

*Dissertação de Mestrado*

Quântização do Modelo de Minisuperespaço de  
Friedmann-Robertson-Walker Permeado por  
Poeira e Radiação via Interpretação Causal da  
Mecânica Quântica

FELIPE TOVAR FALCIANO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RUA DR. XAVIER SIGAUD 150, RIO DE JANEIRO - RJ

ABRIL DE 2004

ORIENTADOR: NELSON PINTO-NETO

# Conteúdo

|   |           |
|---|-----------|
| Agradecimentos . . . . .  | iii       |
| Resumo . . . . .  | v         |
| Abstract . . . . .  | vi        |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2 Fundamentação Teórica</b>                                      | <b>5</b>  |
| 2.1 Sistemas Hamiltonianos Vinculados . . . . .                     | 5         |
| 2.2 Teoria Quântica Não-Relativística . . . . .                     | 19        |
| 2.3 Formulação Hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral . .     | 28        |
| 2.4 Descrição de Fluidos através de Potencial-Velocidade . . . . .  | 42        |
| <b>3 Modelo de Friedmann-Robertson-Walker com poeira e radiação</b> | <b>53</b> |
| <b>4 Comentários e análise</b>                                      | <b>76</b> |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>79</b> |

# Agradecimentos

Seria muita presunção minha querer receber sozinho todos os créditos por este trabalho de tese. Tanto na área profissional quanto nos relacionamentos pessoais, tenho débitos enormes pelos conselhos que recebi ao longo destes curtos dois anos de mestrado. Certamente o resultado deste trabalho é um acúmulo de todos os ensinamentos que adiquiri durante toda a minha vida, e por isso não posso deixar de citar, mesmo que “ en passant”, os meus antigos professores aqui representados pela Guta, Tião e Isabel.

No âmbito do grupo de cosmologia do cbpf encontrei um ambiente estimulante e altamente produtivo, onde o intercâmbio acadêmico é bastante valorizado. Os “pequeno-seminários” realizados religiosamente as sextas-feira (desde que o professor Mário Novello esteja no Rio), foi o meu primeiro contato com a prática de fazer ciência. Nestes momentos pude participar ao mesmo tempo tanto como integrante quanto como observador. Observador por me sentir como um aprendiz ao assistir as exposições e ao ser confrontado com as questões levantadas nas discussões, e integrante pela abertura a participação tanto sendo requisitado a expor meus trabalhos em andamento quanto a opinar sobre o trabalho de outros. Certamente o meu mestrado não teria sido tão proveitoso sem as inúmeras e frutíferas discussões com o Érico, Dudu, Emanuel, André, Nilton, Fabrício, Rafael, etc. Porém é à Nelson Pinto Neto, meu orientador, que gostaria de fazer uma homenagem especial. Além de ser um exímio pesquisador é uma pessoa excepcional, por

quem tenho admiração e respeito.

À minha família devo muito mais do que o apoio e incentivo aos meus estudos. Eles são o meu suporte para todos os desafios da vida. Cada um do seu jeito, sempre me influenciaram, até mais do que eles podem avaliar. Minha mãe, Mônica, sempre de prontidão para qualquer situação, tanto nos casos de emergência quanto nos momentos onde apenas um ouvido resolve o caso. Meu pai, Silverio, não diz tudo que pensa, mas com o passar dos anos aprendi a interpretá-lo e sei que posso contar com ele para tudo. Minha irmã, Carla, tem se tornado cada vez mais minha companheira, e espero que nos aproximemos cada vez mais. Meu irmão, Bruno, e sua esposa, Gabriella, sempre ótimas companhias que considero além de tudo como grandes amigos.

A meus camaradas de toda hora agradeço principalmente pelos momentos de alegria. Ao pessoal da velha guarda, como Marquinhos e Bello, obrigado pela paciência; amizade como a nossa é difícil de encontrar. Ao pessoal da Puc e companheiras – Carica, Rafaelzinho, Marcão, Zé, Pedro, Ludi, Aline, Maria Clara, etc. – certamente a vida seria bem menos divertida e alegre sem os clássicos encontros de chopinhos e churrascos, sem falar nas viagens onde sempre alguma coisa acontece.

Para finalizar, gostaria de agradecer ao CNPq pela bolsa de estudo durante todo o primeiro ano de mestrado, e à FAPERJ por ter sido agraciado com uma bolsa de estudo especial para o segundo ano de mestrado.

# Resumo

Neste trabalho aplicamos a formulação causal da mecânica quântica a gravitação utilizando como modelo de universo o de Friedmann-Robertson-Walker permeado por radiação e poeira.

Pretende-se assim caminhar para um possível modelo não-singular para o universo, ou seja, um universo que não tenha tido um início, como o modelo do Big Bang. Ultimamente o interesse em tais modelos cosmológicos tem se intensificado.

Depois de descrever as teorias fundamentais utilizadas neste estudo, a saber, a teoria da Relatividade de Einstein incluindo a sua formulação hamiltoniana, o que inclui sistemas hamiltonianos com vínculos, teoria quântica do movimento (interpretação de Bohm), e descrição de fluidos através de potenciais para a quadri-velocidade, encontramos a solução formal da equação de Schrödinger para os casos de seção espacial plana ( $k = 0$ ) e seção espacial com curvatura positiva ( $k = 1$ ). Em cada um dos casos, resolvemos as equações dinâmicas para exemplos particulares de função de onda, e analisamos a evolução do fator de escala assim como o comportamento de todo o sistema.

# Abstract

We explore the possibility of avoiding the initial singularity by means of quantum effects in a Friedmann–Robertson–Walker universe filled with dust and radiation. The hypothesis of homogeneity and isotropy leads to a minisuperspace model with finite degrees of freedom. The causal interpretation of quantum mechanics is applied to quantize this system. We first present the main topics of the basic theories used, and then solve the Schrödinger equation for the flat and positive curvature cases. For each one of them we develop specific examples and then analyse the evolution of the systems.

# Capítulo 1

## Introdução

O início do século XX foi marcado por duas revoluções no âmbito da ciência. A física clássica se mostrou imprecisa através de dois caminhos completamente distintos. Por um lado, a teoria da Relatividade de Albert Einstein nos ensinou uma nova percepção do espaço e do tempo, fundindo-os no conceito de espaço-tempo. Através de sua teoria passamos a entender a força da gravidade como um efeito devido ao fato do espaço-tempo ser curvo. Durante este mesmo período, uma legião de notáveis cientistas estabeleceram os fundamentos da mecânica quântica. No desenvolvimento da mecânica quântica relativística, ou seja, na compatibilização entre relatividade restrita e mecânica quântica, foram conseguidos alguns dos resultados mais precisos já alcançados na física.

Uma vez quântizadas três das interações fundamentais da natureza, a saber, a força forte, a fraca e a eletromagnética, restava quantizar a gravitação descrita pela teoria da relatividade geral de Einstein. Os esforços começaram ainda no final da década de 40 e se prolongaram por toda a segunda metade do século XX, chegando este a ser considerado o problema mais fundamental da Física teórica da época.

A dificuldade em se compatibilizar a gravitação com a mecânica quântica não é meramente técnico-matemática. Ao contrário, o maior desafio consiste

em lidar com as estruturas lógicas e descrições propostas pelas teorias, de modo a harmonizar conceitualmente as duas linhas teóricas. Questões fundamentais que, pelo sucesso experimental na faixa de energias e velocidades atualmente alcançáveis, haviam sido deixadas de lado, agora precisam ser revistas com um novo enfoque, mais crítico e consistente.

É certo que ainda não alcançamos uma teoria satisfatória para a gravitação quântica, mas vários frutos já foram colhidos. Os esforços de P.G. Bergmann [5]-[6], P.A.M. Dirac [7], R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner [25] culminaram no desenvolvimento de uma teoria geral para sistemas hamiltonianos vinculados e, posteriormente, em uma formulação hamiltoniana consistente para a teoria da Relatividade Geral. A partir daí, a quantização canônica da Teoria da Relatividade Geral ganhou força levando aos trabalhos de J.A. Wheeler [37] e B.S. DeWitt [38], onde se estabeleceu a equação básica que deve governar a função de onda quântica gravitacional (equação de Wheeler- DeWitt).

No entanto, tal equação é extremamente difícil de se resolver. Ela apresenta problemas de ordenamento de operadores quânticos, além de levantar questões conceituais importantes como, por exemplo, sobre o que é tempo em gravitação quântica, conceito ainda hoje em aberto. Estas questões são ainda mais críticas ao querer se propor sua aplicação à cosmologia, ramo conhecido como cosmologia quântica. Nesta linha de pesquisa, a interpretação ortodoxa da mecânica quântica, a saber, a interpretação de Copenhague, não faz sentido, o que nos obriga a estudar novas interpretações.

Existem vários motivos para se estudar cosmologia quântica. Dentre outros, espera-se poder testar se a singularidade inicial do universo pode ser evitada por efeitos quânticos, tentar extrair informações sobre as condições iniciais do universo, e comparar o espectro teórico das densidades de perturbação com os resultados experimentais atuais. De fato, devido ao recente avanço tecnológico, esta área do conhecimento passa pela sua época áurea.

Pela primeira vez, dados experimentais vindos de satélites com alta precisão têm possibilitado testar modelos teóricos e a comunidade científica espera assim alcançar grandes avanços a partir dos dados observacionais.

Existem basicamente duas abordagens amplamente distintas para se tentar quantizar a gravitação. Um dos caminhos se aproxima mais das técnicas usuais da teoria de campos. Assume-se uma geometria de fundo, geralmente Minkowski, e considera-se que a gravitação é descrita por um campo dinâmico sobre o fundo fixo, o qual é quantizado. A esta abordagem costuma-se chamar de gravidinâmica quântica. A outra linha de estudo, chamada de geometrodinâmica quântica, segue a interpretação de Einstein em considerar a gravitação como uma resposta cinemática da geometria do espaço-tempo. Devido à grande dificuldade em operacionalizar este procedimento, o estudo de geometrias com alto grau de simetria é utilizado para trazer à luz questões referentes ao processo de quantização. Em geral, é escolhida uma geometria com simetrias específicas, e assume-se que estas simetrias são preservadas durante o processo de quantização.

A evolução da geometrodinâmica quântica é descrita a partir do que se convencionou chamar de superespaço: o espaço composto por todas as configurações de tri-geometrias possíveis. Um sub-espaço do superespaço, chamado por Misner de minisuperespaço, é a superfície composta por todas as métricas cujas propriedades de simetria fazem com que o número de graus de liberdade se reduzam a um número finito, simplificando enormemente o problema. É certo que adotar estas simetrias antes da quantização não nos levará a uma teoria quântica completa para a gravitação. Porém, se assumirmos que podemos expandir uma dada métrica usando como parâmetro de expansão as suas anisotropias espaciais, podemos interpretar estes modelos de minisuperespaço como uma primeira aproximação de um resultado advindo de uma teoria completa de gravitação quântica.

Neste trabalho, consideramos o universo de Friedmann-Robertson-Walker

(FRW) permeado por poeira e radiação como a geometria a ser quantizada. Devido ao modelo ser homogêneo e isotrópico, recaímos no estudo de mini-superespaços, onde o problema se reduz a apenas dois graus de liberdade no espaço de fase, um sendo o fator de escala e o outro associado ao campo de velocidade da matéria, ou da radiação, dependendo da gauge escolhida.

No próximo capítulo, apresentamos uma introdução dos fundamentos e os resultados mais relevantes de algumas das teorias que foram utilizadas no trabalho e, no capítulo subsequente, os resultados propriamente ditos. O último capítulo é reservado para alguns comentários e possíveis avanços futuros.

## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

### 2.1 Sistemas Hamiltonianos Vinculados

Na tentativa de construir uma formulação hamiltoniana para a teoria da Relatividade Geral, devido ao fato de ser uma teoria invariante por reparametrização arbitrária, surgem naturalmente vínculos entre as variáveis canônicas. Desta maneira se faz necessário estudar o método desenvolvido por P.A.M Dirac [3], no início da década de 50, para tratar sistemas hamiltonianos vinculados.

Apesar do formalismo hamiltoniano ser completo, no sentido de ser equivalente e independente do formalismo lagrangeano, é comum construí-lo a partir de uma lagrangeana. Seguiremos este mesmo caminho.

Estamos interessados em casos onde os momenta não são todos funções independentes das velocidades generalizadas. Desta forma surgem naturalmente vínculos que são traduzidos em equações relacionando as coordenadas e os momenta

$$\phi_m(q, p) = 0. \quad (2.1)$$

Estas equações são chamadas de vínculos primários<sup>1</sup>(terminologia usada pelo próprio Dirac), ou seja, os vínculos oriundos da própria definição dos

---

<sup>1</sup>Hoje em dia já existem refinamentos a esta terminologia, porém não são relevantes para esta exposição [1]-[2]

momenta ( $p \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ). Daqui a pouco definiremos precisamente a diferença entre vínculos primários e secundários.

Devido aos vínculos (2.1) a hamiltoniana definida por

$$H(q, p) \doteq [p\dot{q} - L(q, \dot{q})]_p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

não é mais univocamente definida pois podemos acrescê-la de qualquer combinação linear dos  $m$  vínculos. De fato, é necessário modificar a hamiltoniana para

$$H^* = H + C_m \phi_m,$$

onde em geral os coeficientes  $C_m$  podem ser funções arbitrárias dos  $q$ 's e dos  $p$ 's. Eles nada mais são que os multiplicadores de Lagrange associados a cada vínculo, e fazendo a variação com relação a esses coeficientes garantimos a validade dos vínculos.

As equações de movimento para o sistema hamiltoniano são generalizadas [3] :

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (2.2)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}, \quad (2.3)$$

onde os  $u_m$ 's são desconhecidos.

Uma função arbitrária  $g(q, p)$  tem a sua evolução temporal descrita em termos dos parênteses de poisson dada por

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n = \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\}.$$

Definindo a hamiltoniana total  $H_T = H + u_m \phi_m$ ,

$$\dot{g} = \{g, H_T\}.$$

É necessário ressaltar que os vínculos só podem ser substituídos após o cálculo dos parênteses de poisson. De fato, se pensarmos geometricamente os vínculos  $\phi_m(q, p)$  são interpretados como superfícies no espaço de fase onde a

dinâmica deve ocorrer na região de superposição, enquanto que os parênteses de Poisson, ao utilizarem derivadas parciais, estão calculando variações na direção normal as superfícies. Para lembrar este fato escrevemos

$$\phi_m(q, p) \approx 0.$$

Por consistência do formalismo temos que garantir que os vínculos sejam preservados para todos os instantes:

$$\dot{\phi}_k = \{\phi_k, H_T\} = \{\phi_k, H\} + u_m \{\phi_k, \phi_m\} \approx 0 \quad (k=1, \dots, m).$$

Estas  $m$  equações podem trazer 3 situações distintas.

1. é trivialmente satisfeita
2. revela uma inconsistência
3. resulta em uma nova equação de vínculo independente dos  $U_m$ 's
4. gera equações que os  $U_m$ 's devem satisfazer

Se nos depararmos com a situação 2, então o formalismo não pode ser aplicado para este sistema específico, fim da linha.

No caso 3, novas equações de vínculo serão criadas quando impusermos preservação dos vínculos primários. Estes novos vínculos são chamados de vínculos secundários por razões óbvias. Porém, estes vínculos também devem ser preservados, o que nos leva as quatro situações possíveis novamente. Qualquer equação de vínculo que venha a surgir deste processo é chamada de secundária.

Este procedimento continua até que todos os casos recaiam em 1, em 2, ou em 4 que pode ser entendido como equações para as variáveis  $u_m$ 's,

$$\{\phi_j, H\} + u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.4)$$

Suporemos que estas equações podem ser satisfeitas, caso contrário o formalismo é inconsistente. A equação (2.4) pode ser entendida como uma

equação matricial do tipo  $A.u_m = B$ . Se a matriz  $\{\phi_j, \phi_m\}$  não puder ser invertida, a solução não será unívoca, pois podemos somar a sua solução qualquer combinação linear de funções  $V_m(q, p)$  tal que

$$V_m \{\phi_j, \phi_m\} = 0. \quad (2.5)$$

Assim concluímos que a solução mais geral para a equação (2.4) é dada por

$$u_m = U_m(q, p) + v_a V_{am}(q, p),$$

onde os coeficientes  $v_a$ 's são completamente arbitrários podendo ser quaisquer funções do tempo, enquanto  $V_{am}(q, p)$  são funções linearmente independentes que satisfazem (2.5) e os coeficientes  $U_m$ 's devem por consistência satisfazer as equações (2.4).

Da álgebra linear sabemos que a impossibilidade de inversão está associada a duas ou mais linhas ou colunas da matriz serem linearmente dependentes, ou seja, estamos lidando com um problema com excesso de informação e neste caso é natural pensarmos em liberdades adicionais ou de gauge. Como veremos mais tarde, a liberdade de gauge está intimamente ligada a existência de vínculos de primeira classe, de forma que se só existirem vínculos de segunda classe a equação (2.4) poderá ser invertida e nos fornecerá a única solução possível.

É interessante reescrever a hamiltoniana total:

$$H_T = H + U_m \phi_m + v_a \phi_a \quad (\phi_a \doteq V_{am} \phi_m)$$

A presença de funções arbitrárias ( $v_a$ 's) manifesta liberdades adicionais dentro do formalismo. Estas liberdades estão intimamente ligadas à escolhas de gauge, ou seja, este formalismo abrange teorias como o eletromagnetismo e a gravitação.

Seguindo a nomenclatura usada por Dirac, vamos definir variáveis dinâmicas de primeira classe como funções das variáveis  $q$ 's e  $p$ 's que possuam parênteses

de poisson zero com qualquer outro vínculo (primário ou secundário). Caso contrário a variável é dita de segunda classe.

Um parênteses de poisson de uma variável de primeira classe  $Q$  com um vínculo  $\phi_j$  pode ser expandido em combinações lineares dos próprios vínculos de modo que  $\{Q, \phi_j\} = a_{jk}\phi_k$ . Uma propriedade interessante que resulta da identidade de Jacobi é que o parênteses de poisson de duas variáveis de primeira classe também é de primeira classe, e é fácil ver que a hamiltoniana total é de primeira classe.

O número de funções arbitrárias é igual ao número de coeficientes  $v_a$ 's, os quais são tantos quanto o número de vínculos primários de primeira classe. Pode-se mostrar [3] que os vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações de contato infinitesimal que não alteram o estado físico do sistema. De fato, um estado físico está bem definido quando fornecemos como condição inicial todos os  $q$ 's e  $p$ 's, e como existem funções arbitrárias ( $v_a$ 's), a evolução do sistema possui uma arbitrariedade, ou em outras palavras existe mais de um conjunto de  $q$ 's e  $p$ 's associados ao mesmo estado físico. Dirac conjecturou que qualquer vínculo de primeira classe, sendo primário ou secundário, deve ser um gerador de uma dada transformação de contato, no entanto ainda não existem provas conclusivas nem a favor e nem contra este fato.

A extensão deste formalismo para campos clássicos é praticamente imediata, só sendo necessário tomar cuidado com a definição dos momenta generalizados, onde a derivada da lagrangeana com respeito as velocidades tem que ser substituída por variações funcionais. Formalmente definimos os momenta generalizados como sendo o coeficiente na integral quando fazemos uma variação funcional na lagrangeana com respeito as velocidades generalizadas.

$$\delta L = \int p \delta \dot{q} \quad (2.6)$$

Como exemplo de aplicação deste formalismo, tomemos um sistema

clássico Newtoniano invariante por reparametrização temporal.

A ação Newtoniana de um sistema com  $n$  graus de liberdade com uma lagrangeana  $L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right)$  pode ser reparametrizada de modo a escrevermos,

$$S = \int d\tau \bar{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t})$$

onde o ponto indica derivada com relação ao parâmetro  $\tau$  e  $\bar{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t}) = \dot{t} \times L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, t\right)$

Definamos os momentas como:

$$\pi^i \doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} \quad i=1, \dots, N$$

como  $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}}$ ,

$$\begin{aligned} \pi^i &= p^i \quad i=1, \dots, N \\ \pi^0 &\doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{t}} = L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, t\right) + \dot{t} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)}{\partial \dot{t}} = \\ &= L - \sum_i p^i \cdot \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}} = L - \sum_i p^i \cdot \frac{dq_i}{dt} = -H(q_i, p^i, t) \end{aligned}$$

Assim temos o vínculo

$$\phi_0(q_\mu, p^\mu) = \pi^0 + H(q_i, \pi^i, t) = 0.$$

Note que a hamiltoniana do sistema reparametrizado é zero, de fato

$$\begin{aligned} \bar{H}(q_\mu, p^\mu) &= \pi^\mu \cdot \dot{q}_\mu - \bar{L}(q_\mu, \dot{q}_\mu) = \pi^0 \dot{t} + \sum_i \pi^i \dot{q}_i - \sum_i \dot{t} L = \\ &= \dot{t} \left[ \pi^0 + \sum_i p^i \frac{dq_i}{dt} - L \right] = \dot{t} (\pi^0 + H) \approx 0. \end{aligned}$$

No entanto, a evolução do sistema é dada pela hamiltoniana total:

$$H_T = \bar{H} + u_0 \phi_0 = u_0 \left[ \pi^0 + H(q_i, \pi^i, t) \right]$$

É trivial mostrar que o vínculo se conserva no tempo ( $\dot{\phi}_0 = [\phi_0, u_0 \phi_0] \approx 0$ ).

As equações de movimento são :

$$\begin{aligned}
 \dot{t} &= \{t, H_T\} = u_0 \mapsto u_0 = \frac{dt}{d\tau} \\
 \dot{\pi}^0 &= \{\pi^0, H_T\} = -u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \mapsto \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \\
 \dot{q}_i &= \{q_i, H_T\} = u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial p^i} \mapsto \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \\
 \dot{p}^i &= \{p^i, H_T\} = -u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \mapsto \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como já era esperado, recaímos nas equações dinâmicas convencionais para um sistema hamiltoniano de  $2N$  graus de liberdade  $(q_i, p^i)$ .

Só nos resta examinar a que tipo de transformação este vínculo  $\phi_0$  está associado. Em notação de parênteses de poisson, as transformações podem ser escritas [4]

$$\begin{aligned}
 \delta v &= \epsilon \{v, G\} && \epsilon\text{- parâmetro infinitesimal} \\
 &&& G\text{- função geratriz}
 \end{aligned}$$

Queremos então considerar o efeito de tomarmos como função geratriz o vínculo primário  $\phi_0$

- $\delta t = \epsilon \{t, \phi\} = \epsilon \{t, \pi^0\} = \epsilon$
- $\delta \pi^0 = \epsilon \{\pi^0, \phi\} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial t} = \epsilon \frac{d\pi^0}{dt}$  (usando 2.7)
- $\delta q_i = \epsilon \{q_i, \phi\} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial p^i} = \epsilon \frac{dq_i}{dt}$  (usando 2.7)
- $\delta p^i = \epsilon \{p^i, \phi\} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \epsilon \frac{dp^i}{dt}$  (usando 2.7)
- $\delta H = \epsilon \{H, \phi\} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$  (usando 2.7)

O vínculo primário gera transformações infinitesimais no tempo físico  $t$ . Estas transformações não alteram o “estado físico” do sistema já que agora

a evolução é dada pelo parâmetro  $\tau$  e o tempo  $t$  funciona meramente como uma coordenada canônica. De fato, uma trajetória completa é interpretada como um único estado físico do sistema.

Para esclarecer melhor este ponto talvez seja interessante analisarmos outro exemplo, também já bem conhecido na literatura e que é usado pelo próprio Dirac – o campo eletromagnético.

Sejam a lagrangeana do campo eletromagnético e a ação associada, para o espaço-tempo de Minkowski<sup>2</sup> sem fontes ( $\vec{J} = \vec{0}; \rho = 0$ )

$$L = \frac{1}{4} \cdot \int d^3x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}; \quad F_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu A_\nu(x^\alpha) - \partial_\nu A_\mu(x^\alpha)$$

$$S = \int dt L$$

Formalmente a única diferença com relação ao exemplo anterior é que agora as variáveis são campos e por isso temos que tomar cuidado no cálculo dos momenta e nos parênteses de Poisson.

Para calcular os momenta precisamos variar a lagrangeana com respeito aos campos  $A_\mu(x^\alpha)$ ,

$$\delta L = \frac{1}{2} \int d^3x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \int d^3x F^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta A_\nu).$$

Comparando com a equação (2.6) os momenta  $\Pi^\mu$  são dados por

$$\Pi^\mu(x^\alpha) = F^{0\mu}(x^\alpha) \quad \longmapsto \begin{cases} \Pi^0(x^\alpha) = 0 \\ \Pi^i(x^\alpha) = E^i \end{cases}$$

Temos então novamente um vínculo primário do tipo  $\phi(A_\mu, \Pi^\mu) = 0$  que no caso é simplesmente  $\Pi^0(x^\alpha) \approx 0$ , o que nos leva a hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x H = \int d^3x \left( \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \int d^3x \left( F^{i0} \dot{A}_i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} \right) = \\ &= \int d^3x \left( -\frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + F^{0i} \partial_i A_0 \right) = \int d^3x \left( -\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - \Pi^i{}_{,i} A_0 \right) = \\ &= \int d^3x \left( \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \Pi^i{}_{,i} A_0 \right), \end{aligned}$$

onde foi feita uma integração por partes no último termo, e como estamos considerando o espaço como um todo o termo de superfície não contribui.

<sup>2</sup> $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

O passo seguinte é examinar a variação temporal do vínculo. Como só existe um único vínculo primário,

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^0 &= \{\Pi^0(\vec{x}), H(\vec{y})\} \doteq \int d^3z \left( \frac{\delta \Pi^0(\vec{x})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta H(\vec{y})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^0(\vec{x})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta H(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \right) = \\ &= - \int d^3z \frac{\delta H(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \cdot \delta_\mu^0 = \\ &= \Pi^i{}_{,i}(\vec{y}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{y}) \approx 0\end{aligned}$$

este é um novo vínculo, um vínculo secundário. A sua variação no tempo nos fornece:

$$\begin{aligned}(\dot{\Pi}^i{}_{,i}) &= \{\Pi^i{}_{,i}(\vec{x}), H(\vec{y})\} \doteq \int d^3z \left( \frac{\delta \Pi^i{}_{,i}(\vec{x})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta H(\vec{y})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^i{}_{,i}(\vec{x})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta H(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \right) = \\ &= - \int d^3z \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\delta H(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta_\mu^i \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \int d^3z F^{kl}(\vec{y}) \frac{\delta F_{ki}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta_\mu^i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \int d^3z F^{kl}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} (\delta_l^\mu \cdot \delta(\vec{y} - \vec{z})) \cdot \delta_\mu^i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \int d^3z F^{ki}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} (\delta(\vec{y} - \vec{z})) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ki}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \quad (\text{F é antisimétrica})\end{aligned}$$

Com isso garantimos que os vínculos são conservados no tempo. Note que ambos são vínculos de primeira classe. De fato,

$$\{\Pi^0(\vec{x}), \Pi^i{}_{,i}(\vec{y})\} = \frac{\partial}{\partial y^i} [\delta(\vec{x} - \vec{y})] \delta^{0i} = 0.$$

Antes de estabelecer a hamiltoniana total, vamos verificar que o vínculo secundário de primeira classe gera transformações que não alteram o estado físico do sistema. Por completeza, calculemos as transformações geradas pelo vínculo primário de primeira classe  $\phi_1 \doteq \Pi^0 \approx 0$ .

- $\delta_1 A_\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_1(z^\alpha) \{A_\mu(x^\alpha), \Pi^0(z^\alpha)\} = \delta_\mu^0 \epsilon_1(x^\alpha);$
- $\delta_1 A_0(x^\alpha) = \epsilon_1(x^\alpha); \quad \delta_1 A_i(x^\alpha) = 0;$
- $\delta_1 \Pi^\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_1(z^\alpha) \{\Pi^\mu(x^\alpha), \Pi^0(z^\alpha)\} = 0 \quad \forall \mu$

este vínculo gera transformações apenas na variável  $A_0(x^\alpha)$ .

O vínculo  $\phi_2 \doteq \Pi^i{}_{,i} \approx 0$ , gera transformações nas variáveis  $A_i(x^\alpha)$  e não altera a variável  $A_0(x^\alpha)$ . De fato,

- $\delta_2 A_\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \{A_\mu(x^\alpha), \Pi^i{}_{,i}(z^\alpha)\} =$   
 $= \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \frac{\partial}{\partial z^i} \left( \delta_\mu^i \cdot \delta(x^\alpha - z^\alpha) \right) = -\delta_\mu^i \frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_2(x^\alpha)$
- $\delta_2 A_0(x^\alpha) = 0; \quad \delta_2 A_i(x^\alpha) = -\frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_2(x^\alpha);$
- $\delta_2 \Pi^\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \{\Pi^\mu(x^\alpha), \Pi^i{}_{,i}(z^\alpha)\} = 0 \quad \forall \mu$

O significado destas transformações fica claro quando analisamos as conhecidas transformações de calibre dos potenciais eletromagneticos  $A_\mu$ :

$$\delta A_\mu(x^\alpha) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(x^\alpha)$$

Reconhecemos então que as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe são casos particulares das transformações de gauge do eletromagnetismo.

Ainda seguindo a nomenclatura de Dirac, vamos chamar de hamiltoniana estendida a hamiltoniana total acrescida de todos os geradores que não alteram o estado físico do sistema. Para este nosso exemplo, a hamiltoniana estendida ( $H_E$ ) então se escreve:

$$\begin{aligned} H_E &= H_T + \int d^3x u_1(x^\alpha) \Pi^i{}_{,i}(x^\alpha) = \\ H_E &= \int d^3x \left( \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + u_0 \Pi^0 + u_1 \Pi^i{}_{,i} \right) \end{aligned}$$

onde absorvemos a variável  $A_0$  dentro de  $u_1$ .

Chegando a hamiltoniana estendida o trabalho está completo. No entanto, um leitor atento notaria que as coordenadas conjugadas  $A_0$  e  $\Pi^0$  possuem liberdades de gauge associadas, ou seja, podemos escolhê-las de forma apropriada sem perda alguma (escolha de gauge) em graus de liberdade. Note

que  $\dot{A}_0 = u_0$  é completamente arbitrário, e que  $\dot{\Pi}_0 = \Pi^i_{,i} \approx 0$  juntamente com o vínculo  $\Pi^0 \approx 0$  fixa  $\Pi^0 = 0$ .

Uma vez bem estabelecido o formalismo hamiltoniano para sistemas clássicos com vínculos, é de interesse construir um formalismo quântico para este sistema.

O caso mais simples para a quantização é adotar um sistema clássico apenas com vínculos de primeira classe.

A equação dinâmica é a equação de Schrödinger onde tomamos a hamiltoniana como sendo a hamiltoniana de primeira classe mais geral possível:

$$i\hbar \cdot \frac{d}{dt} \psi = \hat{H} \psi$$

No processo de quantização associamos a cada variável dinâmica clássica um operador quântico definido no espaço de Hilbert. Além disso, requeremos que as relações entre as variáveis clássicas através dos parênteses de Poisson sejam levadas em relações de comutação entre os operadores

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Como as relações de comutação já estão fixadas, não podemos interpretar as equações de vínculo  $\phi_j(\hat{q}, \hat{p})$  como novas relações entre operadores. Com efeito, seja um vínculo  $\phi_j(q, p)$  e uma função  $F(q, p)$  qualquer das coordenadas e momentas generalizados tal que  $\{\phi_j(q, p), F(q, p)\} \neq 0$ . Ao quantizarmos esta equação teremos  $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), F(\hat{q}, \hat{p})] \neq 0$ . Porém, se fizermos  $\phi_j(\hat{q}, \hat{p}) = 0$ , teríamos  $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), F(\hat{q}, \hat{p})] = 0$  pois o comutador de um operador identicamente nulo é zero com qualquer outra função de operadores, e claramente isto é uma inconsistência.

Para ser consistente, requeremos que cada equação de vínculo seja uma restrição sobre a função de onda que é solução da equação de Schrödinger

$$\phi_j(\hat{q}, \hat{p}) \psi(\vec{x}, t) = 0.$$

O formalismo construído desta forma deve satisfazer a alguns requisitos para garantirmos coerência.

Se a aplicação de um determinado vínculo  $\phi_j(\hat{q}, \hat{p})$  anula a função de onda, então a aplicação sucessiva de dois vínculos sobre a função de onda também tem que resultar zero ( $\phi_k \phi_j \psi = 0$ ). Se invertermos a ordem de aplicação o resultado ainda deve ser zero, de forma que o comutador de quaisquer dois vínculos aplicado a função de onda deve se anular. Esta equação não gera nenhum vínculo novo, e por isso a única possibilidade é que o comutador entre os vínculos de primeira classe seja uma combinação linear entre todos os vínculos,

$$[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), \phi_k(\hat{q}, \hat{p})] = C_{jk}^m \phi_m(\hat{q}, \hat{p}),$$

o que é consistente com  $\{\phi_j, \phi_k\} = C_{jk}^m \phi_m$ , a menos de problemas de ordenamento.

Não é trivial que esta equação seja satisfeita. Em geral, os operadores do espaço de Hilbert não comutam entre si, e justamente por isso, os coeficientes  $C_{jk}^m$ , que podem depender dos operadores  $\hat{q}$ 's e  $\hat{p}$ 's, precisam ser posicionados a esquerda do lado direito da equação para garantir que a aplicação do comutador  $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), \phi_k(\hat{q}, \hat{p})]$  anule a função de onda.

Além disso as relações de vínculo devem valer para qualquer instante. Utilizando a equação de Schrödinger para um acréscimo infinitesimal de tempo, e impondo que um determinado vínculo  $\phi_k(\hat{q}, \hat{p})$  anule a função de onda nos dois instantes  $t$  e  $t + dt$  temos que,

$$\phi_k \psi(t + dt) = \phi_k \psi(t) - \frac{i}{\hbar} \phi_k \hat{H} \psi(t) \Rightarrow \phi_k \hat{H} \psi(t) = 0$$

e naturalmente também temos que a aplicação da hamiltoniana posterior a aplicação de um vínculo deve anular a função de onda

$$\hat{H} \phi_k \psi(t) = 0$$

Concluimos assim que o comutador entre quaisquer vínculos de primeira classe e a hamiltoniana deve anular a função de onda. Como este não é um

novo vínculo temos

$$[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), H(\hat{q}, \hat{p})] = D_j^m \phi_m(\hat{q}, \hat{p})$$

Todos os comentários feitos anteriormente se repetem.

Nesta exposição só me preocupei em elucidar problemas específicos deste formalismo. Questões relacionadas a qualquer método de quantização, como por exemplo o problema de ordenamento, não são alterados com este tratamento.

Com relação a quatzização de sistemas hamiltonianos vinculados onde aparecem vínculos de segunda classe, serei breve e farei apenas alguns comentários. Para maiores esclarecimentos consultar as referências indicadas[5]-[8]. O fato do sistema apresentar vínculos de segunda classe está relacionado com a existência de variáveis dispensáveis. O primeiro passo é, através de combinações lineares, diminuir ao máximo o número de vínculos de segunda classe (o número mínimo de vínculo de segunda classe é sempre par). A partir daí é possível redefinir os parênteses de Poisson pelos chamados parênteses de Dirac, os quais possuem a propriedade de fornecer corretamente as equações de movimento e não alterar as relações de comutação dos vínculos de primeira classe. Além disso pode-se mostrar que o parênteses de Dirac entre um vínculo de segunda classe com qualquer função da coordenadas e momentas generalizados  $A(q, p)$  é identicamente (ou fortemente) nulo, o que nos possibilita tomar os vínculos de segunda classe identicamente nulos desde o princípio. Com efeito, se  $\phi_j^2$  é um vínculo de segunda classe então  $\{\phi_j^2, A(q, p)\}^D = 0$  para qualquer função  $A(q, p)$  das coordenadas e momentas generalizados. Assim tomar  $\phi_j^2(\hat{q}, \hat{p}) = 0$  é consistente pois teremos  $\{\phi_j^2, A(q, p)\}^D = 0$  levados em  $[\phi_j^2(\hat{q}, \hat{p}), A(\hat{q}, \hat{p})]^D = 0$  identicamente. Podemos então, ao contrário dos vínculos de primeira classe, interpretar as equações de vínculos de segunda classe como identidades entre operadores.

Certamente neste processo o número de graus de liberdade do sistema é reduzido. Com as novas variáveis e a redefinição dos parênteses de Dirac,

recaímos novamente no caso anterior onde só existem vínculos de primeira classe, e tudo segue como antes.

## 2.2 Teoria Quântica Não-Relativística

Costuma-se chamar Max Planck de o “pai” da Mecânica Quântica por em 1900 ter sido o primeiro cientista a quantizar a energia do campo eletromagnético. Na realidade, M. Planck utilizou a quantização como mero artifício matemático para conseguir reproduzir o espectro de emissão de um corpo negro, sem de fato propor que o campo eletromagnético fosse realmente quantizado. Albert Einstein, por sua vez, levou a sério a proposta de quantização de Planck e usou a noção de fótons, quantas do campo eletromagnético, para explicar o efeito fotoelétrico. Neste início de século XX surgiram vários experimentos que comprovaram a necessidade de uma reformulação profunda nos conceitos da mecânica clássica. Seguindo este caminho, os mais proeminentes cientistas da época conseguiram em esforço conjunto construir um formalismo matemático capaz de prever resultados experimentais que, mais tarde com o advento da eletrodinâmica quântica, se tornariam as previsões mais precisas já atingidas na física, fato que comprova o sucesso da teoria. No entanto, desde o início não houve um consenso geral quanto a interpretação da mecânica quântica. P.A.M Dirac e Von Neumann assumiram uma postura prática e postularam o colapso da função de onda, enquanto Niels Bohr tentou explicar o processo de medição através do conceito de complementaridade entre quantidades físicas. Werner Heisenberg compreendeu a importância do princípio de incerteza e tentou descrever a mecânica quântica utilizando apenas observáveis com o seu programa matricial.

Em 1929 durante uma conferência realizada na cidade de Copenhague, a maioria dos cientistas convergiram para o que hoje nós chamamos de interpretação de Copenhague. Apesar do sucesso com previsões muito precisas, com o passar do tempo as limitações da interpretação de Copenhague começaram a incomodar, e então novas interpretações foram formuladas.

Em 1952, David Bohm [9] publicou um artigo onde apresentou pela primeira vez sua formulação de variáveis ocultas, também conhecida como interpretação de Bohm- de Broglie.<sup>3</sup> Outra interpretação foi desenvolvida por Hugh Everett e publicada em 1957 [13] com o título “Relative State Formulation of Quantum Mechanics”, hoje em dia conhecida como interpretação de vários mundos.

De fato, neste início de século XXI, os fantasmas do mundo quântico ainda assombram as teorias existentes na praça. Qual delas é a melhor interpretação? Por enquanto não existem observações que permitam descartar qualquer interpretação, e assim todas são igualmente válidas, salvo inconsistências lógicas, como por exemplo querer aplicar a interpretação de Copenhagen ao Universo como um todo [14].

Nos restringiremos a analisar a interpretação causal de Bohm- de Broglie, comparando-a com a interpretação de Copenhagen quando necessário.

Nesta interpretação o conceito de sistema isolado é modificado. Um elétron é entendido como uma partícula adimensional que descreve uma trajetória no espaço, sempre acompanhada de uma onda  $\psi(\vec{x}, t)$  que exerce influência sobre a partícula. Entende-se então que um sistema isolado é composto por partícula mais onda. Ao contrário dos campos convencionais não existe uma fonte para esta onda, ela é intrínseca ao sistema. Vale ressaltar que ao contrário da interpretação de Copenhagen, a função de onda  $\psi$  não caracteriza completamente o sistema quântico em questão.

A evolução dinâmica da função de onda é descrita pela equação de Schrödinger. Para uma função de onda complexa bem comportada sempre podemos escrevê-la na forma polar,

$$\Psi(\vec{x}, t) = R(\vec{x}, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(\vec{x}, t)\right\}$$

onde  $R(\vec{x}, t)$  e  $S(\vec{x}, t)$  são funções reais e  $\hbar$  é a constante de Planck.

---

<sup>3</sup>o nome é referência ao trabalho de 1926 [10]-[12] de L. de Broglie, cujo D. Bohm teve conhecimento após ter concluído seu artigo de 1952

É interessante reescrever a equação de Schrödinger com a função de onda na sua forma polar pois assim podemos separá-la em duas equações reais acoplando os dois campos  $R(\vec{x}, t)$  e  $S(\vec{x}, t)$ , o que facilitará a sua interpretação física e a relação com a partícula.

Tomemos então a equação de Schrödinger para um dado potencial  $V(\vec{x}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t).$$

Ao substituir a forma polar da função de onda encontramos duas novas equações, a saber,

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\nabla S(\vec{x}, t))^2}{2m} + V(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t) = 0, \quad Q(\vec{x}, t) \doteq -\frac{\hbar^2 \nabla^2 R(\vec{x}, t)}{2m R(\vec{x}, t)} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial R^2(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \left( R^2(\vec{x}, t) \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m} \right) = 0, \quad R^2(\vec{x}, t) = \Psi^* \Psi = \|\Psi\|^2 \quad (2.9)$$

A equação (2.8) é uma equação tipo Hamilton–Jacobi com a presença de dois potenciais, enquanto que a (2.9) é uma equação de continuidade, uma lei de conservação. Para tornar estas analogias consistentes, postula-se que o momento da partícula, no caso o elétron, é descrito pelo gradiente da fase da função de onda em unidades de  $\hbar$ , ou seja,  $\vec{p}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} S(\vec{x}, t)$ . Feito isto, para se encontrar a trajetória da partícula basta integrarmos a expressão

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m}. \quad (2.10)$$

Ao pensar na equação (2.9) como uma equação de continuidade, estamos atribuindo a função  $R^2(\vec{x}, t)$  uma característica de densidade de probabilidade. Porém na equação (2.8), a função  $R(\vec{x}, t)$  é quem determina o potencial quântico, ou seja, esta função assume dois papéis distintos. A diferença conceitual existente aqui é que  $R^2(\vec{x}, t)$  fornece a probabilidade da partícula estar na posição entre  $\vec{x}$  e  $\vec{x} + d\vec{x}$  num dado instante de tempo  $t$ . Na interpretação de Copenhagen esta quantidade é associada com a probabilidade de se encontrar a partícula nesta posição.

Como já mencionamos, devido a equação (2.10) a função de onda  $\psi(\vec{x}, t)$  não especifica completamente o estado do sistema, ainda fica faltando fornecer a posição inicial  $\vec{x}_0$ . Este é o único dado extra que não está contido na função de onda.

Nesta formulação a noção de probabilidade advém justamente da incapacidade experimental de determinarmos com precisão infinita a posição inicial. A probabilidade associada ao mundo quântico não é inerente ao conceito de realidade como N.Bohr defendia, mas surge da mesma maneira que na mecânica estatística clássica. A associação de  $R^2(\vec{x}, t)$  com probabilidade não é ingênua, é justamente através desta associação que garantimos a reprodução de todos os resultados experimentais estatísticos.

Na realidade impõe-se uma condição mais fraca. Basta postular que no instante inicial  $t_0$  a probabilidade é  $R^2(\vec{x}, t_0)$ , isto é suficiente devido a unitariedade da equação de Schrödinger, ou seja, a equação de Schrödinger garante que se a probabilidade em  $t = t_0$  é  $R_0^2(\vec{x}, t)$  então num tempo  $t$  a probabilidade será  $R^2(\vec{x}, t)$ .

A primeira vista parece uma tarefa ingrata tentar explicar os fenômenos nada intuitivos do mundo quântico, como por exemplo o tunelamento ou o experimento de dupla fenda, mantendo o conceito de trajetória das partículas. Isto só é possível graças ao potencial quântico, responsável por todas as manifestações quânticas.

Aparece assim uma maneira natural de se tomar o limite clássico, sendo definido como o regime onde podemos desprezar os efeitos do potencial quântico frente ao potencial  $V(\vec{x}, t)$ . A teoria é consistentemente aplicada a todos os sistemas microscópicos e macroscópicos, inclusive ao processo chamado medição.

Vamos então analisar as características do potencial quântico e tentar elucidar como elas geram os fenômenos quânticos.

O potencial quântico tem uma peculiaridade de não depender da intensi-

dade do campo  $R(\vec{x}, t)$  – ele depende apenas da sua forma. Isto significa que a sua influência pode ser estendida a distâncias macroscópicas. Podemos entender o potencial quântico como uma onda de informação. Para melhor explicar esta idéia, D. Bohm recorreu ao conceito de informação ativa. Fazemos uma analogia seguindo as idéias de Bohm [15]. As ondas de rádio permeiam todo o espaço carregando consigo informação (música, fala, etc.) codificada na sua forma. A música que nós ouvimos ao ligar o aparelho de rádio tem como fonte de energia a tomada da rede elétrica, ou seja, a onda tem o papel apenas de carregar a informação. Neste sentido podemos dizer que as ondas de rádio são potencialmente ativas em todo o espaço, porém são realmente ativa apenas dentro do sistema elétrico do aparelho. É desta forma que devemos pensar no potencial quântico. Ele é potencialmente ativo em todo espaço onde não é nulo, mas é realmente ativo apenas na posição onde se encontra a partícula. A única diferença nesta analogia é que o potencial quântico, ao contrário das ondas de rádio convencionais, não possui nenhuma forma de energia, ele carrega estritamente apenas informação.

No experimento de dupla fenda [16], pode-se fazer passar uma partícula de cada vez de forma a garantirmos que não haja interação entre as partículas. A interpretação causal nos diz que cada partícula pode passar por apenas uma das duas fendas, enquanto que a função de onda passa necessariamente pelas duas. As ondas emergentes das fendas carregam consigo informação sobre a estrutura do aparato, e com sua evolução naturalmente se sobrepõem. Assim o potencial quântico influencia a trajetória da partícula informando-a sobre a estrutura do ambiente como um todo, mesmo quando a partícula já está afastada do aparato com as fendas.

Vemos assim que os sistemas quânticos possuem uma dependência no estado do sistema global. A interpretação causal fornece uma maneira de tentar entender como o todo tem influência local. Bohr foi talvez o primeiro a defender que um sistema quântico não pode ser entendido a partir de

seus fragmentos, no entanto dentro de sua interpretação querer estudar a influência do todo sobre cada parte é carente de sentido.

Se formos um passo mais adiante e analisarmos o caso de muitos corpos, esta estrutura do todo inseparável é ainda mais alarmante. Num sistema de  $N$  partículas, a função de onda  $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)$  é definida num espaço de configuração  $3N$  dimensional. Reescrevendo-a na forma polar chegamos a equações análogas as anteriores dadas por

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} + V + Q = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla_i \left( R^2 \frac{\nabla_i S}{m_i} \right) = 0 \quad (2.12)$$

onde,

$$Q(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \doteq -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\nabla^2 R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}{R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}$$

$$R^2 = \Psi^* \Psi = \|\Psi\|^2$$

A interpretação de probabilidade continua sendo válida devido a equação de continuidade, porém agora fica evidente a dependência do potencial quântico com a configuração de todas as partículas. A força associada ao potencial quântico difere das outras forças da natureza por não poder ser determinada a partir das posições das partículas, ela depende do estado do sistema, ou seja, da função de onda que é solução da equação de Schrödinger.

Assim sendo, qualquer sistema físico deve ser analisado levando-se em conta todos os seus constituintes incluindo o ambiente que o cerca. É fácil perceber que este processo em cadeia torna necessário considerar o universo como um todo. Como é então possível explicar o sucesso da física clássica onde o processo é exatamente o inverso, estuda-se as partes para se explicar o todo? A resposta esta na fatorização da função de onda. Pode-se mostrar que quando a função de onda é fatorável em produtos de funções de onda de subsistemas, cada subsistema se comporta independentemente dos outros

sendo assim necessário considerar apenas o seu todo isoladamente. Dentro desta visão a dependência no todo é uma propriedade fundamental dos sistemas físicos, enquanto que a possibilidade de análise por particionamento é um caso particular que deve ser testado caso a caso.

Uma vantagem adicional da interpretação causal é a possibilidade de descrever o processo de medida. A teoria é em princípio aplicável a qualquer sistema físico inclusive no que costumamos chamar de arranjo experimental. Deve-se ressaltar que o termo “medida de um observável” é danoso e geralmente leva-nos a idéias imprecisas a respeito do processo. Alguns autores, dentre eles John Bell [17], já expressaram suas críticas a este respeito.

Não se pretende aqui esgotar a análise do “processo de medição”, apenas apresentar uma leve abordagem por completeza da exposição. Para melhor entendê-lo, podemos dividi-lo em duas etapas [18]-[19]. Elas se distinguem pela reversibilidade. A primeira etapa é reversível enquanto que a segunda irreversível.

Suponha que queiramos “medir” um “observável”  $A(\vec{x}, \vec{p})$  dado que o estado de um elétron seja uma superposição linear de  $N$  de seus autoestados. Na primeira fase de medição, dá-se uma separação espacial entre os pacotes de onda associados a cada autoestado do observável de modo a não haver superposição entre eles. Uma vez separados, a partícula deve se encontrar em apenas um destes pacotes já que a região intermediária tem probabilidade nula ( $R^2(\vec{x}, \vec{p}) = 0$ ). Certamente nesta situação a informação potencialmente ativa nos pacotes vazios (vazios no sentido de não conterem a partícula) não podem influenciar o elétron, no entanto nada impede que no futuro os pacotes venham a se sobrepor novamente. Desta forma não houve o “colapso de onda” ou igualmente a perda de informação. É a segunda etapa que nos possibilita desprezar todos os pacotes de onda que não estão associados ao autoestado “medido”.

Durante o processo de registro do experimento é necessário um sistema

termodinâmico macroscópico para amplificar o sinal e gerar um resultado macroscópico legível. Este processo é intrinsecamente irreversível. Neste caso a função de onda do sistema é um produto tensorial entre a função de onda do elétron e a função de onda do aparato, e pode-se mostrar que mesmo havendo superposição de diferentes autoestados do observável  $A$  no subespaço associado a função de onda do elétron, as funções de onda do aparato não se superpõem. Assim a única função de onda que pode influenciar o movimento da partícula é a associada ao resultado do experimento e podemos consistentemente ignorar os pacotes de onda “não medidos”. Obtém-se assim os mesmos efeitos que o “colapso da função de onda”, sendo que aqui todos os elementos do sistema foram descritos causalmente e sempre com evolução temporal dada pela equação de Schrödinger. A consciência do observador não é um agente ativo no processo de medida quântico.

Em Mecânica Quântica a cada quantidade física associamos um operador do espaço de Hilbert. Como devemos então entender as relações de comutação entre os operadores, se assumimos que a partícula sempre possui todas as quantidades físicas bem definidas?

A não comutação entre dois operadores significa que não podemos “medi-los” simultaneamente, o que não implica que não possamos atribuir de forma bem definidas estas quantidades físicas a partícula.

O processo de “medida” é uma interação entre a partícula e o “sistema de medidas”. Devemos então interpretar a não comutatividade entre dois operadores como a impossibilidade de interagir simultaneamente com o objeto dos dois modos necessários para as duas medições. Uma interação interfere na outra.

Para finalizar, um comentário sobre a não-localidade do potencial quântico. Embora a idéia de interação não-local não seja familiar, ela não apresenta nenhuma inconsistência dentro de teorias não-relativísticas. No entanto é necessário verificar se é coerente construir uma teoria causal relativística

não-local. De fato, já se mostrou ser possível estender a interpretação causal para um campo escalar satisfazendo a equação de Klein-Gordon [18]-[20] e para o campo eletromagnético [21], ou seja, aparentemente não-localidade e relatividade especial podem ser compatíveis.

## 2.3 Formulação Hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral

No início do século XX surgiu dentro da comunidade científica, um ideal com motivações filosóficas para se conseguir a unificação de todas as teorias físicas. Certamente isto é um mero desejo humano, já que a natureza não busca na ciência o seu comportamento, ao contrário, somos nós que observamos a natureza para tentar entendê-la. No entanto, havia motivos para que os cientistas acreditassem que esta unificação fosse possível. No final do século XIX, o trabalho de James Maxwell nos mostrou como duas forças até então consideradas independentes, a saber, as forças elétrica e magnética, eram na verdade manifestações diferentes de um único campo, o campo eletromagnético. Mais tarde com o advento da mecânica quântica e posteriormente com a sua compatibilização com a mecânica relativística sem gravitação (meados do século XX), se conseguiu incorporar o eletromagnetismo ao mundo quântico, dando origem à eletrodinâmica quântica (QED). Neste contexto a única teoria de interação fundamental da natureza que ainda não fazia parte deste arcabouço matemático era a teoria da gravitação, ou seja, a teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein.

A primeira dificuldade técnico-matemática surge de o caminho natural de quantização canônica requerer uma formulação hamiltoniana. Os primeiros trabalhos nesta direção datam do final da década de 40 e início de 50 do século passado. Para se construir este formalismo foi necessário desenvolver uma teoria para sistemas hamiltonianos vinculados [7], [22]-[24], já que a Relatividade Geral é uma teoria invariante por reparametrização de coordenadas. Ao se tentar construir a hamiltoniana da gravitação é necessário singularizar a coordenada temporal gerando assim vínculos entre as variáveis canônicas. Nota-se assim que a formulação hamiltoniana da relatividade geral só é possível para espaços cuja topologia é do tipo  $R \otimes M^3$  onde  $M^3$  é

uma hipersuperfície espacial arbitrária de dimensão 3.

Para chegar na hamiltoniana da gravitação, seguiremos a linha de exposição de R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner [25], primeiro folheando o espaço-tempo com uma hipersuperfície tipo espaço e depois aplicando o formalismo para sistemas hamiltonianos vinculados as variáveis canônicas em questão.

Todo o desenvolvimento será feito supondo-se seções espaciais fechadas para que não tenhamos que nos preocupar com os eventuais termos de superfície que possam vir a surgir. Em casos com seções espaciais abertas o procedimento é analisar caso à caso e quando houver contribuições não nulas, somam-se termos a hamiltoniana total de forma a cancelarmos as contribuições de superfícies. A orientação nestes casos é conseguir reproduzir as equações de Einstein, o que não é possível com os termos de superfície.

Seja uma variedade com topologia  $R \otimes M^3$ . Primeiramente preenchamos a variedade com uma congruência de curvas tipo-tempo, ou seja, uma congruência que em cada ponto podemos definir um vetor como a derivada com relação ao parâmetro da curva ( $\tau$ ) e por construção este vetor ( $\eta^\alpha$ ) é do tipo-tempo. Num dado ponto existe uma hipersuperfície local cujo vetor normal é o próprio  $\eta^\alpha$ . Devido à topologia da variedade, esta hipersuperfície pode ser estendida de modo a separar a variedade em duas regiões tal que qualquer curva tipo-tempo tem necessariamente que atravessar esta hipersuperfície. Isto é muito importante para podermos defini-la como uma superfície de Cauchy.

O parâmetro  $\tau$  das curvas da congruência não são necessariamente constantes ao longo desta hipersuperfície. Definimos então um parâmetro  $t$  justamente com o requerimento que seja constante sobre cada hipersuperfície.

Naturalmente podemos parametrizar as hipersuperfície usando 3 parâmetros:

$$\chi^\alpha = \chi^\alpha(x^a).$$

Vamos escolher uma base de vetores na hipersuperfície como sendo a

derivada com relação a cada parâmetro:

$$\chi_a^\alpha \doteq \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^a}$$

Por praticidade estamos considerando que o vetor normal a hipersuperfície é normalizado de forma que tenhamos,

$$g_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = -1, \quad g_{\alpha\beta}\eta^\alpha\chi_a^\beta = 0$$

O conjunto de todas as hipersuperfície a  $t$  constante preenchem a variedade e assim descrevemos o espaço-tempo a partir das equações paramétricas  $\chi^\alpha(t, x^a)$ .

Num dado ponto  $x^i$  de uma hipersuperfície a  $t$  constante existe um vetor normal  $\eta^\alpha$  associado a uma determinada curva da congruência. É possível que este ponto seja levado a uma outra curva da congruência ao passar para próxima hipersuperfície. Para quantificar esta variação definimos um vetor deformação  $N^\alpha$  como sendo o vetor que conecta dois pontos de mesma coordenada espacial  $x^i$  em duas hipersuperfícies vizinhas.

$$N^\alpha \doteq \frac{\partial \chi^\alpha(t, x^i)}{\partial t}$$

A decomposição do vetor deformação na base definida sobre a hipersuperfície e paralela ao vetor normal nos fornece:

$$N^\alpha = N\eta^\alpha + N^a\chi_a^\alpha$$

A função  $N$  é chamada de função lapso e as  $N^a$  são chamadas de função deslocamento. Note que a função lapso mede a taxa de variação entre o parâmetro  $t$  e o tempo próprio associado a um observador comóvel a quadri-velocidade  $\eta^\alpha$ . A função deslocamento mede a taxa de variação do ponto com coordenada  $x^i$  entre duas hipersuperfícies a  $t$  constante.

Para estudar a evolução dinâmica do sistema precisamos projetar as quantidades físicas sobre a hipersuperfície e paralelamente ao vetor deformação, já que este é o vetor tangente as linhas coordenadas do tempo  $t$ .

Podemos reescrever  $\eta^\alpha$  e a métrica a partir desta decomposição e assim obter:

$$\eta^\alpha = \frac{1}{N}N^\alpha - \frac{N^a}{N}\eta_a^\alpha = \left( \frac{1}{N}, \frac{-N^a}{N} \right),$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &\doteq g_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta \doteq h_{ij} \\ g_{0i} &\doteq g_{\alpha\beta} N^\alpha \chi_i^\beta = N^a h_{ai} = N_i \\ g_{00} &\doteq g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta = -N^2 + N^a N_a \end{aligned}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}.$$

com inversa  $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$  (por construção  $h^{ij}h_{ja} = \delta_a^i$ ),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_i}{N^2} \\ \frac{N_j}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N_j}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Com estes resultados a componente covariante do vetor  $\eta^\alpha$  é

$$\eta_\alpha = g_{\alpha\beta} \eta^\beta = (-N, 0, 0, 0)^t.$$

Como era de se esperar, a variável dinâmica que descreverá a evolução da geometria é a própria métrica da hipersuperfície ( $h_{ij}$ ). Para tanto, precisamos caracterizá-la integralmente. Resta-nos então sabermos como esta tri-hipersuperfície espacial esta curvada com relação a variedade maior quadridimensional. O estudo de imersão nos mostra que é possível que duas hipersuperfícies distintas ( $g_{\mu\nu}$ ;  $g'_{\alpha\beta}$ ) possuam a mesma métrica intrínseca à hipersuperfície ( $h_{ij}$ ) como sub-variedade. Uma maneira natural de prosseguirmos é estudarmos a variação do vetor normal a hipersuperfície, fazendo-o variar ao longo da mesma e projetando-o sobre a hipersuperfície, já que queremos descrever a evolução a partir da hipersuperfície e quantidades físicas definidas sobre ela.

Defini-se o tensor de curvatura extrínseca,

$$K_{\mu\nu} \doteq \perp_{\mu}^{\alpha} \perp_{\nu}^{\beta} \eta_{(\alpha;\beta)} = \mathcal{L}_{\eta^{\alpha}} (g_{\mu\nu})$$

$$\perp_{\mu}^{\alpha} \doteq \delta_{\mu}^{\alpha} + \eta^{\alpha} \eta_{\mu} \quad (\text{projektor sobre a hipersuperfície})$$

com componentes:

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \eta_{(a;b)} = -N \Gamma_{ab}^0 \quad (2.13)$$

$$K_{0b} = N^a K_{ab} \quad (2.14)$$

$$K_{00} = N^a N^b K_{ab} \quad (2.15)$$

As únicas componentes relevantes são os  $K_{ab}$ 's.

Com esta decomposição em mãos, vamos reescrever a ação da TRG em termos destas novas variáveis para podermos definir os momenta associados e assim obter a hamiltoniana desejada. Conceitualmente, o princípio de Hamilton deve ser entendido a partir da métrica da hipersuperfície. Dada duas hipersuperfícies  $h_{ab}(\vec{x}, t_{final})$  e  $h_{ab}(\vec{x}, t_{inicial})$  existe infinitos modos para deformarmos  $h_{ab}(\vec{x}, t_{inicial})$  em  $h_{ab}(\vec{x}, t_{final})$ , no entanto a evolução será dada pela deformação contínua que tal que a ação associada a métrica  $g_{\mu\nu}$  seja extremal. O espaço composto de todas as configurações possíveis para as métricas foi primeiramente introduzido por Wheeler com o nome de superespaço. Podemos então reafirmar o princípio variacional dizendo que a trajetória descrita pela métrica no superespaço será aquela que torna a ação extremal.

É amplamente sabido que a ação que fornece as equações de Einstein pode ser escrita

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.16)$$

Antes de fornecer o resultado final, é interessante desenvolver algumas relações utilizando as variáveis  $N$ ,  $N^a$ ,  $h_{ij}$ ,  $K_{ij}$ . Vamos definir:

$${}^3\Gamma_{bc}^a \doteq \frac{1}{2}h^{ad}(h_{dc}, b + h_{db}, c - h_{bc}, d)$$

$${}^3R_{ab} \text{ tensor de Ricci formado com as conexões } {}^3\Gamma_{bc}^a$$

$$K \doteq h^{ab}K_{ab}$$

$$h \doteq \det(h_{ab}) \Rightarrow \delta(\sqrt{h}) = -\frac{\sqrt{h}}{2}h_{ab}\delta h^{ab} = \frac{\sqrt{h}}{2}h^{ab}\delta h_{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{h})' = \sqrt{h}h^{ab}\dot{h}_{ab} = \sqrt{h}(-NK + N^a; a)$$

Por substituição direta encontramos as seguintes componentes para a conexão:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{N^aN_{,a}}{N} - \frac{N^aN^b}{N}K_{ab}$$

$$\Gamma_{0a}^0 = \frac{N_{,a}}{N} - \frac{N^b}{N}K_{ab}$$

$$\Gamma_{ab}^0 = -\frac{K_{ab}}{N} = \frac{1}{2N^2}(\dot{h}_{ab} - N_{(a;b)}) \Rightarrow K_{ab} = -\frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - N_{(a;b)})$$

$$\Gamma_{00}^a = Nh^{ab}\left(\frac{\dot{N}_b}{N}\right) + \frac{h^{ab}}{2}(N^2 - N^mN_m), b - \frac{N^aN^bN_{,b}}{N} + \frac{N^aN^bN^mK_{bm}}{N}$$

$$\Gamma_{0b}^a = N\left[-K_b^a + \left(\frac{N^a}{N}\right); b + \frac{N^aN^m}{N^2}K_{bm}\right]$$

$$\Gamma_{bc}^a = {}^3\Gamma_{bc}^a + \frac{N^a}{N^2}K_{bc}$$

Analogamente chegamos para o tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} R_{00} &= Nh^{ij}\dot{K}_{ij} + NN_{;k}^k - 2NN_{;k}^lK_l^k - 2NN^lK_{l;i}^i + NN^lK_{,l} + N^2K^{ij}K_{ij} + \\ &+ N^iN^j{}^3R_{ij} + N^iN^jK_{ij}K - 2N^iN^jK_i^lK_{lj} - \frac{N^iN^j}{N}\dot{K}_{ij} - \frac{N^iN^j}{N}N_{,j;i} + \\ &+ 2\frac{N^iN^j}{N}N_{;j}^lK_{il} + \frac{N^iN^jN^l}{N}K_{il;j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{0i} &= -\frac{N^m}{N}\dot{K}_{im} - \frac{N^m}{N}N_{,i;m} + \frac{N^l}{N}K_{ml}N_{;i}^m + K_{li}\frac{N^m}{N}N_{,m}^l - 2N^mK_m^lK_{li} + \\ &- NK_{i;m}^m + NK_{,i} + N^m{}^3R_{mi} + N^mK_{mi}K + \frac{N^mN^l}{N}K_{li;m} \end{aligned}$$

$$R_{ij} = \frac{1}{N}\left(-\dot{K}_{ij} - N_{,i;j} + N_{;i}^mK_{mj} + N_{;j}^mK_{mi} + N^mK_{ij;m}\right) - 2K_i^mK_{mj} + {}^3R_{ij} + K_{ij}K$$

e finalmente podemos escrever o escalar de curvatura usando as variáveis da separação (3+1).

$$R = -\frac{2\dot{K}}{N} - 2\frac{N_{;k}^k}{N} + 2\frac{N^i K_{;i}}{N} + K_{ij}K^{ij} + K^2 + {}^3R$$

A ação (2.16) após simples manipulação matemática, somando e subtraindo  $2(\sqrt{h})'K$  ao escalar de curvatura, se decompõem em três termos:

$$\begin{aligned} S &= S_G + S_1 + S_2 \\ S_G &= \int dt d^3x N \sqrt{h} (K^{ij}K_{ij} - K^2 + {}^3R) \\ S_1 &= -2 \int dt d^3x (\sqrt{h} \dot{K}) \\ S_2 &= 2 \int dt d^3x (\sqrt{h} K N^i - \sqrt{h} h^{ki} N_{;k})_{;i} \end{aligned}$$

O termo  $S_2$  não contribui para a equação de movimento por ser uma divergência total. O princípio é aplicado impondo variações onde  $\delta h_{ij}$ ,  $\delta N_i$ ,  $\delta N$  são zero nos extremos. Porém, o termo  $S_1$  poderia contribuir já que ele depende essencialmente de derivadas de  $h_{ij}$  na direção ortogonal às hiper-superfícies a  $t$  constante.

Para não ter que lidar com este termo de superfície, é comum definir a ação da teoria da relatividade geral como  $S_G = S - S_1$ . De agora em diante consideraremos apenas o termo  $S_G$  como a boa ação; esta escolha será justificada a posteriori encontrando as equações de movimento que descrevem corretamente o sistema.

Façamos então a variação funcional com relação as variáveis em questão:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta N} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N} - \left( \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{N}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial N_{;i}} \right)_{;i} = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N_i} - \left( \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{N}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial N_{i;j}} \right)_{;j} = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial h_{ij}} - \left( \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial h_{ij;k}} \right)_{;k} = 0 \end{aligned}$$

$L$  não depende de  $\dot{N}$  nem de  $N_{,i}$  e só depende de  $N$  explicitamente ou através de  $K_{ij}$ . Usaremos que:

$$\frac{\partial L}{\partial K_{ab}} = 2\sqrt{h}N \left( h^{ki}h^{jl} - h^{ij}h^{kl} \right) K_{kl} \frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{ab}}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{ab}} = \delta_{ij}^{ab} \doteq \frac{1}{2} \left( \delta_i^a \delta_j^b + \delta_j^a \delta_i^b \right)$$

e,

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N} + \frac{\partial L}{\partial K_{ij}} \frac{\partial K_{ij}}{\partial N} = \sqrt{h} \left( K^{ij}K_{ij} - K^2 - {}^3R \right) = 0. \quad (2.18)$$

Para a variação de  $N_i$  só temos dependência através de  $K_{ij}$ .

$$\frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial L}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial N_{i;j}} \right)_{;j} = 0$$

como  $\frac{\partial K_{ab}}{\partial N_{i;j}} = \frac{1}{N} \delta_{ab}^{ij}$  e usando o resultado de (2.17) encontramos

$$2\sqrt{h} \left( K_j^i - \delta_j^i K \right) = 0 \quad (2.19)$$

Na variação com relação a  $h_{ij}$  é importante lembrar que a função  ${}^3R$  depende de  $h_{ij}$ , e que  $K_{ij}$  depende de através de  $\dot{h}_{ij}$  e também de  $N_{i;j}$  já que este último possui a conexão  ${}^3\Gamma_{ij}^a$ .

Num referencial onde a conexão se anula, temos que as relações se seguem:

$$\begin{aligned} \delta^3 R_{ij} &= \left( \delta^3 \Gamma_{ij}^a \right)_{;a} - \left( \delta^3 \Gamma_{ia}^a \right)_{;j} \\ \delta^3 \Gamma_{ij}^a &= \frac{1}{2} h^{ak} \left( (\delta h_{kj})_{;i} + (\delta h_{ki})_{;j} - (\delta h_{ij})_{;k} \right) \end{aligned}$$

e já que, ao contrário da conexão,  $\delta^3 \Gamma$  é um verdadeiro tensor, estas relações são tensoriais o que garante suas validades em qualquer referencial.

Encontramos depois de alguns cálculos que

$$\frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0 \Rightarrow \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{K}_{ij} = & -N \left[ {}^3R_{ij} + KK_{ij} - 2K_i^m K_{mj} \right] + N_{i;j} - N_{m;i} K_j^m + \\ & -N_{m;j} K_i^m - N^m K_{ij;m} \end{aligned}$$

As equações (2.18)-(2.20) são equivalentes as três possíveis projeções das equações de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu &= 0 \\ G_{\mu\nu} \eta^\mu \perp_\alpha^\nu &= 0 \\ G_{\mu\nu} \perp_\beta^\mu \perp_\alpha^\nu &= 0 \end{aligned}$$

sendo portanto as equações que regem a gravitação quando a separação (3+1) for possível. Dentre as três, a única equação que possui derivada temporal de segunda ordem da variável dinâmica  $h_{ij}$  é a (2.20), o que nos leva a concluir que esta é a equação dinâmica enquanto que as outras são apenas equações de vínculo. As equações (2.18) e (2.19) restringem as possíveis configurações das hipersuperfícies a  $t$  constante. Ficará mais claro quando tivermos estabelecido os parênteses de Poisson associados aos vínculos da densidade hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral.

De posse da densidade lagrangeana podemos prosseguir à formulação hamiltoniana. A partir da densidade lagrangeana encontramos as seguintes densidades de momentum:

$$P \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (2.21)$$

$$P^i \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0 \quad (2.22)$$

$$\Pi^{ij} \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -h^{\frac{1}{2}} (K^{ij} - h^{ij} K) \quad (2.23)$$

(obs: note que o momentum  $\Pi^{ij}$  é uma densidade tensorial do tri-espaco de peso 1.)

Logo temos,

$$\begin{aligned} h_{ij}\Pi^{ij} &\doteq \pi = 2\sqrt{h}K \Rightarrow \\ \Rightarrow K^{ij} &= -\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\Pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2}\pi\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \dot{h}_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi\right) + N_{(i;j)} \quad (2.25)$$

As equações (2.21) e (2.22) nos mostram que este sistema possui vínculos. Não é possível escrever as velocidades generalizadas como função dos momentos e das coordenadas.

Precisamos então apelar para o formalismo desenvolvido por Dirac, Bergmann e outros, para construir um formalismo hamiltoniano consistente. Como este formalismo foi descrito na seção anterior, apenas me restringirei a aplicá-lo.

Por definição, a hamiltoniana canônica se escreve:

$$\begin{aligned} H_c &\doteq P\dot{N} + P^i\dot{N}_i + \Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - L = \Pi^{ij}\left[\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi\right) + N_{(i;j)}\right] + \\ &\quad -N\sqrt{h}\left[\frac{1}{h}\left(\Pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2}\pi\right)\left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi\right) - \frac{\pi^2}{4h} + {}^3R\right] = \\ &= N\left[G_{abcd}\Pi^{ab}\Pi^{cd} - \sqrt{h}{}^3R\right] + 2\Pi^{ij}N_{i;j} \end{aligned}$$

com  $G_{abcd} \doteq \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd})$ , e devido aos vínculos (2.21) e (2.22) temos a hamiltoniana total:

$$H_T \doteq \int dt d^3x \left( N H_0 + N_i H^i + \lambda P + \lambda_i P^i \right) \quad (2.26)$$

onde,

$$H_0 \doteq G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}}{}^3R \text{ (super-hamiltoniana)}$$

$$H^i \doteq -2\Pi^{ij}_{;j} \text{ (super-momentum).}$$

Para chegar a esta hamiltoniana usamos a condição de seções espaciais fechadas para descartar o termo  $(\Pi^{ij}N_j)_{;j}$ .

Precisamos garantir que os vínculos primários sejam satisfeitos durante

toda a evolução. Para isso, usaremos as relações

$$\begin{aligned}\{N(\vec{x}, t), P(\vec{y}, t)\} &= \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - t) \\ \{N_i(\vec{x}, t), P^j(\vec{y}, t)\} &= \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - t) \\ \{h_{ij}(\vec{x}, t), \Pi^{kl}(\vec{y}, t)\} &= \delta_{ij}^{kl} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - t)\end{aligned}$$

Imposição sobre os vínculos primários:

$$\begin{aligned}\dot{P}(\vec{x}, t) &\approx 0 = \int d^3z \{P(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \int d^3z \{P(\vec{x}, t), N(\vec{z}, t)\} H_0(\vec{z}, t) = \\ &= - \int d^3z \delta(\vec{x} - \vec{y}) H_0(\vec{z}, t) = -H_0(\vec{x}, t) \Rightarrow H_0(\vec{x}, t) \approx 0\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}^i(\vec{x}, t) &\approx 0 = \int d^3z \{P^i(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \int d^3z \{P^i(\vec{x}, t), N_j(\vec{z}, t)\} H_0^j(\vec{z}, t) = \\ &= -H_0^i(\vec{x}, t) \Rightarrow H_0^i(\vec{x}, t) \approx 0\end{aligned}\quad (2.28)$$

estes são novos vínculos que também devem ser preservados. Antes de realizar estes cálculos vamos introduzir a álgebra de Lie associada aos vínculos  $H_0$  e  $H^i$ .<sup>4</sup>

$$\{H_0(\vec{x}, t), H_0(\vec{y}, t)\} = \left( H^i(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} - H^i(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.29)$$

$$\{H_i(\vec{x}, t), H_k(\vec{y}, t)\} = \left( H_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} - H_i(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.30)$$

$$\{H_0(\vec{x}, t), H_i(\vec{y}, t)\} = H_0(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.31)$$

Devido a esta álgebra pode-se verificar que a imposição dos vínculos serem preservados ao longo da evolução é satisfeito trivialmente, ou seja,  $\dot{H}_0(\vec{x}, t) \approx 0$  e  $\dot{H}_i(\vec{x}, t) \approx 0$ , e sendo assim eles não geram novos vínculos. É fácil verificar que todos os parênteses de Poisson entre os vínculos (2.21), (2.22), (2.27) e (2.28) são zero, e então todos os quatro são vínculos de primeira classe. Como a equação (2.26) já inclui todos os vínculos de primeira classe, esta é a hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral.

---

<sup>4</sup>Estes cálculos embora simples são muito extensos e facilmente encontrados na literatura, por isso não os reproduzirei.

Vamos verificar se esta hamiltoniana de fato reproduz as equações de Einstein:

$$\dot{N}(\vec{x}, t) = \int d^3z \{N(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \lambda(\vec{x}, t) \quad (2.32)$$

$$\dot{N}_i(\vec{x}, t) = \int d^3z \{N_i(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \lambda_i(\vec{x}, t) \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ik}(\vec{x}, t) &= \int d^3z \{h_{ik}(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \\ &= \frac{N(\vec{x}, t)}{\sqrt{h}} [2\Pi_{ik}(\vec{x}, t) - h_{ik}(\vec{x}, t)\Pi(\vec{x}, t)] + N_{i;k}(\vec{x}, t) + N_{k;i}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^{ik}(\vec{x}, t) &= \int d^3z \{\Pi^{ik}(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \\ &= -N\sqrt{h} \left( {}^3R^{ik} - \frac{h^{ik}}{2} {}^3R \right) + \frac{Nh^{ik}}{2\sqrt{h}} \left( \Pi_{lm}\Pi^{lm} - \frac{\Pi^2}{2} \right) - \frac{2N}{\sqrt{h}} \left( \Pi^{im}\Pi_m^k - \frac{\Pi\Pi^{ik}}{2} \right) \\ &\quad + \sqrt{h} \left( N^{,i;k} - N_{;m}^m h^{ik} \right) + \sqrt{h} \left( \frac{N^m \Pi^{ik}}{\sqrt{h}} \right)_{;m} - 2\Pi^{m(i} N_{;m}^{k)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

As duas primeiras equações nos permitem tratar as variáveis  $N$  e  $N_i$  como meros multiplicadores de Lagrange para os vínculos (2.27) e (2.28). A equação (2.34) apenas define as relações entre as “velocidades” ( $\dot{h}_{ij}$ ) e os momenta. A verdadeira e única equação dinâmica é a (2.35). Esta equação é equivalente a única equação dinâmica (2.20) do formalismo Lagrangeano, e os vínculos (2.27) e (2.28) são equivalentes respectivamente as equações (2.18) e (2.19). Assim fica mostrado que este sistema hamiltoniano reproduz as equações de Einstein.

Devido ao fato dos vínculos (2.27) e (2.28) satisfazerem a álgebra de Lie (2.29) - (2.31), existem relações e condições impostas sobre a evolução temporal do sistema. A partir desta álgebra pode-se provar os seguintes teoremas:

1. Se os vínculos são satisfeitos em uma dada hipersuperfície, e a evolução temporal é dada pelas equações de Hamilton, então os vínculos serão satisfeitos ao longo de toda a evolução.

2. Se os vínculos são satisfeitos para duas hipersuperfícies arbitrárias, então quantidades canônicas em duas hipersuperfícies quaisquer são necessariamente evoluídas a partir das equações de Hamilton.
3. Se a função principal de Jacobi (S) satisfizer a super-hamiltoniana em um dado ponto ( $\vec{x}_0$ ) e o supermomentum em toda a hipersuperfície, então ela também satisfará o vínculo da super-hamiltoniana em toda hipersuperfície

$$H_0(\vec{x}_0, t)[S] \approx 0, H_i(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \Rightarrow H_0(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \forall \vec{x} \text{ e } t \text{ fixo.}$$

4. Se a função principal de Jacobi (S) satisfizer a super-hamiltoniana em qualquer ponto da hipersuperfície, então necessariamente também satisfará o super-momentum em qualquer ponto

$$H_0(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \Rightarrow H_i(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \forall \vec{x} \text{ e } t \text{ fixo.}$$

Os vínculos (2.27) e (2.28), embora secundários, são vínculos de primeira classe. Espera-se então que eles sejam geradores de transformações de calibre.

Para o vínculo  $H_0$ , a única transformação não nula é para a variável  $h_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \delta h_{ij}(\vec{x}) &= \int d^3z \epsilon(\vec{z}) \{h_{ij}(\vec{x}), H_0(\vec{z})\} = \\ &= \int d^3z \epsilon(\vec{z}) G_{abkl}(\vec{z}) \left\{ h_{ij}(\vec{x}), \Pi^{ab}(\vec{z}) \Pi^{kl}(\vec{z}) \right\} = \\ &= \epsilon(\vec{x}) \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \Pi_{ij}(\vec{x}) - \frac{h_{ij}(\vec{x})}{2} \Pi(\vec{x}) \right) = \\ &= -2\epsilon(\vec{x}) K_{ij}(\vec{x}) = -2\epsilon(\vec{x}) \mathcal{L}_{\eta^\alpha}(h_{ij}) \end{aligned}$$

Esta transformação gera deslocamento na direção do vetor tipo-tempo  $\eta^\alpha(\tau)$  perpendicular a tri-hipersuperfície. Enquanto a hamiltoniana total gera deslocamentos no parâmetro  $t$ , a super-hamiltoniana gera deslocamentos no parâmetro  $\tau$ .

Vejamos agora o vínculo do super-momentum ( $H_i$ ):

- $$\begin{aligned}
\bullet \delta h_{ij}(\vec{x}) &= \int d^3z \{h_{ij}(\vec{x}), H_a(\vec{z})\} \chi^a(\vec{z}) = \\
&= -2 \int d^3z \chi^a(\vec{z}) \left\{ h_{ij}(\vec{x}), \left( \Pi_{,b}^{ab} + \Pi^{bc} \Gamma_{bc}^a \right) \right\} = \\
&= -2 \int d^3z \chi^a(\vec{z}) \left( \frac{\partial}{\partial z^b} \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_{ij}^{ab} + \delta_{ij}^{bc} \Gamma_{bc}^a \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial x^b} \chi^a(\vec{x}) \delta_{ij}^{ab} - 2 \chi^a(\vec{x}) \Gamma_{ij}^a = \\
&= \chi^{(i;j)}(\vec{x}) = \mathcal{L}_{\chi^k}(h_{ij})
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\bullet \delta \Pi^{ij}(\vec{x}) &= \int d^3z \{ \Pi^{ij}(\vec{x}), H_a(\vec{z}) \} \chi^a(\vec{z}) = \\
&= -2 \int d^3z \left\{ \Pi^{ij}(\vec{x}), h_{ak}(\vec{z}) \Pi_{,b}^{kb}(\vec{z}) \right\} \chi^a(\vec{z}) = \\
&= 2 \chi^a(\vec{x}) \Pi_{,b}^{kb}(\vec{x}) \delta_{ak}^{ij} - 2 \int d^3z \chi^a(\vec{z}) h_{ak}(\vec{z}) \Pi^{bc}(\vec{z}) \left\{ \Pi^{ij}(\vec{x}), \Gamma_{bc}^k(\vec{z}) \right\} = \\
&= \chi^{(i}(\vec{x}) \Pi_{,b}^{j)b} - \chi^{(i}(\vec{x}) {}^3 \Gamma_{ab}^{j)} \Pi^{ab} - \left( \chi^{(i}(\vec{x}) \Pi^{j)b} \right)_{,b} + \left( \chi^m(\vec{x}) \Pi^{ij} \right)_{,m} = \\
&= -\chi_{,b}^{(i}(\vec{x}) \Pi^{j)b} + \chi_{,m}^m(\vec{x}) \Pi^{ij} + \chi^m(\vec{x}) \Pi_{,m}^{ij} = \mathcal{L}_{\chi^k}(\Pi^{ij})
\end{aligned}$$

Estas transformações são transformações gerais das coordenadas na tri-hipersuperfície, ou seja, as transformações de calibre são difeomorfismos da tri-hipersuperfície.

Concluimos assim o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano para a Teoria da Relatividade Geral.

## 2.4 Descrição de Fluidos através de Potencial-Velocidade

No início da década de 70 Bernard F. Schutz [26]-[27] desenvolveu um formalismo onde o campo de velocidades de um fluido é escrito em termos de seis potenciais associados a grandezas termodinâmicas. Este formalismo está fundamentado no teorema de Pfaff que garante ser suficiente apenas quatro potenciais para descrever a quadri-velocidade. Para facilitar a interpretação física dos potenciais costuma-se usar seis potenciais. As componentes co-variantes da quadri-velocidade podem ser representadas através de

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\nu} + \alpha \beta_{,\nu} + \theta s_{,\nu})$$

onde  $\mu$  é a entalpia específica ou massa inercial específica, e  $s$  a entropia específica.

Talvez fosse interessante rever rapidamente alguns conceitos termodinâmicos.

Seja um fluido perfeito de um componente com densidade de partículas  $n$  e número total  $N$ . Vamos definir densidade de massa inercial ( $\rho_0$ ) como sendo o produto da massa inercial de uma partícula ( $\overline{m}$ ) pela densidade de partículas. A energia interna específica ( $\Pi$ ) é definida como a diferença entre a densidade de energia total e a densidade de massa inercial, de forma a termos  $\Pi \doteq \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ , e a entalpia específica ou massa inercial específica ( $\mu$ ) é dada por  $\mu \doteq \frac{\rho + p}{\rho_0}$ .

De posse dessas definições, usaremos a primeira e segunda leis da termodinâmica para expressar a pressão do fluido como função da entropia específica e da entalpia específica.

Primeira Lei:  $\delta Q = dE + p dV = \rho dV + V d\rho + p dV = V d\rho + (\rho + p) dV$

Definição da entropia:  $\delta Q = T dS$

Temos também as seguintes relações:

- $V = \frac{N}{n} \Rightarrow dV = -\frac{V}{n} dn$
- $\Pi = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Rightarrow d\rho = (1 + \Pi) d\rho_0 + \rho_0 d\Pi$

- $\frac{dn}{n} = \frac{d\rho_0}{\rho_0}$
- $d\mu = d\left(\frac{\rho+p}{\rho_0}\right) = d\Pi + P d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) + \frac{1}{\rho_0} dp$

combinando tudo encontramos:

$$\begin{aligned} T dS &= \frac{N}{n} \left( d\rho - (\rho + p) \frac{dn}{n} \right) = N\bar{m} \left( d\Pi + p d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow T ds &= d\Pi + p d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \end{aligned}$$

e finalmente,

$$dp = \rho_0 d\mu - \rho_0 T ds$$

Vamos considerar um fluido com equação de estado  $p = \lambda \rho = (\gamma - 1)(1 + \Pi) \rho_0$  ( $\gamma = 1 + \lambda$  é constante).

Neste caso podemos integrar a primeira lei da termodinâmica,

$$\begin{aligned} T ds &= d\Pi + p d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = d(1 + \Pi) + (\gamma - 1)(1 + \Pi) \rho_0 d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = \\ &(1 + \Pi) \left[ d \ln(1 + \Pi) - (\gamma - 1) d \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_{0r}}\right) \right] \end{aligned}$$

onde  $\rho_{0r}$  é uma constante de integração para tornar o ln adimensional.

Note que:

$$\frac{1 + \Pi}{T} = \frac{\rho}{T \rho_0} = \frac{\rho k r}{T \rho_0 k r} = \text{constante} = s_0$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $r$  é característico de cada fluido. Dizemos que este calculo é constante pois para um fluido perfeito  $k r T$  é proporcional a energia.

Temos então após a integração que

$$\exp\left\{\frac{s}{s_0}\right\} = (1 + \Pi) \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0r}}\right)^{1-\gamma} \Rightarrow \rho_0 = \rho_{0r} \exp\left(\frac{s}{(1-\gamma)s_0}\right) (1 + \Pi)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e lembrando que  $\rho = \rho_0 (1 + \Pi)$  e  $\mu = \gamma (1 + \Pi)$

$$\rho = \rho_{0r} \exp\left(\frac{s}{(1-\gamma)s_0}\right) \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

## Equações de movimento e tensor energia-momento

Um fluido formado de apenas um tipo de constituinte é completamente definido pela sua equação de estado,  $p = p(\mu, s)$ , e pelo seu tensor energia-momento,  $T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) U^\mu U^\nu = p g^{\mu\nu} + \rho_0 \mu U^\mu U^\nu$ .

Estamos assumindo que o campo de velocidades é normalizado ( $U^\mu U_\mu = -1$ ).<sup>5</sup> Num sistema de coordenada comóvel o tensor é diagonal, com  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ , já que o fluido não apresenta viscosidade e nem condução de calor.

A condição de conservação do número de partículas pode ser expressa

$$(\rho_0 U^\alpha)_{;\alpha} = 0$$

e as equações de movimento são dadas pela imposição do tensor energia-momento ter divergência nula. De fato, impondo  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$  e projetando perpendicular e sobre a hipersuperfície encontramos:

$$\begin{aligned} U_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta} &= U^\alpha (p_{,\alpha} - \rho_0 \mu_{,\alpha}) = -U^\alpha (\rho_0 T s_{,\alpha}) = 0 \Rightarrow U^\alpha s_{,\alpha} = 0 \\ h_{\alpha\sigma} T^{\sigma\beta}_{;\beta} &= h^\sigma_\alpha (p_{,\sigma} + \rho_0 \mu U_{\sigma;\beta} U^\beta) = 0 \Rightarrow h^\sigma_\alpha p_{,\sigma} = \rho_0 \mu U_{\alpha;\beta} U^\beta \end{aligned}$$

A primeira equação nos mostra que para um fluido perfeito a entropia se conserva ao longo das linhas de universo do elemento de fluido, o que esta de pleno acordo com o fato de não haver fluxo de calor ( $T ds = \delta q$ ).

A segunda equação nada mais é do que a conhecida lei de força para um fluido relativístico. Se tomarmos  $U^\alpha = \delta_0^\alpha$  encontramos,

$$-\vec{\nabla} p = \rho_0 \mu \frac{d\vec{v}}{d\tau} = (\rho + p) \frac{d\vec{v}}{d\tau}$$

onde  $\vec{v}$  é a tri-velocidade e  $\tau$  o tempo próprio.<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>Isto implica que  $U^\mu U_{\mu;\nu} = 0$

<sup>6</sup>Esta equação está de acordo com a interpretação da entalpia específica ( $\mu = \frac{e+p}{\rho_0}$ ) como massa inercial específica

## Equações de movimento na representação Potencial-Velocidade

Seja o campo de velocidade,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\nu} + \theta s_{,\nu})$$

onde  $s$  e  $\mu$  são respectivamente a entropia e a energia interna específicas. As funções  $\phi$  e  $\theta$  serão esclarecidas mais adiante.

Em geral também se introduz um termo  $\alpha \cdot \beta_{,\nu}$ , no entanto este termo esta associado ao rotacional do campo, que para o nosso caso é zero.

Vamos impor que este campo seja normalizado, ou seja, para qualquer ponto temos

$$g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -1 \Rightarrow \mu^2 = -g^{\alpha\beta} (\phi_{,\alpha} + \theta s_{,\alpha}) (\phi_{,\beta} + \theta s_{,\beta})$$

Conseguimos então escrever a entropia específica como função da métrica e das três funções  $\phi$ ,  $\theta$ , e  $s$ .

A proposta é mostrar que com este campo de velocidades e a Lagrangeana  $L = \int d^3x \sqrt{-g} (R + 16\pi p)$ , recuperamos todas as equações conhecidas para um fluido perfeito. Para tanto temos que variar a ação com relação a métrica e as funções  $\phi$ ,  $\theta$  e  $s$ .

Seja a ação  $S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 16\pi p)$ , as suas variações com relação aos campos nos fornecem,

- $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} R) = \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g}$
- $\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} (\sqrt{-g} p) = -\frac{1}{2} p g_{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \frac{\delta p}{\delta \mu} \frac{\delta \mu}{\delta g^{\alpha\beta}} \sqrt{-g}$

Da primeira equação da termodinâmica temos que  $\frac{\delta p}{\delta \mu} = \rho_0$ , e da normalização do campo de velocidades  $\frac{\delta \mu}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{\mu}{2} U_\alpha U_\beta$ .

Logo,

$$\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} (\sqrt{-g} p) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} [p g_{\alpha\beta} + (\rho + p) U_\alpha U_\beta]$$

Da variação da ação com relação a métrica chegamos então a conhecida equação de Einstein para um fluido perfeito:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 8\pi (p g_{\alpha\beta} + (\rho + p) U_\alpha U_\beta)$$

Por procedimento análogo encontramos para a variação com relação aos outros campos.

- $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow (\rho_0 U^\beta)_{;\beta} = 0$  conservação do número de partículas
- $\frac{\delta S}{\delta \theta} = 0 \Rightarrow s_{,\alpha} U^\alpha = 0$  entropia por partícula é conservada
- $\frac{\delta S}{\delta s} = 0 \Rightarrow T = \theta_{,\alpha} U^\alpha$  definição da temperatura a partir do campo  $\theta$

### Hamiltoniana associada

Anteriormente estabelecemos que a Lagrangeana  $L = \int d^3x \sqrt{-g} (R + 16\pi p)$ , conjuntamente ao campo de velocidade  $U_\nu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\nu} + \theta s_{,\nu})$  define as equações de movimento para um fluido perfeito. Para a construção da Hamiltoniana precisamos dos momenta canonicamente conjugados as variáveis  $\phi$ ,  $\theta$ , e  $s$ , para a matéria e a  $g_{\alpha\beta}$  para a gravitação.

Por cálculo direto encontramos,

- $P_\phi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = -\sqrt{-g} \rho_0 U^0$
- $P_s \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{s}} = -\sqrt{-g} \rho_0 U^0 \theta = \theta P_\phi$
- $P_\theta \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = 0$

A densidade Hamiltoniana,  $H \equiv \sum_i P_i \dot{\phi}_i - L$ , pode ser calculada e encontramos  $H = \mu U_0 P_\phi - \sqrt{-g} p = -\sqrt{-g} [p + (\rho + p) U_0 U^0] = \sqrt{-g} T^0_0$ , como deveria ser.

Para espaços-tempo que são do tipo  $R \otimes M^3$ , onde  $M^3$  é uma superfície espacial arbitrária, a forma da métrica no elemento de linha se escreve,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt)$$

onde  $N$  é a chamada função lapso e  $N^i$  são as funções deslocamento, todas podendo depender tanto de  $t$  quanto de  $x^i$ .

Quando nos restringimos a métricas homogêneas e isotrópicas, a métrica assume uma forma mais simples onde  $N^i = 0$  e suas componentes só dependem do tempo cosmológico.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + a^2(t) w_{ij} dx^i dx^j \\ w_{ij} dx^i dx^j &= \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2) \end{aligned}$$

Ao estudar a gravitação através do princípio variacional, propagamos a métrica da hipersuperfície espacial e impomos que a sua variação seja nula nos extremos, ou seja, entre dois tempos fixos arbitrários. O espaço formado por todas as métricas possíveis é chamado de superespaço. O superespaço, embora seja de fato o objeto de estudo, muitas vezes não é tratável, e como primeira aproximação podemos impor certas simetrias fisicamente aceitáveis. Um subconjunto do superespaço, chamado de minisuperespaço, é formado por métricas homogêneas e isotrópicas. Os graus de liberdade no caso de minisuperespaços caem de  $3 \times \infty^3$  (três graus de liberdade para cada ponto do espaço) para apenas 3 já que o espaço é homogêneo e isotrópico.

Em geral, se impor certas simetrias e depois calcular as equações dinâmicas através do princípio variacional é diferente de calcularmos as equações de movimento e depois impormos as mesmas simetrias. No entanto, para o caso de métricas cuja parte espacial é homogênea e isotrópica, com elemento de linha  $ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) w_{ij} dx^i dx^j$ , e um fluido perfeito, a variação comuta com a imposição de simetrias desde que não fixemos a gauge temporal (função lapso). Isto se deve ao fato de não perdermos informação nenhuma ao impormos as simetrias antes da variação.

Fazendo referência as equações de Einstein, temos

1.  $G_0^0 = T_0^0$
2.  $G_i^0 = T_i^0$
3.  $G_j^i = T_j^i$

A função lapso é importante para garantir a primeira equação. A segunda é satisfeita trivialmente, pois como o fluido é perfeito  $T_i^0$  é zero (não há fluxo de calor nem de momento), e devido as simetrias  $G_i^0$  também é zero. Isto não ocorre por exemplo num espaço-tempo não-homogêneo onde esta equação acaba por impor vínculos na métrica já que  $T_i^0 = 0$  mas  $G_i^0$  não é necessariamente zero.

Para a métrica em questão, as variáveis do potencial-velocidade se escrevem:

- $\mu^2 = -g^{\alpha\beta} (\phi_{,\alpha} + \theta s_{,\alpha}) (\phi_{,\beta} + \theta s_{,\beta}) = -g^{00} (\dot{\phi} + \theta \dot{s})^2 =$   
 $= \frac{1}{N^2} (\dot{\phi} + \theta \dot{s})^2 \Rightarrow \mu N = (\dot{\phi} + \theta \dot{s}) \Rightarrow U_0 = N \Rightarrow U^0 = -\frac{1}{N}$
- $\sqrt{-g} = N a^3 \sqrt{w}$        $w$  é o determinante de  $w_{ij}$

lembrando que

$$\frac{\mu}{\gamma} = \rho_0^{(\gamma-1)} \rho_{0r}^{(1-\gamma)} \exp\left(\frac{s}{s_0}\right) = \left(\frac{P_\phi N}{\sqrt{-g}}\right) \rho_{0r}^{(1-\gamma)} \exp\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

temos então para a densidade hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_{mat} &= -\sqrt{-g} (p + (\rho + p) U_0 U^0) = \sqrt{-g} \rho = N \frac{\mu}{\gamma} P_\phi \\ &= N a^{-3(\gamma-1)} \rho_{0r}^{(1-\gamma)} \exp\frac{s}{s_0} P_\phi^\gamma w^{\frac{(1-\gamma)}{2}} \end{aligned}$$

Como o único termo que depende de posição é o  $w$  (determinante da parte espacial), podemos normalizar a integral em todo espaço de forma a absorver este termo. Assim temos para a hamiltoniana<sup>7</sup>

$$H_{mat} = N a^{-3(\gamma-1)} \rho_{0r}^{(1-\gamma)} \exp\frac{s}{s_0} P_\phi^\gamma$$

<sup>7</sup>Note que  $P_s$  não aparece na hamiltoniana, o que implica que  $s$  é constante e assim  $\dot{P}_s$  também é constante.

Vamos fazer uma transformação canônica para simplificar a forma da hamiltoniana. Definamos,

- $T \equiv -P_s \exp^{-\frac{s}{s_0}} \rho_{0r}^{(\gamma-1)} s_0 P_\phi^{-\gamma}$
- $\xi \equiv \left( \phi + \frac{\gamma s_0 P_s}{P_\phi} \right)$
- $P_T \equiv \exp^{\frac{s}{s_0}} \rho_{0r}^{(1-\gamma)} P_\phi^\gamma$
- $P_\xi \equiv P_\phi$

Nestas novas variáveis a hamiltoniana da matéria se escreve:

$$H_{mat} = N P_T a^{-3(\gamma-1)}$$

Note que a variável T é proporcional ao tempo, já que  $P_\phi$ ,  $s$ , e  $\dot{P}_\phi$  são constantes, ou seja  $P_s$  é linear com o tempo. Desta forma a variável T pode ser tomada naturalmente como o tempo. A hamiltoniana é linear no momento canonicamente conjugado ao tempo. Este é um bom critério para estabelecer qual variável será tratada como tempo, lembre-se que na equação de Schrödinger a derivada com relação ao tempo é de primeira ordem e as demais de segunda ordem. O problema da equação de Wheeler-DeWitt, equação encontrada através da quantização canônica, é justamente não aparecer nenhum momento canônico linear na densidade hamiltoniana. Esta equação que deveria ser a equação dinâmica da teoria aparentemente não evolui.

Tendo analisado a densidade hamiltoniana da matéria, vamos agora considerar a parte associada a gravitação para este modelo de minisuperespaço.

Fazendo alusão a seção anterior, podemos calcular as quantidades relevantes utilizando a métrica deste minisuperespaço.

$$h_{ij} = a^2 w_{ij} \Rightarrow \dot{h}_{ij} = 2 a \dot{a} w_{ij}$$

$$N_i = 0$$

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \dot{h}_{ij} = -\frac{a \dot{a}}{N} w_{ij}$$

$$\sqrt{-g} = N \sqrt{h} = N a^3 \sqrt{w}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\sqrt{h}\dot{k} &= (\sqrt{h}k)' + N\sqrt{h}k^2 \\ \sqrt{h}h^{ab}N_{,ab} &= (\sqrt{h}h^{ab}N_{,a})_{,b}\end{aligned}$$

Desta forma temos,

$$\sqrt{-g}R = N\sqrt{h}(k_{lm}k^{lm} - k^2 + {}^3R)$$

Para chegar a este resultado os termos de superfície foram descartados.<sup>8</sup>

Como a parte espacial é maximalmente simétrica o escalar de curvatura é constante  ${}^3R \equiv h^{ij}R_{ij} = \frac{w^{ij}}{a^2}R_{ij} = 6a^{-2}\epsilon$ , onde  $\epsilon$  pode assumir os valores 0,  $\pm 1$ .

Então segue que

$$\sqrt{-g}R = 6\sqrt{w}\left(-\frac{a\dot{a}^2}{N} + Na\epsilon\right).$$

Da mesma forma que fizemos com a lagrangeana da matéria, vamos normalizar e integrar no espaço para encontrar a lagrangeana

$$L_g \equiv \int d^3x L = 3N\left(a\epsilon - \frac{a\dot{a}^2}{N^2}\right) \Rightarrow P_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 6\frac{a\dot{a}}{N}$$

e finalmente encontramos a hamiltoniana da gravitação

$$H_g = -N\left(\frac{P_a^2}{12a} + 3a\epsilon\right).$$

As variáveis dinâmicas desse formalismo são  $N$ ,  $a$ , e  $T$ . Note que como  $T$  não aparece na hamiltoniana,  $T$  é uma variável cíclica, ou seja  $\dot{P}_T$  é zero. Outro fato importante é não termos a variável canonicamente associada a  $N$ . A origem desta questão tem que ser esclarecida através da própria Lagrangeana. A Lagrangeana não depende de  $\dot{N}$ , o que torna o momento  $P_N \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0$ . Esta equação nos mostra um vínculo primário. Devemos

<sup>8</sup>Existe também um termo de derivada temporal que a princípio poderia dar contribuição não nula, mas como discutido anteriormente não levamos este termo em consideração assumindo que a "boa ação não possui este termo.

então acrescentar um termo  $\lambda P_N$  na hamiltoniana (  $\lambda$  é um multiplicador de lagrange).

$$H_T = N H + \lambda P_N \quad , \text{ sendo } H = -\frac{P_a^2}{12a} - 3a\epsilon + P_T a^{-3(\gamma-1)}.$$

Por consistência, o vínculo deve valer para todos os instantes

$$\dot{P}_N = 0 \Rightarrow H = 0$$

Este é um novo vínculo que é satisfeito trivialmente.

A evolução dinâmica será dada por:

- $\dot{a} = \{a, H_T\} = -\frac{NP_a}{6a}$
- $\dot{N} = \lambda$
- $\dot{T} = Na^{-3(\gamma-1)}$
- $\dot{P}_a = \frac{NP_a^2}{12a^2} - 3N\epsilon - 3(\gamma-1)P_T N a^{-3\gamma+4}$
- $\dot{P}_N = H = 0$
- $\dot{P}_T = 0$

Obs: O vínculo  $H = 0$  implica na equação de Friedmann:

$$H = 0 \Rightarrow \frac{P_a^2}{12a} = \frac{P_T}{a^{3(\gamma-1)}} - 3a\epsilon \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} = \frac{P_T}{3} a^{-3\gamma} - \frac{\epsilon}{a^2}$$

Em cosmologia costuma-se usar a gauge onde o termo  $g_{00} = -1$ , que é equivalente a fazer  $N=1$ . Nesta gauge, a equação de Friedmann se escreve:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = K \rho - \frac{\epsilon}{a^2} = \frac{K}{a^{3\gamma}} - \frac{\epsilon}{a^2}$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido perfeito, e  $K$  é constante. Assim vemos que classicamente a variável  $P_T$  é proporcional a quantidade de matéria total do fluido.

Por outro lado a variável  $T$  funciona como um tempo. Se escolhermos uma outra gauge onde  $N = a^{3(\gamma-1)}$  encontraremos que

$$\dot{T} = Na^{-3(\gamma-1)} = 1 \Rightarrow T = t + \text{const}$$

Esta escolha é perfeitamente cabível inclusive pela variável  $N$  funcionar como um multiplicador de Lagrange. De fato,  $\dot{N} = \lambda$  que é arbitrário.

## Capítulo 3

# Modelo de Friedmann-Robertson-Walker com poeira e radiação

Tendo estabelecido as teorias básicas que serão usadas no estudo do modelo de universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com poeira e radiação, podemos agora desenvolver o problema propriamente dito.

Para descrever os dois fluidos seguiremos o esquema desenvolvido por Bernard Schutz. Em meados do século XIX, A. Clebsch mostrou que qualquer fluido newtoniano pode ser representado por três potenciais, porém eles não possuem significado físico claro. Selinger e Whitham em 1968 conseguiram utilizando cinco potenciais contornar esta dificuldade para fluidos newtonianos. Na década de 70, Schutz estendeu este formalismo para fluidos relativísticos. Nesta representação o campo de velocidades de um fluido é descrito por seis potenciais associados a grandezas termodinâmicas.

Devido as simetrias do modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) podemos utilizar apenas quatro potenciais já que não haverá os termos associados ao rotacional do campo. Como foi visto no capítulo anterior, a hamiltoniana da matéria utilizando este formalismo potencial-velocidade se

escreve:

$$H_{mat} = N P_T a^{-3(\gamma-1)}.$$

No caso de poeira  $\gamma = 1$ , e para radiação  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Temos então que, para um universo de FRW permeado por poeira e radiação a ação pode ser escrita como,

$$S = \int d^4x \left( \dot{a} P_a + \dot{T} P_T + \dot{\phi} P_\phi - N \left[ \frac{P_a^2}{24a} + 6k a + \frac{P_T}{a} + P_\phi \right] \right).$$

Desta maneira, estamos entendendo a variável  $N$  como um mero multiplicador de Lagrange, o qual pode ser escolhido a gosto (escolha de gauge temporal). A variável  $a$  é o fator de escala da métrica,  $k$  pode assumir os valores  $0$  e  $\pm 1$ ,  $T$  a variável associada a radiação e  $\phi$  associada a poeira. Lembre-se que existe um vínculo que força a hamiltoniana a ser zero devido à teoria ser invariante por reparametrização temporal. Com efeito, a hamiltoniana é dada por

$$H = N H = N \left[ \frac{P_a^2}{24a} + 6k a + \frac{P_T}{a} + P_\phi \right], \quad (3.1)$$

e assim temos as seguintes equações:

$$\dot{a} = \{a, H\} = \frac{N}{12a} P_a \Rightarrow P_a = \frac{12a\dot{a}}{N} \quad (3.2)$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = N \quad (3.3)$$

$$\delta N = 0 \rightarrow H = 0 \Rightarrow \frac{P_a^2}{24a} = -6k a - \frac{P_T}{a} - P_\phi \quad (3.4)$$

$$\dot{P}_T = \dot{P}_\phi = 0 \Rightarrow P_\phi, P_T \text{ são constantes} \quad (3.5)$$

Combinando as duas primeiras equações, encontramos a equação de Friedmann para poeira e radiação

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -N^2 \left[ \frac{k}{a^2} + \frac{1}{6} \left( \frac{P_T}{a^4} + \frac{P_\phi}{a^3} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Se compararmos com a sua forma convencional escrita em tempo cósmico ( $N = 1$ )

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

temos que,

$$P_\phi = -16\pi G a^3 \rho_m$$

$$P_T = -16\pi G a^4 \rho_r$$

Se fixarmos a gauge  $\tau = T$ , ou seja, tomando relógios comoventes com o fluido de radiação e utilizando as equações de Hamilton encontramos

$$\dot{T} = 1 = \{T, H_T\} = \frac{N}{a} \Rightarrow N = a$$

Vemos então que esta escolha de gauge é equivalente a trabalhar com a coordenada de tempo conforme, e que neste caso específico temos  $\dot{\phi} = a$ . Todos os resultados serão obtidos utilizando esta gauge.

Devido a esta escolha, a variável associada a radiação servirá como o tempo natural do sistema. Neste espaço de fase reduzido encontramos a hamiltoniana

$$H = \frac{P_a^2}{24} + 6 k a^2 + a P_\phi. \quad (3.7)$$

## Comportamento Clássico

Se utilizarmos as equações de Hamilton, encontramos as seguintes equações dinâmicas:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{P_a}{12} \Rightarrow P_a = 12 \dot{a} \\ \dot{P}_\phi &= 0 \Rightarrow P_\phi = \text{constante} \\ \dot{P}_a &= 12 \ddot{a} = -(12 k a + P_\phi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ddot{a} + k a + \frac{P_\phi}{12} = 0\end{aligned}$$

com soluções,

$$a = \begin{cases} \frac{P_\phi}{12} \cos(\eta) + B \sin(\eta) - \frac{P_\phi}{12} & \text{para } k=1 \\ -\frac{P_\phi}{24} \eta^2 + B\eta & \text{para } k=0 \\ -\frac{P_\phi}{12} \cosh(\eta) + B \sinh(\eta) + \frac{P_\phi}{12} & \text{para } k=-1 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde foi feita uma escolha apropriada para a origem do tempo ocorrer na singularidade.

Pode-se ainda reescrever a constante  $B$  utilizando o momento quando a densidade de poeira se iguala a densidade de radiação, ou seja,  $\rho_m = \rho_r$  e assim obtemos,

$$a = \begin{cases} \left( \frac{2a_{eq}}{\eta_{eq}^2} \right) [1 - \cos(\eta) + \eta_{eq} \sin(\eta)] & \text{para } k=1 \\ a_{eq} \left[ 2 \frac{\eta}{\eta_{eq}} + \left( \frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)^2 \right] & \text{para } k=0 \\ \left( \frac{2a_{eq}}{\eta_{eq}^2} \right) [\cosh(\eta) + \eta_{eq} \sinh(\eta) - 1] & \text{para } k=-1 \end{cases}$$

onde  $a_{eq}$  é o valor do fator de escala no equilíbrio e  $\eta_{eq}^2 = \left[ \frac{3}{2\pi G \rho_{0m}} \right] = \left[ \frac{24}{\|P_\phi\| a_{eq}} \right]$ , com  $\rho_{0m}$  a densidade de matéria hoje.

Como veremos mais adiante, com a presença do potencial quântico existe a possibilidade de criação de matéria exótica, e por isso é construtivo analisar o comportamento clássico de um universo permeado por matéria exótica.

Para matéria convencional o fator de escala tem o comportamento descrito pelo gráfico.

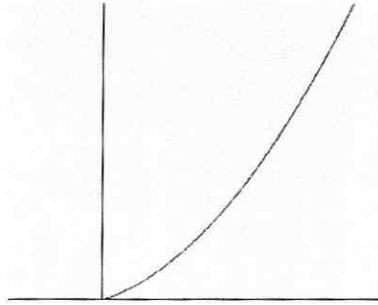


Figura 3.1: Comportamento do fator de escala para um universo permeado por poeira convencional ( $-P_\phi > 0$ ) regido pelas equações clássicas

No caso de matéria exótica, o comportamento é radicalmente diferente. Primeiro fato importante a salientar é com referência a equação de Friedmann (3.6). Note que neste caso, a densidade de radiação deve sempre ser superior a densidade de matéria, caso contrário a equação não tem solução já que o lado esquerda da equação é sempre positivo.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6} \left( \frac{\|P_T\|}{a^2} - \frac{\|P_m\|}{a} \right)$$

Além disso, com a evolução do fator de escala, o termo da poeira exótica cresce se tornando cada vez mais significativo até o instante onde os dois termos se igualam, o que implica  $\dot{a} = 0$ . A partir deste ponto o fator de escala volta a decrescer até o recluso. No tempo conforme o fator de desaceleração é dado por:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} + 1$$

e como  $\ddot{a}$  e  $a$  não vão a zero quando  $\dot{a} = 0$ , como podemos ver pela equação (3.8), o fator de desaceleração diverge quando a fator de escala atinge o seu valor máximo.

Assim, o comportamento para o fator de escala quando temos matéria exótica ( $-P_\phi < 0$ ) é qualitativamente descrito pelo gráfico

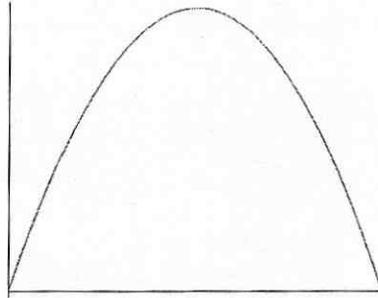


Figura 3.2: Comportamento do fator de escala para um universo permeado por poeira exótica ( $-P_\phi < 0$ ) regido pelas equações clássicas

## Comportamento Quântico

Em geral a hamiltoniana (3.7) não é hermitiana pois a variável  $a$  assume valores na semi-reta positiva<sup>1</sup>, por isso devemos impor condições sobre as funções de onda para garantirmos a hermiticidade da hamiltoniana.<sup>2</sup> Neste caso a condição pode ser escrita na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \left[ \frac{\partial \xi^*(a, \phi)}{\partial a} \psi \right]_{a=0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \left[ \frac{\partial \psi^*(a, \phi)}{\partial a} \xi \right]_{a=0}$$

Existe outra maneira mais simples de garantirmos a hermiticidade da hamiltoniana, a saber, restringirmos o seu domínio a funções de onda cuja norma é constante quando evoluída pela equação de Schrödinger. Este será o método utilizado mais adiante.

Projetando a equação de Schrödinger na base coordenada temos

$$i\hbar \frac{\partial \psi(a, \phi, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(a, \phi, t)}{\partial a^2} + 6ka^2 \psi(a, \phi, t) - i\hbar a \frac{\partial \psi(a, \phi, t)}{\partial \phi} \quad (3.9)$$

Como queremos utilizar a interpretação causal da mecânica quântica, é essencial reescrever esta equação com a função de onda na sua forma polar ( $\Psi = \rho(a, \phi, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(a, \phi, t)\right\}$ ).

A equação de Schrödinger é equivalente as seguintes duas equação reais:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 + a \frac{\partial S}{\partial \phi} + Q = 0 \quad \text{com } Q \doteq -\frac{\hbar^2}{2m\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial a^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} (a\rho^2) + \frac{\partial}{\partial a} \left( \rho^2 \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial a} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Para fins de comparação, vamos escrever essas mesmas equações em sua forma geral para coordenadas canônicas  $q_k$  e  $p_k$ .

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial q_k} \right)^2 + V \left( q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \rho^2 \dot{q}_k \right) = 0$$

<sup>1</sup>De fato poderíamos ter escolhido a semi-reta negativa que os resultados físicos seriam os mesmos.

<sup>2</sup>Para uma discussão mais profunda do tema: [28]-[30]

Nesta interpretação os momenta canonicamente conjugados são lidos a partir da equação tipo Hamilton-Jacobi (3.10) como

$$P_a \doteq \frac{\partial S(a, \phi, t)}{\partial a}$$

$$P_\phi \doteq \frac{\partial S(a, \phi, t)}{\partial \phi}$$

Porém, se quisermos interpretar (3.11) como uma equação de continuidade, somos forçados às seguintes relações para as velocidades generalizadas

$$\dot{a} \doteq \frac{1}{m} \frac{\partial S(a, \phi, t)}{\partial a}$$

$$\dot{\phi} \doteq a$$

Note que estas são justamente as equações encontradas para as velocidades generalizadas no regime clássico (3.2) e (3.3) na gauge em questão.

Existe ainda uma última relação oriunda de um vínculo de segunda classe, e por isso pode ser entendido como uma igualdade entre operadores quando quantizados, que nos fornece a equação:

$$P_\phi = n a^3 \quad \text{onde } n \text{ é a densidade da matéria.}$$

Temos então o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem que descreve o sistema,

$$\dot{a} \doteq \frac{1}{m} \frac{\partial S(a, \phi, t)}{\partial a} \tag{3.12}$$

$$\dot{\phi} \doteq a \tag{3.13}$$

$$n = \frac{1}{a^3} \frac{\partial S(a, \phi, t)}{\partial \phi} \tag{3.14}$$

É interessante notar que caso  $Q = 0$ , ou seja regime clássico, a solução geral para a função principal de Hamilton ( $S(a, \phi, t)$ ) será dada por  $S = W(a) + E.t + P_\phi.\phi$ , onde  $E$  e  $P_\phi$  são constantes. Neste caso, como  $P_\phi$  é proporcional a quantidade total de matéria do universo, não temos a criação nem aniquilação de matéria.

De fato, da equação (3.14) temos,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} S(a, \phi, t) = na^3 = \text{matéria total do universo} = P_\phi = \text{constante}$$

Porém, ao introduzirmos o termo  $Q(a, \phi, t)$ , tornamos a função principal de Hamilton uma função genérica das variáveis, possibilitando assim a criação e aniquilação de partículas justamente devido a efeitos quânticos.

### Caso k=0

Tomando o caso onde a seção espacial é plana temos a seguinte equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} - i\hbar a \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \quad (3.15)$$

Fazendo a corriqueira substituição,

$$\psi(a, \phi, t) = \chi(a) \exp\left\{-i\frac{\hbar}{2m}\beta t\right\} \exp\left\{-i\frac{\hbar}{2m}\lambda \phi\right\}$$

temos a seguinte equação para a variável  $a$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \chi(a) + \lambda a \chi(a) + \beta \chi(a) = 0.$$

Se fizermos a mudança de variável  $y = a + \frac{\beta}{\lambda}$ , encontramos a equação de Airy

$$\frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2} + \lambda y F(y) = 0 \quad \text{com } F(y) = \chi\left(y - \frac{\beta}{\lambda}\right).$$

As soluções desta equação são naturalmente as funções de airy  $F(y) = \sqrt{y} Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)$  e conseqüentemente,

$$\chi(a) = \sqrt{a + \frac{\beta}{\lambda}} \left[ A Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3}\left(a + \frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + B Z_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3}\left(a + \frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right]$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes com relação a coordenada  $a$ .

A solução mais geral possível será então uma superposição na forma

$$\begin{aligned} \Psi(a, \phi, t) = & \int d\beta d\lambda \exp\left\{-i\frac{\hbar}{2m}\beta t\right\} \exp\left\{-i\frac{\hbar}{2m}\lambda \phi\right\} \sqrt{a + \frac{\beta}{\lambda}} \times \\ & \times \left[ A(\beta, \lambda) Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3}\left(a + \frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + B(\beta, \lambda) Z_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3}\left(a + \frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right] \end{aligned}$$

e, como comentado anteriormente, é necessário impor certas condições sobre esta solução para garantirmos a hermiticidade da hamiltoniana.

Como exemplo irei utilizar a continuação natural de alguns trabalhos já existentes [31]-[32].

Ao se estudar a equação (3.9), em geral se supõe um comportamento de onda plana para a variável  $\phi$ , o que equivale a dizer que o estado do sistema é um autoestado com momento  $P_\phi$  bem definido. No entanto, tal procedimento não é o mais geral possível pois os graus de liberdade associados a coordenada  $\phi$  estão “congelados”. Naturalmente, para generalizarmos, é suficiente construir pacotes de onda com superposições adequadas uma vez que, sendo o espaço em questão plano, as funções de onda plana  $\exp(ikx)$  formam uma base completa para o espaço de Hilbert.

Voltemos ao caso específico  $k=0$ .

A solução da equação (3.15) pode ser encontrada de duas formas. Pode-se resolver diretamente a equação de Schrödinger ou então utilizar o método de propagadores. Ao utilizarmos propagadores, precisamos tomar cuidado com a integral funcional do fator de escala, pois ele está definido apenas na semi-reta positiva [29]. Por isso, para tornarmos o problema consistente, construímos os propagadores de acordo com as simetrias:

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= G(x - y, t) + G(x + y, t) && \text{para funções pares} \\ G(x, y, t) &= G(x - y, t) - G(x + y, t) && \text{para funções ímpares} \end{aligned}$$

Estas condições sobre o propagador estão vinculadas apenas a variável  $a$  ser definida na semi-reta positiva, e com isso não se garante de forma alguma a hermiticidade do operador Hamiltoniano. De fato, veremos que será necessário superpormos as soluções de onda plana para encontrarmos uma função de onda normalizável.

Para resolvermos a equação (3.15) assumimos inicialmente a forma

$$\Psi(a, \phi, t) = \psi_\lambda(a, t) \exp\left\{-i \frac{\phi \lambda}{\hbar}\right\}$$

e assim a equação se reduz a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\lambda(a, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \lambda a \right) \psi_\lambda(a, t).$$

Se supusermos uma função de onda inicial com dependência no fator de escala na forma

$$\psi_\lambda(a, 0) = \left( \frac{8\sigma}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -(\sigma + iq) a^2 \right\},$$

onde tanto  $\sigma$  quanto  $q$  são reais e  $\sigma > 0$ , a solução para um tempo posterior será dada por

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(a, t) = & \left( \frac{8\sigma m^2}{\pi \mu} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{m^2 \sigma}{\mu} \left( a - \frac{\lambda t^2}{2m} \right)^2 - i \frac{\lambda^2 t^3}{6m\hbar} - i \frac{\theta}{2} + \right. \\ & \left. + i \frac{m}{2\hbar t} \left[ \left( a + \frac{\lambda t^2}{2m} \right)^2 - \frac{m}{\mu} (m - 2q\hbar t) \left( a - \frac{\lambda t^2}{2m} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Vamos definir algumas relações que servem apenas para simplificar a forma final da função de onda,

$$\mu = 4(\sigma^2 + q^2) \hbar^2 t^2 - 4qm\hbar t + m^2$$

$$\nu = \left( \gamma + \frac{\sigma t^4}{4\mu} \right)^2 + \frac{t^6}{(24m\hbar\mu)^2} (\mu + 3m^2 - 6qm\hbar t)^2$$

$$\theta = \arctan \left[ \frac{2\sigma\hbar t}{m - 2q\hbar t} \right]$$

$$\tau = \arctan \left[ \frac{t^3 (\mu + 3m^2 - 6qm\hbar t)}{24m(\gamma\mu + \sigma t^4)} \right]$$

$$A = \left[ \frac{m\sigma t^2}{\mu} + i \frac{t}{2\mu\hbar} (\mu + m^2 - 2qm\hbar t) \right]^2 \left[ \gamma + \frac{\sigma t^4}{4\mu} - i \frac{t^3}{24m\mu\hbar} (\mu + 3m^2 - 6qm\hbar t) \right]$$

$$B = -\frac{2i}{\hbar} \left[ \frac{m\sigma t^2}{\mu} + i \frac{t}{2\mu\hbar} (\mu + m^2 - 2qm\hbar t) \right] \left[ \gamma + \frac{\sigma t^4}{4\mu} - i \frac{t^3}{24m\mu\hbar} (\mu + 3m^2 - 6qm\hbar t) \right]$$

$$C = -\frac{1}{\hbar^2} \left[ \gamma + \frac{\sigma t^4}{4\mu} - i \frac{t^3}{24m\mu\hbar} (\mu + 3m^2 - 6qm\hbar t) \right]$$

$$D = -2i\gamma\lambda_0 B$$

$$E = 4i\gamma\lambda_0\hbar C$$

$$F = -4\gamma^2\lambda_0^2\hbar^2 C$$

Vamos então fazer a superposição gaussiana,

$$\Psi(a, \phi, t) = \int d\lambda \exp^{-\gamma(\lambda-\lambda_0)^2} \psi_\lambda(a, t) \exp\left\{-i \frac{\phi \lambda}{\hbar}\right\} \quad (3.16)$$

e encontramos,

$$\begin{aligned} \Psi(a, \phi, t) = & \left(\frac{8\sigma\pi m^2}{\mu\nu}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{\left(\frac{\Re(A)}{4\nu} - \frac{\sigma m^2}{\mu}\right)a^2 + \frac{\Re(B)}{4\nu}a\phi + \frac{\Re(C)}{4\nu}\phi^2 + \frac{\Re(D)}{4\nu}a + \right. \\ & + \frac{\Re(E)}{4\nu}\phi + \frac{\Re(F)}{4\nu} + i\left[\left(\frac{\Im(A)}{4\nu} + \frac{m}{2\mu\hbar t}(\mu - m^2 + 2qm\hbar t)\right)a^2 + \frac{\Im(B)}{4\nu}a\phi + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Im(C)}{4\nu}\phi^2 + \frac{\Im(D)}{4\nu}a + \frac{\Im(E)}{4\nu}\phi + \frac{\Im(F)}{4\nu}\right] - i\frac{\theta + \tau}{2}\right\} \end{aligned}$$

Até agora não impusemos nenhuma condição sobre a função de onda, e por isso ainda temos que testar para verificar se a evolução dinâmica está realmente sendo unitária. Para tanto, calculemos a integral da norma ao quadrado da função de onda em todo o espaço

$$\int_0^\infty da \int_{-\infty}^\infty d\phi \|\Psi\|^2 = \sqrt{\frac{8\pi^3\hbar^2}{\gamma}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda_0 t^2}{2m}\right)\right).$$

Percebemos desta forma que a evolução só será unitária se a superposição gaussiana estiver centrada em zero ( $\lambda_0 = 0$ ).

Com referência as equações (3.12)-(3.14), as trajetórias para o caso  $\lambda_0=0$  são solução das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{a} & \doteq \frac{2\hbar}{m} \left(\frac{\Im(A)}{4\nu} + \frac{m}{2\mu\hbar t}(\mu - m^2 + 2qm\hbar t)\right) a + \hbar \frac{\Im(B)}{4\nu} \phi \\ \dot{\phi} & \doteq a \\ n & = \frac{\hbar}{a^3} \left(2\frac{\Im(C)}{4\nu} \phi + \frac{\Im(D)}{4\nu} a\right) \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de equações, foi utilizado um método de integração numérica com o auxílio do programa Maple. Analisando o limite  $t$  tendendo a zero, encontramos que o fator de escala se aproxima exponencialmente de um valor constante, e como existe uma arbitrariedade no valor absoluto do fator de escala, podemos tomar  $a(0) = 1$ .

Analisando o potencial quântico, percebemos que os efeitos quânticos são relevantes apenas próximo da origem.

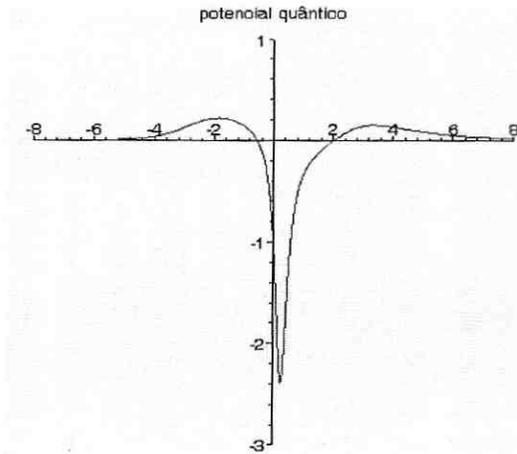


Figura 3.3: Comportamento do Potencial quântico. Para tempos longe da origem o potencial vai a zero, o que implica que estas regiões têm comportamento clássico

O gráfico a seguir mostra a evolução dinâmica do fator de escala,

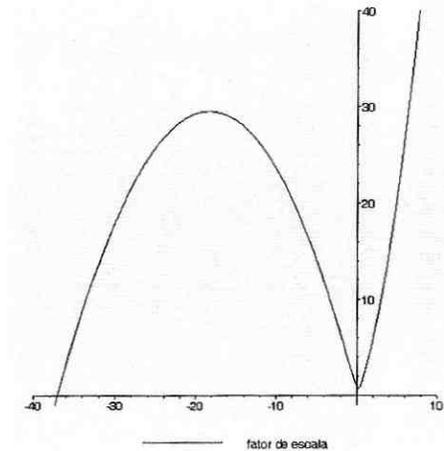


Figura 3.4: Evolução do fator de escala. Os efeitos quânticos evitam a singularidade perto da origem. Nas outras regiões o comportamento é essencialmente clássico. Para tempos negativos temos radiação e poeira exótica e para tempos positivos radiação e poeira convencional

O gráfico seguinte, com relação ao campo  $P_\phi$ , está associado a quantidade de matéria total do universo e sua natureza (dependendo do sinal de  $P_\phi$ ). Devido ao vínculo  $P_\phi = n a^3$ , sempre que o  $P_\phi$  variar teremos ou criação ou aniquilação de matéria.

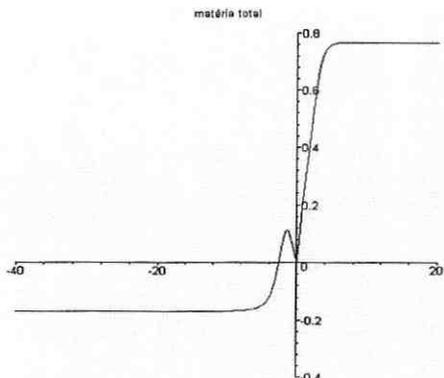


Figura 3.5: Evolução da matéria total do universo ( $-P_\phi$ ). O universo começa permeado por poeira exótica e devido aos efeitos quânticos próximo da origem esta poeira é transformada em poeira convencional. Quando o potencial quântico volta a se anular, temos novamente a conservação de matéria porém agora na forma de poeira convencional.

Podemos observar alguns fatos interessantes apartir destes gráficos. O comportamento para tempos muito grandes e positivos é exatamente o esperado classicamente: quantidade constante de matéria e universo em expansão, desacelerando como comprovado pelo gráfico (3.6) abaixo. Se fizermos uma leitura cronológica da evolução deste universo, vemos que ele nasce de um Big Bang permeado apenas por poeira exótica (densidade de energia negativa) e radiação, com um comportamento regido pelas equações clássicas (comportamento identico ao universo clássico permeado por poeira exótica e radiação analisado anteriormente). Perto do recolapso os efeitos quânticos evitam o colapso e transformam toda a matéria exótica em matéria convencional. Em seguida o potencial quântico vai a zero, e temos novamente a evolução regida pelas equações clássicas.

Analisamos então o fator de desaceleração ( $q$ ). Para a gauge de tempo

conforme o fator de desaceleração é dado por

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} + 1,$$

e no limite clássico para matéria convencional ( $a \propto \eta^2$ ) temos que  $q = \frac{1}{2}$ . Como podemos perceber pelo gráfico a seguir, o comportamento assintótico para tempos futuros é de fato clássico. Este comportamento está em consonância com o fato do potencial quântico ser relevante apenas em torno da origem.

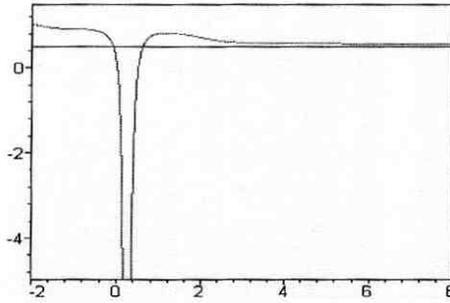


Figura 3.6: Fator de desaceleração para tempos positivos. Assintoticamente o fator de desaceleração tende para o valor constante  $1/2$ , de acordo com o resultado clássico comprovando que de fato nesta região estamos em regime clássico.

O gráfico a seguir mostra o comportamento do fator de desaceleração para tempos negativos.

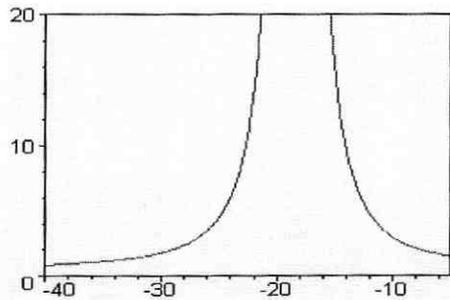


Figura 3.7: Fator de desaceleração para tempos negativos. Novamente estamos em regime clássico, porém com a presença de poeira exótica. A descontinuidade mostrada representa a região onde  $\dot{a} = 0$ .

No caso clássico, o fator de desaceleração para tempos negativos é uma função do tempo dada por

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\|B\|}{\|B\| + \frac{\|P_\phi\|\eta}{12}} \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{24 a_{eq}}{24 a_{eq} + \eta_{eq} \|P_\phi\| \eta} \right)^2.$$

E assim novamente reobtemos consistêntemente o comportamento clássico para regiões longe da origem. A descontinuidade representa a região de valor máximo local para o fator de escala.

### Caso k=1

Neste caso a equação de Schrödinger se escreve:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(a, \phi, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{mw^2}{2} a^2 - i\hbar a \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi(a, \phi, t). \quad (3.17)$$

Se fizermos a transformação canônica,

$$\begin{aligned} \xi &\doteq \sqrt{\frac{mw}{\hbar}} a + \frac{P_\phi}{\sqrt{m\hbar w^3}} & \sigma &\doteq \sqrt{\frac{mw^3}{\hbar}} \phi + \frac{P_a}{\sqrt{m\hbar w}} \\ P_\xi &\doteq \frac{P_a}{\sqrt{m\hbar w}} & P_\sigma &\doteq \frac{P_\phi}{\sqrt{m\hbar w^3}} \end{aligned}$$

a nova hamiltoniana se escreve:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hbar w}{2} (\hat{P}_\xi^2 + \xi^2)}_{\text{oscilador harmônico}} - \underbrace{\frac{\hbar w}{2} \hat{P}_\sigma^2}_{\text{partícula livre}} \quad (3.18)$$

Decompondo a função de onda na forma

$$\Psi(\xi, \sigma, t) = \chi(\xi) \exp \left\{ -i \left( \varepsilon w t + \sqrt{2k} \sigma \right) \right\}$$

a equação (3.18) projetada na base coordenada simplifica para

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \chi(\xi) - \left( \xi^2 + 2(\varepsilon - k) \right) \chi(\xi) = 0$$

As soluções desta equação são

$$\chi_n(\xi) = \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} h_n(\xi),$$

onde  $h_n(\xi)$  é o  $n$ -ésimo polinômio de Hermite e, devido a condições de contorno no infinito, sujeito a seguinte quantização

$$(\varepsilon - k) = n + \frac{1}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Chegamos então a solução mais geral possível na forma,

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \sigma, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \int dk \chi_n(\xi) \left[ D_n(k) \exp\{i\sigma\sqrt{2k}\} + \right. \\ & \left. + G_n(k) \exp\{-i\sigma\sqrt{2k}\} \right] \times \exp\{-i\varepsilon_n wt\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

$D_n(k)$  e  $G_n(k)$  são coeficientes arbitrários que podem depender apenas do parâmetro  $k$ , e  $\varepsilon_n \doteq (k + n) + \frac{1}{2}$ .

A transformação canônica feita para simplificar o problema mescla coordenadas com momenta generalizados e por isso, é preciso tomar cuidado ao aplicar a interpretação causal. A interpretação causal só faz sentido quando utilizamos a base coordenada [33]-[35]. Temos então que voltar para as variáveis coordenadas  $(a, \phi)$  antes de quisermos utilizar as equações dinâmicas (3.12)-(3.14). A transformação inversa entre os operadores pode ser escrita como:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}} (\hat{\xi} - \hat{P}_\sigma) \quad \hat{\phi} = \sqrt{\frac{\hbar}{mw^3}} (\hat{\sigma} - \hat{P}_\xi)$$

$$\hat{P}_a = \sqrt{m\hbar w} \hat{P}_\xi \quad \hat{P}_\phi = \sqrt{m\hbar w^3} \hat{P}_\sigma$$

Para encontrarmos os elementos da mudança de base  $\langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle$ , analisemos as equações associadas as relações entre operadores acima projetadas na base coordenada em questão:

$$\begin{aligned}
\langle a, \phi | \hat{a} | \Psi \rangle &= \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \left\langle \xi, \sigma \left| \left( \sqrt{\frac{\hbar}{mw}} (\hat{\xi} - \hat{P}_\sigma) \right) \right| \Psi \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{mw}} \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \left( \xi + i\hbar \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \bar{\Psi}(\xi, \sigma) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a, \phi | \hat{\phi} | \Psi \rangle &= \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \left\langle \xi, \sigma \left| \left( \sqrt{\frac{\hbar}{mw^3}} (\hat{\sigma} - \hat{P}_\xi) \right) \right| \Psi \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{mw^3}} \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \left( \sigma + i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \bar{\Psi}(\xi, \sigma) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a, \phi | \hat{P}_a | \Psi \rangle &= \int d\xi d\sigma \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial a} \right) \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \bar{\Psi}(\xi, \sigma) \\
&= \sqrt{m\hbar w} \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \bar{\Psi}(\xi, \sigma) \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a, \phi | \hat{P}_\phi | \Psi \rangle &= \int d\xi d\sigma \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \bar{\Psi}(\xi, \sigma) \\
&= \sqrt{m\hbar w^3} \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \bar{\Psi}(\xi, \sigma) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Combinando estas equações chegamos ao sistema de equações para os elementos de matriz  $\langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle &= -\frac{imw^2}{\hbar} \left( \phi - \sqrt{\frac{\hbar}{mw^3}} \sigma \right) \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \\
\frac{\partial}{\partial \phi} \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle &= -\frac{imw^2}{\hbar} \left( a - \sqrt{\frac{\hbar}{mw}} \xi \right) \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle
\end{aligned}$$

Por fim encontramos,

$$\langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mw^2}{\hbar}} \exp \left\{ -i \frac{mw^2}{\hbar} \left( a - \sqrt{\frac{\hbar}{mw}} \xi \right) \left( \phi - \sqrt{\frac{\hbar}{mw^3}} \sigma \right) \right\}.$$

O fator de normalização é para garantir que tenhamos  $\langle a, \phi | a', \phi' \rangle = \delta(a - a') \delta(\phi - \phi')$ .

Como exemplo, vamos tomar o caso mais simples ( $n = 0$  e  $k = \frac{k_0^2}{2}$ ).

$$\Psi(\sigma, \xi, t) = \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2} \right\} \exp \left\{ -iwt \left( \frac{1 + k_0^2}{2} \right) + i\sigma k_0 \right\}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Psi(a, \phi, t) &= \int d\xi d\sigma \langle a, \phi | \xi, \sigma \rangle \Psi(\sigma, \xi, t) = \\ &= \sqrt{\frac{m w^2}{\hbar}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(k_0 + \sqrt{\frac{m w}{\hbar}} a\right)^2\right\} \exp\left\{-i\frac{w t}{2}(1 + k_0^2) + i\sqrt{\frac{m w^3}{\hbar}} k_0 \phi\right\}\end{aligned}$$

Novamente esta função de onda não é de quadrado integrável. Fazendo a superposição gaussiana,

$$\Psi = \int dk \exp^{-\alpha(k+\beta)^2} \psi(a, \phi, t)$$

conseguimos chegar numa função de onda normalizável.

$$\Psi(a, \phi, t) = \rho(a, \phi, t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(a, \phi, t)\right\}$$

onde,

$$\begin{aligned}\rho(a, \phi, t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2\alpha\beta^2}{1+2\alpha}}\right)}} \left(\frac{2\alpha}{(1+2\alpha)^2 + w^2 t^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{\frac{-1}{(1+2\alpha)^2 + w^2 t^2} \times\right. \\ &\quad \times \left[\frac{m w^3}{2} (a t + \phi)^2 + m w \alpha (1+2\alpha) a^2 + m w^3 \alpha \phi^2 - 2\alpha \beta \sqrt{m w \hbar} (1+2\alpha) a +\right. \\ &\quad \left. \left. + 2\alpha \beta w^2 \sqrt{m w \hbar} t \phi + \alpha \beta^2 \hbar (1 + \alpha + w^2 t^2)\right]\right\}\end{aligned}$$

$$S(a, \phi, t) = A a^2 + B a \phi + C \phi^2 + D a + E \phi + F$$

onde definimos,

$$\begin{aligned}A &= -\frac{m w 2 t}{2\left((1+2\alpha)^2 + w^2 t^2\right)} & B &= -\frac{m w 2(1+2\alpha)}{(1+2\alpha)^2 + w^2 t^2} \\ C &= \frac{m w^4 t}{2\left((1+2\alpha)^2 + w^2 t^2\right)} & D &= \frac{-2\alpha \beta w t \sqrt{m w \hbar}}{(1+2\alpha)^2 + w^2 t^2} \\ E &= \frac{1+2\alpha}{t} D & F &= \frac{w \hbar t}{2} \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right) - \frac{2\alpha^2 \beta^2}{(1+2\alpha)^2 + w^2 t^2}\end{aligned}$$

As equações de movimento se escrevem

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{m} (2A a + B \phi + D) \\ \dot{\phi} &= a \\ n &= \frac{1}{a^3} (2C \phi + B a + E)\end{aligned}$$

Novamente utilizamos métodos numéricos usando o programa Maple para resolver este conjunto de equações, resultando nos seguintes gráficos.

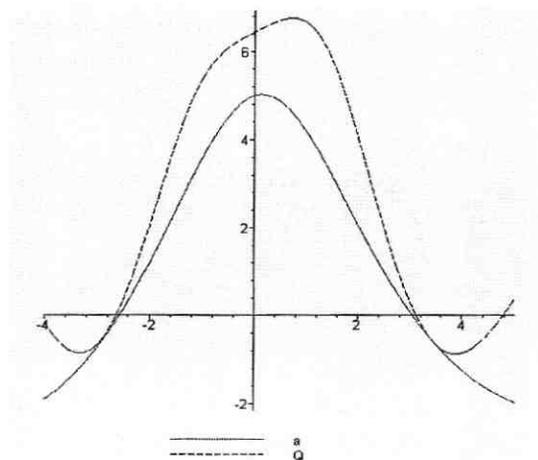


Figura 3.8: Gráfico do fator de escala e do potencial quântico. Ao contrário do esperado os efeitos quânticos não evitam as singularidades.

Aqui está representado o comportamento do fator de escala e do potencial quântico. É interessante observar que os efeitos quânticos não evitam as singularidades. De fato, tanto no passado quanto no futuro este universo apresenta singularidades. Nestas regiões o potencial quântico vai a zero e assim não tem papel significativo. Isto certamente não significa que o caso  $k = 1$  seja sempre singular. Ao contrário, normalmente espera-se que efeitos quânticos dêem cargo das singularidade. Este é apenas um exemplo para uma função de onda específica.

Para o campo  $P_\phi$  temos,

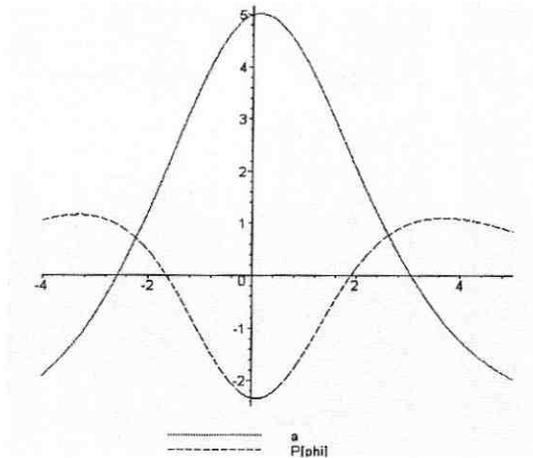


Figura 3.9: Comportamento do campo  $P_\phi$  e do fator de escala.

Notamos que o campo  $P_\phi$  varia ao longo de toda a história do universo, indicando uma intensa atividade de criação e aniquilação de matéria, e na realidade não há momento onde a quantidade de matéria se conserve.

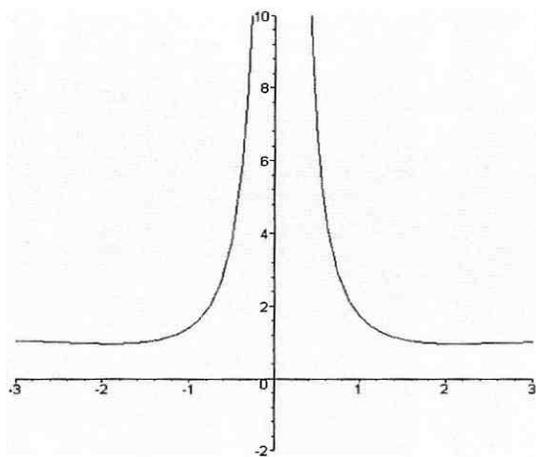


Figura 3.10: Comportamento do fator de desaceleração. A descontinuidade representa o momento onde  $\dot{a} = 0$ .

Neste último gráfico, representamos o fator de escala junto com o fator de desaceleração. O seu comportamento está de acordo com a evolução do fator de escala, sendo a região de descontinuidade correspondente a região onde o

fator de escala atinge seu valor máximo. Apesar do potencial quântico ter bastante influência ao longo de toda a evolução, este universo não parece apresentar nenhuma fase de aceleração.

### Caso $k=-1$

Neste caso a equação de Schrödinger se escreve:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(a, \phi, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{mw^2}{2} a^2 - i\hbar a \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi(a, \phi, t). \quad (3.24)$$

Se fizermos a substituição,

$$\Psi = \chi(a) \exp \left\{ i \frac{E}{\hbar} t - i \frac{\lambda}{\hbar} \phi \right\}$$

chegamos a equação apenas para o fator de escala

$$\frac{d^2 \chi}{da^2} + (\alpha a^2 + \lambda a + E) \chi(a) = 0.$$

As soluções desta equação são funções hipergeométricas [36].

Estas soluções, como qualquer solução da equação de Schrödinger, devem ter condições de contorno fisicamente aceitáveis. O estudo do comportamento assintótico destas soluções é complicado devido a estrutura das funções hipergeométricas, o qual requer análises cuidadosas e demoradas, impossibilitando incluí-las neste trabalho.

Espera-se no futuro ampliar o estudo do modelo de Friedmann com radiação e poeira para também englobar o caso com curvatura da seção espacial constante e negativa ( $k = -1$ ).

## Capítulo 4

# Comentários e análise

Durante meados da década de 70 do século passado, foram demonstrados os teoremas de singularidade. Estes teoremas concluem que, em “condições normais”, a teoria da Relatividade de Einstein conduz inevitavelmente a singularidade inicial (Big Bang).

Como a ciência, tal como a conhecemos até hoje, não é capaz de lidar com singularidades, esta situação deixou a comunidade científica limitada a descrever apenas a evolução pós-Big Bang, sem poder sequer tentar analisar o instante inicial. Isto implica que existe uma fronteira para a teoria, a qual não pode ser transpassada. Neste caso, a melhor postura para um cientista é testar os limites do conhecimento, tentando criar meios pelos quais se consiga prosseguir de forma a refutar ou comprovar as condições que nos levaram a este beco sem saída.

Já beirando a virada do século, novos dados experimentais indicaram que nossas previsões teóricas não estavam acuradas o suficiente. No entanto, devido a sua beleza e estrutura interna, a teoria da Relatividade não é algo que se queira se desfazer tão facilmente. Por isso, além do desenvolvimento de teorias alternativas para a gravitação, as quais têm trazido novas perspectivas para problemas antigos, vem se buscando construir fluidos exóticos que consigam influenciar as trajetórias dos objetos que observamos.

Nossa abordagem segue um caminho distintos dessas duas. Propomos que efeitos quânticos possam ser responsáveis por fenômenos cosmológicos ainda não entendidos. Mais especificamente, exploramos a possibilidade de, levando em conta os efeitos quânticos, possamos evitar a singularidade.

A intenção final de todos que seguem este caminho é desenvolver uma teoria quântica para a gravitação. Apesar de todos os esforços, a comunidade científica ainda não conseguiu atingir este objetivo. Porém, com modelos simplificados, podemos tentar entender problemas pertinentes à quantização que estejam presente até nos casos mais simples. Assim o estudo de minisuperespaço, apesar de não representar uma teoria quântica para a gravitação, tem se mostrado uma área de pesquisa relevante em gravitação quântica, possibilitando ainda a análise de efeitos quânticos em cosmologia.

Utilizando os formalismos expostos no segundo capítulo, desenvolvemos a quantização de dois casos de universo de FRW: seção espacial plana ( $k = 0$ ) e seção espacial com curvatura positiva ( $k = 1$ ). Nos dois casos, resolvemos formalmente a equação de Schrödinger chegando a solução mais geral possível para a função de onda. Em seguida, utilizando a interpretação causal da mecânica quântica, estudamos um exemplo específico para cada um dos casos.

No exemplo  $k = 0$ , obtivemos um comportamento consistente, no sentido de possuir limites clássicos compatíveis com os esperados pela teoria da Relatividade Geral. Tanto para tempos positivos quanto para negativos, o comportamento do fator de escala longe da origem, equivale ao comportamento clássico. Para tempos positivos, temos um universo permeado por radiação e poeira convencional, o qual assintoticamente é desacelerado com um fator de desaceleração tendendo ao valor  $\frac{1}{2}$ . Em contrapartida, para tempos negativos, o universo é permeado por radiação e poeira exótica. Se tomarmos um universo permeado por estes fluidos e descrevermos a evolução dinâmica através das equações clássicas, teremos um comportamento análogo ao obti-

do para tempos negativos longe da origem. Assim, para tempos longe da origem o universo tem um comportamento essencialmente clássico.

É curioso observar que o potencial quântico é não-nulo apenas próximo da origem. Era de se esperar que no início do universo, onde o universo está bem concentrado, os efeitos quânticos fossem relevantes.

Sabemos que em teorias clássicas a quantidade total de matéria é conservada. Porém, devido aos efeitos quânticos, temos a criação e aniquilação de matéria. Na realidade, o potencial quântico transforma a poeira exótica em poeira convencional. Este resultado é muito interessante e pode ser explorado para justificar por exemplo, os fluidos exóticos mencionados acima, ou modelos cosmológicos com criação de matéria.

Com referencia ao caso  $k = 1$ , a função de onda escolhida nos levou a descrição de um universo amplamente quântico. Neste universo, não existe uma fase com comportamento clássico já que o potencial quântico está presente durante toda a evolução. De qualquer forma, o exemplo é relevante academicamente para mostrar o desenvolvimento do formalismo. Embora não tenhamos conseguido evitar a singularidade, isto não implica que o caso  $k = 1$  seja sempre singular. Ao contrário, espera-se que efeitos quânticos contrabalancem o colapso, evitando a singularidade. Para melhor tratar a questão da singularidade, é necessário conseguir quantificar a incidência de casos de função de onda que levam a um comportamento singular ou não.

Como mencionado anteriormente, não pudemos completar o estudo das soluções para o caos  $k = -1$ . Fica como objetivo futuro ampliar a análise do modelo de Friedmann-Robertson-Walker englobando este terceiro caso.

Neste trabalho, realizamos um estudo qualitativo da dinâmica de um universo permeado por poeira e radiação. Naturalmente, o próximo passo será desenvolver um estudo quantitativo para podermos compará-lo com os dados observacionais e assim termos uma descrição passível de comparação com as observações.

# Bibliografia

- [1] Di Stefano; Physical Review D 27, 1752(1983)
- [2] Alejandro Cabo; Physical Review D 42, 2726(1990)
- [3] P.A.M Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics" - ed. Dover
- [4] Goldstein;"Classical Mechanics"- 3<sup>rd</sup> ed., Addison Wesley, cap. 9
- [5] P.G. Bergmann; Physical Review 98,531 (1955)
- [6] J. Anderson, P.G. Bergmann; Physical Review 83,1018 (1951)
- [7] P.A.M Dirac; Canadian Journal of Mathematics 2,129 (1950)
- [8] K. Sundermeyer;"Constrained Dynamics with Application to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String", Lecture notes in physics 168 (springer-Verlag,Berlin,1982)
- [9] D.Bohm; Physical Review 85, 166 (1952)
- [10] L. de Broglie; Compt. Rend. 184, 447(1926)
- [11] L. de Broglie; Compt. Rend. 184, 273(1927)
- [12] L. de Broglie; Compt. Rend. 185, 380(1927)
- [13] H. Everett; Reviews of Modern Physics 29-3, 454(1957)
- [14] N. Pinto- Neto; VIII BSCG, 299(1995)
- [15] D. Bohm; Physics Reports 144- 6, 323(1987)

- [16] C. Philippidis, C. Dewdney, B. J. Hiley; *Nuovo Cimento B*52, 15(1979)
- [17] J. Bell; *Physics World*- August 1990- pág. 33
- [18] D. Bohm, B. Hiley; *Foundation of Physics*-Vol. 14- n 3, 255(1984)
- [19] P. Holland; "The Quantum Theory of Motion", ed. Cambridge
- [20] D. Bohm, B. Hiley, P. N. Kaloyerou, *Physics Reports* 144- n.6, 349 (1987)
- [21] D. Bohm, *Physical Review* 85, 180(1952)
- [22] P.G. Bergmann; *Physical Review* 75, 680(1949)
- [23] P.A.M. Dirac; *Canadian Journal of Mathematics* 3, 1(1951)
- [24] P.G. Bergmann; *Helv. Phys. Acta. Suppl. IV*, 79(1956)
- [25] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner; "Gravitation: An Introduction to Current Research", L. Witten, ed. Wiley- NY(1962)
- [26] Bernard F. Schutz; *Physical Review D*, Vol.2 n-12, pag.2762(1970)
- [27] Bernard F. Schutz; *Physical Review D*, Vol.4 n-12, pag.3559(1971)
- [28] J. Von Neumann, "Mathematical Foundations Of Quantum Mechanics", ed. Princeton University Press (1955)
- [29] E. Farhi; *Int.J.Mod.Phy. A* vol.5, No.15, 3029(1990)
- [30] F.G. Alvarenga, J.C. Fabris, N.A. Lemos, G.A. Monerat; *Gen. Rel. and Grav.* vol. 34, No. 5, 651(2002)
- [31] J.Acacio de Barros, N.Pinto-Neto, M.A.Sagioro-Leal; *Physics Letters A* vol 241, 229 (1998)
- [32] N. A. Lemos; *Journal Math. Phys.* Vol 37, No. 3,1449 (1996)

- [33] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto; *Class. Quantum Grav.* 14, 1993(1997)
- [34] S. T. Epstein; *Phys. Rev.* 89, 319(1952)
- [35] D. Bohm; *Phys. Rev.* 89, 319(1952)
- [36] M.Abramowitz, I.A. Stegun-“Handbook of Mathematical Functions”, ed. National Bureau of Standarts, Washington D.C. 1964
- [37] J.A. Wheeler “Relativity, Groups and Topology”, B.S. DeWitt e C.M., ed. Gordon and Breach, New York, 1964
- [38] B.S. DeWitt; *Phys. Rev.* 160, 1113 (1967)

“Quantização do modelo de Minisuperespaço  
de Friedmann-Robertson-Walter Permeado por  
poeira e Radiação via Interpretação causal da  
Mecânica Quântica”

Felipe Tovar Falciano

Tese apresentada no Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca  
examinadora os seguintes Professores:

Nelson Pinto Neto – Presidente

Nivaldo Agostinho Lemos – UFF

José Martins Salim - CBPF