

Dissertação de Mestrado

**A Aceleração do Universo e
a Eletrodinâmica Não-Linear**

Érico Goulart de Oliveira Costa

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Agosto de 2004

Orientador: Mário Novello

*De Romulus e Thêa
À galharda prole,
Clarice, Caio e Sueli,
Ofereço o laborioso esforço*

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente ao industrioso Prof. Mário Novello, portandarte convicto da dúvida, servo humilíssimo da sensatez e da razão. Possa o seu exemplo perpetuar-se através das gerações de novos cientistas brasileiros;
- Aos pesquisadores e colaboradores do grupo de cosmologia e gravitação do CBPF;
- Aos companheiros de república André Gavini, Fabrício Amaral e Rômulo Ferreira;
- Aos camaradas de sala Eduardo Rodrigues, Felipe Tovar e Emanuel Pinho e colegas do terceiro andar Raphael Púpico, Fernando Nicácio e Nemésio Matos;
- Ao CNPq pelo apoio financeiro;
- Finalmente, mas não menos importante, à querida e sempre afável Ana Letícia;

Resumo

A cosmologia experimental de precisão vem sugerindo continuamente a possibilidade de o universo estar acelerando. Na expectativa de conciliar a teoria da relatividade geral e o cenário de Friedmann-Robertson-Walker com as recentes observações, os relativistas tem se esforçado na construção de modelos alternativos para o fluido cósmico. Grande parte destes modelos tem sua motivação na física de partículas elementares através da energia do vácuo ou mesmo de campos escalares com potenciais exóticos. Apesar das recentes teorias serem razoavelmente satisfatórias do ponto de vista fenomenológico, geralmente carecem de uma sustentação teórica convincente ou de algum indício observacional direto. Na tentativa de contribuir para diminuir em parte a arbitrariedade freqüentemente envolvida na construção destes modelos, pretendemos investigar as propriedades de uma nova possibilidade teórica inspirada em teorias não-lineares do eletromagnetismo. Como veremos, os campos vetoriais tem tido pouca atenção neste contexto. Apontaremos algumas das vantagens de se tomar esta escolha, mas também mostraremos que ela não é isenta de suas próprias dificuldades.

Abstract

Experimental cosmology suggests that the universe is undergoing a phase of accelerated expansion. The standard cosmological model, based on Friedmann-Robertson-Walker geometry, with speed-up cannot be accommodated within general relativity without a mysterious kind of cosmic fluid that may acquire large negative pressures. The majority of the fluid models is suggested by particle physics by means of a cosmological constant or a scalar field with exotic potentials, but none of them is compelling and some of them have serious drawbacks. In order to bypass some difficulties with the arbitrariness of these alternatives we investigate another possibility inspired by non-linear theories of the electromagnetic field. From the conceptual point of view, this phenomenological approach has the advantage that it involves only the electromagnetic field and does not invoke entities that have not been observed. We will point also some problems that may arise with this type of model.

Introdução

A comunidade de astrofísicos e cosmólogos tem afirmado nos últimos anos que a **aceleração em larga escala do universo é um fato inevitável** [1]. Com a exceção de um pequeno número de ainda descrentes, argumenta-se que ela pode ser inferida por distintas linhas de raciocínio, dentre as quais encontram-se evidências experimentais tomadas como confiáveis. Alguns pesquisadores chegaram a declarar que a controversa energia do vácuo, geralmente associada à constante cosmológica, uma estranha forma de energia que permearia o espaço intergaláctico, estaria sendo indiretamente observada [2]. De fato, a análise espectral de supernovas tipo Ia [3] combinada com o crescente número de dados obtidos a partir das anisotropias da radiação cósmica de fundo [4] têm insistentemente apontado para um universo homogêneo, euclidiano e aparentemente acelerado. No entanto, a razão pela qual este recente¹ fato esteja acontecendo, e como em detalhes acontece, permanecem duvidosos.

Ainda que um grande número de cosmólogos observacionais tenha se espantado com as primeiras evidências diretas de um universo enquadrado nesta prescrição, muitos teóricos as encararam como uma das peças que faltava para a moderna cosmologia [5]. Como nos atesta uma variedade de trabalhos das décadas de 80 e 90, conjecturas acerca da aceleração cósmica foram aventadas com o objetivo de melhor ajustar o modelo cosmológico padrão a certos parâmetros observados [6]. Idéias deste gênero , como poderiam sugerir os

¹ Existem indícios, na teoria de formação de estruturas, de que a aceleração seria um evento relativamente recente.

novos dados, não são recentes, e foram alvo de crescente interesse teórico ao longo do século passado. Para não mencionar o antigo modelo de Lemaitre-de-Sitter [7], cumpre ressaltar que alguns adeptos relutantes da teoria do estado estacionário sustentam que a expansão acelerada é uma de suas previsões genuínas, cujas origens encontram-se nos trabalhos de Hoyle da década de 50 [8]. Nos dias de hoje, o foco da discussão gira naturalmente em torno das teorias inflacionárias, às quais, não sem seu devido mérito, aparentam descrever coerentemente grande parte da história cósmica [9]. Como se observa na literatura convencional, a grande maioria dos modelos construídos em cosmologia parece ter como pano de fundo a teoria da inflação e raramente encontra-se alternativas propostas em diferentes termos.

Preferências à parte, a suposta constatação de um universo acelerado certamente despertou interesses em uma série de questões fundamentais. Desde a década de 20 os astrônomos sabiam que o volume do universo estava aumentando, separando cada vez mais as galáxias umas das outras. No entanto, assumiram geralmente que a taxa de expansão era desacelerada, levando-se em conta que a gravidade é uma força atrativa. Se, ao contrário, esta espécie de antigravidade cósmica estiver ocorrendo, teremos de rever parte da física atualmente estabelecida. Antes de mais nada, a teoria da relatividade geral de Einstein não pode acomodar este cenário de observações sem antes postular *ad hoc* a existência de fluidos cósmicos com propriedades hidrodinâmicas não usuais, sendo que esta forma desconhecida de matéria² deveria possuir uma espécie de gravidade repulsiva. Questões não usuais como estas deixaram os físicos em um grande impasse. Ou se modifica a teoria vigente da gravitação³ ou se procura novas formas de momento-energia capazes de gerar tais comportamentos inesperados. As duas linhas de argumentação, é claro, merecem devida atenção, mas neste trabalho concentraremos nossas investigações apenas na segunda proposta.

² Ou energia escura, como preferem alguns.

³ Sacrificando a elegância da Relatividade Geral, o que poderia causar espécie desconforto.

Na cosmologia tradicional, a busca pela curvatura global do espaço-tempo em termos do conteúdo material do universo nos leva forçosamente a pensar a matéria galáctica luminosa, a radiação cósmica de fundo e outras possíveis formas de energia como aproximados por certos tipos de fluidos. Estes *fluidos perfeitos*⁴, como são chamados, são caracterizados univocamente por sua densidade de energia e pressão. Se insistirmos em descrever a aceleração cósmica com o uso desses elementos, deveremos assumir simultaneamente equações de estado não convencionais, admitindo por exemplo a possibilidade de a pressão se tornar altamente negativa em certos tipos de regimes. Em mecânica dos meios contínuos e da elasticidade estas pressões seriam equivalentes à uma espécie de tensão restauradora. Atualmente, toda uma série de problemas relacionados à distribuição espacial, dinâmica bem como a natureza microfísica desta *energia escura*, são no mínimo controversas. Além do mais, ela não pode se aglomerar como a matéria bariônica, pois, desta forma, já haveríamos detectado sua presença nas estimativas de energia em aglomerados de galáxias, o que definitivamente não ocorre. Por esta razão, alguns especialistas têm sugerido uma terminologia aparentemente mais adequada para este tipo de fluido, a saber *tensão suave* [10].

Na expectativa de fornecer suporte a estes apontamentos, uma variedade infundável de candidatos têm sido propostos como modelos para a tensão suave [11] e embora muitos deles sejam interessantes do ponto de vista fenomenológico, carecem em geral de uma sustentação teórica convincente [12]. O candidato mais simples seria a constante cosmológica, possivelmente originada na energia do vácuo quântico. Apesar de ser um modelo irresistivelmente simples e autoconsistente, capaz de modelar com precisão as observações atuais, muitos físicos de partículas acreditam que uma versão futura dos cálculos acarretará em uma energia do vácuo precisamente igual a zero [13]. Este fato juntamente com as evidentes vantagens proporcionadas pelos métodos utilizados na teoria da inflação motivaram a possibilidade de se considerar novos tipos de campos dinâmicos como fontes da aceleração. Estes

⁴ Fluidos mais complexos podem ser utilizados, mas restringiremos nossa análise aqui aos fluidos perfeitos.

modelos, em geral, consideram nula a energia do vácuo e assumem que nem todos os campos físicos alcançaram seu estado fundamental. Os campos escalares, em particular, possuiriam potenciais capazes de gerar pressões negativas e variáveis com o tempo, de forma que fossem subdominantes para altos *redshifts* e dominantes para baixos *redshifts*, como parece de fato estar indiretamente sendo observado. Apesar de o emprego destes campos apresentarem uma série de vantagens teóricas, não possuem ainda o respaldo da experimentação/observação. As motivações para a forma funcional destes potenciais, além do mais, são inúmeras e a preferência por uma escolha particular é, infelizmente, extremamente arbitrária⁵ [6].

Naturalmente, nossa capacidade para esgotar as particularidades de cada uma destas propostas, e eventualmente descartá-las como qualquer outra teoria científica é ainda bem menor do que seu crescente número⁶. Este estado de coisas não pode deixar de causar certo desconforto, uma vez que a grande maioria das novas teorias têm apelado para uma física não convencional, evocando um sem número de entidades abstratas ainda inobservadas. Como exercício de pensamento, poderíamos começar a nos perguntar se algum efeito ainda desconhecido da física local, isto é, a física observada em nossos laboratórios atualmente, poderia estar tomando parte em algum lugar no meio desta história. Este tipo de argumentação, apesar de suas óbvias dificuldades imediatas, teria sem dúvida a vantagem (bem como a simplicidade) lógica de não precisar contar com especulações de ordem maior, tais como dimensões extras, campos escalares ou teorias de cordas, para não prolongar demais a lista. Se o modelo resultante for, no mínimo, condizente com as observações, teremos certamente dado um passo adiante. Este procedimento, na pior das hipóteses, não deixaria de ser menos legítimo do que a grande parte dos outros métodos geralmente abordados.

⁵ Matéria fantasma, campos taquiónicos, gás de Chaplygin, quintessência constituem outras possibilidades.

⁶ Novas expedições de satélites pretendem reverter esta situação.

De fato, investigaremos neste trabalho uma destas novas alternativas, procurando possíveis generalizações da teoria clássica do campo eletromagnético. Para os fins esperados, duas extrapolações razoáveis poderiam ser de relevância cosmológica. A primeira delas poderia estar relacionada com a dinâmica do campo de Maxwell na presença de potenciais gravitacionais elevados. A segunda, teria sua origem em não-linearidades possivelmente ainda não detectadas na dinâmica deste campo. De qualquer forma, toda espécie de cuidado é claramente pouca nesta busca, uma vez que a grande maioria da informação oriunda do universo profundo se propaga por meios eletromagnéticos [14], e mesmo uma pequena modificação na teoria de Maxwell poderia acarretar em uma drástica mudança nas interpretações dos dados. Nosso objetivo não vai nesta direção, e nós esperamos que nossa teoria seja consistente com grande parte das observações e interpretações atualmente estabelecidas.

A análise exaustiva da questão de acoplamentos não mínimos da eletrodinâmica com a gravidade bem como suas conseqüências para a cosmologia será adiada para uma outra ocasião. De agora em diante passaremos a analisar apenas o problema da eletrodinâmica não-linear. Algumas tentativas de se modificar as equações de Maxwell em um contexto cosmológico foram realizadas ao longo dos anos. Estas tentativas mostraram-se relevantes na compreensão e análise de três problemas de importâncias distintas – singularidade, causalidade e aceleração – não inteiramente estabelecidas. Ainda que os problemas da singularidade e da causalidade tenham sido razoavelmente bem estudados [15], a questão da aceleração no contexto de campos eletromagnéticos não-lineares somente despertou o interesse nos últimos anos [16]. Se estes campos são esperados para atuar como fontes da aceleração em um universo homogêneo e isotrópico, hipóteses restritivas sobre suas condições iniciais [17], ou processos estatísticos de médias espaciais devem ser assumidos *a priori* [18]. Iremos mostrar que tal procedimento é plausível e construiremos explicitamente um modelo onde a aceleração cósmica tem como origem um fluido de radiação não-linear que nós apelidamos de *Luz Escura*.

De qualquer forma, nosso trabalho pode perfeitamente ser traduzido para a linguagem de uma teoria de campo vetorial arbitrária em espaços curvos. Campos tensoriais de ordem mais alta, provavelmente pelas evidentes dificuldades de natureza matemática, bem como pela falta de motivação física, receberam pouca atenção no contexto da aceleração do Universo. No entanto, uma generalização imediata, apesar de mais complicada, seria a consideração de campos de gauge vetoriais ao invés dos campos escalares usualmente empregados.

No capítulo 1 será apresentado o formalismo básico para se descrever a aceleração no cenário de Friedmann-Robertson-Walker, e a título de ilustração, algumas propriedades do modelo Λ CDM [11] e de campos escalares serão analisadas. Os dois próximos capítulos pretendem construir a base matemática para a descrição de teorias de *gauge* vetoriais em espaços curvos, do ponto de vista cinemático e dinâmico respectivamente. No capítulo 4 um modelo específico de teoria não linear do eletromagnetismo será apresentado como candidato à energia escura.

Capítulo 1 – A aceleração do universo

Talvez não seja exagerado afirmar que um dos grandes postulados da cosmologia moderna é a aceitação tácita de um Universo predominantemente controlado pela força da gravidade. Isto significa que sua evolução deveria, pelo menos em princípio, ser representada por modelos cosmológicos soluções das equações de Einstein. Além do mais, temos fortes indícios observacionais de que durante a maior parte do tempo cósmico o Universo foi de fato homogêneo e isotrópico em largas escalas. Espera-se portanto, que a descrição apropriada de sua geometria seja identificada com os universos de Friedmann-Robertson-Walker. De fato, qual dentre as possíveis soluções se adaptará melhor aos fatos dependerá sensivelmente das observações concernentes às propriedades do conteúdo material do Universo, tomadas em conjunto com suas respectivas equações de estado.

Neste capítulo iremos construir de forma resumida o formalismo básico referente à cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker, e mostraremos como ela se adapta à questão da aceleração. Nossa análise será baseada predominantemente na evolução dos parâmetros cinemáticos os quais, tomados em conjunto com a equação de conservação, são inteiramente equivalentes às equações de Einstein [19].

Para evitar possíveis erros de interpretação no futuro, tomaremos neste trabalho uma postura de certa forma conservadora, e trataremos a questão da

aceleração do universo antes de mais nada como uma hipótese. Seguindo esta linha, comentaremos brevemente o papel desempenhado pelas principais tentativas de se descrever a aceleração cósmica em termos de fluidos não convencionais.

1.1 – A equação de Einstein e o tensor energia-momento

Apesar do crescente número de novas teorias candidatas à descrição da gravitação em larga escala, assumiremos neste trabalho a validade da relatividade geral de Einstein. As equações de Einstein para o tensor métrico relacionam a curvatura do espaço-tempo à distribuição de matéria, e se escrevem

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -kT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde k é a constante de Einstein, relacionada à constante de Newton pela expressão $k = 8\pi G/c^4$. Em geral, por questão de simplicidade, usaremos o sistema de medidas onde $c = k = 1$ (velocidades e forças são considerados como grandezas adimensionais e a massa adquire unidades de comprimento).

O estado físico do conteúdo material do universo, como por exemplo o fluido galáctico, a radiação eletromagnética e os neutrinos, é descrito pelas tensões e estresses contidos no *tensor energia-momento* $T_{\mu\nu}$. Este tensor simétrico deve satisfazer a equação de continuidade (conservação) $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, uma vez que a identidade de Bianchi deve ser satisfeita pelo lado esquerdo das equações de Einstein.

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)^{;\nu} = 0 \quad (1.2)$$

De forma a estudar as características individuais de cada tipo de fluido observadas por um dado observador, passaremos à investigação dos chamados *parâmetros cinemáticos*.

1.2 – Os parâmetros cinemáticos

Em relatividade geral pode ser conveniente a representação de algumas grandezas físicas via projeções tensoriais. Estas projeções referem-se ao que se convencionou chamar *campo de observadores*. Como veremos, uma grande quantidade de informações sobre as simetrias de uma variedade Riemanniana podem ser interpretadas em termos das propriedades cinemáticas deste campo.

Passemos agora aos detalhes matemáticos. Definamos um *campo de observadores* como sendo um campo vetorial arbitrário ($\vec{V} = V^\mu \bar{e}_\mu$) do tipo tempo ($g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$). As linhas de universo de cada um destes observadores, sendo sempre tangentes ao campo, devem satisfazer o sistema de equações

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = V^\alpha(\{x^\beta(\lambda)\}) \quad (1.3)$$

onde λ é o chamado parâmetro afim.

Ao conjunto de todas as curvas integrais $x^\alpha(\lambda, \{x^\beta_0\})$ denominaremos *congruência ou fluxo* de \vec{V} . A resolução do sistema de equações diferenciais cabe naturalmente à teoria de sistemas dinâmicos e não será de interesse no momento. O que de fato nos interessa aqui são as derivadas covariantes do nosso *campo de observadores*. Decompondo as componentes deste tensor em suas partes irredutíveis, construiremos os parâmetros cinemáticos do campo, o que nos permitirá classificar algumas de suas propriedades geométricas. Para simplificar a notação, normalizaremos este campo de forma que $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 1$.

O conjunto de vetores perpendiculares à \vec{V} no ponto \mathbf{P} constituem um espaço vetorial $\mathbf{DH}(\mathbf{P})$ denominado *referencial inercial local* em \mathbf{P} . À hipersuperfície tangente a $\mathbf{DH}(\mathbf{P})$ em todos os pontos denominaremos \mathbf{H} .

Seja o tensor de projeção definido por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad (1.4)$$

Este objeto projeta tensores arbitrários nas direções perpendiculares à \vec{V} , e têm as seguintes propriedades:

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu};$$

$$h_{\mu\nu} V^\nu = 0; \quad (1.5)$$

$$h_{\mu\nu} h^{\nu\lambda} = h_\mu^\lambda;$$

Suponhamos agora que as componentes $V_{\alpha;\beta}$ sejam conhecidas, e que tomemos a projeção $Q_{\mu\nu} = h^\alpha_\mu h^\beta_\nu V_{\alpha;\beta}$. Desenvolvendo por partes, teremos

$$\begin{aligned} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu V_{\alpha;\beta} &= (\delta^\alpha_\mu - V^\alpha V_\mu)(\delta^\beta_\nu - V^\beta V_\nu)V_{\alpha;\beta} = \\ &= (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\mu V^\beta V_\nu - \delta^\beta_\nu V^\alpha V_\mu + V^\alpha V_\mu V^\beta V_\nu)V_{\alpha;\beta} = \\ &= V_{\mu;\nu} - V_{\mu;\beta} V^\beta V_\nu \end{aligned} \quad (1.6)$$

uma vez que, pelo fato de \vec{V} ser um campo normalizado, $V_{\alpha;\beta}V^\alpha = 0$.

Denominaremos as grandezas $V_{\mu;\beta}V^\beta$ pelo vetor de aceleração a_μ ($a_\mu = \frac{DV_\mu}{D\lambda}$

). Desta forma, segue a expressão

$$V_{\alpha;\beta} = Q_{\alpha\beta} + a_\mu V_\nu, \quad (1.7)$$

onde $Q_{\alpha\beta}$ é um tensor perpendicular à \vec{V} , isto é, pertence à triseção \mathbf{H} . Lembremos que: normalizando o *campo de observadores*, o tensor $V_{\alpha;\beta}$ passa a contar com apenas doze componentes independentes. Decompondo o tensor $Q_{\alpha\beta}$ (oito componentes independentes) em suas partes irredutíveis temos

$$Q_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \varpi_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Cada um dos tensores desta decomposição são denominados respectivamente por deformação, vorticidade e expansão estando relacionados com algum tipo de propriedade das linhas do *fluxo*. Antes de exibirmos as propriedades destes objetos algébricas, vejamos como eles se relacionam com as linhas de fluxo. Para se ter uma visão pictórica do significado geométrico destes objetos, tomemos duas triseções \mathbf{H}_1 e \mathbf{H}_2 suficientemente próximas e um subconjunto de linhas da congruência. A interseção entre cada elemento do subconjunto e a devida superfície se darão em pontos de \mathbf{H}_1 e \mathbf{H}_2 . A forma como a distribuição destes pontos se modifica ao longo das superfícies estão diretamente ligadas aos *parâmetros cinemáticos*. A figura 1.1 exhibe como um triângulo infinitesimal, em particular, definido em \mathbf{H}_1 se modifica quando em \mathbf{H}_2 sendo os vértices definidos pelas linhas do fluxo.

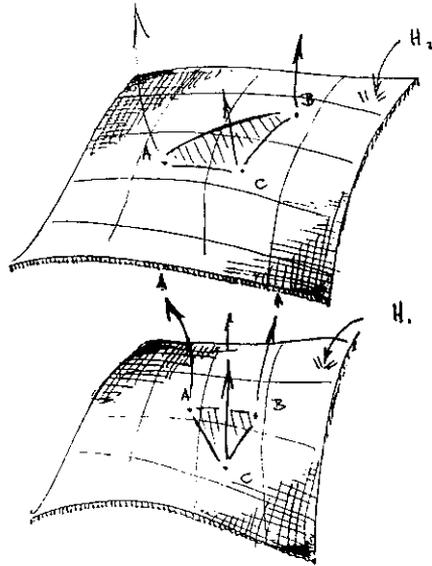


Figura 1.1: Esboço da evolução de um triângulo definido pelas linhas de fluxo. O escalar θ está relacionado basicamente com a escala, podendo aumentar ou diminuir a área da figura. O tensor simétrico $\sigma_{\mu\nu}$ sendo o responsável pela deformação do triângulo, modificando seus lados em proporções diferentes. Finalmente a vorticidade caracterizado pelo ângulo de rotação do triângulo

As seguintes propriedades valem para os parâmetros.

1) Deformação: simétrico e sem traço

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu};$$

$$g^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 0; \quad (1.9)$$

$$\sigma_{\mu\nu} V^\mu = 0;$$

2) Vorticidade: antissimétrico

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu};$$

$$(1.10)$$

$$\bar{\omega}_{\mu\nu} V^\nu = 0;$$

3) Expansão: divergência covariante

A partir das definições acima, podemos escrever explicitamente as expressões.

$$\text{I.} \quad \sigma_{\alpha\beta} = h^\mu{}_{(\alpha} h_{\beta)}{}^\lambda V_{\mu;\lambda} - \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta}$$

$$\text{II.} \quad \bar{\omega}_{\alpha\beta} = h^\mu{}_{[\alpha} h_{\beta]}{}^\lambda V_{\mu;\lambda} \quad (1.11)$$

$$\text{III.} \quad \theta = V^\mu{}_{;\mu}$$

Lembrando que em uma variedade Riemanniana as derivadas covariantes de ordem superior não comutam em geral, a evolução de cada um destes parâmetros deve satisfazer necessariamente à identidade

$$V_{\beta;\mu;\nu} - V_{\beta;\nu;\mu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V_\alpha \quad (1.12)$$

De fato, conhecendo-se as derivadas dos parâmetros cinemáticos, pode-se em princípio, via resolução das equações diferenciais acopladas e não-lineares 1.12, construir as componentes independentes do *tensor de Riemann*. Após algumas manipulações algébricas nas equações acima encontramos finalmente a equação

$$h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{Q}_{\mu\nu} + \alpha_\alpha \alpha_\beta - h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \alpha_{\mu;\nu} + Q_{\alpha\gamma} Q^\gamma{}_\beta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\nu V^\nu V^\gamma \quad (1.13)$$

Esta equação contém toda informação necessária para a obtenção da evolução dos *parâmetros cinemáticos*. Não nos preocuparemos com a evolução complicada de todos estes parâmetros. Como veremos, pelo altíssimo grau de simetria exigido pelas soluções de Friedmann, somente o estudo da equação de

Raychaudhuri (equação envolvendo a divergência covariante do campo de velocidades) será suficiente. Ela pode ser obtida a partir da equação acima através de um pequeno número de manipulações algébricas que assumiremos sem demonstração.

A equação de Raychaudhuri se escreve

$$\theta + \theta^2/3 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - a^\mu{}_{;\mu} = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \quad (1.14)$$

onde $\sigma^2 = \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega^2 = \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$.

1.3 – Tensor energia-momento

Uma das buscas fundamentais em cosmologia consiste em estabelecer as propriedades do “fluido cósmico” responsável pela curvatura do espaço-tempo [Novello, Notas]. As características físicas destas distribuições de energia devem ser associadas às medidas feitas por um conjunto particular de observadores. Uma classe de observadores representada pelo *campo* acima descrito decompõe o tensor energia momento da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + q(\mu V_\nu) + \pi_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

sendo ρ interpretado como densidade de energia, p a pressão isotrópica, q_μ o vetor transmissão de calor ou vetor de Poynting e $\pi_{\mu\nu}$ a pressão anisotrópica. Em termos do tensor $T_{\mu\nu}$, temos respectivamente

$$\rho = T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu; \quad p = -\frac{1}{3}T_{\mu\nu}h^{\mu\nu}; \quad (1.16)$$

$$q_{\lambda} = T_{\alpha\beta} V^{\beta} h^{\alpha}_{\lambda}; \quad \pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + p h_{\mu\nu}.$$

De agora em diante, passaremos a considerar apenas os fluidos perfeitos, isto é, fluidos caracterizados apenas por sua densidade de energia e pressão. Além do mais, consideraremos que a distribuição destes fluidos é homogênea e isotrópica para os observadores que são comoventes com o mesmo.

1.4 – Universo de Friedmann

A cosmologia relativista tem como objetivo examinar a estrutura do universo como um todo, negligenciando em primeira aproximação as irregularidades locais graças às aglomerações de matéria. Esta aproximação pode ser pensada como a busca por uma geometria de fundo na qual todas as discrepâncias funcionam como pequenas perturbações.

A descrição convencional da geometria cósmica em larga escala é usualmente fornecida em termos dos modelos cosmológicos de Friedmann. Estes modelos, apesar de sua grande simplicidade lógica tem adquirido suporte experimental cada vez menos controverso, baseado geralmente em observações homogêneas e isotrópicas da radiação cósmica bem como através da contagem e distribuição de objetos luminosos no céu.

Os universos de Friedmann têm como fonte a superposição de fluidos perfeitos. Além do mais, as linhas de universo das “partículas” destes fluidos devem ser identificadas com os elementos de uma *congruência geodésica* do tipo tempo, uma vez que não há presença de forças além, é claro, da gravitacional. Iremos exigir também que os tensores de deformação e vorticidade se anulem identicamente para qualquer região ao longo do fluxo dessas partículas. Desta forma, garantimos a homogeneidade e isotropia do modelo bem como a existência de um *tempo global*. Lembrando que para um fluido perfeito o *tensor energia-momento* se escreve

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu} = (\rho + p) V_{\mu} V_{\nu} - p g_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

as exigências mencionadas resumem-se nas equações

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & a_{\mu} = V_{\mu;\beta} V^{\beta} = 0 \\
 \text{II.} \quad & \sigma_{\alpha\beta} = h^{\mu}{}_{(\alpha} h_{\beta)}{}^{\lambda} V_{\mu;\lambda} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.18) \\
 \text{III.} \quad & \varpi_{\alpha\beta} = h^{\mu}{}_{[\alpha} h_{\beta]}{}^{\lambda} V_{\mu;\lambda} = 0
 \end{aligned}$$

Baseando-nos nestas condições postulamos a seguinte equação para o intervalo [20].

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 + \varepsilon r^2} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (1.19)$$

onde $\varepsilon = -1, 0$ e 1 referem-se respectivamente às triseções do tipo hiperbólico, euclidiano e esférico.

A evolução do fator de escala $a(t)$ é governada pelas equações de conservação e Raychaudhuri. Para um fluido perfeito, com densidade de energia ρ e pressão p , estas equações assumem a forma

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{6}(\rho + 3p) = 0, \quad (1.21)$$

admitindo uma integral primeira. De fato, é simples demonstrar que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{\varepsilon}{A^2} \quad (1.22)$$

Esta relação será particularmente importante para a análise qualitativa do comportamento do fator de escala no que se refere as teorias investigadas nos últimos capítulos.

Em geral, se admite que a pressão seja uma função contínua e linear da densidade de energia – a constante de proporcionalidade dependendo do tipo de fluido considerado. A equação de estado toma então a forma

$$p = \lambda\rho \quad (1.23)$$

onde λ é uma constante. Em particular $\lambda = 0$ para a matéria bariônica e $\lambda = 1/3$ para a radiação Maxwelliana . Levando este fato em consideração nas equações de Friedmann temos

$$\dot{\rho} + 3\rho(1 + \lambda)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (1.24)$$

ou seja

$$\rho(A) = k_0 A^{-3(1+\lambda)}, \quad (1.25)$$

indicando que quanto maior o valor da pressão em termos da densidade de energia, mais rápido é o decaimento de ρ com o fator de escala.

Analisando a equação de Raychaudhuri, torna-se evidente que a teoria da relatividade geral não pode acomodar um universo acelerado a menos que se considere fluidos com equações de estado não usuais. Estes fluidos devem violar necessariamente a condição de energia forte, isto é

$$R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0 \quad (1.25)$$

ou analogamente

$$(\rho + 3p) \leq 0 \quad (1.26)$$

O procedimento comum para se violar a condição de energia forte, é admitir que determinados tipos de fluidos podem de fato ser modelados por pressões negativas. Passaremos a analisar de agora em diante algumas possibilidades de gerar universos acelerados dominados por fluidos propriedades semelhantes.

1.4 – Constante cosmológica

O exemplo mais simples, embora controverso, de um fluido com propriedades semelhantes pode ser gerado a partir de uma constante Λ . Embora os argumentos de Einstein para se introduzir a *constante cosmológica* em suas equações de movimento sejam de natureza puramente geométrica, podemos reinterpretá-la através do *tensor energia-momento* de um fluido perfeito. As *equações de Einstein* com a constante cosmológica adquirem no “vácuo” a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

onde $T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu}$, $p = -\rho$ e $\rho = \Lambda$. Neste caso altamente idealizado, a densidade de energia não varia com o raio do universo, e a equação de Raychaudhuri implica em um fator de escala acelerado da forma

$$\ddot{a} = \frac{1}{3} \Lambda a \quad (1.28)$$

que coincide com o universo de Lemaitre-de-Sitter. Uma versão mais convincente deste modelo deve necessariamente levar em conta as outras distribuições de momento e energia presentes no universo e de fato, muitos cientistas argumentam que quando considerada juntamente com a matéria escura, a constante cosmológica fornece uma das melhores descrições fenomenológicas das observações astronômicas (incluindo obviamente a aceleração), que é conhecido pelo nome de modelo Λ CDM [11]. No entanto, esta abordagem não é livre de suas próprias dificuldades.

Do ponto de vista teórico, acredita-se que a constante cosmológica esteja relacionada com as partículas virtuais que habitam o vácuo quântico, embora os cálculos estimados de energia variem entre 10^{55} até 10^{122} vezes a densidade crítica supostamente observada. O fato de que a densidade de energia também não varia com o tempo também pode levantar outras espécies de questionamentos indesejáveis. Estes tipos de problemas tomados em conjunto com a crença por parte dos físicos de partículas que um cálculo futuro da energia do vácuo seja precisamente nula levou os físicos a pensarem outras alternativas. Entre elas encontram-se as considerações acerca de campos escalares.

1.5 – Campos escalares

Durante as últimas décadas, grande interesse foi devotado ao estudo de campos escalares. Estes campos ganharam interesse a partir de modelos especulativos da física de partículas elementares, e alcançaram seu ápice fenomenológico na teoria inflacionária. De qualquer forma, na ausência de evidências experimentais conclusivas, estes modelos podem servir como protótipos para outros modelos possivelmente mais “realistas”. Os mais simples modelos desta proposta admitem uma ação envolvendo a *energia cinética* bem como um termo de *gradiente espacial*, sendo que o campo escalar real só interage consigo mesmo e com a gravidade. A Lagrangiana adquire então a forma genérica

$$L = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi), \quad (1.29)$$

onde o segundo termo pode ser pensado como uma espécie de potencial interativo. As equações de movimento têm a seguinte forma

$$g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu\nu} + \frac{\delta V}{\delta \Phi} = 0, \quad (1.30)$$

ou analogamente

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \Phi_{;\mu} \right)^\mu + \frac{\delta V}{\delta \Phi} = 0. \quad (1.31)$$

A simples realização dinâmica de um campo escalar homogêneo e isotrópico em uma cosmologia de FRW segue as equações

$$\ddot{\Phi} + 3H \dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0 \quad (1.32)$$

Claramente, se o interesse é resolver as equações acima, precisamos da forma funcional do potencial. No entanto, como brevemente mencionado anteriormente, o grande problema em se sustentar modelos escalares para o fluido cósmico está na arbitrariedade envolvida nesta escolha. Esta ativa área de investigação, com a freqüente introdução de novos modelos, conta com inúmeras propostas fenomenológicas para a forma dos potenciais, que podem variar de potências de funções hiperbólicas até combinações lineares de exponenciais complicadas. Espera-se que a energia escura possa, através destes mecanismos, ser descrita efetivamente por meio deste esquema.

Existem ainda propostas consideravelmente mais complicadas nas quais o acoplamento entre a energia escura e a gravitação se dá de forma não-mínima.

Estas tentativas admitem um acoplamento explícito envolvendo o escalar de Ricci e uma dada função do campo, mas são necessariamente mais sofisticadas. Finalmente tem-se considerado um novo tipo de campo dotado de energias cinéticas negativas chamados de *campos fantasma*.

O tensor momento energia destes campos podem ser obtidos convencionalmente pela variação funcional.

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.33)$$

ou seja,

$$T_{\mu\nu}(\Phi) = \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \frac{1}{2}(\Phi_{;\lambda} \Phi^{;\lambda} - 2V)g_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

A densidade de energia bem como a pressão armazenadas nesses campos são respectivamente

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \quad (1.35)$$

$$p = \frac{1}{2} \Phi'^2 - V(\Phi) \quad (1.36)$$

Uma característica interessante de modelos deste gênero é que a equação de estado efetiva toma a forma

$$w = \left(\frac{1}{2} \Phi'^2 - V(\Phi) \right) / \left(\frac{1}{2} \Phi'^2 + V(\Phi) \right) \quad (1.37)$$

que pode apresentar valores em um domínio definido entre 1 e -1 . Além do mais, w pode variar com o tempo, o que certamente pode se tornar uma vantagem com relação a outras propostas. Em geral a aceleração ocorre em um regime no qual a energia potencial supera a energia cinética.

Várias propostas da física de partículas elementares vem tentando resgatar o mecanismo quântico que poderia gerar estes tipos de campos. Algumas delas vão na direção das teorias de quebra dinâmica de supersimetria, podendo gerar potenciais com potências inversas do campo. Não obstante parece pertinente ressaltar que no momento o cenário de campos escalares como candidatos para a energia escura ainda carece de sustentação convincente da física de altas energias.

Capítulo 2 – Eletrodinâmica, espaços curvos e cosmologia

O eletromagnetismo de Maxwell e a relatividade geral de Einstein constituem dois exemplos típicos de *teorias clássicas de campo*. Enquanto a primeira é linear e vetorial, a segunda é não-linear e naturalmente descrita por tensores de ordem elevada, o que a torna uma teoria consideravelmente mais complicada do ponto de vista matemático. As duas teorias aparentemente independentes interceptam-se no que se refere ao problema da interação. Apesar de o acoplamento entre estes campos ser ainda uma questão em aberto, podemos afirmar que a interação emerge como consequência da natureza vetorial do campo eletromagnético bem como da estrutura geométrica introduzida pela relatividade geral, e pode ser interpretada simplesmente como uma espécie de espalhamento das ondas eletromagnéticas pela curvatura da geometria [21].

Encontrar soluções exatas para o sistema de equações diferenciais acopladas que descrevem este sistema nem sempre se mostra tarefa simples, sendo necessário na grande maioria dos cálculos acrescentar hipóteses restritivas sobre a estrutura e/ou a dinâmica de ambos os campos. Este tipo de dificuldade não é exclusiva do campo eletromagnético e se manifestará de forma inequívoca em qualquer teoria de campo onde o “ambiente de propagação” (no caso o espaço-tempo) seja consequência da própria dinâmica.

Analisaremos neste trabalho algumas questões relacionadas à extrapolações autointerativas da teoria de Maxwell, isto é, consideraremos não linearidades adicionais nas equações de movimento bem como as devidas

alterações provocadas na distribuição de momento e energia representada pelo tensor $T_{\mu\nu}$. Neste caso, mesmo no espaço-tempo de Minkowski, a teoria pode ficar exageradamente complicada, apesar de estar, em primeira aproximação, consistente com praticamente todas as observações.

A grande motivação para se adotar tal postura sustenta-se na seguinte conjectura: poderiam pequenas e eventuais discrepâncias nas equações de movimento lineares de Maxwell acarretar espécie de efeito ainda desconhecido em escalas cosmológicas? Esta questão certamente tem sua procedência uma vez que tanto a cosmologia quanto a astrofísica relativista têm exemplos de configurações (tanto teóricas como experimentais) de campo que vão desde os gigantescos (em extensão) campos magnéticos intergalácticos à radiação cósmica de fundo passando pelas estrelas de nêutrons magnetizadas bem como pelos buracos negros carregados. Uma das possibilidades pode estar relacionada com a questão da aceleração cósmica, e de fato esta será nossa linha de investigação.

Além da cosmologia existem, é claro, muitas outras inspirações para se estudar teorias não lineares do eletromagnetismo. Para não citar as motivações teóricas provenientes da antiga física de partículas [22] bem como da teoria quântica de campos [23] passemos para algumas motivações experimentais. Antes de mais nada, a física do estado sólido está repleta de exemplos concretos de materiais com comportamentos nitidamente não lineares – materiais magnéticos, cristais sob a ação de pulsos de laser intensos, certos tipos de dielétricos etc. Além do mais, praticamente todo tipo de material que demonstra comportamento linear sob a ação de baixos campos, eventualmente se comporta de forma não-linear sob a ação de campos intensos. Isto se dá graças ao sem número de interações eletromagnéticas nos agregados de moléculas no interior da matéria (oscilações iônicas ou eletrônicas), que de um ponto de vista macroscópico podem ser estudadas sob a ótica de uma teoria efetiva não-linear do eletromagnetismo [24]. Em teoria de campos, o método da geometria efetiva permite estudar as conseqüências das não linearidades de forma elegante via geometrização da interação, o que inclusive abriu a possibilidade de simular

efeitos gravitacionais em laboratórios [25]. Portanto podemos argumentar que, em geral, a violação do princípio de superposição em algumas teorias pode ser interessante para se estudar campos eletromagnéticos no interior da matéria, bem como descrever convenientemente estes campos em situações onde a teoria de Maxwell nos oferece previsões limitadas.

Neste capítulo, descreveremos de um ponto de vista axiomático a teoria do eletromagnetismo não-linear em espaços curvos. Algumas motivações físicas para estas considerações serão deixadas para os capítulos posteriores, onde também se utilizará um exemplo concreto como modelo para a aceleração do universo. Algumas propriedades cosmológicas destas extrapolações serão comparadas, no final, com a teoria de Maxwell.

2.1 – Cinemática do campo

Iremos assumir que os fenômenos eletromagnéticos podem ser caracterizados por um conjunto de seis números, não necessariamente independentes, em cada ponto do espaço-tempo. A descrição matemática convencional destes elementos é geralmente realizada em termos de um campo tensorial de ordem dois antissimétrico denominado *tensor de Faraday* \tilde{F} . Projetado na base de dois-forma este objeto adquire a seguinte expressão

$$\tilde{F} = F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde \wedge representa o produto exterior. A forma como as componentes $F_{\mu\nu}(x)$ se relacionam com as componentes dos campos elétricos e magnéticos medidas no laboratório por um dado observador serão analisadas logo adiante. Será conveniente definir também o tensor (igualmente antissimétrico) dual \dot{F} , sendo

$$\dot{F} = \dot{F}_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.2)$$

onde

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

Seguindo Landau e Lifshitz em seu texto *Teoria do Campo* [26], construiremos dois invariantes à partir dos tensores acima citados, os quais denominaremos *invariantes de Lorentz* e *Poincaré* respectivamente

$$F \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{Lorentz}) \quad (2.4)$$

$$G \equiv F^{\mu\nu} \overset{*}{F}_{\mu\nu} \quad (\text{Poincaré}) \quad (2.5)$$

Estes dois objetos serão, como veremos, de importância crucial na definição da forma funcional da *lagrangiana* para uma teoria não linear do eletromagnetismo. Além do mais, pode ser demonstrado que estes são de fato os únicos invariantes independentes construídos com o *tensor de Faraday* e seu dual via contração.

Um *campo de observadores fundamentais* $\vec{V} = V^\mu \bar{e}_\mu$ ($g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 1$) decompõe o tensor de Maxwell em suas partes elétricas e magnéticas da seguinte forma

$$F_{\mu\nu} = -V_\mu E_\nu + V_\nu E_\mu + \eta_{\mu\nu\rho\sigma} V^\rho H^\sigma \quad (2.6)$$

onde as projeções

$$E_\mu = F_{\mu\alpha} V^\alpha \quad (2.7)$$

$$H_\mu = \overset{*}{F}_{\mu\alpha} V^\alpha \quad (2.8)$$

pertencentes à triseção são interpretadas como as componentes dos campos medidas por este conjunto particular de observadores, ou seja, as componentes medidas no laboratório. Torna-se evidente também o fato de que esta decomposição não é única, e que diversos tipos de observadores medirão componentes diferentes conforme o seu estado de movimento. Os campos vetoriais \vec{E} e \vec{H} são evidentemente campos do tipo espaço, e portanto usaremos a definição

$$E_{\mu}E^{\mu} = F_{\mu\alpha}V^{\alpha}F^{\mu\beta}V_{\beta} = F_{\mu\alpha}F^{\mu}_{\beta}V^{\alpha}V^{\beta} \equiv -E^2 \quad (2.9)$$

$$H_{\mu}H^{\mu} = \overset{*}{F}_{\mu\alpha}V^{\alpha}\overset{*}{F}{}^{\mu\beta}V_{\beta} = \overset{*}{F}_{\mu\alpha}\overset{*}{F}{}^{\mu}_{\beta}V^{\alpha}V^{\beta} \equiv -H^2 \quad (2.10)$$

O tensor dual pode ser obtido simplesmente à partir do *tensor de Faraday* trocando-se \vec{E} por $-\vec{H}$ e \vec{H} por \vec{E} , resultando em

$$\overset{*}{F}_{\mu\nu} = V_{\mu}H_{\nu} - V_{\nu}H_{\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}V_{\rho}E_{\sigma}. \quad (2.11)$$

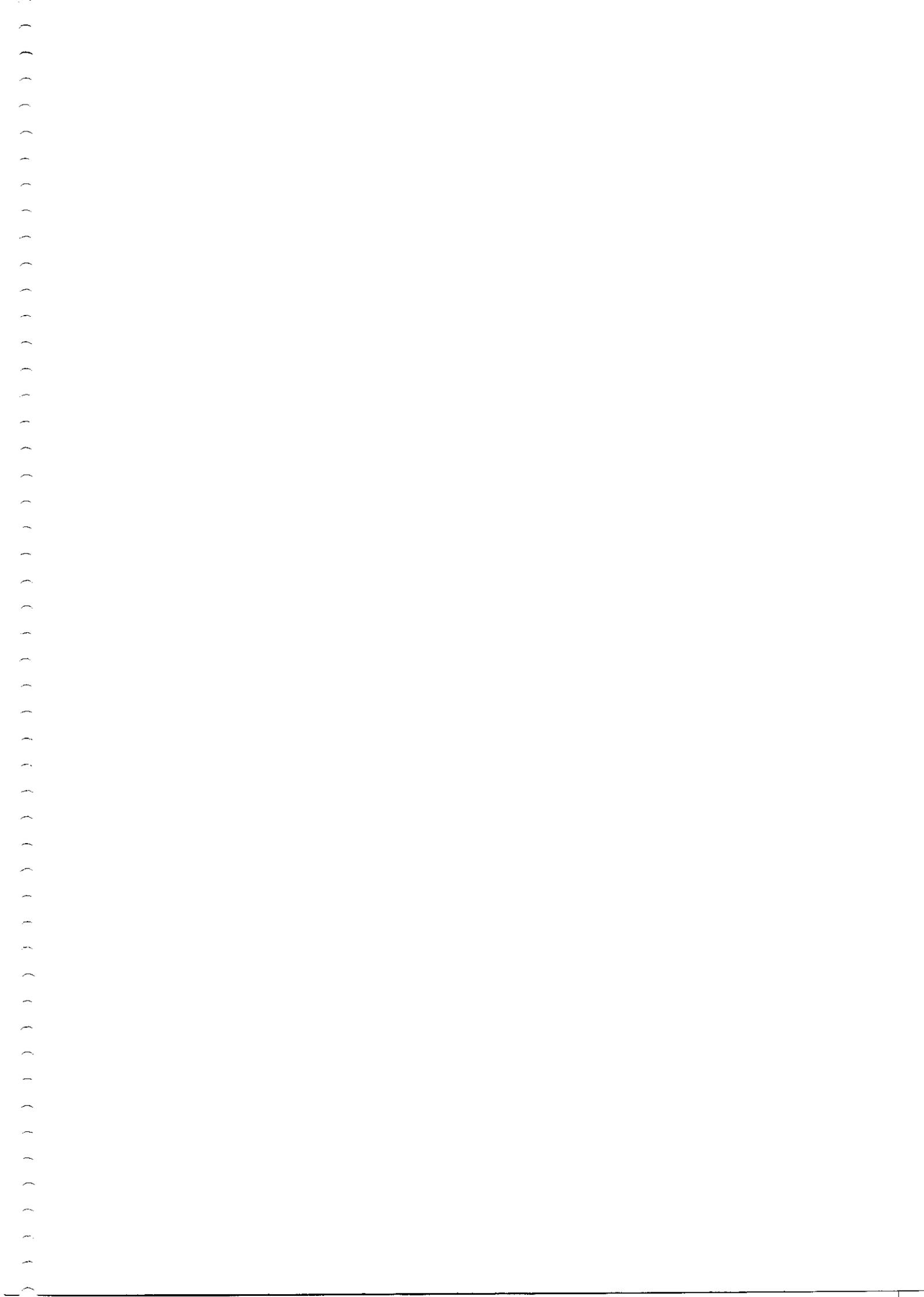
Em termos das projeções, os invariantes mencionados do campo de Maxwell ficam

$$I. \quad F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (E_{\mu}V_{\nu} - E_{\nu}V_{\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}V_{\alpha}H_{\beta})(E^{\mu}V^{\nu} - E^{\nu}V^{\mu} + \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}V^{\alpha}H^{\beta})$$

$$= -E^2 - E^2 + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}V_{\alpha}H_{\beta}V^{\sigma}H^{\rho} = 2(H^2 - E^2) \quad (2.12)$$

$$II. \quad G = \overset{*}{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (V_{\mu}H_{\nu} - V_{\nu}H_{\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}V_{\rho}E_{\sigma})(-V^{\mu}E^{\nu} + V^{\nu}E^{\mu} + \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}V^{\alpha}H^{\beta})$$

$$= -4\vec{E} \cdot \vec{H} \quad (2.13)$$





sendo o primeiro um autêntico escalar e o segundo um pseudo-escalar.

2.2 – Dinâmica

A forma pela qual os campos vetoriais podem se acoplar com a gravidade não é óbvia, e foi alvo de grande interesse a análise das várias possibilidades [27]. De fato, além do acoplamento mínimo tradicional indicado pelo princípio de equivalência, existem ainda outras sete formas de acoplamentos não-mínimos os quais, em geral, não podem ser escolhidos sem certa dose de arbitrariedade. Apesar da grande riqueza teórica fornecida por estes outros modelos, tomaremos aqui a escolha padrão de se acoplar minimamente o campo eletromagnético à gravidade. Se este for o caso, as equações de Maxwell tradicionais no espaço-tempo de Minkowski

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

podem ser imediatamente generalizadas para espaços curvos obtendo as equações de movimento covariantes

$$F^{*uv}{}_{;w} = 0 \quad (2.18)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^{\mu} \quad (2.19)$$

onde j^{μ} é o quadrivetor corrente. A primeira destas equações, geralmente escrita de maneira mais sugestiva

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0 \quad (2.20)$$

nos garante a possibilidade de representar o tensor $F_{\alpha\beta}$ através de um potencial-vetor W^{μ} , implicando que as seis componentes acima citadas não são independentes.

$$F_{\alpha\beta} = W_{\alpha;\beta} - W_{\beta;\alpha} \quad (2.21)$$

A Segunda equação, no vácuo, pode ser obtida à partir de um princípio de ação através da lagrangiana de Maxwell

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F^2 \quad (2.22)$$

Demonstremos que de fato isto acontece. Em termos do potencial-vetor temos:

$$S = -\frac{1}{2} \int (W_{\mu;\nu} W^{\mu;\nu} - W_{\mu;\nu} W^{\nu;\mu}) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.23)$$

Igualando a variação a zero

$$\begin{aligned} \delta S = -\frac{1}{2} \int [\delta W_{\mu;\nu} W^{\mu;\nu} + W_{\mu;\nu} \delta W^{\mu;\nu} - \delta W_{\mu;\nu} W^{\nu;\mu} - W_{\mu;\nu} \delta W^{\nu;\mu}] \sqrt{-g} d^4x = \\ \int (W^{\mu;\nu} - W^{\nu;\mu})_{;\nu} d^4x = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

portanto

$$(W^{\mu\nu} - W^{\nu\mu})_{,\nu} = 0$$

Seguindo procedimento análogo para uma lagrangiana arbitrária e não-linear nos *invariantes de Lorentz e Poincaré*, ou seja

$$S = \int L(F, G) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.25)$$

chegamos finalmente às equações de movimento

$$(L_F F^{\mu\nu} + L_G F^{*\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (2.26)$$

onde $L_F \equiv \frac{dL}{dF}$ e $L_G \equiv \frac{dL}{dG}$ aparecem explicitamente. O espectro de previsões de uma teoria genérica como esta pode ser consideravelmente mais amplo do que no caso do eletromagnetismo usual. As não linearidades presentes na teoria modificam, claro está, as soluções conhecidas. Notemos também que estas equações recaem nas equações de Maxwell quando $L_F = -\frac{1}{4}$ e $L_G = 0$.

Resolver exatamente as equações de movimento (2.26) pode-se tornar um problema complicado de equações diferenciais parciais. De fato, como apontado recentemente no trabalho de D. H. Delphenich [28], em física, deve-se tomar sempre certo cuidado na consideração de não-linearidades. Grande parte das equações parciais não-lineares costumam não apresentar soluções concisas em forma fechada, e em alguns casos, até mesmo a ausência de soluções de interesse físico podem se manifestar (este comentário pode ser extrapolado igualmente para os campos escalares). Conseqüentemente, o caminho mais cauteloso para se inserir não-linearidades em uma dada teoria de campo deveria ser aquele no qual as mesmas fossem conseqüências automáticas de princípios primeiros possivelmente embasados em fatos experimentais. Introduzir portanto

generalizações na forma matemática da lagrangiana de um ponto de vista puramente axiomático pode não ser o ideal. Iremos portanto, mais adiante, introduzir fenomenologicamente lagrangianas não-lineares com o objetivo de investigar algumas de suas propriedades energéticas com estas advertências em mente. Analisemos algumas conseqüências básicas destas possíveis extrapolações.

2.3 – Lei de Coulomb

Um dos grandes testes experimentais da teoria de Maxwell é a conhecida lei de Coulomb. A dependência da lei de força eletrostática entre duas partículas carregadas com a distância foi demonstrada quantitativamente primeiramente por Cavendish e posteriormente pelo próprio Coulomb ser (muito precisamente) uma queda com o inverso do quadrado. Através da lei de Gauss, este fato nos leva à primeira das equações de Maxwell. No entanto, uma vez que os resultados de Coulomb eram de natureza puramente empírica, podemos nos perguntar sobre os limites experimentais destas medidas.

Atualmente, testes de laboratório ou geofísicos apontam para uma precisão razoável no domínio $10^{-2} m < r < 10^7 m$. No domínio atômico ou subatômico estes testes tornam-se cada vez menos diretos, e precisamos contar com hipóteses adicionais tais como o princípio de superposição. Nestas escalas, a lei de Coulomb parece funcionar com precisão até $r \approx 10^{-13} m$ [29]. Portanto, se esperamos que uma teoria não-linear do eletromagnetismo seja de fato necessária, ela precisará estar de acordo com as observações acima citadas.

Para se ter uma idéia das previsões de uma teoria não-linear neste contexto tomemos as soluções estáticas e esféricamente simétricas das equações de movimento (2.26) no espaço-tempo de Minkowski. Em coordenadas esféricas temos:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E(r) & 0 & 0 \\ E(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

As equações de movimento 2.19 ficam

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (L_F \sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dr} (L_F r^2 E(r)) = 0$$

e portanto

$$E(r) = -\frac{Q}{r^2 L_F} \quad (2.28)$$

Rigorosamente falando, é fácil ver que a lei de Coulomb só ocorrerá de fato se $L_F(E)$ for exatamente constante. Devemos portanto admitir limites para a função $L_F(E)$.

2.4 – Princípio de superposição

Um outro fato importante previsto pelas equações de Maxwell é a superposição de soluções. A linearidade destas equações nos garante que uma soma de soluções seja igualmente outra solução. Podemos traduzir esta proposição matemática em linguagem física argumentando que o campo não interage consigo mesmo.

Existem uma infinidade de testes experimentais direcionados para se verificar o *princípio de superposição*. De acordo com Jackson [24], temos evidências confiáveis de que no nível macroscópico todos os experimentos estão consistentes com este princípio numa acurácia de 0.1% - grupos de cargas e correntes produzem forças elétricas e magnéticas estimadas via superposição

e este fato é levado em consideração em todos os tipos de transmissões de ondas eletromagnéticas. Experimentos óticos e a difração de raios-x, além do mais, parecem sustentar que o princípio de superposição permanece sendo válido (dentro, é claro, das imprecisões experimentais) inclusive em escala atômica.

A grande maioria (senão a totalidade) dos trabalhos em eletrodinâmica não-linear argumentam que é no domínio subatômico, devido a presença de campos intensos, que desvios da superposição linear devem ser legitimamente esperados. No entanto, pode bem ser que as correções não lineares, mesmo nas faixas apresentadas, estejam além da detectabilidade no momento, e que nossa compreensão sobre os fenômenos eletromagnéticos não esteja em sua fase final. Voltaremos a esta questão no capítulo 4 quando optarmos por um modelo em particular. Para diminuir um pouco da arbitrariedade na nossa busca por novas teorias eletromagnéticas plausíveis, consideraremos à partir do próximo capítulo apenas o caso simplificado onde a lagrangiana seja um funcional (possivelmente descontínuo em um número finito de pontos) dependente unicamente do *invariante de Lorentz F*.

2.5 – Tensor momento energia

A descrição covariante do campo eletromagnético, além de clareza e compactidade naturais, permite uma abordagem fisicamente intuitiva em termos da dinâmica de fluidos. De fato, a teoria de Maxwell original pretendia descrever os fenômenos relativos à eletricidade e ao magnetismo através da mecânica da elasticidade, sendo as deformações e tensões armazenadas no *éter* os mecanismos responsáveis pelos mesmos. Em particular, podemos interpretar o campo de Maxwell como um fluido inerentemente imperfeito com propriedades físicas especificadas por suas componentes elétricas e magnéticas.

O *tensor de Faraday* bem como a prescrição da lagrangiana em questão determinam univocamente de que forma e como o *tensor momento-energia* guardará informações sobre o estado de “*stresses*” do campo eletromagnético

não-linear. A partir da expressão geral do *tensor momento-energia* para uma teoria eletromagnética $L \rightarrow L(F, G)$ temos

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.29)$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} &= L \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta L \\ &= -\frac{1}{2} L g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \left[\frac{\partial L}{\partial F} \delta F + \frac{\partial L}{\partial G} \delta G \right] \\ &= -\frac{1}{2} L g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \left[L_F (-2 F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu}) + L_G (G g_{\mu\nu}) \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

e portanto,

$$T_{\mu\nu} = -4 L_F F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - (L - G L_G) g_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

Dada então uma mesma configuração de campo, teremos tantos tensores de momento-energia quanto forem diferentes as teorias dinâmicas em questão. Em particular, se a teoria de Maxwell for levada em consideração, sua distribuição de momento e energia terá a forma

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} F g_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

O traço do tensor (2.30) ou a *anomalia de escala* se escreve

$$T = 4(-L + FL_F + GL_G) \quad (2.32)$$

que no caso Maxwelliano se anula identicamente.

Iremos calcular agora as projeções deste tensor ao longo do *campo de observadores* explicitamente em termos dos campos elétrico e magnético. Este procedimento, já comentado no capítulo anterior, fornecerá a decomposição irredutível do tensor momento-energia. As relações a seguir providenciam a descrição hidrodinâmica do campo de Maxwell, e evidenciam sua natureza genericamente anisotrópica.

a) densidade de energia

$$\begin{aligned} \rho &= T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -4L_F F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu V^\mu V^\nu - g_{\mu\nu} (L - GL_G) F \\ &= -4L_F E^2 + GL_G - L \end{aligned} \quad (2.33)$$

b) pressão isotrópica

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu) = -\frac{1}{3} T + \frac{1}{3} \rho \\ &= -\frac{4}{3} (L_F F + L_F E^2) + (L - GL_G) \end{aligned} \quad (2.34)$$

c) vetor de Poynting

$$\begin{aligned} q_\lambda &= T_{\alpha\beta} V^\beta h^{\alpha}{}_\lambda = T_{\alpha\beta} V^\beta (\delta^{\alpha}{}_\lambda - V^\alpha V_\lambda) = T_{\lambda\beta} V^\beta - \rho V_\lambda = \\ &= -4L_F (E^2 V_\lambda + \eta_\lambda{}^{\mu\rho\sigma} V_\rho H_\sigma E_\mu) + (GL_G - L) V_\lambda - (-4L_F E^2 + GL_G - L) V_\lambda = \end{aligned}$$

$$= -4L_F \eta_{\lambda}^{\mu\nu\sigma} V_{\rho} H_{\sigma} E_{\mu} \quad (2.35)$$

d) pressão anisotrópica

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} &= T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + p h_{\mu\nu} = -4L_F \left(F_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu} - F_{\mu\epsilon} E^{\epsilon} V_{\nu} - F_{\nu\epsilon} E^{\epsilon} V_{\mu} + E^2 V_{\mu} V_{\nu} \right) + \\ &+ p h_{\mu\nu} + (GL_G - L) h_{\mu\nu} = \\ &= 4L_F \left(E_{\mu} E_{\nu} + H_{\mu} H_{\nu} \right) + \frac{4}{3} L_F \left(E^2 + H^2 \right) h_{\mu\nu} \quad (2.36) \end{aligned}$$

De agora em diante passaremos quase que exclusivamente à análise das propriedades energéticas originadas por determinados tipos de teorias não-lineares. Nosso grande objetivo será o estudo de modelos cosmológicos em universos permeados por radiação eletromagnética não-linear. No próximo capítulo mostraremos como compatibilizar a natureza anisotrópica e inhomogênea do campo eletromagnético com a geometria de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Capítulo 3 – Processo de médias e alguns resultados elementares

Como vimos anteriormente, o campo eletromagnético possui, na maioria das configurações fisicamente relevantes, uma natureza intrinsecamente anisotrópica, contando com fluxos de calor bem como pressões anisotrópicas não nulos. Uma destas configurações particularmente interessante do ponto de vista da cosmologia é o gás de radiação, dotado de um número suficientemente grande de fótons em interação. Construiremos agora o processo de médias necessário para a compatibilização da geometria de Friedmann-Robertson-Walker com o tensor momento energia de um “*fluido de radiação*”. Neste esquema, a “verdadeira geometria”, solução das equações de Einstein com tensor momento energia livre de médias $T_{\mu\nu}$, pode ser pensada como uma pequena perturbação sobre a solução homogênea e isotrópica. Mostraremos os resultados básicos deste processo quando aplicado ao campo de Maxwell e em particular sua relação com a cosmologia.

3.1 – Processo de médias

Se esperamos que os campos eletromagnéticos atuem como fonte de curvatura em uma geometria predominantemente homogênea e isotrópica, devemos esperar que as condições físicas em regiões diferentes do triespaco

sejam mais ou menos equivalentes, e que em escalas suficientemente grandes, o efeito gravitacional destes campos possa ser aproximado por uma espécie de média espacial.

Em um trabalho de 1930 sobre o equilíbrio termodinâmico na presença de campos gravitacionais estáticos, R. C. Tolmann e P. Ehrenfest [18] foram levados a considerar estas médias no estudo de *gases de radiação*. Este processo foi utilizado para se construir teoricamente uma espécie de termômetro em contato térmico com o sistema em questão. A idéia básica é assumir que em uma cavidade repleta de radiação eletromagnética em equilíbrio termodinâmico os valores médios ou macroscópicos dos fluxos de energia podem ser tomados como nulos. Desta forma, admitimos que as componentes do *tensor de Faraday médio* ($\bar{F}_{\mu\nu}$) se anulam mas não necessariamente todas as componentes envolvendo quadraticamente os campos ($\overline{F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}}$).

Estas médias volumétricas para uma grandeza arbitrária X pode ser definida da seguinte forma

$$\bar{X} \equiv \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int X \sqrt{-g} d^3x \quad (3.1)$$

onde $V = \int \sqrt{-g} d^3x$ e V_0 representa um volume suficientemente grande geralmente dependente do tempo (no caso da cosmologia). Notemos que estas médias estão associadas a escolha de um conjunto particular de triseções $\{\mathbf{H}\}$, e portanto, relacionadas ao *campo de observadores* V^μ em questão. Dois observadores distintos não precisarão necessariamente concordar, de acordo com o processo acima estipulado, com as propriedades médias de suas projeções (E_μ e H_μ no caso). Para simplificar os cálculos tomaremos exatamente um campo de observadores comoventes com o movimento macroscópico da radiação.

Iremos assumir que, para estes observadores, o procedimento mencionado resultará nas seguintes identidades para as componentes dos campos elétricos e magnéticos.

$$\text{I.} \quad \bar{E}_i = 0, \quad \bar{H}_i = 0,$$

uma vez que na média não poderá haver nenhuma direção privilegiada.

$$\text{II.} \quad \bar{E}_i \bar{H}_j = 0,$$

já que a falta de relações entre as fases das ondas eletromagnéticas irá tornar igualmente provável que os valores instantâneos destes produtos tenham sinais positivos ou negativos. E finalmente

$$\text{III.} \quad E_i \bar{E}_i = -\frac{1}{3} \bar{E}^2 g_{ii}, \quad H_i \bar{H}_i = -\frac{1}{3} \bar{H}^2 g_{ii}, \quad (3.2)$$

onde os campos \bar{E}^2 e \bar{H}^2 são agora tomados como constantes ao longo das triseções. Notemos também que, para a congruência em questão a equação 2.6 reduz-se a

$$\bar{F}_{\mu\nu} = -V_\mu \bar{E}_\nu + V_\nu \bar{E}_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} V_\rho \bar{H}_\sigma = 0. \quad (3.3)$$

De agora em diante passaremos a estudar as propriedades do *tensor energia-momento médio* ($\bar{T}_{\mu\nu}$) de uma teoria eletromagnética não-linear arbitrária. Aplicando o processo na decomposição do tensor energia-momento do campo eletromagnético, reduzimo-lo ao tensor de um fluido perfeito

$$\bar{T}_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p}) V_\mu V_\nu - \bar{p} g_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

onde as funções $\bar{\rho}$ e \bar{p} podem ser pensadas como as densidades e pressões macroscópicas medidas por estes observadores na radiação. Demonstramos que isto ocorre de fato. Tomando a folheação convencional do espaço-tempo em regiões disjuntas separadas por hipersuperfícies do tipo espaço, e escolhendo a coordenada temporal ao longo da linha de universo do *campo de observadores fundamentais*, isto é $V^\mu = \delta^\mu_0$, temos:

1) densidade de energia ρ

$$\rho = 4L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} E_i E_j - L. \quad (3.5)$$

2) densidade de energia média $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = 4L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} \overline{E_i E_j} - L = -\frac{4}{3} L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} g_{ij} E^2 - L = -4L_F E^2 - L. \quad (3.6)$$

3) pressão isotrópica p

$$p = -\frac{4}{3} \left(L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} E_i E_j - 2L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} H_i H_j \right) + L. \quad (3.7)$$

4) pressão isotrópica média \bar{p}

$$\begin{aligned} \bar{p} &= -\frac{4}{3} \left(L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} \overline{E_i E_j} + 2L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} \overline{H_i H_j} \right) + L = \\ &= -\frac{4}{3} \left(-L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} g_{ij} E^2 + 2L_F \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} g_{ij} H^2 \right) + L = \end{aligned}$$

$$= L - \frac{4}{3}(2H^2 - E^2)L_F. \quad (3.8)$$

5) vetor de Poynting ou fluxo de calor q_λ .

$$q_\lambda = -4L_F V_\rho \sum_{i,j=1}^3 \eta_\lambda^{\rho ij} H_i E_j \quad (3.9)$$

6) vetor de Poynting médio \bar{q}_λ

$$\bar{q}_\lambda = -4L_F V_\rho \sum_{i,j=1}^3 \eta_\lambda^{\rho ij} \overline{H_i E_j} = 0. \quad (3.10)$$

7) pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$

$$\pi_{\mu\nu} = 4L_F (E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu) - \frac{4}{3} L_F \left(\sum_{i,j=1}^3 g^{ij} E_i E_j + \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} H_i H_j \right) h_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

8) pressão anisotrópica média $\bar{\pi}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{\mu\nu} &= 4L_F (\overline{E_\mu E_\nu} + \overline{H_\mu H_\nu}) - \frac{4}{3} L_F \left(-\frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} g_{ij} \overline{E^2} - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} g_{ij} \overline{H^2} \right) h_{\mu\nu} = \\ &= 4L_F (\overline{E_\mu E_\nu} + \overline{H_\mu H_\nu}) + \frac{4}{3} L_F (\overline{E^2} + \overline{H^2}) (g_{\mu\nu} - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

É fácil observar que o cálculo da pressão anisotrópica média resultará em zeros. Vejamos separadamente o cálculo das componentes.

- as componentes $\bar{\pi}_{0i}$ são identicamente nulas uma vez que neste sistema de coordenadas tanto \bar{E} , quanto \bar{H}_0 se anulam e $g_{00} = 1$.
- as componentes π_{ij} ficam

$$\bar{\pi}_{ij} = 4L_F \left(-\frac{1}{3} \bar{E}^2 g_{ij} - \frac{1}{3} \bar{H}^2 g_{ij} \right) + \frac{4}{3} L_F (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) g_{ij} = 0. \quad (3.13)$$

O processo de médias exclui pois toda a espécie de anisotropias do campo para este observador, reduzindo o tensor momento energia à forma

$$\bar{T}_{\mu\nu} = -(4L_F \bar{E}^2 + L) \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - \left(L - \frac{4}{3} (2\bar{H}^2 - \bar{E}^2) L_F \right) (g_{\mu\nu} - \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0), \quad (3.14)$$

particularmente interessante para a cosmologia. Notemos também que a densidade de energia bem como a pressão isotrópica dependem exclusivamente da coordenada temporal, garantindo as simetrias necessárias às triseções da geometria de FRW.

3.2 – Campos magnéticos

Uma vez que grande parte do interesse em se considerar a relevância dos campos eletromagnéticos em cosmologia está centrada na *era de radiação*, onde supostamente os campos tomaram proporções enormes, a matéria deve ser identificada com uma espécie de *plasma primordial*. Neste caso, somos levados a considerar um modelo onde somente o quadrado do campo magnético médio $\bar{H}(t)^2$ persiste [referências]. Este procedimento, como ressaltado no trabalho “Eletrodinâmica não-linear e a cosmologia de FRW” [15], é equivalente a estabelecer explicitamente a condição $\bar{E}(t)^2 = 0$ nas equações 3.5 - 3.13, e fisicamente significa negligenciar termos relacionados à viscosidade na

condutividade elétrica do plasma primordial. De qualquer forma este procedimento pode ser tomado como a base para se compreender a influência gravitacional de campos magnéticos em sistemas possivelmente mais complicados onde as equações de média ou as restrições mencionadas não são mais inteiramente válidas como é o caso nos campos magnéticos intergalácticos bem como da própria radiação cósmica de fundo.

Utilizando estes resultados nas equações mencionadas, o *invariante de Lorentz*, para estes observadores reduz-se a $F = 2\bar{H}^2$. As relações obtidas acima para as projeções médias ficam

$$\bar{\rho} = -L(2\bar{H}^2) \quad \bar{p} = L(2\bar{H}^2) - \frac{8}{3}L_F\bar{H}^2 \quad \bar{T} = 8L_F\bar{H}^2 - 4L(2\bar{H}^2) \quad (3.15)$$

onde \bar{T} deve ser identificado com o traço médio do tensor momento energia do campo eletromagnético. Um valor não nulo desta grandeza implica necessariamente na ausência de soluções para as equações de Einstein com escalar de curvatura nulo ($R = 0$).

Mostraremos agora um resultado particularmente interessante que surge como conseqüência do processo de médias aplicado ao *plasma primordial*. Este resultado permitirá a interpretação do fluido de radiação não-linear como uma espécie de superposição de fluidos não interagentes dotados de equações de estado não equivalentes. Assumindo que a evolução temporal das médias acima definidas satisfazem igualmente uma equação de conservação do tipo

$$\dot{\bar{\rho}} + (\bar{\rho} + \bar{p})\theta = 0, \quad (3.16)$$

e tomando-a em conjunto com as identidades

$$\dot{\bar{\rho}} = -L_F\dot{F} \quad \bar{\rho} + \bar{p} = -\frac{4}{3}L_FF \quad (3.17)$$

resultaremos em

$$-L_F \dot{F} - \frac{4}{3} L_F F \theta = 0. \quad (3.18)$$

Colocando L_F em evidência e lembrando que $F = 2\bar{H}^2$ no plasma teremos

$$-L_F \left(4\bar{H} \cdot \dot{\bar{H}} + \frac{8}{3} \bar{H}^2 \theta \right) = 0. \quad (3.19)$$

Mas no caso da geometria de FRW o escalar de expansão θ satisfará

$$\theta = V^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \delta^{\mu}{}_{\nu} \right)_{;\mu} = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

e então chegamos a equação abaixo

$$\bar{H} \frac{d\bar{H}}{dt} + \frac{2\bar{H}^2}{a} \frac{da}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{\bar{H}} d\bar{H} = \int \frac{2}{a} da \quad (3.20)$$

que tem como solução

$$\bar{H}^2(a) = \frac{H_0^2}{a^4} \quad (3.21)$$

H_0 sendo uma constante real arbitrária. Esta solução, graças ao processo de médias realizado, nos permitirá a analogia do tensor momento energia de qualquer teoria não-linear envolvendo campos magnéticos com o de um fluido composto de várias partes não interagentes, uma vez que este resultado não depende da forma como as não linearidades são introduzidas na teoria. Para elucidar este fato tomemos uma teoria não-linear baseada em uma lagrangiana polinomial absolutamente genérica definida pela soma

$$L = \sum_k c_k F^k = \sum_k c_k 2^k \bar{H}^{2k}, \quad (3.22)$$

onde a soma em k , em analogia com as séries de Taylor, toma apenas valores naturais e vão até n . A derivada de L com relação a variável F fica

$$L_F = \sum_k c_k k 2^{k-1} \bar{H}^{2(k-1)} \quad (3.23)$$

Portanto, para cada potência individual do tipo F^k existe um fluido correspondente com densidade de energia ρ_k e pressão p_k tal que $\bar{\rho} = \sum_k \rho_k$ e $\bar{p} = \sum_k p_k$. As componentes podem ser obtidas explicitamente em termos do campo magnético médio usando as definições (3.14).

$$\text{I.} \quad \bar{\rho} = -L(2\bar{H}^2) = -\sum_k c_k 2^k \bar{H}^{2k} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad \bar{p} &= L(2\bar{H}^2) - \frac{8}{3} L_F \bar{H}^2 = \sum_k c_k 2^k \bar{H}^{2k} - \frac{8}{3} \sum_k c_k k 2^{k-1} \bar{H}^{2k} = \\ &= \sum_k c_k 2^k \bar{H}^{2k} \left(1 - \frac{4k}{3}\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por analogia entre os somatórios somos levados finalmente às definições

$$\rho_k = -2^k c_k \bar{H}^{2k} \quad (2.26)$$

$$p_k = c_k 2^k \bar{H}^{2k} \left(1 - \frac{4k}{3}\right) \quad (2.27)$$

De certa forma, esta separação em componentes independentes tem sua dose de artificialidade, uma vez que é o fluido como um todo o responsável pela distribuição de momento e energia global, e nós não temos acesso aos fluidos de maneira independente. No entanto, pode ser interessante este ponto de vista para a análise de algumas propriedades básicas relacionadas às teorias não-lineares. Notemos que para cada valor de k existe uma equação de estado linear relacionando a densidade de energia e pressão correspondente dada por

$$p_k = \left(\frac{4k}{3} - 1 \right) \rho_k. \quad (3.28)$$

sendo interessante notar que a pressão sobre a densidade de energia ultrapassa a unidade para qualquer valor de $k > 1$, sendo exatamente igual a $\frac{1}{3}$ para $k = 1$.

Alguns comentários básicos fazem-se necessários neste ponto.

- I. Uma vez que pela conservação da energia média a dependência de “ \bar{H} ” com o fator de escala “ a ” estará definida independentemente das não-linearidades envolvidas na lagrangiana (3.21), cada componente do fluido eletromagnético com energia e pressão dadas por (2.25) e (2.26) terá decaimentos diferentes dominando em épocas distintas e satisfazendo as condições

$$\rho_k(a) = -2^k c_k \frac{H_0^{2k}}{a^{4k}} \quad (3.29)$$

$$p_k(a) = c_k 2^k \left(1 - \frac{4k}{3} \right) \frac{H_0^{2k}}{a^{4k}}. \quad (3.30)$$

Alguns destes decaimentos podem ser observados no gráfico 3.1.

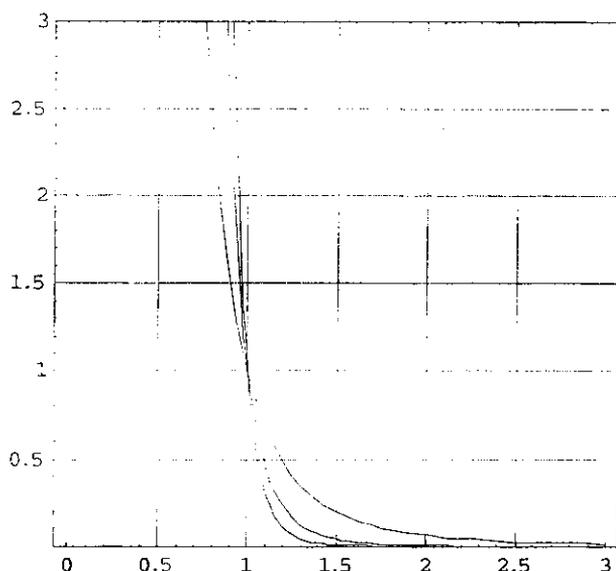


Figura 3.1: decaimento da densidade de energia contra o fator de escala para diversos valores de k .

- II. A escolha das constantes c_k pode influenciar nos sinais da energia bem como da pressão. Para valores negativos destas constantes, tanto a pressão quanto a densidade de energia são positivas e definidas. Em particular, pode-se perfeitamente pensar em exemplos onde isto não mais ocorra, tornando possível a manifestação de fluidos com pressões e/ou energias negativas. Notemos também que para cada componente dada o decaimento da pressão conta com potências da mesma ordem que a densidade de energia, e que portanto, a equação de estado deve ser linear.
- III. No caso do fluido como um todo podemos pensar na *equação de estado efetiva*. Esta equação estabelece uma relação geralmente não-linear entre a densidade de energia total e a pressão total, e é dada por

$$\bar{p} = - \frac{\sum c_k 2^k \bar{H}^{2k} (1 - 4k/3)}{\sum c_k 2^k \bar{H}^{2k}} \bar{\rho} \quad (3.31)$$

A equação de estado efetiva de uma teoria não linear é, pois, obviamente uma função explícita do campo, indicando sua dependência temporal no caso dinâmico. Esta é, como vimos, uma das propriedades frequentemente invocadas para se privilegiar a descrição da aceleração cósmica em termos de campos escalares ao invés da constante cosmológica cuja equação de estado é independente do tempo ($p = -\rho$). Vale lembrar que existe atualmente uma grande atenção voltada para a reconstrução da equação de estado efetiva da energia escura à partir das observações. Esta reconstrução implicaria em alguma medida (direta ou indireta) da derivada terceira (*jerk*) do fator de escala \ddot{a} o que ainda permanece além do estado da arte [16].

3.3 – Teoria de Maxwell e a cosmologia

O modelo cosmológico padrão, baseado na geometria de Friedmann-Robertson-Walker com o eletromagnetismo de Maxwell como fonte de momento-energia, nos leva ao cenário resultante descrito por uma singularidade inicial bem como à desaceleração permanente do fator de escala, isto é $\ddot{a} < 0$. Isto se deve principalmente ao fato de que a condição de energia forte segue sendo invariavelmente mantida, e a equação de Raychaudhuri fornecendo a divergência do escalar de expansão θ em um tempo finito na direção do passado. Analisaremos agora algumas peculiaridades da teoria de Maxwell neste contexto, descrevendo o cenário dominado apenas pelo campo magnético, e posteriormente faremos alguns comentários referentes à combinação de campos elétricos e magnéticos.

Neste cenário é possível resolver exatamente as equações de movimento para o fator de escala. Em particular, a integral primeira (equ. 1.22) fica

$$\frac{da}{dt} = \pm \sqrt{\frac{H_0^2}{6a^2} - \varepsilon} \quad (3.32)$$

e então

$$\pm \frac{da}{\sqrt{H_0^2/6a^2 - \varepsilon}} = dt \Rightarrow \pm \frac{a.da}{\sqrt{H_0^2/6 - \varepsilon.a^2}} = dt. \quad (3.33)$$

Integrando os dois lados da equação acima temos a seguinte solução implícita

$$\pm \int_{a_0}^{a(t)} \frac{a'.da'}{\sqrt{H_0^2/6 - \varepsilon.a'^2}} = \int_0^t dt'.dt'. \quad (3.34)$$

A integral do lado esquerdo pode ser facilmente resolvida utilizando a substituição

$$f(a') \equiv H_0^2/6 - \varepsilon.a'^2 \quad (3.35)$$

sendo

$$\frac{df}{da'} = -2\varepsilon.a'. \quad (3.36)$$

Desta forma, temos

$$t = \mp \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(H_0^2/6 - \varepsilon.a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(H_0^2/6 - \varepsilon.a_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.37)$$

Colocando a condição $a(0)=0$ e realizando algumas pequenas manipulações algébricas temos finalmente a solução conhecida para o fator de escala

$$A(t) = \sqrt{A_0^2 t - \varepsilon.t^2}. \quad (3.38)$$

Esta é claramente uma solução singular das equações de Einstein. A singularidade matemática contida na equação de evolução implica na divergência de grandezas físicas tais como pressão e densidade de energia em um tempo finito no passado o que certamente pode ser alvo de questionamento no modelo. Este fato decorre diretamente dos teoremas de singularidade da relatividade geral aplicados ao campo de Maxwell, e pode ser visualizado facilmente à partir da divergência na derivada temporal de a no limite em que $t \rightarrow 0$

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2} \left(a_0^2 t - \varepsilon t^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(a_0^2 - 2\varepsilon t \right). \quad (3.39)$$

Além do mais, é interessante lembrar que, como esperado, o modelo prevê comportamento sempre desacelerado para o fator de escala. O grande objetivo do próximo capítulo será construir um novo modelo baseado em uma teoria não-linear do eletromagnetismo e mostrar que este resultado pode não ser mais válido, acarretando a aceleração cósmica para certos regimes da evolução do Universo.

Antes de entrar na discussão do caso mais geral envolvendo o campo elétrico gostaríamos de fazer um pequeno comentário sobre a possibilidade de se resolver exatamente as equações de movimento. De fato esta busca pode ser excessivamente complicada devido às não linearidades possivelmente presentes em uma eventual teoria. Este trabalho não tem o objetivo de encontrar a expressão exata solução destas equações, mas sim a análise qualitativa das propriedades relacionadas à evolução temporal do fator de escala. Para tanto, passaremos muitas vezes a observar o comportamento do sistema dinâmico fornecido pela integral primeira reduzindo muitas vezes o problema da solução de uma equação diferencial de ordem 2, como em mecânica clássica usual, ao problema de quadratura.

A título de ilustração para o caso Maxwelliano exibimos abaixo este procedimento. Os gráficos de \dot{a} contra a para os casos hiperbólico ($\varepsilon = -1$), plano ($\varepsilon = 0$) e esférico ($\varepsilon = 1$) ficam.

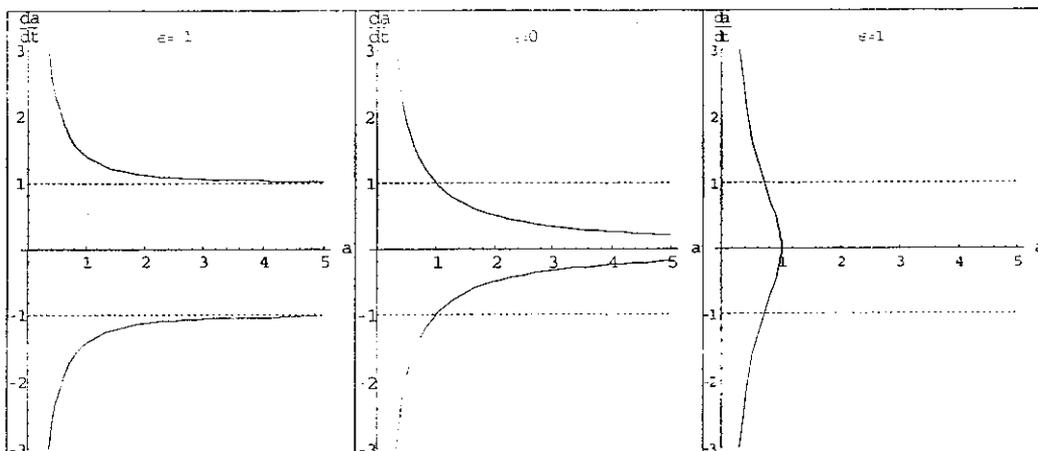


Gráfico 3.2: esboço do sistema dinâmico $a \times \dot{a}$.

Finalmente temos a solução qualitativa para o fator de escala

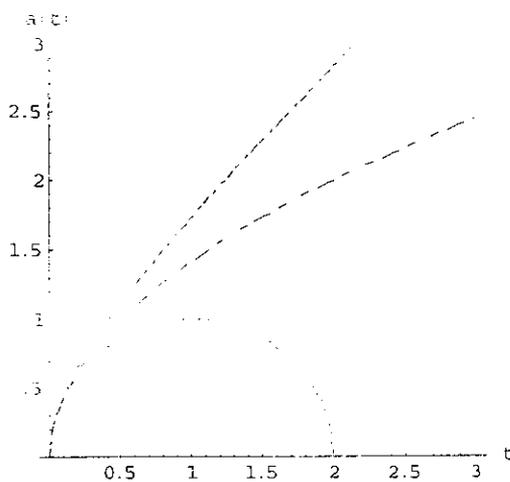


Gráfico 3.3: evolução do fator de escala para cada uma das triseções possíveis.

3.4 – Campos elétricos

Se os campos elétricos forem tomados em consideração somos levados a analisar o caso mais geral onde

$$\rho = -\sum c_k F^k - 4\bar{E}^2 \sum c_k k F^{k-1} = -\sum c_k F^{k-1} (F + 4\bar{E}^2 k) \quad (3.40)$$

e

$$p = \sum c_k F^k + \frac{4}{3}(\bar{E}^2 - 2\bar{H}^2) \sum c_k k F^{k-1} = \sum c_k F^{k-1} \left[F + \frac{4}{3}(\bar{E}^2 + \bar{H}^2) k \right] \quad (3.41)$$

Neste caso ainda podemos pensar no fluido eletromagnético como uma superposição de fluidos mas como veremos em breve estes fluidos interagem entre si. Para simplificar em parte a estrutura das equações tomemos o modelo especial onde o módulo quadrado de \bar{E} é proporcional a \bar{H}^2 ou seja

$$E^2 = \sigma^2 H^2 \quad (3.42)$$

onde σ^2 é uma constante de proporcionalidade real definida no intervalo $[0,1]$.

Neste tipo de possibilidade o invariante do campo F fica

$$F = 2(\bar{H}^2 - \sigma^2 \bar{H}^2) = 2\bar{H}^2(1 - \sigma^2). \quad (3.43)$$

Desta maneira, as equações 3.40 e 3.41 modificam-se e tomam a forma

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \rho &= -\sum c_k F^{k-1} (F + 4\sigma^2 \bar{H}^2 k) = -\sum c_k F^{k-1} [2\bar{H}^2(1 - \sigma^2) + 4\sigma^2 \bar{H}^2 k] = \\ &= -\sum c_k F^{k-1} 2\bar{H}^2 (1 - \sigma^2 + 2\sigma^2 k) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\text{II.} \quad p = \sum c_k F^{k-1} \left[F + \frac{4}{3}(\sigma^2 \bar{H}^2 - 2\bar{H}^2) k \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum c_k F^{k-1} \left[2\bar{H}^2(1-\sigma^2) + \frac{4}{3}(\sigma^2\bar{H}^2 - 2\bar{H}^2)k \right] = \\
&= \sum c_k F^{k-1} \frac{2}{3}\bar{H}^2 \left[3(1-\sigma^2) + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)k \right] \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Em analogia com o processo realizado no caso dominado exclusivamente pelo campo magnético definiremos cada componente do novo fluido através das equações

$$\rho_k \equiv c_k F^{k-1} 2\bar{H}^2 (\sigma^2 - 1 - 2\sigma^2 k) \quad (3.46)$$

$$p_k \equiv c_k F^{k-1} \frac{2}{3}\bar{H}^2 \left[3(1-\sigma^2) + \frac{2}{3}(\sigma^2 - 2)k \right] \quad (3.47)$$

Comparando as duas definições notamos que novamente a relação entre elas é linear ($p_k = \lambda_k \rho_k$), e depende do fator de proporcionalidade σ da forma

$$\lambda_k = -\frac{1}{3} \left[3(\sigma^2 - 1) - 2k(\sigma^2 - 2) \right] \left[\sigma^2 - 1 - 2\sigma^2 k \right]^{-1}. \quad (3.48)$$

Dois casos particularmente interessantes merecem atenção.

- $k=1$ e $\sigma \neq 0$ – este é justamente o caso Maxwelliano com campos elétricos e magnéticos em conjunto e, como esperado, a equação acima prevê

$$p_1(\sigma) = -\frac{1}{3} \left[3(1-\sigma^2) + 2(\sigma^2 - 2) \right] \left[\sigma^2 + 1 \right]^{-1} \rho_1 \quad (3.49)$$

que é um resultado independente das proporções entre as médias \bar{E}^2 e \bar{H}^2 ou seja independente de σ^2 .

- k arbitrário e $\sigma = 1$ – nesta outra possibilidade existe uma espécie de equipartição entre os campos, e novamente temos

$$\rho_k = \frac{1}{3}[-2k][-2k]^{-1} = \frac{1}{3} \quad (3.50)$$

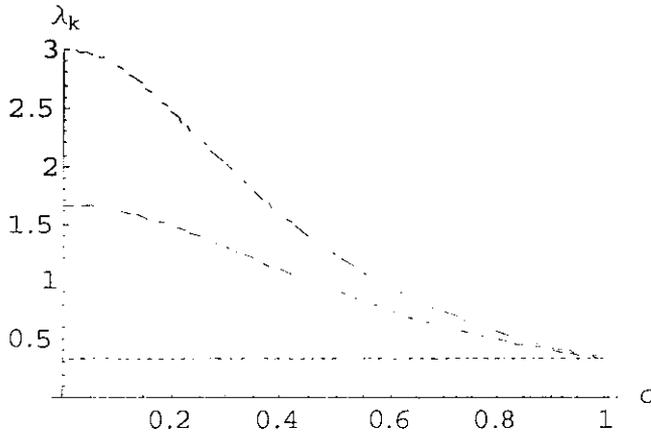


Figura 3.4. Esboço do comportamento de λ_k em termos de σ para $k = 1, 2$ e 3 .

Passemos agora à análise da equação de continuidade. Lembrando que

$$\bar{E}^2 + \bar{H}^2 = \bar{H}^2(1 + \sigma^2) \quad (3.51)$$

a densidade de energia fica

$$\rho = -\sum \frac{(1 - \sigma^2 + 2\sigma^2 k)}{(1 - \sigma^2)} c_k F^k \quad (3.52)$$

A variação temporal da densidade de energia deve satisfazer a equação

$$\dot{\rho} = -\sum \frac{(1 - \sigma^2 + 2\sigma^2 k)}{(1 - \sigma^2)} c_k k F^{k-1} \dot{F}. \quad (3.53)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \rho + p &= \sum \frac{4}{3} (\bar{E}^2 - 2\bar{H}^2) k c_k F^{k-1} - \sum 4\bar{E}^2 k c_k F^{k-1} = \\ &= -\frac{8}{3} \sum (\bar{E}^2 + \bar{H}^2) k c_k F^{k-1} = \\ &= -\frac{8}{3} \sum \frac{1}{2} \frac{(1 + \sigma^2)}{(1 - \sigma^2)} c_k k F^k \end{aligned} \quad (3.54)$$

temos

$$\sum c_k k F^k \left[\frac{(1 - \sigma^2 + 2\sigma^2 k)}{(1 - \sigma^2)} \frac{\dot{F}}{F} + 4 \frac{(1 + \sigma^2)}{(1 - \sigma^2)} \frac{\dot{a}}{a} \right] = 0 \quad (3.55)$$

significando que existe um fenômeno de interação entre as várias componentes do fluido decomposto. O fator k presente na expressão entre colchetes extingue a fatoração necessária para se chegar à uma identidade do tipo exibida na equ. (3.55), tomando a equação de conservação altamente não linear. Depois de realizada a soma teremos uma equação do tipo

$$\chi(F, F^2, \dots; \sigma) \frac{\dot{F}}{F} + \xi(F, F^2, \dots; \sigma) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (3.56)$$

onde χ e ξ representam polinômios nas variáveis F e σ dependem da teoria em questão. Encontrar soluções para a equação acima pode não ser simples apesar de ser uma equação de primeira ordem e, portanto, nos concentraremos

primeiro no caso mais simples onde $\sigma = 0$. Exibiremos posteriormente alguns resultados particulares para a situação mais genérica.

Estamos agora em condições de analisar as propriedades cosmológicas de qualquer teoria não linear do eletromagnetismo sob a ótica do processo de médias descrito neste capítulo.

espantar que as primeiras tentativas para se corrigir as equações de Maxwell viessem de argumentos originados na física subatômica, ou como se queira na teoria clássica do elétron. Neste regime o campo Coulombiano pode tomar valores suficientemente elevados para se esperar efeitos não-lineares. Dois protótipos interessantes de teorias não lineares do eletromagnetismo são a teoria de Born-Infeld e a teoria de Euler-Heisenberg.

Aproximadamente vinte anos após as especulações teóricas de Mie, M. Born e L. Infeld propuseram uma completa teoria clássica de campo, relativística, invariante de calibre e não-linear, da eletrodinâmica. Construindo explicitamente uma forma funcional para a lagrangiana envolvendo a raiz quadrada do determinante de um tensor de ordem dois, alguns problemas relacionados às singularidades, isto é, divergências em grandezas físicas foram automaticamente retirados da eletrodinâmica. Uma consequência imediata desta teoria é a finitude da autoenergia eletrostática de uma partícula pontual carregada, problema que persistia há décadas na história da física. No entanto, apesar do forte apelo teórico, não haviam evidências experimentais conclusivas e durante muitos anos a lagrangiana de Born-Infeld tornou-se apenas um modelo curioso de interesse acadêmico. Outra teoria que merece ser mencionada é de Euler-Heisenberg. A ação fenomenológica introduzida por estes autores na década de trinta, acarretando modificações na teoria de Maxwell graças às correções quânticas de um “loop” da eletrodinâmica, foi capaz de contextualizar entre outros o efeito Delbrück, isto é, o espalhamento de fótons por fótons. Hoje em dia tem sido alvo de crescente interesse no que se refere às propriedades energéticas de vácuos não-triviais.

Na cosmologia, em particular, algumas propostas de se considerar processos não-lineares do eletromagnetismo vem sendo analisadas. A grande motivação para se tomar tal procedimento decorre geralmente de três alternativas igualmente razoáveis.

- i. Processos clássicos capazes de modificar dificuldades associadas à presença de divergências na teoria linear de Maxwell, como por exemplo a teoria de Born-Infeld;

Capítulo 4 – Luz escura?

“Vós, ó Caos confuso e antiga noite,
Grandes deidades deste baixo Abismo...
Não venho como espião no vil intento
De explorar ou turbar do império vosso
Os espaços e as leis té hoje ocultos:
Transviou-me aqui a escuridão deste ermo.
Dirijo-me da luz ao doce clima:
Corro esta profundez co' o fim de achá-lo.”

Lúcifer – *Paraíso Perdido* – J. Milton

Vários autores têm argumentado a necessidade de se atribuir não-linearidades em teorias de campos para certos tipos específicos de regimes. Espera-se em geral que este procedimento torne-se indispensável quando determinadas configurações de campo alcancem uma faixa de valores suficientemente elevados. Assim, por exemplo, em teorias de gravitação procurou-se resolver fenomenologicamente problemas associados à singularidades acrescentando termos não-lineares na lagrangiana de *Einstein-Hilbert* do tipo R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ predominantemente relevantes na fase primordial do universo. No caso dos campos escalares, potenciais autointerativos significantes para altas intensidades vem sendo propostos em vários contextos diferentes tais como na teoria da Inflação [30]. Desta maneira, não é de se

- ii. Processos de natureza predominantemente quântica possivelmente relacionados com as flutuações de vácuos não triviais em analogia à teoria de Euler-Heisenberg;
- iii. Acoplamento não mínimo entre o eletromagnetismo e o campo gravitacional;

Em praticamente todas as três possibilidades o fenômeno de auto-interação apresentado na dinâmica do campo eletromagnético ocorre invariavelmente para valores intensos do campo. Nossas investigações irão exatamente em direção ao lado oposto, buscando correções para a teoria de Maxwell principalmente no regime de baixos campos. Esta é aparentemente uma linha de investigação de certa forma recente e até o momento pouco estudada.

Convém lembrar finalmente que grande parte destas considerações sobre não-linearidades não são exclusivas às teorias de campo, e motivaram toda uma série de questões na teoria de sistemas dinâmicos, teorias de bifurcação, termodinâmica, físico-química e etc.

4.1 – Nova física gravitacional?

Mencionamos nos primeiros capítulos alguns problemas em se atribuir os efeitos da aceleração do Universo em termos de fluidos com propriedades hidrodinâmicas não convencionais. De forma a superar parte dessas dificuldades alguns autores vem investigando a possibilidade de se descrever este fenômeno em termos de efeitos puramente gravitacionais. Um exemplo particularmente interessante é o da teoria de *simetria inversa* envolvendo potências negativas do escalar de curvatura na lagrangiana da gravitação. Na teoria da relatividade geral, as equações de movimento são conseqüências da

ação de Einstein-Hilbert dada pela lagrangiana $L(R) = \sqrt{-g} R/2$. Neste novo caso, a ação adquire um novo termo dado por [31]

$$S = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{\alpha^4}{R} \right) - \int d^4x \sqrt{-g} L_M, \quad (4.1)$$

onde α é uma nova constante com unidades de massa, L_M é a densidade lagrangiana da matéria e M_p a massa de Planck reduzida. As equações de movimento generalizadas tomam a forma

$$\left(1 + \frac{\alpha^4}{R^2} \right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^4}{R^2} \right) R g_{\mu\nu} + \alpha^4 \left(\frac{1}{R^2} \right)^{;\beta}{}_{;\beta} g_{\mu\nu} - \alpha^4 \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \left(\frac{1}{R^2} \right) = -T_{\mu\nu}$$

que exibem algumas soluções para o vácuo com peculiaridades bastante interessantes. As soluções de vácuo com curvatura constante, isto é, $R_{;\mu} = 0$ devem satisfazer $R = \pm\sqrt{3}\alpha^2$. Portanto, estas soluções são do tipo de Sitter (dS) e anti de Sitter (adS) e não Minkowski, podendo portanto, de um ponto de vista fenomenológico, se tornar uma alternativa diferente para descrever o problema da aceleração, apesar de dS ser aparentemente instável.

4.2 – Uma analogia com a eletrodinâmica

Inspirados pelas propriedades aparentemente interessantes apresentadas por uma teoria do tipo *simetria inversa*, iremos estender as considerações dos capítulos 2 e 3 para o caso igualmente plausível de uma teoria não-linear baseada em uma série de potências do tipo

$$L(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k F^k. \quad (4.2)$$

onde as potências negativas de F poderão eventualmente ser levadas em consideração. Este processo pode ser pensado como uma extrapolação das séries de Taylor usuais para uma espécie de série de Laurent dotada de índices negativos bem como positivos. Uma vez que tanto a lagrangiana quanto F tem unidades de comprimento⁻⁴, as constantes c_k terão unidades de comprimento^{4(k-1)}. Como veremos, ao aplicar o processo estatístico do capítulo passado, a decomposição em fluidos não interagentes pode ser perfeitamente generalizada para este caso.

Tomaremos o caso mais simples de uma teoria deste tipo e consideraremos algumas de suas propriedades no que se refere à cosmologia. A adição de um termo com não linearidade específica do tipo abaixo à lagrangiana de Maxwell gera uma nova espécie de fluido com equação de estado assintoticamente supernegativa. Postulemos então a lagrangiana

$$L(F) = -\frac{1}{4}F - \frac{\mu^8}{F} \quad (4.3)$$

que descreve o campo eletromagnético nesta nova teoria. μ é uma constante fundamental com dimensões de comprimento⁻¹ que deve ser regulada pela experiência.

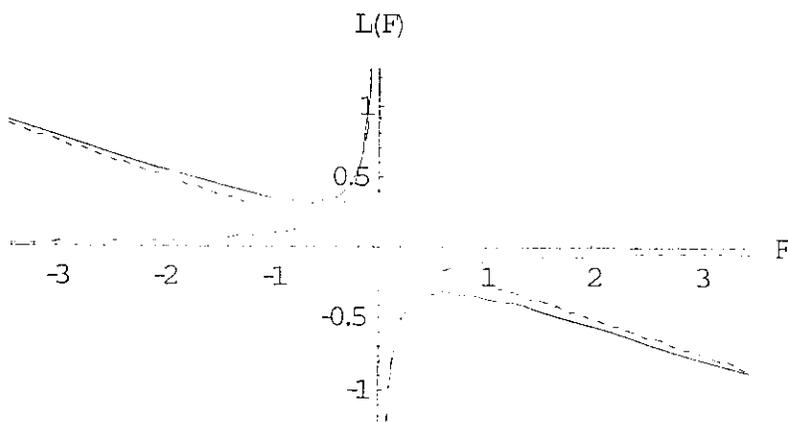


Figura 4.1: Comportamento comparativo entre $L(F)$ e Maxwell. Neste caso a constante de acoplamento μ^8 foi tomada ilustrativamente como 0.1.

Como veremos adiante, esta modificação do eletromagnetismo parece estar consistente com os fatos experimentais básicos igualmente previstos pela teoria de Maxwell. Claramente este procedimento será razoável para valores suficientemente pequenos da constante μ^8 . É instrutivo comparar graficamente algumas alterações acrescentadas à teoria de Maxwell (Figuras 4.1 e 4.2) e em que tipo de regime ambas teorias diferem de forma considerável. Abaixo temos a forma da derivada de L com relação a variável F .

$$L_F = -\frac{1}{4} + \frac{\mu^8}{F^2}$$

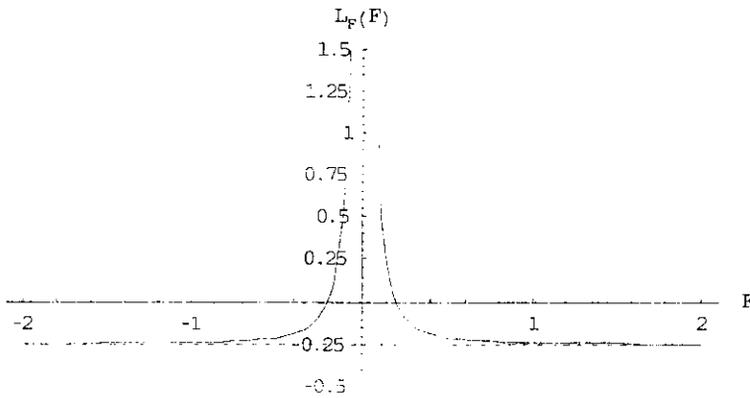


Figura 4.2: Comportamento qualitativo da derivada primeira da lagrangiana de simetria inversa $L_F(F)$. Notemos que esta derivada tende assintoticamente para $-1/4$ para valores suficientemente grandes do módulo do *escalar de Lorentz*, e que $L_F = 0$ no ponto $F = \pm 2\mu^4$.

4.3 – Equação de Movimento

Antes de entrar definitivamente na análise da teoria de simetria inversa no cenário da cosmologia observaremos algumas das propriedades básicas das equações de movimento. De acordo com as considerações do capítulo 2, as equações de movimento para este caso ficam

$$\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{\mu^2}{F^2} \right) F^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0 \quad (4.4)$$

Talvez seja o momento oportuno para se levantar uma pequena questão relacionada às simetrias envolvidas na lagrangiana em discussão. Esta lagrangiana tem uma propriedade interessante que é consequência de sua forma funcional particular. Se tomarmos o mapa M do domínio de L nele próprio definido da forma

$$M : F \rightarrow \tilde{F} = \frac{4\mu^2}{F}, \quad (4.5)$$

percebemos que ele mantém a lagrangiana invariante, isto é

$$L(F) = L(\tilde{F}). \quad (4.6)$$

De primeira vista esperaríamos que esta simetria estivesse de alguma forma presente nas equações 4.4 o que não é o caso. Exemplifiquemos com um resultado curioso ainda não totalmente compreendido.

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{2\mu^2}{F} F^{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{F} = \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{4\mu^2}{F^2} F = \frac{4\mu^2}{F}, \quad (4.8)$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{2\mu^2}{\tilde{F}} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Colocando de volta nas equações de movimento

$$\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{\tilde{F}^2}{\mu^8} \right) \frac{\mu^4}{\tilde{F}} \tilde{F}^{\mu\nu} \right]_{,v} = 0 \quad (4.10)$$

Vê-se que a forma não é preservada. No entanto, é preciso tomar certo cuidado uma vez que $\tilde{F}^{\mu\nu}$ nem sequer satisfaz a propriedade cíclica que nós assumimos como hipótese. De fato, é simples ver que

$$\tilde{F}_{\eta\mu;\nu} + \tilde{F}_{\nu\eta;\mu} + \tilde{F}_{\mu\nu;\eta} \neq 0 \quad (4.11)$$

4.4 – Solução esfericamente simétrica

O mínimo que se deve exigir de uma teoria não linear do eletromagnetismo é a sua consistência com o campo eletrostático gerado por uma partícula pontual carregada. Lembrando as considerações gerais apresentadas no capítulo 2 no sistema de coordenadas esféricas, escrevemos a equação de movimento para o campo de tal partícula como sendo

$$r^2 L_F E(r) = \text{const.} \quad (4.12)$$

No caso da lagrangiana de simetria inversa temos

$$\left(\frac{\mu^8 - E(r)^4}{4E(r)^4} \right) E(r) = \frac{\text{const}}{r^2}. \quad (4.13)$$

Para efeito de simplicidade tomaremos a condição $Q = 4 \times \text{const.}$ Desta forma o campo elétrico satisfará a equação implícita em r dada por

$$E(r)^4 = \frac{E(r)^3 Q}{r^2} - \mu^8, \quad (4.14)$$

que reproduz a expressão Coulombiana para altos valores do campo. De fato temos as duas aproximações para o campo

I. $r^2 \gg Q/\mu^2$

$$E(r) = \mu^2 - \frac{1}{4} \frac{Q}{r^2} + O\left(\left(\frac{Q}{r^2}\right)^2\right) \quad (4.15)$$

II. $r^2 \ll Q/\mu^2$

$$E(r) = -\frac{Q}{r^2} \left(1 - \left(\frac{\mu^2 r^2}{Q}\right)^4\right) + O\left(\left(\frac{\mu^2 r^2}{Q}\right)^8\right) \quad (4.16)$$

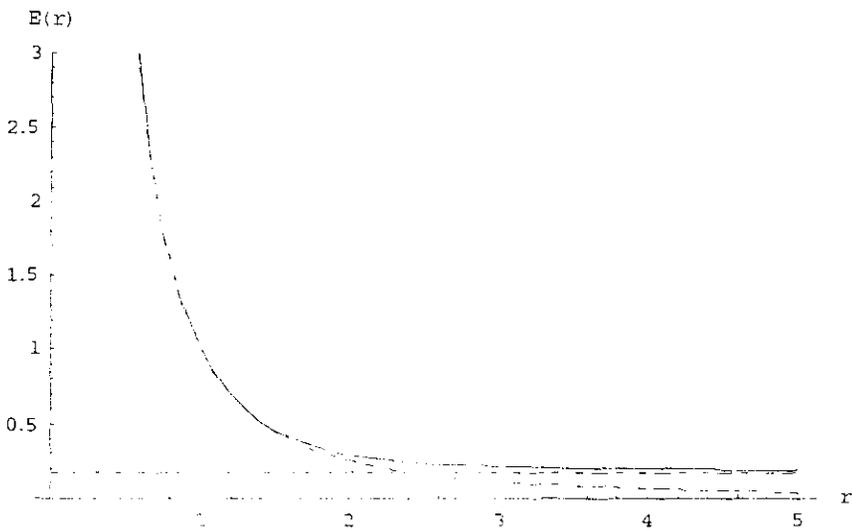


Gráfico 4.3: Comparação qualitativa entre a solução para o campo eletrostático esféricamente simétrico na teoria de Maxwell e na teoria de simetria inversa. A linha tracejada horizontal representando o limite μ^2 .

A dependência explícita do campo elétrico com a coordenada radial r poderia ser obtida, em princípio, através da solução da equação quártica exibida acima. Este procedimento não é absolutamente necessário para uma compreensão

razoável do comportamento global da solução. Exibimos abaixo um gráfico da função $f(E) = E^4 - \left(\frac{Q}{r^2}\right)E^3$ para alguns valores diferentes do raio.

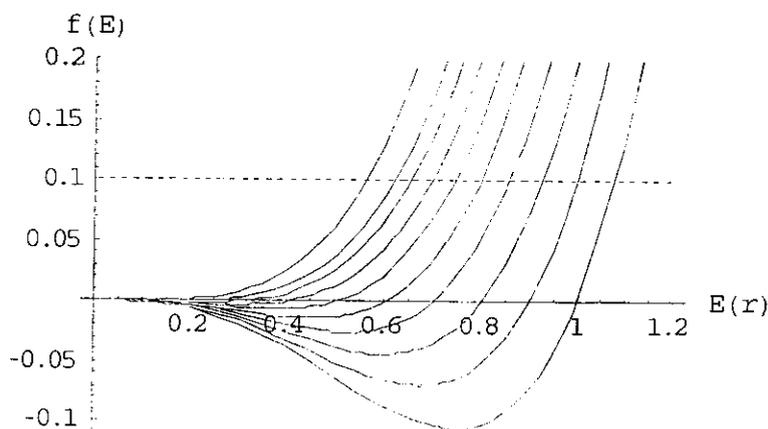


Figura 4.4: Gráfico qualitativo da solução do problema. As interseções entre a linha pontilhada (μ^4) com as curvas $f(E)$ define um método para se calcular o campo elétrico em termos do raio.

Notemos que o comportamento do campo elétrico para longas distâncias distancia-se do campo Coulombiano convencional por um fator pequeno mas diferente de zero, sugerindo que neste contexto o termo adicional $1/F$ funciona de forma oposta ao termo de massa contido nas equações de Proca.

4.5 – Energia e pressão

Antecipando alguns resultados esclarecidos mais adiante exibimos agora as expressões particularmente importantes para a cosmologia envolvendo a densidade de energia bem como a pressão isotrópica em termos dos campos elétrico E e magnético H . Como salientado nos parágrafos anteriores, uma teoria definida em termos de uma lagrangiana com potências negativas do escalar F poderá implicar em modificações consideráveis da teoria de Maxwell

em certas ocasiões. Ao passo que estas teorias são praticamente equivalentes à sua análoga linear para valores suficientemente intensos do campo, contribui de forma determinante no limite oposto. É este exatamente o caso, por exemplo, na solução esfericamente simétrica previamente investigada onde a teoria de Maxwell é restabelecida para regiões próximas da carga. Esperamos, é claro, que este seja também o caso nas distribuições de momento e energia do campo. Infelizmente, uma vez que nestas teorias a lagrangiana não é uma função contínua do *escalar de Lorenz*, certas grandezas não podem ser expandidas, e portanto pensadas como pequenas correções, em torno do ponto $F = 0$.

Levando em consideração as equações 2.33 e 2.34 demonstradas no capítulo 2 e tomando como sempre o caso particular onde $G = 0$, temos para a densidade de energia e a pressão respectivamente

$$\text{I.} \quad \rho = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + \frac{\mu^8}{2} \frac{(H^2 - 3E^2)}{(H^2 - E^2)^2}, \quad (4.17)$$

$$\text{II.} \quad p = \frac{1}{6}(E^2 + H^2) - \frac{\mu^8}{6} \frac{(7H^2 - 5E^2)}{(H^2 - E^2)^2}. \quad (4.18)$$

A primeira propriedade que devemos manter em mente é a negatividade de ambas as expressões para certos domínios específicos dos campos. Embora muitos autores argumentem (o que certamente é pertinente) que esta seja uma característica indesejável para a representação da densidade de energia, no caso particular da pressão, quando considerarmos o Universo permeado pelo campo \bar{H} , veremos que esta é uma propriedade imprescindível para a aceleração do fator de escala no cenário de FRW. Vemos também que no limite $\mu^8 \rightarrow 0$ as expressões são equivalentes às expressões tradicionais do eletromagnetismo de Maxwell e que elas divergem para o caso $H^2 \rightarrow E^2$, ou seja $F \rightarrow 0$.

É interessante notar quantas possibilidades inusitadas podem aparecer ao se considerar auto interações em uma dada teoria de campo. No caso particular em questão estas não linearidades nos levaram a comportamentos não

convencionais nas distribuições de energia. Algumas peculiaridades destes problemas foram analisadas por nós com maior profundidade em certos casos. Estudamos possíveis restrições ao domínio dos campos bem como a introdução de pequenas correções na lagrangiana de simetria inversa. No entanto, como mencionado anteriormente, nosso objetivo não é o de encontrar a “última teoria” para o eletromagnetismo livre de todas as imperfeições, mas sim o de encaminhar certas alternativas para o entendimento do possível papel desempenhado por estas teorias no que se refere ao problema da aceleração do universo. Para estes fins é razoável o estudo da lagrangiana de simetria inversa em sua forma atual.

Acrescentamos finalmente as equações

$$\rho + p = \frac{2}{3}(E^2 + H^2) - \frac{2\mu^2}{3} \frac{(H^2 + E^2)}{(H^2 - E^2)^2}, \quad (4.19)$$

$$\rho + 3p = E^2 + H^2 + \mu^2 \frac{(E^2 - 3H^2)}{(H^2 - E^2)^2}. \quad (4.20)$$

Antes de passar ao processo de médias e à construção do nosso modelo de Universo magnético passemos brevemente por uma solução peculiar das equações de movimento.

4.6 – Solução cosmológica fundamental

As equações de movimento induzidas pela lagrangiana de simetria inversa podem ser colocadas na forma mais sugestiva

$$\left[(F + 2\mu^2) \chi (F - 2\mu^2) F^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0. \quad (4.21)$$

Nesta disposição fica claro que existem dois limites para o escalar F curiosos no que refere às soluções das equações. Na medida em que o escalar do campo tende continuamente às hipérboles

$$F = \pm 2\mu^{\pm 2}, \quad (4.22)$$

qualquer tensor $F_{\mu\nu}$ satisfazendo esta condição satisfará automaticamente as equações de movimento. Na verdade este é um fato comum a todas as teorias não-lineares que admitem estados para o campo com $L_F = 0$.

De fato, a caso anômalo em que L_F se anula nos providencia uma indicação interessante das propriedades cosmológicas de um fluido eletromagnético não-linear desta espécie mesmo na ausência do processo de médias. Uma vez que os fluxos de calor bem como as pressões anisotrópicas observadas em uma configuração de campo deste gênero

$$q_\alpha = -4L_F \eta_\alpha{}^{\mu\nu} V_\nu, H_\alpha E_\mu = 0, \quad (4.23)$$

$$\pi_{\mu\nu} = 4L_F (E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu) + \frac{4}{3} L_F (E^2 + H^2) h_{\mu\nu} = 0, \quad (4.24)$$

são identicamente nulos, só nos resta a densidade de energia bem como a pressão

$$\rho = -4L_F E^2 - L = -L, \quad (4.25)$$

$$p = -\frac{4}{3} (L_F F + L_F E^2) + L = L. \quad (4.26)$$

cuja equação de estado pode perfeitamente simular uma espécie de constante cosmológica efetiva com origens de natureza puramente eletromagnética. Pelas

equações (4.17, 4.18) percebemos que cada um destes estados tem energias μ^4 e $-\mu^4$. Uma análise mais cuidadosa deste problema nos mostra que do ponto de vista da cosmologia estas soluções são precisamente as soluções de de Sitter (dS) e anti de Sitter (AdS).

Em geral podemos colocar a questão da seguinte forma. Uma vez que

$$\frac{\rho}{p} = \frac{L}{L - \frac{4}{3}(F + E^2)L_F} \quad (4.27)$$

que pode ser rephraseada da seguinte forma

$$\rho + p = -\frac{8}{3}(E^2 + H^2)L_F, \quad (4.28)$$

onde só poderemos ter $\lambda = -1$ no caso em que $L_F = 0$.

4.7 – Universo magnético revisitado

Passaremos agora ao caso mais razoável de um Universo dominado por radiação não-linear, ou Luz Escura, cujo campo magnético é dominante. Esperamos que este procedimento possa ser generalizado sem maiores problemas para o caso em que o campo elétrico esteja igualmente presente, como é o caso, por exemplo, na radiação cósmica de fundo.

Voltando ao processo de médias realizado no capítulo passado, neste caso $\bar{E}^2 = 0$ para nossa classe particular de observadores comoventes, sendo $\rho = -L$ e $p = L - \frac{4}{3}L_F F$. De forma a acelerar o fator de escala do Universo, em acordo com a equação de Raychaudhuri, a matéria deve satisfazer a condição $(\rho + 3p) < 0$ sendo

$$\rho + 3p = 2(L - 4H^2 L_F) \quad (4.29)$$

Portanto a condição transforma-se em

$$L_F > \frac{L}{4H^2} \quad (4.30)$$

que é uma espécie de “inequação diferencial” de primeira ordem. Ressaltamos agora que qualquer teoria não-linear do eletromagnetismo que satisfaça esta propriedade no cenário de FRW acelerará o fator de escala. Mostraremos que nosso modelo baseado na lagrangiana de simetria inversa (Luz Escura) exhibe tal propriedade. As equações 4.17 e 4.18 serão simplificadas para a forma

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \bar{H}^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{H}'}{\bar{H}^2}. \quad (4.41)$$

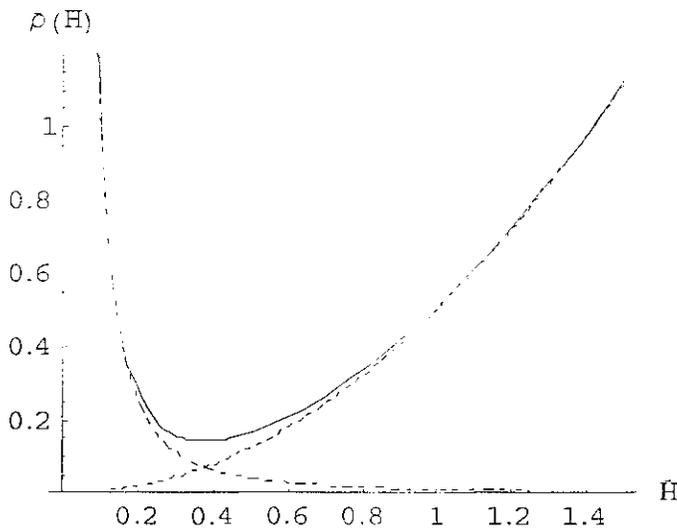


Figura 4.5: Gráfico da função $\bar{\rho}$ em termos do campo magnético médio para o caso em que o campo elétrico médio é nulo. A escala utilizada é apenas ilustrativa. As linhas pontilhadas nos mostram o comportamento individual dos dois termos da soma (4.41)

De acordo com a decomposição em fluidos do capítulo passado podemos pensar nesta densidade de energia como sendo a superposição de dois fluidos ($\rho_{(1)} = \bar{H}_0^2 / 2$ e $\rho_{(-1)} = \mu^8 / 2\bar{H}_0^2$) com equações de estado diferentes. Na página anterior temos o gráfico da interseção da função $\bar{\rho}(\bar{H}, \bar{E})$ com o plano $\bar{\rho} \times \bar{H}$.

O extremo desta função (\bar{H}_c) é um ponto particularmente interessante uma vez que é nesse ponto o estado de menor energia possível ou, como se queira, o estado fundamental da teoria. Encontremos pois este ponto. Derivando a equação 4.41 temos

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{H}} = \bar{H} - \frac{\mu^8}{\bar{H}}. \quad (4.42)$$

Portanto

$$\bar{H}_c^4 - \mu^8 = 0 \quad \rightarrow \quad H_c = \mu^2. \quad (4.43)$$

É interessante mencionar que este valor é exatamente o valor necessário para anular a função L_r . O valor da densidade de energia nesse ponto sendo exatamente μ^4 . Voltando para a equação de estado 3.28 percebemos que o fluido eletromagnético como um todo pode ser pensado como uma superposição de radiação ordinária do tipo $p = \rho/3$ e uma outra componente com pressão do tipo

$$p_{(-1)} = -\frac{7}{3}\rho_{(-1)}. \quad (4.44)$$

e se conserva independentemente não há interação entre eles. É exatamente este termo dotado de pressão negativa o responsável pela aceleração do fator de

escala nesta teoria. Graças a esta propriedade, em analogia à energia escura, o apelidamos *Luz Escura*. A pressão total fica então da seguinte forma

$$\bar{p} = \frac{1}{6} \bar{H}^2 - \frac{7}{6} \frac{\mu^8}{\bar{H}^2}, \quad (4.45)$$

sendo o gráfico colocado abaixo

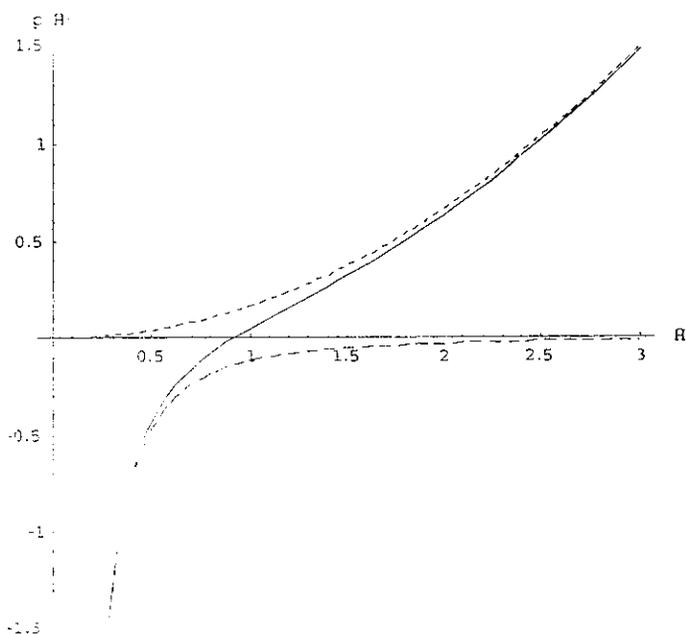


Figura 4.6: gráfico esquemático da pressão total constituída por um termo de radiação convencional bem como outro de *Luz escura*. Para valores suficientemente grandes de \bar{H} a pressão Maxwelliana toma conta.

Observemos que a pressão se anula no ponto

$$H_0^4 = 7\mu^8. \quad (4.46)$$

Passemos agora à equação de estado efetiva. Esta equação, como mencionada anteriormente, pode ser obtida pela divisão das equações 4.41 e 4.45, sendo

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{\bar{H}^4 - 7\mu^8}{\bar{H}^4 + \mu^8} \quad (4.47)$$

Dois limites são particularmente interessantes para análise do comportamento desta nova função.

I. $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{1}{3}$, que coincide exatamente com a teoria de Maxwell.

II. $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\bar{\rho}}{\rho} = -\frac{7}{3}$, que é uma equação de estado supernegativa sendo

$$\lambda_{\text{eff}} < -1.$$

Estes dois limites são facilmente reconhecidos no gráfico abaixo

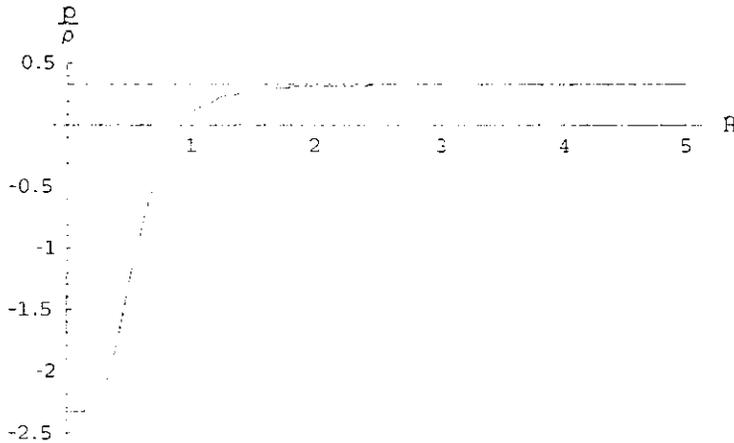


Figura 4.7: Gráfico envolvendo a equação de estado efetiva em termos do campo magnético médio. A linha pontilhada reflete o comportamento do análogo Maxwelliano. Claramente a escala está exagerada.

Este gráfico ilustra em “poucas palavras” o quão interessante podem ser as propriedades cosmológicas de uma teoria de simetria inversa no cenário de

Luz Escura. Para valores suficientemente intensos do campo magnético médio, o fluido comporta-se como radiação convencional, supostamente em acordo com o fluido cósmico previsto em instantes remotos da evolução. Existe um ponto onde a pressão se anula e começa a se tornar negativa alcançando os limiares da condição de energia dominante. Finalmente, a medida que o campo magnético tende a zero, λ_{eff} viola a condição de energia dominante, o que algumas observações recentes tem exigido. Os efeitos desta teoria ficarão mais claros na descrição da dinâmica.

Passemos agora a alguns dos detalhes matemáticos. Antes de mais nada, é interessante notar que as simetrias satisfeitas pela lagrangiana de simetria inversa acarretam em uma propriedade semelhante da densidade de energia. Neste caso a equação 4.17 fica

$$\rho(\bar{H}^2) = \frac{\bar{H}^2}{2} + \frac{\mu^8}{2} \frac{1}{\bar{H}^2} \quad (4.48)$$

que são invariantes sob a transformação $\bar{H} \rightarrow \mu^4/\bar{H}$. O mesmo sendo válido para a dependência com o fator de escala. Pela equação de conservação

$$\rho(a) = \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{a^4} + \frac{1}{2} \mu^8 \frac{a^4}{H_0^2}. \quad (4.49)$$

Podemos dizer de forma aproximada que os efeitos do fluido não-linear

começam a se manifestar à partir do mínimo $a_{in} = \frac{\sqrt{H_0}}{\mu}$. De fato

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{2H_0^2}{a^5} + 2\mu^8 \frac{a^3}{H_0^2} \quad (4.50)$$

e a_0 satisfaz a equação

$$-\frac{2H_0^2}{a_0^5} + 2\mu^8 \frac{a_0^3}{H_0^2} = 0 \quad (4.51)$$

Notemos também que a densidade de energia é sempre positiva e definida neste caso. A pressão derivada da equação 4.18 reduz-se a

$$p = \frac{1}{6} \frac{H_0^2}{a^4} - \frac{7}{6} \frac{\mu^8}{H_0^2} a^4 \quad (4.52)$$

e de acordo com as considerações do gráfico 4.6 torna-se negativa à partir do ponto $a^8 = H_0^4 / 7\mu^8$. Observemos que as funções acima definidas ρ e p , apesar de bem comportadas, não são limitadas, podendo divergir para certos valores do fator de escala (para ser mais preciso tanto no passado quanto no futuro). Estas divergências refletem-se igualmente em algumas propriedades da geometria. O escalar de curvatura apresenta um comportamento não usual. Temos

$$R = T^\alpha_\alpha = \rho - 3p = \frac{4\mu^8}{H_0^2} a^4. \quad (4.53)$$

O traço T ou o escalar de curvatura R começa neste cenário como sendo zero e pode terminar (dependendo da triseção em questão) no infinito futuro divergindo. A anulação destas grandezas para um tempo suficientemente pequeno é esperada, uma vez que o traço do tensor momento energia do campo de Maxwell é precisamente zero. O mesmo raciocínio pode ser estendido para outros escalares construídos à partir das componentes do tensor de Riemann. Um exemplo simples é do escalar gerado pela contração dos tensores de Ricci $R_{\mu\nu}$ e $R^{\mu\nu}$

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho^2 + 3p^2. \quad (4.54)$$

Observando as funções quadráticas ρ^2 e p^2

$$\rho^2 = \frac{1}{4} \frac{H_0^4}{a^8} + \frac{1}{2} \mu^8 + \frac{1}{4} \mu^{16} \frac{a^8}{H_0^4} \quad (4.55)$$

$$3p^2 = \frac{1}{12} \frac{H_0^4}{a^8} - \frac{7}{6} \mu^8 + \frac{49}{12} \mu^{16} \frac{a^8}{H_0^4} \quad (4.56)$$

constatamos a divergência para $t \rightarrow \infty$.

Passando agora para a questão da evolução temporal do fator de escala lembramos as equações de Raychaudhuri e a integral primeira derivadas no capítulo 1. Iremos analisar qualitativamente as soluções destas equações pelo método exposto no capítulo anterior. Uma vez que estamos interessados apenas nas modificações de primeira ordem acarretadas pela nova teoria da eletrodinâmica no cenário de FRW, iremos descartar as influências da matéria bariônica usualmente representada por fluidos do tipo *poeira* ($p=0$). Este procedimento é de fato razoável no regime primordial (onde a radiação convencional é predominante) bem como na evolução final (onde o termo $1/F$ torna-se dominante). As equações mencionadas tomam a forma

$$I. \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)$$

Usando as equações para a densidade de energia 4.48 bem como para a pressão 4.52 estabelecidas acima temos

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{H_0^2}{2a^4} - \frac{3}{2} \frac{\mu^8}{H_0^2} a^4 = 0. \quad (4.57)$$

Para que a derivada segunda \ddot{a} torne-se positiva e haja finalmente o regime de expansão acelerada devemos ter a condição

$$3 \frac{\mu^8}{H_0^2} a^4 - \frac{H_0^2}{a^4} > 0, \quad (4.58)$$

implicando que neste contexto, o Universo irá acelerar para

$$a > \left(\frac{H_0^4}{3\mu^8} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (4.59)$$

$$\text{II.} \quad \dot{a}^2 = \frac{1}{3} \rho a^2 - \varepsilon$$

Tomando a expressão de ρ temos

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{6} \frac{H_0^2}{a^2} + \frac{1}{6} \mu^8 \frac{a^6}{H_0^2} - \varepsilon \quad (4.60)$$

onde $\varepsilon = 0, \pm 1$ depende claramente da triseção. Para as triseções hiperbólicas e euclidianas temos o comportamento esboçado na figura 4.8.

Podemos colocar a integral primeira de forma ainda mais sugestiva, interpretando-a como a equação de movimento de uma partícula em uma dimensão com energia $-\varepsilon$ sob a influência de um potencial $V(a)$. O potencial é sempre negativo e tem um máximo em $a = \left(H_0^4 / 3\mu^8 \right)^{\frac{1}{8}}$. Desta maneira, em analogia com a equação

$$E_c + E_p = \text{const.}$$

da mecânica Newtoniana temos

$$\dot{a}^2 + V(a) = -\varepsilon$$

A análise desta equação nos demonstra que os casos com triseções euclidiana e hiperbólica admitem uma evolução do fator de escala com origem singular em um tipo de “Big Bang” em $a = 0$, expandem com aceleração negativa até $a = (H_0^4 / 3\mu^8)^{1/8}$ e então evoluem em direção ao infinito de forma acelerada.

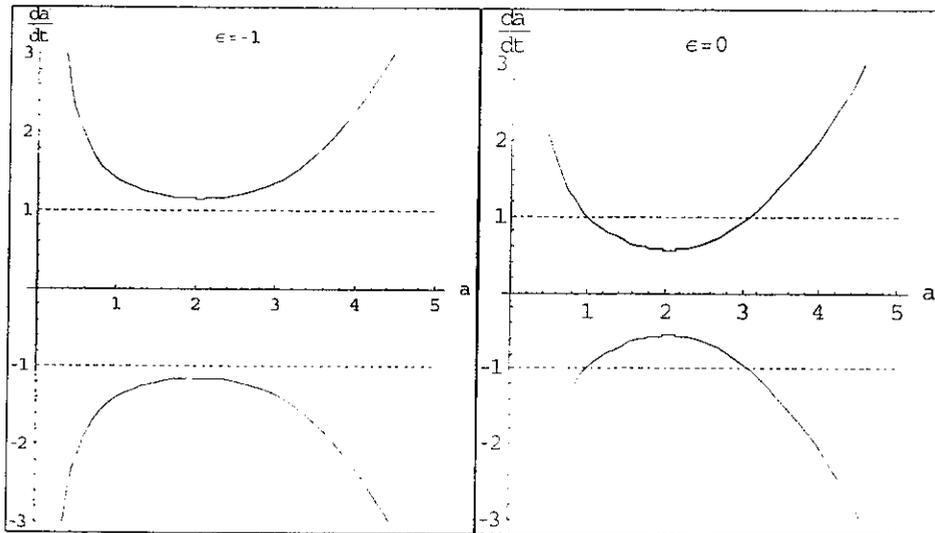


Figura 4.8: Esboço do sistema dinâmico $a \times \dot{a}$ para as triseções hiperbólica e euclidiana

O caso fechado tem algumas peculiaridades, uma vez que no ponto crítico o potencial adquire a forma

$$V_c = -\frac{2^{7/4}}{7} H_0 \mu^2$$

que dependendo do valor de H_0 pode ser maior ou menor que -1 . Neste caso temos três possibilidades distintas, a saber

- I. $V_c < -1$. O universo inicia em uma singularidade e se desenvolve de maneira análoga ao caso $\epsilon = -1, 0$;

- II. $V_c = -1$. A mesma dinâmica anterior, porém a constante de Hubble se anula para o fator de escala crítico;
- III. $V_c > -1$. Dois tipos de comportamentos são permitidos. O universo inicia-se em $a = 0$, expande até um certo valor de a , e depois recolapsa. Ou então começa em um valor infinito de a , colapsa até determinado valor e depois expande novamente.

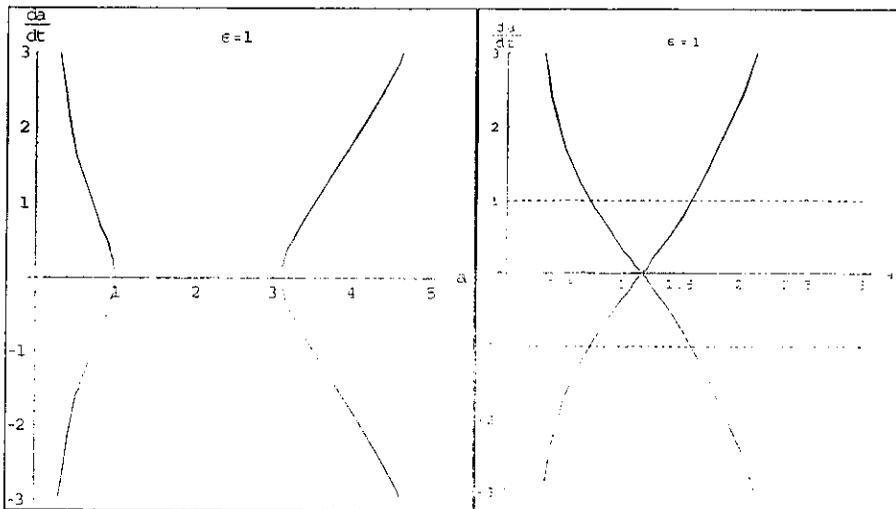


Figura 4.8: Esboço do sistema dinâmico para o caso esférico.

Além disso, mencionamos que certamente pode-se tornar uma motivação de ordem teórica a busca da expressão de L para que o potencial $V(a)$ tenha uma dada forma.

Conclusão e críticas

Examinamos algumas propriedades da eletrodinâmica não-linear acoplada minimamente com o campo gravitacional. No contexto da cosmologia, a riqueza de situações físicas não usuais proporcionadas por uma teoria de campo deste gênero tem a oferecer certamente toda uma gama de situações inusitadas de grande interesse para o teórico.

O processo de autointeração do campo, representado por equações de movimento não-lineares, pode acarretar em modificações consideráveis no espectro de previsões da teoria de Maxwell onde o princípio de superposição desempenha papel fundamental. Em particular, tanto a questão da propagação de ondas quanto o tensor momento-energia da radiação passam a contar com toda uma série de novas facetas que dependem sensivelmente da forma como a teoria não-linear foi previamente estabelecida.

Uma vez que grande parte dos interesses em se modificar a teoria linear de Maxwell em cosmologia esteve voltada para a relevância destas alterações no suposto início do universo, decidimos nos concentrar em um novo tipo de investigação. Inspirados por teorias alternativas da gravitação consideramos o caso onde a ação para o campo eletromagnético conta com a presença de potências negativas do *escalar de Lorentz* explicitamente na forma funcional da lagrangiana. Esta generalização parece estar consistente com as observações para valores suficientemente pequenos da constante de acoplamento. Apesar dos evidentes contratempus na densidade de energia e muito provavelmente na propagação de ondas, nós a consideramos uma teoria fenomenologicamente

válida para valores não muito pequenos do invariante F . Baseando-nos neste modelo analisamos algumas características do problema da aceleração.

Nosso modelo de Luz Escura, que tem como fonte o campo eletromagnético não linear, tem a vantagem conceitual de se descrever o problema da aceleração cósmica em termos de uma física até certo ponto convencional. Vimos que o tensor momento energia oriundo de uma teoria como esta pode apresentar propriedades interessantes, tais como a existência de pressões assintoticamente negativas, podendo eventualmente violar a condição de energia forte.

Algumas observações sugerem que a equação de estado efetiva da energia escura poderia ultrapassar os limites exigidos pela condição de energia dominante. Um campo escalar convencional não pode satisfazer este tipo de propriedade sem se introduzir os chamados “phantom fields”. Ao invés de se apelar para as energias cinéticas negativas frequentemente invocadas pela moda atual, modificamos a ação do campo eletromagnético.

O resultado em uma cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker é exatamente acelerar o universo, podendo terminar em um final drástico com a divergência de grandezas físicas tais como a densidade de energia bem como o escalar de curvatura, e de forma antagônica ao Big Bang, terminando em uma espécie de Big Rip.

Do ponto de vista teórico seria interessante o estudo de que tipo de potencial poderia ser gerado pelo acréscimo de novos termos na lagrangiana do campo eletromagnético. Uma outra possibilidade seria a análise de teorias envolvendo, tal como na teoria de Euler-Heisenberg, o invariante de Poincaré G . Algumas destas possibilidades foram analisadas por nós em um contexto de singularidades.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar que uma nova linha de investigação aparentemente interessante poderia ir em direção à teoria de bifurcações. Como sabemos, o altíssimo grau de simetria atribuído à geometria de FRW admite a redução do sistema não-linear das equações de Einstein a um sistema planar e autônomo de equações diferenciais. Estas equações envolvem de forma óbvia e explícita a distribuição de energia e momento através do espaço-tempo. Uma

vez que a teoria de simetria inversa exibida não pode ser pensada (em geral) como uma pequena perturbação da teoria de Maxwell, implica que não podemos expandi-la em torno de $F = 0$. Desta forma, a estrutura topológica do espaço de fases parece transformar descontinuamente para variação arbitrárias do parâmetro μ^s , indicando que o índice de Poincaré deverá sofrer uma modificação.

Referências

- 1) U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini e A.A. Starobinsky, Is There Supernova Evidence for Dark Energy Metamorphosis ?, astro-ph/0311364 (2003). P. J. Steinhardt, Sci. Am. Edição Especial nº 1.
- 2) E. V. Linder, Probing Gravitation, Dark Energy, and Acceleration, Phys. Rev. **D70**, 023511 (2004).
- 3) Adam G. Riess et al., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. Astron.J.116:1009-1038 (1998).
- 4) D.N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M.R. Nolta, C.L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S.S. Meyer, L. Page, G.S. Tucker, J.L. Weiland, E. Wollack e E.L. Wright, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- 5) M. S. Turner, Why Cosmologists Believe the Universe is Accelerating, astro-ph/9904049 v1 (1999).

- 6) P.J.E. Peebles e B. Ratra, The Cosmological Constant and Dark Energy, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- 7) M. Novello, Theoretical Cosmology, VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro (Brazil), 2004.
- 8) J.V. Narlikar, R.G. Vishwakarma e G. Burbidge, Interpretations of the Accelerating Universe, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **114**, 1092 (2002).
- 9) B. Jones, Observing the Universe, VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation (1993).
- 10) S. M. Carroll, Why is the Universe Accelerating?, [astro-ph/0310342](#) (2003).
- 11) P. Neupane, Cosmic Acceleration and M Theory Cosmology, *Mod. Phys. Lett.* **A19**, 1093 (2004). W. Moffat, Modified Gravitational Theory as an Alternative to Dark Energy and Dark Matter. [astro-ph/0403266](#) (2004). V. Sahni, Dark Matter and Dark Energy. Lectures given at 2nd Aegean Summer School on the Early Universe, Ermoupoli, Island of Syros, Greece, 22-30 Sep 2003. (2004). 39pp. [astro-ph/0403324](#) (2004). V. F. Cardone, A. Troisi e S. Capozziello, Unified Dark Energy Models: a Phenomenological Approach, *Phys. Rev.* **D69**, 083517 (2004).
- 12) Is Cosmic Speed-up due to New Gravitational Physics? Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden, Michael S. Turner *Phys.Rev.* **D70**:043528 (2004)
- 13) Christian Beck, [astro-ph/0310479](#)
- 14) M. Novello, V Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, Brazil, (1987).

- 15) M. Novello, Santiago E. Perez Bergliaffa, J.M. Salim, Singularities in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics, *Class.Quant.Grav.*17:3821-3832 (2000). M. Novello, S. E. P. Bergliaffa, J. Salim, V. De Lorenci e R. Klippert, Analog Black Holes in Flowing Dielectrics, *Class. Quant. Grav.* **20**, 859 (2003).) V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, J. M. Salim, NONLINEAR ELECTRODYNAMICS AND FRW COSMOLOGY, *Phys.Rev.*D65:063501,2002
- 16) E. Elizalde, J. E. Lidsey, S. Nojiri e S. D. Odintsov, Born-Infeld Quantum Condensate as Dark Energy in the Universe, *Phys. Lett.* **B574**, 1 (2003). M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, J. Salim, Nonlinear Electrodynamics and the Acceleration of the Universe. *Phys.Rev.*D69:127301,2004
- 17) V.V. Kiselev, Vector Field as a Quintessence Partner. *Class.Quant.Grav.*21:3323-3336 (2004)
- 18) R. C. Tolman e P. Ehrenfest, Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field, *Phys.Rev.* **36**, 1791 (1930).
- 19) M. Novello, *Cosmologia Relativista, II Escola de Gravitação e Cosmologia*, Rio de Janeiro, Brasil (1980).
- 20) H. P. Robertson, Relativistic Cosmology, *Reviews of Modern Physics.* **5**, 62 (1933).
- 21) C. G. Tsagas, Electromagnetic Fields in Curved Spacetimes, gr-qc/0407080 (2004).
- 22) Bialynicki-Birula, Born-Infeld Nonlinear Electrodynamics, *Acta Phys. Pol. B.* **30**, 2875 (1999).

- 23) M. Born, L. Infeld, Foundations of the New Field Theory, Nature, 1004 (1933).
- 24) M. Novello, Santiago E. Perez Bergliaffa, Effective Geometry, 10th Brazilian School of Cosmology and Gravitation (BSCG 2002), Rio de Janeiro, Brazil, 29 Jul - 9 Aug 2002. Published in AIP Conf. Proc. 668:288-300, 2003. J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Third Edition, (1998)
- 25) E. L. Rodrigues, Buraco Negro não Gravitacional: Extensão Maximal, Dissertação de Mestrado (2004).
- 26) L. Landau, E. Lifshitz, Teoria do Campo (ed. Hemus).
- 27) M. Novello The Program of the Eternal Universe, 8th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (MG 8), Jerusalem, Israel, 22-27 Jun 1997.
- 28) David H. Delphenich, Nonlinear Electrodynamics and QED.
- 29) hep-th/0309108 (2003)
- 30) S. J. Plimpton e W. E. Lawton, A Very Accurate Test of Coulomb's Law of Force Between Charges, Phys. Rev. **50**, 1066 (1936). E. R. Williams, J.E. Faller e H. A. Hill, New Experimental Test of Coulomb's Law: A Laboratory Upper Limit on the Photon Rest Mass, Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
- 31) H. P. de Oliveira, Non-Linear Charged Black Holes, Class. Quantum Grav. **11**, 1469 (1994).

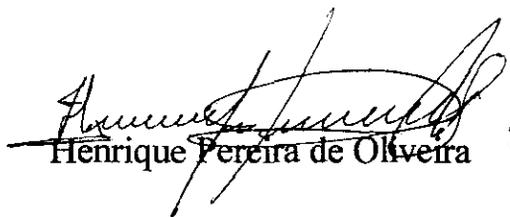
“A ACELERAÇÃO DO UNIVERSO E A ELETRODINÂMICA NÃO LINEAR”

Érico Goulart de Oliveira Costa

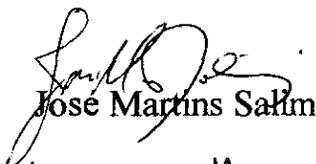
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Ministério da Ciência e Tecnologia fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



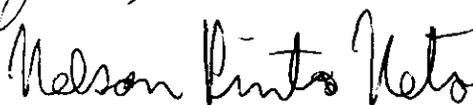
Mário Novello - Presidente



Henrique Pereira de Oliveira



José Martins Salim



Nelson Pinto Neto – Suplente

Rio de Janeiro, 29 de outubro de 2004