

TESE DE
DOUTORADO

IMPLICAÇÕES DA
NÃO-COMUTATIVIDADE CANÔNICA
PARA AS TEORIAS DE CAMPOS
E A COSMOLOGIA

Gustavo Dourado Barbosa

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO DE 2004

Tempo virá em que uma pesquisa diligente e contínua esclarecerá aspectos que agora permanecem escondidos...

...Tempo virá em que os nossos descendentes ficarão admirados de que não soubéssemos particularidades tão óbvias a eles...

...Muitas descobertas estão reservadas para os que virão, quando a lembrança de nós estará apagada. O nosso universo será um assunto sem importância, a menos que haja alguma coisa nele a ser investigada a cada geração...

...A natureza não revela seus mistérios de uma só vez.

Sêneca, Problemas Naturais, Livro 7, século I

Agradecimentos

- A Nelson Pinto-Neto, José Helayel-Neto e Sebastião Alves Dias, por toda a dedicação, paciência e empenho na minha formação.
- Aos físicos de outras instituições que me escreveram expressando opiniões e dando valiosas sugestões que serviram para aprimorar meus preprints. Merecem uma menção especial Roderich Tumulka, Wolfgang Bietenholz e Luigi Delle Site e Victor Rivelles.
- A José Acacio de Barros e Alves Bolivar, pelas discussões sobre física de Bohm e fundamentos da teoria quântica.
- A Pedro Aníbal e Maria Rita, meus pais, e Marcelo, meu irmão, por todo o carinho e apoio fundamental para a realização deste trabalho.
- A Ronaldo Penna Neves, pela amizade, companheirismo, solidariedade, senso de humor e disposição para participar das inesquecíveis seções de vídeo que realizamos ao longo dos anos em que dividimos apartamento.
- A Artur Ávila Cordeiro de Melo, por todos os momentos que passamos juntos durante as divertidas reuniões que realizamos com a turma que freqüentava o apartamento de Ipanema.
- A Manoel Messias, Humberto Belich e Ervin Kaminski Lenzi, por terem tornado tão agradável cada dia de convívio no CBPF, pelos momentos de descontração, o companheirismo e a amizade.

- A Luis Paulo Colatto, pelos agradáveis jantares no Pastarella, o seu inigualável senso crítico nas discussões que tivemos sobre ética em ciência e toda a ajuda que me deu sempre que encontrei dificuldades com o Latex.
- A todos os colegas e amigos que conheci no CBPF e no GFT: Hugo Christiansen, José Luis Boldo, Thales Soares, Leonardo de Assis, Oswaldo Del Cima, Marco Antônio de Andrade, Mauro Negrão, Margarida Negrão, André Penna Firme, Guilherme Peixoto, Álvaro Nogueira, Álvaro Ferreira, Winder de Moura Mello, Marco Kneipp, Roger Barreto, Márcia Moutinho, Patrick Brockill, Ricardo Paschoal, Leonardo de Moraes, Moisés Rojas, Hector Leny Carrion, Érico Goulart, Felipe Tovar, Rômulo Abreu e André Viana, com quem tive a oportunidade de conviver e aprender muito.
- A Myriam Coutinho e José de Almeida Ricardo, da CFC, e Rosângela de Castro da CCP, por toda a dedicação e atenção que me deram sempre que precisei.
- A Rosa, Sérgio, Baiano e todos os demais funcionários da biblioteca, por toda a ajuda que me prestaram durante a realização deste trabalho.
- A Antônio Teixeira e Maria Cristina Batoni, por todas as correções que realizaram no manuscrito original desta tese.
- A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Realiza-se um estudo de algumas das implicações da não-comutatividade canônica para a teoria quântica de campos e a cosmologia. As teorias de campos são abordadas com uma visão moderna de teorias efetivas. Nesse contexto, é adotado um ponto de vista no qual a não-comutatividade dos observáveis de posição das partículas possui um caráter efetivo, tendo sua origem na ação de um forte campo magnético de fundo. Uma analogia com o problema de Landau é discutida em detalhe, ilustrando como a interpretação proposta para as teorias não-comutativas pode ser entendida de uma maneira intuitiva. O cálculo do potencial efetivo do modelo φ^6 não-comutativo (2+1)-dimensional é realizado à ordem de dois laços no limite em que o parâmetro de deformação não-comutativa, θ , é pequeno. Analisando as propriedades do potencial, verificamos que os efeitos da não-comutatividade podem modificar drasticamente a sua forma. Sob condições razoáveis, o setor não-planar da teoria pode tornar-se dominante e induzir uma quebra espontânea de simetria para valores do parâmetro de massa e das constantes de acoplamento para os quais esta não ocorre no modelo análogo comutativo. No contexto da cosmologia, a influência da não-comutatividade é estudada introduzindo-se uma deformação canônica na relação de comutação das variáveis do mini-superespaço do universo de Kantowski-Sachs na parametrização de Misner. A investigação das conseqüências de tal deformação é realizada através de um estudo comparativo das possíveis evoluções do universo em quatro diferentes cenários: clássico comutativo, clássico não-comutativo, quântico comutativo e quântico não-comutativo. A comparação torna-se transparente através do emprego do formalismo de trajetórias quânticas de Bohm. Como resultado da análise, verificamos que

a não-comutatividade pode modificar significativamente a evolução do universo, mas não é capaz de alterar o seu comportamento singular no contexto clássico. Efeitos quânticos, por outro lado, podem dar origem a universos periódicos não singulares em ambos os casos comutativo e não-comutativo. O modelo quântico não-comutativo apresenta propriedades interessantes, como a capacidade de dar origem a dinâmicas não-triviais em situações onde o seu análogo comutativo é necessariamente estático.

Abstract

We study some of the implications of the canonical noncommutativity for quantum field theory and cosmology. The quantum field theories are discussed in the light of the modern effective field theory approach. In this context, a point of view is adopted in which noncommutativity of the particle's coordinate observables has an effective character, having its origin in the action of a strong magnetic background field. An analogy with the Landau problem is discussed in detail, illustrating how the interpretation proposed for the noncommutative theories can be understood in an intuitive way. An evaluation of the effective potential of the (2+1)-dimensional noncommutative φ^6 model is carried out in the small limit of the noncommutative parameter θ up to the two loop level. By analyzing the properties of the potential, we find that noncommutative effects can drastically modify its shape. Under reasonable conditions, the non-planar sector of the theory may become dominant, and induce a symmetry breaking for values of the mass and coupling constants not reached by its commutative counterpart. In the cosmological context, the influence of noncommutativity is studied by introducing a canonical deformation of the commutation relation between the minisuperspace variables of the Kantowski-Sachs model in the Misner parametrization. The investigation of the consequences of such a deformation is carried out by means of a comparative study of the universe evolution in four different scenarios: the classical commutative, classical noncommutative, quantum commutative, and quantum noncommutative. The comparison is rendered transparent by the use of the Bohmian formalism of quantum trajectories. As a result of our analysis, we find that noncommutativity can significantly modify the universe evolution, but cannot

alter its singular behavior in the classical context. Quantum effects, on the other hand, can give rise to non-singular periodic universes in both commutative and noncommutative cases. The quantum noncommutative model is shown to present interesting properties, such as the capability to yield non-trivial dynamics in situations where its commutative counterpart is necessarily static.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Sumário	vii
Introdução	1
1 Teorias Não-Comutativas Como Teorias Efetivas	9
1.1 O Problema de Landau	12
1.2 Teorias de Campos Não-Comutativas	16
1.3 Formulação de Schrödinger e o Potencial Quântico	22
2 O Potencial Efetivo do Modelo φ^6 Não-Comutativo	26
2.1 O Modelo φ^6 Não-Comutativo	27
2.1.1 O Método Funcional para o Cálculo do Potencial Efetivo	29
2.2 Cálculo do Potencial Efetivo a Dois Laços	31
2.3 Análise do Potencial	36
2.3.1 Contribuição Clássica	36
2.3.2 O Potencial Corrigido a Dois Laços	37
3 Cosmologia Clássica Comutativa e Não-Comutativa	42

3.1	O Universo de Kantowski-Sachs na Formulação Hamiltoniana	43
3.2	O Modelo Clássico Comutativo	45
3.3	O Modelo Clássico Não-Comutativo	47
4	Cosmologia Quântica Comutativa e Não-Comutativa	52
4.1	A Gravitação Quântica no Formalismo de Bohm	53
4.2	O Universo Quântico de Kantowski-Sachs	56
4.2.1	Caso 1	57
4.2.2	Caso 2	59
4.3	O Modelo Quântico Não-Comutativo	64
4.4	O Formalismo de Bohm para Mini-Superespaços Não-Comutativos	66
4.4.1	Caso 1	71
4.4.2	Caso 2	72
	Discussão e Perspectivas	82

Introdução

A idéia de considerar modelos onde coordenadas do espaço-tempo são não-comutativas é bastante antiga. Foi sugerido por Heisenberg [1], ainda no período inicial das teorias quânticas de campos, que a introdução de coordenadas não-comutativas em escalas de comprimento bastante pequenas poderia criar uma frequência de corte efetiva no regime ultravioleta dessas teorias. Dessa forma, os infinitos que comumente aparecem nas expansões perturbativas seriam naturalmente eliminados. Porém, a idéia de considerar as coordenadas do espaço-tempo não-comutativas só foi formalizada em um artigo escrito por Snyder em 1947 [2]. Embora interessante e arrojado para a época, o programa de eliminação dos infinitos das teorias quânticas de campos (na época a Eletrodinâmica Quântica) com a introdução de coordenadas não-comutativas acabou por ser abandonado, cedendo espaço para a teoria de renormalização. Esta provou ser uma ferramenta bastante poderosa, capaz de fornecer as acuradas previsões experimentais que consagraram a Eletrodinâmica Quântica como uma das mais bem sucedidas teorias da física.

Após permanecer esquecida por um longo período, a idéia de fazer teoria quântica de campos em espaços não-comutativos foi revitalizada na década de 80 por Connes e Reiffel em um trabalho sobre teorias de Yang-Mills em um toro não-comutativo [3].¹ É interessante salientar que, apesar de a motivação inicial para a incorporação da não-comutatividade nas teorias de campos ter partido inicialmente de argumentos físicos, um esforço efetivo no desenvolvimento de uma formulação da teoria quântica de campos

¹Afora as investigações no contexto da teoria quântica de campos, existem trabalhos que relacionam geometria não-comutativa com o Efeito Hall Quântico [4]. Todavia, conforme é comentado em [5], até o presente momento não se descobriu nada de novo na física do Efeito Hall com esse tipo de abordagem.

em espaços não-comutativos partiu primeiramente de matemáticos. Teorias de grande interesse dos físicos geralmente seguem uma rota oposta, partindo da comunidade física para serem formalizadas pela comunidade matemática. O atraso do desenvolvimento nas teorias de campos em espaços não-comutativos entre os físicos pode ser atribuído, em parte, à relutância da comunidade de teoria de campos em aceitar teorias não-locais.² O próprio Einstein tinha uma grande reserva a esse tipo de teoria, referindo-se à sua principal propriedade, a ação à distância, como “spooky” [7].

No ano de 1990, devido ao trabalho de Connes e Lott sobre o Modelo Padrão da física de partículas [8], os modelos não-comutativos começaram a ganhar prestígio entre os físicos de altas energias. Trabalhos subsequentes rapidamente apareceram utilizando a geometria não-comutativa para estudar outras teorias, incluindo a gravitação [9]. A idéia central que norteou esses trabalhos foi a de acomodar graus de liberdade extrínsecos como graus de liberdade internos em estruturas não-comutativas. A interpretação da partícula de Higgs na versão não-comutativa do Modelo Padrão é a de um campo de calibre discreto- \mathbb{Z}_2 em um espaço não-comutativo, onde esta é tida como uma excitação interna [10, 11]. Porém, essa abordagem para o Modelo Padrão acabou por ser abandonada, pois não admitia correções radiativas. Conforme é salientado por Madore [12], presentemente não há métodos que permitam quantizar diretamente coordenadas não-comutativas. O dogma central que permeia a física de altas energias é de que toda a informação relevante para os modelos quânticos está contida na ação clássica. Correções quânticas são obtidas a partir de procedimentos-padrão de quantização.³ Estes não foram generalizados para as teorias não-comutativas. Embora os modelos não-comutativos propostos para a física de altas energias envolvam apenas fatores matriciais simples, o único recurso que se tem em

²Teorias não-locais apareceram sistematicamente ao longo da história da física em uma grande variedade de contextos (veja [6] e referências). Porém, o interesse por essas teorias esteve sempre restrito a uma comunidade pequena de especialistas.

³Não seria incorreto falar que “quantização” é uma denominação que atualmente é usada para designar um conjunto de regras heurísticas que são empregadas para se inferir a estrutura das teorias quânticas a partir das teorias clássicas associadas [13].

mãos para quantizá-los é a expansão dos campos não-comutativos em termos de componentes comutativas e a quantização destas últimas. O sistema quantizado dessa forma, entretanto, acaba por romper os vínculos impostos pela geometria não-comutativa clássica [12]. Nos capítulos que seguem, veremos que, para dar um sentido quântico aos modelos onde ocorre a não-comutatividade dos observáveis de posição das partículas nas teorias de campos, ou das variáveis do mini-superespaço em cosmologia quântica, a limitação de sabermos quantizar apenas variáveis comutativas determinará também a necessidade de realizarmos uma expansão de coordenadas não-comutativas em função de coordenadas comutativas.

Ainda na década de 90, apareceram trabalhos onde a introdução da não-comutatividade de coordenadas espaciais e temporais é inspirada em argumentos de gravitação semi-clássica [14]. Segundo esses trabalhos, a localização de partículas com extrema precisão no ato de observação de um sistema levaria este a um colapso gravitacional devido à concentração da energia necessária para a distinção de pontos em regiões muito pequenas do espaço. O conceito de espaço-tempo, portanto, não teria valor operacional em dimensões arbitrariamente pequenas. O raciocínio que leva a esse resultado é apresentado de maneira técnica em [14]. O motivo de não ser possível distinguirmos pontos em dimensões arbitrariamente pequenas, entretanto, é bastante simples (veja, p. ex., [15]).

Imaginemos que exista uma distribuição de matéria disposta na forma de dois picos muito próximos contidos em uma região do espaço de diâmetro d . Como poderíamos distingui-los individualmente? Para tal, basta realizarmos um experimento de espalhamento incidindo sobre o sistema partículas teste cujo comprimento de onda de de Broglie seja da mesma ordem de grandeza ou menor que a distância d ; ou seja, que satisfaça a condição $\lambda = \hbar c/E \lesssim d$, onde E é a energia das partículas teste. Quando $\lambda \rightarrow 0$ o campo gravitacional das partículas teste passa a ser importante, e a teoria da Relatividade Geral determina a existência de um limite de resolução. O raio de Schwarzschild correspondente a uma energia E é dado por

$$r_s = \frac{2GE}{c^4} = \frac{2G\hbar}{\lambda c^3} \gtrsim \frac{2G\hbar}{dc^3},$$

onde G é a constante de Newton. Portanto, se o diâmetro d de uma região do espaço for suficientemente pequeno — de modo que r_s seja maior que $d/2$ — a obtenção de informação sobre a estrutura desta através de um processo de medida será impossível, pois este acarretará na formação de um buraco negro. O limite de resolução em medidas de comprimento estabelecido pela Relatividade Geral pode, portanto, ser expresso como

$$\frac{d}{2} \gtrsim \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = l_p,$$

onde l_p é o comprimento de Planck.

A formação de um buraco negro em decorrência do ato de observação em dimensões muito pequenas pode ser evitada levando-se em conta o princípio da incerteza de Heisenberg. Este, quando combinado com a Relatividade Geral, pode impedir que no processo de medida haja concentração de energia suficiente para a formação de um horizonte de eventos [14]. Uma maneira possível de implementarmos as relações de incerteza necessárias para evitar a formação do buraco negro é introduzirmos na teoria a seguinte relação de comutação entre as coordenadas das partículas [14]

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = iQ^{\mu\nu},$$

onde $Q^{\mu\nu}$ são componentes de um tensor anti-simétrico. Esse tipo de relação de não-comutatividade, denominada canônica, presentemente é a mais investigada na literatura.⁴

Apesar de motivações para o estudo das teorias de campos não-comutativas terem aparecido ao longo de décadas, incluindo a presença de argumentos de que a teoria de cordas, inclusive, não é local no sentido que conhecemos [17], até o final da década de 90 o interesse em modelos não-comutativos ainda permanecia limitado a um círculo restrito de especialistas. O real interesse nas teorias não-comutativas por parte de uma ampla comunidade de físicos só ocorreu graças ao trabalho de Seiberg e Witten [18] no ano

⁴Além da não-comutatividade canônica, são também bastante investigadas outras formas de não-comutatividade, como a introduzida pelas álgebras de Lie e a deformação- q . O leitor interessado pode encontrar detalhes em [16].

de 1999. Este deu um grande impulso ao desenvolvimento da área ao relacionar a não-comutatividade canônica com um limite de baixas energias da teoria de cordas abertas. Desde 1999, a teoria quântica de campos não-comutativa que emerge da teoria de cordas vem sendo investigada de maneira sistemática. Devido à importância que adquiriu, deixaremos para discuti-la em maior detalhe nos Capítulos 1 e 2.

A proposta do presente trabalho é investigar possíveis implicações da não-comutatividade canônica para as teorias de campos e a cosmologia. Conforme será discutido nos capítulos subsequentes, a relação de comutação canônica, seja entre os observáveis de posição de partículas ou entre as variáveis de um mini-superespaço, introduz nas teorias físicas um alto grau de não-localidade. É possível que o estudo de teorias não-locais (contendo infinitas derivadas na ação) venha a desempenhar um papel importante na física de altas energias, seja nas teorias de cordas, seja nas teorias de campos. Em plena era das teorias efetivas, a teoria quântica de campos não é mais considerada uma teoria fundamental. Essa mudança de status, segundo Weinberg [19, 20], determina a necessidade de uma nova postura na maneira de se encarar os modelos, mesmo os que são renormalizáveis. Conforme discutiremos no Capítulo 1, é bem possível que termos contendo derivadas de várias ordens superiores a dois sejam necessários no Lagrangeano das teorias de campos para uma descrição da fenomenologia em energias mais elevadas que as testadas.

Afora as razões que acabamos de explicar, há inúmeras outras que também motivam o estudo das teorias de campos baseadas na não-comutatividade canônica. Abaixo listamos algumas que, devido à sua grande importância, não podem deixar de ser mencionadas.

- **Conexão com modelos nos quais ocorre quebra da simetria de Lorentz.**

Presentemente há uma série de modelos que investigam diversos mecanismos, entre eles a presença de campos de fundo, que provocam a quebra da simetria de Lorentz [21, 22]. A não-comutatividade canônica que vem das teorias de cordas provoca exatamente esse tipo de quebra. Uma discussão sobre o mecanismo através do qual um campo de fundo gera a não-comutatividade será feito no Capítulo 1, onde apresentaremos, como exemplo, o problema de Landau. Um comentário a respeito da

natureza da quebra da simetria de Lorentz e suas implicações será feito no Capítulo 2.

- **O intercâmbio de divergências nas teorias de campos.** Conhecido como *IR-UV mixing*, o intercâmbio das divergências ultravioletas e infravermelhas foi uma das primeiras propriedades das teorias quânticas de campos não-comutativas a ser descoberta [23]. Por desempenhar um papel importante no estudo da renormalizabilidade dessas teorias, o *IR-UV mixing* tem sido amplamente investigado. Um intercâmbio similar de divergências ocorre nas teorias de cordas [18, 23]. É importante, portanto, que tenhamos uma compreensão do *IR-UV mixing* e suas conseqüências primeiro no contexto das teorias de campos, onde as manipulações matemáticas são mais simples, para que posteriormente possamos aprofundar a pesquisa no contexto das teorias de cordas.
- **Não-localidade.** Já é sabido que as teorias de cordas não são locais no sentido que conhecemos [24]. Ao propor teorias de campos não-locais em [18], Seiberg e Witten acabaram por derrubar o paradigma da localidade, que, conforme comentamos na introdução, acompanha a teoria de campos desde o início de século XX. Surgiu, portanto, uma grande motivação para se estudar modelos com infinitas derivadas (veja [25] e referências).
- **Possível impacto nos fundamentos da teoria quântica.** Os fundamentos da teoria quântica têm sido alvo de um debate que envolve a comunidade física ao longo de décadas. Entre os diversos pesquisadores que realizaram contribuições relevantes para a interpretação da teoria quântica estão Everett [26], Gell-Mann, Hartle, Omnès e Griffiths [27], Bohm [28] e Bell [29]. Recentemente a pesquisa em fundamentos da teoria quântica recebeu um enorme impulso devido à expectativa de se testar os limites da teoria quântica através de experimentos nas áreas de ótica quântica e matéria condensada [30]. Na física teórica de altas energias alguns pesquisadores têm também manifestado um grande interesse em discutir os funda-

mentos da teoria quântica (veja, p. ex., T. S. Biró *et al* em [31] e referências). Entre eles destaca-se 't Hooft [32], que acha que é tempo de reconsiderarmos as teorias de variáveis escondidas. Atualmente há pouca investigação da não-comutatividade canônica em trabalhos envolvendo variáveis escondidas [33]. Todavia, é possível que modelos envolvendo variáveis escondidas venham desempenhar um papel importante no entendimento das teorias não-comutativas. No Capítulo 4 teremos oportunidade de discutir o assunto através de um exemplo onde aplicaremos a interpretação de Bohm às teorias não-comutativas.

- **Capacidade de gerar translações a partir de derivações internas da álgebra das coordenadas não-comutativas.** Nas teorias de campos não-comutativas, translações são transformações de calibre, e, portanto, as coordenadas das partículas não são invariantes de calibre. A única teoria com esta propriedade conhecida antes era a Relatividade Geral [34].
- **Laboratório para o desenvolvimento de métodos que possam ser úteis no estudo de teorias campos de cordas.** Na segunda quantização da teoria de campos para cordas de Witten [35], o produto entre dois campos de cordas é não-comutativo. Recentemente, provou-se que o produto de campos de cordas pode ser reescrito como um produto tensorial infinito de produtos do tipo Moyal em um único espaço de Hilbert de cordas [36].

A organização deste trabalho de tese é a seguinte:

Capítulo 1 - Teorias Não-Comutativas como Teorias Efetivas - Apresenta o estado da arte da teoria de campos como uma teoria efetiva, aproximação de uma teoria fundamental de altas energias. Dentro desse contexto, discute a motivação para se estudar teorias de campos não-comutativas através de exemplos.

Capítulo 2 - O Potencial Efetivo do Modelo φ^6 Não-Comutativo - Propõe o cálculo do potencial efetivo do modelo escalar φ^6 não-comutativo e analisa suas propriedades e implicações para o processo de quebra espontânea de simetria.

Capítulo 3 - Cosmologia Clássica Comutativa e Não-Comutativa - Discute possíveis implicações da não-comutatividade no contexto da gravitação canônica. O estudo é feito através da introdução de uma relação de não-comutação entre as variáveis de mini-superespaço do modelo cosmológico de Kantowski-Sachs na parametrização de Misner.

Capítulo 4 - Cosmologia Quântica Comutativa e Não-Comutativa - Dá continuidade ao estudo iniciado no Capítulo 3, introduzindo efeitos quânticos no cenário.

Discussão e Perspectivas - Faz uma avaliação global dos resultados obtidos e propõe novas frentes de investigação.

Capítulo 1

Teorias Não-Comutativas Como Teorias Efetivas

...A planet of playthings
We dance on the strings
Of powers we cannot perceive...

—de Freewill, Rush

Presentemente, a teoria quântica de campos encontra-se na era das teorias efetivas. Mesmo as teorias de campo renormalizáveis de maior sucesso, como a Eletrodinâmica Quântica, são atualmente entendidas como aproximações de baixa energia de uma teoria física mais profunda e fundamental, que, muito possivelmente, não seja uma teoria de campos. Há uma expectativa, portanto, de que mesmo as teorias renormalizáveis sejam válidas apenas até uma escala de energia. Nesse cenário, a preocupação com a renormalizabilidade das teorias (antes um paradigma) cede espaço para a necessidade de se considerar todos os acoplamentos consistentes com as simetrias dos modelos [19, 20]. Com todos esses termos de interação no Lagrangeano, as teorias quânticas de campos tornam-se finitas nas expansões perturbativas. Em cálculos envolvendo modelos não-renormalizáveis, tal finitude pode ser atingida, na prática, introduzindo-se a cada ordem de expansão os contra-termos

necessários para que as divergências sejam canceladas — mesmo que estes não se assemelhem aos termos que estejam presentes originalmente no Lagrangeano clássico. O que torna esse procedimento operacional é o fato de que, embora termos que tornam a teoria não-renormalizável estejam presentes, o efeito deles é suprimido nos cálculos por fatores que envolvem o quociente da escala de energia na qual opera o modelo por uma escala de energia fundamental associada a este [19, 20]. É claro que, quanto maior é a escala energia considerada, mais termos de interação não-renormalizáveis passam a ser relevantes. Quando se chega perto da escala de energia fundamental, esses termos todos apresentam contribuições significativas nos cálculos, e o modelo perde o seu poder de fazer previsões físicas. A princípio, portanto, quando operando em uma faixa de energia suficientemente abaixo de sua escala de energia fundamental, um modelo não-renormalizável pode ser tão bom quanto um renormalizável em fazer previsões experimentais.¹

Parte da motivação para as teorias de campos deixarem de ser consideradas teorias fundamentais da natureza teve sua origem no fracasso em se desenvolver uma teoria quântica de campos renormalizável para a gravitação. Diante da expectativa de construir uma teoria fundamental a partir de expansões perturbativas, muitos físicos aderiram ao programa de cordas, que mais tarde deu origem às idéias da Teoria-M. Esforços para quantizar a gravitação vêm sendo feitos há décadas, também, através de programas alternativos, como o do formalismo canônico. Este (será comentado no Capítulo 4) é baseado na quantização da gravitação em um esquema não-perturbativo, que envolve a aplicação de regras-padrão de quantização à Relatividade Geral.² Há pesquisadores que procuram relacionar os dois programas [40]. No contexto das teorias de cordas, a Relatividade Geral,

¹Exemplos de modelos não-renormalizáveis que descrevem fenômenos físicos com sucesso — inclusive na abordagem perturbativa — podem ser encontrados em [37]. Afora a obra de Weinberg [20], outros livros texto modernos que abordam a questão de renormalizabilidade à luz da filosofia das teorias efetivas são, p. ex., [38, 39].

²Além da Geometrodinâmica Quântica, que discutiremos no Capítulo 4, a formulação canônica da gravitação quântica admite duas outras abordagens: a Dinâmica de Conexão Quântica e a Gravitação Quântica de Laços. Esta última é uma forte concorrente às teorias de cordas como teoria fundamental de gravitação [40].

e conseqüentemente a equação de Wheeler-DeWitt, corresponde à aproximação de *s-wave* [41]. Portanto, mesmo que se venha a provar que gravitação quântica canônica não pode ser uma teoria fundamental não-perturbativa da gravitação, esta deve existir como uma teoria efetiva em escalas de comprimento suficientemente grandes.

Como as teorias de campo em geral não admitem um tratamento analítico exato, a utilização de esquemas de aproximação é inevitável. De acordo com o tipo de informação que se deseja obter em uma teoria de campos, pode-se empregar métodos perturbativos, aproximações de rede, *ansätze* especiais com alto grau de simetria, etc. Todos os esquemas de aproximação possuem algum tipo de limitação. Há muitas soluções físicas interessantes que não podem ser encontradas empregando-se métodos perturbativos. A aproximação de rede nos permite acessar o setor não-perturbativo dos modelos. Porém, nessa aproximação certas simetrias das teorias são quebradas, sendo recuperadas somente no limite do contínuo. Soluções exatas que são obtidas a partir de *ansätze* especiais com alto grau de simetria, por sua vez, podem ser muito particulares, deixando de exibir propriedades físicas importantes dos modelos.

Neste trabalho discutiremos exemplos onde empregaremos dois dos métodos acima descritos: o cálculo perturbativo, que será utilizado no Capítulo 2 para estudar o modelo φ^6 , e a aproximação de mini-superespaço (um *ansatz* especial de alto grau de simetria), que empregaremos no Capítulo 4 para estudar o universo de Kantowski-Sachs. Em ambos os casos a não-comutatividade receberá uma abordagem de teoria efetiva. Ao estudar o modelo φ^6 , trataremos a não-comutatividade seguindo os métodos propostos pela comunidade de teóricos de cordas [18, 23]. Já no modelo de Kantowski-Sachs, adotaremos um ponto de vista similar ao originalmente proposto em [42] e desenvolvido em [33], que torna possível conferirmos uma realidade objetiva aos modelos não-comutativos. No que segue, apresentaremos uma breve discussão sobre a origem e as interpretações da não-comutatividade canônica.

1.1 O Problema de Landau

A não-comutatividade canônica que emerge no contexto da teoria de cordas abertas possui uma grande semelhança com a que é originada no problema de Landau quando um sistema é projetado no seu nível mais baixo de energia [18]. Por ser bastante simples e esclarecer os mecanismos pelos quais a não-comutatividade canônica emerge na presença de um forte campo de fundo, o problema de Landau tem sido abordado em um número apreciável de trabalhos (veja, p. ex., [4, 11, 18, 42] e referências). Na discussão que apresentaremos nesta seção, o problema de Landau será abordado do ponto de vista proposto em [42].

Consideremos uma partícula não-relativista movendo-se no plano $x - y$ sob a presença de um campo magnético constante, B , atuando na direção z . O Lagrangeano clássico do sistema é dado por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + e\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}, \quad (1.1)$$

onde e é a carga da partícula, m a sua massa, e \vec{A} é o potencial vetor eletromagnético (no sistema de unidades escolhido, $c = 1$). Escrevendo o potencial vetor como $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ e considerando o limite em que $B \rightarrow \infty$ ou $m \rightarrow 0$, podemos descartar o termo cinético e escrever o Lagrangeano como

$$L = eBxy. \quad (1.2)$$

Nesse Lagrangeano as variáveis x e y são conjugadas canônicas, razão pela qual os seus respectivos operadores satisfazem a relação

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = -\frac{i\hbar}{eB}\epsilon^{ij} = i\theta^{ij}, \quad (1.3)$$

onde $\theta^{ij} = (-\hbar/eB)\epsilon^{ij}$. Essa é a maneira como a não-comutatividade ocasionada pela projeção no mais baixo nível de Landau é usualmente derivada na literatura. Embora bastante direta, a derivação que acabamos de descrever não contribui para esclarecer como a relação (1.3) emerge dentro de uma teoria que é inicialmente comutativa. Para tal, é interessante considerarmos a rota alternativa discutida em [42].

O Hamiltoniano quântico correspondente ao Lagrangeano (1.1) é dado por

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m} \widehat{\pi}^i \widehat{\pi}^i, \quad (1.4)$$

onde $\widehat{\pi}^i = m\dot{\hat{x}}^i = \hat{p}^i - e\hat{A}^i$ são os momentos físicos e \hat{p}^i são os momentos canônicos. Observe que os momentos canônicos comutam entre si, enquanto os momentos físicos satisfazem as relações de comutação

$$[\widehat{\pi}^i, \widehat{\pi}^j] = i\hbar eB \epsilon^{ij}. \quad (1.5)$$

Para entender como uma relação de comutação (1.3) emerge no modelo, é interessante definirmos, em analogia com o caso clássico, o operador centro-de-órbita, cujas componentes são dadas por

$$\widehat{X}^i = \hat{x}^i - \frac{i}{eB} \widehat{\pi}^i. \quad (1.6)$$

É fácil verificar que essas componentes satisfazem a relação de comutação

$$[\widehat{X}^i, \widehat{X}^j] = -\frac{i\hbar}{eB} \epsilon^{ij} = i\theta^{ij}, \quad (1.7)$$

onde $\theta^{ij} = (-\hbar/eB) \epsilon^{ij}$. Observe que, enquanto $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0$, os operadores \widehat{X}^i são impedidos de comutar devido à presença do termo contendo o campo magnético em (1.6). O espaço-tempo, por outro lado, permanece sendo o mesmo espaço-tempo comutativo convencional. Nesse cenário, a relação de incerteza

$$\Delta X^i \Delta X^j \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{\epsilon^{ij}}{eB} \right|, \quad (1.8)$$

introduzida por (1.7), pode ser entendida como uma limitação da informação disponível a respeito das coordenadas X^i do centro da órbita da partícula em um processo de medida.

Consideremos agora o limite no qual o campo magnético é muito forte. Quando isso ocorre, o sistema é projetado no mais baixo nível de Landau. Uma prescrição rigorosa de como operar nesse limite, que é obtido resolvendo-se o vínculo $\widehat{\pi}^i \approx 0$ (usando uma técnica de projeção), pode ser encontrada em [43]. Do ponto de vista heurístico, podemos entender a projeção no nível mais baixo de Landau como um processo onde as partículas têm os seus graus de liberdade cinéticos congelados, acabando por ser confinadas nos centros de

suas órbitas. Quando isso ocorre, os observáveis que caracterizam as coordenadas das partículas satisfazem a relação de comutação (1.7) devido à identificação que ocorre entre \hat{X}^i e \hat{x}^i . Mas como poderiam operadores que comutam entre si ser identificados, ainda que em um limite especial, com operadores não-comutativos? A resposta é que operadores que comutam em um espaço podem não comutar quando atuam em um subespaço deste. E é justamente esse o caso do problema de Landau quando ocorre uma projeção abrupta de um sistema no seu nível mais baixo de energia: os operadores correspondentes à posição das partículas não comutam somente quando atuam no espaço Hilbert reduzido após a projeção.³

Ao interpretar a relação de incerteza (1.8), a maioria dos autores considera o espaço como sendo “borrado”, sem a noção de ponto [4, 11]. No entanto, a derivação acima sugere que poderíamos optar por considerar o espaço como inalterado. A não-comutatividade dos operadores correspondentes às coordenadas das partículas estaria, nesse caso, estritamente relacionada a impossibilidade de determinar-se a localização destas em um processo de medida.⁴ Ao interpretar as consequências da não-comutatividade devemos ter em mente que os fenômenos físicos que governam a mecânica quântica (e, por conseguinte, a teoria quântica de campos) não ocorrem em um espaço Hilbert, mas sim em um laboratório [44]. Rigorosamente, com seu ponto vista instrumentalista, a interpretação de Copenhagen da teoria quântica não nos confere elementos para fazer qualquer afirmação que vá além de

³Um exemplo simples que ilustra o mecanismo de como isso ocorre é o de dois operadores Hermitianos atuando em um espaço Hilbert tridimensional representados pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enquanto eles comutam no espaço Hilbert completo, a atuação deles restrita a um subespaço bidimensional (sub-matrizes obtidas, p. ex., truncando a coluna 1 e a linha 1 das matrizes) é não-comutativa.

⁴Recentemente, a possibilidade de relacionar não-comutação (e, conseqüentemente, quantização) com perda de informação foi proposta por 't Hooft [32] ao sugerir que a gravitação quântica poderia ser uma teoria determinista. O trabalho de 't Hooft tem despertado a atenção também de vários pesquisadores (veja, p. ex., M. Blasone *et al* em [31]).

dizer que um observador em um processo de medida não pode determinar as três coordenadas espaciais referentes à localização de uma partícula devido à não comutatividade dos operadores \hat{X}^i . Todavia, se nosso interesse for fazer física sem a necessidade de conferir a um observador externo um papel preferencial, podemos utilizar outras interpretações da teoria quântica que nos permitam investigar diretamente as conseqüências de (1.7) para um sistema. Um esforço efetivo nessa direção foi realizado em [33], onde é desenvolvido um modelo de variáveis escondidas capaz de reproduzir os resultados da mecânica quântica não-comutativa para o oscilador harmônico. Além de explicar de maneira satisfatória a separação das raias espectrais ocasionada pela não-comutatividade fornecendo uma visão fina de seus efeitos, o modelo desenvolvido em [33] serve de contra-exemplo à afirmação de que a não-comutatividade dos operadores de posição torna as partículas “não-localizadas” e o espaço “borrado” na mecânica quântica.

A relação de comutação originada na teoria de cordas abertas [18] é baseada em uma aproximação similar à da projeção no nível mais baixo de Landau acima descrita. Portanto, da mesma forma que no problema de Landau, ela deveria admitir uma interpretação em termos de uma relação satisfeita pelos observáveis correspondentes às coordenadas das partículas. Poderíamos nos indagar que diferença faz adotar ou não tal interpretação, uma vez que a verificação da natureza, puntiforme ou não, das partículas é impossível de ser feita por observação direta.⁵ Porém, conforme é comentado em [42], há mais de uma maneira consistente de darmos um sentido à não-comutatividade. Escolhas diferentes de interpretação, entretanto, podem estar relacionadas a teorias físicas que não sejam equi-

⁵Discussões a respeito da validade de se considerar modelos contendo objetos físicos cuja ontologia não pode ser aferida por observação direta têm povoado a física ao longo de sua história. No início do século XX, muitos cientistas mostravam-se incrédulos a respeito da “existência” dos átomos e moléculas. A capacidade da teoria cinética em reproduzir os resultados da termodinâmica não era suficiente para convencer os físicos da validade de se considerar modelos microscópicos contendo objetos de ontologia que não são diretamente observáveis. Foi somente com o trabalho de Einstein sobre o movimento Browniano que ficou evidente a vantagem de se considerar a teoria atômico-molecular [45]. A física de partículas passou por uma fase semelhante na década de 60, onde se fazia apenas cálculo da matriz- S , postura descrita por Weinberg como “puritanismo positivista” [19].

valentes. Para compreender essa questão, é necessário considerarmos a formulação das teorias de campos não-comutativas.

1.2 Teorias de Campos Não-Comutativas

Uma maneira de construirmos uma teoria quântica de campos baseada na relação de comutação

$$[\widehat{X}^\mu, \widehat{X}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ são constantes anti-simétricas no índices μ e ν , é fazendo uso do procedimento de quantização de Weyl [11]. Esse procedimento nos permite estabelecer uma correspondência entre operadores em espaços não-comutativos e funções em espaços comutativos. A representação da álgebra (1.9) em um espaço comutativo é feita através da deformação do produto usual de funções – dando origem a um produto não-comutativo –, que torna a realização dos cálculos da teoria (funções de Green, etc) uma tarefa relativamente simples. No que segue descreveremos a quantização de Weyl (ordenamento simétrico dos operadores) e suas implicações para as teorias de campos não-comutativas. Informação sobre outros procedimentos de quantização (com outros ordenamentos) pode ser encontrada, p. ex., em [46].

Consideremos um operador, \widehat{F} , definido em um espaço onde as coordenadas satisfazem a relação de comutação (1.9). Podemos estabelecer a correspondência de \widehat{F} com uma função, f , avaliada em coordenadas comutativas,

$$F(\widehat{X}) \longleftrightarrow f(x), \quad (1.10)$$

através da decomposição de Fourier

$$F(\widehat{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik_\mu \widehat{X}^\mu} f(k) d^n k, \quad (1.11)$$

onde

$$f(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) d^n x \quad (1.12)$$

são os coeficientes de Fourier de f . A função f é denominada símbolo de Weyl do operador \widehat{F} . Empregando (1.11), podemos escrever produto $F(\widehat{X})G(\widehat{X})$ como

$$\begin{aligned} F(\widehat{X})G(\widehat{X}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ik_\mu \widehat{X}^\mu} f(k) e^{ip_\mu \widehat{X}^\mu} g(p) d^n p d^n k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(k_\mu + p_\mu) \widehat{X}^\mu - ik_\mu p_\nu [\widehat{X}^\mu, \widehat{X}^\nu]/2} f(k) g(p) d^n p d^n k. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Substituindo (1.9) em (1.13), estabelecemos a correspondência

$$F(\widehat{X})G(\widehat{X}) \longleftrightarrow f(x) \star g(x), \quad (1.14)$$

onde o produto

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n p e^{i(k_\mu + p_\mu)x^\mu - ik_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}/2} f(k) g(p) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial}{\partial \eta^\nu}\right) f(x + \xi) g(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} \end{aligned} \quad (1.15)$$

é denominado produto Moyal.

Através da correspondência de Weyl, é possível, portanto, atribuir-se um sentido a uma teoria de campos em um espaço de operadores que não comutam em termos de campos avaliados em variáveis comutativas. Para tal, basta que as variáveis não-comutativas que aparecem nos argumentos dos campos sejam substituídas por variáveis comutativas — símbolos de Weyl — e o produto convencional pelo produto Moyal. É fácil mostrar que o produto Moyal possui a propriedade $\int d^4 x A \star B = \int d^4 x AB$. A não-comutatividade, portanto, afeta apenas os termos de interação da ação. Devido a esse fato, para fins

de cálculos perturbativos, o espaço de Hilbert (Fock) de uma teoria de campos não-comutativa definida segundo a prescrição acima é o mesmo da sua análoga comutativa [47]. Alguns autores argumentam [15], entretanto, que os métodos perturbativos usuais podem não ser adequados para realização de cálculos nas teorias de campos em espaços “genuinamente não-comutativos”. Diferentes pontos de vista de como conceber teorias de campos não-comutativas são defendidos na literatura, onde há diversas abordagens para a não-comutatividade canônica (veja, p. ex, [4, 14, 15, 23, 48, 49, 50, 51]). O ponto de vista aqui adotado será semelhante ao proposto em [51]. Antes de comentarmos o assunto, porém, é interessante adquirirmos uma visão intuitiva da não-comutatividade verificando as propriedades do produto Moyal em um exemplo. O raciocínio fica mais transparente com a utilização da representação integral do produto Moyal. Para o caso de duas funções f e g , esta pode ser obtida empregando-se as representações

$$f(z) = \int d^n x \delta(z - x) f(x) \text{ e } g(z) = \int d^n x \delta(z - x) g(x), \quad (1.16)$$

e escrevendo-se o produto Moyal como

$$(f \star g)(z) = \int d^n x d^n y K(x, y; z) f(x) g(y), \quad (1.17)$$

onde

$$\begin{aligned} K(x, y; z) &= \delta(z - x) \star \delta(z - y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k e^{ik_\mu(z-x)^\mu} \delta(z - y - \theta k/2) \\ &= \frac{1}{\pi^n |\det \theta|} e^{2i(z-x)^\mu \theta_{\mu\nu}^{-1} (z-y)^\nu}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Como $|K(x, y; z)|$ é uma constante independente de x, y e z , o produto Moyal parece ser infinitamente não-local. Entretanto, a fase presente em $K(x, y; z)$ provoca oscilações que tendem a anular o integrando em parte da região de integração. O resultado é uma interação de longo alcance que relaciona escalas de comprimento arbitrariamente

grandes com escalas de comprimento arbitrariamente pequenas. Tomemos como exemplo o produto Moyal de duas Gaussianas concêntricas de larguras a e b e máximo 1 em um espaço bidimensional,

$$\phi_a = \exp\left(-\frac{x^i M_{ij} x^j}{a^2}\right), \quad \phi_b = \exp\left(-\frac{x^i M_{ij} x^j}{b^2}\right), \quad (1.19)$$

no caso em que $M_{ij} = \delta_{ij}$. Escrevendo $\theta^{ij} = \theta \epsilon^{ij}$ e usando as equações (1.17) e (1.18), obtemos [4]

$$\phi_a \star \phi_b = \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + \theta^2}\right) \phi_D, \quad \text{onde } D = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + \theta^2}{a^2 + b^2}}. \quad (1.20)$$

Esse resultado nos ajuda a compreender em que sentido a não-comutatividade representada pelo produto Moyal deve ser entendida. Da expressão (1.9) podemos concluir que a não-comutatividade canônica introduz nas teorias de campos uma unidade fundamental de área, $|\theta|$. Nos pacotes Gaussianos, que apresentam simetria axial, a unidade fundamental de área, $|\theta|$, possui associada a si uma unidade de comprimento, $\sqrt{|\theta|}$, que é privilegiada pelos efeitos da não-comutatividade em (1.20). Embora o espaço (dos símbolos) admita Gaussianas de largura arbitrariamente pequena, as interações não-locais introduzidas pelo produto Moyal acabam muitas vezes por espalhá-las. Consideremos, por simplicidade, o caso em que $a = b$. O produto comutativo de duas Gaussianas de largura a neste caso tem como resultado uma Gaussiana de largura $a/\sqrt{2}$, sempre menor que a largura original. De (1.20) é fácil ver que quando $a = b$ o produto Moyal, ao contrário, atua dispersando as Gaussianas, especialmente se $a < \sqrt{|\theta|}$ (veja Fig. 1.1). Quando $a = \sqrt{|\theta|}$ o produto Moyal preserva a largura original, sendo este valor a largura “mínima efetiva” que o produto das Gaussianas admite.

A partir da expressão para D em (1.20), podemos concluir que o caso geral do produto Moyal de duas Gaussianas, ϕ_a e ϕ_b , pode ser resumido da seguinte forma: sempre que

$(a - \sqrt{|\theta|})(b - \sqrt{|\theta|}) > 0$ temos $D > \sqrt{|\theta|}$, enquanto que, quando $(a - \sqrt{|\theta|})(b - \sqrt{|\theta|}) < 0$, temos $D < \sqrt{|\theta|}$. Portanto, embora seja possível a existência de configurações de campo concentradas em regiões arbitrariamente pequenas, em certos casos – no exemplo em questão quando $(a - \sqrt{|\theta|}) < 0$ e $(b - \sqrt{|\theta|}) < 0$ – as interações tendem a dispersar as configurações de campo de largura característica inferior a $\sqrt{|\theta|}$. Quando as configurações de campo que não possuem simetria axial, entretanto, as interações privilegiam a escala fundamental de área, $|\theta|$, em detrimento da escala de comprimento $\sqrt{|\theta|}$. Uma maneira intuitiva de entendermos esse fato é através da relação de incerteza

$$\Delta X \Delta Y \geq |\theta|/2. \quad (1.21)$$

De (1.21) podemos ver que, sendo o produto $\Delta X \Delta Y$ uma constante para um sistema, este pode experimentar escalas de comprimento arbitrariamente pequenas em uma direção ($\Delta X \rightarrow 0$ ou limite UV), desde que a direção transversa experimente escalas de comprimento arbitrariamente grandes ($\Delta Y \rightarrow \infty$ ou limite IR).⁶ Somente quando $\Delta X \propto \Delta Y$ temos uma escala de comprimento preferencial, $\Delta X \sim \sqrt{|\theta|}$, similar a das Gaussianas.

Conforme havíamos comentado antes, a teoria de campos livres não é afetada por qualquer efeito da não-comutatividade. Esta é uma das razões pelas quais podemos interpretar a não-comutatividade como uma consequência das interações, ao invés de uma propriedade genuína do espaço.⁷ Alguns autores argumentam que para dar sentido à teoria de campos em um espaço genuinamente não-comutativo – onde não exista a noção de ponto e configurações de campo localizadas não possam ocupar regiões de dimensão arbitrariamente pequenas – seria necessário eliminar a informação de estrutura puntiforme presente no espaço do símbolos [48]. Tal procedimento pode ser feito, por exemplo, no cálculo das funções de Green tomando-se uma média em torno de estados localizados

⁶Essa é apontada por alguns autores [23, 51] como uma explicação intuitiva para a origem do *IR/UV mixing* que aparece nas teorias de campos não-comutativas.

⁷Com relação a esse fato, vale a pena mencionar que a caracterização de variedades diferenciáveis não-comutativas por uma álgebra não-comutativa das coordenadas vai de alguma forma contra o espírito da abordagem de Connes, que foi originalmente formulada em uma linguagem livre de coordenadas em termos de invariantes por difeomorfismos [40].

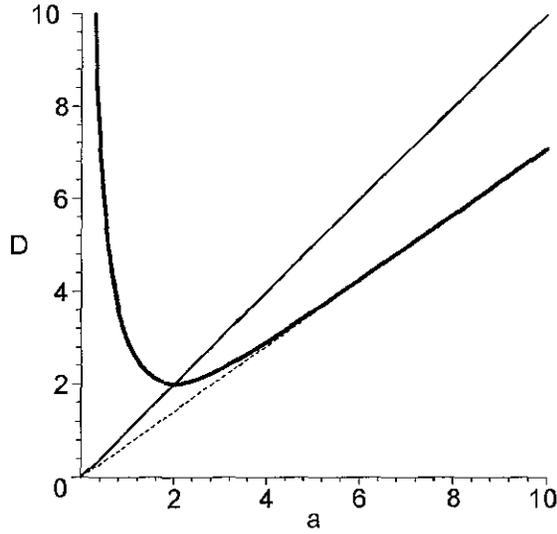


Figura 1.1: O comportamento típico da largura D da Gaussiana ϕ_D (curva em negrito) em função de a (supondo $a = b$) ilustrado para o caso $\sqrt{|\theta|} = 2$. Para valores de a bem maiores que $\sqrt{|\theta|}$, $D(a)$ assume valores próximos aos do caso comutativo, aproximando-se de $a/\sqrt{2}$ (linha tracejada). Para valores de a próximos ou inferiores $\sqrt{|\theta|}$ (ponto de mínimo onde $D(a)$ cruza a linha diagonal), os efeitos da não-comutatividade passam a ser extremamente relevantes.

(*smearing*).⁸ As funções de Green físicas nesse caso são diferentes das suas parceiras calculadas no espaço dos símbolos de Weyl, sendo este último apenas um espaço auxiliar para realização de cálculos. Existindo um limite de localização “real” na teoria (e não apenas “efetivo” devido a interações) as configurações de campo teriam uma restrição em seus graus de liberdade. Vista do espaço de momento, tal restrição equivaleria a um corte nas frequências a partir de um certo valor máximo. Nessa abordagem, os efeitos da não-comutatividade fazem-se presentes mesmo na teoria de campos livres [48]. Nos trabalhos que seguem a linha de interpretação advinda das teorias de cordas (veja, p. ex., [23]), nenhum procedimento de *smearing* é realizado. É claro que a finitude das teorias, bem

⁸Uma analogia que ajuda na compreensão desse procedimento pode ser feita com a física atômico-molecular. Para calcular a função de onda de um sistema constituído de bósons, podemos distinguir as partículas e resolver a equação de Schrödinger. Depois, para eliminar a informação que foi colocada por mero artifício de cálculo, simetriza-se a função de onda. Se esse procedimento não é realizado, as partículas devem ser consideradas distinguíveis, independentemente de termos ou não condições operacionais para verificar isso através de uma observação direta.

como os valores das quantidades físicas mensuráveis, devem diferir em cada abordagem da não-comutatividade [15, 42, 48].

Neste trabalho, adotaremos a abordagem proposta em [42]. Esta confere à não-comutatividade da teoria de campos uma interpretação semelhante à sugerida anteriormente para o problema de Landau. Entenderemos as teorias quânticas de campos não-comutativas como teorias definidas no espaço-tempo usual, porém com potenciais de interação não-locais (veja, p. ex., [51]; para entender a não-localidade veja [52]). Dessa forma, os procedimentos de cálculo adotados no Capítulo 2 estarão em concordância com os propostos pela comunidade de teóricos de cordas [18, 23].

1.3 Formulação de Schrödinger e o Potencial Quântico

Se a não-comutatividade que estamos considerando é apenas uma consequência de interações, a passagem do regime não-comutativo para o comutativo deve ser governada por variações dos atributos físicos dos sistemas (dimensões, número de constituintes, intensidades de campo, etc), assim como a passagem quântico-clássica é no caso comutativo [53]. O critério⁹ $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$, comumente adotado na literatura, deve, portanto, ser apenas um caso particular de um critério mais geral. Um esforço na direção de encontrar um critério mais amplo foi realizado em [42], onde o método do potencial quântico (veja, p. ex., [54]) é estendido para encampar as teorias não-comutativas. Por ser baseado em um princípio extremamente simples e estabelecer de maneira intuitiva uma conexão entre as idéias aqui propostas e as do Capítulo 4, o método do potencial quântico será brevemente discutido abaixo. Mostraremos como pode ser feita a sua formulação para as teorias não-comutativas, tomando, como exemplo, os modelos escalares. Por simplicidade, nos

⁹Aqui e no que segue, o símbolo “ $A \rightarrow B$ ” deve ser entendido como o limite no qual $A - B$ é suficientemente pequeno se comparado com as outras quantidades de mesma natureza relevantes para o sistema físico em questão.

restringiremos ao caso em que $\theta^{0i} = 0$.

A equação diferencial funcional de Schrödinger para uma teoria escalar é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi[\phi, t] = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left(-\hbar^2 \frac{\delta^2}{\delta\phi(\vec{x})^2} + |\nabla\phi|^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \phi^2 \right) + V_\star(\phi) \right\} \Psi[\phi, t], \quad (1.22)$$

onde $V_\star(\phi)$ é o potencial comutativo usual, $V(\phi)$, com o produto Moyal substituindo o produto usual entre os campos. Escrevendo o funcional de onda da forma polar, $\Psi = R \exp(iS/\hbar)$, e separando as partes real e imaginária da equação de Schrödinger (1.22) obtemos, após simplificação, as equações

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi} \right)^2 + |\nabla\phi|^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \phi^2 \right] \right\} + V_c + V_{nc} + Q_K = 0, \quad (1.23)$$

e

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \int d^3x \frac{\delta}{\delta\phi} \left(R^2 \frac{\delta S}{\delta\phi} \right) = 0, \quad (1.24)$$

onde

$$V_{nc} = \int d^3x (V_\star - V), \quad (1.25)$$

$$V_c = \int d^3x V, \quad (1.26)$$

e

$$Q_K[\phi] = -\frac{\hbar^2}{2R} \int d^3x \frac{\delta^2 R}{\delta\phi(\vec{x})^2}. \quad (1.27)$$

A expressão (1.23) é uma generalização da equação de Hamilton-Jacobi contendo dois termos adicionais: V_{nc} e Q_K . Da definição (1.25), podemos ver que o potencial V_{nc} é a parte não-comutativa do potencial clássico, V_\star , o que justifica a sua notação. Por estar ausente na equação de Hamilton-Jacobi clássica, Q_K , que advém do termo cinético em (1.22),

é identificado como responsável pelos efeitos quânticos da teoria. Devido à presença de correções da não-comutatividade no funcional de onda, Q_K contém contribuições comutativas e não-comutativas. A separação das contribuições não-comutativas embutidas em Q_K pode ser feita definindo-se

$$Q_{nc} = Q_K - Q_c, \quad Q_c = -\frac{\hbar^2}{2R_c} \int d^3x \frac{\delta^2 R_c}{\delta \phi(\vec{x})^2}, \quad (1.28)$$

onde $R_c = \sqrt{\Psi_c^* \Psi_c}$, e Ψ_c é a solução de (1.22) com $\theta^{ij} = 0$, ou seja, a solução da equação comutativa associada. A equação (1.24) pode ser reconhecida como a equação de continuidade para a densidade de probabilidade, $R^2[\phi(\vec{x}), t]$, de que a configuração de campo seja $\phi(\vec{x})$ no tempo t .

Vejam agora as condições para os limites clássico e comutativo. No limite comutativo a soma das contribuições advindas dos potenciais “nc” em (1.23), $V_{nc} + Q_{nc}$, deve ser desprezível se comparada com os demais termos que aparecem na equação. Assim, quando nos aproximamos do limite $V_{nc} + Q_{nc} \rightarrow 0$, o funcional de onda calculado a partir de (1.23) e (1.24) se aproxima do obtido a partir da equação de Schrödinger comutativa. Uma vez no limite comutativo, o limite clássico é atingido se $Q_c \rightarrow 0$. Nesse limite, as equações (1.22) e (1.24), em conjunto com a equação

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left. \frac{\delta S[\phi(\vec{x}), t]}{\delta \phi(\vec{x})} \right|_{\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, t)}, \quad (1.29)$$

definem a teoria de campo escalar clássica comutativa no formalismo de Hamilton-Jacobi.¹⁰

Inspecionando as equações (1.22), (1.24) e (1.29), ficamos tentados a estender o conceito de evolução contínua e determinista de (1.29) ao caso mais geral, onde (1.22) contém

¹⁰Outra maneira de atingirmos o mesmo limite é passando pela teoria clássica de campos não-comutativa em uma etapa intermediária. Isso ocorre toda vez que $Q_c + Q_{nc} \rightarrow 0$. Uma vez estando nesse limite, o regime comutativo é atingido se $V_{nc} \rightarrow 0$.

as contribuições dos potenciais quânticos. Para fazer um contato entre as teorias quânticas e clássicas de campos seguindo essa rota, bastaria interpretar a fase do funcional de onda como uma geratriz de “trajetórias quânticas” do campo $\phi(\vec{x}, t)$. Essa é justamente a proposta da formulação de Bohm [28, 29, 53, 55, 56], que torna a passagem quântico-clássica acima descrita perfeitamente consistente. Mais adiante teremos a oportunidade de aplicá-la no estudo da cosmologia quântica.

Tendo finalizado os aspectos formais e apresentado as idéias que nortearam a presente tese, nos concentraremos, nos capítulos que seguem, em exemplos de aplicação da teoria.

Capítulo 2

O Potencial Efetivo do Modelo φ^6 Não-Comutativo

Neste capítulo, discutiremos algumas implicações da não-comutatividade canônica (1.9) para o modelo escalar φ^6 em (2+1) dimensões. A linha de investigação que adotaremos é a mesma proposta em [57]. Começaremos efetuando o cálculo perturbativo do potencial efetivo à ordem de dois laços. Posteriormente, estudaremos as suas propriedades, discutindo possíveis implicações para o processo de quebra espontânea de simetria. Várias investigações foram feitas com o intuito de determinar a relevância da não-comutatividade para o processo de quebra espontânea de simetria, porém todas dedicadas ao modelo φ^4 [58]-[63]. Atualmente há poucos trabalhos sobre o modelo φ^6 em (2+1) dimensões [64, 65], sendo [65] o único que aborda a questão da quebra espontânea de simetria (SSB). Nesse trabalho, o modelo $O(N)$ é analisado com ênfase no *IR-UV mixing* e aspectos de renormalizabilidade.

Como a abordagem para as teorias de campo não-comutativas que estamos seguindo é a de teorias efetivas, não daremos em nosso estudo importância maior à questão da renormalizabilidade. Até o presente momento, ainda não se sabe ao certo se o modelo φ^6 é renormalizável. A renormalizabilidade das teorias de campo não-comutativas ainda é um tema em discussão (veja, p. ex., [59, 60, 63, 66, 67] e referências).

Ao estudarmos o potencial efetivo na aproximação de dois laços, restringiremos nossas considerações ao caso em que as constantes $\theta^{\mu\nu}$ estejam numa faixa de valores na qual o parâmetro θ , definido por $\theta = \sqrt{(\theta^{12})^2 - (\theta^{01})^2 - (\theta^{02})^2}$, seja pequeno. Suporemos também que a simetria translacional é uma propriedade do estado de vácuo. A validade desta última hipótese foi recentemente questionada na literatura (veja, p. ex., [59, 61]) com o argumento de que, como consequência da não-comutatividade, o estado de vácuo não ocorreria em um regime onde $\varphi_{cl}(x)$ é constante.¹ Nesse caso, o potencial efetivo não poderia ser usado para estudar a SSB. Entretanto, conforme foi comentado em [59], no caso particular onde θ é pequeno esperamos que a simetria translacional seja de fato uma propriedade do estado de vácuo. Mais ainda, a existência de um regime que admite simetria translacional foi corroborada em cálculos não-perturbativos de rede [68] envolvendo o modelo φ^4 tridimensional, um contra-exemplo ao argumento apresentado em [61].

Conforme veremos a seguir, os efeitos da não-comutatividade no regime onde θ é pequeno advêm do cruzamento de linhas internas dos diagramas de Feynman. Como a finitude de alguns desses diagramas pode ser atribuída a uma frequência de corte efetiva [23], $\Lambda_{eff} \sim 1/\sqrt{\theta}$, introduzida pela não-comutatividade, quando θ é suficientemente pequeno esses diagramas passam a ser dominantes, podendo modificar apreciavelmente o comportamento das teorias de campos.

2.1 O Modelo φ^6 Não-Comutativo

Conforme discutimos no Capítulo 1, quando derivada da teoria de cordas abertas em uma aproximação de baixas energias, a teoria quântica de campos não-comutativa tem

¹Alguns autores argumentam que a quebra da simetria translacional deveria ocorrer porque esta é uma condição necessária para assegurar a renormalizabilidade dos modelos (veja, ex., [61] para o modelo φ^4). No entanto, o presente status da teoria de campos nos leva a crer que este não é um bom critério para justificar tal hipótese. Dificuldades com os procedimentos de aproximação são problemas de ordem meramente humana; não deveriam, portanto, ser tomadas como base para inferirmos as propriedades físicas dos modelos.

como base a relação de comutação (1.9). Uma propriedade importante da equação (1.9) é que, quando a não-comutatividade é originada devido à presença de um campo de fundo que atua como um background universal – como é o caso do campo de Neveu-Schwarz na teoria de cordas – as propriedades de transformação dos índices μ e ν não são as mesmas nos seus lados esquerdo e direito. Os dois lados contêm índices de Lorentz e transformam-se frente a mudanças de coordenadas, que caracterizam transformações de Lorentz de observador. Entretanto, o lado direito é invariante sob transformações de Lorentz de partículas, pois estas não atuam em $\theta^{\mu\nu}$ [21]. É dessa maneira que a não-comutatividade proveniente da teoria de cordas quebra a simetria de Lorentz. Como $\theta^{\mu\nu}$ é covariante ante as transformações de Lorentz de observador, podemos encontrar uma transformação ortogonal, $\tilde{x} = Lx$, que coloca a matriz $\theta^{\mu\nu}$ na forma de blocos fora da diagonal:

$$L \begin{bmatrix} 0 & \theta^{01} & \theta^{02} \\ -\theta^{01} & 0 & \theta^{12} \\ -\theta^{02} & -\theta^{12} & 0 \end{bmatrix} L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde $\theta = \sqrt{(\theta^{12})^2 - (\theta^{01})^2 - (\theta^{02})^2}$. Portanto, em um mundo intrinsecamente tridimensional no qual $(\theta^{12})^2 - (\theta^{01})^2 - (\theta^{02})^2 > 0$, a não-comutatividade das coordenadas espaciais e temporais pode ser sempre reduzida a uma não-comutatividade puramente espacial. Para isso basta fazer a escolha apropriada do referencial.

Conforme explicamos no Capítulo 1, uma teoria de campos não-comutativa corresponde a uma teoria de campos usual com os produtos entre os campos nos termos de interação substituídos pelo produto Moyal. A partir da definição (1.15), é fácil verificar que o produto Moyal satisfaz a propriedade

$$\int d^3x \phi_1(x) \star \phi_2(x) \dots \phi_n(x) = \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + \dots + k_n) \times \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i < j} k_{i\mu} \theta^{\mu\nu} k_{j\nu}\right) \phi_1(k_1) \phi_2(k_2) \dots \phi_n(k_n), \quad (2.2)$$

onde a integração é feita em três dimensões por estarmos considerando um modelo (2+1) dimensional. Levando em conta que a ação livre das teorias não-comutativas é idêntica à das teorias comutativas, da equação (2.2) podemos concluir que as regras de Feynman para as teorias escalares não-comutativas são praticamente as mesmas das teorias comutativas associadas. A única diferença é a presença de fatores de fase dependentes do ordenamento das pernas dos diagramas multiplicando os fatores de vértice usuais.

2.1.1 O Método Funcional para o Cálculo do Potencial Efetivo

A fim de simplificarmos nossos cálculos, a partir de agora estaremos considerando o modelo φ^6 como Euclideanizado. Para calcular o potencial efetivo utilizaremos a formulação funcional [69, 70]. A ação Euclideana do modelo φ^6 não-comutativo é dada por

$$S = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{\varphi} \partial_\mu \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} m^2 \tilde{\varphi}^2 + \frac{g}{4!} \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} + \frac{f}{6!} \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \star \tilde{\varphi} \right]. \quad (2.3)$$

A quebra espontânea de simetria é introduzida no modelo quando o campo quântico adquire um valor esperado no vácuo diferente de zero,

$$\varphi_{cl}(x) = \langle 0 | \tilde{\varphi}(x) | 0 \rangle_J, \quad (2.4)$$

enquanto a ação efetiva, $\Gamma[\varphi_{cl}]$, desenvolve um mínimo absoluto para $\varphi_{cl} = \langle 0 | \tilde{\varphi} | 0 \rangle_{J=0}$.

O cálculo perturbativo da ação efetiva através de correções quânticas à equação (2.3) deve ser feito partindo-se de um vácuo estável. Para tal, substituímos $\tilde{\varphi} = \varphi_{cl} + \varphi$ em

(2.3) e expandimos a expressão em torno de φ_{cl} . Como resultado, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{1}{2} g \varphi_{cl}^2 + \frac{1}{24} f \varphi_{cl}^4 \right) \varphi^2 + \frac{1}{3!} \left(g \varphi_{cl} + \frac{1}{6} f \varphi_{cl}^3 \right) \varphi * \varphi * \varphi \\ & + \frac{1}{4!} \left(g + \frac{1}{2} f \varphi_{cl}^2 \right) \varphi * \varphi * \varphi * \varphi + \frac{1}{5!} (f \varphi_{cl}) \varphi * \varphi * \varphi * \varphi * \varphi + \frac{1}{6!} f \varphi * \varphi * \varphi * \varphi * \varphi * \varphi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde o termo linear foi omitido por seu coeficiente ser a equação clássica de campos. A fim de simplificar as manipulações, utilizaremos a notação

$$M^2 = m^2 + \frac{1}{2} g \varphi_{cl}^2 + \frac{1}{24} f \varphi_{cl}^4, \quad A = g \varphi_{cl} + \frac{1}{6} f \varphi_{cl}^3, \quad B = g + \frac{1}{2} f \varphi_{cl}^2, \quad C = f \varphi_{cl}. \quad (2.6)$$

A ação efetiva Euclideanizada no formalismo funcional é dada pela expressão [69, 70]

$$\Gamma[\varphi_{cl}] = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_{cl}) + \frac{\hbar}{2} \ln \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi \partial \varphi} \right) - (\text{diagramas conexos 1 PI}). \quad (2.7)$$

Uma vez que a simetria translacional é adotada como uma propriedade do modelo, a estrutura do vácuo da teoria pode ser determinada estudando-se $\Gamma[\varphi_{cl}]$ para o campo clássico constante, $\varphi_{cl} = \phi$. O estudo reduz-se, portanto, à análise do potencial efetivo, que é definido por [69, 70]

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \frac{\Gamma[\varphi_{cl}]}{\Omega} \Big|_{\varphi_{cl}=\phi} \\ = & V^{(0)}(\phi) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(k^2 + M^2) - \left\langle \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{L}_I(\varphi, \phi) \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde Ω é o volume do espaço-tempo e $\mathcal{L}_I(\varphi, \phi)$ é a parte de interação do Lagrangeano. O primeiro termo na equação (2.8) é o potencial clássico. Este é dado pelo termo de interação da ação sem as contribuições cinéticas originárias do produto Moyal,

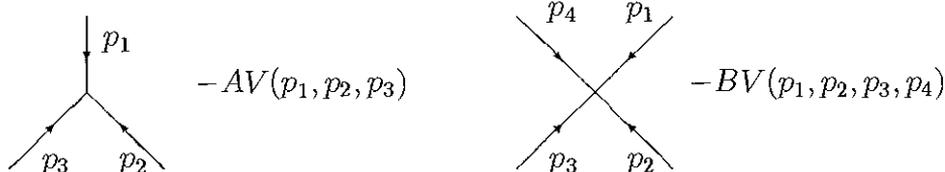
$$V^{(0)}(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 + \frac{f}{6!}\phi^6. \quad (2.9)$$

O segundo termo, contendo o logaritmo, é a contribuição de todos os gráficos com um laço fechado, enquanto o terceiro é a soma de correções de laços a ordens mais elevadas, sendo calculado tomando-se o valor esperado de

$$T \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{L}_I(\varphi, \phi) \right), \quad (2.10)$$

com o uso de regras de Feynman convencionais.

Os vértices relevantes para o cálculo a dois laços do potencial efetivo apresentam-se desenhados abaixo:



2.2 Cálculo do Potencial Efetivo a Dois Laços

A fim de simplificar os cálculos, empregaremos a regularização analítica [71] e utilizaremos um sistema de unidades onde $\hbar = 1$. A correção quântica de um laço pode ser computada utilizando-se o procedimento abaixo:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\phi) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(k^2 + M^2) = \frac{1}{2} \int d(M^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2)^{(1+\epsilon)}} \\ &= \frac{1}{8\pi^{3/2}} \frac{M^{(-2\epsilon+3)} \Gamma(\epsilon - \frac{1}{2})}{3 - 2\epsilon \Gamma(\epsilon + 1)} = -\frac{M^3}{12\pi} + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.11)$$

A correção a duas ordens de perturbação é a soma dos diagramas de *double-bubble* e *sunset* em suas versões planar e não-planar (para detalhes sobre diagramas planares e não-planares veja [23, 51]). Nos diagramas planares, pode-se mostrar que as fases da

equação (2.2) sempre se anulam [23], enquanto nos diagramas não-planares, elas permanecem. Verificaremos essa propriedade para o modelo em questão fazendo a contagem dos fatores de simetria dos diagramas e utilizando a equação (2.2). Começamos pelo diagrama *double-bubble*. Este possui apenas um vértice e, portanto, o fator de fase correspondente em (2.2) é do tipo $V(p, k, -k, -p)$. De todos os seis possíveis ordenamentos (módulo permutações cíclicas) do conjunto $\{p, k, -k, -p\}$, quatro são planares e acabam por anular o fator de fase em (2.2), enquanto os outros dois são não-planares e geram fatores de fase $\exp(ik_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu)$ ou $\exp(-ik_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu)$. Afora o fator de simetria $1/8$ presente na teoria comutativa, o diagrama *double-bubble* planar deve, portanto, aparecer multiplicado por um fator de peso $4/6 = 2/3$. Aplicando as regras de Feynman, verificamos que esse diagrama é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Diagrama} &= D_{1P} = -\frac{2B}{3 \cdot 8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2)(p^2 + M^2)} \\
&= -\frac{2B}{3 \cdot 8} \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \left(\int \frac{e^{-\alpha M^2}}{\alpha^{3/2-\epsilon}} d\alpha \right)^2 = -\frac{BM^2}{192\pi^2} + O(\epsilon). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

O cálculo do diagrama *sunset* em sua versão planar pode ser feito seguindo-se o mesmo procedimento acima descrito. Como esse diagrama possui dois vértices, no cálculo do fator de fase aparecem produtos do tipo $V(p, k, -p-k)V(-k, -p, k+p)$. Cada um dos vértices admite dois ordenamentos (módulo permutações cíclicas), o que totaliza quatro possibilidades. Destas, duas anulam a fase em (2.2), enquanto as restantes geram fatores de fase $\exp(ik_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu)$ ou $\exp(-ik_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu)$. Portanto, afora o fator de simetria $1/12$ presente na teoria comutativa, o diagrama *sunset* planar deve aparecer multiplicado por um peso $2/4 = 1/2$. Assim, podemos escrever expressão para o *sunset* planar como

$$\begin{aligned}
\bigcirc &= D_{2P} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{12} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2)(p^2 + M^2)[(p+k)^2 + M^2]} \\
&= \frac{1}{2} \frac{A^2}{12} \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \int_0^\infty \alpha^2 d\alpha \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{e^{-\alpha M^2}}{\alpha [x(1-x) + y(1-y) - xy]^{1/2}} \\
&= \frac{A^2}{768\pi^2} \Gamma(\epsilon) \left(\frac{M}{\bar{\mu}} \right)^{-2\epsilon} = \frac{A^2}{768\pi^2 \epsilon} - \frac{A^2}{768\pi^2} \ln \left(\frac{M^2}{\bar{\mu}^2} e^\gamma \right) + O(\epsilon), \quad (2.13)
\end{aligned}$$

onde $\bar{\mu}$ é uma constante arbitrária com dimensão de massa e γ é a constante de Euler. A fim de eliminar a dependência explícita do potencial efetivo nos termos polares em $1/\epsilon$, é conveniente fazermos as seguintes redefinições:

$$m_R^2 = m^2 - \frac{g^2}{384\pi^2 \epsilon}, \quad g_R = g - \frac{fg}{96\pi^2 \epsilon}, \quad f_R = f - \frac{5f^2}{192\pi^2 \epsilon}. \quad (2.14)$$

No que segue, assumiremos que parâmetros do modelo são definidos pelas equações (2.14) e omitiremos os R 's da notação. A expressão para D_{2P} pode, portanto, ser reescrita como

$$D_{2P} = -\frac{A^2}{768\pi^2} \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right), \quad (2.15)$$

onde $\mu^2 = \bar{\mu}^2 e^{-\gamma}$.

As contribuições restantes ao potencial efetivo são dadas pelas versões não-planares dos diagramas (2.12) e (2.13). Conforme verificamos antes, estas contêm fatores de fase do tipo $\exp(ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu)$ ou $\exp(-ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu)$. É justamente a oscilação introduzida por esses fatores exponenciais imaginários que controla as divergências que aparecem no regime ultravioleta da teoria. Dentro das integrais de momenta dos diagramas, as contribuições correspondentes a $\exp(ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu)$ e $\exp(-ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu)$ são as mesmas. Conseqüentemente, no cálculo diagramático podemos considerar todas as fases como sendo $\exp(ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu)$. Diante desse fato, concluímos que as expressões correspondentes aos diagramas *double-bubble* e *sunset* não-planares são, respectivamente,

$$D_{1NP} = -\frac{1}{3} \frac{B}{8} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu}}{(k^2 + M^2)(p^2 + M^2)} = -\frac{1}{3} \frac{B}{8} I_1. \quad (2.16)$$

e

$$D_{2NP} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{12} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu}}{(k^2 + M^2)(p^2 + M^2)[(p+k)^2 + M^2]} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{12} I_2, \quad (2.17)$$

onde os pesos $1/3$ e $1/2$ foram introduzidos levando-se em conta o resultado da contagem dos ordenamentos possíveis entre as pernas internas feita anteriormente.

Utilizando as parametrizações de Feynman e Schwinger, podemos escrever I_1 como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dw \int_0^\infty d\alpha \int \frac{d^3 k d^3 p}{(2\pi)^6} \alpha e^{ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu} e^{-\alpha[(k^2 - p^2)w + p^2 + M^2]} \\ &= \int_0^1 dw \int_0^\infty d\alpha \int \frac{d^3 l d^3 p}{(2\pi)^6} \alpha e^{-\alpha w l^2} e^{-(1/4\alpha w) \tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu} e^{-\alpha(1-w)p^2} e^{-\alpha M^2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $\tilde{p}^\mu = \theta^{\mu\nu} p_\nu$ e $l^\mu = k^\mu - (i/2\alpha w) \theta^{\mu\nu} p_\nu$. No referencial definido por (2.1), I_1 é dada por

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dw \int_0^\infty d\alpha \int \frac{d^3 l d^3 p}{(2\pi)^6} \alpha e^{-\alpha w l^2} e^{-(\theta^2/4\alpha w)(p_1^2 + p_2^2)} e^{-\alpha(1-w)(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2)} e^{-\alpha M^2} \\ &= \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\alpha \int_0^1 dw \frac{e^{-\alpha M^2}}{\left(\alpha^2 w^{3/2} (1-w)^{3/2} + w^{1/2} (1-w)^{1/2} \frac{\theta^2}{4}\right)} \\ &= \frac{M^2 [H_0(\theta M^2) - Y_0(\theta M^2)]}{32\pi \theta M^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Assim temos

$$D_{1NP} = -\frac{BM^2 [H_0(\theta M^2) - Y_0(\theta M^2)]}{768\pi \theta M^2}, \quad (2.20)$$

onde $H_0(x)$ é uma função de Struve e $Y_0(x)$ é uma função de Bessel de segunda espécie [72]. Utilizando as parametrizações de Feynman e Schwinger, podemos escrever I_2 como

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty \alpha^2 d\alpha \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^3k d^3p}{(2\pi)^6} e^{-\alpha(1-x)p^2} e^{-\alpha(1-y)k^2} e^{-2\alpha(1-x-y)k_\mu p^\mu + ik_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu} e^{-\alpha M^2} \\
&= \int_0^\infty \alpha^2 d\alpha \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^3l d^3p}{(2\pi)^6} e^{-\alpha(1-x)p^2} e^{-\alpha(1-y)l^2} \\
&\quad \times e^{-[1/4\alpha(1-y)][-4\alpha^2(1-x-y)^2 p^2 + \tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu]} e^{-\alpha M^2}, \quad (2.21)
\end{aligned}$$

onde $l^\mu = k^\mu - [i/2\alpha(1-y)][2i(1-x-y)\alpha p^\mu + \theta^{\mu\nu} p_\nu]$. Após simplificada, (2.21) adquire a forma

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\beta \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\beta e^{-\beta}}{[x(1-x) + y(1-y) - xy]^{1/2}} \\
&\quad \times \frac{1}{\{[x(1-x) + y(1-y) - xy]\beta^2 + \frac{\theta^2 M^4}{4}\}}, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

onde $\beta = \alpha M^2$. A integral (2.22) é difícil de ser resolvida analiticamente. Entretanto, é fácil mostrar que a contribuição proveniente dessa integral é finita e desprezível se comparada com a que vem de I_1 . A finitude de I_2 pode ser verificada a partir da desigualdade

$$\begin{aligned}
I_2(\theta M^2) &\leq \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \int_0^\infty d\alpha \int_0^1 dx \frac{\alpha e^{-\alpha M^2}}{[x(1-x)]^{1/2} [x(1-x)\alpha^2 + \frac{\theta^2}{4}]} \\
&= -\frac{d}{dM^2} I_1 = \frac{1}{32\pi} [H_1(\theta M^2) - Y_1(\theta M^2)] - \frac{1}{16\pi^2}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Expandindo (2.22) em série de θM^2 , podemos determinar a dependência de I_2 em θ como sendo

$$I_2 \sim \ln(\theta^2 M^4) + O(1). \quad (2.24)$$

Do mesmo modo, a partir de (2.19), podemos escrever

$$I_1 = -\frac{M^2}{32\pi^2\theta M^2} \ln\left(\frac{\theta^2 M^4}{4} e^{2\gamma}\right) + O(1). \quad (2.25)$$

Portanto, quando θ é suficientemente pequeno, a contribuição dominante vem claramente de I_1 . As contribuições provenientes de I_2 , bem como da correção de um laço, podem ser descartadas. Dentre todas as contribuições que vêm de partes distintas da proveniente de D_{1NP} , conservaremos apenas a parte clássica, pois esta é importante por ser dominante quando ϕ é grande. Assim, no regime onde θ é pequeno, o potencial efetivo pode ser aproximado por²

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 + \frac{f}{6!}\phi^6 + \frac{BM^2 H_0(\theta M^2) - Y_0(\theta M^2)}{768\pi \theta M^2}. \quad (2.26)$$

2.3 Análise do Potencial

2.3.1 Contribuição Clássica

Antes de estudar o potencial efetivo corrigido a dois laços, é interessante fazermos uma breve revisão das propriedades de sua contribuição clássica [73]. Para que o potencial admita um mínimo absoluto, é necessário que $f > 0$. Ao fazer a análise do vácuo, é interessante considerarmos o parâmetro f como fixo, variando apenas m^2 e g . As quatro possibilidades para variação desses parâmetros são: (i) $m^2 \geq 0$ e $g \geq 0$, (ii) $m^2 \geq 0$ e $g < 0$, (iii) $m^2 < 0$ e $g \geq 0$, e (iv) $m^2 < 0$ e $g < 0$.

A figura 2.1 apresenta a forma do potencial efetivo na aproximação clássica para as quatro possibilidades nas linhas grossas contínuas dos gráficos. No primeiro caso [fig.

²Observe que, quando $\theta \rightarrow 0$, a contribuição não-planar comporta-se como $\ln(\Lambda_{eff}^2/M^2)\Lambda_{eff}^2/M^2$, ao invés de Λ_{eff}^2/M^2 . Tal comportamento pode ser atribuído ao fato de que $\theta^{0i} = 0$, o que significa que o corte ultravioleta efetivo se faz ausente no modo p^0 .

2.1(a)], não há SSB e o potencial apresenta um mínimo na origem. Já no segundo caso, não há SSB se $m^2 > 5g^2/8f$ [fig. 2.1(b)], mas esta ocorre se $m^2 < 5g^2/8f$ [fig. 2.1(c)], sendo caracterizada por um mínimo local na origem e dois mínimos globais simetricamente dispostos em torno deste. No casos (iii) e (iv) [fig. 2.1(d)], ocorre SSB com um máximo na origem e dois mínimos locais simetricamente dispostos em torno do mesmo.

2.3.2 O Potencial Corrigido a Dois Laços

Uma avaliação precisa do impacto nos efeitos da não-comutatividade nas condições de SSB pode ser feita comparando-se a aproximação clássica com as versões comutativa e não-comutativa do potencial efetivo corrigidas a dois laços. A versão comutativa a dois laços pode ser obtida somando-se as equações (2.9) e (2.11), e os diagramas planares (2.12) e (2.13) com os seus respectivos pesos, $2/3$ e $1/2$, redefinidos como sendo 1. A expressão obtida para o potencial efetivo é

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 + \frac{f}{6!}\phi^6 - \frac{M^3}{12\pi} + \frac{BM^2}{128\pi^2} + \frac{A^2}{384\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right). \quad (2.27)$$

Na figura 2.1 podemos visualizar o potencial clássico (linhas grossas contínuas) em contraste com as versões corrigidas a dois laços não-comutativa (linhas tracejadas) e comutativa (linhas finas contínuas) para os casos (i)-(iv).

Em todos os casos, podemos verificar que as correções de dois laços na versão comutativa têm como efeito provocar pequenos desvios nos mínimos, baixando suas energias. As correções não-comutativas, por outro lado, atuam modificando apreciavelmente a forma do potencial efetivo. Observe que as linhas tracejadas e as linhas finas contínuas aparecem interrompidas nos casos (ii)-(iv). Essa interrupção ocorre devido ao fato de as correções ao potencial efetivo não serem definidas para valores de ϕ para os quais $M^2 < 0$. Portanto, apenas com a correção de dois laços, não é possível obtermos uma visão global do potencial

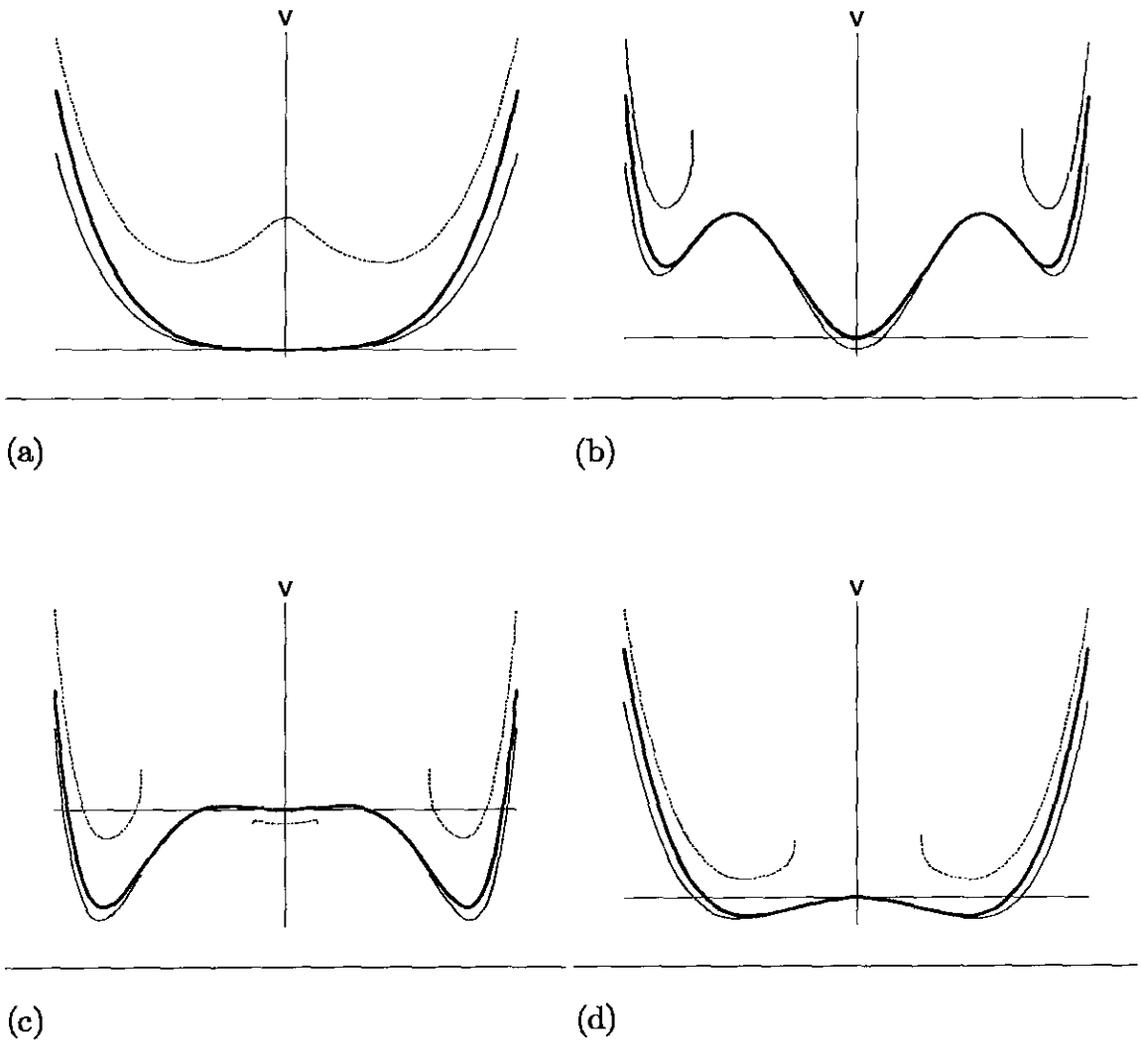


Figura 2.1: O comportamento típico do potencial efetivo, $V(\phi)$, na aproximação clássica (linhas grossas contínuas) em comparação com as versões comutativa (linhas finas contínuas) e não-comutativa (linhas tracejadas) corrigidas a dois laços. (a) Caso (i): $m^2 \geq 0, g \geq 0$. (b) Caso (ii): $m^2 \geq 0, g < 0$ ($m^2 > 5g^2/8f$). (c) Caso (iii): $m^2 \geq 0, g < 0$ ($m^2 < 5g^2/8f$). (d) Casos (iii), (iv): $m^2 < 0, g \geq 0, g < 0$.

em todos os casos. Como as correções à aproximação clássica podem ser grandes o suficiente para deslocar os mínimos de suas posições originais ou alterar a própria condição de mínimo, não é possível determinar de maneira conclusiva a posição do mínimo global nos casos (ii)-(iv). Devido a esse fato, o caso mais interessante a ser discutido encontra-se na figura 2.1(a), onde as correções quânticas são bem definidas para todos os valores de ϕ e a SSB aparece por influência da não-comutatividade. De agora em diante, concentraremos nossa atenção nesse caso.

As condições para SSB no caso (i) podem ser determinadas estudando-se a concavidade do potencial efetivo na origem. A derivada segunda tomada nesse ponto é dada por

$$\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = m^2 + \frac{1}{768\pi\theta} \left\{ f [H_0(m^2\theta) - Y_0(m^2\theta)] - g^2\theta \left[H_1(m^2\theta) - Y_1(m^2\theta) - \frac{2}{\pi} \right] \right\}. \quad (2.28)$$

Observe que m^2 e o primeiro termo dentro dos colchetes são positivos. O segundo termo contendo $g^2\theta$, por outro lado, é negativo e contribui para modificar a concavidade do potencial. Dado um valor fixo de θ , é fácil verificar, graças ao comportamento das funções $Y_0(m^2\theta) \sim \ln(m^2\theta)$ e $Y_1(m^2\theta) \sim -1/m^2\theta$ para valores do argumento próximos de $m^2\theta = 0$, que, para g suficientemente grande e m^2 e f suficientemente pequenos, pode ocorrer uma inversão da concavidade.

Embora a formulação empregada neste trabalho seja de temperatura zero, é possível especular a respeito da influência da temperatura finita através da sua manifestação nos parâmetros físicos. Uma variação de temperatura poderia ser incluída de maneira indireta no presente formalismo, por exemplo, através de uma variação do parâmetro de massa. Variando-se m^2 mantendo θ fixo, é fácil verificar que a SSB gerada é uma transição de fase de segunda ordem.³

³A definição que estamos considerando para transição de fase é a de Landau. Segundo tal definição, uma transição é de primeira ordem se o parâmetro de ordem (m^2) é descontínuo no ponto de transição e de segunda ordem se é contínuo. Observe que, para $n > 2$, a definição de Landau difere da definição

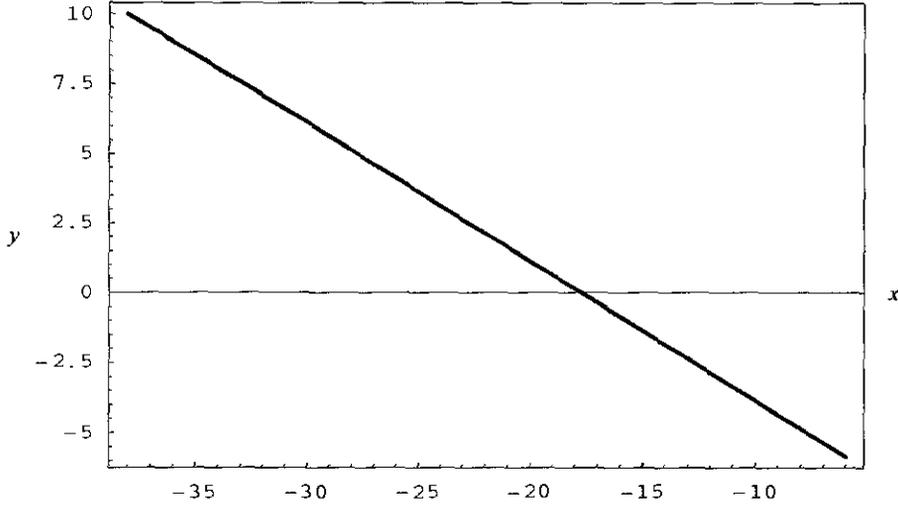


Figura 2.2: $y = \log_{10} m_T^2$ (GeV^2) em função de $x = \log_{10} \theta$ (GeV^{-2}) para $f = 4.4 \times 10^{-27}$ e $g = 8.2 \times 10^{-8}$ GeV .

A determinação da dependência do ponto de transição, m_T^2 , em função de θ pode ser feita resolvendo-se $d^2V/d\phi^2|_{\phi=0} = 0$ numericamente para uma faixa grande de valores de θ . Na figura 2.2 apresentamos $y = \log_{10} m_T^2$ como função de $x = \log_{10} \theta$ para valores fixados de f e g . Como, por hipótese, estamos considerando θ pequeno, uma aproximação analítica de m_T^2 pode ser obtida expandindo-se o lado direito de (2.28) em série de θ :

$$\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = m^2 - \frac{g^2}{384\pi^2 m^2 \theta} - \frac{f}{384\pi^2 \theta} \ln \left(\frac{m^2 \theta}{2} e^\gamma \right) + \frac{g^2}{384\pi^2} + \frac{f}{384\pi^2} m^2 + O(\theta). \quad (2.29)$$

Descartando os últimos três termos no lado direito de (2.29) e resolvendo $d^2V/d\phi^2|_{\phi=0} = 0$, obtemos

$$m_T^2 = \frac{g}{\sqrt{384\pi^2 \theta}}. \quad (2.30)$$

de Ehrenfest de uma transição de n -ésima ordem, segundo a qual $\partial^n V / \partial (m^2)^n$ é a mais baixa derivada descontínua.

A expressão (2.30) reproduz o resultado da figura 2.2 de maneira bastante precisa. No modelo φ^6 comutativo, $m_T^2 = 0$. Logo, se a razão $g/\sqrt{\theta}$ assumir um valor elevado, a faixa de valores de m^2 para os quais ocorre uma SSB induzida pela não-comutatividade, $0 < m^2 < m_T^2$, pode ser bastante grande.

Capítulo 3

Cosmologia Clássica Comutativa e Não-Comutativa

Nos últimos anos, vários trabalhos foram realizados no intuito de investigar o possível papel desempenhado pela não-comutatividade no cenário cosmológico em uma grande variedade de contextos. Entre os temas abordados, estão cosmologia Newtoniana [74], cosmologia inflacionária e teoria de perturbações cosmológicas [75], gravitação não-comutativa [76] e cosmologia quântica [77]. A cosmologia quântica, em particular, merece destaque por ser uma arena interessante para especulação sobre uma possível conexão entre não-comutatividade e gravitação quântica.

Neste capítulo e no que segue realizaremos uma investigação do possível papel da não-comutatividade no cenário cosmológico. Conforme explicamos na introdução, será a oportunidade de trabalharmos com um esquema de aproximação no qual temos acesso ao setor não-perturbativo das teorias de campos. Tal acesso é possível na aproximação de rede ou através da adoção de um *ansatz* com um alto grau de simetria para as soluções das equações de campo. Motivados por evidências observacionais, acreditamos que a adoção um *ansatz* de universo homogêneo (modelo de mini-superespaço) deva ser o melhor esquema de aproximação, fornecendo uma solução relevante para a cosmologia.

Talvez o maior problema da gravitação quântica seja a compreensão do comportamento

do espaço-tempo (caso tal conceito tenha um significado) na escala de Planck. Em um passado muito remoto, quando o universo era pequeno e muito aquecido, mesmo quando seu comprimento característico era maior que o comprimento de Planck, a não-comutatividade pode ter desempenhado um papel relevante na sua evolução [77]. O objetivo de nossa investigação será explorar essa possibilidade fazendo um estudo comparativo da evolução de um modelo de universo em quatro diferentes cenários: clássico comutativo, clássico não-comutativo, quântico comutativo e quântico não-comutativo. Como objeto de estudo, escolhemos o universo de Kantowski-Sachs [78], que é um dos modelos anisotrópicos mais conhecidos. Várias investigações envolvendo o universo de Kantowski-Sachs foram realizadas em uma grande variedade de contextos, como. p. ex., cosmologia de branas [79], cosmologia com matéria de campo escalar e cosmologia quântica [80, 81].¹ Aqui e no capítulo que segue, adotaremos a linha de investigação proposta em [82].

3.1 O Universo de Kantowski-Sachs na Formulação Hamiltoniana

Antes darmos início ao nosso estudo, façamos uma breve revisão dos aspectos essenciais do formalismo canônico da gravitação e do universo de Kantowski-Sachs. A formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral é usualmente expressa no formalismo de ADM [84], onde o espaço-tempo é descrito em uma linguagem (3+1) dimensional. Nas variáveis de ADM, o elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = (N_i N^i - N^2) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

¹Além de ser importante para a cosmologia, é bem possível que o modelo de Kantowski-Sachs seja também relevante na descrição de buracos negros. A geometria de Kantowski-Sachs possui as mesmas simetrias da região interior de métrica de Kruskal estendida, que representa o estágio final de evolução de um buraco negro isotrópico quando a contribuição da matéria é desprezível. De fato, existem trabalhos que propõem uma possível conexão entre buracos negros quânticos, buracos de verme quânticos e a métrica de Kantowski-Sachs [83].

onde N representa a função lapso, N^i é o vetor de deslocamento e h_{ij} é a métrica de uma superfície mergulhada no espaço-tempo. A dinâmica do espaço-tempo é descrita em termos da evolução de h_{ij} no superespaço, o espaço de todas as tri-geometrias (para detalhes veja [85]). O Hamiltoniano da Relatividade Geral no formalismo de ADM é dado por²

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N_j\mathcal{H}^j), \quad (3.2)$$

onde

$$\mathcal{H} = G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - h^{1/2}R^{(3)}, \quad \mathcal{H}^j = 2D_i\Pi^{ij}. \quad (3.3)$$

No sistema de unidades adotado, $\hbar = c = 16\pi G = 1$. $R^{(3)}$ é o escalar de curvatura intrínseca das hipersuperfícies espaciais, D_i é a derivada covariante em relação a h_{ij} e h é o determinante de h_{ij} . O momento Π_{ij} , conjugado canônico de h_{ij} , e a métrica de DeWitt, G_{ijkl} , são dados por

$$\Pi_{ij} = -h^{1/2} (K_{ij} - h_{ij}K), \quad (3.4)$$

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-1/2} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \quad (3.5)$$

onde $K_{ij} = -(\partial_t h_{ij} - D_i N_j - D_j N_i)/(2N)$ é a segunda forma fundamental. O elemento de linha de Kantowski-Sachs é [78]

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + X^2(t) dr^2 + Y^2(t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.6)$$

Na parametrização de Misner, a métrica (3.6) é escrita da seguinte forma [77]:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + e^{2\sqrt{3}\beta(t)} dr^2 + e^{-2\sqrt{3}\beta(t)} e^{-2\sqrt{3}\Omega(t)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.7)$$

²Estamos restringindo nossas considerações à gravitação no vácuo, pois esse é o caso de interesse no presente trabalho.

Utilizando as equações (3.2) e (3.3), podemos reescrever o Hamiltoniano do universo de Kantowski-Sachs para a métrica (3.7) como

$$H = N\mathcal{H} = N \exp\left(\sqrt{3}\beta + 2\sqrt{3}\Omega\right) \left[-\frac{P_\Omega^2}{24} + \frac{P_\beta^2}{24} - 2 \exp\left(-2\sqrt{3}\Omega\right)\right]. \quad (3.8)$$

Um boa caracterização da evolução da métrica de Kantowski-Sachs (3.7) é obtida estudando-se a expansão volumétrica, $\Theta = V_{;\alpha}^\alpha$, referente a um observador comoviente utilizando o tempo próprio ($V^\alpha = \delta_0^\alpha/N$) e o quadrado do fator de forma, $\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/2$, onde $\sigma_{\alpha\beta} = (h_\alpha^\mu h_\beta^\nu + h_\beta^\mu h_\alpha^\nu) V_{\mu;\nu}/2 - \Theta h_{\alpha\beta}/3$. O ponto-e-vírgula denota derivada covariante quadridimensional, e $h_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu + V^\mu V_\alpha$ é o projetor ortogonal a V^α [86]. A partir da expansão volumétrica, uma escala de comprimento característica, l , pode ser definida por $\Theta = 3\dot{l}/(lN)$. No calibre $N = 24 \exp(-\sqrt{3}\beta - 2\sqrt{3}\Omega)$, a expansão volumétrica, o fator de forma e o volume característico, $l^3(t)$, calculados a partir das expressões acima e das equações (3.6) e (3.7), são dados por

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \frac{1}{N} \left(\frac{\dot{X}}{X} + 2\frac{\dot{Y}}{Y} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{24} \left(\dot{\beta}(t) + 2\dot{\Omega}(t) \right) \exp\left(\sqrt{3}\beta(t) + 2\sqrt{3}\Omega(t)\right), \\ \sigma(t) &= \frac{1}{N\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{Y}}{Y} \right) = \frac{1}{24} \left(2\dot{\beta}(t) + \dot{\Omega}(t) \right) \exp\left(\sqrt{3}\beta(t) + 2\sqrt{3}\Omega(t)\right), \quad (3.9) \\ l^3(t) &= X(t) Y^2(t) = \exp\left(-\sqrt{3}\beta(t) - 2\sqrt{3}\Omega(t)\right). \end{aligned}$$

3.2 O Modelo Clássico Comutativo

Para que possamos distinguir com clareza as manifestações dos efeitos quânticos das alterações atribuídas à não-comutatividade em nosso estudo comparativo, é conveniente

considerarmos primeiro a versão clássica não-comutativa do universo de Kantowski-Sachs. Os parênteses de Poisson para as variáveis do espaço de fase clássico são

$$\{\Omega, P_\Omega\} = 1, \quad \{\beta, P_\beta\} = 1, \quad \{P_\Omega, P_\beta\} = 0, \quad \{\Omega, \beta\} = 0. \quad (3.10)$$

Para a métrica (3.7), o vínculo super-Hamiltoniano $\mathcal{H} \approx 0$ fica reduzido a

$$\mathcal{H} = \xi h \approx 0, \quad (3.11)$$

onde

$$\xi = \frac{1}{24} \exp\left(\sqrt{3}\beta + 2\sqrt{3}\Omega\right), \quad h = -P_\Omega^2 + P_\beta^2 - 48 \exp\left(-2\sqrt{3}\Omega\right) \approx 0. \quad (3.12)$$

As equações de movimento das variáveis do espaço de fase, Ω , P_Ω , β e P_β são

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= N \{\Omega, \mathcal{H}\} = -2P_\Omega, \\ \dot{P}_\Omega &= N \{P_\Omega, \mathcal{H}\} = -96\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}\Omega}, \\ \dot{\beta} &= N \{\beta, \mathcal{H}\} = 2P_\beta, \\ \dot{P}_\beta &= N \{P_\beta, \mathcal{H}\} = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde utilizamos o vínculo $h \approx 0$ e fixamos o calibre $N = \xi^{-1} = 24 \exp(-\sqrt{3}\beta - 2\sqrt{3}\Omega)$. De agora em diante, inclusive no capítulo sobre cosmologia quântica, restringiremos as nossas considerações a esse calibre. As soluções do sistema (3.13) para as variáveis $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ são

$$\Omega(t) = \frac{\sqrt{3}}{6} \ln \left\{ \frac{48}{P_{\beta_0}^2} \cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right\}, \quad (3.14)$$

$$\beta(t) = 2P_{\beta_0} (t - t_0) + \beta_0.$$

Utilizando as equações (3.9) e (3.14), podemos calcular

$$\begin{aligned}
\Theta(t) &= -\frac{4\sqrt{3}}{P_{\beta_0}} \left\{ \cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] + \sinh \left[4\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right\} \\
&\quad \times \exp \left[\sqrt{3} (2P_{\beta_0} (t - t_0) + \beta_0) \right], \\
\sigma(t) &= \frac{2}{P_{\beta_0}} \left\{ 4 \cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] + \sinh \left[4\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right\} \\
&\quad \times \exp \left[\sqrt{3} (2P_{\beta_0} (t - t_0) + \beta_0) \right], \\
l^3(t) &= \frac{P_{\beta_0}^2}{48} \operatorname{sech}^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \exp \left[-\sqrt{3} (2P_{\beta_0} (t - t_0) - \beta_0) \right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

A partir das expressões (3.15), podemos observar que a expansão volumétrica, $\Theta(t)$, é sempre decrescente, passando por zero em $t = t_0 - \sqrt{3} \ln(3) / 12P_{\beta_0}$.

O volume característico, $l^3(t)$, parte do zero em $t = -\infty$, cresce até atingir o valor $l_{\max}^3 = 3\sqrt{3}P_{\beta_0}^2 \exp[-\sqrt{3}\beta_0] / 4$, no tempo $t = t_0 - \sqrt{3} \ln(3) / 12P_{\beta_0}$, e depois decresce, indo para zero³ em $t = \infty$. Estudando a evolução do fator de forma, constatamos que o universo parte de um estado inicial altamente anisotrópico, atinge uma configuração de anisotropia mínima, e retorna à condição de alta anisotropia. O comportamento típico das grandezas $\Theta(t)$, $\sigma(t)$ e $l^3(t)$ pode ser conferido nas curvas grossas dos gráficos das figuras 3.1(a), (b), e (c).

3.3 O Modelo Clássico Não-Comutativo

Verificaremos agora as implicações que uma não-comutatividade clássica pode ter para o modelo de Kantowski-Sachs. Esta pode ser introduzida no mini-superespaço preservando-se o Hamiltoniano (3.8) e deformando-se os parênteses de Poisson das variáveis Ω e β em

³Pode-se mostrar que as singularidades de $l^3(t)$ que aparecem em $t = \pm\infty$ correspondem às singularidades atingidas por esta quantidade em valores finitos do tempo cósmico.

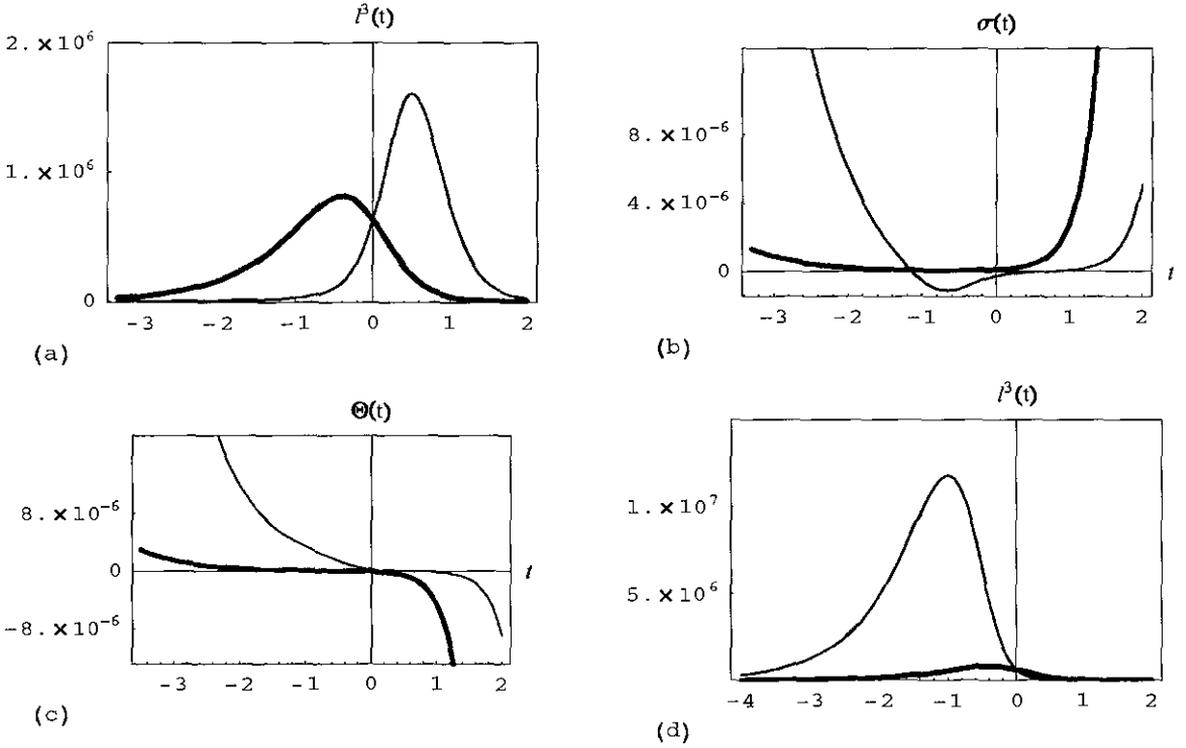


Figura 3.1: O comportamento típico do volume característico $l^3(t)$, módulo de expansão volumétrica $\Theta(t)$, e fator de forma $\sigma(t)$ nas versões comutativa e não-comutativa do universo clássico de Kantowski-Sachs. As condições iniciais escolhidas são $\beta_0 = -11, P_{\beta_0} = 2/5, t_0 = 0$. Nos gráficos (a), (b) and (c) : $\theta = 0$ (linhas grossas) and $\theta = 5$ (linhas finas). No gráfico (d) : $\theta = 0$ (linha grossa) e $\theta = -5$ (linha fina).

(3.10):

$$\{\Omega, P_\Omega\} = 1, \quad \{\beta, P_\beta\} = 1, \quad \{P_\Omega, P_\beta\} = 0, \quad \{\Omega, \beta\} = \theta. \quad (3.16)$$

Na física clássica tal deformação representa uma estrutura simplética consistente com a relação de comutação $[\widehat{\Omega}, \widehat{\beta}] = i\theta$, introduzida por H. Garcia-Compeán *et al* ao conceber a cosmologia quântica não-comutativa [77].⁴

⁴A introdução de uma deformação no parênteses de Poisson das coordenadas de posição, $\{X^i, X^j\} = \Theta^{ij}$, análoga à proposta na equação (3.16), foi adotada em estudos sobre implicações da geometria não-comutativa $[\widehat{X}^i, \widehat{X}^j] = i\Theta^{ij}$ no contexto da física clássica [87]. Entre os resultados obtidos nas aplicações à mecânica, encontra-se a precessão do periélio de Mercúrio [88]. Alguns autores, por outro lado, estudam as implicações da relação $[\widehat{X}^i, \widehat{X}^j] = i\Theta^{ij}$ para a física clássica preservando esta relação de maneira operatorial (veja, p. ex., [4] e referências). Recentemente mostrou-se que tal relação de comutação entre os operadores de posição quantiza o espaço, estabelecendo unidades discretas de área [89]. Tendo em vista esse fato, estamos considerando a não-comutatividade canônica entre operadores como “quântica”

No calibre $N = 24 \exp(-\sqrt{3}\beta - 2\sqrt{3}\Omega)$, as equações de movimento das variáveis Ω , P_Ω , β e P_β , obtidas de modo análogo ao das equações (3.13) são

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= -2P_\Omega, \\ \dot{P}_\Omega &= -96\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}\Omega}, \\ \dot{\beta} &= 2P_\beta - 96\sqrt{3}\theta e^{-2\sqrt{3}\Omega}, \\ \dot{P}_\beta &= 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Como soluções para Ω e β , encontramos

$$\Omega(t) = \frac{\sqrt{3}}{6} \ln \left\{ \frac{48}{P_{\beta_0}^2} \cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right\},\tag{3.18}$$

$$\beta(t) = 2P_{\beta_0} (t - t_0) + \beta_0 - \theta P_{\beta_0} \tanh \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right]$$

O procedimento que acabamos de descrever é o que permite a obtenção das funções $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ da maneira mais direta. Para que possamos mais tarde estabelecer um paralelo entre os procedimentos de cálculo empregados nos contextos clássico e quântico, entretanto, é conveniente apresentarmos também o método das variáveis canônicas auxiliares.

Em vez de calcular diretamente as variáveis físicas $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ a partir de equações de movimento, podemos primeiramente resolver as equações de movimento para as variáveis canônicas auxiliares Ω_c , P_{Ω_c} , β_c e P_{β_c} , definidas por

$$\Omega_c = \Omega + \frac{\theta}{2}P_\beta, \quad \beta_c = \beta - \frac{\theta}{2}P_\Omega, \quad P_{\Omega_c} = P_\Omega, \quad P_{\beta_c} = P_\beta,\tag{3.19}$$

e, então, calcular $\Omega(t)$ e $\beta(t)$. Os parênteses de Poisson para as variáveis canônicas auxiliares são

$$\{\Omega_c, P_{\Omega_c}\} = 1, \quad \{\beta_c, P_{\beta_c}\} = 1, \quad \{P_{\Omega_c}, P_{\beta_c}\} = 0, \quad \{\Omega_c, \beta_c\} = 0.\tag{3.20}$$

e a dos parênteses de Poisson associados como seu “análogo clássico”.

De (3.8) e (3.20), obtemos as equações de movimento para Ω_c , P_{Ω_c} , β_c e P_{β_c} ,

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_c &= -2P_{\Omega_c}, \\
\dot{P}_{\Omega_c} &= -96\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}\Omega}, \\
\dot{\beta}_c &= 2P_{\beta_c} - 48\sqrt{3}\theta e^{-2\sqrt{3}\Omega}, \\
\dot{P}_{\beta_c} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned}
\Omega_c(t) &= \frac{\sqrt{3}}{6} \ln \left\{ \frac{48}{P_{\beta_0}^2} \cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right\} + \frac{\theta}{2} P_{\beta_0}, \\
\beta_c(t) &= 2P_{\beta_0} (t - t_0) + \beta_0 - \frac{\theta}{2} P_{\beta_0} \tanh \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right], \\
P_{\Omega_c}(t) &= -P_{\beta_0} \tanh \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right], \\
P_{\beta_c}(t) &= P_{\beta_0}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Finalmente, de (3.19) e (3.22), encontramos a solução (3.18). Tendo determinado $\Omega(t)$ e $\beta(t)$, podemos calcular as grandezas $\Theta(t)$, $\sigma(t)$ e $l^3(t)$. De (3.9) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\Theta(t) &= \left\{ -\frac{4\sqrt{3}}{P_{\beta_0}} \left(\cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] + \sinh \left[4\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right) + 4\sqrt{3}\theta \right\} \\
&\quad \times \exp \left[\sqrt{3} (2P_{\beta_0}t + \beta_0) - \theta P_{\beta_0} \tanh \left(2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right) \right], \\
\sigma(t) &= \left\{ \frac{2}{P_{\beta_0}} \left(4 \cosh^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] + \sinh \left[4\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \right) - 4\sqrt{3}\theta \right\} \\
&\quad \times \exp \left[\sqrt{3} (2P_{\beta_0}t + \beta_0) - \theta P_{\beta_0} \tanh \left(2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right) \right], \\
l^3(t) &= \frac{P_{\beta_0}^2}{48} \operatorname{sech}^2 \left[2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right] \exp \left[\sqrt{3} (2P_{\beta_0}t + \beta_0) - \theta P_{\beta_0} \tanh \left(2\sqrt{3}P_{\beta_0} (t - t_0) \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Comecemos o nosso estudo comparativo com o caso comutativo analisando a evolução do volume característico. Como pode ser constatado a partir da expressão para $l^3(t)$ em

(3.23), o comportamento singular do universo clássico de Kantowski-Sachs não-comutativo em $t = \pm\infty$ é exatamente o mesmo que o do seu análogo comutativo. A contribuição contendo θ na expressão de $\beta(t)$ em (3.18) não modifica o comportamento de $l^3(t)$ no infinito passado e no infinito futuro. Pelo contrário, a contribuição desse termo é predominante em tempos próximos a $t = t_0$, onde a tangente hiperbólica varia mais rápido. Próximo a esse instante de tempo, os comportamentos de $l^3(t)$, $\Theta(t)$ e $\sigma(t)$ podem diferir apreciavelmente dos comportamentos correspondentes no caso comutativo, o pode ser constatado observando-se as curvas finas nas figuras 3.1(a), (b), e (c).

Enquanto a diferença nos comportamentos de $l^3(t)$ e $\Theta(t)$ é somente quantitativa, em $\sigma(t)$ ela é qualitativa. O universo de Kantowski-Sachs não-comutativo pode trocar suas direções expansivas, tornando-se isotrópico duas vezes antes de sua forma aproximar-se da do análogo comutativo no infinito futuro. Variando as condições iniciais β_0 e P_{β_0} , o desvio em relação ao comportamento comutativo pode tornar-se apreciavelmente grande. Para $\beta_0 = 0$, $P_{\beta_0} = 3$ e $\theta = 5$, por exemplo, temos $l_{\max}^3 \simeq 1,55 \cdot 10^8$, enquanto, para as mesmas condições iniciais, no caso comutativo temos $l_{\max}^3 \simeq 0,24$. Outra propriedade interessante da solução de universo não-comutativo é a sua dependência com o sinal de θ . Na figura 3.1(d), apresentamos o gráfico de $l^3(t)$ com as mesmas condições iniciais adotadas para o gráfico da figura 3.1(a), porém com o sinal de θ invertido. O grande aumento na magnitude e largura do pico de $l^3(t)$ sugere que, dependendo das condições iniciais e do sinal de θ , o desvio em relação ao comportamento comutativo pode ser grande mesmo quando $|\theta|$ é pequeno.

Capítulo 4

Cosmologia Quântica Comutativa e Não-Comutativa

...naked and exposed

To the bareness of what's real

Boundless fantasy, becomes reality...

—de Intrinsic, After Forever

Neste capítulo, introduziremos efeitos quânticos no universo de Kantowski-Sachs empregando a Geometrodinâmica Quântica, que é uma das formulações canônicas da gravitação quântica (para detalhes veja [13, 85, 90] e referências). Como interpretação da teoria quântica, adotaremos a proposta por David Bohm [28, 53, 56, 55]. Antes de entrarmos nos detalhes do modelo, façamos uma breve revisão da gravitação quântica no formalismo de Dirac, comentando os problemas que nos levam a procurar na cosmologia quântica uma interpretação alternativa a da escola de Copenhagen.

De acordo com o formalismo de Dirac, quando quantizamos a Relatividade Geral, os vínculos super-Hamiltoniano, $\mathcal{H} \approx 0$, e de super-momento, $\mathcal{H}^i \approx 0$, passam a ser condições impostas aos possíveis estados do funcional de onda do sistema, resultando nas equações

$$D_j \frac{\delta \Psi[h^{ij}]}{\delta h^{ij}} = 0, \quad (4.1)$$

$$\left(G^{ijkl} \frac{\delta}{\delta h^{ij}} \frac{\delta}{\delta h^{kl}} + h^{1/2} R^{(3)} \right) \Psi[h^{ij}] = 0. \quad (4.2)$$

A equação (4.1) expressa a invariância do funcional de onda sob mudanças de coordenadas nas superfícies espaciais que folheiam o espaço-tempo. A expressão (4.2) é conhecida como equação de Wheeler-DeWitt¹, responsável pela evolução do funcional de onda. Até o presente momento, as implicações dessa equação para a cosmologia quântica ainda estão em discussão. Entre a imensa gama de dificuldades técnicas e conceituais que cercam a cosmologia quântica, estão a questão do tempo e a definição de probabilidade (a equação de Wheeler-DeWitt é do tipo Klein-Gordon, para detalhes veja [85] e referências).

Uma maneira de contornarmos esses problemas é adotando a interpretação de Bohm da teoria quântica. Originalmente criada para a mecânica quântica não-relativista em 1952 [28], a formulação de Bohm foi posteriormente estendida para as teorias quânticas de campos [91, 92, 93] e a gravitação quântica [94, 95], tendo sido empregada em diversos trabalhos de cosmologia quântica. [82], [96]-[99]. Uma das principais motivações para a sua adoção em cosmologia é o fato de ela permitir o estudo da evolução de universos quânticos sem a necessidade da presença de observadores externos. Devido a importância da interpretação de Bohm como instrumento de investigação nesta tese, apresentaremos no que segue uma breve introdução a Geometrodinâmica Quântica Bohmiana, discutindo seus princípios.

4.1 A Gravitação Quântica no Formalismo de Bohm

Na abordagem de Bohm da teoria quântica, uma realidade objetiva é conferida aos sistemas físicos (partículas, campos, cordas, etc). No caso da mecânica quântica não relativista, por exemplo, o sistema físico é composto de partículas que se movem descrevendo

¹Um ordenamento particular está sendo considerado.

trajetórias quânticas no espaço. Uma lei de evolução é atribuída às partículas de acordo com a prescrição

$$p^i = m\dot{x}^i = \text{Re} \left\{ \frac{[\Psi^* (-i\hbar\partial_i) \Psi]}{\Psi^* \Psi} \right\} = \nabla S, \quad (4.3)$$

onde Ψ é a função de onda e S é obtida a partir da decomposição polar $\Psi = A \exp(iS)$.² Da mesma forma que na interpretação de Copenhagen, a função de onda satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi. \quad (4.4)$$

As equações (4.3) e (4.4) especificam completamente a teoria. Sem qualquer outro axioma, todos os fenômenos governados pela mecânica quântica não-relativista, de linhas espectrais e fenômenos de interferência quântica até a teoria de espalhamento e supercondutividade seguem da análise do sistema dinâmico definido por (4.3) e (4.4) [56]. Tal fato é presentemente explorado por uma parcela apreciável da comunidade física, que, independente de acreditar ou não na “realidade” das trajetórias Bohmianas, reconheceu a utilidade destas como um importante instrumento de investigação e caracterização dos processos quânticos. Afora suas aplicações a teoria quântica de campos e gravitação quântica, a interpretação de Bohm e os conceitos dela derivados vêm sendo também empregados com sucesso em diversas outras áreas da física, entre elas: a fenomenologia de partículas [100], a física atômico-molecular e da matéria condensada [101], o caos quântico [102], o estudo da descoerência e dos sistemas dissipativos [103], e a teoria da informação quântica [104, 105].

²Uma discussão concisa sobre a equivalência da mecânica quântica de Bohm com a da escola de Copenhagen, explicando como a equação (4.3) é determinada, pode ser encontrada em [97], onde são apresentadas também aplicações do formalismo de Bohm à cosmologia.

Ao fazer uso do formalismo de Bohm para descrever a evolução da geometria do tri-espaço na gravitação quântica, esperamos que as noções de espaço e de tempo tenham um significado objetivo, da mesma forma que a noção de trajetórias tem na mecânica quântica de Bohm não-relativista [53]. De fato, isso é exatamente o que ocorre na formulação de Bohm da gravitação quântica, onde a lei de evolução da métrica, h_{ij} , do tri-espaço é [96]

$$\Pi_{ij} = -h^{1/2} (K_{ij} - h_{ij}K) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\Psi^* \Psi} \left[\Psi^* \left(-i \frac{\delta}{\delta h^{ij}} \right) \Psi \right] \right\} = \frac{\delta S}{\delta h^{ij}}, \quad (4.5)$$

onde $\Psi[h^{ij}(x)] = A[h^{ij}(x)] \exp(iS[h^{ij}(x)])$. Assim como as equações de movimento e de Schrödinger (4.3) e (4.4) especificam completamente a mecânica quântica, as equações de onda e da tri-métrica h_{ij} , (4.1), (4.2) e (4.5), especificam completamente a gravitação quântica no formalismo canônico.

Uma visão intuitiva do desvio em relação ao comportamento clássico presente em (4.5) pode ser obtida substituindo-se $\Psi = A \exp(iS)$ em (4.2) e separando-se as partes real e imaginária. Como resultado, são obtidas as equações

$$G^{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h^{ij}} \frac{\delta S}{\delta h^{kl}} - h^{1/2} R^{(3)} + Q = 0, \quad (4.6)$$

e

$$G^{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h^{ij}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta h^{kl}} \right) = 0, \quad (4.7)$$

onde

$$Q = -\frac{1}{A} G^{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta h^{ij} \delta h^{kl}}. \quad (4.8)$$

Assim como no exemplo do campo escalar apresentado no Capítulo 1, a expressão (4.6) pode ser interpretada como uma equação de Hamilton-Jacobi quântica. O termo de potencial quântico, Q , é, no caso da Relatividade Geral, responsável pelos efeitos quânticos

presentes na evolução da geometria do tri-espço. No regime em que $Q \rightarrow 0$ em (4.6), a teoria fica reduzida à Relatividade Geral na formulação de Hamilton-Jacobi. É interessante observar que a função de onda não precisa ser normalizável para que a lei de evolução (4.5) seja consistente. Na formulação de Bohm a probabilidade é um conceito derivado a partir da informação disponível a respeito dos elementos de ontologia da teoria.

4.2 O Universo Quântico de Kantowski-Sachs

Voltemos agora nossa atenção para a quantização do universo de Kantowski-Sachs. Devido às dificuldades técnicas que aparecem na resolução da equação funcional (4.2), os cálculos de cosmologia quântica são usualmente baseados na aproximação de mini-superespaço [85]. Esta nos permite acessar um setor não-perturbativo da gravitação quântica, ao preço de congelar infinitos graus de liberdade da teoria. Para tal, um *ansatz* do tipo (3.7) é introduzido em (4.2), e a dependência espacial da métrica é eliminada. Dessa forma, a equação de Wheeler-DeWitt fica reduzida a uma equação do tipo Klein-Gordon. No universo de Kantowski-Sachs, a forma específica dessa equação é³

$$\left[-P_{\Omega}^2 + P_{\beta}^2 - 48 \exp\left(-2\sqrt{3}\Omega\right) \right] \Psi(\Omega, \beta) = 0, \quad (4.9)$$

onde $P_{\Omega} = -i\partial/\partial\Omega$ e $P_{\beta} = -i\partial/\partial\beta$. Uma solução para a equação (4.9) é [77]

$$\Psi_{\nu}(\Omega, \beta) = e^{i\nu\sqrt{3}\beta} K_{i\nu}\left(4e^{-\sqrt{3}\Omega}\right), \quad (4.10)$$

onde $K_{i\nu}$ é uma função de Bessel modificada de segunda espécie [72] e ν é uma constante real. Uma vez dada uma função de onda do universo como, por exemplo, a obtida através da superposição de estados⁴

³Um ordenamento particular está sendo adotado.

⁴Como o índice ν é contínuo, no caso mais geral a soma pode ser substituída por uma integral.

$$\Psi(\Omega, \beta) = \sum_{\nu} C_{\nu} e^{i\nu\sqrt{3}\beta} K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) = R e^{iS}, \quad (4.11)$$

a evolução deste pode ser determinada integrando-se a equação (4.5). Na abordagem de mini-superespaço, a equação (4.5) é equivalente às equações

$$P_{\Omega} = -\frac{1}{2}\dot{\Omega} = \text{Re} \left\{ \frac{[\Psi^* (-i\hbar\partial_{\Omega}) \Psi]}{\Psi^* \Psi} \right\} = \frac{\partial S}{\partial \Omega}, \quad (4.12)$$

$$P_{\beta} = \frac{1}{2}\dot{\beta} = \text{Re} \left\{ \frac{[\Psi^* (-i\hbar\partial_{\beta}) \Psi]}{\Psi^* \Psi} \right\} = \frac{\partial S}{\partial \beta},$$

onde, assim como no capítulo anterior, fixamos o calibre $N = 24 \exp(-\sqrt{3}\beta - 2\sqrt{3}\Omega)$. A equação análoga à Hamilton-Jacobi (4.6) na aproximação de mini-superespaço é

$$-\frac{1}{24} \left(\frac{\partial S}{\partial \Omega} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} \right)^2 - 2e^{-2\sqrt{3}\Omega} + \frac{1}{24R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \Omega^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2} \right) = 0. \quad (4.13)$$

A seguir, consideraremos algumas funções de onda e investigaremos as propriedades dos universos a elas associados empregando o formalismo de trajetórias quânticas.

4.2.1 Caso 1

A função de onda é do tipo (4.10). Como a função Bessel $K_{i\nu}(x)$ é real para x e ν reais com $x > 0$ ([72] pg. 958, 8.432), a fase pode ser lida diretamente da exponencial como sendo $S = \nu\sqrt{3}\beta$. As equações de movimento (4.12), neste caso, ficam reduzidas a

$$\dot{\Omega} = 0, \quad \dot{\beta} = 2\sqrt{3}\nu, \quad (4.14)$$

cujas soluções são

$$\Omega = \Omega_0, \quad \beta = 2\sqrt{3}\nu(t - t_0) + \beta_0. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (3.9), obtemos as expressões para as quantidades $\Theta(t)$, $\sigma(t)$ e $l^3(t)$:

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= -\frac{\nu}{4} \exp \left[6\nu(t - t_0) + 2\sqrt{3}\Omega_0 + \sqrt{3}\beta_0 \right], \\ \sigma(t) &= \frac{\sqrt{3}\nu}{6} \exp \left[6\nu(t - t_0) + 2\sqrt{3}\Omega_0 + \sqrt{3}\beta_0 \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$l^3(t) = \exp \left[-6\nu(t - t_0) - 2\sqrt{3}\Omega_0 - \sqrt{3}\beta_0 \right].$$

A partir de (4.16) é fácil ver que, dependendo do sinal de ν , há duas possibilidades para a evolução do universo. A primeira ($\nu > 0$) corresponde a um universo que inicia com um volume infinitamente grande e isotrópico e evolui para uma configuração de volume pequeno e altamente anisotrópico. A segunda ($\nu < 0$) consiste em um universo cujo volume é infinitamente pequeno e anisotrópico no passado remoto e evolui para uma configuração de volume infinitamente grande e isotrópico no infinito futuro. Esse comportamento completamente distinto do caso clássico pode ser entendido intuitivamente analisando-se o potencial quântico. A partir das equações (4.10) e (4.13), obtemos a seguinte expressão para esse potencial:

$$Q \equiv \frac{1}{24R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \Omega^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2} \right) = 2e^{-2\sqrt{3}\Omega} - \frac{\nu^2}{8}. \quad (4.17)$$

Como Q é independente de β , essa variável deve apresentar um comportamento similar ao do caso clássico. Todos os efeitos quânticos devem, portanto, estar embutidos na lei

de evolução de Ω . Essa é a razão pela qual a solução para $\beta(t)$ em (4.15) é idêntica à sua correspondente clássica (3.14) quando é feita a identificação $P_{\beta_0} = \sqrt{3}\nu$, enquanto a solução $\Omega(t) = \Omega_0$ é completamente diferente.

4.2.2 Caso 2

A função de onda é a superposição de duas funções do tipo (4.10):

$$\Psi(\Omega, \beta) = A_1 K_{i\mu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) e^{i\sqrt{3}\mu\beta} + A_2 K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) e^{i\sqrt{3}\nu\beta}, \quad (4.18)$$

onde A_1 e A_2 são constantes. Após simplificação, pode-se mostrar que a fase correspondente a (4.18) é dada por

$$S(\Omega, \beta) = \arctan \left[\frac{A_1 K_{i\mu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) \sin(\sqrt{3}\mu\beta) + A_2 K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) \sin(\sqrt{3}\nu\beta)}{A_1 K_{i\mu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) \cos(\sqrt{3}\mu\beta) + A_2 K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega} \right) \cos(\sqrt{3}\nu\beta)} \right], \quad (4.19)$$

onde as constantes A_1 e A_2 foram escolhidas reais. As equações de movimento (4.12), neste caso, podem ser escritas como

$$\frac{d\Omega}{dt} = 8\sqrt{3} \frac{A_1 A_2 [K'_{i\mu} K_{i\nu} - K_{i\mu} K'_{i\nu}] \exp[-\sqrt{3}\Omega] \sin[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta]}{(A_1 K_{i\mu})^2 + (A_2 K_{i\nu})^2 + 2A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta]}, \quad (4.20)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 2\sqrt{3} \frac{\mu A_1^2 K_{i\mu}^2 + \nu A_2^2 K_{i\nu}^2 + (\mu + \nu) A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta]}{(A_1 K_{i\mu})^2 + (A_2 K_{i\nu})^2 + 2A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta]},$$

onde a linha denota derivada em relação ao argumento.

O sistema (4.20) constitui um conjunto autônomo de equações diferenciais não-lineares. Embora seja difícil resolvê-lo analiticamente, as propriedades globais das soluções podem ser determinadas a partir de uma análise do campo de velocidades associado. Observando o lado direito de (4.20), podemos ver que o campo de velocidades tem o seu sentido invertido quando fazemos as substituições $\mu \rightarrow -\mu$, $\nu \rightarrow -\nu$. Portanto, para que tenhamos uma visão qualitativa das soluções, podemos, sem perda de generalidade, considerar $\mu > 0$ e estudar os casos onde $\nu > 0$ e $\nu < 0$. Por simplicidade, fixemos $A_1 = A_2 = 1/\sqrt{2}$. As figuras 4.1(a) e 4.1(b) apresentam os gráficos do campo de velocidades nos dois casos para valores representativos de μ e ν .

Uma simples inspeção no lado direito do sistema de equações (4.20) sugere que os pontos de estabilidade do sistema devem aparecer periodicamente, com período $2\pi/\sqrt{3}(\mu - \nu)$ ao longo da direção do eixo β . De fato, para os valores atribuídos a μ e ν nos gráficos das figuras 4.1(a) e 4.1(b), temos $2\pi/\sqrt{3}|\mu - \nu| = 12.09$, fechando exatamente com o período observado. Variando as condições iniciais e os valores de μ e ν , podemos encontrar soluções cujo comportamento global difere significativamente. No que segue, exibiremos algumas delas, dando preferência para as que representam universos não-singulares. Para tal, é suficiente considerarmos o caso descrito na figura 4.1(a).

A partir do gráfico do campo de velocidades que a figura 4.1(a) exhibe, podemos obter informação qualitativa a respeito das soluções para $l^3(t)$, $\Theta(t)$ e $\sigma(t)$. Se $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ são periódicas, das equações (3.9) podemos concluir que $l^3(t)$, $\Theta(t)$ e $\sigma(t)$ apresentam o mesmo comportamento. A fim de encontrar soluções periódicas para $\Omega(t)$ e $\beta(t)$, podemos, sem perda de generalidade, concentrar nossa atenção no ponto de estabilidade próximo a $\Omega = 6$ e $\beta = -24$. Para gerar uma órbita fechada em torno desse ponto, resolvemos (4.20) numericamente com as condições iniciais $\Omega(0) = 2$ e $\beta(0) = -24$. As figuras 4.2(a), (c), e (e) apresentam os gráficos das funções $\ln[l^3(t)]$, $\Theta(t)$ e $\sigma(t)$ calculadas a partir das soluções encontradas para $\Omega(t)$ e $\beta(t)$. Uma informação que pode ser obtida diretamente do gráfico de $\ln[l^3(t)]$ é o número de *e-folds* entre as configurações de máximo e mínimo volume do universo ($\simeq 29$ *e-folds*). É fácil verificar que o número de *e-folds* e o valor

do volume mínimo podem ser ajustados variando-se as condições iniciais ou trocando o ponto de estabilidade em torno do qual computamos a solução.

Estudando a função $\ln[l^3(t)]$, podemos determinar quantas vezes o volume do universo é maior que o volume de Planck, l_p^3 . No sistema de unidades adotado, $l_p^3 \simeq 10^{-3}$. Da equação (3.9), podemos ver que l_{\min}^3 pode ser aumentado (reduzido) se reduzirmos (aumentarmos), por exemplo, β_{\max} . Para tal, basta que a órbita seja trocada por uma outra exatamente idêntica em torno de um ponto de estabilidade imediatamente abaixo (acima) na direção do eixo β na figura 4.1(a). Mantendo $\Omega(0)$ inalterado e diminuindo de $\beta(0)$ o valor correspondente ao espaçamento entre as órbitas, $2\pi/\sqrt{3}|\mu - \nu| \simeq 12$, obtemos como diferença em l_{\min}^3 o valor de $\exp[12\sqrt{3}] \simeq 21$ *e-folds*.

Além de $l^3(t)$, as variáveis $\Theta(t)$ e $\sigma(t)$ fornecem-nos informação relevante para caracterizar o comportamento do universo em cada um dos seus ciclos periódicos. A partir da figura 4.2, podemos concluir que o universo em questão alterna entre configurações de volume grande, forma quase isotrópica e expansão volumétrica pequena e configurações onde o volume é pequeno, a forma é anisotrópica e a expansão volumétrica é grande. Em cada um de seus ciclos, o universo é isotrópico em dois instantes de tempo [figuras 4.2(g) e (h)].

Voltemos agora a nossa atenção para o fluxo próximo a $\Omega = 11$ na figura 4.1(a). As soluções para $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ nessa região correspondem a universos que começam em $t = -\infty$ com volume infinito e se contraem, sofrendo uma seqüência de ricochetes, até atingir uma singularidade [fig. 4.2(b)]. Os gráficos da expansão volumétrica e do fator de forma correspondentes aparecem nas figuras 4.2(d) e (f). De maneira análoga ao que ocorre nas soluções periódicas, as regiões nas quais o universo é pequeno correspondem às regiões onde a anisotropia é máxima. Os pequenos vincos no topo dos picos na figura 4.2(d) marcam mudanças abruptas na direção da expansão que ocorrem em cada uma das regiões onde, assim como na figura 4.2(c), o volume do universo sofre ricochetes. Conforme constatamos anteriormente, o campo de velocidades na figura 4.1(a) tem a sua direção invertida pelas substituições $\mu \rightarrow -\mu$, $\nu \rightarrow -\nu$. Utilizando essa propriedade, podemos

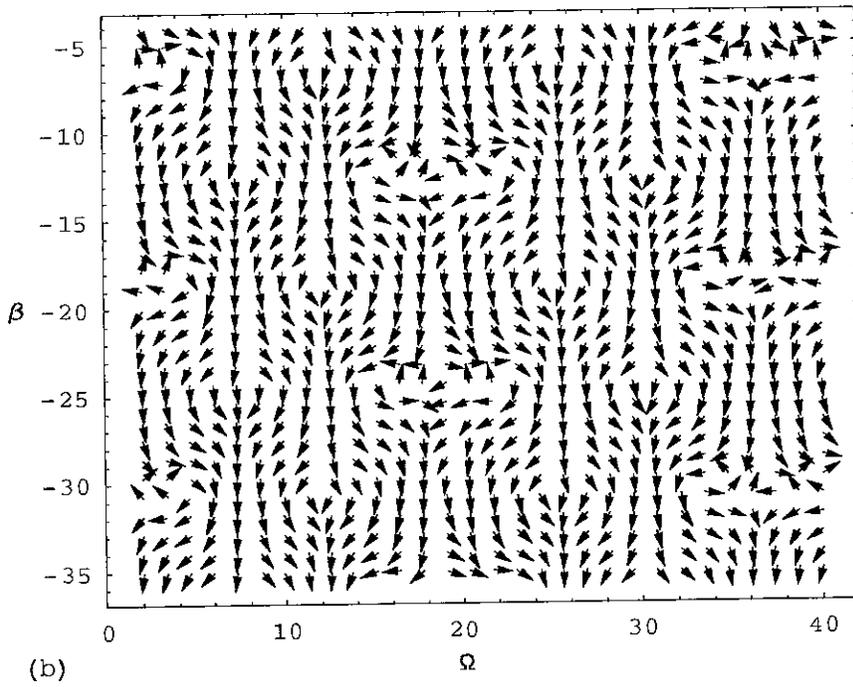
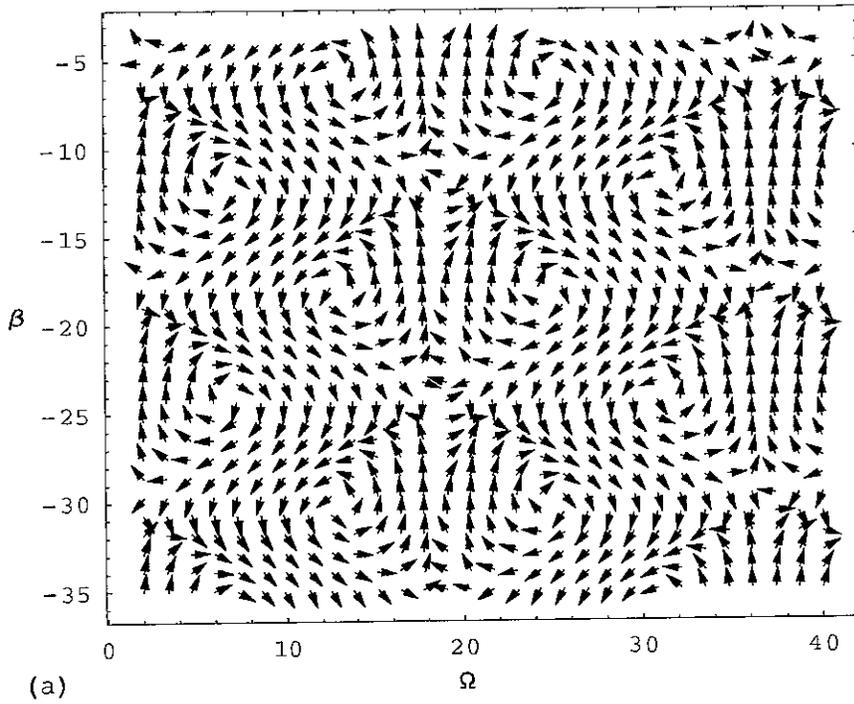


Figura 4.1: O campo de velocidades (normalizado) correspondente às equações diferenciais de Bohm para o universo de Kantowski-Sachs comutativo em dois casos: (a) : $\mu = 1/10, \nu = -1/5$. (b) : $\mu = 1/10, \nu = 2/5$.

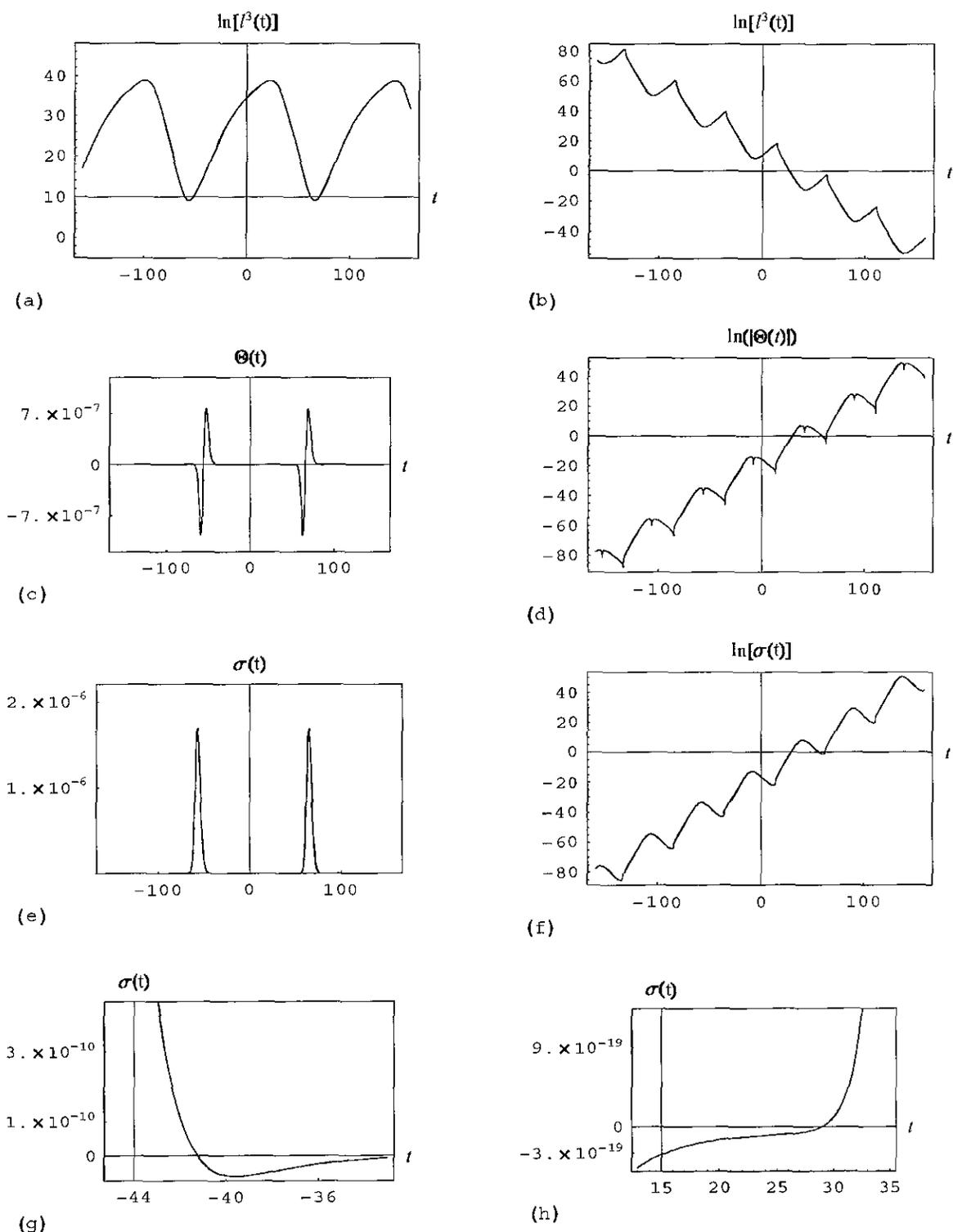


Figura 4.2: A evolução do volume característico, expansão volumétrica e fator de forma do universo de Kantowski-Sachs comutativo com $\mu = 1/10$ e $\nu = -1/5$. (a), (c) e (e) : $\Omega(0) = 2, \beta(0) = -24$. (b), (d) e (f) : $\Omega(0) = 7.7, \beta(0) = -21.7$. (g) e (h): ampliação de partes de (e).

construir uma solução na qual o universo parte de uma singularidade no infinito passado e se expande, passando por uma seqüência de ricochetes, até o infinito.

Um outro tipo de solução ocorre no caso em que $\nu = -\mu$, no qual a fase S é nula. Trata-se, portanto, de um universo estático de tamanho arbitrário, um comportamento genuinamente quântico. O potencial quântico para esse estado,

$$Q = 2e^{-2\sqrt{3}\Omega}, \quad (4.21)$$

cancela exatamente o potencial clássico. Isso justifica o comportamento da solução de universo completamente distinto do clássico.

De um ponto de vista puramente matemático, todas as soluções discutidas nesta seção são interessantes pela riqueza de comportamentos que elas descrevem. De um ponto de vista físico, entretanto, é interessante sabermos que existem soluções dinâmicas não-singulares nas quais l_{\min} é maior que l_p . Perto da escala de Planck, não é mais esperado que a teoria efetiva baseada na equação de Wheeler-DeWitt seja válida. Para a solução da figura 4.2(a), por exemplo, $l_{\min} \simeq 20 \sim 200l_p$.

4.3 O Modelo Quântico Não-Comutativo

Após termos estudado os efeitos quânticos e não-comutativos em exemplos isolados, reunimos elementos suficientes para analisar a combinação desses efeitos em um mesmo modelo. A afirmação bastante comum de que a não-comutatividade acaba com a estrutura puntiforme dos espaços, fazendo-os ficarem “borrados”, torna obscura a sua aplicação na descrição de universos quânticos. Estes, de acordo com a interpretação da teoria quântica da escola de Copenhagen, não possuem realidade objetiva. Nesta seção, mostraremos como é possível concebermos um “universo quântico não-comutativo”, onde os operadores de mini-superespaço satisfazem a uma relação de comutação canônica. Descreveremos a evolução desse universo conferindo-lhe uma realidade objetiva, o que pode ser feito a partir da aplicação do formalismo de trajetórias de Bohm à cosmologia quântica não-comutativa [77].

Assim como na mecânica quântica, a deformação canônica é definida tendo um conjunto de coordenadas cartesianas como preferencial. Nessas coordenadas o parâmetro associado à não-comutatividade é constante. Como conjunto de coordenadas cartesianas, escolhemos o constituído pelas variáveis de configuração Ω e β , que satisfazem⁵

$$[\widehat{\Omega}, \widehat{\beta}] = i\theta. \quad (4.22)$$

De acordo com o procedimento de quantização de Weyl descrito na Capítulo 1, a relação de comutação (4.22) entre dois observáveis $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\beta}$ pode ser representada em termos de funções comutativas substituindo-se o produto usual pelo produto Moyal. Para o caso em questão, este é definido por

$$f(\Omega_c, \beta_c) \star g(\Omega_c, \beta_c) = f(\Omega_c, \beta_c) e^{i\frac{\theta}{2}(\overleftarrow{\partial}_{\Omega_c} \overrightarrow{\partial}_{\beta_c} - \overleftarrow{\partial}_{\beta_c} \overrightarrow{\partial}_{\Omega_c})} g(\Omega_c, \beta_c), \quad (4.23)$$

onde usamos a notação Ω_c e β_c para designar os símbolos de Weyl correspondentes aos operadores $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\beta}$. A razão de usarmos tal notação pode ser justificada a partir das propriedades do produto Moyal. Uma equação de Wheeler-DeWitt para o universo de Kantowski-Sachs não-comutativo pode ser obtida aplicando-se a deformação Moyal à equação (4.9):

$$\left[-P_{\Omega_c}^2 + P_{\beta_c}^2 - 48 \exp\left(-2\sqrt{3}\Omega_c\right) \right] \star \Psi(\Omega_c, \beta_c) = 0. \quad (4.24)$$

Usando as propriedades do produto Moyal (para detalhes veja [4, 11]), podemos escrever o termo de potencial (que denotamos por V para dar conta do caso mais geral) como

⁵Afora o interesse que vem dos fundamentos da teoria quântica em desenvolver uma formulação Bohmiana para espaços não-comutativos, motivações físicas para se considerar a relação de comutação entre as variáveis de mini-superespaço proposta nesta tese como uma teoria efetiva podem ser encontradas em [77].

$$\begin{aligned}
V(\Omega_c, \beta_c) \star \Psi(\Omega_c, \beta_c) &= V \left(\Omega_c + i\frac{\theta}{2} \partial_{\beta_c}, \beta_c - i\frac{\theta}{2} \partial_{\Omega_c} \right) \Psi(\Omega_c, \beta_c) \\
&= V \left(\widehat{\Omega}, \widehat{\beta} \right) \Psi(\Omega_c, \beta_c),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde

$$\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}_c - \frac{\theta}{2} \widehat{P}_{\beta_c}, \quad \widehat{\beta} = \widehat{\beta}_c + \frac{\theta}{2} \widehat{P}_{\Omega_c}. \tag{4.26}$$

A equação (4.26) é exatamente a versão operatorial de (3.19). Duas interpretações consistentes para a cosmologia que emerge de (4.22)-(4.25) são possíveis. A primeira consiste em considerar os símbolos de Weyl, Ω_c e β_c , como sendo os constituintes da métrica física [77]. Nesse caso a teoria é essencialmente comutativa, porém com uma interação modificada. Na segunda interpretação, que é adotada, por exemplo, em [33, 42], os símbolos de Weyl são considerados como meras coordenadas auxiliares, recebendo um tratamento análogo ao dado às variáveis canônicas auxiliares do Capítulo 3. Essa interpretação está de acordo com o espírito deste trabalho, que é o de estudar a evolução de um universo quântico não-comutativo. Como é a álgebra de $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\beta}$, ao invés da álgebra de $\widehat{\Omega}_c$ e $\widehat{\beta}_c$, que satisfaz a relação (4.22), interpretaremos $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\beta}$ como sendo os operadores associados à métrica física. Tal interpretação pode também ser justificada pelo procedimento de quantização de Dirac

$$\{ , \} \rightarrow \frac{1}{i} [,], \tag{4.27}$$

se partirmos do modelo clássico discutido no Capítulo 3.

4.4 O Formalismo de Bohm para Mini-Superespaços Não-Comutativos

Para dar prosseguimento ao nosso estudo comparativo do universo de Kantowski-Sachs em suas quatro versões, é importante desenvolvermos uma formulação de Bohm para a

cosmologia quântica não-comutativa. Faremos essa construção nesta seção no formalismo de mini-superespaço, que é a ferramenta sistemática de que dispomos para analisar os modelos na cosmologia quântica.

Do mesmo modo que na cosmologia quântica comutativa, na formulação de Bohm para a cosmologia quântica não-comutativa esperamos trabalhar com um formalismo que permita estabelecer uma descrição objetiva da evolução do universo. Uma pergunta natural seria como isso poderia ser possível, visto que os operadores de mini-superespaço satisfazem a relação (4.22). A resposta é que o formalismo operatorial da mecânica quântica, com operadores atuando no espaço Hilbert de estados para gerar resultados de medidas, não desempenha um papel proeminente na mecânica quântica de Bohm. Esta é uma das características da formulação de Bohm que a torna particularmente atraente para aplicação na cosmologia quântica, onde não há observadores externos presentes para fazer medidas.

Conforme discutimos no início do capítulo, na mecânica quântica de Bohm comutativa é possível descrever partículas com posição e momento bem definidos em cada instante de tempo (para detalhes veja [53]), embora os operadores de posição e momento satisfaçam a relação

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}. \quad (4.28)$$

Portanto, é razoável esperarmos que seja possível formular uma cosmologia quântica de Bohm não-comutativa capaz de descrever as variáveis da métrica do universo conferindo a esta uma ontologia, embora os operadores $\hat{\Omega}$ e $\hat{\beta}$ satisfaçam (4.22). De fato, isso é possível, e esse é exatamente o caso na formulação aqui proposta.

Os ingredientes fundamentais no formalismo de Bohm são a função de onda, que contém informação a respeito da evolução do universo, e as variáveis métricas Ω e β , às quais desejamos conferir uma ontologia. A função de onda pode ser encontrada resolvendo-se (4.24). Resta ainda a ser determinada, entretanto, a lei de evolução das variáveis Ω e β . Uma maneira simples e direta de obtermos tal lei de evolução, é com o uso da correspondência descrita abaixo.

A cada operador Hermitiano $\widehat{A}(\widehat{\Omega}_c, \widehat{\beta}_c, \widehat{P}_{\Omega_c}, \widehat{P}_{\beta_c})$, é possível associarmos uma função, $\mathcal{A}(\Omega_c, \beta_c)$, de acordo com a regra

$$\mathcal{B}[\widehat{A}] = \frac{\text{Re} \left[\Psi^* (\Omega_c, \beta_c) \widehat{A} (\Omega_c, \beta_c, -i\hbar\partial_{\Omega_c}, -i\hbar\partial_{\beta_c}) \Psi (\Omega_c, \beta_c) \right]}{\Psi^* (\Omega_c, \beta_c) \Psi (\Omega_c, \beta_c)} = \mathcal{A} (\Omega_c, \beta_c), \quad (4.29)$$

onde o valor real aparece devido à hermiticidade de \widehat{A} . Conforme é proposto em [82], denominaremos a operação definida em (4.29) de *beable mapping*,⁶ pois esta associa a cada operador Hermitiano \widehat{A} um correspondente *beable*, o elemento de realidade (ontologia) que está por trás de \widehat{A} na interpretação de Bohm.⁷

Utilizando (4.29) para calcular os *beables* correspondentes aos operadores $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\beta}$, encontramos

$$\Omega (\Omega_c, \beta_c) = \mathcal{B}[\widehat{\Omega}] = \frac{\text{Re} \left[\Psi^* (\Omega_c, \beta_c) \widehat{\Omega} (\Omega_c, -i\hbar\partial_{\beta_c}) \Psi (\Omega_c, \beta_c) \right]}{\Psi^* (\Omega_c, \beta_c) \Psi (\Omega_c, \beta_c)} = \Omega_c - \frac{\theta}{2} \partial_{\beta_c} S, \quad (4.30)$$

$$\beta (\Omega_c, \beta_c) = \mathcal{B}[\widehat{\beta}] = \frac{\text{Re} \left[\Psi^* (\Omega_c, \beta_c) \widehat{\beta} (\beta_c, -i\hbar\partial_{\Omega_c}) \Psi (\Omega_c, \beta_c) \right]}{\Psi^* (\Omega_c, \beta_c) \Psi (\Omega_c, \beta_c)} = \beta_c + \frac{\theta}{2} \partial_{\Omega_c} S.$$

A estratégia para encontrar $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ fica agora clara. A informação relevante para a evolução do universo pode ser extraída da função de onda $\Psi(\Omega_c, \beta_c)$ computando-se primeiro as trajetórias das variáveis canônicas associadas, $\Omega_c(t)$ e $\beta_c(t)$. Uma vez computadas essas trajetórias, podemos determinar $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ avaliando as equações

⁶No contexto da mecânica quântica não relativista, onde uma interpretação probabilista pode ser conferida a $\rho = \Psi^* \Psi$, o mesmo procedimento é conhecido como “tomar o valor esperado local” [53]. Tal nomenclatura não possui sentido no presente caso, onde $\Psi^* \Psi$ não possui interpretação probabilista.

⁷Embora os operadores $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\beta}$ não comutem, nos referiremos a Ω e β como seus respectivos *beables* [29], pois essas variáveis representam os elementos de ontologia do universo quântico não-comutativo de Kantowski-Sachs. São elas que figuram nas componentes da métrica do espaço-tempo.

(4.30) em $\Omega_c = \Omega_c(t)$ e $\beta_c = \beta_c(t)$. Repare como esse procedimento é análogo ao adotado para calcular $\Omega(t)$ e $\beta(t)$ com o uso das variáveis auxiliares no Capítulo 3.

Equações diferenciais para as variáveis $\Omega_c(t)$ e $\beta_c(t)$ podem ser encontradas identificando-se $\dot{\Omega}_c(t)$ e $\dot{\beta}_c(t)$ com os *beables* associados à evolução temporal. Quando adotamos o calibre $N = 24 \exp(-\sqrt{3}\beta - 2\sqrt{3}\Omega)$, o Hamiltoniano $H = N\xi h$ [com ξ e h definidos pela equação (3.12)] fica reduzido a h . Podemos, portanto, usar h para gerar translações temporais e obter as equações de evolução para $\dot{\Omega}_c(t)$ e $\dot{\beta}_c(t)$:

$$\dot{\Omega}_c(t) = \mathcal{B} \left(\frac{1}{i} [\widehat{\Omega}_c, h] \right) \Big|_{\substack{\Omega_c = \Omega_c(t) \\ \beta_c = \beta_c(t)}} = -2 \frac{\partial S}{\partial \Omega_c} \Big|_{\substack{\Omega_c = \Omega_c(t) \\ \beta_c = \beta_c(t)}}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_c(t) &= \mathcal{B} \left(\frac{1}{i} [\widehat{\beta}_c, h] \right) \Big|_{\substack{\Omega_c = \Omega_c(t) \\ \beta_c = \beta_c(t)}} \\ &= \left[2 \frac{\partial S}{\partial \beta_c} - 48\sqrt{3}\theta \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp(-2\sqrt{3}\Omega_c - i\theta\sqrt{3}\partial_{\beta_c}) (R e^{iS})}{R e^{iS}} \right\} \right] \Big|_{\substack{\Omega_c = \Omega_c(t) \\ \beta_c = \beta_c(t)}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Estando determinadas as funções $\Omega_c(t)$ e $\beta_c(t)$, a evolução das variáveis de configuração do mini-superespaço é dada por

$$\Omega(t) = \Omega_c(t) - \frac{\theta}{2} \partial_{\beta_c} S [\Omega_c(t), \beta_c(t)], \quad (4.33)$$

$$\beta(t) = \beta_c(t) + \frac{\theta}{2} \partial_{\Omega_c} S [\Omega_c(t), \beta_c(t)].$$

Uma solução de (4.24) é

$$\Psi_\nu(\Omega_c, \beta_c) = e^{i\nu\sqrt{3}\beta_c} K_{i\nu} \left\{ 4 \exp \left[-\sqrt{3} \left(\Omega_c - \frac{\sqrt{3}}{2} \nu \theta \right) \right] \right\}. \quad (4.34)$$

Uma vez dada a função de onda do universo, por exemplo, uma superposição de estados

$$\Psi(\Omega_c, \beta_c) = \sum_{\nu} C_{\nu} e^{i\nu\sqrt{3}\beta_c} K_{i\nu} \left\{ 4 \exp \left[-\sqrt{3} \left(\Omega_c - \frac{\sqrt{3}}{2} \nu \theta \right) \right] \right\} = R e^{iS}, \quad (4.35)$$

a evolução do universo pode ser determinada resolvendo-se o sistema (4.31) e (4.32) e substituindo-se a solução nas equações (4.33).

Antes de aplicar o procedimento proposto em casos específicos, é interessante entendermos o significado de todos os termos presentes na equação (4.32). Isso pode ser feito com o auxílio da equação de Hamilton-Jacobi. A equação de Hamilton-Jacobi generalizada para a cosmologia quântica não-comutativa pode ser obtida substituindo-se $\Psi(\Omega, \beta) = R e^{iS}$ na equação (4.24) e tomando-se a parte real desta. A equação encontrada é

$$-\frac{1}{24} \left(\frac{\partial S}{\partial \Omega_c} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta_c} \right)^2 + V + V_{nc} + Q_K + Q_I = 0, \quad (4.36)$$

onde

$$\begin{aligned} V &= -2e^{-2\sqrt{3}\Omega_c}, \\ V_{nc} &= 2e^{-2\sqrt{3}\Omega_c} - 2e^{-2\sqrt{3}\Omega_c + \sqrt{3}\theta\partial_{\beta_c}S}, \\ Q_K &= \frac{1}{24R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \Omega_c^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \beta_c^2} \right), \\ Q_I &= -2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp(-2\sqrt{3}\Omega_c - i\theta\sqrt{3}\partial_{\beta_c}S) (R e^{iS})}{R e^{iS}} \right\} + 2e^{-(2\sqrt{3}\Omega_c + \theta\sqrt{3}\partial_{\beta_c}S)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Do mesmo modo que no Capítulo 1, procedemos separando os potenciais da equação de Hamilton-Jacobi identificando as contribuições clássicas e quânticas. Afora os potenciais V_{nc} e Q_K , que possuem análogos na teoria de campos não-comutativa do Capítulo 1,

aqui aparece o potencial quântico de interação, Q_I [42, 33, 82].⁸ Devido à presença de termos contendo θ na função de onda, fica claro que, embora funcionalmente similar, o Q_K definido em (4.37) pode diferir bastante do Q definido na equação (4.17). A equação (4.32) pode agora ser escrita como

$$\dot{\beta}_c(t) = \left[2 \frac{\partial S}{\partial \beta_c} - 48\sqrt{3}\theta e^{-2\sqrt{3}\Omega_c} + 24\sqrt{3}\theta (V_{nc} + Q_I) \right] \Bigg|_{\substack{\Omega_c = \Omega_c(t) \\ \beta_c = \beta_c(t)}}. \quad (4.38)$$

Os efeitos da não-comutatividade, portanto, manifestam-se não só apenas através da fase, S , que é funcionalmente diferente da sua análoga quântica comutativa, mas também de maneira explícita na lei de evolução de $\beta_c(t)$. Isso acarreta uma série de consequências. A primeira delas é uma modificação na condição para obtenção do limite clássico, que agora é de que os termos contendo Q_K e Q_I sejam desprezíveis em (4.36) e (4.38). A presença dos potenciais V_{nc} e Q_I na equação (4.38) nos revela também que a não-comutatividade é capaz de induzir dinâmica em situações nas quais esta não pode existir no caso comutativo. Funções de onda reais ($S = 0$), que necessariamente representam universos estáticos na formulação comutativa,⁹ podem originar universos dinâmicos na cosmologia quântica não-comutativa.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de aplicação da formulação proposta para a cosmologia quântica não-comutativa.

4.4.1 Caso 1

A função de onda é do tipo (4.34). Neste caso temos $S = \nu\sqrt{3}\beta$, e as equações de evolução (4.31)-(4.32) adquirem a forma

⁸A presença deste potencial está associada à existência de um produto Moyal entre a função de onda e o potencial na equação de Wheeler-DeWitt (4.24). O mesmo não ocorre na equação de Schrödinger (1.22) do Capítulo 1.

⁹Funções de onda reais são privilegiadas, p. ex., pela proposta ausência de fronteira para as condições iniciais do universo [85].

$$\dot{\Omega}_c = 0, \quad \dot{\beta}_c = 2\sqrt{3}\nu - 48\sqrt{3}\theta \exp\left(-2\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\nu\right). \quad (4.39)$$

Como soluções, temos

$$\Omega_c = \Omega_{c_0}, \quad \beta_c(t) = 2\sqrt{3}\alpha_\nu(t - t_0) + \beta_0, \quad (4.40)$$

onde

$$\alpha_\nu = \left[\nu - 24\theta \exp\left(-2\sqrt{3}\Omega_{c_0} + 3\theta\nu\right) \right]. \quad (4.41)$$

Das equações (4.33), obtemos

$$\Omega(t) = \Omega_{c_0} - \frac{\theta\sqrt{3}}{2}\nu, \quad \beta(t) = \beta_c(t) = 2\sqrt{3}\alpha_\nu(t - t_0) + \beta_0. \quad (4.42)$$

Exceto pelas contribuições contendo θ que aparecem alterando os valores das constantes, a dependência temporal das soluções (4.42) é idêntica à do caso análogo comutativo da Seção 4.2.1. O comportamento qualitativo assumido pelo universo é, portanto, o mesmo do caso lá discutido.

4.4.2 Caso 2

Consideremos agora uma função de onda que seja uma superposição de duas soluções do tipo (4.34),

$$\Psi(\Omega_c, \beta_c) = A_1 K_{i\mu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\mu/2} \right) e^{i\sqrt{3}\mu\beta_c} + A_2 K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\nu/2} \right) e^{i\sqrt{3}\nu\beta_c}. \quad (4.43)$$

Escrevendo a função de onda na forma polar, encontramos a fase correspondente como sendo

$$\begin{aligned}
& S(\Omega_c, \beta_c) \\
&= \arctan \left[\frac{A_1 K_{i\mu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\mu/2} \right) \sin(\sqrt{3}\mu\beta_c) + A_2 K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\nu/2} \right) \sin(\sqrt{3}\nu\beta_c)}{A_1 K_{i\mu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\mu/2} \right) \cos(\sqrt{3}\mu\beta_c) + A_2 K_{i\nu} \left(4e^{-\sqrt{3}\Omega_c + 3\theta\nu/2} \right) \cos(\sqrt{3}\nu\beta_c)} \right], \tag{4.44}
\end{aligned}$$

onde A_1 e A_2 foram escolhidas como constantes reais. Substituindo (4.44) em (4.31) e (4.32), obtemos, após simplificação

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_c}{dt} &= 8\sqrt{3} \frac{A_1 A_2 [K'_{i\mu} K_{i\nu} - K_{i\mu} K'_{i\nu}] e^{-\sqrt{3}\Omega_c} \sin[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta_c]}{(A_1 K_{i\mu})^2 + (A_2 K_{i\nu})^2 + 2A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta_c]}, \\
\frac{d\beta_c}{dt} &= 2\sqrt{3} \frac{\mu A_1^2 K_{i\mu}^2 + \nu A_2^2 K_{i\nu}^2 + (\mu + \nu) A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta_c]}{(A_1 K_{i\mu})^2 + (A_2 K_{i\nu})^2 + 2A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta_c]} \tag{4.45} \\
&\quad - \frac{e^{3\mu\theta} A_1^2 K_{i\mu}^2 + e^{3\nu\theta} A_2^2 K_{i\nu}^2 + (e^{3\mu\theta} + e^{3\nu\theta}) A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta_c]}{(A_1 K_{i\mu})^2 + (A_2 K_{i\nu})^2 + 2A_1 A_2 K_{i\mu} K_{i\nu} \cos[\sqrt{3}(\mu - \nu)\beta_c]} \\
&\quad \times 48\sqrt{3}\theta e^{-2\sqrt{3}\Omega_c},
\end{aligned}$$

onde a linha denota derivada em relação ao argumento. Como referência para comparação com o caso análogo comutativo, fixemos $A_1 = A_2 = 1/\sqrt{2}$ e consideremos, primeiramente, o caso em que $\mu = 1/10$ e $\nu = -1/5$. A figura 4.3 apresenta o gráfico do campo de velocidades associado às equações diferenciais (4.45), para $\theta = -4$. O campo de velocidades sugere que o conjunto de soluções admitido por (4.45) no caso em questão é similar ao do análogo comutativo (4.20). Conseqüentemente, ao fazer a comparação entre os casos comutativo e não-comutativo, esperamos que cada solução individual receba uma correção quantitativa ou, caso se torne qualitativamente diferente, apresente um comportamento igual a um dos descritos no caso quântico comutativo (embora $\theta = -4$ seja um caso

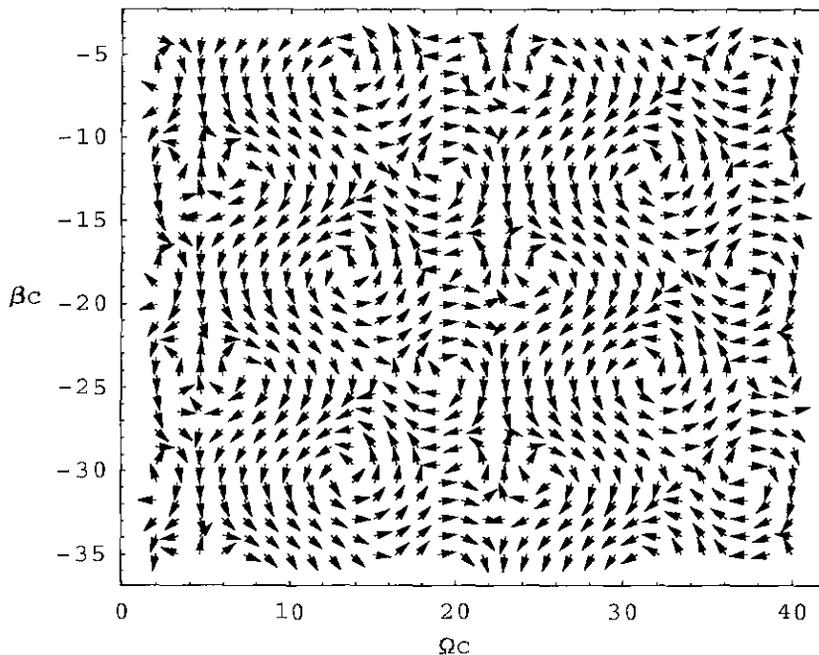


Figura 4.3: O campo de velocidades (normalizado) correspondente às equações diferenciais de Bohm para o universo quântico não-comutativo de Kantowski-Sachs em dois casos: (a) : $\mu = 1/10, \nu = -1/5$ e $\theta = 4$. (b) : $\mu = 1/10, \nu = -1/10$ e $\theta = 1/10$.

particular, um comportamento similar é esperado para outros valores de θ que tenham a mesma ordem de grandeza). Verificaremos esse fato estudando a evolução de $l^3(t)$.

A figura 4.4(a) apresenta o gráfico de $\ln[l^3(t)]$ para um universo cíclico no qual $\theta = 4$ e as condições iniciais são idênticas¹⁰ às da solução exibida na figura 4.2(a). Como podemos ver, o efeito da não-comutatividade neste caso é o de encurtar o período dos ciclos. Assim como no caso clássico, os efeitos da não-comutatividade são fortemente dependentes do sinal de θ . A figura 4.4(b) apresenta a solução obtida a partir da solução exibida na figura 4.4(a) preservando-se as condições iniciais e invertendo-se o sinal de θ . A órbita, que originalmente era fechada (correspondente a um universo não-singular), agora aparece aberta, originando um universo singular. Observe que o lado direito do sistema (4.45) tem o seu sinal invertido pelas substituições $\mu \rightarrow -\mu, \nu \rightarrow -\nu$ e $\theta \rightarrow -\theta$. Diferenciando as equações (4.33) e usando as equações (4.44) e (4.45), podemos ver que $\dot{\Omega}(t)$ e $\dot{\beta}(t)$ têm

¹⁰Em todos os casos da figura 4.4, as condições iniciais para Ω_c e β_c foram escolhidas de tal forma que $\Omega(0)$ e $\beta(0)$, calculadas usando (2.11) e (2.12), correspondessem aos respectivos valores fornecidos nos exemplos da dinâmica quântica não-comutativa.

os seus sinais invertidos pela mesma troca. Usando essa propriedade, é possível obtermos uma solução de universo em expansão a partir da solução exibida na figura 4.4(b). Por influência da não-comutatividade, órbitas abertas podem também fechar. Um exemplo é apresentado na figura 4.4(c), na qual temos um universo cíclico cujo análogo comutativo é o da solução exibida na figura 4.2(a). Para valores maiores de θ , o efeito de fechar a órbita pode ser revertido, conforme mostra a figura 4.4(d).

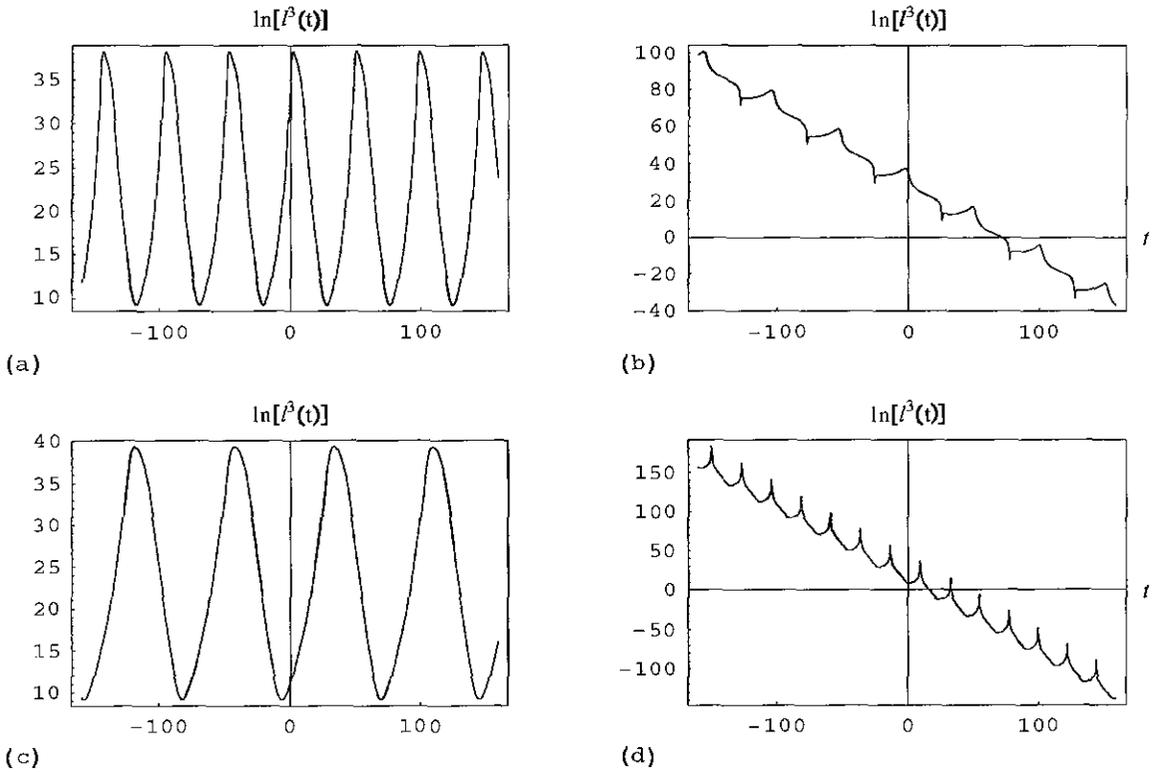


Figura 4.4: A evolução do volume característico do universo de Kantowski-Sachs quântico. (a) : $\mu = 1/10$, $\nu = -1/5$, $\theta = 4$ e $\Omega(0) = 2$, $\beta(0) = -24$. (b) : $\mu = 1/10$, $\nu = -1/5$, $\theta = -4$ e $\Omega(0) = 2$, $\beta(0) = -24$. (c) : $\mu = 1/10$, $\nu = -1/5$ (b), $\theta = 1$ e $\Omega(0) = 7.7$, $\beta(0) = -21.7$. (d) : $\mu = 1/10$, $\nu = -1/5$, $\theta = 12$ e $\Omega(0) = 7.7$, $\beta(0) = -21.7$.

Encerramos o capítulo considerando o caso em que $\mu = -\nu$. Conforme discutimos anteriormente, embora nesse caso a função de onda seja real, é possível a existência de uma dinâmica não-trivial para o universo. Pode-se mostrar numericamente que, dependendo das condições iniciais, podem existir soluções de universo periódicas similares à da figura 4(a) e soluções singulares similares à da figura 4(b).

Discussão e Perspectivas

...Being consciousness is a torment
The more we learn is the less we get
Every answer contains a new quest
A quest to nonexistence, a journey with no end...

—de Sensorium, Epica

As teorias de campos não-comutativas são atualmente um objeto de intensa investigação. Em plena era das teorias efetivas pela qual passa a teoria de campos, o imenso interesse pelas teorias de campos não-comutativas pode ser justificado pela oportunidade que estas têm propiciado à comunidade física de flexibilizar a sua postura frente a algumas condições antes tidas como paradigmas. Entre elas estão a validade da simetria de Lorentz em escalas arbitrárias de comprimento e a questão da não-localidade. As teorias não-comutativas estão, de certa forma, numa posição intermediária entre as teorias de campo usuais (locais) e as teorias de cordas. Propriedades já conhecidas das teorias de cordas, como o *IR/UV mixing* podem, em princípio, ser melhor entendidas no contexto das teorias de campos, onde as manipulações matemáticas são mais simples. Outra propriedade importante das teorias de campos não-comutativas é a de gerar translações a partir de derivações internas da álgebra das coordenadas não-comutativas. As coordenadas das partículas não são, portanto, invariantes de calibre. A única teoria conhecida antes com essa propriedade era a Relatividade Geral.

Esta tese é parte integrante de um estudo que iniciou no ano de 2001 com uma se-

qüência de trabalhos buscando o entendimento da não-comutatividade canônica e algumas das suas implicações para as teorias de campos, a cosmologia e os fundamentos da teoria quântica [42, 33, 82, 97, 57, 106]. No corpo desta tese, estão presentes partes significativas de três desses trabalhos, selecionadas para representar cada uma das três direções. Como era de se esperar, há um grau apreciável de intersecção entre os temas. É bem possível que a discussão que envolve os fundamentos da teoria quântica, presente hoje na comunidade de matéria condensada e ótica [30], venha a ter um impacto na física de altas energias. Na cosmologia quântica, as discussões a respeito dos fundamentos já vêm desempenhando um papel bastante importante [94, 98, 99]. Por outro lado, a aceitação da não-localidade como uma possibilidade concreta pelos físicos de altas energias pode ter um impacto nos fundamentos, reacendendo o interesse por teorias de variáveis escondidas [33]. Finalizamos a presente tese realizando uma apreciação dos principais resultados do trabalho como um todo e apresentando novas perspectivas de investigação.

No Capítulo 1, apresentamos uma discussão geral sobre o presente status da teoria de campos e comentamos algumas idéias propostas em [42]. O problema de Landau foi brevemente revisto em uma abordagem intuitiva. Segundo a linha de raciocínio proposta em [42], a interpretação da não-comutatividade como sendo necessariamente associada à “ausência de estrutura puntiforme”, seja do espaço de fase (quando envolve \hbar) ou do espaço físico (quando envolve θ) não é a única possível. Vários sentidos podem ser dados à não-comutatividade. De acordo com o ponto de vista adotado, a prescrição de cálculo pode variar bastante, tendo influência, sobretudo, na finitude das teorias [15, 42, 48]. A passagem do regime não-comutativo para o comutativo, deveria, assim como é a passagem quântico-clássica, ser governada por variações dos atributos físicos dos sistemas (dimensões, número de constituintes, intensidades de campo, etc).¹¹ Dando continuidade à proposta apresentada em [42], foi construído em [33] um modelo de oscilador harmônico não-comutativo empregando a formulação de Bohm. Esse modelo reproduz os mesmos

¹¹Este ponto de vista está de acordo com os resultados obtidos pelos especialistas em descoerência (veja C. Kiefer em [85] e referências).

resultados da mecânica quântica não-comutativa na interpretação de Copenhagen. O trabalho, que serviu de contra-exemplo para questão da “ausência de estrutura puntiforme”, foi também o ponto de partida para a investigação aqui apresentada no Capítulo 4.

No Capítulo 2 investigamos a influência da não-comutatividade no comportamento do potencial efetivo do modelo φ^6 no regime em que o parâmetro de deformação não-comutativa, θ , é pequeno. Uma análise do potencial corrigido empregando teoria de perturbações à ordem de dois laços revelou que, no regime em questão, a contribuição mais importante vem do setor não-planar da teoria. Ao contrário dos diagramas planares, que são funcionalmente idênticos aos diagramas que aparecem no cálculo do potencial φ^6 comutativo, os diagramas não-planares apresentam um comportamento singular no limite em que $\theta \rightarrow 0$. Tal comportamento pode ser entendido como consequência da remoção da frequência de corte $\Lambda_{eff} \sim 1/\sqrt{\theta}$, que é naturalmente introduzida pela não-comutatividade.

Partindo da hipótese de que o estado de vácuo admite simetria translacional, determinamos as condições para SSB a partir do estudo do potencial efetivo. Como principal resultado da investigação concluímos que, à ordem de dois laços, a não-comutatividade é capaz de induzir SSB para valores positivos do parâmetro de massa e das constantes de acoplamento. Para valores fixos das constantes de acoplamento g e f , a condição para que ocorra SSB foi determinada como sendo $0 < m^2 < m_T^2$. Como $m_T^2 \propto g/\sqrt{\theta}$, no regime de interesse (θ pequeno) a janela para o parâmetro de massa onde ocorre a SSB induzida pela não-comutatividade pode, a princípio, ser bastante grande.

No Capítulo 3, iniciamos um estudo das implicações que a não-comutatividade pode ter para a gravitação e a cosmologia. Este começou no contexto a física clássica com a introdução de uma deformação nos parênteses de Poisson das variáveis de mini-superespaço do modelo cosmológico de Kantowski-Sachs. Verificamos que, embora relevante para a história do universo de Kantowski-Sachs em tempos intermediários, tal não-comutatividade não é capaz de remover as singularidades presentes no passado e no futuro desse modelo de universo.

No Capítulo 4 demos prosseguimento à investigação iniciada no Capítulo 3, introduzindo efeitos quânticos no cenário. Estes podem modificar radicalmente a evolução do universo, removendo singularidades. Algumas soluções de universo quântico partem de um volume infinito que decresce até uma singularidade ou iniciam de uma singularidade no passado e aumentam em volume até o infinito. Mais interessantes são as soluções quânticas periódicas, nas quais as singularidades estão completamente ausentes. Conforme mostramos no Capítulo 4, essas soluções de universo podem apresentar um grande número de *e-folds*. O comprimento mínimo, l_{\min} , para esses universos eternos pode assumir uma gama variada de valores. Não é difícil encontrar soluções nas quais l_{\min} é suficientemente pequeno para que esteja em uma escala onde efeitos da gravitação quântica possam ser relevantes, porém maior que o comprimento de Planck, a partir do qual uma teoria fundamental de gravitação passaria a ser válida. Mostramos também que a não-comutatividade pode modificar apreciavelmente a evolução do universo nos modelos quânticos, sendo a causa não só de desvios quantitativos (como ocorre nos modelos clássicos), mas também de modificações qualitativas mais profundas, como a criação ou remoção de singularidades. Ao contrário do que ocorre na cosmologia quântica Bohmiana comutativa, a presença de correções não-comutativas nas equações de evolução de Bohm pode ser responsável pela existência de uma dinâmica não-trivial mesmo quando a função de onda é real.

Embora nossa análise tenha sido restrita ao modelo de Kantowski-Sachs no vácuo, parte dos resultados obtidos pode, a princípio, ser válida para outros modelos de universos homogêneos, podendo, inclusive, conter matéria. O universo de Friedman-Robertson-Walker com um campo escalar, por exemplo, apresenta uma equação de Wheeler-DeWitt que é similar à que discutimos aqui [85]. A formulação proposta neste trabalho pode, portanto, ser aplicada em sua descrição. Uma investigação posterior do universo de Friedman-Robertson-Walker não-comutativo [97], entretanto, revelou que, mais relevante que a presença de matéria, é a escolha das variáveis cartesianas, aquelas nas quais o parâmetro de deformação, θ , é constante. Com a escolha adequada dessas coordenadas,

podemos, dependendo do valor de θ , remover singularidades que aparecem nas soluções de universo introduzindo uma não-comutatividade clássica similar à do Capítulo 3.

Os resultados gerais deste trabalho de tese levantam questões cujo entendimento deve ser buscado em um contexto interdisciplinar, envolvendo teorias de campos, não-comutatividade e uma análise dos procedimentos de quantização. Com relação à ligação entre não-comutatividade e quantização, podemos citar um fato interessante sobre o modelo padrão. Conforme comentamos na introdução, o modelo Connes-Lott foi abandonado por ser puramente “clássico”, não admitindo correções radiativas. Porém com a geometria não-comutativa que apresentava, era capaz, com a imposição de uma condição de unimodulariedade [10], de reproduzir corretamente valores de hipercargas dos férmions que na abordagem usual (comutativa) modelo padrão só são justificados por uma condição de cancelamento de anomalias [50, 107]. Tal fato é surpreendente, sendo suas conseqüências ainda não completamente entendidas. Igualmente interessante é a possibilidade de soluções de equações de campo em certas teorias clássicas serem completamente equivalentes a soluções obtidas a partir de teorias quânticas. Nos modelos que apresentamos em [97] encontramos exemplos de como isso pode acontecer: soluções de universo clássicas não-comutativas que equivalem a soluções quânticas comutativas.¹² Com relação à passagem quântico-clássica e à própria natureza dos procedimentos de quantização, muito ainda resta a ser investigado (veja, p. ex., H. T. Elze em [31] e referências). O estudo comparativo de modelos não-comutativos simples, como os que abordamos nesta tese, pode oferecer futuramente uma oportunidade de compreendermos um pouco melhor essas questões.

Muitas questões que apareceram no durante realização desta tese ainda seguem em aberto. Esperamos, futuramente, poder esclarecer algumas delas. Um trabalho interessante que temos em andamento em continuidade com o que realizamos sobre o modelo φ^6 é o de analisar o potencial efetivo deste corrigido por efeitos térmicos. Anteriormente foi

¹²É claro que no trabalho [97] tal coincidência deve-se provavelmente a simplicidade dos modelos; porém, o aspecto conceitual e as implicações da discussão aqui levantada devem ser de alcance mais geral.

proposto na literatura que, em escalas de comprimento inferiores à escala característica da não-comutatividade, $l \sim \sqrt{\theta}$, ocorre uma diminuição de graus de liberdade no setor não-planar das teorias [108]. Todavia, a presença de potenciais químicos pode mudar essa interpretação [109]. Essa é uma questão ainda não esclarecida cujo entendimento seria de valor para a compreensão qualitativa da “não-localização efetiva do espaço” introduzida pelo produto Moyal (veja Capítulo 1), além de oferecer a oportunidade de contrastarmos resultados obtidos empregando o formalismo de Matsubara com os aqui apresentados para a temperatura zero.

Um tema que pretendemos abordar em breve é a possível conexão entre a não-localidade das teorias não-comutativas e a existência de uma proporcionalidade entre entropia e área (veja [110] para um exemplo de como uma não-localidade espacial pode ser responsável por tal proporcionalidade). O estudo de sistemas com essa propriedade é de grande interesse para um melhor entendimento dos buracos negros [111]. Alguns autores chegaram a promover a conexão entre entropia e área a uma lei da física em diferentes versões do princípio holográfico [112], que limita a entropia máxima contida em um volume a um quarto da área de sua fronteira em unidades de Planck. Essa cota superior para a entropia foi utilizada como um meio de estabelecer um limite de validade das teorias de campos. Como resultado, descobriu-se que, para que estas possam ser válidas em volumes arbitrariamente grandes, deve haver uma relação entre suas frequências de corte ultravioleta (*UV*) e infravermelha (*IR*) [113]. A existência do *IR/UV mixing* e de uma não-localidade espacial nas teorias de campos não-comutativas sugere que estas possam admitir (ainda que em limites especiais) uma relação de proporcionalidade entre entropia e área.

Na linha de investigação sobre fundamentos da teoria quântica, que iniciamos em [33], estamos verificando a possibilidade de entendermos as teorias de campos não-comutativas como teorias Bohmianas do tipo Bell (veja [93] e referências). Acreditamos que a abordagem de Bohm possa nos fornecer uma visão clara de como a não-localidade presente nessas teorias leva as partículas a efetuarem saltos estocásticos. Esperamos que o trabalho em andamento sirva também como um ponto de partida para aprofundarmos nosso co-

nhecimento de física de Bohm a ponto de conferirmos ontologia a teorias não-comutativas em um ambiente mais abstrato, utilizando uma linguagem de “informação e processos” ao invés de “partículas e campos” [114].

Como comentário final, vale a pena mencionar que a teoria da informação em si é outra área interessante que tem exercido influência nos fundamentos da teoria quântica, nas teorias de campos e na gravitação [115, 116]. Recentemente, Y. Jack Ng [116] mostrou, usando teoria da informação, que o comprimento característico no qual espera-se que os efeitos da gravitação quântica sejam relevantes é bem maior que o comprimento de Planck (substituindo, portanto, o limite imposto pelo experimento *gedanken* discutido na introdução). Conseqüências observáveis dos novos limites podem, em princípio, ser verificadas com o uso de interferômetros de ondas gravitacionais como LIGO/VIRGO e LISA em experimentos futuros [116]. Reciprocamente, espera-se que a existência de horizontes de eventos deva exigir uma revisão dos atuais conceitos da teoria de informação quântica [117]. Esta é uma linha de pesquisa que pretendemos iniciar, podendo usar como suporte conceitos como o de informação ativa, passiva e de efetividade (derivados da interpretação de Bohm) [92, 104]. A conexão entre informação/computação, relatividade, teorias de campos e gravitação quântica é um tema de pesquisa fascinante que certamente despertará a atenção de muitos pesquisadores nas próximas décadas.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Heisenberg (1954), conforme é mencionado em H. Rampacher, H. Stumpf e F. Wagner, *Fortsch Phys.* **13** (1965) 385.
- [2] H. S. Snyder, *Quantized space-time*, *Phys. Rev.* **71** (1947) 38; *The electromagnetic field in quantized space-time*, *Phys. Rev.* **72** (1947) 68.
- [3] A. Connes e M. A. Rieffel, *Yang-Mills for Noncommutative Two-Tori*, *Comtemp. Math.* **62** (1987) 237.
- [4] M. R. Douglas e N. A. Nekrasov, *Noncommutative field theory*, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].
- [5] Y.-S. Wu, *Quantum Field Theories on a Noncommutative Euclidean Space: Overview of New Physics*, Invited talk at the International Conference on Theoretical Physics, Paris, UNESCO, July 2002 [hep-th/0305258].
- [6] J. Gomis, K. Kamimura e J. Llosa, *Hamiltonian Formalism for Space-time Noncommutative Theories*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 045003 [hep-th/0006235].
- [7] S. Goldstein, *Bohmian Mechanics and the Quantum Revolution*, quant-ph/9512027.
- [8] A. Connes e J. Lott, *Particle Models and Noncommutative Geometry*, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B 18** (1990) 29.
- [9] H. Grosse e J. Madore, *A Noncommutative Version of the Schwinger Model*, *Phys. Lett. B* **283** (1992) 218;

- F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele e G. Sparano, *Constraints on Unified Gauge Theories from Noncommutative Geometry*, *Mod. Phys. Lett. A* **11** (1996) 2561 [hep-th/9603095];
- A. H. Chamseddine, G. Felder e J. Fröhlich, *Gravity in Noncommutative Geometry*, *Comm. Math. Phys.* **155** (1993) 205 [hep-th/9209044];
- D. Kastler, *The Dirac Operator and Gravitation*, *Comm. Math. Phys.* **166** (1995) 633;
- A. H. Chamseddine e A. Connes, *The Spectral Action Principle*, *Comm. Math. Phys.* **186** (1997) 731 [hep-th/9606001].
- [10] A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [11] R.J. Szabo, *Quantum field theory on noncommutative spaces*, *Phys. Rep.* **378** (2003) 207 [hep-th/0109162].
- [12] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Geometry and its Physical Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [13] D. L. Wiltshire, *An Introduction to Quantum Cosmology*, Proceedings of the 8th Physics summer School, Australian National University, Australia 1995. (World Scientific, Singapore, 1996) [gr-qc/0101003].
- [14] S. Doplicher, K. Fredenhagen e J. E. Roberts, *Space-time quantization induced by classical gravity*, *Phys. Lett. B* **331** (1994) 39; *The quantum structure of space-time at the planck scale and quantum fields*, *Comm. Math. Phys.* **172** (1995) 187.
- [15] R. Wulkenhaar, *Quantum field theories on noncommutative \mathbb{R}^4 versus theta-expanded quantum field theories*, hep-th/0206018.
- [16] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp e J. Wess, *Gauge Theory on Noncommutative Spaces*, *Eur. Phys. J. C* **16** (2000) 161.

- [17] D. A. Eliezer e R. P. Woodard, *The problem of nonlocality in string theory*, *Nucl. Phys. B* **325** (1989) 389.
- [18] N. Seiberg e E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, *J. High Energy Phys.* **09** (1999) 032 [hep-th/9908142].
- [19] S. Weinberg, *What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is ?*, hep-th/9702027.
- [20] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [21] S. Carroll, J. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane e T. Okamoto, *Noncommutative field theory and Lorentz violation*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 141601 [hep-th/0105082].
- [22] C. E. Carlson, C. D. Carone e R. F. Lebed, *Bounding Noncommutative QCD*, *Phys. Lett. B* **518** (2001) 201 [hep-ph/0107291]; *Supersymmetric Noncommutative QED and Lorentz Violation*, *Phys. Lett. B* **549** (2002) 337 [hep-ph/0209077];
 A. Anisimov, T. Banks, M. Dine e M. Graesser, *Comments on Non-Commutative Phenomenology*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 085032 [hep-ph/0106356];
 J. M. Carmona, J. L. Cortés. J. Gamboa e F. Méndez, *Noncommutativity in Field Space and Lorentz Invariance Violation*, *Phys. Lett. B* **565** (2003) 222 [hep-th/0207158].
- [23] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk e N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, *J. High Energy Phys.* **02** (2000) 020 [hep-th/9912072].
- [24] D. A. Eliezer e R. P. Woodard, *The problem of nonlocality in string theory*, *Nucl. Phys. B* **325** (1989) 389.
- [25] J. Llosa e J. Vives, *Hamiltonian formalism for nonlocal lagrangians*, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 2856.

- J. Gomis, K. Kamimura e J. Llosa, *Hamiltonian formalism for space-time non-commutative theories*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 045003 [hep-th/0006235];
- T.-C. Cheng, P.-M. Ho e M.-C. Yeh, *Perturbative approach to higher derivative and nonlocal theories*, *Nucl. Phys. B* **625** (2002) 151 [hep-th/0111160].
- [26] H. Everett, “*Relative State*” *Formulation of Quantum Mechanics*, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 454.
- The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, eds. B. S. DeWitt and N. Graham (Princeton University Press, New Jersey, 1973).
- [27] R. B. Griffiths, *Consistent Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002);
- M. Gell-Mann and J. B. Hartle in *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, W. Zurek ed. (Addison Wesley, Redwood City, 1990);
- R. Omnès, *Consistent interpretations of quantum mechanics*, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 339.
- R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, New Jersey, 1994).
- [28] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables I and II*, *Phys. Rev.* **85** (1952) 166; *Phys. Rev.* **85**, (1952) 180.
- [29] J. S. Bell , *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [30] A. Legget, *Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play and prospects*, *J. Phys: Condensed Matter* **14** (2002) R415;
- T. Calarco, M. Civi e R. Onofrio, *Tunneling in rf-SQUIDs and Tests at quantum Mechanics at the Macroscopic Level*, *J. Supercond.* **12** (1999) 819;

- A. J. Leggett e A. Garg, *Quantum Mechanics versus Macroscopic Realism: Is the Flux There when Nobody Looks?*, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 857;
- M. A. B. Whitaker, *theory and experiments in the foundations of quantum theory*, *Progress in Quantum Electronics* **24** (2000) 1.
- [31] *Decoherence and Entropy in Complex Systems*, Selected Lectures from DICE 2002 (Springer Verlag, Berlin, 2003).
- [32] G. 't Hooft, *Determinism and Dissipation in Quantum Gravity*, *Erice 1999, Basics and highlights in fundamental physics*, (1999) 397 [hep-th/0003005]; *Quantum Gravity as a Dissipative Deterministic System*, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3263 [gr-qc/9903084].
- [33] G. D. Barbosa e N. Pinto-Neto, *Noncommutative Quantum Mechanics and Bohm's Ontological Interpretation*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 065014 [hep-th/0304105].
- [34] D. J. Gross e N. A. Nekrasov, *Dynamics of strings in noncommutative gauge theory*, *J. High Energy Phys.* **10** (2000) 021 [hep-th/0007204];
- F. Lizzi, R.J. Szabo e A. Zampini, *Geometry of the Gauge Algebra in Noncommutative Yang-Mills Theory*, *J. High Energy Phys.* **08** (2001) 032 [hep-th/0107115].
- [35] E. Witten, *Non-Commutative Geometry and String Field Theory*, *Nucl. Phys. B* **268** (1986) 253.
- [36] I. Bars, *Map of Witten's $*$ to Moyal's $*$* , *Phys. Lett. B* **517** (2001) 436 [hep-th/0106157];
- M. R. Douglas, H; Liu, G. Moore e B. Zwiebach, *Open String Star as a Continuous Moyal Product*, *J. High Energy Phys.* **04** (2002) 022 [hep-th/0202087];
- Y. S. Wu e T. L. Zhuang, *Moyal Representation of the String Field Star Product in the Presence of a B-background*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 126003 [hep-th/0211199].

- [37] V. A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories* (World Scientific, Singapore, 1993).
- [38] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton, 2003).
- [39] S. Carroll, *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
- [40] L. Smolin, *How far are we from the quantum theory of gravity?*, hep-th/0303185.
- [41] L. Susskind e J. Uglum, *Black Holes, Interactions, and Strings*, Talk presented at the PASCOS meeting in Syracuse, New York, May 1994 [hep-th/9410074].
- [42] G. D. Barbosa, *On The Meaning of the String-Inspired Noncommutativity and its Implications*, *J. High Energy Phys.* **05** (2003) 024 [hep-th/0301106].
- [43] G.V. Dunne, R. Jackiw e C.A. Trugenberger, *'Topological' (Chern-Simons) quantum mechanics*, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 661.
- [44] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).
- [45] A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 1993).
- [46] N. Macris e S. Ouvry, *Projection on higher Landau levels and non-commutative geometry*, *J. Math. Phys.* **35** (2002) 4477.
- [47] M. Chaichian, A. Demichev, P. Prešnajder e A. Tureanu, *Space-time noncommutativity, discreteness of time and unitarity*, *Eur. Phys. J. C* **20** (2001) 767 [hep-th/0007156];
- J. Gomis e T. Mehen, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, *Nucl. Phys. B* **591** (2000) 265 [hep-th/0005129].

- [48] M. Chaichian, A. Demichev e P. Presnajder, *Quantum field theory on noncommutative space-times and the persistence of ultraviolet divergences*, *Nucl. Phys. B* **567** (2000) 360 [hep-th/9812180].
- [49] J. C. Várilly, *The Interface of Noncommutative Geometry and Physics*, talk given at the 6th Conference on Clifford Algebras and Applications, Cookeville, TN, May 2002 [hep-th/0206007].
- [50] J. M. Gracia-Bondia, *Noncommutative Geometry and the Fundamental Interactions: The First Ten Years*, *Annalen Phys.* **11** (2002) 479 [hep-th/0206006].
- [51] A. Micu e M. M. Sheikh Jabbari, *Noncommutative Φ^4 theory at two loops*, *J. High Energy Phys.* **01** (2001) 025 [hep-th/0008057].
- [52] D. Bigatti and L. Susskind, *Magnetic fields, branes and noncommutative geometry*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 066003 [hep-th/0106018].
- [53] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [54] L. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [55] D. Bohm e B. J. Hiley, *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory*, (Routledge & Kegan Paul, London, 1993);
D. Bohm, B. J. Hiley e P. N. Kaloyerou, *An Ontological Basis for the Quantum Theory*, *Phys. Rep.* **144** (1987) 349.
- [56] V. Allori e N. Zanghi, *What is Bohmian Mechanics*, *Int. J. theor. Phys.* **43** (2004) 1743 [quant-ph/0112008].
- [57] G. D. Barbosa, *Effective potential and spontaneous symmetry breaking in the non-commutative φ^6 model*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 065001 [hep-th/0306064].

- [58] B. A. Campbell e A. Kaminsky, *Noncommutative Field Theory and Spontaneous Symmetry Breaking*, *Nucl. Phys. B* **581** (2000) 240 [hep-th/0003137].
- [59] S. S. Gubser e S. L. Sondhi, *Phase structure of non-commutative scalar field theories*, *Nucl. Phys. B* **605** (2001) 395 [hep-th/0006119].
- [60] G.-H. Chen, Y.-S. Wu, *Renormalization Group Equations and the Lifshitz Point In Noncommutative Landau-Ginsburg Theory*, *Nucl. Phys. B* **622** (2002) 189 [hep-th/0110134].
- [61] G. Mandanici, *Cornwall-Jackiw-Tomboulis Effective Potential for Canonical Non-commutative Field Theories*, *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 3541 [hep-th/0304090].
- [62] W. H. Huang, *Two-loop effective potential in noncommutative scalar field theory*, *Phys. Lett. B* **496** (2000) 206 [hep-th/0009067].
- [63] F. Ruiz Ruiz, *UV/IR mixing and the Goldstone theorem in noncommutative field theory*, *Nucl. Phys. B* **637** (2002) 143 [hep-th/0202011].
- [64] Y. Kiem, C. Kim e Y. Kim, *Noncommutative Q-balls*, *Phys. Lett. B* **507** (2001) 207 [hep-th/0005191].
- [65] H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, V. O. Rivelles e A. J. da Silva, *Spontaneous Symmetry Breaking in Noncommutative Field Theory*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 125003 [hep-th/0207220].
- [66] S. Sarkar, *On the UV renormalizability of noncommutative field theories*, *J. High Energy Phys.* **02** (2002) 030 [hep-th/0202171].
- [67] I. Chepelev e R. Roiban, *Convergence theorem for non-commutative feynman graphs and renormalization*, *J. High Energy Phys.* **03** (2001) 001 [hep-th/0008090].
- [68] W. Bietenholz, F. Hofheinz e J. Nishimura, *Non-commutative field theories beyond perturbation theory*, *Fortsch. Phys.* **51** (2003) 745 [hep-th/0212258].

- [69] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1686.
- [70] M. Peskin e D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, Massashussets, 1995).
- [71] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc-Graw-Hill Book Co, Singapore, 1985).
- [72] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, (Academic Press, San Diego, 1980) 4th edition.
- [73] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, New York, 1987) 2nd edition.
- [74] J. M. Romero e J. A. Santiago, *Cosmological Constant and Noncommutativity: A Newtonian point of view*, hep-th/0310266.
- [75] R. Brandenberger e P.-M. Ho, *Noncommutative Spacetime, Stringy Spacetime Uncertainty Principle, and Density Fluctuations*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 023517 [hep-th/0203119];
- Q.-G. Huang e M. Li, *Noncommutative Inflation and the CMB Multipoles*, *J. Cosmology Asroparticle Phys.* **11** (2003) 001 [astro-ph/0308458]; *CMB Power Spectrum from Noncommutative Spacetime*, *J. High Energy Phys.* **03** (2003) 014 [hep-th/0304203];
- R.-G. Cai, *A Note on Curvature Fluctuation of Noncommutative Inflation*, *Phys. Lett. B* **593** (2004) 1 [hep-th/0403134];
- C.-S. Chu, B. R. Greene e G. Shiu, *Remarks on Inflation and Noncommutative Geometry*, *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001) 2231 [hep-th/0011241].
- [76] M. Maceda, J. Madore , P. Manousselis e G. Zoupanos, *Can noncommutativity resolve the Big-Bang singularity ?*, *Eur. Phys. J. C* **36** (2004) 529 [hep-th/0306136].

- [77] H. Garcia-Compeán, O. Obregón e C. Ramírez, *Noncommutative Quantum Cosmology*, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 161301 [hep-th/0107250].
- [78] R. Kantowski e R. K. Sachs, *Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models*, *J. Math Phys.* **7** (1966) 443;
 G. F. R. Ellis, *Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity*, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 1171;
 C. B. Collins, *Global Structure of the “Kantowski-Sachs” cosmological models*, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 2116;
 E. Weber, *Kantowski-Sachs cosmological models approaching isotropy*, *J. Math. Phys.* **25** (1984) 3279;
 M. P. Ryan e L. C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1975).
- [79] A. N. Makarenko, V. V. Obukhov e K. E. Osetrin, *Kantowski-Sachs Brane Cosmology*, gr-qc/0301124.
- [80] H.-D. Conradi, *Quantum Cosmology of Kantowski-Sachs like Models*, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 2423 [gr-qc/9412049].
- [81] C. Simeone, *Global phase time and wave function for the Kantowski-Sachs anisotropic universe*, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 1887; *Global phase time and path integral for the Kantowski-Sachs anisotropic universe*, *Gen. Rel. Grav.* **32** (2000) 1835.
- [82] G. D. Barbosa e N. Pinto Neto, *Noncommutative Geometry and Cosmology*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 103512 [hep-th/0407111].
- [83] M. Cavaglià, V. Alfaro e A. T. Filippov, *Hamiltonian Formalism for Black Holes and Quantization*, *Int. J. Mod. Phys. D* **4** (1995) 661;

- O. Obregón e M. P. Ryan, *A family of exact solutions for unpolarized Gowdy models*, *Mod. Phys. Lett. A* **13** (1998) 3251;
- L. M. Campbell e L. J. Garay, *Quantum wormholes in Kantowski-Sachs spacetime*, *Phys. Lett. B* **254** (1991) 49;
- M. Cavaglià, *Wormhole Solutions in the Kantowski–Sachs Spacetime*, *Mod. Phys. Lett. A* **9** (1994) 1897 [gr-qc/9407029].
- [84] R. Arnowitt, S. Deser e C. Misner, in: *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (John Wiley & Sons, New York, 1962).
- [85] C. Kiefer, *Conceptual issues in quantum cosmology*, *Lect. Notes Phys.* **541** (2000) [gr-qc/9906100];
- N. Pinto-Neto, *Quantum Cosmology, VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation* (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1996).
- [86] S. W. Hawking e G. F. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [87] J. M. Romero, J. A. Santiago e J. D. Vergara, *Newton's Second Law in a Noncommutative Space*, *Phys. Lett. A* **310** (2003) 9 [hep-th/0211165].
- [88] Juan M. Romero e J. D. Vergara, *The Kepler problem and non commutativity*, *Mod. Phys. Lett. A* **18** (2003) 1673 [hep-th/0303064].
- [89] J. M. Romero, J. A. Santiago e J. D. Vergara, *A note about the quantum of area in a non-commutative space*, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 067503 [hep-th/0305080].
- [90] *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, eds. J. Ehlers e H. Friedrich (Springer Verlag, Berlin, 1994);
- C. Kiefer em *Black Holes: Theory and Observation*, eds. F. W. Hehl, R. J. K. Metzler e C. Kiefer (Springer Verlag, Berlin, 1998).

- [91] P. R. Holland, *The de Broglie-Bohm theory of motion and quantum field theory*, *Phys. Rep.* **224** (1993) 95;
- P. N. Kaloyerou, *The Causal Interpretation of the Electromagnetic Field*, *Phys. Rep.* **244** (1994) 287;
- H. Nikolic, *Covariant canonical quantization of fields and Bohmian mechanics*, hep-th/0407228.
- [92] H. Nikolic *Bohmian particle trajectories in relativistic quantum field theory*, *Found. Phys. Lett.* **17** (2004) 363 [quant-ph/0208185].
- [93] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka e N. Zanghì, *Bohmian Mechanics and Quantum Field Theory*, *Phys. Rev Lett.* **93** (2004) 0904002; *J. Phys. A* **38** (2005) R1.
- [94] N. Pinto-Neto e E. Sergio Santini, *Must Quantum Spacetimes Be Euclidean?*, *Phys. Rev. D* **59** (1999)123517 [gr-qc/9811067].
- [95] F. Shojai e A. Shojai, *Pure Quantum Solutions of Bohmian Quantum Gravity*, *J. High Energy Phys.* **05** (2001) 037 [gr-qc/0105102]; *Constraints Algebra and Equations of Motion in Bohmian Interpretation of Quantum Gravity*, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 1 [gr-qc/0311076]; *Causal Loop quantum Gravity and Cosmological Solutions*, gr-qc/0409020; *Constraint Algebra in Loop Quantum Gravity*, qc-qc/0409035.
- [96] J. Acacio de Barros e N. Pinto-Neto, *The Causal Interpretation of Quantum Mechanics and The Singularity Problem and Time Issue in Quantum Cosmology*, *Int. J. Mod. Phys. D* **7** (1998) 201.
- [97] G. D. Barbosa, *Noncommutative Conformally Coupled Scalar Field Cosmology and its Commutative Counterpart*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 063511 [hep-th/0408071].
- [98] J. Kowalski-Glikman e J. C. Vink, *Gravity-matter minisuperspace: Quantum regime, classical regime and between*, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 901;
- Y. Shtanov, *On pilot wave quantum cosmology*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 2564;

- R. Colistete Jr., J. C. Fabris e N. Pinto-Neto, *Gaussian superpositions in scalar-tensor quantum cosmological models*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 083507 [gr-qc/0005013];
- W.-H. Huang e I.-C. Wang, *Quantum Perfect-Fluid Kaluza-Klein Cosmology*, gr-qc/0309042.
- [99] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto, *The causal interpretation of dust and radiation fluid non-singular quantum cosmologies*, *Phys. Lett. A* **241** (1998) 229.
- [100] D. Home e A. S. Majmdar, *On the importance of the Bohmian approach for interpreting CP-violation experiments*, *Found. Phys.* **29** (1999) 721 [quant-ph/9901065]; *Interpreting the measurement of time of decay: phenomenological significance of the Bohm model*, *Phys. Lett. A* **296** (2002) 176 [quant-ph/0009019].
- [101] D. Bohm e J. Hiley, *Unbroken Quantum Realism, from Microscopic to Macroscopic Levels*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2511;
- O. V. Prezhdo e C. Brooksby, *Quantum Backreaction through the Bohmian Particle*, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 3215;
- S. Sans, F. Borondo, and Miriart-Artés, *Particle diffraction using quantum trajectories*, *J. Phys: Condensed Matter* **14**. 6109 (2002) ; *Quantum trajectories in atom-surface scattering with single absorbates: The role of quantum vortices*, *J. Chem. Phys.* **120** (18) (2004) 87948806;
- C. Colijn e E. R. Vrscaj, *Spin-dependent Bohm trajectories for hydrogen eigenstates*, *Phys. Lett. A* **300** (2002) 334 [quant-ph/0308105].
- [102] M. H. Partovi, *Hamilton-Jacobi Formulation of Kolmogorov-Sinai Entropy for Classical and Quantum Dynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 144101;
- S. Konkel e A. J. Makovski, *Regular and chaotic causal trajectories for the Bohm potential in a restricted space*, *Phys. Lett. A* **238** (1998) 95;

- R. H. Parmenter e R. W. Valentini, *Deterministic chaos and the causal interpretation of quantum mechanics*, *Phys. Lett. A* **201**, (1995) 1; *Chaotic causal trajectories associated with a single stationary state of a system of noninteracting particles*, *Phys. Lett. A* **227** (1997) 5.
- [103] C. Méier, *Mixed Quantum-Classical Treatment of Vibrational Decoherence*, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 173003;
- J. B. Maddox e E. Bittner, *Quantum relaxation dynamics using Bohmian trajectories*, *J. Chem. Phys.* **115** (14) (2001) 6039
- D. M. Appleby, *Bohmian Trajectories Post-Decoherence*, *Found. Phys.* **29** (1999) 1885 [quant-ph/9908029];
- A. S. Sans e F. Borondo, *A Bohmian view on quantum decoherence*, quant-ph/0310096.
- [104] O. J. E. Maroney, *Information and Entropy in Quantum Theory*, (PhD. Thesis, Birkbeck College, University of London, 2002) [quant-ph/0411172];
- [105] D. Aerts, M. Czachor e M. Pawłowski, *Security in quantum cryptography vs. nonlocal hidden variables*, quant-ph/0501003.
- [106] G. D. Barbosa, trabalho em andamento.
- [107] E. Alvarez, J. M. Gracia-Bondia e C. P. Martín, *Anomaly Cancellation and gauge group of the standard model in NCG*, *Phys. Lett. B* **364** (1995) 33.
- [108] W. Fischler, E. Gorbatov, A. Kashani-Poor, R. McNees, S. Paban e P. Pouliot, *The Interplay Between θ and T* , *J. High Energy Phys.* **06** (2000) 032 [hep-th/0003216];
- W.-H. Huang, *High-Temperature Effective Potential of Noncommutative Scalar Field Theory: Reduction of Degree of Freedom by Noncommutativity*, *Phys. Rev. D* **63** (2001)125004 [hep-th/0101040].

- [109] J. Gomis, K. Landsteiner e E. Lopez, *Non-Relativistic Non-Commutative Field Theory and UV/IR Mixing*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 105006 [hep-th/0004115].
- [110] T. Padmanabhan, *Quantum Structure of Spacetime and Entropy of Schwarzschild Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1998) 4297.
- [111] J. Maddox, *When entropy does not seem extensive*, *Nature* **365** (1993) 103;
M. Srednicki, *Entropy and Area*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 666.
- [112] R. Bousso, *The holographic principle*, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 825.
- [113] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, e A. Nelson, *Effective Field theory, Black Holes, and the Cosmological Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 4971.
- [114] M. R. Brown e B. J. Hiley, *Schrodinger revisited: an algebraic approach*, quant-ph/0005026.
- [115] S. Lloyd, *Ultimate Physical Limits of Computation*, *Nature* **406** 1047 (2000); *The Computational Universe*, quant-ph/0501135.
J. Bekenstein, *Limitations on quantum information from black hole physics*, *Acta Phys. Polon. B* **32** (2001) 3555 [quant-ph/0110005]; *Black holes and information theory*, *Contemp. Phys.* **45** (2003) 31 [quant-ph/0311049];
A. Hosoya, A. Carlini, e T. Shimomura, *Generalized second law of black hole thermodynamics and quantum information theory*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 104008.
- [116] Y. J. Ng, *From Computation to Black Holes and Space-Time Foam*, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2946; *Erratum Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 139902.
- [117] D. R. Terno, *Extension of information theory to curved spaces*, em *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*, ed. A. Khrennikov (Vaxjö University Press, Vaxjö, 2002) [quant-ph/0111144].
A. Peres e D. R. Terno, *Quantum Information and Relativity Theory*, *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004) 93 [quant-ph/0212023];

A. Peres, *Quantum information and General Relativity*, quant-ph/040512.

D. R. Terno, *Entropy, Holography, and the Second Law*, *Phys. Rev. Lett* **93** (2004) 051303 [hep-th/0403142].

**“IMPLICAÇÕES DA NÃO COMUTATIVIDADE CANÔNICA PARA AS TEORIAS
DE CAMPOS E A COSMOLOGIA”**

GUSTAVO DOURADO BARBOSA

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Henrique Boschi Filho – UFRJ

Maria Cristina Batoni Abdalla – IFT de São Paulo

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira – CBPF

Nelson Pinto Neto – CBPF