\nu} + g_{\varepsilon\nu}{}_{;\mu} - g_{\mu\nu}{}_{;\varepsilon}). \quad (2.19)$$

Encontramos facilmente que o tensor  $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ , que é um verdadeiro tensor apesar de  $\Delta^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  e  $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  não o serem, é dado por

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\varepsilon} (\varphi_{\varepsilon\mu}{}_{|\nu} + \varphi_{\varepsilon\nu}{}_{|\mu} - \varphi_{\mu\nu}{}_{|\varepsilon}), \quad (2.20)$$

onde usamos, é claro, (2.8).

Vale a pena chamar a atenção, aqui, para o fato de que, quando a métrica é definida pela equação (2.8), a métrica inversa corresponde a uma série infinita:

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\lambda} \varphi_{\lambda}{}^{\nu} + \dots \quad (2.21)$$

Um detalhe importante nesta construção da relatividade geral como uma teoria de campo é que na ação (2.12), assim como na equação (2.9), aparece uma única métrica:  $g_{\mu\nu}$ . Ou seja, a métrica de Minkowski,  $\gamma_{\mu\nu}$ , só se apresenta sob a forma de elemento da soma  $\gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ , jamais ocorrendo sozinha ou em outra combinação qualquer, o que faz com que ela se torne *inobservável* nesta teoria (e é precisamente por isso que a relatividade geral é insensível ao uso de diferentes alternativas para a equação (2.8), desde que se permaneça fiel à opção feita).

Surge, neste ponto, a seguinte questão: o procedimento de somarmos o tensor de energia-momento do campo gravitacional,  $t_g^{\mu\nu}$ , ao lado direito da equação (2.1) para obtermos (2.4) é de fato a única maneira de que dispomos para chegarmos a uma teoria consistente para a gravitação em termos apenas de um campo de spin-2 puro? A resposta é afirmativa, e a relatividade geral de Einstein é a única teoria que descreve coerentemente o campo gravitacional como um campo de spin-2 puro sem massa em auto-interação, segundo a dinâmica de equações não-lineares, como o comprovam os trabalhos de Ogievetsky e Polubarinov [9] e de Wald [14]. No entanto, M. Novello, V. A. De Lorenci e L. R. de Freitas [52], corajosamente, desafiaram estes resultados da literatura e investiram na tentativa de criar uma teoria diferente para a gravitação como um campo de spin-2 em auto-interação, explorando a possibilidade de a métrica de Minkowski não aparecer apenas sob a forma  $\gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ ; ou seja, eles tentaram formular uma teoria consistente que fosse, diferentemente da relatividade geral, uma teoria *bimétrica* para a gravitação. Esta teoria, denominada NDL, adota uma estratégia semelhante à da teoria bimétrica de Rosen [23], mas difere dela ao aceitar a teoria de Fierz-Pauli, acima descrita, como ponto de partida, e apoiar-se fortemente na equação (2.8).

A verdadeira inspiração para a NDL deve ser procurada na teoria do eletromagnetismo não-linear, na qual a lagrangiana é dada por uma função arbitrária dos invariantes  $F$  e  $G$  construídos com o tensor  $F_{\mu\nu}$ :

$$F := F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

$$G := F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

ou seja:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} L(F, G). \quad (2.24)$$

A lagrangiana da teoria linear de Maxwell corresponde ao caso particular em que  $L(F, G) = F$ , e as demais teorias devem recair neste caso no limite apropriado. Outra lagrangiana relevante para nossa discussão, por ter influenciado a formulação da NDL, é a da teoria de Born-Infeld [48-51],

$$L = 4b^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} - \frac{G^2}{16b^4}} - 1 \right\}, \quad (2.25)$$

onde a constante  $b^2$  representa o valor máximo possível para o campo.

A NDL acrescenta termos não-lineares à equação (2.1) imitando o procedimento usado no eletromagnetismo não-linear, adotando como lagrangiana uma função arbitrária dos invariantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , sujeita apenas à restrição de reduzir-se à lagrangiana de Fierz-Pauli em primeira aproximação:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa} L(A, B, C). \quad (2.26)$$

A idéia por trás da formulação desta teoria é um questionamento do princípio de equivalência em sua versão forte, segundo a qual todos os campos da natureza, incluindo o próprio campo gravitacional, sentem e produzem gravitação da mesma forma. Isto quer dizer que a auto-interação do campo gravitacional segue a mesma forma de acoplamento universal que existe entre o campo gravitacional e os demais campos da natureza. Para sermos mais claros, vamos distinguir três versões do princípio de equivalência (há uma discussão bastante completa do assunto no livro de C. Will sobre testes experimentais da teoria da gravitação [17]):

a) *Princípio de Equivalência Newtoniano (PEN)*, ou *Princípio de Equivalência Fraco*: Formulado por Newton no seu monumental *Principia* [82], estabelece a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional de qualquer corpo,  $m_I = m_G$ , o que quer dizer que todos os corpos caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional, independentemente da sua massa ou da sua estrutura interna. Dito de uma forma ainda mais rigorosa: *se uma partícula-teste sem carga (eletromagnética) for colocada em um determinado ponto do espaço-tempo com uma dada*

velocidade inicial, então sua trajetória subsequente será independente de sua estrutura interna e de sua composição.

b) *Princípio de Equivalência Einsteiniano (PEE)*: Publicado por Einstein em 1911 [83], alguns anos antes de ele completar a formulação da sua teoria da relatividade geral, estende o princípio anterior ao exigir que não apenas as leis da mecânica, tal como a trajetória de um corpo, sejam independentes de sua posição, velocidade ou massa, mas que *todas* as leis da física devam sê-lo. Mais rigorosamente, este princípio compõe-se de três itens:

- i) *É válido o PEN;*
- ii) *O resultado de qualquer teste experimental local **não-gravitacional** é independente da velocidade do aparato experimental (em queda livre);*
- iii) *O resultado de qualquer teste experimental local **não-gravitacional** é independente de quando e onde no universo ele é realizado.*

c) *Princípio de Equivalência Forte (PEF)*: É a extensão do PEE para a interação do campo gravitacional consigo mesmo, e pode ser assim sumariado:

- i) *O PEN é válido tanto para corpos com auto-interação gravitacional quanto para corpos-teste (PENG);*
- ii) *O resultado de qualquer teste experimental local é independente da velocidade do aparato experimental (em queda livre);*
- iii) *O resultado de qualquer teste experimental local é independente de quando e onde no universo ele é realizado.*

Pode-se argumentar convincentemente que se o PEE é válido, então o campo gravitacional deve ser descrito pela curvatura do espaço-tempo e todos os campos não-gravitacionais devem se acoplar com uma mesma métrica  $g_{\mu\nu}$ , o que denominamos *acoplamento universal*, de tal forma que são válidos os assim chamados *postulados das teorias métricas da gravidade*:

- i) *Existe uma métrica  $g_{\mu\nu}$ ;*

- ii) *Corpos-teste seguem geodésicas de  $g_{\mu\nu}$ :*
- iii) *Em sistemas de referência localmente lorentzianos (em queda livre), as leis da física que não envolvem a gravitação são aquelas da relatividade restrita.*

Há também bons motivos para se acreditar que o PENG implica no PEF, ou seja, que o item c-i acarreta como conseqüências os itens c-ii e c-iii, assim como o item b-i implica nos itens b-ii e b-iii (conjectura de Schiff). Nas teorias em que há outros campos gravitacionais além da métrica  $g_{\mu\nu}$ , sendo satisfeito o PEE, o papel destes campos auxiliares é somente o de mediar a maneira pela qual a matéria e os campos não-gravitacionais geram os campos gravitacionais e produzem a métrica, pois esta é o único campo a se acoplar diretamente com a matéria.

Mais controversa é a proposição de que o PEF implica em que haja apenas um único campo responsável pelos fenômenos gravitacionais, a métrica  $g_{\mu\nu}$ . C. Will, no livro citado, chama a atenção para o fato de diversas derivações da relatividade geral, tais como a de Deser e a de Weinberg, assumirem que existe apenas um campo gravitacional (ver o quadro 17.2, na referência [84]). Estas derivações assumem a validade do PEF, e tendem a fortalecer a crença na conjectura de que a relatividade geral é a única teoria métrica que o satisfaz plenamente. Contudo, ainda não foi rigorosamente descartada a possibilidade de o PEF ser satisfeito por uma teoria que contenha outros campos além de  $g_{\mu\nu}$ . Um contra-exemplo para esta conjectura talvez seja a teoria em que se somam termos quadráticos no tensor de Riemann à ação de Hilbert-Einstein; como esta teoria contém apenas uma métrica,  $g_{\mu\nu}$ , ela pode em princípio satisfazer ao PEF, mesmo diferindo bastante da relatividade geral. Não obstante, as derivações da relatividade geral acima mencionadas, em particular os trabalhos de Weinberg [6-8], Ogievetsky e Polubarinov [9] e Wald [14], demonstram claramente que a restrição de que o campo gravitacional seja descrito por *um único* campo de spin-2, sem massa, é suficientemente forte para que a única teoria consistente, nestas condições, seja a relatividade geral. No caso de teorias com termos quadráticos no tensor de Riemann, por exemplo, apesar de ela conter uma única métrica, já não se trata mais de um spin-2 puro, mas de uma coleção de campos de spin-2 e de campos escalares acoplados (ver Hindawi et al. [16]).

A NDL começa com a constatação de que, embora o PEE seja abundantemente corroborado pelas observações experimentais, o mesmo não acontece com o PEF [21] (ver Will [18] para um relato atualizado dos testes experimentais da relatividade geral). De fato, os testes para a violação do PEF se concentram nos itens *c-ii* e *c-iii*, que têm confirmação experimental. O item *c-i*, o PENG, no entanto, permanece sem comprovação experimental direta. Ou seja, ainda não há dados experimentais suficientes para uma definição clara de como se dá a auto-interação do campo gravitacional. Os proponentes da NDL, então, escolheram a lagrangiana (2.26) como a base para uma teoria na qual a auto-interação do campo gravitacional, descrito por um campo de spin-2 sem massa, se faz de forma semelhante à auto-interação do campo de spin-1 na teoria do eletromagnetismo não-linear.

Sendo a NDL uma teoria não-linear para um único campo de spin-2 (embora tendo uma segunda métrica, a de Minkowski, como objeto absoluto) e tendo a teoria de Fierz-Pauli como limite linear, suas previsões só se diferenciariam das da relatividade geral naqueles fenômenos em que a auto-interação do campo gravitacional fosse relevante, o que se manifestaria nas propriedades das ondas gravitacionais. As diferenças entre as duas teorias, neste ponto, podem ir tão longe que a NDL é capaz de acomodar a possibilidade da ocorrência de birrefringência para as ondas gravitacionais [59], fenômeno totalmente ausente na relatividade geral. Contudo, esta teoria esbarra no mesmo problema que a teoria linear de Fierz-Pauli descrito no início desta seção: a divergência das equações de Euler-Lagrange produzem uma lei de conservação que entra em conflito com a lei da conservação da energia e do momento totais. Em outras palavras: a introdução dos termos não-lineares através da lagrangiana (2.26) não resolve adequadamente o problema da teoria linear que motivou o próprio apelo a estes termos. E isto é uma manifestação daquele importante resultado a que já nos referimos várias vezes: a relatividade geral é a única teoria coerente que descreve a gravitação como um único campo de spin-2 puro sem massa em auto-interação, segundo equações não-lineares. Ao pertencer precisamente a este particular grupo de teorias, a NDL estava, desde o início, fadada ao insucesso.

Neste e nos demais capítulos da Parte I, vamos apresentar os pontos básicos da teoria NDL, e mostrar exatamente onde, como e por quê ela falha.

## 2.2 Ação da teoria e equações para o campo gravitacional na NDL

Dissemos, na seção anterior, que a NDL se baseia na lagrangiana (2.26), com a restrição de reduzir-se à lagrangiana de Firz-Pauli em primeira aproximação. Vamos então impor que  $L(A, B, C)$  seja da forma

$$L(A, B, C) = U + O(\varphi^4), \quad (2.27)$$

lembrando que os invariantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são da  $O(\varphi^2)$ . Para facilitar que esta exigência seja sempre cumprida e evitar complicações desnecessárias, a NDL adota o seguinte postulado: *os invariantes  $A$  e  $B$  só devem aparecer na lagrangiana através da combinação  $A - B (=U)$* . Assim, a forma geral da lagrangiana é  $L = L(U, C)$ .

O invariante  $C$  não contribui em nada para a parte linear das equações da teoria, porque pode ser escrito como uma divergência total, de tal forma que  $\int \sqrt{-\gamma} C d^4x$  pode ser desprezado na ação como um termo de superfície:

$$C := F_{\alpha\beta\mu}^* F^{\alpha\beta\mu} = K^\alpha{}_{|\alpha}, \quad (2.28)$$

$$K^\alpha := -F^{\alpha\beta\mu}{}^* \varphi_{\beta\mu}, \quad (2.29)$$

resultado este a que chegamos utilizando (1.11) e a identidade (1.3). Portanto, somente os termos quadráticos ou de ordem superior em  $C$  contribuem para as equações.

A ação do campo gravitacional, na ausência de matéria, é então dada na NDL por

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} L(U, C) d^4x. \quad (2.30)$$

A variação desta ação em relação a  $\varphi_{\mu\nu}$  nos dá:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \frac{\delta L}{\delta \varphi_{\mu\nu}} \delta \varphi_{\mu\nu} d^4x = \\
&= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\mu\nu|\alpha}} \delta \varphi_{\mu\nu|\alpha} d^4x = \\
&= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ L_U \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\mu\nu|\alpha}} + L_C \frac{\partial C}{\partial \varphi_{\mu\nu|\alpha}} \right] \delta \varphi_{\mu\nu|\alpha} d^4x = \\
&= \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ -L_U F^{\alpha(\mu\nu)} - L_C \overset{*}{F}^{\alpha(\mu\nu)} \right] \delta \varphi_{\mu\nu|\alpha} d^4x, \tag{2.31}
\end{aligned}$$

onde usamos (1.26) e sua equação análoga para  $C$ ,

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi_{\mu\nu|\alpha}} = -\overset{*}{F}^{\alpha(\mu\nu)}. \tag{2.32}$$

Os símbolos  $L_U$  e  $L_C$  indicam derivadas parciais da lagrangiana em relação a  $U$  e  $C$ :

$$L_U := \frac{\partial L(U, C)}{\partial U}, \tag{2.33a}$$

$$L_C := \frac{\partial L(U, C)}{\partial C}. \tag{2.33b}$$

Usaremos também  $L_{UU}$ ,  $L_{CC}$ , etc, para derivadas de ordem superior.

Continuando a desenvolver (2.31), encontramos

$$\delta S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} \left[ L_U F^{\alpha(\mu\nu)} + L_C \overset{*}{F}^{\alpha(\mu\nu)} \right]_{|\alpha} \delta \varphi_{\mu\nu} d^4x, \tag{2.34}$$

o que nos dá a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\left[ L_U F^{\alpha(\mu\nu)} + L_C \overset{*}{F}^{\alpha(\mu\nu)} \right]_{|\alpha} = 0. \tag{2.35}$$

Como o invariante  $C$  não contribui para a parte linear destas equações, ou seja, não interfere no comportamento dos campos gravitacionais fracos, o primeiro passo na exploração desta teoria é a análise de lagrangianas que dependem exclusivamente da variável  $U$ . Este foi o caminho tomado pelos criadores da NDL [41,52,53], e é também o que seguiremos aqui. Todas as principais características desta teoria podem ser adequadamente estudadas neste âmbito mais restrito. De fato, a consequência mais notável da introdução da variável  $C$  na lagrangiana é a possibilidade, já aludida,

de birrefringência para as ondas gravitacionais. Como isso é possível será explicado na Seção 2.4. No restante deste trabalho, trataremos exclusivamente de lagrangianas que dependem apenas de  $U$ , sem prejuízo para as nossas conclusões mais gerais.

A ação total da teoria NDL, nesta versão mais restrita, que pretendemos examinar detalhadamente, é portanto a seguinte:

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-\gamma} L(U) d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat} d^4x, \quad (2.36a)$$

onde

$$g_{\mu\nu} := \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \quad (2.36b)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(\gamma_{\rho\sigma}) = 0. \quad (2.36c)$$

Vale a pena chamar a atenção, aqui, para o fato de diferentes definições para a relação entre  $g_{\mu\nu}$ ,  $\gamma_{\mu\nu}$  e  $\varphi_{\mu\nu}$ , neste contexto, levarem a diferentes teorias, não equivalentes entre si, de tal forma que a equação (2.36b) é indispensável para uma definição precisa da teoria, enquanto que para a relatividade geral a equação (2.8) é apenas uma opção possível dentre muitas. A razão disto é que na ação (2.12) aparece uma única métrica,  $g_{\mu\nu}$ , enquanto que em (2.36a) aparecem duas métricas:  $\gamma_{\mu\nu}$  no primeiro termo do lado direito, e  $g_{\mu\nu}$  no segundo (estamos impondo que, na NDL,  $\mathcal{L}_{mat}$  só dependa de  $g_{\mu\nu}$  e dos campos de matéria, não-gravitacionais, de acordo com as regras do acoplamento universal definido na seção anterior). Isto demonstra que a NDL tem uma estrutura bimétrica, semelhante, em certos aspectos, à teoria bimétrica de Rosen. Evidentemente,  $L(U)$  deve satisfazer à restrição dada em (2.27), o que garante que o limite linear da NDL seja a teoria linear de Fierz-Pauli.

Para encontrarmos a equação de Euler-Lagrange derivada da ação (2.36a), devemos primeiro notar que, devido a (2.36b),

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta\varphi_{\mu\nu}} &= \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta g_{\mu\nu}} = \\ &= \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right], \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta\varphi_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

onde utilizamos a definição do tensor de energia-momento da matéria dada em (2.11).

A equação para o campo gravitacional, na presença de uma fonte material, é, portanto:

$$\frac{\sqrt{-\gamma}}{4\kappa} [L_U \cdot F^{\alpha(\mu\nu)}]_{|\alpha} - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.38)$$

Rearranjando um pouco os termos, encontramos:

$$[L_U \cdot F^{\alpha(\mu\nu)}]_{|\alpha} = 2\kappa\omega T^{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

onde definimos

$$\omega := \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}}. \quad (2.40)$$

Será útil, mais adiante, sabermos que

$$\omega = 1 + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \left( \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) + O(\varphi^3). \quad (2.41)$$

Escreveremos também a equação (2.39) sob a forma

$$\Psi^{\mu\nu} = -\kappa\omega T^{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

usando a notação

$$\Psi^{\mu\nu} := -\frac{1}{2} [L_U \cdot F^{\alpha(\mu\nu)}]_{|\alpha}. \quad (2.43)$$

O tensor  $\Psi^{\mu\nu}$ , no limite linear, quando  $L_U \rightarrow 1$ , reduz-se ao tensor  $G_{(U)}^{\mu\nu}$ , como podemos ver pela equação (1.16). Assim, levando em conta (2.41), vemos que (2.42) tem de fato (2.1) como seu limite linear.

Evidentemente, na ausência de matéria (2.39) se reduz a um caso especial de (2.35):

$$[L_U \cdot F^{\alpha(\mu\nu)}]_{|\alpha} = 0. \quad (2.44)$$

Outra forma de apresentarmos a equação para o campo gravitacional na NDL é desenvolvermos um pouco termo do lado esquerdo de (2.39):

$$\left[ L_U F^{\alpha(\mu\nu)} \right]_{|\alpha} = L_U F^{\alpha(\mu\nu)}_{|\alpha} + L_{UU} U_{,\alpha} F^{\alpha(\mu\nu)}. \quad (2.45)$$

Recorrendo então a (1.16), chegamos ao seguinte resultado:

$$G_{(G)}^{\mu\nu} = \frac{L_{UU}}{2L_U} U_{,\alpha} F^{\alpha(\mu\nu)} - \frac{\kappa\omega}{L_U} T^{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Comparando esta equação com (2.4), vemos o quanto a NDL difere da relatividade geral: enquanto ambas as teorias têm o mesmo limite linear, o tensor de energia-momento do campo gravitacional não entra como um componente da fonte na NDL. E é desta forma que a teoria pretende singularizar a auto-interação do campo gravitacional, tratando-a de forma diferenciada em relação à interação do campo gravitacional com os demais campos (ao passo que na relatividade geral todos os campos, inclusive o próprio campo gravitacional, são tratados exatamente da mesma forma).

Como as equações da NDL dependem de uma função arbitrária, sujeita apenas a pequenas restrições, ela corresponde a toda uma classe de teorias para o campo gravitacional, como sugere V. A. De Lorenci em sua tese de doutorado [41], ou, talvez mais adequadamente, a uma teoria que comporta uma infinidade de modelos específicos. Em seguida, vamos apresentar um modelo particular, inspirado na teoria de Born-Infeld para o eletromagnetismo.

## 2.3 Modelo tipo Born-Infeld: solução estática esfericamente simétrica para o vácuo

### 2.3.1 Os parâmetros PPN

A primeira tarefa para uma teoria moderna da gravitação (fora o limite newtoniano, que discutiremos no Capítulo 3) é dar conta dos assim chamados testes clássicos, propostos por Einstein em seu artigo de 1916 [10]: o desvio gravitacional para o vermelho, a deflexão dos raios de luz e a precessão do periélio da órbita de Mercúrio. O primeiro deles, o desvio gravitacional para o vermelho, é na verdade um teste do PEE, ou seja, é automaticamente satisfeito por qualquer teoria

métrica (internamente coerente) da gravitação. Os outros dois testes exigem, essencialmente, que a métrica que descreve o sistema solar, ignorando-se a rotação do Sol, seja dada, em primeira aproximação, por:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} + 2\beta \left( \frac{GM}{rc^2} \right)^2 \\ g_{0i} = 0 \\ g_{ij} = - \left( 1 + 2\gamma \frac{GM}{rc^2} \right) \delta_{ij} . \end{cases} \quad (2.47)$$

onde  $M$  é a massa do Sol,  $G$  é a constante gravitacional newtoniana,  $c$  é a velocidade da luz e  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros que assumem os valores

$$\begin{aligned} \beta &\approx 1, \\ \gamma &\approx 1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Na verdade,  $\beta$  e  $\gamma$  pertencem a um conjunto de dez parâmetros, chamados *Parâmetros Pós-Newtonianos* (PPN), suficientes para descrever as primeiras correções ao potencial newtoniano previstas por qualquer teoria métrica da gravitação (para uma discussão completa dos parâmetros PPN, ver a referência [17]). Na relatividade geral, temos, exatamente,  $\beta = \gamma = 1$ . Este resultado pode ser encontrado a partir da métrica de Schwarzschild, que é a solução exata desta teoria para o campo estático no vácuo, com simetria esférica, após uma mudança de coordenadas para um sistema isotrópico; uma vez escrita neste sistema de coordenadas, a solução da teoria é comparada com a métrica (2.47) e os parâmetros são lidos (esta transformação de coordenadas é dada no Apêndice C). Análises mais rigorosas requerem o estudo de todo o conjunto dos dez parâmetros PPN, e necessitam que se leve em conta a fonte material que cria o campo gravitacional. No entanto, sempre que uma teoria possui leis de conservação para o momento, a energia, o momento angular e o deslocamento do centro de massa, sete desses parâmetros se anulam identicamente, restando livres apenas  $\beta$ ,  $\gamma$ , e um terceiro parâmetro,  $\xi$ . Este último relaciona-se com efeitos de locais privilegiados no espaço-tempo, ou seja, testa o item c-iii do PEF; na relatividade geral, assume o valor  $\xi = 0$ , em bom acordo com os dados experimentais. Tanto a relatividade geral quanto a NDL (ver Seção 2.5)

possuem todas estas leis de conservação, de tal forma que os parâmetros  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\xi$  são os únicos relevantes.

O cálculo do parâmetro  $\xi$  é mais complicado e será discutido na Seção 3.2. Por ora, vamos apresentar a identificação dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  na NDL através do procedimento descrito acima, analisando a solução exata para o campo estático de simetria esférica no vácuo de um particular modelo para a teoria, tal como o fizeram M. Novello, V. A. De Lorenci e L. R. de Freitas [41,52]. Mais adiante, na Seção 3.3, retomaremos este cálculo de uma perspectiva mais crítica.

### 2.3.2 Uma solução exata

O modelo que vamos examinar é inspirado na lagrangiana de Born-Infeld para o eletromagnetismo não-linear, (2.25), que é adaptada para o campo gravitacional da seguinte forma:

$$L(U) = -2b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{U}{b^2}} - 1 \right\}, \quad (2.49)$$

onde  $b^2$  não tem o significado de ser o maior valor possível para o campo, mas é um parâmetro livre cuja interpretação física, num primeiro momento, não tem muita importância. Uma imitação mais exata da lagrangiana de Born-Infeld envolveria também o invariante  $C$ , mas é conveniente nos restringirmos à variável  $U$ . Vemos imediatamente que a lagrangiana acima satisfaz à condição (2.27). Suas duas primeiras derivadas, que entram na equação (2.46), são:

$$L_U = \left( 1 - \frac{U}{b^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.50)$$

$$L_{U,U} = \frac{1}{2b^2} \left( 1 - \frac{U}{b^2} \right)^{-3/2}. \quad (2.51)$$

Este modelo nos permite encontrar uma solução exata para a equação do campo gravitacional no vácuo, (2.44), no caso do campo estático com simetria esférica. Para mostrarmos isto, começamos por escrever a métrica de Minkowski num sistema de coordenadas esféricas  $(ct, r, \theta, \phi)$ :

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Vamos agora impor que as únicas componentes do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  que não se anulam sejam  $\varphi_{00}$  e  $\varphi_{11}$ . Além disso, elas devem ser funções que dependem apenas da coordenada radial, e as designamos pelas letras  $\mu$  e  $\nu$ :

$$\varphi_{00} := \mu(r), \quad (2.53)$$

$$\varphi_{11} := -\nu(r). \quad (2.54)$$

A métrica (2.52) nos garante que  $\varphi^{00} = \varphi_{00}$  e também que  $\varphi^{11} = \varphi_{11}$ . Podemos, a partir de (2.53) e (2.54), calcular as componentes do tensor de Fierz, utilizando a equação (1.10). É importante notar que as derivadas covariantes em relação à métrica de Minkowski envolvem as conexões  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$ , calculadas com (2.52) em (2.18) (Apêndice D). Encontramos:

$$F_{100} = -\frac{\nu}{r}, \quad (2.55)$$

$$F_{122} = \frac{1}{2}(r\nu - r^2) \frac{d\mu}{dr}, \quad (2.56)$$

$$F_{133} = F_{122} \sin^2 \theta. \quad (2.57)$$

As demais componentes não-nulas do tensor de Fierz podem ser encontradas a partir destas três através das simetrias (1.1) e (1.2). A única componente do tensor  $F_{\mu}$  que não se anula é:

$$F_1 = \frac{d\mu}{dr} - \frac{2\nu}{r}. \quad (2.58)$$

Utilizando estes resultados, chegamos à seguinte expressão para o invariante  $U$ :

$$U = \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{2\nu}{r} \frac{d\mu}{dr}. \quad (2.59)$$

As componentes de (2.44) nos fornecem apenas quatro equações não nulas:

$$\text{a) } \Psi^{00} = 0 : \quad \frac{d}{dr}(r\nu L_U) = 0; \quad (2.60)$$

$$\text{b) } \Psi^{11} = 0 : \quad \frac{d\mu}{dr} = \frac{\nu}{r}; \quad (2.61)$$

$$\text{c) } \Psi^{22} = 0 : \quad \frac{dL_U}{dr} \left( r \frac{d\mu}{dr} - \nu \right) - L_U \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\mu}{dr} - \nu \right) = 0; \quad (2.62)$$

$$\text{d) } \Psi^{33} = 0 : \quad \text{Repete a equação do item (c).}$$

Vemos imediatamente que (2.62) é identicamente satisfeita se (2.61) for válida, de tal forma que só temos de nos preocupar com (2.60) e (2.61) – um sistema de duas equações para as duas funções  $\mu$  e  $\nu$ . Usando ainda (2.61) em (2.59), descobrimos que

$$U' = -\frac{\nu^2}{r^2}. \quad (2.63)$$

Levando este resultado a (2.50), encontramos:

$$L_U = \left( 1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.64)$$

Voltando agora ao item (a), a equação (2.60) nos dá:

$$r\nu L_U = \lambda_0, \quad (2.65)$$

onde  $\lambda_0$  é uma constante de integração. Segue daí e de (2.64) que

$$r\nu \left( 1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2} \right)^{-1/2} = \lambda_0. \quad (2.66)$$

Após uma pequena manipulação algébrica desta equação, chegamos a:

$$\nu(r) = \frac{\lambda_0}{r} \left( 1 - \frac{r_c^4}{r^4} \right)^{-1/2}, \quad (2.67)$$

onde definimos

$$r_c^2 := \left| \frac{\lambda_0}{b} \right|. \quad (2.68)$$

Podemos agora encontrar  $\mu(r)$  integrando a equação (2.61):

$$\mu(r) = \int_0^r \frac{v(r')}{r'} dr'. \quad (2.69)$$

Isto nos dá uma integral elíptica:

$$\mu(r) = \lambda_0 \int_{r_c}^r \frac{1}{\sqrt{y^4 - r_c^4}} dy. \quad (2.70)$$

Expandindo (2.67) e (2.70) em potências de  $1/r$ , encontramos:

$$v(r) = \frac{\lambda_0}{r} + \frac{\lambda_0}{2r} \left( \frac{r_c}{r} \right)^4 + O(r^{-9}), \quad (2.71)$$

$$\mu(r) = -\frac{\lambda_0}{r} - \frac{\lambda_0}{10r} \left( \frac{r_c}{r} \right)^4 + O(r^{-9}). \quad (2.72)$$

Devido à definição de  $g_{\mu\nu}$  em (2.36b) e às nossas escolhas feitas em (2.53) e (2.54), temos o seguinte elemento de linha para a geometria definida por (2.71) e (2.72):

$$ds^2 = (1 + \mu) c^2 dt^2 - (1 + v) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.73)$$

Para podermos comparar esta geometria com (2.47), identificarmos  $\lambda_0$  e determinarmos os valores de  $\beta$  e  $\gamma$ , precisamos ainda passar (2.73) para um sistema isotrópico (ver Apêndice C).

Fazendo isto e mantendo apenas os termos até a  $O(r^{-2})$ , chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{\lambda_0}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_0}{r} \right)^2 \\ g_{0i} = 0 \\ g_{ij} = - \left[ 1 + \frac{\lambda_0}{r} - \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda_0}{r} \right)^2 \right] \delta_{ij}. \end{cases} \quad (2.74)$$

Temos, então:

$$\lambda_0 = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.75)$$

e também:

$$\beta = \gamma = 1. \quad (2.76)$$

Seguimos, até aqui, o cálculo realizado em [41]. O resultado a que acabamos de chegar para os parâmetros PPN  $\beta$  e  $\gamma$  é exatamente o mesmo que se encontra na relatividade geral, ou seja: a solução exata que apresentamos acima para o campo gravitacional estático, esféricamente simétrico, no vácuo, parece indicar que a NDL se sai tão bem quanto a teoria do Einstein em relação aos testes clássicos, pelo menos para o modelo “Born-Infeld gravitacional”. Veremos no Capítulo 3 que não é bem este o caso.

## 2.4 Ondas gravitacionais

Quando o campo eletromagnético interage consigo mesmo, segundo uma dinâmica ditada por equações não-lineares, os fótons se propagam por caminhos que desviam das geodésicas do espaço-tempo de fundo (que pode ser curvo ou plano, caso se considere ou não a presença da gravidade). Contudo, esses desvios não são arbitrários, pois os caminhos percorridos pelos fótons equivalem a geodésicas em uma nova estrutura geométrica definida pela auto-interação do campo. Esta nova estrutura geométrica, entretanto, corresponde a uma *geometria efetiva*, no sentido de que ela não representa uma real modificação do espaço-tempo, mas se apresenta apenas como uma descrição matemática conveniente para o comportamento dos fótons – nenhum outro campo, além do eletromagnético, percebe esta geometria efetiva ou se relaciona com ela por quaisquer meios [54-56].

O mesmo pode ser dito sobre as ondas gravitacionais na NDL. A forma da auto-interação do campo gravitacional, nesta teoria, é inspirada no eletromagnetismo não-linear e tem como consequência que as ondas gravitacionais se propagam seguindo geodésicas de uma geometria efetiva diferente daquela percebida pelos campos não-gravitacionais. Em decorrência deste fato, a velocidade de propagação das ondas gravitacionais na NDL não é a mesma que a velocidade da luz (no vácuo), resultado este que difere da previsão da relatividade geral de que ambas as velocidades seriam iguais [57]. Portanto, assumindo (por enquanto) que os parâmetros PPN sejam

iguais na NDL e na relatividade geral, como sugere o cálculo feito na seção anterior, a análise da propagação das ondas gravitacionais se destaca como o campo privilegiado em que as diferenças entre estas duas teorias poderiam ser estudadas, havendo a esperança de que suas previsões específicas pudessem ser confrontadas com dados experimentais num futuro não muito distante [52].

Lidamos com a propagação de ondas gravitacionais na NDL [41,57,58] de acordo com o método da evolução das descontinuidades elaborado por J. Hadamard [85] (ver também [40]). Em primeiro lugar, seja uma hipersuperfície  $\Sigma$  dada por

$$z(x^\alpha) = 0. \quad (2.77)$$

Definimos então a descontinuidade de uma função arbitrária,  $f(x^\alpha)$ , através de  $\Sigma$ , como sendo

$$[f]_\Sigma := \lim_{\{P^+, P^-\} \rightarrow P} \{f(P^+) - f(P^-\)}, \quad (2.78)$$

onde  $P$  pertence a  $\Sigma$ , e  $P^+$  e  $P^-$  pertencem, respectivamente, a  $V^+$  e  $V^-$ , que são as duas regiões distintas em que  $\Sigma$  divide o espaço-tempo:

$$\begin{aligned} V^+ : z > 0, \\ V^- : z < 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Assim, as descontinuidades do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  e de suas derivadas, através de  $\Sigma$ , são:

$$[\varphi_{\mu\nu}]_\Sigma = 0. \quad (2.80)$$

$$[\varphi_{\mu\nu,\alpha}]_\Sigma = 0, \quad (2.81)$$

$$[\varphi_{\mu\nu,\alpha\beta}]_\Sigma = \psi_{\mu\nu} k_\alpha k_\beta. \quad (2.82)$$

onde

$$k_\alpha := \frac{\partial z}{\partial x^\alpha}, \quad (2.83)$$

$$\psi_{\mu\nu} := \left[ \frac{\partial^2 \varphi_{\mu\nu}}{\partial z^2} \right]_\Sigma \neq 0. \quad (2.84)$$

Poderíamos analisar a descontinuidade da equação (2.44) utilizando diretamente (2.82), mas é mais conveniente definirmos a descontinuidade do tensor de Fierz. Observando (1.10), vemos que

este tensor é formado por derivadas covariantes de  $\varphi_{\mu\nu}$  em relação à métrica de Minkowski,  $\varphi_{\mu\nu|\alpha}$ . Então, devido a ambas as equações (2.80) e (2.81), deduzimos que  $[\varphi_{\mu\nu|\alpha}]_{\Sigma} = 0$ ; logo:

$$[F_{\alpha\beta\mu}]_{\Sigma} = 0. \quad (2.85)$$

Quanto à primeira derivada de  $F_{\alpha\beta\mu}$ , ela contém derivadas segundas de  $\varphi_{\mu\nu}$  e portanto sua descontinuidade não se anula; contudo, podemos ainda usar indiferentemente a derivada simples ou a derivada covariante, no que diz respeito à descontinuidade, por causa de (2.85). Definimos, então, o tensor das descontinuidades do tensor de Fierz,  $f_{\alpha\beta\mu}$ , tal que

$$[F_{\alpha\beta\mu|\nu}]_{\Sigma} = f_{\alpha\beta\mu} k_{\nu}. \quad (2.86)$$

Este tensor tem as mesmas simetrias que  $F_{\alpha\beta\mu}$ , ou seja, é anti-simétrico no primeiro par de índices e obedece à identidade cíclica. Podemos formar com ele um traço,

$$f_{\alpha} := f_{\alpha\beta}{}^{\beta}. \quad (2.87)$$

que corresponde à descontinuidade da derivada do traço do tensor de Fierz:

$$[F_{\mu|\nu}]_{\Sigma} = f_{\mu} k_{\nu}. \quad (2.88)$$

Calculando a descontinuidade da identidade (1.8), encontramos que  $[F_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{,\mu}]_{\Sigma} = 0$ , ou seja:

$$f_{\alpha\beta}{}^{\mu} k_{\mu} = 0. \quad (2.89)$$

A descontinuidade da equação (2.44), usando (2.45), nos dá:

$$2 \frac{L_{UV}}{L_{\mathcal{I}^+}} (\eta - \zeta) F^{\alpha(\mu\nu)} k_{\alpha} + f^{\alpha(\mu\nu)} k_{\alpha} = 0, \quad (2.90)$$

onde

$$\eta := F^{\alpha\beta\mu} f_{\alpha\beta\mu}. \quad (2.91)$$

$$\zeta := F^{\alpha} f_{\alpha}. \quad (2.92)$$

Para obtermos (2.90), escrevemos a derivada de  $U$ , em (2.45), como

$$U_{,\nu} = F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta\mu|\nu} - F^{\alpha} F_{\alpha|\nu}. \quad (2.93)$$

Tomando ainda a descontinuidade da identidade (1.7), contraída com  $F^{\alpha\beta\mu} k^{\nu}$ , encontramos:

$$(\eta - \zeta)k^2 + 2F^{\alpha\beta\mu} f_{\beta\nu\mu} k_\alpha k^\nu + F^{\alpha\beta\mu} f_\alpha k_\beta k_\mu + F^\alpha f_\beta k_\alpha k^\beta, \quad (2.94)$$

onde

$$k^2 := k_\mu k^\mu. \quad (2.95)$$

(Estamos subindo e descendo todos os índices com a métrica  $\gamma_{\mu\nu}$ .)

Manipulando agora a equação (2.90), com a ajuda de (2.89), obtemos as seguintes expressões:

$$F^\alpha f_\beta k_\alpha k^\beta = -2 \frac{L_{UV}}{L_I} (\eta - \zeta) F^\alpha F^\beta k_\alpha k_\beta. \quad (2.96)$$

$$2F^{\alpha\beta\mu} f_{\beta\nu\mu} k_\alpha k^\nu = 2 \frac{L_{UV}}{L_I} (\eta - \zeta) F^{\alpha\beta\mu} F_{\nu(\beta\mu)} k_\alpha k^\nu. \quad (2.97)$$

$$F^{\alpha\beta\mu} f_\alpha k_\beta k_\mu = 0. \quad (2.98)$$

Levando estes resultados a (2.94), chegamos finalmente a

$$\tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad (2.99)$$

onde

$$\tilde{g}^{\mu\nu} := \gamma^{\mu\nu} + 2 \frac{L_{UV}}{L_I} \left[ F^{\mu\alpha\beta} F^\nu_{(\alpha\beta)} - F^\mu F^\nu \right]. \quad (2.100)$$

A métrica covariante  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  é definida como a inversa de (2.100), ou seja, tal que

$$\tilde{g}_{\mu\alpha} \tilde{g}^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (2.101)$$

A equação (2.99) pode ser escrita como

$$\tilde{k}^\mu k_\mu = 0, \quad (2.102)$$

com

$$\tilde{k}^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} k_\nu. \quad (2.103)$$

Tomando a derivada covariante da equação (2.102) em relação à métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , vemos que

$$\tilde{k}^\mu \tilde{\nabla}_\alpha k_\mu = 0. \quad (2.104)$$

Como  $k_\mu$  é um vetor gradiente, equação (2.83),  $\tilde{\nabla}_\alpha k_\mu = \tilde{\nabla}_\mu k_\alpha$ . Logo:

$$\tilde{k}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\alpha = 0. \quad (2.105)$$

Reconhecemos imediatamente que esta é a equação da geodésica na geometria definida por  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ .

Desta forma, mostramos que as ondas gravitacionais se propagam pelas curvas geodésicas representadas por (2.105), e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  é a métrica efetiva a que nos referimos no início desta seção. Comparando (2.100) com (2.36b), verificamos que  $g_{\mu\nu}$ , a métrica percebida por todos os campos não-gravitacionais, e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , a métrica percebida pelo campo gravitacional, são de fato bastante distintas. Isto implica em que a velocidade de propagação no vácuo das ondas gravitacionais, na NDL, seja diferente da velocidade de propagação no vácuo das ondas eletromagnéticas na teoria linear de Maxwell. Na tese de doutorado de De Lorenci [41] e no artigo [57], é demonstrado explicitamente que a velocidade das ondas gravitacionais é menor que a velocidade da luz no caso específico da solução exata que discutimos na Seção 2.3.

Se permitirmos que a lagrangiana dependa também do invariante  $C$ , ou seja, se tivermos  $L = L(U, C)$ , então a equação para o campo gravitacional no vácuo será dada por (2.35). Repetindo para esta equação a análise que acabamos de fazer para (2.44), encontramos duas métricas efetivas distintas,  $\tilde{g}_{(+)}^{\mu\nu}$  e  $\tilde{g}_{(-)}^{\mu\nu}$ , que dependem também de  $L_{CC}$  e de  $L_{CC}$ , além de  $L_{UV}$  e  $L_U$ , e se reduzem a (2.100) quando a dependência em  $C$  é eliminada. Este resultado mostra que, no caso da lagrangiana depender de ambos  $U$  e  $C$ , a teoria NDL prevê a possibilidade de birrefringência para as ondas gravitacionais [59].

## 2.5 Leis de conservação

Na relatividade geral, vimos que quando as equações de Einstein ((2.4) ou (2.9)) são satisfeitas, a invariância da ação (2.12) (escrita de uma forma um pouco diferente, após a eliminação de um termo de superfície) por translações nos leva à lei de conservação do momento e da energia totais representada pela equação (2.5) (e que, *nesta teoria*, equivale à lei de conservação obtida através da divergência de (2.4)). A ação da NDL, (2.36a), difere da ação (2.12) apenas quanto à

parte relativa ao campo gravitacional, e também nos fornece, de acordo com o teorema de Noether, uma lei de conservação envolvendo  $\Theta^{\mu\nu}$ , que definimos como sendo o *tensor de energia-momento total*. Este tensor é dado por

$$\Theta^{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\lambda}} \right] \right\}, \quad (2.106)$$

onde definimos

$$\tilde{\mathcal{L}} := \frac{\sqrt{-\gamma}}{4\kappa} L(U) + \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}. \quad (2.107)$$

Quando a equação de Euler-Lagrange da teoria, (2.42), é satisfeita, vale, então:

$$\Theta^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (2.108)$$

As quantidades conservadas são:

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int \Theta^{\mu 0} d^3x, \quad (2.109a)$$

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int x^{[\mu} \Theta^{\nu]0} d^3x. \quad (2.109b)$$

Em (2.109),  $P^0$  é a energia total,  $P^j$  é o momento linear total.  $J^{ij}$  é o momento angular total e  $J^{0j}$  determina o movimento do centro de massa do sistema.

Quando consideramos as contribuições individuais do campo gravitacional e da matéria, na equação (2.107), em (2.106), vemos que podemos definir o tensor de energia-momento do campo gravitacional pela formula (1.51), onde agora  $\mathcal{L} = L(U)/4\kappa$ . O cálculo deste tensor está feito no

Apêndice B:

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L(U)\gamma^{\mu\nu} + 2L_U \left( 2F^{\mu\alpha\beta} F^\nu{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu - F^{\alpha(\mu\nu)} F_\alpha{}^\nu - F^\mu F^\nu \right) + \left[ L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_\alpha{}^\lambda - F^{\alpha(\lambda\mu)} \varphi_\alpha{}^\nu - F^{\alpha(\lambda\nu)} \varphi_\alpha{}^\mu \right) \right]_{|\lambda} \right\}. \quad (2.110)$$

Em primeira aproximação, na  $O(\varphi^2)$ , este tensor se reduz àquele dado em (1.52).

A parte da matéria em (2.106), a exemplo de (2.37), é:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{\mu\nu}, \quad (2.111)$$

por causa de (2.36b). Como aparece em (2.106) o fator  $1/\sqrt{-\gamma}$ , a contribuição da matéria para  $\Theta^{\mu\nu}$  contém o fator  $\omega$  definido em (2.40). Assim, encontramos:

$$\Theta^{\mu\nu} = t^{\mu\nu} + \omega T^{\mu\nu}. \quad (2.112)$$

A lei de conservação do momento e da energia, na teoria NDL, assume então a seguinte forma:

$$\left(t^{\mu\nu} + \omega T^{\mu\nu}\right)_{|\nu} = 0. \quad (2.113)$$

A divergência de (2.110) produz a seguinte identidade:

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv -\frac{1}{2\kappa} \left[ 2(\Psi^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu})_{|\alpha} - \Psi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu} \right]. \quad (2.114)$$

Esta mesma identidade pode ainda ser escrita como

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} - \frac{1}{\kappa} \left[ \Psi^{\beta\nu} \varphi_{\beta\mu} \right]_{|\nu}. \quad (2.115)$$

onde definimos o tensor de energia-momento não-simétrico de Noether,  $\tau_{\mu}{}^{\nu}$ , pela fórmula (1.46), com

$\mathcal{L} = L(U)/4\kappa$ . Temos que

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\kappa} \left[ L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu} + L(U) \delta_{\mu}^{\nu} \right], \quad (2.116)$$

e também que

$$\tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \frac{1}{2\kappa} \Psi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu}. \quad (2.117)$$

Vamos agora fazer uma pequena manipulação em (2.115), escrevendo  $\varphi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}$ , de acordo com (2.36b):

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} - \frac{1}{\kappa} \left[ \Psi^{\beta\nu} (g_{\beta\mu} - \gamma_{\beta\mu}) \right]_{|\nu},$$

ou seja:

$$\gamma_{\beta\mu} \left( t^{\beta\nu} - \frac{1}{\kappa} \Psi^{\beta\nu} \right)_{|\nu} \equiv \left( \tau_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{\kappa} \Psi^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{|\nu}. \quad (2.118)$$

Introduzindo (2.42) na identidade acima, chegamos a

$$\gamma_{\beta\mu} \left( t^{\beta\nu} + \omega T^{\beta\nu} \right)_{|\nu} = \left( \tau_{\mu}{}^{\nu} + \omega T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{|\nu}. \quad (2.119)$$

Isto significa que (2.113) é equivalente a

$$\left( \tau_{\mu}{}^{\nu} + \omega T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{|\nu} = 0, \quad (2.120)$$

que é a lei de conservação escrita em função do tensor de energia-momento de Noether.

Continuando a desenvolver esta expressão, obtemos:

$$\omega \left( T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{|\nu} + \omega_{,\nu} T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} + \tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (2.121)$$

Utilizando agora (2.117) e (2.42), encontramos

$$\omega \left( T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{|\nu} + \omega_{,\nu} T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \omega T^{\alpha\nu} \varphi_{\alpha\nu|\mu} = 0. \quad (2.122)$$

Não é difícil verificar, a partir de (2.40) e (2.17), que

$$\frac{1}{\omega} \omega_{,\mu} = K^{\lambda}{}_{\lambda\mu}, \quad (2.123)$$

onde  $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  é dado por (2.20). A equação (2.122) pode então ser posta sob a forma

$$\left( T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{|\nu} + K^{\nu}{}_{\nu\lambda} T^{\beta\lambda} g_{\beta\mu} - K^{\lambda}{}_{\nu\mu} T^{\beta\nu} g_{\beta\lambda} = 0. \quad (2.124)$$

Esta equação corresponde exatamente a uma divergência feita com a derivada covariante em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$ ,

$$\left( T^{\beta\nu} g_{\beta\mu} \right)_{;\nu} = 0,$$

e é equivalente a (2.16).

Chegamos assim à conclusão que a lei de conservação do momento e da energia, na NDL, representada pelas equações (2.113) ou (2.120), equivale a  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , equação (2.15), o que está de acordo com a proposta da teoria de respeitar o princípio de equivalência einsteiniano (PEE). Na verdade isto já era esperado, pois a equação  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  só depende do termo não gravitacional da ação (2.36a), que é o mesmo na NDL e na relatividade geral. Contudo, convém lembrar aqui que, diferentemente do que acontece na relatividade geral, na qual a equação (2.15) segue diretamente da

divergência das equações de Einstein, (2.9), na NDL a divergência das equações do campo gravitacional levam a uma segunda lei de conservação que não coincide com (2.15). Olhando para estas equações sob a forma (2.46), vemos que sua divergência nos dá

$$\left[ \frac{L_{UV}}{2L_U} U_{.a} F^{\alpha(\mu\nu)} - \frac{\kappa\omega}{L_U} F^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0, \quad (2.125)$$

o que tem um conteúdo claramente distinto de (2.113). Nos capítulos seguintes, vamos mostrar que este fato tem conseqüências importantes que acabam por comprometer a coerência interna da teoria.

# Capítulo 3

## Múltiplas possibilidades

### 3.1 Dois limites newtonianos?

#### 3.1.1 Primeiro caminho

Na Seção 2.3, dissemos que a primeira tarefa que uma teoria da gravitação tem de enfrentar é sair-se bem diante dos testes clássicos propostos por Einstein em 1916. Contudo, isto deixa implícito que a teoria em questão deve se reduzir à teoria de Newton no limite apropriado (campo gravitacional fraco com pequena variação temporal e baixas velocidades), o que é, evidentemente, um pré-requisito fundamental para qualquer teoria que se proponha a descrever os fenômenos da gravitação. O potencial gravitacional newtoniano é determinado pela equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (3.1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade de massa da matéria que é a fonte do campo gravitacional. A equação de movimento para uma partícula material sob a ação da força da gravidade é então dada em função do gradiente do potencial  $\Phi$ :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (3.2)$$

Estas equações, portanto, devem ser recuperadas no interior da nova teoria.

A NDL aceita os postulados das teorias métricas da gravidade, apresentados na Seção 2.1, ou seja, ela admite que os corpos-teste seguem geodésicas da métrica  $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ . Além disso, o

movimento da matéria que compõe a fonte do campo gravitacional é governado pela equação  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , que demonstramos ser válida nesta teoria. Deste fato resulta que, quando a fonte é composta por partículas que somente interagem entre si gravitacionalmente (como no caso de um fluido perfeito sem pressão ou nuvem de poeira), estas partículas também se movem por trajetórias que correspondem a geodésicas de  $g_{\mu\nu}$ . Portanto, o movimento de uma partícula material, na NDL, é regido pela equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (3.3)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio definido pela equação

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.4)$$

Vamos definir a 4-velocidade  $u^\mu$ ,

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.5)$$

e a “velocidade ordinária”,  $v^i$ :

$$v^i := \frac{dx^i}{dt}. \quad (3.6)$$

Quando as velocidades são baixas,  $|v^i| \ll c$ , temos que  $\tau \approx t$  e que  $u^i \approx v^i$ , de tal forma que  $u^i \ll u^0 \approx c$ . A equação (3.3), então, se reduz a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + c^2 \Gamma_{00}^i = 0. \quad (3.7)$$

No limite de campo gravitacional fraco, com uma variação temporal pequena que nos permita desprezarmos as derivadas temporais da métrica em relação às derivadas espaciais, a métrica  $g_{\mu\nu}$  difere da métrica de Minkowski por uma quantidade pequena, ou seja, temos  $|\varphi_{\mu\nu}| \ll 1$  na equação  $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ . Nestas condições, as componentes  $\Gamma_{00}^i$  da conexão (2.19) são dadas, para a primeira ordem em  $\varphi$ , por:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \varphi_{00,j}, \quad (3.8)$$

onde adotamos um sistema de coordenadas no qual  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Levando este resultado a (3.7), vemos que

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial x^i}. \quad (3.9)$$

Comparando com a equação (3.2), identificamos o potencial newtoniano na NDL:

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \varphi_{00}. \quad (3.10)$$

A equação a que este potencial obedece é a componente 00 de (2.1), a equação de Fierz-Pauli, que corresponde à parte linear da equação (2.42). Podemos reescrever a equação (2.1), após uma pequena manipulação algébrica, como

$$R_{(\ell)}^{\mu\nu} = -\kappa \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{T} \gamma^{\mu\nu} \right), \quad (3.11)$$

onde

$$R^{(\ell)}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[ -\varphi_{\mu\nu} - \varphi^\alpha_{(\mu\nu)\alpha} + \varphi_{i\mu\nu} \right], \quad (3.12)$$

e

$$\bar{T} := T^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Considerando que a pressão seja desprezível em relação à densidade de matéria da fonte, seu tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (3.14)$$

Como, no limite que estamos considerando,  $u^0 \approx c$  e  $u^i \ll u^0$ , temos que  $\bar{T} \approx T^{00} \approx \rho c^2$ .

Logo, a equação (3.11) nos dá:

$$R_{(\ell)}^{00} = -\frac{1}{2} \kappa \rho c^2. \quad (3.15)$$

Abaixando os índices com  $\eta_{\mu\nu}$ , vemos que  $R^{(\ell)}_{00} = R_{(\ell)}^{00}$ ; recorrendo então à expressão para

$R^{(\ell)}_{\mu\nu}$  em (3.12), e desprezando as derivadas temporais, encontramos:

$$\nabla^2 \varphi_{00} = \kappa \rho c^2. \quad (3.16)$$

Introduzindo agora (3.10) em (3.16), encontramos:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\kappa}{2} \rho c^4. \quad (3.17)$$

Finalmente, comparando (3.17) com (3.1), vemos que a equação para o potencial newtoniano é reproduzida na NDL, desde que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (3.18)$$

que é exatamente a mesma definição de  $\kappa$  que demos no Capítulo 1 (eq. (1.20)).

### 3.1.2 Segundo caminho

Tudo isto corresponde a uma repetição monótona do que os livros-texto trazem sobre o limite newtoniano na relatividade geral [84,86,87]. O cálculo que apresentamos acima se aplica igualmente às duas teorias, por dois motivos: 1) a equação  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  é válida em ambas as teorias, correspondendo as trajetórias das partículas-teste, bem como as trajetórias das partículas que compõem a fonte (sob certas restrições), a geodésicas da métrica  $g_{\mu\nu}$ ; 2) as equações linearizadas do campo gravitacional, em ambas as teorias, são idênticas, correspondendo à equação de Fierz-Pauli. Isto basta para garantir os resultados que obtivemos. Entretanto, a NDL permite uma outra abordagem para a determinação do seu limite de campo gravitacional fraco e baixas velocidades. Vimos na Seção 2.5 que a equação  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  está relacionada à lei de conservação do momento e da energia expressa por (2.113). Mas a divergência da equação do campo gravitacional nos fornece, na NDL, uma nova lei de conservação, dada por (2.125). De Lorenci procurou extrair as conseqüências desta nova lei para o limite newtoniano, e obteve um resultado diferente do que mostramos acima [41]. Vamos agora seguir os seus passos e examinar criticamente o seu procedimento.

Nosso primeiro objetivo é encontrar a equação de movimento para as partículas da fonte, de acordo com a equação (2.125). Começamos por reparar que o termo  $U_{,\alpha} F^{\alpha(\mu\nu)}$  é da  $O(\varphi^3)$ , e

pode ser desprezado, pois estamos interessados apenas nos termos de até a  $O(\varphi^2)$ . Além disso, temos que  $L_U = 1 + O(\varphi^2)$ ; assim, recorrendo também a (2.41), esta equação se torna:

$$\left[ \left( 1 + \frac{\varphi}{2} \right) T^{\mu\nu} \right]_{|v} + O(\varphi^3) = 0. \quad (3.19)$$

Adotando a escolha  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , podemos ainda escrevê-la como

$$T^{\mu\nu}{}_{,v} + \frac{1}{2} \varphi_{,v} T^{\mu\nu} + O(\varphi^3) = 0. \quad (3.20)$$

Integrando (3.20) em uma região espacial  $V$  que contenha toda a matéria da fonte, e supondo que a variação do campo gravitacional nesta região seja desprezível, chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial \bar{P}_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \int_V \bar{T}_\alpha{}^\mu d^3x = 0, \quad (3.21)$$

com  $\bar{P}_\alpha$  sendo dado por

$$\bar{P}_\alpha := \frac{1}{c} \int_V \bar{T}_{\alpha 0} d^3x. \quad (3.22)$$

A barra sobre  $T^{\mu\nu}$  significa, a exemplo de (3.13), que estamos abaixando os índices com a métrica de Minkowski.

Vamos agora supor que a fonte seja composta por uma única partícula. Seu tensor de energia-momento é então dado por (3.14), com

$$\rho = \rho_0 \frac{d\tau}{dt}. \quad (3.23)$$

A densidade de energia  $\rho_0$  é tal que

$$\int_V \rho_0 d^3x = m, \quad (3.24)$$

onde  $m$  é a massa inercial da partícula. Isto nos permite realizar a integração em (3.21):

$$\frac{\partial \bar{P}_\alpha}{\partial t} + \frac{m}{2} \varphi_{,\beta} u_\alpha u^\beta \frac{d\tau}{dt} = 0, \quad (3.25)$$

o que equivale a

$$\frac{\partial \bar{P}_\alpha}{\partial \tau} + \frac{m}{2} \varphi_{,\beta} u_\alpha u^\beta = 0. \quad (3.26)$$

Esta é a equação de movimento para a partícula considerada, mas para usá-la precisamos ainda explicitar  $\bar{P}_\alpha$  em função de quantidades conhecidas. Podemos fazer isto comparando (3.26) com as equações de Euler-Lagrange derivadas de uma lagrangiana apropriada,  $\mathcal{L}_m$ . Estas equações têm a seguinte forma:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.27)$$

Comparando então (3.26) e (3.27), encontramos:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial u^\alpha} = \bar{P}_\alpha, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x^\alpha} = -\frac{m}{2} \varphi_{,\beta} u_\alpha u^\beta. \quad (3.29)$$

Integrando (3.29) e impondo que na ausência do campo gravitacional tenhamos a lagrangiana para uma partícula livre,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \mathcal{L}_m = \frac{m}{2} u_\alpha u^\alpha. \quad (3.30)$$

obtemos a seguinte expressão para  $\mathcal{L}_m$ :

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m}{2} \int \varphi_{,\beta} u_\alpha u^\beta dx^\alpha + \frac{m}{2} u_\alpha u^\alpha. \quad (3.31)$$

Como  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ , vemos, a partir de (3.5), que  $dx^\alpha = u^\alpha d\tau$ . A forma final para (3.31) é, portanto:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m}{2} \int u_\alpha u^\alpha u^\beta \varphi_{,\beta} d\tau + \frac{m}{2} u_\alpha u^\alpha. \quad (3.32)$$

Usando agora (3.28), determinamos  $\bar{P}_\alpha$ :

$$\bar{P}_\alpha = -\frac{m}{2} \int \left( 2u_\alpha u^\beta \varphi_{,\beta} + u_\beta u^\beta \varphi_{,\alpha} \right) d\tau + m u_\alpha. \quad (3.33)$$

Finalmente, levando (3.33) a (3.26), chegamos à equação de movimento para a partícula da fonte:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} u_\mu - \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} u_\alpha u^\alpha = 0. \quad (3.34)$$

onde usamos que  $u^\alpha \varphi_{,\alpha} = \partial\varphi/\partial\tau$ .

A equação (3.34) deve ser comparada com (3.3), mas, diferentemente daquela, já pressupõe um regime de campo gravitacional fraco. Supondo ainda que a variação temporal do campo seja pequena, o limite de baixas velocidades nos dá:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \quad (3.35)$$

Comparando agora (3.35) com a equação de movimento da partícula na teoria newtoniana, (3.2), identificamos o potencial  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \varphi. \quad (3.36)$$

Este foi o resultado encontrado por De Lorenci. Para que não haja conflito com o nosso resultado anterior, (3.10), temos de impor que  $\varphi = \varphi_{00}$  (quando  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ). Isto não é muito razoável; na solução exata para o campo gravitacional estático e esfericamente simétrico que apresentamos na Seção 2.3, por exemplo, temos que  $\varphi \approx -2\varphi_{00}$  (ver eq. (2.74)) – e esta é uma solução em que os parâmetros pós-newtonianos  $\beta$  e  $\gamma$  são idênticos aos da relatividade geral, o que significa que esta solução está de acordo com os testes experimentais num nível de precisão superior ao limite newtoniano. Portanto, a identificação do potencial newtoniano com o traço do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  não é conveniente.

Ademais, independentemente disto, a equação (3.34), tomada antes do limite de baixas velocidades, não corresponde à equação da geodésica na métrica  $g_{\mu\nu}$  em um campo gravitacional fraco. Para chegarmos a (3.9), primeiro tomamos o limite de baixas velocidades de (3.3) e obtivemos (3.7), depois impusemos que o campo gravitacional fosse fraco. Se invertemos a ordem e tomamos primeiramente o limite de campo fraco de (3.3), chegamos à seguinte expressão para a equação aproximada da geodésica:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} + \varphi_{\mu\alpha,\beta} u^\alpha u^\beta - \frac{1}{2} \varphi_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta = 0. \quad (3.37)$$

Esta equação é bastante diferente de (3.34). Isto demonstra que a equação (2.125) impõe que as partículas materiais da fonte do campo gravitacional não se desloquem de acordo com geodésicas de  $g_{\mu\nu}$ , violando o princípio de equivalência einsteiniano, e entrando em contradição com a lei de conservação  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , que implica que este mesmo princípio é satisfeito. As duas equações de movimento para as partículas da fonte na NDL, uma derivada da lei de conservação do momento e da energia, a outra decorrente da divergência da equação do campo gravitacional, são incompatíveis. Além disso, os dois limites newtonianos provenientes destas duas equações de movimento só podem ser conciliados se  $\varphi = \varphi_{(0)}$ , o que não é dado naturalmente pela teoria, mas corresponde a uma condição adicional (indesejada) sobre o campo gravitacional.

De Lorenci segue adiante com o seu cálculo até a identificação da constante  $\kappa$ , supondo que o potencial newtoniano seja dado por (3.36). No entanto, seu procedimento esbarra em mais uma fragilidade da teoria. Mostramos na Seção 1.3 que o tensor  $G^{(\prime)}{}_{\mu\nu}$ , e portanto também a equação (2.1), permanece invariante por uma transformação do tipo  $\varphi_{\mu\nu} \rightarrow \varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \xi_{\mu|\nu} + \xi_{\nu|\mu}$ ; isto significa que a equação (2.1), sozinha, não é suficiente para a determinação de todas as componentes do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , exigindo que sejam impostas quatro condições adicionais sobre  $\varphi_{\mu\nu}$ . Esta equação, portanto, deixa o traço de  $\varphi_{\mu\nu}$  indeterminado. A equação completa do campo gravitacional na NDL, (2.39), por sua vez, não admite nenhuma transformação de calibre (a equação da teoria para o vácuo, (2.44), admite a transformação (1.37),  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}$ , que deixa invariante o tensor de Fierz). Ora, esta é uma situação bizarra: a teoria não possui nenhuma simetria de calibre, mas mesmo assim somos obrigados a impor quatro condições arbitrárias sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  para podermos resolver a equação linearizada do campo gravitacional. No seu exame do limite newtoniano, De Lorenci utilizou o “calibre de Lorentz”,

$$\left( \varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi \gamma^{\mu\nu} \right)_{|\nu} = 0, \quad (3.38)$$

e obteve um resultado para  $\kappa$  diferente de (3.18). Porém, o seu resultado depende fundamentalmente da equação (3.38) – que deveria ser uma condição matemática auxiliar sem consequências físicas, à maneira de uma escolha de calibre.

Vamos prosseguir tomando o traço da equação (3.11),

$$\square \varphi - \varphi^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} = \kappa \bar{T}, \quad (3.39)$$

e adotando uma condição mais geral que (3.38),

$$\left[ \varphi^{\mu\nu} - (\alpha + 1) \varphi \gamma^{\mu\nu} \right]_{|\nu} = 0, \quad (3.40)$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária. Introduzindo (3.40) em (3.39), ficamos com a equação

$$-\alpha \square \varphi = \kappa \bar{T}. \quad (3.41)$$

No limite de baixas velocidades,  $\bar{T} \approx \rho c^2$ ; logo:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\kappa}{\alpha} \rho c^2. \quad (3.42)$$

Da equação (3.36) vem

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\kappa}{2\alpha} \rho c^4. \quad (3.43)$$

e a comparação com (3.1) nos dá, finalmente:

$$\kappa = \alpha \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.44)$$

Para que este resultado não contradiga o valor encontrado para  $\kappa$  na seção anterior, somos forçados a admitir que  $\alpha = 1$ . Porém, isto quer dizer que a equação  $\varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 2 \varphi_{,\mu}$  não se refere a uma escolha, mas corresponde a mais um conjunto de condições que o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  deve obedecer, somando-se à condição anterior,  $\varphi = \varphi_{00}$ , para que o limite newtoniano da teoria não seja duplo. (Mais uma vez, a solução (2.74) não obedece a estas condições.)

A necessidade do apelo a estas condições adicionais deve ser entendida como um sinal de que há problemas com a coerência interna da teoria. De fato, mesmo que elas possam ser satisfeitas, e que consigamos forçar o limite newtoniano a ser único, elas só resolvem o problema neste primeiro

nível de aproximação; num segundo nível, em que as velocidades dos corpos materiais não sejam mais pequenas em relação à velocidade da luz, continuamos a ter duas equações distintas para o movimento das partículas, (3.34) e (3.37). Para resolvermos o problema neste novo nível, teríamos de impor condições mais fortes, exigindo que ambas as equações fossem idênticas. Contudo, estas equações são válidas apenas para campos gravitacionais fracos, na  $O(\varphi)$ , e a ambigüidade subsistiria em níveis mais elevados. Teríamos então de impor condições ainda mais fortes para a  $O(\varphi^2)$ , depois para a  $O(\varphi^3)$ , e assim sucessivamente. Já vimos que a origem destas duas equações de movimento está na existência de duas leis de conservação distintas na NDL; assim, no limite, a solução definitiva do problema seria impor a absoluta equivalência entre a lei de conservação do momento e da energia e a divergência da equação do campo gravitacional. E é precisamente isto que é feito na relatividade geral, sendo esta imposição a pedra angular que possibilita a dedução das equações de Einstein a partir do esquema conceitual da teoria de campos (ao invés do esquema conceitual da geometria riemanniana), como explicamos na Seção 2.1.

No restante deste capítulo, iremos continuar a expor algumas das ambigüidades presentes na teoria NDL, e que passaram despercebidas pelos seus proponentes.

### 3.2 O parâmetro PPN $\xi$

Foi apresentada na Seção 2.3 uma possível identificação dos parâmetros PPN  $\beta$  e  $\gamma$ ; ficou faltando, então, uma discussão sobre o terceiro e último parâmetro relevante,  $\xi$ . O cálculo de  $\xi$  exige um procedimento mais complexo: ao invés de obtermos uma solução exata particular e examiná-la num determinado nível de aproximação, partimos da equação completa do campo gravitacional, com o termo de fonte, reduzimo-la ao nível de aproximação desejado, e então encontramos a solução mais geral possível para esta equação aproximada (ver Will [17]). Na NDL, é suficiente considerarmos a equação do campo gravitacional até a  $O(\varphi^2)$ :

$$R_{(\ell)}{}^{\mu\nu} = -\kappa \left( 1 + \frac{\varphi}{2} \right) \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{T} \gamma^{\mu\nu} \right). \quad (3.45)$$

Entretanto, este cálculo apresenta dificuldades. Mostramos, na seção anterior, que o exame do limite newtoniano – que corresponde à primeira etapa do cálculo que estamos discutindo, que nada mais é do que a extensão da análise da aproximação newtoniana até o nível seguinte, daí o nome de *aproximação pós-newtoniana* –, pela via da divergência da equação do campo gravitacional, exige a imposição de condições adicionais sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Vimos que é tentador utilizar o “calibre de Lorentz”, (3.38), no entanto o seu uso leva a contradições. Em particular, a condição  $\varphi = \varphi_{00}$  (com  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) já tem conseqüências indesejadas para os parâmetros PPN, pois implica que  $\gamma = 0$  (ver (2.47)). Os valores dos parâmetros PPN na relatividade geral são  $\beta = \gamma = 1$  e  $\xi = 0$ , que têm confirmação experimental. Portanto, a condição  $\varphi = \varphi_{00}$ , sem a qual o próprio limite newtoniano da NDL seria indeterminado, basta para arruinar o limite pós-newtoniano.

Quanto ao cálculo de  $\xi$ , ele se faz através da solução da componente 00 de (3.45) para  $O(\varphi^2)$ , e das demais componentes para a  $O(\varphi)$ ; todo o conjunto dos dez parâmetros PPN é então determinado pela inspeção direta da solução obtida. O processo envolve duas etapas: primeiro, resolve-se a equação (3.45) para a  $O(\varphi)$ , para todas as componentes, e depois utiliza-se os resultados desta primeira etapa para determinar a solução da componente 00 para a  $O(\varphi^2)$ . Como já mencionamos, a solução da equação linear, que constitui o primeiro passo, exige a utilização de condições tais como (3.38) ou (3.40), já que esta equação, sozinha, não é suficiente para determinar todas as componentes de  $\varphi_{\mu\nu}$  (por causa da sua invariância pela transformação  $\varphi_{\mu\nu} \rightarrow \varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \xi_{\mu|\nu} + \xi_{\nu|\mu}$ ). No entanto, a equação para a  $O(\varphi^2)$  já não possui qualquer invariância, por causa do fator  $1 + \varphi/2$  no lado esquerdo de (3.45). Este fato impõe quatro condições sobre a solução da equação linear; será visto no Capítulo 4 que estas condições são:

$$2 \left( G_{(\ell)}{}^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu} \right)_{|\alpha} - G_{(\ell)}{}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta|\mu} = 0. \quad (3.46)$$

Podemos pensar em utilizar estas condições para eliminar a indeterminação da solução da equação linear; porém, mostramos na seção anterior que o limite newtoniano já se encarrega de impor quatro condições sobre esta solução:  $\varphi = \varphi_{00}$  e  $\varphi_{i \nu}{}^{\nu}{}_{|\nu} = 2\varphi_{,i}$  (a componente  $\mu=0$  de (3.40) não é obrigatória, porque desprezamos as derivadas temporais para obtermos (3.42)). Assim, temos dois conjuntos de quatro condições para  $\varphi_{\mu\nu}$ , enquanto a equação linear é deixada invariante por uma transformação com apenas quatro graus de liberdade. Portanto, estas condições não podem ser todas satisfeitas simultaneamente, o que torna impossível levar o cálculo adiante sem cair em contradições.

Independentemente disso, vale a pena notar que os termos de  $O(\varphi^2)$ , na equação do campo gravitacional da NDL, provêm apenas do termo de matéria, através do fator  $\omega$ ; a não-linearidade da lagrangiana do campo gravitacional,  $L(U)$ , só contribui com os termos de  $O(\varphi^3)$  em diante, como pode ser visto examinando-se a equação (2.46). Como a aproximação pós-newtoniana lida apenas com os termos até a  $O(\varphi^2)$ , isto quer dizer que, do ponto de vista do formalismo pós-newtoniano, a lagrangiana do campo gravitacional na NDL é a própria lagrangiana de Fierz-Pauli,  $L(U) = U$ . Assim, a NDL se inscreve num grupo de teorias que C. Will denomina *quase-lineares*; no seu livro [17], Will mostra que estas teorias predizem sempre  $\xi = \beta$ , em desacordo com os fatos experimentais. Portanto, mesmo que pudéssemos contornar o problema do excesso de condições impostas sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , a previsão da NDL seria o indesejável  $\xi = \beta$ .

Mas o resultado de toda esta análise é que os parâmetros PPN, na teoria NDL, são na verdade indeterminados. Testes ainda mais precisos da gravitação, como o estudo do pulsar binário (ver Will [17-19]), tornam-se inviáveis para esta teoria, apesar do otimismo inicial de Novello e De Lorenci [61]. Daremos, na seção seguinte, uma demonstração explícita da indeterminação dos parâmetros PPN, reexaminando a solução para um campo gravitacional estático com simetria esférica.

### 3.3 Nova solução estática esfericamente simétrica para o vácuo

Quando examinamos o modelo tipo Born-Infeld para a NDL, vimos que ele nos permite encontrar uma solução exata para o campo estático e esfericamente simétrico no vácuo; esta solução fornece os valores  $\beta = \gamma = 1$  para os parâmetros PPN, parecendo indicar que a NDL se sai bem na descrição de sistemas planetários. Entretanto, veremos agora que esta solução não é única.

Vamos adotar o sistema de coordenadas esféricas  $(ct, r, \theta, \phi)$ , com  $\gamma_{\mu\nu}$  dado por (2.52), e designar a solução apresentada na Seção 2.3 por  $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$ , de tal forma que

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{00} = \mu(r) \\ \bar{\varphi}_{11} = -\nu(r) \\ \bar{\varphi}_{22} = \bar{\varphi}_{33} = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

onde  $\mu$  e  $\nu$  são dados, respectivamente, por (2.70) e (2.67) (as componentes de  $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$  fora da diagonal também são nulas). Em primeira aproximação, a partir das equações (2.71), (2.72) e (2.75), temos que

$$\begin{cases} \mu(r) = -\frac{2GM}{rc^2} + O(r^{-5}) \\ \nu(r) = \frac{2GM}{rc^2} + O(r^{-5}). \end{cases} \quad (3.48)$$

A geometria definida por esta solução é  $\bar{g}_{\mu\nu} := \gamma_{\mu\nu} + \bar{\varphi}_{\mu\nu}$  e, como já vimos, possui  $\beta = \gamma = 1$ .

Sejam agora o tensor  $\varphi'_{\mu\nu}$ , definido de tal forma que suas componentes não-nulas sejam

$$\begin{cases} \varphi'_{00} = \mu \\ \varphi'_{11} = -\sigma \\ \varphi'_{22} = -r^2\sigma \\ \varphi'_{33} = -(r^2 \sin^2 \theta)\sigma, \end{cases} \quad (3.49)$$

onde  $\mu$  é dado por (2.70) e  $\sigma = \sigma(r)$  é uma função ainda desconhecida, e a função  $\chi(r)$  dada por

$$\chi(r) := \int_0^r \sigma(r') r' dr'. \quad (3.50)$$

Fazendo a transformação  $\delta \varphi'_{\mu\nu} = \chi_{|\mu\nu}$ , encontramos um novo tensor,  $\varphi''_{\mu\nu}$ , a partir de  $\varphi'_{\mu\nu}$ :

$$\varphi'_{\mu\nu} \rightarrow \varphi''_{\mu\nu} = \varphi'_{\mu\nu} + \delta \varphi'_{\mu\nu} = \varphi'_{\mu\nu} + \chi_{|\mu\nu}. \quad (3.51)$$

Como mostramos na Seção 1.3, o tensor de Fierz permanece invariante por uma transformação deste tipo; logo, concluímos que

$$F''_{\alpha\beta\mu} = F'_{\alpha\beta\mu}, \quad (3.52)$$

onde  $F'_{\alpha\beta\mu}$  e  $F''_{\alpha\beta\mu}$  são construídos, respectivamente, com  $\varphi'_{\mu\nu}$  e  $\varphi''_{\mu\nu}$ , de acordo com (1.10).

Um cálculo direto nos revela que (ver Apêndice D para o cálculo das derivadas covariantes):

$$\begin{cases} \chi_{|0\mu} = \chi_{|12} = \chi_{|13} = \chi_{|23} = 0 \\ \chi_{|11} = \sigma + r \frac{d\sigma}{dr} \\ \chi_{|22} = r^2 \sigma \\ \chi_{|33} = (r^2 \sin^2 \theta) \sigma. \end{cases} \quad (3.53)$$

Introduzindo (3.53) em (3.51) e utilizando (3.49), obtemos:

$$\begin{cases} \varphi''_{00} = \varphi'_{00} = \mu \\ \varphi''_{11} = \varphi'_{11} + \sigma + r \frac{d\sigma}{dr} = r \frac{d\sigma}{dr} \\ \varphi''_{22} = \varphi'_{22} + r^2 \sigma = 0 \\ \varphi''_{33} = \varphi'_{33} + (r^2 \sin^2 \theta) \sigma = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Até aqui,  $\sigma$  é uma função arbitrária. Se fizermos agora a escolha

$$\sigma = -\mu, \quad (3.55)$$

e usarmos a equação (2.61), encontramos que

$$r \frac{d\sigma}{dr} = -r \frac{d\mu}{dr} = -\nu. \quad (3.56)$$

Assim, (3.54) torna-se a solução (3.47):

$$\varphi''_{\mu\nu} = \bar{\varphi}_{\mu\nu}. \quad (3.57)$$

A equação (3.52) nos diz então que

$$F'_{\alpha\beta\mu} = \bar{F}_{\alpha\beta\mu}, \quad (3.58)$$

onde  $\bar{F}_{\alpha\beta\mu}$  é construído com  $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$ . Levando (3.55) a (3.49), vemos que o tensor  $\varphi'_{\mu\nu}$  fica sendo:

$$\begin{cases} \varphi'_{00} = \mu \\ \varphi'_{11} = \mu \\ \varphi'_{22} = r^2 \mu \\ \varphi'_{33} = (r^2 \sin^2 \theta) \mu. \end{cases} \quad (3.59)$$

Este tensor  $\varphi'_{\mu\nu}$  dado por (3.59) e o tensor  $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$  dado por (3.47), portanto, produzem exatamente o mesmo tensor  $F_{\alpha\beta\mu}$  através de (1.10), como nos assegura o resultado (3.58); isto decorre do fato de eles estarem relacionados entre si pela transformação  $\bar{\varphi}_{\mu\nu} = \varphi'_{\mu\nu} + \chi_{,\mu\nu}$ , que deixa o tensor de Fierz invariante. Mas a equação para o campo gravitacional no vácuo,  $[L_{\nu} F^{\alpha(\mu\nu)}]_{;\alpha} = 0$ , da qual  $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$  é solução, só depende explicitamente do tensor de Fierz, sendo ela própria invariante por esta transformação; por conseguinte,  $\varphi'_{\mu\nu}$  é também uma solução exata desta mesma equação.

Vimos na Seção 2.3 que a identificação dos parâmetros PPN deve ser feita num sistema de coordenadas isotrópicas. E, se definirmos a métrica  $g'_{\mu\nu} := \gamma_{\mu\nu} + \varphi'_{\mu\nu}$ , com  $\varphi'_{\mu\nu}$  sendo dado por (3.59), vemos que ela já está sob uma forma isotrópica:

$$ds^2 = g'_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (1 + \mu) c^2 dt^2 - (1 - \mu) \left[ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (3.60)$$

Recorrendo então a (3.48), e passando a parte espacial para coordenadas euclidianas, obtemos, para uma aproximação válida até a  $O(r^{-1})$ :

$$\begin{cases} g'_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \\ g'_{0i} = 0 \\ g'_{ij} = - \left( 1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) \delta_{ij}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Finalmente, a comparação com (2.47) nos fornece os parâmetros PPN: encontramos  $\beta = 0$  e  $\gamma = 1$ .

As métricas  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e  $g'_{\mu\nu}$  correspondem, ambas, a soluções exatas da equação do campo gravitacional da NDL para o vácuo, estáticas e com simetria esférica. No entanto, têm valores diferentes para os parâmetros PPN, com  $\beta = 1$  na primeira e  $\beta = 0$  na segunda. Isto demonstra, de

uma só vez, dois fatos: que a solução da equação (2.44), ao menos para esta particular simetria (veremos adiante que este resultado é na verdade mais geral), não é única, permitindo a teoria que haja diferentes soluções, não equivalentes do ponto de vista físico, para o mesmo problema; e também que os parâmetros PPN, nesta teoria, são indeterminados, em pleno acordo com a conclusão a que chegamos na Seção 3.2. Estes fatos ilustram as falhas de coerência interna da teoria.

### 3.4 Quem é o campo gravitacional?

Dada a relação entre o tensor de Fierz e o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  – que na NDL corresponde ao potencial gravitacional –, e sua semelhança com a relação entre  $F_{\mu\nu}$  – o tensor que descreve o campo eletromagnético – e o potencial  $A_\mu$  (como comentamos no final da Seção 1.1), é tentador chamarmos  $F_{\alpha\beta\mu}$  de *tensor campo gravitacional*. De fato, foi esta a nomenclatura adotada pelos criadores da teoria NDL [41,52,53]. Entretanto, acabamos de mostrar na seção anterior que o mesmo tensor  $F_{\alpha\beta\mu}$  pode estar relacionado a mais de uma métrica, correspondendo a curvaturas distintas para o espaço-tempo (diferentes parâmetros PPN correspondem, necessariamente, a diferentes curvaturas). Na medida em que a NDL aceita os postulados das teorias métricas da gravidade que apresentamos na Seção 2.1 (embora já tenhamos visto na Seção 3.1 que a teoria não se mantém coerente com este princípio), é a curvatura do espaço-tempo que determina a trajetória de partículas-teste, segundo a equação da geodésica; geometrias com curvaturas diferentes, portanto, correspondem a campos gravitacionais distintos. Desta forma, a teoria nos diz que podemos ter campos gravitacionais distintos associados ao mesmo tensor  $F_{\alpha\beta\mu}$ , que, conseqüentemente, não pode ser interpretado como o tensor que descreve o campo gravitacional.

Como isto acontece é fácil de entender: a métrica com a qual a matéria se acopla, na NDL, é definida pela equação  $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$ , e portanto depende explicitamente de  $\varphi_{\mu\nu}$ ; assim, a transformação  $\varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu}$  gera uma nova métrica,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \zeta_{|\mu\nu}, \quad (3.62)$$

enquanto o tensor de Fierz permanece inalterado:  $F'_{\alpha\beta\mu} = F_{\alpha\beta\mu}$ . As duas métricas  $g_{\mu\nu}$  e  $g'_{\mu\nu}$ , relacionadas por (3.62), não precisam ser equivalentes, uma vez que esta equação, em geral, não corresponde a uma transformação de coordenadas. A expressão completa para uma transformação de coordenadas envolveria uma série infinita de derivadas de Lie [12], mas uma transformação infinitesimal é dada pela seguinte equação:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \xi_{(\mu;\nu)}, \quad (3.63)$$

onde o ponto-e-vírgula denota a derivada covariante em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  e  $\xi_{\mu} = g_{\mu\nu} \xi^{\nu}$ , sendo as coordenadas relacionadas por  $x'^{\mu} = x^{\mu} - \xi^{\mu}$ . O que estamos dizendo é que não é verdade que, para todo  $\zeta$ , exista um  $\xi_{\mu}$  tal que  $\xi_{(\mu;\nu)} = \zeta_{|\mu\nu}$ , o que significa que (3.62) não corresponde, em geral, a uma transformação de coordenadas. Assim, a transformação que deixa o tensor de Fierz invariante,  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}$ , nem sempre produz métricas equivalentes, de tal forma que, para cada  $F_{\alpha\beta\mu}$ , há uma infinidade de campos gravitacionais fisicamente distintos (porque há uma infinidade de escalares  $\zeta$  tais que (3.62) não corresponde a uma transformação de coordenadas). Podemos então concluir que, embora a transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}$  deixe invariante o tensor de Fierz, ela não se apresenta como uma simetria de calibre da teoria, pois as propriedades físicas de um sistema não podem depender de uma escolha de calibre.

Para efeito de comparação, vale a pena mencionar, aqui, que há na relatividade geral uma verdadeira simetria de calibre, que se traduz, na formulação da teoria que apresentamos na Seção 2.1, por uma invariância da ação pela transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{(\mu;\nu)}$  – justamente o necessário para que a simetria corresponda à invariância por uma transformação de coordenadas. Isto evita os problemas que estamos mostrando ocorrerem na NDL.

Embora o tensor de Fierz não possa ser considerado o “tensor campo gravitacional”, é interessante notar que ele define a métrica na qual se propagam as ondas gravitacionais. Como

comentamos na Seção 2.4, a métrica efetiva  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , dada por (2.100), poderia ser encontrada utilizando-se a equação (2.82) ao invés de (2.86), ou seja, através da descontinuidade de  $\varphi_{\mu\nu}$  ao invés da de  $F_{\alpha\beta\mu}$ ; isto garante que são de fato as ondas gravitacionais que se propagam por  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ . Além disso, essa métrica só depende do tensor de Fierz, permanecendo assim invariante pela transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}$ .

Não resta dúvida que o campo gravitacional, na NDL, seja descrito pela métrica  $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$  e não pelo tensor de Fierz. Isto nos leva a reconhecer que a equação para o campo no vácuo, (2.44), que só depende explicitamente de  $F_{\alpha\beta\mu}$ , possui múltiplas soluções para um mesmo problema – fato este que exploramos na seção anterior para o caso específico de um campo estático com simetria esférica. Em particular, os parâmetros PPN são deixados indeterminados por esta equação. No entanto, esta indeterminação tem uma origem um pouco diferente daquela que encontramos na Seção 3.2: lá, os parâmetros PPN se mostraram indeterminados porque a equação completa do campo gravitacional, com o termo de fonte, (2.42), leva a duas leis de conservação que conflitam entre si, tornando a identificação destes parâmetros inviável; aqui, a equação para o campo gravitacional no vácuo, (2.44), admite múltiplas soluções fisicamente não equivalentes por causa da invariância do tensor de Fierz. Veremos no próximo capítulo, ao estudarmos o problema de Cauchy na NDL, que há de fato uma diferença qualitativa importante entre as equações com e sem o termo de fonte material: elas não concordam sequer quanto ao número de graus de liberdade do campo. Apesar disso, ao examinarmos a teoria de perturbações, mostraremos que há, por detrás destas diferenças, uma razão mais profunda para as dificuldades da teoria, e que é a mesma nos dois casos.

## Capítulo 4

# O problema de Cauchy e a teoria de perturbações na NDL

### 4.1 O problema de Cauchy

A NDL, como vimos no Capítulo 2, se propõe a ser uma teoria para a gravitação que descreve o campo gravitacional como um campo de spin-2; sua proposta específica é a de realizar a auto-interação do campo gravitacional de forma similar à auto-interação do campo eletromagnético, introduzindo a não-linearidade nas equações do campo de spin-2 de forma análoga à sua presença nas teorias não-lineares do campo de spin-1. Assim, tendo por base a lagrangiana da teoria linear de Fierz-Pauli,  $L = U$ , a NDL considera lagrangianas do tipo  $L = L(U)$ . A análise do problema de Cauchy, isto é, da propagação do campo dadas certas condições iniciais, nos revela um fato importante: este esquema de introdução da não-linearidade, que funciona bem no eletromagnetismo, não dá certo na gravitação, destruindo o caráter de spin-2 do campo. Antes, porém, de entrarmos no mérito desta questão, convém apresentar duas identidades que nos serão úteis.

Tomando a divergência da equação (2.45), e usando (2.43), vemos facilmente que é válida a seguinte identidade:

$$\psi^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \frac{L_{UU}}{2L_U} U_{;\alpha} \psi^{\alpha\mu} \equiv I^\mu, \quad (4.1)$$

onde

$$I^\mu := -\sqrt{L_U} \left( \sqrt{L_U} \right)_{;\alpha\beta} F^{\alpha\mu\beta}. \quad (4.2)$$

Tomando a dupla divergência da equação (2.43), chegamos diretamente a uma nova identidade:

$$\psi^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} \equiv 0. \quad (4.3)$$

Consideraremos apenas lagrangianas que tenham a seguinte forma:

$$L(U) = U + a_1 U^2 + a_2 U^3 + \dots, \quad (4.4)$$

onde pelo menos um dos coeficientes  $a_i$  não se anula.

### 4.1.1 Propagação do campo no vácuo

A exemplo do que fizemos na Seção 1.5, vamos adotar um sistema de coordenadas no qual  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  e considerar como condições iniciais os valores das componentes de  $\varphi_{\mu\nu}$  e de suas primeiras derivadas, dados em uma hipersuperfície espacial  $\Sigma$ ; assim, as derivadas espaciais de qualquer ordem das componentes de  $\varphi_{\mu\nu}$  também são conhecidas em  $\Sigma$ .

A equação do campo gravitacional no vácuo, (2.44), corresponde a  $\Psi^{\mu\nu} = 0$ . Sua divergência não se anula identicamente, como podemos ver inspecionando a identidade (4.1), de tal forma que  $\Psi^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$  (ou, equivalentemente,  $I^\mu = 0$ ) é uma nova equação que temos de levar em conta. Mais uma divergência nos leva à identidade (4.3), não acrescentando nada de novo. A NDL, portanto, nos dá o seguinte sistema de 14 equações a serem resolvidas:

$$\begin{cases} \Psi^{\mu\nu} = 0 & (4.5a) \\ \Psi^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0. & (4.5b) \end{cases}$$

Para analisar o sistema (4.5), temos de separar as derivadas temporais de segunda ordem ou ordens superiores. Vamos então utilizar as equações (2.43), (2.45) e (1.16) para escrevermos:

$$\Psi^{\mu\nu} = L_U G_{(t)}^{\mu\nu} + L_{U^2} F^{\alpha(\mu\nu)} F^{\beta\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma|\beta\alpha}, \quad (4.6)$$

onde também usamos que

$$U_{,\alpha} = -2L_U \beta\rho\sigma \varphi_{\rho\sigma|\beta\alpha}. \quad (4.7)$$

Esta última equação provém de (1.26). Fazendo agora  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , encontramos:

$$\begin{aligned}
\Psi^{\mu\nu} = & L_U G_{(t)}^{\mu\nu} + L_{UU} F^{k(\mu\nu)} F^{l\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,kl} + \\
& + L_{UU} F^{0(\mu\nu)} F^{l\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,0l} + L_{UU} F^{k(\mu\nu)} F^{0\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,k0} + \\
& + L_{UU} F^{0(\mu\nu)} F^{0\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,00}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Será útil adotarmos uma notação mais compacta,

$$\Psi^{\mu\nu} = \tilde{\Psi}^{\mu\nu} + L_{UU} F^{0(\mu\nu)} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00}, \tag{4.9}$$

onde levamos em conta que  $F^{00\sigma} = 0$  e definimos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}^{\mu\nu} := & L_U G_{(t)}^{\mu\nu} + L_{UU} F^{k(\mu\nu)} F^{l\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,kl} + \\
& + L_{UU} F^{0(\mu\nu)} F^{l\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,0l} + L_{UU} F^{k(\mu\nu)} F^{0\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,k0}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Notemos que, à exceção do primeiro termo no lado direito de (4.10), os demais termos não possuem derivadas temporais de segunda ordem do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Ou seja, todas as derivadas segundas temporais de  $\varphi_{\mu\nu}$  contidas no objeto  $\tilde{\Psi}^{\mu\nu}$  (que não é um tensor) estão no termo  $G_{(t)}^{\mu\nu}$ .

Voltando então a (1.60), fica evidente que  $\tilde{\Psi}^{ij}$  contém os termos  $\varphi_{ij,00}$ , e também que os quatro termos  $\varphi_{0\mu,00}$  não aparecem em  $\tilde{\Psi}^{\mu\nu}$ . As componentes  $\tilde{\Psi}^{0\mu}$ , por sua vez, só contêm derivadas temporais de primeira ordem.

Procedemos de forma análoga para explicitar os termos onde ocorrem derivadas temporais de terceira ordem nas equações (4.5b). Usando (4.7) e calculando a divergência de (4.6), encontramos:

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{; \nu} = \frac{1}{2} L_{UU} U_{;\alpha} G_{(t)}^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} (L_{UUU} U_{;\alpha} U_{;\beta} + L_{UU} U_{|\alpha\beta}) F^{\alpha\mu\beta}. \tag{4.11}$$

As derivadas terceiras aparecem apenas no termo  $U_{|\alpha\beta}$ , que é dado por

$$U_{|\alpha\beta} = -2 F^{\lambda\rho\sigma}{}_{|\beta} \varphi_{\rho\sigma|\lambda\alpha} - 2 F^{\lambda\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma|\lambda\alpha\beta}, \tag{4.12}$$

de acordo com (4.7). Separando então as derivadas terceiras temporais em (4.11), e usando  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , obtemos:

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \tilde{\Phi}^{\mu} + L_{UU} F^{0\mu 0} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,000}, \tag{4.13}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}^\mu := & -L_{UV} G_{(\ell)}^{\alpha\mu} F^{\lambda\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,\lambda\alpha} - 2L_{UVU} F^{\alpha\mu\beta} F^{\lambda\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,\lambda\alpha} F^{v\epsilon\tau} \varphi_{\epsilon\tau,\nu\beta} + \\
& + L_{UV} F^{\alpha\mu\beta} F^{\lambda\rho\sigma}{}_{,\beta} \varphi_{\rho\sigma,\lambda\alpha} + L_{UVU} \left( F^{\alpha\mu\beta} F^{i\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,i\alpha\beta} + \right. \\
& \left. + F^{j\mu\beta} F^{0\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,0j\beta} + F^{0\mu 0} F^{k\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,k00} \right). \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Introduzindo (4.9) e (4.13) em (4.5), vemos que nosso sistema de 14 equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases}
\tilde{\Psi}^{ij} + L_{UV} F^{0(ij)} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} = 0 & (4.15a) \\
\tilde{\Psi}^{0j} + L_{UV} F^{0j0} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} = 0 & (4.15b) \\
\tilde{\Psi}^{00} = 0 & (4.15c) \\
\tilde{\Phi}^j + L_{UV} F^{0j0} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,000} = 0 & (4.15d) \\
\tilde{\Phi}^0 = 0. & (4.15e)
\end{cases}$$

As equações (4.15a) possuem derivadas segundas temporais no termo  $\tilde{\Psi}^{ij}$  (as seis componentes  $\varphi_{ij,00}$ ), mas o termo  $\tilde{\Psi}^{0j}$ , nas equações (4.15b), só possui derivadas temporais de primeira ordem. Nestas equações, portanto, as derivadas temporais de segunda ordem só aparecem na soma  $F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00}$ ; como este termo aparece linearmente nas três equações, pode ser eliminado de duas delas:

$$L_{UV} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} = -\frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} = -\frac{\tilde{\Psi}^{02}}{F^{020}} = -\frac{\tilde{\Psi}^{03}}{F^{030}},$$

ou seja:

$$\begin{cases}
L_{UV} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} = -\frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} & (4.16a) \\
\frac{\tilde{\Psi}^{02}}{F^{020}} = \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} & (4.16b) \\
\frac{\tilde{\Psi}^{03}}{F^{030}} = \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}}. & (4.16c)
\end{cases}$$

Estas equações são equivalentes às (4.15b), mas agora vemos que (4.16b) e (4.16c) não contêm senão derivadas temporais de primeira ordem.

Podemos repetir exatamente o mesmo procedimento para as equações (4.15d), agora em relação às derivadas terceiras:

$$L_{UU} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,000} = -\frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} = -\frac{\tilde{\Phi}^2}{F^{020}} = -\frac{\tilde{\Phi}^3}{F^{030}},$$

o que nos dá:

$$\begin{cases} L_{UU} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,000} = -\frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} & (4.17a) \\ \frac{\tilde{\Phi}^2}{F^{020}} = \frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} & (4.17b) \\ \frac{\tilde{\Phi}^3}{F^{030}} = \frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}}. & (4.17c) \end{cases}$$

Novamente, as equações (4.17) são equivalentes às (4.15d), mas as derivadas terceiras temporais estão confinadas à equação (4.17a). As equações (4.17b) e (4.17c) contêm derivadas temporais de segunda ordem, como podemos ver pela definição de  $\tilde{\Phi}^\mu$  dada em (4.14).

As equações (4.15a), (4.15e), (4.16a), (4.17b) e (4.17c) formam um conjunto de 10 equações para os 9 objetos  $\varphi_{k\sigma,00}$ . Isto não constitui um problema, como veremos; significa apenas que podemos usar 9 destas equações para transformar a décima em uma equação que só contenha derivadas primeiras temporais (a nossa escolhida será a (4.15e)). Não é difícil verificar que o termo  $\varphi_{00,00}$  está ausente de todas as 14 equações. Podemos separar os termos  $\varphi_{ij,00}$  dos termos  $\varphi_{0i,00}$ , começando por introduzir (4.16a) em (4.15a):

$$\tilde{\Psi}^{ij} = \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} F^{0(ij)}. \quad (4.18)$$

Em (4.18), estão presentes apenas os termos  $\varphi_{ij,00}$  – seis equações para seis incógnitas.

Através das equações (4.18), podemos eliminar os termos  $\varphi_{ij,00}$  das equações (4.15e), (4.16a), (4.17b) e (4.17c), que passam então a conter apenas os termos  $\varphi_{0i,00}$ . Vamos ilustrar isto apenas com a equação (4.15e):

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\Phi}^0 = & \dots - G_{(t)}^{00} \left( L_{UV} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} \right) + \\ & + 2 \frac{L_{UUU}}{L_{UV}} F^{0i0} F^{\lambda\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,\lambda i} \left( L_{UV} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} \right) + \\ & - F^{0j0} \left( L_{UV} F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,00} \right)_{,j} + F^{0j0} \left( L_{UV} F^{0k\sigma} \right)_{,j} \varphi_{k\sigma,00}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde as reticências indicam os termos que só envolvem derivadas temporais de primeira ordem. Utilizamos (4.16a) para eliminar as derivadas segundas temporais dos três primeiros termos do lado direito de (4.19),

$$\begin{aligned}
0 = \tilde{\mathcal{D}}^0 = & \dots + G_{(\epsilon)}^{00} \frac{\tilde{\Psi}^{0i}}{F^{0i0}} + \\
& - 2 \frac{L_{UUU}}{L_{UU}} F^{0i0} F^{\lambda\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma,\lambda i} \frac{\tilde{\Psi}^{0i}}{F^{0i0}} + \\
& + F^{0j0} \left( \frac{\tilde{\Psi}^{0i}}{F^{0i0}} \right)_{,j} + F^{0j0} \left( L_{UV} F^{0k\sigma} \right)_{,j} \varphi_{k\sigma,00}, \quad (4.20)
\end{aligned}$$

e (4.18) para eliminar  $\varphi_{ij,00}$  do último termo em (4.20); o resultado é uma equação na qual as únicas componentes das derivadas segundas temporais presentes são  $\varphi_{0i,00}$ .

Exatamente a mesma coisa acontece com as equações (4.16a), (4.17b) e (4.17c): podemos eliminar todas as componentes, exceto as três  $\varphi_{0i,00}$ . A componente  $\varphi_{00,00}$  não está presente em nenhuma das equações. Temos, então, quatro equações, (4.20), (4.16a), (4.17b) e (4.17c) (após todas as substituições descritas) para os três objetos  $\varphi_{0i,00}$ . Isto significa que podemos usar três destas equações para eliminar estes objetos da quarta equação, que passa assim a conter apenas derivadas temporais de primeira ordem. Escolhemos a equação (4.20) para fazermos estas substituições; entretanto, não vamos realizá-las explicitamente. Daqui por diante, vamos considerar a equação (4.15e) como contendo apenas derivadas temporais de primeira ordem, deixando subentendido que as substituições necessárias foram feitas. No mesmo espírito, vamos considerar as equações (4.16a), (4.17b) e (4.17c) como contendo apenas os termos  $\varphi_{0i,00}$  (3 equações para 3 incógnitas), e também as equações  $\Psi^{ij} = 0$  como contendo apenas os termos  $\varphi_{ij,00}$  (6 equações para 6 incógnitas, cujas formas explícitas são dada por (4.18)). Adotaremos ainda as seguintes notações:  $\Psi^{0i} = 0$  para (4.16a),  $\Psi^{1\nu}_{,\nu} = 0$  para (4.17a) e  $\Psi^{0\nu}_{,\nu} = 0$  para (4.15e).

Vamos organizar o que encontramos:

- (4.15c):  $\Psi^{00} = 0 \quad \rightarrow$  Contém apenas derivadas primeiras temporais;
- (4.16b)  $\frac{\tilde{\Psi}^{02}}{F^{020}} = \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} \quad \rightarrow$  Contém apenas derivadas primeiras temporais;
- (4.16c)  $\frac{\tilde{\Psi}^{03}}{F^{030}} = \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} \quad \rightarrow$  Contém apenas derivadas primeiras temporais;
- (4.15e)  $\Psi^{0\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad \rightarrow$  Contém apenas derivadas primeiras temporais;
- (4.18)  $\Psi^{ij} = 0 \quad \rightarrow$  6 equações contendo  $\varphi_{ij,00}$ ;
- (4.16a)  $\Psi^{01} = 0 \quad \rightarrow$  Contém os termos  $\varphi_{0i,00}$ ;
- (4.17b)  $\frac{\tilde{\Phi}^2}{F^{020}} = \frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} \quad \rightarrow$  Contém os termos  $\varphi_{0i,00}$ ;
- (4.17c)  $\frac{\tilde{\Phi}^3}{F^{030}} = \frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} \quad \rightarrow$  Contém os termos  $\varphi_{0i,00}$ ;
- (4.17a)  $\Psi^{1\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad \rightarrow$  Contém derivadas terceiras temporais na  
soma  $F^{0k\sigma} \varphi_{k\sigma,000}$ .

O sistema de equações (4.5), então, pode ser escrito assim:

$$\Psi^{\mu\nu} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{ij} = 0 \quad (4.21a) \\ \Psi^{01} = 0 \quad (4.21b) \\ \frac{\tilde{\Psi}^{02}}{F^{020}} - \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} = 0 \quad (4.21c) \\ \frac{\tilde{\Psi}^{03}}{F^{030}} - \frac{\tilde{\Psi}^{01}}{F^{010}} = 0 \quad (4.21d) \\ \Psi^{00} = 0, \quad (4.21e) \end{array} \right.$$

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{1\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (4.22a) \\ \frac{\tilde{\Phi}^2}{F^{020}} - \frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} = 0 \quad (4.22b) \\ \frac{\tilde{\Phi}^3}{F^{030}} - \frac{\tilde{\Phi}^1}{F^{010}} = 0 \quad (4.22c) \\ \Psi^{0\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (4.22d) \end{array} \right.$$

As equações (4.21a), (4.21b), (4.22b) e (4.22c) formam um conjunto de 9 equações para as 9 componentes  $\varphi_{i\mu,00}$ ; estas são as equações dinâmicas da teoria. As equações (4.21c), (4.21d), (4.21e) e (4.22d) (esta última apenas após algumas substituições envolvendo as equações dinâmicas, como já vimos) apresentam somente derivadas temporais de primeira ordem: são equações de vínculo que devem ser satisfeitas pelos dados iniciais na hipersuperfície  $\Sigma$ ; mostraremos logo a seguir que as equações dinâmicas têm como consequência que estes vínculos se propagam por todo o espaço-tempo. A equação (4.22a) (que equivale à equação (4.17a)) é a única que contém derivadas terceiras temporais; no entanto, é fácil verificarmos que ela é automaticamente satisfeita pelas soluções das equações dinâmicas:

$$\Psi^{1\nu}{}_{,\nu} = \Psi^{10}{}_{,0} + \Psi^{11}{}_{,1} + \Psi^{12}{}_{,2} + \Psi^{13}{}_{,3} = 0, \quad (4.23)$$

onde só tivemos de recorrer à equação (4.21b) e a metade das equações (4.21a).

Quanto à propagação dos vínculos, vamos começar pela equação (4.22d). A identidade (4.3), uma vez que  $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\Psi^{\mu\nu}{}_{,\nu}\right)_{,\mu} = 0. \quad (4.24)$$

Supondo que as equações dinâmicas sejam satisfeitas, a equação (4.22a) também o é, como acabamos de ver; as equações (4.22a), (4.22b) e (4.22c), tomadas em conjunto, equivalem a

$$\Psi^{i\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (4.25)$$

Em vista das equações (4.25), a equação (4.24) se reduz a

$$\left(\Psi^{0\nu}{}_{,\nu}\right)_{,0} = 0. \quad (4.26)$$

Dada uma condição inicial, a solução de (4.26), entendida como uma equação para  $\Psi^{0\nu}{}_{,\nu}$ , é única; assim, vemos imediatamente que  $\Psi^{0\nu}{}_{,\nu} = 0$  é a solução única que obedece à condição inicial  $\Psi^{0\nu}{}_{,\nu} = 0$  em  $\Sigma$ . Portanto, a equação (4.22d) é válida em todo o espaço-tempo, como consequência das equações dinâmicas, se for imposta como condição inicial em  $\Sigma$ .

Se, além disso, impusermos que as equações (4.21c), (4.21d) e (4.21e) também sejam satisfeitas em  $\Sigma$ , como condições iniciais, segue o mesmo resultado: as equações dinâmicas, mais a

equação (4.22d), implicam que elas sejam válidas em todo o espaço-tempo. Em primeiro lugar, notemos que (4.21b) é, por hipótese, válida em todo o espaço-tempo, e portanto, em particular, na hipersuperfície  $\Sigma$ ; lembrando-nos de que esta equação equivale à (4.16a), e voltando em direção às equações (4.15b), vemos que, em  $\Sigma$ , são satisfeitas as equações

$$\Psi^{0i} = 0. \quad (4.27)$$

Levando (4.21e) em consideração, as condições iniciais que assumimos implicam que temos  $\Psi^{00} = \Psi^{02} = \Psi^{03} = 0$  na hipersuperfície  $\Sigma$ .

Como já vimos que as equações (4.22a) e (4.22d) são válidas em todo o espaço-tempo, as equações (4.22b) e (4.22c) o sendo por hipótese, segue que todas as equações (4.22) (ou seja,  $\Psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ ) são válidas no espaço-tempo como um todo. Introduzindo nelas as equações (4.21a) e (4.21b), chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} \Psi^{00}{}_{,0} + \Psi^{02}{}_{,2} + \Psi^{03}{}_{,3} = 0 \\ \Psi^{20}{}_{,0} = 0 \\ \Psi^{30}{}_{,0} = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Vemos que  $\Psi^{00} = \Psi^{02} = \Psi^{03} = 0$  é uma solução do sistema de equações (4.28), e é também o conjunto de condições iniciais que temos, em  $\Sigma$ , para este sistema. Segue daí que  $\Psi^{00} = \Psi^{02} = \Psi^{03} = 0$  é válido em todo o espaço-tempo. Recorrendo novamente à equação (4.16a), isto equivale a dizer que as equações (4.21c), (4.21d) e (4.21e) são válidas em todo o espaço-tempo.

Mostramos, desta forma, que os vínculos são propagados, em última instância, pela identidade (4.3),  $\Psi^{\mu\nu}{}_{|\mu\nu} \equiv 0$ .

A análise que acabamos de fazer nos revela algumas coisas. Em primeiro lugar, as equações (4.5a), (4.5b) e (4.3) são todas relevantes. As equações (4.5a) e (4.5b) dividem entre si as equações dinâmicas, bem como os vínculos – que são propagados pela identidade (4.3). As equações dinâmicas são 9 equações diferenciais parciais de segunda ordem no tempo para as 9 componentes

$\varphi_{i\mu}$  como incógnitas; somente a componente  $\varphi_{00}$  não aparece com derivadas segundas temporais nas equações. A presença de derivadas de terceira ordem no tempo em uma das equações não tem conseqüências, porque esta equação é automaticamente satisfeita pelas soluções das equações dinâmicas. O sistema de equações parece ter um problema de valores de contorno “bem posto”, ou é “bem comportado”, por assim dizer.

Vale a pena frisar aqui que (4.5a) são as equações de Euler-Lagrange da teoria; as equações (4.5b), vindo da divergência destas, e não sendo identidades, correspondem a quatro equações adicionais para o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Apenas três delas representam condições adicionais independentes, pois uma delas, como vimos, é conseqüência direta das equações dinâmicas. Assim, é o conjunto de equações (4.5a) e (4.5b) que deve ser resolvido, até mesmo para que o sistema como um todo tenha uma estrutura bem comportada do ponto de vista do problema de Cauchy. A existência destas condições adicionais – com as quais já nos deparamos, por outro caminho, ao estudarmos o limite newtoniano da teoria – traz graves conseqüências para uma aplicação da teoria de perturbações à NDL, como veremos adiante.

Como as equações para o campo no vácuo desta teoria são deixadas invariantes por uma transformação com apenas um grau de liberdade (a transformação (1.37), que deixa invariante o tensor de Fierz), podemos eliminar uma das nove componentes de  $\varphi_{\mu\nu}$  que se propagam, de tal forma que, ao final, ficamos com oito graus de liberdade. Alternativamente, podemos ver que temos 14 equações a serem resolvidas, com 5 equações de vínculo (contando com a identidade  $\psi^{\mu\nu}{}_{|\mu\nu} \equiv 0$ ) e uma que é conseqüência direta das demais ( $\psi^{1\nu}{}_{,\nu} = 0$ ). Isto nos dá  $14 - 6 = 8$  graus de liberdade.

O campo de spin-2 sem massa descrito pela teoria linear possui apenas dois graus de liberdade – como vimos na Seção 1.5 –, propriedade esta que é respeitada pela relatividade geral. O resultado a que acabamos de chegar nos diz que o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , sujeito às equações não-lineares da teoria NDL, no caso do campo gravitacional no vácuo, não descreve adequadamente um campo de spin-2 puro. Veremos a seguir que a situação não melhora quando levamos em conta a interação com a matéria.

## 4.1.2 Interação com a matéria

Quando consideramos a equação completa do campo gravitacional na NDL, com o termo de fonte, (2.42), duas diferenças em relação ao caso do campo no vácuo se destacam: devido ao fator  $\omega$  no lado direito da equação, ela não mais é invariante pela transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}$ ; além disso, a identidade (4.3) agora nos leva a uma nova equação,  $(\omega T^{\mu\nu})_{|\mu\nu} = 0$ . Temos, ao todo, um sistema de 15 equações a serem resolvidas, e não mais apenas 14, como no caso anterior:

$$\begin{cases} \Psi^{\mu\nu} = -\kappa\omega T^{\mu\nu} & (4.29a) \\ \Psi^{\mu\nu}_{|\nu} = -\kappa(\omega T^{\mu\nu})_{|\nu} & (4.29b) \\ (\omega T^{\mu\nu})_{|\mu\nu} = 0. & (4.29c) \end{cases}$$

Como, de acordo com (2.41),  $\omega \approx 1 + \varphi/2$ , podemos ver que a equação (4.29c) – quando adotamos o mesmo sistema de coordenadas e as mesmas condições iniciais que no caso do vácuo – contém o termo  $\varphi_{00,00}$ , que mostramos estar ausente do sistema (4.5). A análise que fizemos na seção anterior continua válida para (4.29a) e (4.29b), pois os termos no lado direito destas equações não possuem derivadas temporais de segunda ordem de  $\varphi_{\mu\nu}$ , de tal forma que eles não interferem significativamente no problema de Cauchy. O sistema (4.29), portanto, possui – por causa da equação (4.29c) – dez equações para as dez incógnitas  $\varphi_{\mu\nu,00}$ . Ou seja: todas as dez componentes do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  se propagam de acordo com equações dinâmicas de segunda ordem no tempo. E como não há mais aquela transformação com um grau de liberdade que deixava a equação para o vácuo invariante, não podemos eliminar nenhuma destas componentes que se propagam. Isto significa que o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , sujeito às equações do sistema (4.29), possui 10 graus de liberdade. Mais uma vez, passamos longe dos dois graus de liberdade que um campo de spin-2 puro deve ter. A diferença entre este resultado e o da seção anterior é uma decorrência direta da perda de simetria da equação tensorial  $\Psi^{\mu\nu} = -\kappa\omega T^{\mu\nu}$  em relação à equação  $\Psi^{\mu\nu} = 0$ , devido à introdução do fator  $\omega$ .

Podemos ver também que (4.29b) e (4.29c) são cinco novas equações (novas em relação à teoria linear), havendo no total quatro condições adicionais independentes impostas sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Como antes, uma das equações (4.29b) decorre diretamente das equações dinâmicas, não correspondendo a uma restrição sobre  $\varphi_{\mu\nu}$ .

De forma geral, quando um tensor qualquer  $\mathbf{A}$  obedece a uma identidade do tipo  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , então há na equação tensorial  $\mathbf{A} = 0$  tantas equações de vínculos (refiro-me às componentes da equação tensorial) quanto o número de equações da identidade  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , e que são propagadas por ela. Resulta disso que cada equação desta identidade retira dois graus de liberdade da equação tensorial  $\mathbf{A} = 0$ . Assim, por exemplo, à equação  $G_{(t)}^{\mu\nu} = 0$  correspondem as quatro identidades  $G_{(t)}^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$ , que são responsáveis pela eliminação de oito graus de liberdade. O tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  sujeito à equação  $G_{(t)}^{\mu\nu} = 0$  possui, portanto,  $10 - (2 \times 4) = 2$  graus de liberdade.

O mesmo raciocínio vale para o sistema (4.5): o tensor  $\Psi^{\mu\nu}$  não tem divergência identicamente nula, de tal forma que  $\Psi^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  é uma nova equação tensorial a ser resolvida; esta, no entanto, possui divergência nula:  $\Psi^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} \equiv 0$ . Esta identidade corresponde a apenas uma equação, e este é o significado das três condições adicionais sobre  $\varphi_{\mu\nu}$ , que encontramos na Seção 4.1.1, representadas (de acordo com nossa escolha de coordenadas) pelas equações (4.21b), (4.22b) e (4.22c) – elas reduzem o número de identidades presentes na teoria de quatro (na teoria linear) para um (no sistema (4.5)). Como vimos, a identidade  $\Psi^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} \equiv 0$  é a responsável direta pela propagação do vínculo  $\Psi^{0\nu}{}_{;\nu} = 0$ . De acordo com nosso raciocínio anterior, esta identidade retira apenas dois graus de liberdade do sistema. Temos, então,  $10 - (2 \times 1) = 8$  graus de liberdade para o campo descrito pela equação  $\Psi^{\mu\nu} = 0$ .

Esta redução do número de identidades presentes na teoria é exatamente equivalente à redução do número de graus de liberdade da simetria das equações. A equação linear  $G_{(t)}^{\mu\nu} = 0$  é invariante

pela transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{(\mu|\nu)}$ , que tem quatro graus de liberdade, enquanto a equação  $\Psi^{\mu\nu} = 0$  só é deixada invariante pela transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \zeta_{|\mu\nu}$ , que possui apenas um grau de liberdade. A esta redução correspondem as três condições adicionais impostas sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  por duas das equações (4.5b) e por uma das (4.5a).

O mesmo se passa com o sistema (4.29): nele não há nenhuma identidade, o que corresponde a não haver nenhuma transformação que o deixe invariante. E como são quatro as identidades que desaparecem – ou, equivalentemente, como são quatro os graus de liberdade da simetria que desaparece –, temos quatro condições adicionais impostas sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ : uma entre as equações (4.29a), duas entre as (4.29b) e a quarta dada por (4.29c). Não havendo mais identidades, nosso cálculo nos dá  $10 - (2 \times 4) = 10$  graus de liberdade para o campo sujeito à equação  $\Psi^{\mu\nu} = -\kappa\omega T^{\mu\nu}$ , em completo acordo com a análise que fizemos acima.

## 4.2 Perturbações

Devido ao fato de a lagrangiana (4.4) conter apenas termos de ordem de potência par em  $\varphi_{\mu\nu}$ , o tensor  $\Psi^{\mu\nu}$  possui somente termos de ordem ímpar; vamos escrever isto da seguinte forma:

$$\Psi^{\mu\nu} = \overset{(1)}{\Psi}^{\mu\nu} + \overset{(3)}{\Psi}^{\mu\nu} + \overset{(5)}{\Psi}^{\mu\nu} + \dots, \quad (4.30)$$

onde o índice entre parêntesis indica a ordem da potência de  $\varphi_{\mu\nu}$  que aparece em cada termo. O termo linear é dado por

$$\overset{(1)}{\Psi}^{\mu\nu} = G_{(\ell)}^{\mu\nu}, \quad (4.31)$$

de tal forma que obedece à identidade

$$\overset{(1)}{\Psi}^{\mu\nu}{}_{|\nu} \equiv 0. \quad (4.32)$$

Vamos agora proceder a uma análise perturbativa das equações da NDL, expandindo  $\varphi_{\mu\nu}$  em torno de  $\overset{(0)}{\varphi}_{\mu\nu} = 0$ :

$$\varphi_{\mu\nu} = \varepsilon \varphi_{\mu\nu}^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_{\mu\nu}^{(2)} + \varepsilon^3 \varphi_{\mu\nu}^{(3)} + \dots, \quad (4.33)$$

onde  $\varepsilon$  é uma quantidade pequena. Examinaremos primeiro a equação para o campo gravitacional no vácuo.

#### 4.2.1 Equação para o vácuo

Notemos que a separação dos termos não-lineares feita em (4.30) é válida para  $\varphi_{\mu\nu}$ , ou seja, é anterior à expansão (4.33). Através destas duas equações, podemos separar, em (4.5a), as contribuições para cada ordem de grandeza:

$$\cdot \text{Ordem } \varepsilon: \quad \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} \right] = 0; \quad (4.34)$$

$$\cdot \text{Ordem } \varepsilon^2: \quad \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(2)} \right] = 0; \quad (4.35)$$

$$\cdot \text{Ordem } \varepsilon^3: \quad \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(3)} \right] + \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} \right] = 0. \quad (4.36)$$

Na notação das equações acima, estamos tratando  $\Psi^{\mu\nu}$  como um operador, de tal forma que, por exemplo,  $\Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} \right] = \frac{1}{2} \square \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} + \dots$ ,  $\Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(2)} \right] = \frac{1}{2} \square \varphi_{\rho\sigma}^{(2)} + \dots$ , e assim por diante.

Se tomarmos a divergência da equação (4.36), o primeiro termo se anula, devido à identidade (4.32). Segue, então, que devemos ter

$$\left\{ \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} \right] \right\}_{|\nu} = 0. \quad (4.37)$$

Introduzindo (4.30) e (4.33) na identidade (4.1) e utilizando (4.34), obtemos:

$$\left\{ \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} \right] \right\}_{|\nu} = -a_1 \left\{ U_{|\alpha\beta} F^{\alpha\mu\beta} \right\} \left[ \varphi_{\rho\sigma}^{(1)} \right]. \quad (4.38)$$

Assim, (4.37) nos diz que devemos ter

$$a_1 \left\{ U_{|\alpha\beta} F^{\alpha\mu\beta} \right\} \left[ \begin{matrix} (1) \\ \varphi_{\rho\sigma} \end{matrix} \right] = 0. \quad (4.39)$$

Vemos que o tensor  $\varphi_{\rho\sigma}^{(1)}$  deve satisfazer ao conjunto de equações formado por (4.34) e (4.37), ou seja: a equação (4.37) representa algumas restrições sobre  $\varphi_{\rho\sigma}^{(1)}$ , somando-se às equações lineares (4.34). É claro que se  $a_1 = 0$ , o que significaria não termos  $U^2$  na lagrangiana, (4.39) tornar-se-ia uma identidade, de tal forma que (4.37) seria trivialmente satisfeita. Contudo, como nossa lagrangiana é não-linear em  $U$ , pelo menos um dos coeficientes  $a_i$ , em (4.4), deve ser diferente de zero. Seja então  $i_0$  tal que  $a_{i_0} \neq 0$ . Seja ainda  $a_{i_0}$  o primeiro coeficiente que não se anula; ou seja, que tenhamos  $a_i = 0$  se  $i < i_0$ . Então haverá uma equação análoga a (4.37) para a ordem de perturbação  $\varepsilon^{2i_0+1}$ , que o tensor  $\varphi_{\rho\sigma}^{(1)}$  deverá satisfazer, e que corresponderá a certas condições adicionais. A única maneira de escaparmos destas condições adicionais seria anular todos os coeficientes  $a_i$ , o que significaria retornar à teoria linear. Podemos então supor  $a_1 \neq 0$ , sem perda de generalidade para a análise que estamos fazendo.

Estas condições adicionais são as mesmas que encontramos ao analisar o problema de Cauchy. De fato, (4.37) não é senão a parte correspondente à  $O(\varepsilon^3)$  da equação (4.5b). A existência destas condições está relacionada à presença do termo  $I^\mu$  na identidade (4.1), que se apresenta como um termo inhomogêneo (em relação ao tensor  $\Psi^{\mu\nu}$ ). Se este termo se anulasse identicamente, ou fosse algo do tipo  $I^\mu \sim A^\mu_{\alpha\beta} \Psi^{\alpha\beta}$ , então a equação (4.5b) seria uma consequência imediata de (4.5a), e não haveria condições adicionais (note que usamos (4.1) para chegarmos a (4.38)); neste caso, além disso, a simetria de calibre da teoria também seria outra, pois se (4.1) fosse homogênea então a ação seria invariante por uma transformação de calibre com quatro graus de liberdade. Mas sabemos que a simetria da equação para o campo gravitacional no vácuo da NDL tem apenas um grau de liberdade. A transformação (1.37) é – e nem poderia ser de outra forma – a única que deixa invariante o conjunto das equações (4.34) e (4.37).

Podemos entender melhor agora o problema sério que há nesta teoria. Como nem todas as soluções de (4.34) são soluções de (4.37), vemos que as ordens mais altas de perturbação impõem condições sobre as soluções das ordens mais baixas. Este fato representa uma inconsistência: significa que, ao encontrarmos uma solução aproximada, dentro de uma certa ordem de aproximação, não temos como saber se esta solução de fato se aproxima de uma solução verdadeira, dentro dos limites de erro da ordem de aproximação em questão, a não ser que examinemos a ordem de aproximação seguinte, e assim sucessivamente. Isto implica que o método perturbativo não pode ser utilizado satisfatoriamente em questões como, para dar um exemplo, a propagação de ondas gravitacionais no vácuo. A situação se torna ainda mais grave quando consideramos a interação com a matéria: no limite newtoniano, como já vimos, uma boa teoria da gravitação deve garantir, em primeira aproximação (campo gravitacional fraco e baixas velocidades), que suas equações para o campo gravitacional se reduzam à equação de Poisson,  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$ ; mas o procedimento necessário ao exame desta redução é precisamente o método perturbativo, que, na NDL, não é um procedimento confiável. Ou seja, estas dificuldades com a teoria de perturbação que estamos apontando comprometem o próprio limite newtoniano da teoria, estando na raiz dos problemas discutidos na Seção 3.1. Entretanto, a equação (4.37) corresponde a condições adicionais apenas para o caso do campo gravitacional no vácuo; no caso da interação com a matéria há quatro condições adicionais, que assumem uma forma diferente. Veremos a seguir que estas diferenças estão relacionadas à quebra de simetria devido à introdução do fator  $\omega$ , que já examinamos na seção anterior.

## 4.2.2 Equação completa

Vamos repetir a mesma análise perturbativa para a equação (4.29a), começando por expandir  $T^{\mu\nu}$  em ordens de  $\varepsilon$ , a exemplo de (4.33):

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon T^{(1)\mu\nu} + \varepsilon^2 T^{(2)\mu\nu} + \varepsilon^3 T^{(3)\mu\nu} + \dots \quad (4.40)$$

Introduzindo (4.33) e (4.40) em (4.29a), usando (4.30) e nos lembrando da expansão de  $\omega$  dada em (2.41), obtemos as seguintes equações para as ordens de  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^2$ :

$$\cdot \text{Ordem } \varepsilon: \quad \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma} \right] = -\kappa T^{\mu\nu}; \quad (4.41)$$

$$\cdot \text{Ordem } \varepsilon^2: \quad \Psi^{\mu\nu} \left[ \varphi_{\rho\sigma} \right] = -\kappa \left( T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right), \quad (4.42)$$

sendo, é claro,  $\varphi = \gamma^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}$ .

Como o tensor  $\Psi^{\mu\nu}$  obedece à identidade (4.32), segue das equações (4.41) e (4.42) que

$$T^{\mu\nu}{}_{|v} = 0 \quad (4.43)$$

e

$$\left( T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right)_{|v} = 0. \quad (4.44)$$

Uma vez que o tensor  $T^{\mu\nu}$  tem divergência covariante nula em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$ , equação (2.15), a equação (4.44) impõe quatro condições sobre o tensor  $\varphi_{\rho\sigma}$ . Para determinarmos quais são estas condições, introduzimos a expansão (4.40) em  $T^{\mu\nu}{}_{|v} = 0$  e separamos as contribuições para cada ordem de  $\varepsilon$ , usando (2.16). Para a  $O(\varepsilon)$ , obtemos a equação (4.43). Para a  $O(\varepsilon^2)$ , encontramos:

$$T^{\mu\nu}{}_{|v} + \frac{1}{2} \varphi_{\cdot\nu} T^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\alpha}{}_{|\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \varphi_{\alpha\beta}{}^{|\mu} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.45)$$

Fazendo uso de (4.43) em (4.45), ficamos com:

$$\left( T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right)_{|v} + \left( T^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right)_{|\beta} - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}{}^{|\mu} = 0. \quad (4.46)$$

A identidade (2.114), para a  $O(\varepsilon^2)$ , é dada por

$$\left\{ \overset{(2)}{t}{}^{\mu\nu} \left[ \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma} \right] \right\}_{|\nu} = -\frac{1}{2\kappa} \left\{ 2 \left( \overset{(i)}{\Psi}{}^{\alpha\beta} \left[ \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma} \right] \overset{(1)}{\varphi}{}_{\alpha}{}^{\mu} \right)_{|\beta} - \overset{(i)}{\Psi}{}^{\alpha\beta} \left[ \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma} \right] \overset{(1)}{\varphi}{}_{\alpha\beta}{}^{|\mu} \right\}, \quad (4.47)$$

onde  $\overset{(2)}{t}{}^{\mu\nu}$  contém apenas os termos quadráticos em  $\varphi_{\mu\nu}$ . Introduzindo (4.41) em (4.47), obtemos:

$$\left\{ \overset{(2)}{t}{}^{\mu\nu} \left[ \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma} \right] \right\}_{|\nu} = \left( \overset{(1)}{T}{}^{\alpha\beta} \overset{(i)}{\varphi}{}_{\alpha}{}^{\mu} \right)_{|\beta} - \frac{1}{2} \overset{(1)}{T}{}^{\alpha\beta} \overset{(1)}{\varphi}{}_{\alpha\beta}{}^{|\mu}. \quad (4.48)$$

Finalmente, comparando (4.46) e (4.48), concluímos que

$$\left\{ \overset{(2)}{t}{}^{\mu\nu} \left[ \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma} \right] \right\}_{|\nu} + \left( \overset{(2)}{T}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho}{}^{\mu} \overset{(1)}{T}{}^{\rho\nu} \right)_{|\nu} = 0. \quad (4.49)$$

Este resultado não é nada senão a validade da equação (2.113) para a  $O(\varepsilon^2)$ . Fica evidente agora que a equação (4.44), por causa de (4.49), implica que

$$\left\{ \overset{(2)}{t}{}^{\mu\nu} \left[ \overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma} \right] \right\}_{|\nu} = 0. \quad (4.50)$$

Estas equações são as quatro condições adicionais para  $\overset{(1)}{\varphi}{}_{\rho\sigma}$  que procurávamos, e que podem ser tornadas mais explícitas anulando-se o lado direito de (4.47). Vemos assim que a inconsistência detectada no caso do vácuo permanece quando introduzimos a interação com a matéria; as diferenças são que agora o problema surge já na  $O(\varepsilon^2)$ , devido à presença do fator  $\omega$  nas equações, e que as condições adicionais podem ser interpretadas fisicamente por se relacionarem ao tensor de energia-momento do campo gravitacional – além de serem quatro ao invés de três.

Na Seção 4.1.2, dissemos que as quatro condições sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  são dadas por uma das equações (4.29a), duas das (4.29b), mais a equação (4.29c); agora, estamos dizendo que (4.50) corresponde a todas as quatro, na  $O(\varepsilon^2)$ . Mas não há contradições; usando (2.113), podemos reescrever o sistema (4.29) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \Psi^{\mu\nu} = -\kappa\omega T^{\mu\nu} & (4.51a) \\ \Psi^{\mu\nu}{}_{|\nu} = \kappa t^{\mu\nu}{}_{|\nu} & (4.51b) \\ t^{\mu\nu}{}_{|\mu\nu} = 0. & (4.51c) \end{cases}$$

A diferença entre este sistema e o anterior é que (4.51) já leva em consideração que  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Temos ainda 15 equações, mas podemos entender (4.51c) como sendo aquela que é uma consequência direta das demais, de tal forma que todas as equações dinâmicas estão entre (4.51a) e (4.51b). Assim, (4.51b) corresponde às quatro condições adicionais no caso geral, reduzindo-se a (4.50) na primeira aproximação (por causa da identidade (4.32)).

Como já dissemos anteriormente, estas condições impostas pelas ordens mais elevadas de perturbação sobre as soluções das ordens mais baixas representam uma inconsistência que compromete o limite newtoniano da teoria. As equações lineares de  $O(\varepsilon)$  não podem ser usadas confiantemente para a obtenção de soluções aproximadas da teoria – em particular, a aproximação newtoniana –, uma vez que a natureza da inconsistência que observamos é, precisamente, que não podemos garantir que estas soluções aproximadas sejam de fato aproximações de soluções válidas: para verificarmos isto, teríamos de recorrer à ordem de aproximação seguinte, e assim sucessivamente, *ad infinitum*. Em outras palavras, não podemos assegurar que a NDL de reduz à teoria newtoniana no limite de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades, pelo simples motivo de que este limite não está bem definido, devido à circunstância de o método perturbativo, necessário para realizá-lo, não poder ser utilizado consistentemente.

Podemos ver que a responsabilidade pela existência das quatro condições adicionais no caso da interação com a matéria recai sobre a equação (4.44), que corresponde a uma segunda lei de conservação para  $T^{\mu\nu}$ , diferente de  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Foi do conflito entre estas duas leis de conservação – dadas, na mesma ordem de aproximação, por (4.44) e (4.45) –, que acabamos por obter as condições (4.50). Este conflito entre duas leis de conservação é o mesmo que encontramos no Capítulo 3; de fato, (4.43) e (4.44) nada mais são que a equação (3.20) escrita numa linguagem mais cuidadosa. Além disso, a equação (3.46), a que recorreremos ao discutirmos o cálculo do parâmetro PPN  $\xi$ ,

corresponde exatamente a (4.50), quando levamos em conta (4.47) e (4.31).

Vale a pena salientar um ponto. O tensor  $\varphi_{\rho\sigma}^{(1)}$  deve satisfazer a ambas equações (4.41) e (4.50). Estas equações, tomadas em conjunto, não são invariantes por quaisquer transformações do tipo  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{(\mu|\nu)}$ , ainda que  $\Psi^{(1)\mu\nu}$  sozinho o seja, pois  $\varphi_{\mu\nu}$  aparece explicitamente na expressão para  $t^{\mu\nu}$ , equação (2.110). Não há, portanto, nenhuma justificativa para a adoção, na NDL, do “calibre de Lorenz”, (3.38), ou qualquer outro “calibre”, apesar de a equação linear, (4.41), ser – ela sozinha – invariante pela transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{(\mu|\nu)}$ . Isto apenas corrobora o fato, sobre o qual já chamamos a atenção, de as equações da NDL com interação com a matéria não admitirem nenhuma liberdade de calibre. E certamente não faria o menor sentido, de qualquer forma, impor uma condição de calibre apenas para a aproximação de  $O(\varepsilon)$  do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Evidentemente, em qualquer teoria razoável a simetria de calibre é uma propriedade do seu conjunto completo de equações, e qualquer escolha de calibre tem de ser sustentada consistentemente em todos os níveis de aproximação.

A análise desta questão a partir do problema de Cauchy nos leva à mesma conclusão: já vimos que o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , na NDL, não descreve adequadamente um campo de spin-2 sem massa. Ele não possui o número correto de graus de liberdade, com o agravante de este número mudar conforme haja ou não acoplamento com a matéria. Este estado de coisas, é claro, está relacionado à falha da teoria em apresentar uma simetria de calibre que fosse adequada. A tentativa de resolver este problema, no âmbito de uma teoria não-linear para um campo de spin-2 puro sem massa, leva inexoravelmente à invariância por transformações de coordenadas e à relatividade geral, como o demonstra de forma inequívoca o trabalho de Wald [14]. Nestas condições tão restritas, a teoria da gravitação einsteiniana é a única que consegue superar todas as ameaças à sua coerência interna.

### 4.3 Comparação com Fierz-Pauli e Einstein

Quando apresentamos a teoria linear da gravitação de Fierz-Pauli, no início da Seção 2.1, mostramos que ela é inconsistente porque implica na conservação do momento e da energia da matéria de forma isolada, sem levar em conta a interação com o campo gravitacional – informação esta contida na equação  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Argumentamos então que uma maneira de tentar resolver este problema seria acrescentando termos não-lineares à equação do campo gravitacional (outras opções incluiriam a introdução de novos campos, além do de spin-2). Seguindo este caminho, a NDL se propõe a resolver o problema através da adoção de uma lagrangiana definida por uma função não-linear da lagrangiana original de Fierz-Pauli:  $L = L(U)$ , onde  $U = F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu} - F_{\alpha} F^{\alpha}$ .

Entretanto, chamamos a atenção já na Seção 2.5 para o fato de esta teoria levar a duas leis de conservação distintas envolvendo a energia e o momento da matéria, representadas pelas equações (2.113) e (2.125). Exploramos o conflito entre estas duas leis na Seção 3.1, onde mostramos que elas tornam confuso o limite newtoniano. A análise perturbativa que fizemos na Seção 4.2 nos ajuda a enxergar com maior clareza a situação: quando consideramos a interação entre o campo gravitacional e a matéria, o conflito entre as duas leis de conservação impõe quatro condições adicionais sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , dadas pela equação (4.50). A existência destas condições adicionais torna inviável a utilização consistente do método perturbativo, o que compromete a coerência das aproximações newtoniana e pós-newtoniana.

Observando agora o conteúdo da equação (4.50), vemos que ela nos diz que o tensor de energia-momento do campo gravitacional,  $t^{\mu\nu}$ , em primeira aproximação, se conserva sozinho, não havendo troca de energia entre o campo gravitacional e a matéria. Examinando (4.49), fica claro que, na ordem de aproximação considerada, a energia do campo gravitacional e a da matéria se conservam de forma isolada, que é o que é afirmado pelas equações (4.44) e (4.50). E eis que retornamos ao problema original da teoria linear de Fierz-Pauli. Ou seja, o esquema de introdução de

termos não-lineares na equação do campo gravitacional adotado pela NDL *preserva, na  $O(\varphi^2)$ , exatamente os mesmos problemas da teoria linear.*

Em ordens mais elevadas de aproximação, a separação entre a conservação da energia da matéria e a do campo gravitacional não será mais tão perfeita, mas as quatro condições adicionais envolverão sempre o tensor de energia-momento do campo gravitacional, o que podemos ver através da sua forma geral dada pela equação (4.51b).

Embora as equações da NDL dêem continuidade aos problemas da teoria linear no que diz respeito à interação entre o campo gravitacional e a matéria, a situação é outra quando consideramos as equações para o campo no vácuo. Neste caso, a teoria de Fierz-Pauli se reduz à teoria linear padrão para um campo de spin-2 que apresentamos no Capítulo 1, e não há nada de intrinsecamente errado com esta teoria. Os problemas só surgem quando consideramos a interação entre o campo de spin-2 e a matéria. Na NDL, por sua vez, os problemas surgem já nas equações para o vácuo. Mostramos na Seção 4.1 que a forma específica da não-linearidade das equações da NDL destrói o caráter de spin-2 do campo, que fica com oito graus de liberdade. Além disso, o procedimento de perturbação já se revela problemático, com a existência de três condições adicionais independentes para o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Quando introduzimos a interação com a matéria, o número de condições adicionais sobe para quatro, e o número de graus de liberdade, para dez. Assim, da mesma forma que a teoria linear da gravitação de Fierz-Pauli, a NDL apresenta uma diferença qualitativa caso se considere ou não a interação com a matéria; diferentemente dela, contudo, apresenta problemas já na sua formulação para o vácuo.

Ainda no início da Seção 2.1, argumentamos que a tentativa de resolver os problemas da teoria linear através da introdução de termos não-lineares leva à relatividade geral como a única solução possível. Todo este estudo que fizemos da NDL deixa claro porque a teoria do Einstein funciona tão bem: a imposição de que a divergência da equação do campo gravitacional, (2.4), coincida com a lei de conservação do momento e da energia que vem do teorema de Noether, (2.5), faz com que a relatividade geral evite o conflito entre duas leis de conservação que vimos acontecer

na NDL. Ademais, a identidade contraída de Bianchi,  $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$  – que é também, no fundo, a responsável por esta unicidade da lei de conservação –, garante que não há problemas com a teoria de perturbações, além de dar à teoria uma invariância por transformações de coordenadas que não apenas corresponde a uma verdadeira simetria de calibre, como também tem o número de graus de liberdade correto para que o campo gravitacional corresponda de fato a um verdadeiro campo de spin-2 sem massa. A NDL falha em *todos* esses quesitos.

Esta inconsistência que vemos na NDL decorre do seu ponto de partida, da analogia entre o tensor de Fierz e o tensor do campo eletromagnético. Esta analogia, ainda que possa ser mantida até certo ponto, perde a sua força quando notamos que o tensor do campo eletromagnético,  $F^{\mu\nu}$ , é ele próprio invariante pela transformação de calibre da teoria linear de Maxwell. Assim, uma lagrangiana qualquer, mesmo não-linear, construída com este tensor, tem, necessariamente, a mesma simetria de calibre que a teoria linear. O mesmo não acontece com o tensor de Fierz; mostramos na Seção 1.3 que, embora a teoria linear do campo de spin-2 tenha uma simetria de calibre com quatro graus de liberdade, o tensor de Fierz só fica invariante por uma transformação com apenas um grau de liberdade. Por causa disto, uma lagrangiana não-linear construída com o tensor de Fierz não consegue repetir a simetria de calibre da teoria linear, sendo portanto incompatível com ela. O erro da NDL consiste em levar a analogia entre estes dois tensores longe demais, para além do razoável.

Desta forma, fica evidente que a NDL não se apresenta como uma boa teoria para a gravitação. Seus problemas não decorrem de um desajuste entre suas previsões e os dados experimentais, mas têm uma origem mais profunda, mais básica: ela carece de uma estrutura interna coerente, que nos permita usá-la com confiança para descrever os fenômenos gravitacionais. Isto não impede, contudo, que as lições da análise rigorosa a que a submetemos possam vir a ser de alguma utilidade no futuro, ajudando a clarear os caminhos e os descaminhos com os quais a formulação de uma nova teoria pode se deparar.

# **Parte II**

**Teoria linear do campo de spin-2 no  
espaço-tempo curvo**

# Capítulo 5

## Generalização do formalismo de Fierz para o espaço-tempo curvo

### 5.1 Introdução / Motivação

No Capítulo 1, apresentamos a teoria linear do campo de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski. Esta é uma teoria perfeitamente consistente; problemas surgem apenas quando tentamos identificar  $\varphi_{\mu\nu}$  com o potencial gravitacional e introduzimos um acoplamento com a matéria (ou seja, com os campos não-gravitacionais). Vimos então, no Capítulo 2, que precisamos introduzir termos não-lineares nas equações, se queremos continuar com uma teoria que contenha apenas um campo de spin-2. Mostramos ainda que esta última restrição, somada à imposição de que o campo de spin-2 não tenha massa, nos leva diretamente à relatividade geral; teorias alternativas com estas mesmas características, como é o caso da NDL, apresentam falhas na sua estrutura lógica interna.

Contudo, o campo  $\varphi_{\mu\nu}$  não tem de ser necessariamente identificado com o potencial gravitacional, podendo haver na natureza campos de spin-2 que se comportem como matéria não-gravitacional. Neste caso,  $\varphi_{\mu\nu}$  não se relaciona diretamente com a métrica do espaço-tempo, mas apenas interage com ela através do acoplamento universal existente entre o campo gravitacional e os demais campos. Entretanto, mesmo nesta situação a teoria apresentada no Capítulo 1 não é correta, pois ignora a interação entre o campo de spin-2 em questão e o campo gravitacional. De fato, a métrica de Minkowski denota ausência de gravitação, e precisa ser substituída pela métrica de um espaço-tempo curvo, para adequar-se às exigências do acoplamento gravitacional universal.

Assim, vemos que a consideração dos efeitos da gravitação nos leva a modificar a teoria linear

do campo de spin-2, quer façamos ou não a identificação deste com o campo gravitacional. Neste e no próximo capítulo da Parte II, vamos considerar o segundo caso, em que o campo de spin-2 é tratado como uma matéria comum. Adotaremos como descrição dos fenômenos gravitacionais a teoria da relatividade geral de Einstein. A questão que iremos investigar, portanto, é como a teoria linear do campo de spin-2 deve ser modificada para se tornar compatível com a relatividade geral.

Aragone e Deser [62] foram os primeiros a abordar esta questão. Em 1971, eles realizaram uma generalização da teoria linear do campo de spin-2 para o espaço-tempo curvo, utilizando um novo tensor que denominaremos  $G^{(a)}_{\mu\nu}$ :

$$G^{(a)}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[ \tilde{\square} \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\alpha(\mu;\nu)}{}^{;\alpha} + \varphi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \left( \tilde{\square} \varphi - \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} \right) \right]. \quad (5.1)$$

O ponto-e-vírgula representa a derivada covariante em relação à métrica do espaço-tempo curvo,  $g_{\mu\nu}$ ; também  $\tilde{\square}$  representa o d'alembertiano em relação a esta métrica. No limite em que  $g_{\mu\nu} \rightarrow \gamma_{\mu\nu}$ ,  $G^{(a)}_{\mu\nu}$  se reduz a  $G^{(f)}_{\mu\nu}$ , como podemos ver comparando (5.1) e (1.14).

A equação para o campo sem massa, no espaço-tempo curvo, de acordo com esses autores, seria:

$$G^{(a)}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.2)$$

No entanto, há nesta teoria uma quebra da simetria de calibre que encontramos em Minkowski, pois a divergência de (5.1) não mais se anula identicamente:

$$G^{(a)}_{\mu\nu}{}^{;\nu} \equiv R_{\mu\alpha} \left( \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \frac{1}{2} \varphi^{;\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( R_{\mu\alpha;\beta} + R_{\mu\beta;\alpha} - R_{\alpha\beta;\mu} \right) \varphi^{\alpha\beta}. \quad (5.3)$$

Isto significa que o campo sujeito à equação (5.2) não tem, em geral, o número de graus de liberdade correto para um campo de spin-2.

Só recuperamos a identidade  $G^{(a)}_{\mu\nu}{}^{;\nu} \equiv 0$ , independentemente de qualquer imposição sobre  $\varphi_{\mu\nu}$ , quando  $R_{\mu\nu} = 0$ . Em um espaço de Einstein, por exemplo, no qual o tensor de Ricci é proporcional à métrica,  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ , a divergência da equação (5.2) impõe que  $\varphi_{\mu\nu}$  deve obedecer

à condição  $\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\varphi_{;\mu} = 0$ , desde que  $\Lambda \neq 0$ . Assim, é somente quando  $R_{\mu\nu} = 0$  que a equação (5.2) descreve um campo de spin-2 com o número correto de graus de liberdade.

Contudo,  $R_{\mu\nu} = 0$  não é uma condição razoável, pois o próprio campo  $\varphi_{\mu\nu}$  deve gerar uma curvatura do espaço-tempo, de acordo com as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} [\varphi_{\rho\sigma}]. \quad (5.4)$$

Ou seja, a equação proposta por Aragone e Deser para o campo de spin-2 sem massa não é compatível com a relatividade geral.

Os problemas persistem quando consideramos o campo com massa, cuja equação é:

$$G_{\mu\nu}^{(a)} + \frac{1}{2}m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi g_{\mu\nu}) = 0. \quad (5.5)$$

Tomando a divergência de (5.5), obtemos:

$$R_{\mu\alpha} \left( \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \frac{1}{2}\varphi^{;\alpha} \right) + \frac{1}{2} (R_{\mu\alpha;\beta} + R_{\mu\beta;\alpha} - R_{\alpha\beta;\mu}) \varphi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2 (\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha} - \varphi_{;\mu}) = 0. \quad (5.6)$$

Esta equação possui apenas derivadas primeiras de  $\varphi_{\mu\nu}$ , e pode ser considerada uma generalização da condição  $\varphi_{;\mu} - \varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$  que encontramos em Minkowski (ver Seção 1.6). Entretanto, se tentamos repetir o procedimento anterior de introduzir (5.6) no traço de (5.5), que em Minkowski nos dá a condição de vínculo  $\varphi = 0$ , encontramos uma expressão contendo derivadas segundas de  $\varphi_{\mu\nu}$ , que não corresponde a uma equação de vínculo. Novamente, concluímos que a equação (5.5) não descreve um campo de spin-2 puro (ver [16] para uma revisão desta análise). O apelo à condição  $R_{\mu\nu} = 0$ , é claro, continua em contradição com as equações de Einstein, e o mesmo vale para a condição  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ , com  $\Lambda \neq 0$ , que neste caso torna-se possível.

Aragone e Deser também consideraram a influência que teria a introdução de termos envolvendo um acoplamento não-mínimo entre o campo de spin-2 e o campo gravitacional, mas concluíram que estes termos, além de não resolverem o problema, alteram a forma da própria equação do campo gravitacional, desviando a teoria do contexto da relatividade geral.

Tudo isto levou estes autores a afirmarem que campos de spin-2 que não correspondam à métrica do espaço-tempo não podem ser encontrados na natureza, porque a teoria subjacente não é matematicamente consistente. Desde então, as equações que eles propuseram, (5.2) e (5.5), se tornaram um paradigma e são correntemente utilizadas sempre que se quer estudar uma questão envolvendo um campo de spin-2 no espaço-tempo curvo.

Os problemas apontados por Aragone e Deser são bem aceitos, porque se inserem em um contexto mais amplo: a interação entre campos com spin maior do que um pode excitar novos graus de liberdade, ausentes nos casos de campo livre, e há sempre o risco de violação da causalidade. Então, para assegurar a consistência da teoria, com a preservação do número de graus de liberdade e obediência à causalidade, é necessário impor restrições de algum tipo sobre a forma da interação. A conclusão de Aragone e Deser é que, para um sistema envolvendo um campo de spin-2 e a gravitação, essas condições são fortes demais e não podem ser satisfeitas, de tal forma que um tal campo não pode existir.

No entanto, a teoria de Aragone-Deser se apóia fortemente sobre um postulado que nos parece arbitrário: a utilização de  $G^{(a)}_{\mu\nu}$  como generalização de  $G^{(\ell)}_{\mu\nu}$ . No espaço-tempo curvo, as derivadas covariantes não mais comutam, como em Minkowski, e portanto diferentes ordenações das derivadas segundas de tensores nem sempre são equivalentes. Assim, como  $G^{(\ell)}_{\mu\nu}$  é construído com derivadas segundas de  $\varphi_{\mu\nu}$ , sua generalização para o espaço-tempo curvo não é trivial. Além de  $G^{(a)}_{\mu\nu}$ , podemos fazer uma segunda escolha para a ordem das derivadas covariantes, que denominaremos  $G^{(b)}_{\mu\nu}$ :

$$G^{(b)}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[ \overset{\sim}{=} \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\alpha(\mu} \overset{\sim}{=} \overset{\alpha}{\nu)} + \varphi_{\cdot\mu\nu} - g_{\mu\nu} \left( \overset{\sim}{=} \varphi - \varphi^{\alpha\beta} \overset{\sim}{=} \overset{\alpha\beta}{\cdot} \right) \right]. \quad (5.7)$$

Na verdade, qualquer combinação linear de  $G^{(a)}_{\mu\nu}$  e  $G^{(b)}_{\mu\nu}$  seria igualmente uma generalização possível para  $G^{(\ell)}_{\mu\nu}$ .

Argumentaremos neste trabalho que Aragone e Deser não fizeram uma boa escolha e que esta é a verdadeira origem de seus resultados negativos, não alguma dificuldade intrínseca ao sistema físico formado por um campo de spin-2 e a gravitação. Mostraremos que a generalização do formalismo de Fierz para o espaço-tempo curvo, na qual não há ambigüidades como a que descrevemos acima, nos fornece naturalmente uma teoria consistente. E veremos também que esta nova teoria nos ajuda a entender melhor qual é o significado da modificação que Albert Einstein fez em sua própria teoria da gravitação, em 1917, ao introduzir a constante cosmológica.

## 5.2 O tensor de Fierz no espaço-tempo curvo

A generalização do tensor de Fierz para o espaço-tempo curvo é feita diretamente pela substituição, em (1.10), da métrica de Minkowski por  $g_{\mu\nu}$  e pela troca das derivadas covariantes correspondentes (da barra pelo ponto-e-vírgula). Como só temos derivadas primeiras, não há nenhuma ambigüidade. Obtemos:

$$2 F_{\alpha\beta\mu} = \varphi_{\mu[\alpha;\beta]} + F_{[\alpha} g_{\beta]\mu}, \quad (5.8)$$

$$F_{\alpha} := F_{\alpha\mu}{}^{\mu} = \varphi_{,\alpha} - \varphi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}. \quad (5.9)$$

As identidades (1.1) e (1.2), segundo as quais o tensor de Fierz é anti-simétrico no primeiro par de índices e obedece à identidade cíclica, permanecem válidas. Já (1.3) adquire uma nova forma, consequência direta de (5.8):

$$F^{*\alpha}{}_{(\mu\nu);\alpha} = \frac{1}{2} R_{\alpha(\mu\nu)\beta}{}^{*} \varphi^{\alpha\beta}. \quad (5.10)$$

No caso do espaço-tempo de de Sitter, ou de anti-de Sitter, o tensor de Riemann é dado por

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R}{12} g_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (5.11)$$

onde

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}. \quad (5.12)$$

Como

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \hat{\eta}_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (5.13)$$

onde  $\hat{\eta}_{\alpha\beta\mu\nu}$  é o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita no espaço-tempo curvo, segue que, neste caso, recuperamos a identidade

$$F^{\alpha(\mu\nu)}_{;\nu} = 0. \quad (5.14)$$

Também a identidade (1.8) deixa de ter validade geral:

$$F_{\mu\nu}{}^{;\lambda}{}_{;\lambda} \equiv \frac{1}{2} R_{\lambda[\mu} \varphi_{\nu]}{}^{\lambda}. \quad (5.15)$$

A generalização de  $G^{(a)}_{\mu\nu}$  para o espaço-tempo curvo é feita tendo como base a equação (1.16). Assim, definimos  $\hat{G}_{\mu\nu}$ , tal que

$$\hat{G}_{\mu\nu} := -\frac{1}{2} F^{\alpha}{}_{(\mu\nu)}{}_{;\alpha}. \quad (5.16)$$

Um cálculo direto do lado direito de (5.16) nos dá:

$$\hat{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[ G^{(a)}_{\mu\nu} + G^{(b)}_{\mu\nu} \right]. \quad (5.17)$$

A divergência de (5.17) não se anula identicamente, e nem existe qualquer combinação de  $G^{(a)}_{\mu\nu}$  e  $G^{(b)}_{\mu\nu}$  tal que isto aconteça. Definimos então  $Z^\mu$  como sendo

$$Z^\mu := -F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{;\alpha\nu}, \quad (5.18)$$

de tal forma que

$$Z^\mu = 2\hat{G}^{\mu\nu}{}_{;\nu}. \quad (5.19)$$

O cálculo do lado direito de (5.18) nos dá:

$$Z^\mu = R^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\alpha\beta\lambda} - \frac{1}{2} \left( R_{\varepsilon}{}^{[\lambda} \varphi^{\mu]\varepsilon} \right)_{;\lambda}. \quad (5.20)$$

Fica evidente por (5.20) que  $Z^\mu$  é identicamente nulo em Minkowski, o que corresponde à identidade (1.9).

### 5.3 A equação para o campo de spin-2

Vimos, na Seção 1.2, que a ação de Fierz-Pauli para o campo de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski é dada, na linguagem do formalismo de Fierz, pela lagrangiana  $\mathcal{L} = U/4\kappa$ , onde  $U = F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu} - F_{\alpha} F^{\alpha}$ . Portanto, a generalização mais natural desta ação para o espaço-tempo curvo, neste formalismo, é:

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-g} U d^4x. \quad (5.21)$$

Convém mencionar aqui que o invariante  $C$ , que em Minkowski não contribui para a dinâmica da teoria linear, conforme explicamos no início da Seção 2.2, passa a contribuir para a dinâmica no espaço-tempo curvo, por causa da identidade (5.10). Uma lagrangiana determinada por  $U + \alpha C$ , portanto, seria igualmente uma generalização aceitável da lagrangiana de Fierz-Pauli, e escolhemos a forma de (5.21) pelo critério da simplicidade, por só envolver o invariante  $U$ , que é o único relevante para a teoria linear em Minkowski. É neste sentido que consideramos (5.21) a escolha *mais natural*. Deste ponto de vista, a contribuição proveniente do invariante  $C$  corresponde a um acoplamento não-mínimo entre o campo de spin-2 e o campo gravitacional.

A variação da ação (5.21) nos fornece a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu); \alpha} = 0, \quad (5.22)$$

que corresponde a

$$\hat{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.23)$$

A divergência desta equação nos diz que devemos ter

$$Z^{\mu} = 0. \quad (5.24)$$

Faremos uma análise desta condição na Seção 5.6.

Quando o campo possui massa, a ação se torna

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-g} \left[ U - \frac{m^2}{2} (\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \varphi^2) \right] d^4x. \quad (5.25)$$

A equação correspondente é

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu):\alpha} - m^2(\varphi_{\mu\nu} - \varphi g_{\mu\nu}) = 0, \quad (5.26)$$

que é equivalente a

$$\hat{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(\varphi_{\mu\nu} - \varphi g_{\mu\nu}) = 0. \quad (5.27)$$

A divergência de (5.27) nos dá

$$Z^{\mu} - m^2 F^{\mu} = 0, \quad (5.28)$$

e seu traço é

$$F^{\mu}{}_{;\mu} + \frac{3}{2}m^2 \varphi = 0. \quad (5.29)$$

A combinação de (5.28) e (5.29) nos leva à seguinte equação, que nós também examinaremos na Seção 5.6:

$$Z^{\mu}{}_{;\mu} + \frac{3}{2}m^4 \varphi = 0. \quad (5.30)$$

## 5.4 O acoplamento mínimo com o campo gravitacional

Quando comparamos os tensores  $G^{(a)}{}_{\mu\nu}$  e  $G^{(b)}{}_{\mu\nu}$ , vemos que toda a sua diferença se resume aos termos  $\varphi_{\alpha(\mu;\nu)}{}^{;\alpha}$  e  $\varphi_{\alpha(\mu}{}^{;\alpha}{}_{;\nu)}$ . Como

$$\varphi_{\mu\nu;\alpha\beta} = \varphi_{\mu\nu;\beta\alpha} + R_{\mu\lambda\alpha\beta} \varphi^{\lambda}{}_{\nu} + R_{\nu\lambda\alpha\beta} \varphi^{\lambda}{}_{\mu}, \quad (5.31)$$

não é difícil verificar que

$$G^{(a)}{}_{\mu\nu} = G^{(b)}{}_{\mu\nu} - R_{\mu\alpha\nu\beta} \varphi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}R_{\alpha(\mu} \varphi_{\nu)}{}^{\alpha}. \quad (5.32)$$

Recorrendo a (5.17), encontramos a relação entre  $G^{(a)}{}_{\mu\nu}$  e  $\hat{G}_{\mu\nu}$ :

$$\hat{G}_{\mu\nu} = G^{(a)}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\mu\alpha\nu\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}R_{\alpha(\mu} \varphi_{\nu)}{}^{\alpha}. \quad (5.33)$$

Os dois últimos termos do lado direito de (5.33) provêm, como acabamos de mostrar, dos diferentes ordenamentos das derivadas covariantes em  $G^{(a)}{}_{\mu\nu}$  e  $\hat{G}_{\mu\nu}$ . No entanto, eles são termos

típicos resultantes de um acoplamento não-mínimo entre o campo de spin-2 e o campo gravitacional.

Podemos encontrá-los a partir da seguinte lagrangiana:

$$L_{\text{interação}} = \frac{1}{2} \left( R_{\mu\alpha\nu\beta} \varphi^{\mu\nu} \varphi^{\alpha\beta} - R_{\alpha\mu} \varphi_{\nu}{}^{\alpha} \varphi^{\mu\nu} \right). \quad (5.34)$$

Desta forma, a equação proposta por Aragone e Deser, (5.2), segundo o formalismo de Fierz, é definida pela lagrangiana

$$L_{\text{A-D}} = U - L_{\text{interação}}. \quad (5.35)$$

Inversamente, do ponto de vista de Aragone e Deser, é a lagrangiana  $L_{\text{A-D}}$  que define o acoplamento mínimo, sendo  $U = L_{\text{A-D}} + L_{\text{interação}}$  a lagrangiana onde ocorre acoplamento não-mínimo. Vemos assim que a adoção de diferentes opções para a ordem das derivadas covariantes, na equação do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo, corresponde a diferentes definições da forma do acoplamento mínimo. O que é acoplamento mínimo para Aragone e Deser é não-mínimo no formalismo de Fierz, e vice-versa.

Esta equivalência significa que podemos encontrar as equações (5.23) e (5.27) dentro do esquema conceitual de Aragone e Deser, interpretando-as como resultantes de um acoplamento não-mínimo. Entretanto, há duas vantagens claras em se adotar o ponto de vista do formalismo de Fierz: em primeiro lugar, os coeficientes dos termos  $R_{\mu\alpha\nu\beta} \varphi^{\alpha\beta}$  e  $R_{\alpha(\mu} \varphi_{\nu)}{}^{\alpha}$  são especificados sem ambigüidade pela divergência do tensor de Fierz, equação (5.16), sem nenhuma hipótese *ad hoc*. Por outro lado, na lagrangiana  $L_{\text{interação}}$  estes coeficientes são arbitrários, como também é arbitrária a ausência de outros termos possíveis, tais como  $R \varphi^2$  ou  $R_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} \varphi$ .

A outra vantagem é que a equação de Einstein para o campo gravitacional mantém a sua forma tradicional. No formalismo de Fierz, a ação completa é

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x + \frac{1}{4\kappa} \int \sqrt{-g} \left[ U - \frac{m^2}{2} \left( \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \varphi^2 \right) \right] d^4x, \quad (5.36)$$

onde resulta naturalmente a equação (5.4) pela variação em relação a  $g_{\mu\nu}$ . Já na versão de

Aragone-Deser, a variação da lagrangiana  $L_{\text{interação}}$  em relação a  $g_{\mu\nu}$ , por causa da presença do tensor de Riemann, provoca mudanças na equação do campo gravitacional, que deixa de ter a forma (5.4). Evidentemente, a equação para o campo gravitacional resultante é rigorosamente a mesma nos dois casos; o que acontece é que a redefinição da forma do acoplamento mínimo acarreta uma correspondente redefinição do tensor de energia-momento do campo de spin-2. Ou seja: no formalismo de Fierz, o tensor de energia-momento do campo de spin-2 absorve naturalmente termos que, do ponto de vista de Aragone e Deser, teriam origem num acoplamento não-mínimo.

## 5.5 O tensor de energia-momento

Definimos o tensor de energia-momento do campo de spin-2 como sendo

$$T^{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\varphi)}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\varphi)}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right] \right\}, \quad (5.37)$$

onde  $\mathcal{L}_\varphi$  é a lagrangiana da ação (5.25):

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{4\kappa} \left[ U - \frac{m^2}{2} (\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} - \varphi^2) \right]. \quad (5.38)$$

O cálculo de  $T^{\mu\nu}$  é exatamente análogo ao do espaço-tempo plano (Apêndice B), e encontramos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -U g^{\mu\nu} + 2 \left[ 2 F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\mu}{}^{\nu} F^{\alpha}{}_{\alpha} \right] + \right. \\ \left. + \left[ F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\lambda} - F^{\alpha(\lambda\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\alpha(\lambda\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right]_{;\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} (\varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi^2) g^{\mu\nu} - 2m^2 (\varphi^{\mu\alpha} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - \varphi \varphi^{\mu\nu}) \right\}. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Da mesma forma, encontramos que é válida a identidade:

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} \equiv -\frac{1}{2\kappa} \left[ 2 \left( \hat{G}_{(m)}^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu} \right)_{;\alpha} - \hat{G}_{(m)}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta;\mu} \right], \quad (5.40)$$

onde definimos

$$\hat{G}^{(m)}_{\mu\nu} := \hat{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi g_{\mu\nu}). \quad (5.41)$$

Quando a equação (5.27) é satisfeita,  $\hat{G}^{(m)}_{\mu\nu} = 0$  e (5.40) nos dá

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (5.42)$$

em pleno acordo com as equações de Einstein, (5.4).

Vemos assim que as equações do formalismo de Fierz para um campo de spin-2 no espaço-tempo curvo parecem ser compatíveis com as equações de Einstein, evitando um dos problemas apontados por Aragone e Deser. Mostraremos a seguir que este é de fato o caso, e que estas equações definem realmente um campo de spin-2, com o número correto de graus de liberdade e com o desejado comportamento causal, de tal forma que resolvem também a outra parte dos problemas levantados por estes autores.

## 5.6 As restrições à geometria e o problema de Cauchy

É bem conhecido que, quando um espaço-tempo tem a sua curvatura determinada por um campo eletromagnético (linear), então, de acordo com a relatividade geral, ela deve satisfazer à seguinte condição, encontrada por Rainich [88]:

$$R_{\mu\alpha} R^{\alpha\nu} = \lambda \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (5.43)$$

Se um campo de spin-1 leva a curvatura do espaço-tempo a satisfazer uma condição como esta, é natural pensar que um campo de spin-2 deve produzir algo semelhante. De fato, veremos que as equações do formalismo de Fierz impõem uma restrição à geometria do espaço-tempo. Contudo, diferentemente de (5.43), que é satisfeita automaticamente pelas soluções das equações de Einstein tendo como fonte o tensor de energia-momento do campo eletromagnético, a condição que surge no caso do campo de spin-2 corresponde a uma restrição adicional que a curvatura deve satisfazer.

### 5.6.1 Campo sem massa

Começando pelo caso do campo sem massa, já vimos na Seção 5.3 que a condição  $Z^\mu = 0$ , equação (5.24), deve ser satisfeita. Mas ela não pode recair sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , o que estragaria o caráter de spin-2 do campo, alterando o seu número de graus de liberdade. Concluimos, portanto, que a condição  $Z^\mu = 0$  deve recair sobre a geometria. De acordo com (5.20), isto significa que a métrica deve satisfazer à equação

$$R^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\alpha\beta\lambda} - \frac{1}{2} \left( R_\varepsilon^{[\lambda} \varphi^{\mu]\varepsilon} \right)_{;\lambda} = 0. \quad (5.44)$$

Como ela também deve obedecer à equação do campo gravitacional da relatividade geral, (5.4), podemos usar esta última para reescrever o último termo do lado esquerdo de (5.44) em função do tensor de energia-momento do campo de spin-2:

$$R^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\alpha\beta\lambda} + \frac{\kappa}{2} \left( T_\varepsilon^{[\lambda} \varphi^{\mu]\varepsilon} \right)_{;\lambda} = 0. \quad (5.45)$$

Um fato importante para a análise desta equação é que o tensor de Riemann não possui derivadas segundas temporais das componentes  $g_{0\mu}$ . O únicos termos com derivadas segundas temporais são:

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2} \left( g_{ij,00} + g_{00,ij} + g_{i0,0j} + g_{0j,i0} \right) + \text{termos com derivadas primeiras de } g_{\mu\nu}. \quad (5.46)$$

Fazendo novamente a escolha de os dados iniciais serem dados em uma hipersuperfície espacial  $\Sigma$ , tanto para  $g_{\mu\nu}$  quanto para  $\varphi_{\mu\nu}$ , a exemplo do que fizemos na Seção 1.5, a observação acima implica que (5.45) corresponde a quatro equações de vínculo para o tensor métrico – o que não obstante exige ainda que eliminemos os termos  $g_{ij,00}$  de (5.45) através das componentes  $ij$  das equações de Einstein.

A divergência de (5.45) não fornece um novo vínculo, porque a imposição de que (5.45) seja válida em todo o espaço-tempo já é suficiente para determinar todos os termos  $g_{0\mu,00}$ . Como o

campo gravitacional na relatividade geral é um campo de spin-2 com dois graus de liberdade, e tendo o tensor métrico dez componentes independentes, podemos impor sobre ele um total de oito condições, quatro das quais são dadas por (5.45). Restam ainda quatro condições em aberto para  $g_{\mu\nu}$ , o que corresponde à possibilidade de escolhermos o sistema de coordenadas.

A equação (5.45) pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$W^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\alpha\beta\lambda} + \kappa T^{\alpha\beta} F^{\mu}_{\alpha\beta} + \kappa T^{\alpha\mu} F_{\alpha} - \frac{2\kappa}{3} T F^{\mu} + \frac{\kappa}{2} \left( T_{\epsilon} [{}^{\lambda} \varphi^{\mu}]^{\epsilon} \right)_{;\lambda} = 0, \quad (5.47)$$

onde  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$  é o tensor de Weyl. Posta sob esta forma, fica evidente que toda a restrição à geometria implicada pela condição  $Z^{\mu} = 0$  recai sobre o tensor de Weyl. Isto é de suma importância, pois é este fato que permite a equação (5.23) ser compatível com as equações de Einstein. Na teoria de Aragone-Deser, a condição equivalente seria anular o lado direito da equação (5.3), na qual entra apenas o tensor de Ricci. Porém, o tensor de Ricci já está comprometido com as equações de Einstein, decorrendo daí uma contradição. A presença do tensor de Weyl na equação (5.47), ou melhor, do tensor de Riemann em (5.44), torna possível a conciliação com as equações de Einstein. É desta maneira que o formalismo de Fierz supera as dificuldades apontadas por Aragone e Deser.

Como a condição  $Z^{\mu} = 0$  é satisfeita pela métrica, do ponto de vista do campo  $\varphi_{\mu\nu}$ , ela desempenha o papel de uma identidade, sendo válida independentemente dele. Este fato garante que o campo possui apenas dois graus de liberdade, que é o desejado para um campo de spin-2 sem massa. De fato, a variação da ação (5.21) por uma transformação do tipo  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{(\mu;\nu)}$  nos dá:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} Z^{\mu} \xi_{\mu} d^4x. \quad (5.48)$$

Quando  $Z^{\mu} = 0$ , a ação tem uma invariância de calibre análoga à do espaço-tempo plano; basta que a derivada covariante que entra na expressão  $\xi_{(\mu;\nu)}$  seja construída com uma métrica que satisfaça às equações (5.4) e (5.45).

Vale a pena chamar a atenção para como se propagam os vínculos do sistema de equações formado por (5.4), (5.23) e (5.45). Na equação para  $\varphi_{\mu\nu}$ , (5.23), as componentes  $ij$  são dinâmicas e

as componentes  $0\mu$  são vínculos. Isto pode ser conferido comparando-se (5.23) com as equações (1.59) e (1.60), levando-se em conta que  $\varphi_{\mu\nu;\alpha\beta} = \varphi_{\mu\nu,\alpha\beta} +$  “termos com derivadas primeiras de  $\varphi_{\mu\nu}$ ”. Para que estes vínculos sejam propagados, precisamos que  $Z^\mu = 0$  seja válida em todo o espaço-tempo. Conseguimos isto transformando a equação  $Z^\mu = 0$  na equação (5.45), que é uma equação de vínculos para a métrica, e impondo que ela se propague por todo o espaço-tempo. Mas precisamos usar as equações de Einstein para realizar esta transformação, e para que (5.45) seja válida em todo o espaço-tempo é preciso que (5.4) o seja. Isto exige a propagação dos outros vínculos para a métrica representados pelas componentes  $0\mu$  das equações de Einstein. Contudo, a propagação destes vínculos requer que o tensor de energia-momento do campo  $\varphi_{\mu\nu}$ , que entra no lado direito de (5.4), tenha divergência nula, e isto só acontece quando a equação para o campo, (5.23), é válida em todo o espaço-tempo. Por sua vez, este fato implica que suas componentes  $0\mu$  precisam ser propagadas. Voltamos assim exatamente ao ponto de onde partimos.

Esta situação complexa descreve um sistema de equações acopladas, sendo cada uma delas necessária para a solução das outras. Não há nenhuma inconveniência nisto, e este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo, começando com o campo de spin-2  $\varphi_{\mu\nu}$  na ausência de gravitação, e seguindo com novas soluções para ambos os campos sendo construídas a partir das soluções anteriores, passo a passo. Isto demonstra mais uma vez que as dificuldades apontadas por Aragone e Deser são realmente superadas pela adoção do formalismo de Fierz.

## 5.6.2 Campo com massa

Quanto ao campo com massa, temos que satisfazer às equações (5.28) e (5.30). É fácil perceber que estas equações impõem condições sobre ambos os campos  $\varphi_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ . Para que (5.30) não contenha derivadas segundas de  $\varphi_{\mu\nu}$ , convém fazer  $Z^\mu{}_{;\mu} = 0$ , o que implica que  $\varphi = 0$ . E

$Z^\mu{}_{;\mu} = 0$  é satisfeito por  $Z^\mu = 0$  como uma condição para a métrica, o que, de acordo com (5.28), implica que  $F^\mu = 0$ . Temos então que a geometria deve obedecer à mesma restrição que no caso anterior ( $Z^\mu = 0$ ), e que o campo  $\varphi_{\mu\nu}$  deve obedecer a:

$$\varphi = 0, \quad (5.49)$$

$$F^\mu = 0. \quad (5.50)$$

Conjugando estas duas equações, obtemos

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (5.51)$$

Podemos ver que estas condições são todas generalizações naturais das condições que encontramos na Seção 1.6 para o espaço-tempo plano, sendo que lá  $Z^\mu = 0$  era uma identidade. Assim, fica claro que o campo de spin-2 com massa mantém no espaço-tempo curvo seus cinco graus de liberdade.

A propagação dos vínculos obedece à mesma estrutura circular discutida no caso anterior. A conservação da equação (5.49) impõe mais um vínculo:

$$\varphi_{,0} = 0. \quad (5.52)$$

As equações (5.49), (5.51), (5.52) e as componentes  $0\mu$  da equação (5.27) totalizam dez equações de vínculo para o campo  $\varphi_{\mu\nu}$ , e  $Z^\mu = 0$  impõe quatro condições sobre o tensor de Weyl, representando quatro equações de vínculo para a métrica  $g_{\mu\nu}$ , que ainda deixam livre a escolha do sistema de coordenadas.

Examinamos até aqui a situação em que o tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$ , é determinado pelo tensor de energia-momento do próprio campo de spin-2, através das equações de Einstein. Caso haja um campo externo dominante, tal que a energia do campo  $\varphi_{\mu\nu}$  seja desprezível em relação à dele, de tal forma que o tensor de Ricci seja determinado pelo tensor de energia-momento deste campo, a equação (5.45) precisa ainda ser resolvida, com o  $T_{\mu\nu}$  representando a energia do campo externo. Toda a análise que fizemos acima continua válida, a não ser por uma simplificação da interdependência das equações: agora, a propagação das componentes  $0\mu$  das equações de Einstein

não mais dependem da solução da equação para  $\varphi_{\mu\nu}$ , mas apenas da lei de conservação do momento e da energia do campo externo. Em todos estes casos, com o campo possuindo ou não massa, e havendo ou não um campo externo, temos um sistema de equações compatíveis entre si.

## 5.7 A causalidade da propagação

Para examinar a causalidade da propagação do campo de spin-2 segundo o formalismo de Fierz, vamos seguir a análise feita por Buchbinder *et al.* [67]. Começamos por definir a matriz característica de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem para um campo de spin-2. Este sistema deve ter a forma

$$M_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{\lambda\kappa} \varphi^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\kappa} + \dots = 0, \quad (5.53)$$

onde as reticências indicam os termos que não contêm derivadas segundas de  $\varphi_{\mu\nu}$ . A *matriz característica*,  $M_{\mu\nu\alpha\beta}(n)$ , é função de quatro argumentos  $n_\mu$ :

$$M_{\mu\nu\alpha\beta}(n) := M_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{\lambda\kappa} n_\lambda n_\kappa. \quad (5.54)$$

Denominamos *equação característica* a equação  $\det M_{\mu\nu\alpha\beta}(n) = 0$ , e *superfície característica* a superfície  $S(x) = \text{constante}$ , onde  $S_{,\mu} = n_\mu$ .

O sistema de equações é dito *hiperbólico* se todas as soluções da equação característica forem reais, e um sistema hiperbólico tem propagação causal se não houver vetores do tipo-tempo entre estas soluções. A equação linear para o campo de spin-2 em Minkowski, com ou sem massa, apresenta duas soluções para a equação característica, que é  $(n_\mu n^\mu)^{10} = 0$ :  $n_0 = \pm \sqrt{n_i^2}$ . Estas são soluções reais e representam vetores nulos, de tal forma que a propagação, neste caso, é causal.

A matriz característica das equações (5.23) e (5.27) é a mesma:

$$\begin{aligned} 2 M_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(n) &= \delta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} n^2 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} n^2 + g^{\alpha\beta} n_\mu n_\nu + g_{\mu\nu} n^\alpha n^\beta + \\ &+ g_{,\mu\nu} n^\alpha n^\beta - \frac{1}{2} \delta_\mu^{(\alpha} n^{\beta)} n_\nu - \frac{1}{2} \delta_\nu^{(\alpha} n^{\beta)} n_\mu, \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde

$$n^2 := g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu. \quad (5.56)$$

Esta matriz é degenerada, por causa da identidade

$$n^\mu M_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(n) \equiv 0. \quad (5.57)$$

Contudo, analisemos primeiro o caso do campo com massa. Valem então as equações (5.49) e (5.51), e podemos definir uma nova matriz característica,  $\hat{M}_{\mu\nu\alpha\beta}(n)$ , para a equação resultante da introdução destas condições em (5.27). Encontramos:

$$2\hat{M}_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(n) = \delta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} n^2. \quad (5.58)$$

evitando a degenerescência. A equação característica nos diz, então, que devemos ter  $n^2 = 0$ . Em qualquer ponto  $x_0$  do espaço-tempo, podemos escolher, localmente,  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ , de tal forma que

$$n^2 \Big|_{x_0} = n_0^2 - n_i^2. \quad (5.59)$$

Temos assim, localmente, as mesmas soluções que para o caso do espaço-tempo plano. Logo, a propagação do campo com massa é causal no espaço-tempo curvo.

Quando o campo não tem massa, a ação possui a simetria de calibre que descrevemos na Seção 5.6.1, e o campo possui dois graus de liberdade, o que significa que podemos impor até oito equações adicionais sobre  $\varphi_{\mu\nu}$ . Se adotamos a condição

$$\left( \varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0, \quad (5.60)$$

a matriz característica se reduz novamente a (5.58), indicando uma propagação causal. Como a violação da causalidade não poderia ser eliminada por uma simples transformação de calibre, segue que este resultado é geral e que o campo sem massa também se propaga de forma causal.

Vemos assim que o formalismo de Fierz leva não apenas a um conjunto de equações consistentes, como também assegura a causalidade da propagação, quer o campo tenha ou não massa.

## Capítulo 6

# Conseqüências para a interpretação da constante cosmológica

### 6.1 Teoria para um campo de spin-2 no espaço-tempo de dS ou de AdS

No espaço-tempo de de Sitter, o tensor de Riemann é dado pela equação (5.11), ou seja,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\Lambda}{3} g_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (6.1)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica que aparece nas equações de Einstein modificadas por ele mesmo:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (6.2)$$

Dizemos que (6.1) representa a solução de de Sitter (dS) se  $\Lambda > 0$ , ou a de anti-de Sitter (AdS) se  $\Lambda < 0$ . Para evitarmos confusões, reservaremos, neste capítulo, a denominação *de de Sitter* para o caso geral, e usaremos dS e AdS para os casos particulares.

Em primeiro lugar, notemos que, no espaço-tempo de de Sitter, a equação (5.20) se reduz a

$$Z^\mu = -\frac{2}{3}\Lambda F^\mu. \quad (6.3)$$

Isto significa que a condição  $Z^\mu = 0$  não é satisfeita pela métrica, mas decorre de  $F^\mu = 0$ , mesmo para o campo sem massa. A contradição com a teoria desenvolvida no Capítulo 5 é apenas aparente, pois aqui estamos examinando o comportamento de um campo de spin-2 em uma geometria dada de antemão. Veremos que há até mesmo um valor especial para a massa, tal que a condição  $Z^\mu = 0$  não precisa ser observada.

### 6.1.1 Campo sem massa

Começando nossa análise pelo campo sem massa, reparamos que a equação (5.23) implica em  $Z^\mu = 0$  (5.24), e portanto também em  $F^\mu = 0$ , por causa de (6.3). Na geometria de de Sitter, é válida a seguinte identidade:

$$\hat{G}^{\mu\nu}{}_{;\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3} \hat{G}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \equiv 0. \quad (6.4)$$

Este fato nos permite eliminar mais um grau de liberdade, e vamos escolher a equação  $\varphi = 0$  para cumprir este papel. Curiosamente, encontramos as condições apresentadas na Seção 5.6.2, dedicada à teoria para um campo com massa ( $\varphi = 0$  e  $F^\mu = 0$ ). De fato, temos aqui um campo com 5 graus de liberdade: são 14 equações a serem resolvidas (10 em (5.23) e 4 em  $F^\mu = 0$ ), e 9 equações de vínculo (4 nas componentes  $0\mu$  de (5.23), 4 em  $Z^\mu = 0$  e 1 em (6.4)), e portanto existem  $14 - 9 = 5$  graus de liberdade. Vamos entender melhor este estado de coisas quando examinarmos o caso do campo com massa.

### 6.1.2 Campo com massa

O campo de spin-2 com massa, sujeito à equação (5.27), no espaço-tempo de de Sitter, também deve obedecer às condições da Seção 5.6.2,  $Z^\mu = 0$ ,  $F^\mu = 0$  e  $\varphi = 0$ , desde que a equação (5.28) não se revele uma identidade. Esta possibilidade existe por causa da equação (6.3), que levada a (5.28) nos dá:

$$\left( m^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) F^\mu = 0. \quad (6.5)$$

No caso particular em que

$$m^2 = -\frac{2}{3} \Lambda, \quad (6.6)$$

a equação (5.28), que é a divergência da equação para o campo de spin-2, (5.27), se anula identicamente. Isto garante que o campo, neste caso, possui apenas dois graus de liberdade. E há também a invariância da ação (5.25) com relação à transformação  $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{(\mu;\nu)}$ , pois:

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left( m^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) F^\mu{}_\nu \xi^\nu d^4x. \quad (6.7)$$

Esta invariância se reduz corretamente à do espaço-tempo plano, porque, de acordo com (6.6), o limite  $\Lambda \rightarrow 0$  garante também que  $m \rightarrow 0$ , de tal forma que é o campo sem massa que possui esta simetria em Minkowski.

Nos demais casos, em que (6.6) não é satisfeita, o campo possui os esperados cinco graus de liberdade. É importante notar que a equação (6.6) só pode ser válida em AdS.

### 6.1.3 A massa efetiva

Nas duas seções anteriores, obtivemos um resultado um pouco estranho: o campo de spin-2, no espaço-tempo de de Sitter, admite um valor especial para a sua massa, tal que neste caso ele possui 2 graus de liberdade, tendo 5 graus de liberdade em todos os demais casos; no entanto, este valor especial para a massa não é  $m = 0$ , mas  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ , e só é possível em AdS. Isto sugere a definição de uma massa efetiva,  $M$ , de sorte que o campo só possua dois graus de liberdade quando  $M$  for nula; definimos, então:

$$M^2 := m^2 + \frac{2}{3}\Lambda. \quad (6.8)$$

Quando  $M \neq 0$ , o campo possui 5 graus de liberdade.

É importante notar que, quando  $\Lambda > 0$ , o intervalo  $0 \leq M^2 < \frac{2}{3}\Lambda$  é proibido, porque a massa  $m$ , que entendemos ser a massa real do campo, não pode ser imaginária. Da mesma forma, o intervalo  $0 \leq m^2 < -\frac{2}{3}\Lambda$  implica em uma massa efetiva imaginária quando  $\Lambda < 0$ . Parece,

então, que  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$  é um limite inferior para a massa real na geometria AdS, correspondendo à situação em que o campo tem apenas 2 graus de liberdade. A massa real não sofre restrições em dS, mas a massa efetiva, sim. Inversamente, é a massa efetiva que não sofre restrições em AdS. E como  $M = 0$  é proibido no caso em que  $\Lambda > 0$ , o campo não pode nunca ter apenas 2 graus de liberdade em dS. Estes resultados estão de acordo com os de Garidi *et al.*, quando associamos o que eles consideram a massa do campo de spin-2 em de Sitter com a nossa massa efetiva,  $M$  [72].

## 6.2 A massa do gráviton na relatividade geral

Vamos perturbar a equação de Einstein com a constante cosmológica, equação (6.2), em torno da solução de de Sitter, que designaremos por  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ . Usando a notação  $\delta g_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$ , encontramos:

$$\delta G_{\mu\nu} + \Lambda \varphi_{\mu\nu} = 0, \quad (6.9)$$

onde  $\delta G_{\mu\nu}$  é a perturbação do tensor de Einstein. Um cálculo direto nos dá:

$$\delta G_{\mu\nu} = G^{(a)}_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}, \quad (6.10)$$

com  $G^{(a)}_{\mu\nu}$  sendo dado por (5.1) e  $A_{\mu\nu}$  por

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \overset{\circ}{R}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{R} \varphi_{\mu\nu} \right). \quad (6.11)$$

Introduzindo as equações (6.11) e (6.10) em (6.9), e utilizando (5.33), chegamos ao seguinte resultado:

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3} \left( \varphi_{\mu\nu} - \varphi \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (6.12)$$

Reconhecemos imediatamente a equação (5.27), com  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ . Em AdS, segundo nossa análise anterior, diríamos que o campo gravitacional possui uma massa real não-nula, embora sua massa efetiva se anule, o que está de acordo com ele ter apenas dois graus de liberdade.

Este resultado mostra uma interessante relação entre a constante cosmológica e a massa do gráviton, a suposta partícula responsável pela interação gravitacional. Esta relação só faz sentido quando  $\Lambda < 0$ , mas não é restrita à geometria de de Sitter. A solução mais geral da equação (6.2) inclui o tensor de Weyl, que se anula em de Sitter:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{\Lambda}{3} g_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (6.13)$$

A perturbação da equação (6.2) em torno desta solução nos dá a seguinte equação:

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3} \left( \varphi_{\mu\nu} - \varphi \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \overset{\circ}{W}_{\mu\alpha\nu\beta} \varphi^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.14)$$

Podemos ver que, do ponto de vista da teoria do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo formulada no Capítulo 5, o termo adicional na equação acima corresponde a um acoplamento não-mínimo entre a perturbação da métrica e o espaço-tempo de fundo. Contudo, o termo de massa permanece intacto, assim como continua válida a identificação da massa do gráviton, para  $\Lambda < 0$ :  $m_g^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ . E não é difícil verificar que ele continua tendo apenas dois graus de liberdade.

Chegamos assim à conclusão que a introdução de uma constante cosmológica negativa na equação do campo gravitacional equivale a dotar o gráviton de uma massa não-nula, não obstante sua massa efetiva continue a ser nula e o campo continue a ter apenas dois graus de liberdade. Inversamente, podemos dizer que a passagem da teoria da relatividade geral, que lida com um campo gravitacional sem massa, para uma nova teoria em que o gráviton tenha uma massa  $m_g$ , se faz através do acréscimo de um termo que corresponde a uma constante cosmológica negativa:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} m_g^2 g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (6.15)$$

Embora a idéia de se associar a constante cosmológica à massa do gráviton não seja nova [74,75], nossa argumentação difere das anteriores por se basear em uma teoria consistente para o campo de spin-2 em um espaço-tempo curvo. Os argumentos anteriores, tanto dos defensores desta idéia quanto de seus críticos, baseavam-se em um raciocínio envolvendo o potencial de Yukawa [76-

77]. Este raciocínio não nos parece apropriado, uma vez que campos com massa podem ter um comportamento que não corresponda ao decaimento exponencial de Yukawa, como é, precisamente, o caso do campo gravitacional na nossa teoria (ou na teoria de Einstein escrita sob a forma (6.15)).

### 6.3 Anti-de Sitter versus Minkowski

A possível relação entre a massa do gráviton e uma constante cosmológica negativa levanta de imediato uma questão. Se o gráviton possuir realmente uma massa não-nula, e a equação do campo gravitacional for a (6.15), então a solução fundamental, na ausência de matéria outra que não o próprio campo gravitacional, seria a geometria de anti-de Sitter, não a de Minkowski. Esta solução pode ser escrita assim:

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{1}{2} m_g^2 r^2 \right) c^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{1}{2} m_g^2 r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (6.16)$$

A métrica de Minkowski passaria então a ser apenas uma aproximação de (6.16), no limite em que a massa do gráviton pode ser desprezada. É interessante notar que o espaço-tempo de anti-de Sitter possui todas as propriedades necessárias para ser considerado uma extensão natural do espaço-tempo de Minkowski enquanto suporte para o mundo físico: ele tem uma estrutura causal, uma representação unitária para o grupo associado com a qual as partículas elementares podem ser relacionadas, com um mínimo de energia bem definido, e assim por diante. Em contraste, o espaço-tempo de de Sitter (dS) não tem um mínimo para o espectro de energia e uma série de outros problemas [89].

Esta substituição de Minkowski por anti-de Sitter corresponderia a uma mudança de paradigma, com conseqüências provavelmente insuspeitas. Talvez seja mesmo necessário interpretar a equação (6.15) não como uma variante dentro da relatividade geral, mas como definindo uma nova teoria para a gravitação – uma teoria para um campo gravitacional com massa, que exige que raciocinemos em seus próprios termos.

# **Conclusão**

Abordamos, neste trabalho, dois temas distintos, ambos envolvendo a descrição de Fierz para o campo de spin-2. Na Parte I, fizemos uma análise crítica da teoria NDL da gravitação, proposta em 1997 por M. Novello, V. A. De Lorenci e L. R. de Freitas. Na Parte II, apresentamos uma nova teoria para lidar com o campo de spin-2 no espaço-tempo curvo.

Os Capítulos 1 e 2 são ambos introdutórios, embora tenhamos contribuído com uma formulação precisa para a lei de conservação do momento e da energia na NDL, chamando a atenção para a existência de uma segunda lei de conservação que com ela compete. O estudo destas leis de conservação desempenhou um papel central em nossa análise, levada adiante nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 3, examinamos o limite newtoniano da NDL, bem como os parâmetros PPN da aproximação pós-newtoniana. Mostramos que a existência, nesta teoria, de duas leis de conservação conflitantes entre si gera dois caminhos distintos para a obtenção do limite newtoniano, e que os dois limites resultantes só podem ser harmonizados com a imposição de condições adicionais sobre o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Estas condições adicionais, no entanto, já seriam suficientes para que os parâmetros PPN da teoria não concordassem com os valores experimentais. Porém a situação é ainda mais grave, pois mostramos também que, por causa deste mesmo conflito entre as duas leis de conservação, os parâmetros PPN são a rigor indeterminados. Exibimos explicitamente esta indeterminação ao apresentarmos uma segunda solução exata para a equação da teoria no vácuo, representando um campo estático com simetria esférica. Esta nova solução tem parâmetros PPN diferentes dos da solução original encontrada pelos fundadores da teoria. O próprio fato de esta

solução não ser única representa uma fraqueza da teoria, relacionada a uma simetria de calibre inapropriada, e nos levou a concluir que o tensor de Fierz não pode ser interpretado como o tensor que descreve o campo gravitacional – papel este reservado à métrica, ou antes, à curvatura do espaço-tempo.

No Capítulo 4, examinamos em detalhes o problema de Cauchy e a teoria de perturbações na NDL. Mostramos que, embora as equações tenham um problema de condições de contorno bem posto, sendo bem comportadas a este respeito, o campo gravitacional tem oito graus de liberdade no vácuo, e dez quando interage com a matéria. Além de inaceitável por si só, este resultado deixa claro que o campo  $\varphi_{\mu\nu}$ , nesta teoria, não corresponde verdadeiramente a um campo de spin-2. Entretanto, por construção, o limite linear da equação do campo gravitacional da NDL é a equação de Fierz-Pauli, que descreve um campo de spin-2. Assim, a teoria é incoerente com seu próprio limite linear, fato este que aparece em toda a sua clareza quando perturbamos suas equações em torno da solução de campo nulo. Vimos que as ordens de perturbação mais altas impõem condições sobre as soluções das ordens mais baixas, o que torna impossível encontrar soluções satisfatórias para uma dada ordem de aproximação; em particular, ficam comprometidas as aproximações newtoniana e pós-newtoniana, conforme já havíamos exposto no capítulo anterior.

Assim, demonstramos a inconsistência da teoria NDL e exibimos as suas falhas. Mostramos também que a raiz desta inconsistência, e origem destas falhas, é a ausência, nesta teoria, de uma simetria de calibre que fosse adequada. De fato, no âmbito de uma teoria para a gravitação em termos de um campo de spin-2 sem massa, a simetria de calibre necessária para torná-la consistente é a covariância geral [14]. O tensor de Fierz mostra aqui as suas limitações, pois, embora possam ser traçadas analogias entre ele e o tensor do campo eletromagnético [40], esta analogia se perde no ponto mais importante: na estrutura da invariância de calibre.

No Capítulo 5, já na Parte II, realizamos a generalização do tensor de Fierz para o espaço-tempo curvo e encontramos as equações para o campo de spin-2 com e sem massa. Mostramos que a adoção do formalismo de Fierz corresponde a uma redefinição do acoplamento mínimo em relação à

teoria convencional (e problemática) de Aragone-Deser, evitando dois tipos de arbitrariedades: a ordem das derivadas covariantes nas equações para o campo, e os coeficientes de certos termos que, do ponto de vista de Aragone e Deser, têm origem em um acoplamento não-mínimo. Vimos que o tensor de energia-momento do campo de spin-2 passa também por uma redefinição, e que a lei de conservação correspondente é exatamente a que esperaríamos encontrar no contexto da relatividade geral.

A compatibilidade com as equações de Einstein foi demonstrada através do estudo da estrutura dos vínculos da teoria. Mostramos que a curvatura do espaço-tempo deve satisfazer a uma condição restritiva para acomodar de forma consistente sua interação com o campo de spin-2, porém esta restrição recai inteiramente sobre o tensor de Weyl, o que evita um conflito com as equações de Einstein. Estes resultados são igualmente válidos quer o campo tenha ou não massa, e podem ser facilmente estendidos para o caso de a curvatura ser determinada não pelo campo de spin-2 em questão, mas por um campo externo a este sistema. Demonstramos também que a propagação do campo é causal, em todos estes casos. Encontramos assim um conjunto de equações consistentes que descrevem o comportamento do campo de spin-2 no espaço-tempo curvo, podendo levar em conta ou não o campo gravitacional produzido por ele mesmo – embora este espaço-tempo não possa ser inteiramente arbitrário.

No Capítulo 6, examinamos um caso particular da teoria desenvolvida no capítulo anterior, deixando nosso campo de spin-2 se propagar no espaço tempo de de Sitter (ou de anti-de Sitter). Analisamos os casos de campo com e sem massa, e verificamos que há um valor especial da massa tal que o campo possui apenas dois graus de liberdade. Em Minkowski, esta propriedade é uma marca distintiva do campo sem massa, mas no nosso caso obtivemos que esta massa está relacionada à constante cosmológica:  $m^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ . Vimos então que podemos definir uma massa efetiva que determina o número de graus de liberdade do campo: dois quando ela se anula e cinco caso contrário. Mostramos que esta massa efetiva tem uma região de valores proibidos no espaço-tempo de de Sitter, o que está de acordo com o resultado de outros autores [72].

Comparamos em seguida estes resultados com a perturbação das equações de Einstein nesta mesma geometria, e verificamos que o gráviton tem uma massa com precisamente o nosso valor crítico,  $m_g^2 = -\frac{2}{3}\Lambda$ . Assim, ele possui uma massa efetiva nula e apenas dois graus de liberdade. Vimos que esta identificação da massa do gráviton continua válida quando consideramos a perturbação das equações de Einstein em torno de soluções mais gerais que a de Sitter, com o tensor de Weyl podendo ser arbitrário. Como a teoria que apresentamos no Capítulo 5, baseada na variável de Fierz, e a perturbação das equações da relatividade geral são independentes, não há nenhuma arbitrariedade na nossa conclusão sobre a relação entre a massa do gráviton e a constante cosmológica – esta relação aparece naturalmente, sem nenhuma hipótese adicional.

Finalmente, encerramos o Capítulo 6 com uma breve discussão a respeito da possibilidade de o espaço-tempo de anti-de Sitter ser a solução fundamental da gravitação para o vácuo, ao invés de Minkowski, uma vez que esta é a solução correta, de acordo com os nossos resultados, para o caso de os grávitons terem uma massa não-nula.

Na primeira parte desta tese, mostramos a fragilidade da analogia entre o tensor de Fierz e o tensor do campo eletromagnético. Na segunda parte, vimos o quanto esta variável pode ser útil, quando empregada em um contexto adequado. E o contexto adequado para o uso do formalismo de Fierz parece estar no âmbito da teoria linear do campo de spin-2; vimos que mesmo no espaço-tempo curvo este formalismo fornece uma descrição consistente para o campo de spin-2, quando a teoria é linear. Porém, o seu uso em equações não-lineares, como acontece na teoria NDL, leva a dificuldades relacionadas à simetria de calibre – o tensor de Fierz só é deixado invariante por uma transformação com um grau de liberdade (em Minkowski), enquanto que o campo de spin-2 que ele descreve, quando livre de interações, exige uma invariância de calibre com quatro graus de liberdade.

Talvez o caminho correto para se lidar com o tensor de Fierz no contexto de uma teoria não-linear seja mesmo aquele proposto anteriormente por Novello e Pinto-Neto: associá-lo à parte linear do potencial de Lanczos [39,42,46]. Outra possibilidade interessante parece ser dada pela relação

entre o formalismo de Fierz e o teleparalelismo, ainda pouco explorada [69]. Esta relação, só recentemente descoberta, oferece perspectivas para pesquisas futuras, tais como o estudo do potencial de Lanczos sob o enfoque do teleparalelismo. Como há questões ainda não bem compreendidas a respeito deste potencial – uma delas sendo sua relação com as variáveis de Ashtekar –, a entrada em cena do teleparalelismo, e da sua explicação para a origem do tensor de Fierz, que corresponde à parte linear do tensor de Lanczos, representa o advento de uma ferramenta a mais para a investigação destas questões.

Um outro programa de pesquisa que se seguiria naturalmente a este trabalho seria a investigação sistemática da possibilidade de se interpretar aquela constante que Einstein introduziu em suas equações, em 1917, como correspondendo de fato a uma massa para os grávitons. De imediato, esta possibilidade sugere um reexame da obtenção do potencial de Yukawa, para campos de vários spins, pois sua ocorrência parece estar relacionada à ausência presumida de curvatura no espaço-tempo. Como, segundo nossa hipótese, o espaço-tempo de fundo fundamental seria o de anti-de Sitter, não o de Minkowski, sua curvatura teria de ser propriamente levada em conta nesta, como noutras questões.

# Apêndices

## Apêndice A

### Identidades envolvendo o tensor de Fierz e seus invariantes

O campo eletromagnético,  $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ , obedece às seguintes identidades:

$$F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} - F_{\mu\lambda}^* F^{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2} F \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{A.1})$$

$$F_{\mu\lambda}^* F^{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{4} G \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  e  $G = F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}$ .

O tensor de Fierz também obedece a duas identidades deste tipo:

$$F_{\mu\lambda\alpha} F^{\nu\lambda\beta} - F_{\mu\lambda}^*{}^{\beta} F^{\nu\lambda}{}_{\alpha} \equiv \frac{1}{2} F_{\lambda\sigma\alpha} F^{\lambda\sigma\beta} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{A.3})$$

$$F_{\mu\lambda\alpha}^* F^{\nu\lambda\beta} + F_{\mu\lambda}^*{}^{\beta} F^{\nu\lambda}{}_{\alpha} \equiv \frac{1}{2} F_{\lambda\sigma\alpha}^* F^{\lambda\sigma\beta} \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Contraíndo  $\alpha$  e  $\beta$  nas identidades acima, encontramos:

$$F_{\mu\lambda\alpha} F^{\nu\lambda\alpha} - F_{\mu\lambda\alpha}^* F^{\nu\lambda\alpha} \equiv \frac{1}{2} A \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$F_{\mu\lambda\alpha}^* F^{\nu\lambda\alpha} \equiv \frac{1}{4} C \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $A$  e  $C$  são os invariantes  $A = F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu}$  e  $C = F_{\alpha\beta\mu}^* F^{\alpha\beta\mu}$ . Vemos que (A.5) e (A.6) são bastante semelhantes a (A.1) e (A.2). A obtenção destas identidades segue exatamente o mesmo procedimento utilizado no caso do eletromagnetismo.

Ao manipular as equações acima, são em geral úteis os seguintes fatos:

$$F_{\alpha\beta\mu}^* + F_{\beta\mu\alpha}^* + F_{\mu\alpha\beta}^* \equiv -\eta_{\alpha\beta\mu\lambda} F^{\lambda}, \quad (\text{A.7})$$

$$F_{\mu\alpha\beta}^* \equiv -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta\mu}^*, \quad (\text{A.8})$$

$$F_{\mu\lambda\alpha}^* F^{\mu\lambda\beta} \equiv F_{\mu\lambda}^*{}^{\beta} F^{\mu\lambda}{}_{\alpha}, \quad (\text{A.9})$$

$$F_{\mu\lambda\alpha}^* F^{\mu\lambda\beta} \equiv -F_{\mu\lambda}^*{}^{\beta} F^{\mu\lambda}{}^*{}_{\alpha}. \quad (\text{A.10})$$

## Apêndice B

### Cálculo do tensor de energia-momento de um campo de spin-2 sem massa no espaço-tempo plano

Seja uma lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\gamma_{\mu\nu}; \varphi_{\mu\nu}; \varphi_{\mu\nu|\alpha})$  da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa} L(U), \quad (\text{B.1})$$

onde  $L(U)$  é uma função arbitrária da variável  $U = A - B$ ,  $A = F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu}$  e  $B = F_{\alpha} F^{\alpha}$ .

O tensor de energia-momento de Noether, definido por

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha\beta|\nu}} \varphi_{\alpha\beta|\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (\text{B.2})$$

torna-se:

$$\tau_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{4\kappa} \left[ L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu} + L(U) \delta_{\mu}^{\nu} \right], \quad (\text{B.3})$$

onde

$$L_U := \frac{dL(U)}{dU}. \quad (\text{B.4})$$

A lagrangiana de Fierz-Pauli corresponde ao caso particular em que  $L(U) = U$ ; neste caso,

portanto,  $L_U = 1$ . A divergência de (B.3) nos dá:

$$\begin{aligned} 4\kappa \tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} &= - \left[ L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \right]_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu} - L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu\nu} - L(U)_{,\mu} = \\ &= - \left[ L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \right]_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu} - L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta|\mu\nu} - L_U \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\alpha\beta|\nu}} \varphi_{\alpha\beta|\nu\mu} = \\ &= - \left[ L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \right]_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu}, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv -\frac{1}{4\kappa} \left[ L_{\mathcal{L}} \cdot F^{\nu(\alpha\beta)} \right]_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta|\mu}. \quad (\text{B.5})$$

O tensor de energia-momento simétrico é definido por

$$t^{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-\gamma}\mathcal{L})}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-\gamma}\mathcal{L})}{\partial\gamma_{\mu\nu,\tau}} \right] \right\}. \quad (\text{B.6})$$

Desenvolvendo a expressão acima e levando em conta (B.1), encontramos:

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L\gamma^{\mu\nu} - 2\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} + 2\frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left( \frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\tau}} \right) + 2\Delta_{\sigma\tau}^{\sigma} \frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\tau}} \right\}. \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{1}{2}\gamma^{\sigma\lambda} (\gamma_{\lambda\alpha,\beta} + \gamma_{\lambda\beta,\alpha} - \gamma_{\alpha\beta,\lambda}). \quad (\text{B.8})$$

Vamos calcular cada um dos termos de (B.7). Em primeiro lugar, temos

$$\frac{\partial L(U)}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = L_{\mathcal{L}} \frac{\partial U}{\partial\gamma_{\mu\nu}}. \quad (\text{B.9})$$

Como

$$\begin{aligned} U &= F^{\alpha\beta\rho} F_{\alpha\beta\rho} - F^{\alpha} F_{\alpha} = \\ &= \gamma^{\alpha\varepsilon} \gamma^{\beta\lambda} \gamma^{\rho\sigma} F_{\alpha\beta\rho} F_{\varepsilon\lambda\sigma} - \gamma^{\alpha\varepsilon} F_{\alpha} F_{\varepsilon}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= - \left[ 2 F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\mu} F^{\nu} \right] + \\ &+ 2 \left( F^{\alpha\beta\rho} \frac{\partial F_{\alpha\beta\rho}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - F^{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Mas:

$$2 \left( F^{\alpha\beta\rho} \frac{\partial F_{\alpha\beta\rho}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - F^{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} \right) = F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha} + F^{\alpha\beta\rho} \frac{\partial}{\partial\gamma_{\mu\nu}} (\varphi_{\rho\alpha|\beta} - \varphi_{\rho\beta|\alpha}), \quad (\text{B.11})$$

onde usamos a relação entre o tensor de Fierz e seu potencial,

$$2 F_{\alpha\beta\rho} = \varphi_{\rho\alpha|\beta} - \varphi_{\rho\beta|\alpha} + F_{\alpha}{}^{\gamma} \gamma_{\beta\rho} - F_{\beta}{}^{\gamma} \gamma_{\alpha\rho}. \quad (\text{B.12})$$

Logo:

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = - \left[ 2 F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\mu} F^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha} + \right. \\ \left. - F^{\alpha\beta\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\mu\nu}} (\varphi_{\rho\alpha|\beta} - \varphi_{\rho\beta|\alpha}) \right]. \quad (\text{B.13})$$

Para calcularmos o último termo da expressão acima, recorremos a (B.8) e encontramos:

$$\frac{\partial \Delta_{\beta\rho}^{\lambda}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \gamma^{\lambda(\mu} \Delta_{\beta\rho}^{\nu)}. \quad (\text{B.14})$$

Como

$$\varphi_{\rho\alpha|\beta} = \varphi_{\rho\alpha, \beta} - \Delta_{\rho\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda\alpha} - \Delta_{\alpha\beta}^{\lambda} \varphi_{\rho\lambda}, \quad (\text{B.15})$$

usamos (B.14) e chegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{\mu\nu}} (\varphi_{\rho\alpha|\beta} - \varphi_{\rho\beta|\alpha}) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_{\alpha}{}^{(\mu} \Delta_{\beta\rho}^{\nu)} - \varphi_{\beta}{}^{(\mu} \Delta_{\alpha\rho}^{\nu)} \right]. \quad (\text{B.16})$$

Introduzindo (B.16) em (B.13), ficamos com:

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = - \left[ 2 F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha} - F^{\mu} F^{\nu} + \right. \\ \left. - F^{\alpha\beta\rho} \varphi_{\alpha}{}^{(\mu} \Delta_{\beta\rho}^{\nu)} \right]. \quad (\text{B.17})$$

Para encontrarmos os dois últimos termos de (B.7), precisamos calcular  $\partial L / \partial \gamma_{\mu\nu, \tau}$ :

$$\frac{\partial L(U)}{\partial \gamma_{\mu\nu, \tau}} = I_{\mathcal{U}} \frac{\partial U}{\partial \gamma_{\mu\nu, \tau}}. \quad (\text{B.18})$$

Temos:

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_{\mu\nu, \tau}} = 2 \left( F^{\alpha\beta\rho} \frac{\partial F_{\alpha\beta\rho}}{\partial \gamma_{\mu\nu, \tau}} - F^{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \gamma_{\mu\nu, \tau}} \right) = \\ = F^{\alpha\beta\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\mu\nu, \tau}} (\varphi_{\rho\alpha|\beta} - \varphi_{\rho\beta|\alpha}), \quad (\text{B.19})$$

onde usamos (B.12). Voltando a (B.8), vemos que

$$\frac{\partial \Delta_{\beta\rho}^{\lambda}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\tau}} = \frac{1}{4} \gamma^{\varepsilon\lambda} \left[ \delta_{\rho}^{\tau} (\delta_{\varepsilon}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} + \delta_{\varepsilon}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu}) + \delta_{\beta}^{\tau} (\delta_{\varepsilon}^{\mu} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\varepsilon}^{\nu} \delta_{\rho}^{\mu}) - \delta_{\varepsilon}^{\tau} (\delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\rho}^{\mu}) \right]. \quad (\text{B.20})$$

Usando (B.15) e (B.20), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\mu\nu,\tau}} (\varphi_{\rho\alpha|\beta} - \varphi_{\rho\beta|\alpha}) = & -\frac{1}{4} \left[ \varphi_{\alpha}^{\mu} (\delta_{\beta}^{\tau} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\rho}^{\tau} \delta_{\beta}^{\nu}) + \varphi_{\alpha}^{\nu} (\delta_{\beta}^{\tau} \delta_{\rho}^{\mu} + \delta_{\rho}^{\tau} \delta_{\beta}^{\mu}) + \right. \\ & - \varphi_{\alpha}^{\tau} (\delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\rho}^{\mu}) - \varphi_{\beta}^{\mu} (\delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\rho}^{\tau} \delta_{\alpha}^{\nu}) + \\ & \left. - \varphi_{\beta}^{\nu} (\delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\rho}^{\mu} + \delta_{\rho}^{\tau} \delta_{\alpha}^{\mu}) + \varphi_{\beta}^{\tau} (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\rho}^{\nu} + \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\rho}^{\mu}) \right], \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

de tal forma que (B.19) nos dá:

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_{\mu\nu,\tau}} = \frac{1}{2} \left[ F^{\cdot\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}^{\tau} - F^{\cdot\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}^{\nu} - F^{\cdot\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}^{\mu} \right]. \quad (\text{B.22})$$

Introduzindo agora (B.17) e (B.22) em (B.7), tendo em conta (B.9) e (B.18), encontramos a seguinte expressão para  $t^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = & \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L(U) \gamma^{\mu\nu} + 2L_U \left( 2F^{\cdot\mu\alpha\beta} F^{\cdot\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha} - F^{\mu} F^{\nu} \right) - 2L_U F^{\alpha\beta\rho} \varphi_{\alpha}^{(\mu} \Delta_{\beta\rho}^{\nu)} + \right. \\ & \left. + \Delta_{\sigma\tau}^{\sigma} L_U \left( F^{\cdot\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}^{\tau} - F^{\cdot\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}^{\nu} - F^{\cdot\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}^{\mu} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left[ L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}^{\nu} - F^{\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}^{\mu} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} & \left[ L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}^{\nu} - F^{\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}^{\mu} \right) \right]_{|\tau} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left[ L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}^{\nu} - F^{\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}^{\mu} \right) \right] + \\ & + \Delta_{\lambda\tau}^{\tau} L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}^{\lambda} - F^{\alpha(\lambda\mu)} \varphi_{\alpha}^{\nu} - F^{\alpha(\lambda\nu)} \varphi_{\alpha}^{\mu} \right) + \\ & + L_U F^{\alpha(\lambda\tau)} \varphi_{\alpha}^{(\mu} \Delta_{\lambda\tau}^{\nu)}. \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

Comparando (B.23) com (B.24), obtemos nosso resultado final para o tensor de energia-momento simétrico:

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L(U)\gamma^{\mu\nu} + 2L_U \left( 2F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\mu} F^{\nu} \right) + \right. \\ \left. + \left[ L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right) \right]_{|\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Vamos agora calcular a divergência de  $t^{\mu\nu}$ . A equação (B.12) nos dá:

$$\varphi^{\beta[\mu|\alpha]} = 2F^{\mu\alpha\beta} - F^{\mu} \gamma^{\alpha\beta} + F^{\alpha} \gamma^{\mu\beta}, \quad (\text{B.26})$$

logo:

$$\varphi^{\beta[\mu|\alpha]} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} = 2F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} - F^{\mu} F^{\nu} - F_{\alpha} F^{\alpha\nu\mu}. \quad (\text{B.27})$$

Temos também que

$$\varphi^{\mu[\alpha|\beta]} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} = 2F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - 2F_{\alpha} F^{\alpha\mu\nu}. \quad (\text{B.28})$$

Multiplicando (B.27) por dois e somando a (B.28), encontramos:

$$\begin{aligned} 2\varphi^{\beta[\mu|\alpha]} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + \varphi^{\mu[\alpha|\beta]} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} = \\ = 2 \left( 2F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} - F^{\alpha(\mu\nu)} F_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\mu} F^{\nu} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Podemos então reescrever (B.25) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L(U)\gamma^{\mu\nu} + L_U \left( 2\varphi^{\beta[\mu|\alpha]} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + \varphi^{\mu[\alpha|\beta]} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} \right) + \right. \\ \left. + \left[ L_U \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right) \right]_{|\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Continuando a desenvolver o segundo termo de (B.30), vemos que:

$$\begin{aligned} L_U \left( 2\varphi^{\beta[\mu|\alpha]} F^{\nu}{}_{\alpha\beta} + \varphi^{\mu[\alpha|\beta]} F_{\alpha\beta}{}^{\nu} \right) = \\ = L_U \left( -F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta}{}^{\mu} - 2F^{\alpha(\beta\nu)} \varphi^{\mu}{}_{\beta|\alpha} \right) = \\ = -L_U F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta}{}^{\mu} + 2 \left( L_U F^{\alpha(\beta\nu)} \right)_{|\alpha} \varphi^{\mu}{}_{\beta} - 2 \left( L_U F^{\alpha(\beta\nu)} \varphi^{\mu}{}_{\beta} \right)_{|\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Chegamos, assim, a:

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L(U)\gamma^{\mu\nu} - L_{\mathcal{L}} F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta}{}^{|\mu} + 2 \left( L_{\mathcal{L}} F^{\alpha(\beta\nu)} \right)_{|\alpha} \dot{\varphi}^{\mu}{}_{\beta} - 2 \left( L_{\mathcal{L}} F^{\alpha(\beta\nu)} \varphi^{\mu}{}_{\beta} \right)_{|\alpha} + \right. \\ \left. + \left[ L_{\mathcal{L}} \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\alpha(\tau\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right) \right]_{|\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

ou seja:

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\{ -L(U)\gamma^{\mu\nu} - L_{\mathcal{L}} F^{\nu(\alpha\beta)} \varphi_{\alpha\beta}{}^{|\mu} + 2 \left( L_{\mathcal{L}} F^{\alpha(\beta\nu)} \right)_{|\alpha} \varphi_{\beta}{}^{\mu} + \right. \\ \left. + \left[ L_{\mathcal{L}} \left( F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\tau} - F^{\alpha(\tau\mu)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - 3 F^{\tau\nu\alpha} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right) \right]_{|\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Voltando a (B.3), reconhecemos o tensor de energia-momento de Noether em (B.33):

$$t^{\mu\nu} \equiv \gamma^{\mu\lambda} \tau_{\lambda}{}^{\nu} + \frac{1}{2\kappa} \left( L_{\mathcal{L}} F^{\alpha(\beta\nu)} \right)_{|\alpha} \varphi_{\beta}{}^{\mu} + \theta^{\mu\nu\lambda}{}_{|\lambda}, \quad (\text{B.34})$$

onde

$$\theta^{\mu\nu\lambda} := \frac{1}{4\kappa} L_{\mathcal{L}} \left[ F^{\alpha(\mu\nu)} \varphi_{\alpha}{}^{\lambda} - F^{\alpha(\mu\lambda)} \varphi_{\alpha}{}^{\nu} - 3 F^{\lambda\nu\alpha} \varphi_{\alpha}{}^{\mu} \right]. \quad (\text{B.35})$$

Como  $\theta^{\mu\nu\lambda}$  é anti-simétrico em  $\nu\lambda$ , a divergência de (B.34) nos dá:

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \tau_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} + \frac{1}{2\kappa} \left[ \left( L_{\mathcal{L}} F^{\alpha(\beta\nu)} \right)_{|\alpha} \varphi_{\beta\mu} \right]_{|\nu}. \quad (\text{B.36})$$

Comparando com (B.5), encontramos a seguinte identidade:

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{|\nu} \equiv \frac{1}{4\kappa} \left\{ 2 \left[ \left( L_{\mathcal{L}} F^{\alpha(\beta\nu)} \right)_{|\alpha} \varphi_{\beta\mu} \right]_{|\nu} - \left( L_{\mathcal{L}} F^{\nu(\alpha\beta)} \right)_{|\nu} \varphi_{\alpha\beta}{}^{|\mu} \right\}. \quad (\text{B.37})$$

## Apêndice C

### O campo gravitacional estático de simetria esférica no vácuo segundo o formalismo PPN

A forma geral do campo gravitacional estático, esféricamente simétrico, no vácuo, em qualquer teoria métrica da gravitação, pode ser dada, na aproximação até  $O(r^{-2})$ , em função de apenas três parâmetros. Vamos apresentá-la em três diferentes sistemas de coordenadas (com uma escolha de unidades tal que  $G = c = 1$ ):

a) *Coordenadas tipo Schwarzschild*  $(t, r, \theta, \phi)$ :

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{2M}{r} - 2(\gamma - \beta) \frac{M^2}{r^2} \right\} dt^2 + \\ - \left\{ 1 + 2\gamma \frac{M}{r} + 4\delta \frac{M^2}{r^2} \right\} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{C.1})$$

b) *Coordenadas isotrópicas esféricas*  $(t, \rho, \theta, \phi)$ :

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{2M}{\rho} + 2\beta \frac{M^2}{\rho^2} \right\} dt^2 + \\ - \left\{ 1 + 2\gamma \frac{M}{\rho} + \frac{1}{2} (4\delta - \gamma^2) \frac{M^2}{\rho^2} \right\} \left[ d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (\text{C.2})$$

c) *Coordenadas isotrópicas euclidianas*  $(t, x, y, z)$ :

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{2M}{\rho} + 2\beta \frac{M^2}{\rho^2} \right\} dt^2 + \\ - \left\{ 1 + 2\gamma \frac{M}{\rho} + \frac{1}{2} (4\delta - \gamma^2) \frac{M^2}{\rho^2} \right\} \left[ dx^2 + dy^2 + dz^2 \right], \quad (\text{C.3})$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (\text{C.4})$$

A lei de transformação entre os sistemas de coordenadas (a) e (b) é dada por:

$$r = \rho \left\{ 1 + \gamma \frac{M}{\rho} + \frac{4\delta - 3\gamma^2}{4} \frac{M^2}{\rho^2} \right\}, \quad (\text{C.5})$$

$$\rho = r \left\{ 1 - \gamma \frac{M}{r} - \frac{4\delta - 3\gamma^2}{4} \frac{M^2}{r^2} \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Os parâmetros PPN  $\beta$  e  $\gamma$  são definidos em relação ao sistema de coordenadas (c). O parâmetro  $\delta$  ultrapassa o âmbito de validade do formalismo PPN. Na relatividade geral, temos  $\beta = \gamma = \delta = 1$ .

## Apêndice D

### Componentes da conexão métrica de Minkowski em coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas  $(ct, r, \theta, \phi)$ , a métrica de Minkowski tem a seguinte forma:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

A conexão métrica é definida por

$$\Delta_{\mu\nu}^{\lambda} := \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon\mu, \nu} + \gamma_{\varepsilon\nu, \mu} - \gamma_{\mu\nu, \varepsilon}), \quad (\text{D.2})$$

e suas componentes não-nulas são:

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^2 &= \Delta_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Delta_{13}^3 &= \Delta_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Delta_{22}^1 &= -r \\ \Delta_{23}^3 &= \Delta_{32}^3 = \cotg \theta \\ \Delta_{33}^1 &= -r \text{sen}^2 \theta \\ \Delta_{33}^2 &= -\text{sen} \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

# **Bibliografia**

- 1) Feynmann, R. P., *Feynmann Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
- 2) Yukawa, H., *On the interaction of elementary particles*, Pro. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48-54 (1935).
- 3) Kraichnan, R. H., *Special-relativistic derivation of generally covariant gravitation theory*, Phys. Rev. **98**, 4, 1118-1122 (1955).
- 4) Gupta, S. N., *Gravitation and electromagnetism*, Phys. Rev. **96**, 1683-1685 (1955).
- 5) Thirring, W. E., *An alternative approach to the theory of gravitation*, Ann. Phys. **16**, 96 (1961).
- 6) Weinberg, S., *Derivation of gauge invariance and the Equivalence Principle from Lorentz invariance of the S-matrix*, Phys. Lett. **9**, 4, 357-359 (1964).
- 7) Weinberg, S., *Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass*, Phys. Rev. **135**, 4B, B1049-B1056 (1964).
- 8) Weinberg, S., *Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of the Maxwell's and Einstein's equations*, Phys. Rev. **138**, B988-B1002 (1965).
- 9) Ogievetsky, V. I. e Polubarinov, I. V., *Interacting field of spin 2 and the Einstein equations*, Ann. Phys. **35**, 167-208 (1965).
- 10) Einstein, A., *Os fundamentos da teoria da relatividade geral* (em alemão), Annalen der Physik **49**, 769-822 (1916); traduzido para o português em *O Princípio da Relatividade*, Fundação Calouste Gulbenkian, Porto, 1989.

- 11) Einstein, A., *The meaning of relativity*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 5<sup>th</sup> Edition, 1988.
- 12) Grischuck, L. P., Petrov, A. N. e Popova, A. D., *Exact theory of the (Einstein) gravitational field in an arbitrary background space-time*, Commun. Math. Phys. **94**, 379 (1984).
- 13) Deser, S., *Self-interaction and gauge invariance*, Gen. Rel. Grav. **1**, 9-18 (1970).
- 14) Wald, R. M., *Spin-two fields and general covariance*, Phys. Rev. **D 33**, 12, 3613-3625 (1986).
- 15) Anderson, J. L., *Principles of Relativistic Physics*, Academic Press, New York, 1967.
- 16) Hindawi, A., Ovrut, B. A. e Waldram, D., *Consistent spin-two coupling and quadratic graviton*, Phys. Rev. **D 53**, 10, 5583-5596 (1996); hep-th/9509142.
- 17) Will, C. M., *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- 18) Will, C. M., *The confrontation between general relativity and experiment: a 1998 update*; gr-qc/9811036.
- 19) Will, C. M., *Gravitational radiation and the validity of general relativity*, Physics Today, outubro de 1999, 38-43.
- 20) Damour, T., *Experimental tests of relativistic gravity*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **80**, 41-50 (2000); gr-qc/9904057.
- 21) Damour, T., *Questioning the equivalence principle*; gr-qc/0109063.
- 22) Brans, C. e Dicke, R. H., *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- 23) Rosen, N., *A bimetric theory of gravitation*, J. Gen. Rel. Grav. **4**, 435 (1973).
- 24) Salim, J. M. e Sautú, S. L., *Gravitational theory in Weyl Integrable Space-Time*, Class. Quantum Grav. **13**, 353-360 (1996).
- 25) Sautú, S. L., *Teoria da Gravitação no Espaço-Tempo de Weyl Integrável*. Tese de doutorado, CBPF, Rio de Janeiro, RJ, 1997.

- 26) Oliveira, L. A., *Acoplamento Não Mínimo com a Gravitação e Espaços de Weyl Integráveis*. Tese de doutorado, CBPF, Rio de Janeiro, RJ, 1988.
- 27) Novello, M. e Heintzmann, H., *Weyl Integrable ST.: A model of cosmos?*, Phys. Lett. A **98**, 10-11 (1983).
- 28) Novello, M. e Oliveira, L. A., *Non-minimal interaction of gravity with other physical fields: an overview*, Rev. Bras. Fís. **17**, 3, 432-455 (1987).
- 29) Deser, S. e Laurent, B. E., *Gravitation without self-interaction*, Ann. Phys. **50**, 76 (1968).
- 30) Bollini, C. G., Giambiagi, J. J. e Tiomno, J., *A linear theory of gravitation*, Lett. Nuovo Cimento **III**, 65 (1970).
- 31) Deser, S. e von Nieuwennhuizen, P., *One loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields*, Phys. Rev. D **10**, 401 (1974).
- 32) Kuchar, K., *Canonical methods of quantization*, em *Quantum Gravity II*, Isham, C. J., Penrose, R. e Sciama, D. W. (Eds.), Clarendon Press, Oxford, 1981.
- 33) Ashtekar, A., *Self-duality and spinorial techniques in the canonical approach to quantum gravity*, em *Quantum Concepts in Space and Time*, Isham, C. J. e Penrose, R. (Eds.), Clarendon Press, Oxford, 1986.
- 34) Ashtekar, A., *New Hamiltonian formulation of general relativity*, Phys. Rev. D **36**, 1587 (1987).
- 35) Jordan, P., Ehlers, J. e Sacks, R., *Exact solutions of the field equations of general relativity II: Contributions to the theory of pure gravitational radiation*, Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math. – Nat. Kl. **1**, 3 (1961).
- 36) Lichnerowicz, A., *Onde et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale*, Ann. Mat. Pura Appl. **50**, 1 (1960).
- 37) Fierz, M. e Pauli, W., *On relativistic field equations of particles with arbitrary spin in an electromagnetic field* (em alemão), Helv. Phys. Acta **12**, 297-300 (1939).
- 38) Fierz, M. e Pauli, W., *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. A **173**, 211-232 (1939).

- 39) Pinto-Neto, N., *Teoria da Gravitação em Termos das Variáveis de Fierz-Lanczos*. Tese de doutorado, CBPF, Rio de Janeiro, RJ, 1989.
- 40) de Freitas, L. R., *Campos de Spin-2, Variáveis Fundamentais: A Proposta de Fierz*. Tese de doutorado, CBPF, Rio de Janeiro, RJ, 1991.
- 41) De Lorenci, V. A., *Uma Nova Classe de Teorias do Campo Gravitacional*. Tese de doutorado, CBPF, Rio de Janeiro, RJ, 1997.
- 42) Novello, M. e Pinto-Neto, N., *A modified theory of gravity*, CBPF-NF-002-87 (1987).
- 43) Lanczos, C., *The splitting of the Riemann tensor*, Rev. Mod. Phys. **34**, 379 (1962).
- 44) Bampi, E. e Caviglia, G., *Third-order tensor potentials for the Riemann and Weyl tensors*, Gen. Rel. Grav. **15**, 375 (1983).
- 45) Novello, M., *Lanczos potential and Jordan theory of gravity*, CBPF-NF-054-83 (1983).
- 46) Novello, M. e Pinto-Neto, N., *Einstein's theory of gravity in Fierz variables*, CBPF-NF-012-88 (1988).
- 47) Novello, M., de Freitas, L. R., Pinto-Neto, N. e Svaiter, N. F., *Quantization of spin-two fields in terms of Fierz variable – The linear case*, Fortsch. Phys. **40**, 195-209 (1992).
- 48) Born, M. e Infeld, L., *Cosmic rays and the new field theory* Nature **133**, 63 (1934).
- 49) Born, M. e Infeld, L., *Foundatins of the new theory of gravity*, Proc. Roy. Soc. A **144**, 425 (1934).
- 50) Born, M., *Modified field equations with a finite radius of the electron* Nature **132**, 282 (1933).
- 51) Born, M., *On the quantum theory of the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. A **143**, 410 (1934).
- 52) Novello, M., De Lorenci, V. A. e de Freitas, L. R., *Do gravitational waves travel at light velocity?*, Ann. Phys. **254**, 1, 83-108 (1997).
- 53) Novello, M., *A field theory of gravity*, em *IX Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, Novello, M. (Ed.), Atlantica, 2000.

- 54) Novello, M., De Lorenci, V. A., Salim, J. M. e Klippert, R., *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. **D 61**, 45001 (2000); gr-qc/9911085.
- 55) De Lorenci, V. A., Klippert, R., Novello, M. e Salim, J. M., *Light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Lett. **B 482**, 134 (2000); gr-qc/0005049.
- 56) De Lorenci, V. A., Klippert, R., *Analog gravity from electrodynamics*, em *Inquiring the Universe – Essays to celebrate Professor Mário Novello jubilee*, Salim, J. M., Perez Bergliaffa, S., Oliveira, L. A. e De Lorenci, V. A. (Eds.), Frontier Group, 2003.
- 57) Novello, M., De Lorenci, V. A., de Freitas, L. R. e Aguiar, O. D., *The velocity of gravitational waves*, Phys. Lett. **A 254**, 245-250 (1999); gr-qc/0002093.
- 58) Perez Bergliaffa, S., *Propagation of perturbations in non-linear spin-2 theories*, em *Inquiring the Universe – Essays to celebrate Professor Mário Novello jubilee*, Salim, J. M., Perez Bergliaffa, S., Oliveira, L. A. e De Lorenci, V. A. (Eds.), Frontier Group, 2003; gr-qc/0302031.
- 59) Novello, M., Mosquera Cuesta, H. J. e De Lorenci, V. A., *Birrefringence of gravitational waves*, CBPF-NF-039-00 (2000).
- 60) Novello, M., Perez Bergliaffa, S. e Hibberd, K. E., *Analysis of static and spherically-symmetric solutions in NDL theory of gravitation*; gr-qc/0209053.
- 61) Novello, M. e De Lorenci, V. A., *The binary pulsar is not the ultimate test for the theory of gravity*, CBPF-NF-025-97 (1997); gr-qc/9704025.
- 62) Aragone, C. e Deser, S., *Constraints on gravitationally coupled tensor fields*, Nuovo Cimento **3**, 4, 709 (1971).
- 63) Aragone, C. e Deser, S., *Consistency problems of hypergravity*, Phys. Lett. **B 86**, 161 (1979).
- 64) Aragone, C. e Deser, S., *Consistency problems of spin-2 gravity coupling*, Nuovo Cimento **B 57**, 33-49 (1980).
- 65) Cutler, C. e Wald, R. M., *A new type of gauge invariance for a collection of massless spin-2 fields. 1. Existence and uniqueness*, Class. Quantum Grav. **4**, 1267 (1987).
- 66) Boulanger, N., Damour, T., Gualtieri, L. e Henneaux, M., *Inconsistency of interacting, multi-graviton theories*, Nucl. Phys. **B 597**, 127-171 (2001); hep-th/0007220.

- 67) Buchbinder, I. L., Gitman, D. M., Krykhtin, V. A. e Perskin, V. D., *Equations of motion for massive spin 2 field coupled to gravity*, Nucl. Phys. **B 584**, 615-640 (2000); hep-th/9910188.
- 68) Novello, M. e Neves, R. P., *Spin-2 field theory in curved spacetime in the Fierz representation*, Class. Quantum Grav. **19**, 5335-5351 (2002); gr-qc/0204058.
- 69) Obukhov, Yu. N. e Pereira, J. G., *Teleparallel origin of the Fierz picture for spin-2 particle*, Phys. Rev. **D 7**, 44008 (2003); gr-qc/0212078.
- 70) Novello, M. e Neves, R. P., *The mass of the graviton and the cosmological constant*, Class. Quantum Grav. **20**, L67-L73 (2003); gr-qc/0210058.
- 71) Deser, S. e Waldron, A., *Stability of massive cosmological gravitons*, Phys. Lett. **B 508**, 347-353 (2001); hep-th/0103255.
- 72) Garidi, T., Gazeau, J-P. e Takook, M. V., *"Massive" spin-2 field in the de Sitter space*, J. Math. Phys. **44**, 3838-3862 (2003); hep-th/0302022.
- 73) Gabriel, C. e Spindel, P., *Massive spin-2 propagators on de Sitter space*, J. Math. Phys. **38**, 622-638 (1997); hep-th/9912054.
- 74) Bergmann, P. G., *Comments on the scalar-tensor theory*, Int. J. Theor. Phys. **1**, 1, 25-36 (1968).
- 75) Freund, P. G. O., Maheshwari, A. e Schonberg, E., *Finite-range gravitation*, Astrophys. J. **157**, 857-867 (1969).
- 76) Treder, H.-J., *On the question of a cosmological rest-mass of gravitons*, Int. J. Theor. Phys. **1**, 2, 167-169 (1968).
- 77) Faraoni, V. e Cooperstock, F. I., *When a mass term does not represent a mass*, Eur. J. Phys. **19**, 419-423 (1998); physics/9807056.
- 78) Goldhaber, A., S., e Nieto, M. M., *Mass of the graviton*, Phys. Rev. **D 9**, 4, 1119-1121 (1974).
- 79) Einstein, A., *Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral* (em alemão), Sitzungsber. Press. Akad. Wiss. (Math. Phys.) 142-152 (1917); traduzido para o português em *O Princípio da Relatividade*, Fundação Calouste Gulbenkian, Porto, 1989.
- 80) Adler, R., Bazin, M. e Schiffer, M., *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York, 1975.

- 81) Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- 82) Newton, I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1686; traduzido para o inglês em *Great Books of the Western World*, 2<sup>nd</sup> Edition, Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1990.
- 83) Einstein, A., *Sobre a influência da gravidade na propagação da luz* (em alemão), *Annalen der Physik* **35**, 898-908 (1911); traduzido para o português em *O Princípio da Relatividade*, Fundação Calouste Gulbenkian, Porto, 1989.
- 84) Misner, C. W., Thorne, K. S. e Wheeler, J. A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- 85) Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, 1923. Republicado pela Dover (1952).
- 86) Landau, L. D. e Lifshitz, E. M., *the Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
- 87) Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- 88) Rainich, G. Y., *Electrodynamics in the general relativity theory*, *Trans. Am. Math. Soc.* **27**, 106 (1925).
- 89) Gazeau, J.-P. e Hans, M., *Integral-spin fields on  $(3+2)$ -de Sitter space*, *J. Math. Phys.* **29**, 12, 2533-2552 (1988).

# **“CONTRIBUIÇÃO À TEORIA DO CAMPO DE SPIN-2 SEGUNDO O FORMALISMO DE FIERZ”**

***Ronaldo Penna Neves***

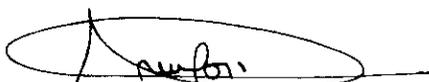
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Ministério da Ciência e Tecnologia, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



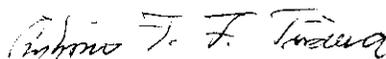
Mário Novello – Presidente/Orientador



Ruben Aldrovandi



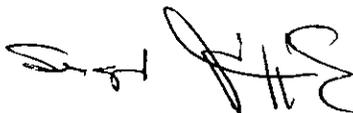
Vitório Alberto de Lorenci



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Luiz Alberto Rezende de Oliveira



Sérgio Joffily – Suplente

Rio de Janeiro, 03 de fevereiro de 2004

