Tese de Doutorado

Abordagens não Classificatórias para Solução e Análise de Equações Diferenciais Ordinárias

Sérgio Eduardo Silva Duarte

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Abril de 2003

Agradecimentos

- Agradeço ao meu orientador, Luís da Mota, pela ajuda incansável e pela grande amizade de tantos anos.
- Ao meu co-orientador, Sebastião Alves Dias, com quem pude contar em qualquer momento.
- Ao meu irmão Luiz Guilherme, por tudo que já fez e ainda fará por mim.
- A todos de minha família, pelo que são.
- Ao pessoal do CBPF e da UERJ, pela grande camaradagem.
- À Myriam e ao pessoal do CFC, por tantos galhos quebrados.
- À CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Analisamos a estrutura do Fator Integrante para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, estabelecendo a forma geral para aquele no caso de equações com soluções Liouvillianas. Deste resultado, construímos um método semi-algorítmico para resolver uma classe destas equações. Apresentamos uma implementação computacional do método que oferece ao usuário, além da obtenção da solução, ferramentas de análise da estrutura da equação diferencial. Criamos ainda um método semi-algorítimico para reduzir equações diferenciais ordinárias de segunda ordem baseado em uma conjectura acerca da estruturas de seus invariantes.

Abstract

We analyse the structure of the Integrating Factor for first order ordinary differential equations, stablishing the general expression for it in the cases where the differential equations presents Liouvillian solutions. From this result, we build a semi-algorithmic method to solve a class of equations. We present a computer package which, besides offering a method of solution for the differential equation, also implement some tool for the analysis of the structure of the equation. We develop a semi-algorithmic approach to reduce second order ordinary differential equations based on a conjecture concerning the structure of its first-order invariants.

Índice

Capítulo 1

Introdução

É enorme a quantidade de problemas que se expressam (ou dependem ou se reduzem) em termos de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Os caminhos e abordagens para tentar resolver essas equações têm levado a um leque muito grande de métodos de solução. A maioria deles baseia-se em uma classificação prévia das equações diferenciais em classes para as quais um método de solução é conhecido. Historicamente, isto levou a um acúmulo de técnicas e o estudo destas ocupa boa parte do tempo dos estudantes de métodos matemáticos aplicados à Física.

No fim do século XIX, com o trabalho de Sophus Lie desenvolve-se um método geral de resolver (ou pelo menos reduzir a ordem de) equações diferenciais ordinárias a partir do estudo de suas correspondentes transformações de simetria [1, 2, 3]. Este método muito poderoso e bastante geral, baseia-se, porém no conhecimento das simetrias para uma dada equação o que pode não ser de fácil obtenção. Métodos heurísticos para extrair tais simetrias foram desenvolvidos [4, 5]. No entanto, eles não garantem que, se uma simetria existir, ela será encontrada.

Um grande passo para solucionar algoritmicamente equações ordinárias de primeira ordem foi dado em um trabalho de Prelle e Singer sobre sistemas autônomos de equações diferencias ordinárias [7]. O problema que Prelle e Singer atacaram é equivalente a perguntar se uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (1EDO) da forma dy/dx = M(x,y)/N(x,y), com M e N polinomiais em (x,y), possui uma solução escrita em termos de funções elementares (em outras palavras, uma solução escrita como uma combinação de polinômios, radicais, logaritmos e exponenciais). A grande vantagem da abordagem de Prelle e Singer é que, dentro de alguns limites, o método garante que, caso exista, a solução elementar será encontrada. O método indica um processo de construção de Fatores Integrantes (FIs) para as 1EDOs. A partir das funções M e N, econtram-se polinômios que constroem um FI para a 1EDO. No entanto, pelo que estamos chamando algoritmo — *um conjunto de regras para obteção de resultados específicos(em algum formato pré-determinado) a partir de informações também específicas. Cada passo deve ser definido em um nível de precisão que permita sua tradução para uma linguagem de programação, de maneira que possa ser executado por uma máquina em um tempo finito.* — Prelle e Singer não construíram um verdadeiro algoritmo posto que o método não determina um limite para o grau dos polinômios que constituiriam o fator integrante. Podemos dizer que o método de Prelle e Singer é semi-algorítmico, restando apenas um limite teórico no grau dos polinômios envolvidos, para que se torne um verdadeiro algoritmo.

Partindo da luz lançada pelas idéias de Prelle e Singer, propomo-nos a aprofundar o conhecimento acerca da estrutura geral do fator integrante para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, estender do método de Prelle e Singer para uma classe maior de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e propor um método de solução para equações diferenciais de segunda ordem.

Organizamos, então, esta tese da seguinte forma:

No capítulo um apresentamos algumas definições e conceitos básicos utilizados ao longo do texto. Esperamos também, nesse ponto, familiarizar o leitor à notação presente nos capítulos subseqüentes.

O capítulo dois já traz resultados nossos. Nele estabelecemos a forma geral de Fatores Integrantes para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com soluções liouvillianas.

No capítulo três, partindo do resultado obtido no capítulo dois, desenvolvemos um método para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com soluções liouvillianas.

No capítulo quatro apresentamos nossa implementação do método de Prelle e Singer e de sua extensão para equações ordinárias diferenciais de primeira ordem em um ambiente de computação algébrica.

No capítulo cinco estendemos o método de Prelle e Singer para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Capítulo 2

Ingredientes Básicos

Conforme foi dito anteriormente, Prelle e Singer desenvolveram um método semi-algorítmico para resolver equações diferenciais de primeira ordem (1EDOs) baseado na tentativa de encontrar o fator integrante para a equação, especialmente 1EDOs cujas soluções são escritas em termos de funções elementares (E1EDOs) e 1EDOs com soluções liouvillianas (L1EDOs). Iniciamos, portanto, este capítulo apresentando sucintamente algumas definições e conceitos necessários ao entendimento do método e de nosso trabalho, apresentado nos capítulos seguintes. Fazemos ainda uma breve introdução ao método de Prelle e Singer (método PS) de solução de equações diferenciais que serve de base e inspiração para nossos resultados. Terminamos com a apresentação da extensão do método PS proposta por Shtokhamer, uma vez que nossa implementação computacional (capítulo 5) trabalha com a classe de 1EDOs abordadas nessa extensão.

2.1 1EDOs Exatas e Fator Integrante

Uma equação diferencial do tipo

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{2.1}$$

é dita *exata* se

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \tag{2.2}$$

Neste caso, podemos encontrar uma função F(x,y) tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -M; \ \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{2.3}$$

Assim, a equação(2.2) se transforma em

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \tag{2.4}$$

ou seja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{F[x, y(x)]\} = 0. \tag{2.5}$$

Podemos então encontrar a solução da equação diferencial a partir de $F(x,y) = C$, com

$$F(x,y) = \int^{y} \left[N(x,y) + \int^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y - \int^{x} M(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

Para equações do tipo (2.1) em que a condição (2.2) não se aplica, buscamos uma função $R(x,y)$, chamada fator integrante da equação diferencial, tal que

$$\frac{\partial (RN)}{\partial x} + \frac{\partial (RM)}{\partial y} = 0. \tag{2.7}$$

A equação

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y, \tag{2.8}$$

por exemplo, com $M(x,y) = -y$ e $N(x,y) = 1$, não é exata. Mas, se fizermos

$$R(x,y) = e^x,$$

notamos que

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-ye^x}{e^x} \tag{2.9}$$

satisfaz à condição(2.2), e pode ser resolvida se usarmos (2.6) com RM e RN em lugar de M e N,

$$F(x,y) = \int^y \left[e^x + \int^x \frac{\partial(-ye^x)}{\partial y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y - \int^x (-ye^x)\mathrm{d}x = C, \tag{2.10}$$

resultando $ye^x = C$, ou, explicitamente, $y = Ce^{-x}$.

Nesta tese, nosso trabalho se orienta para criar e implementar estratégias para encontrar $R(x,y)$. Em alguns casos, os métodos para encontrar o fator integrante dependem do tipo de funções encontradas em $M(x,y)$ e $N(x,y)$. A seguir, daremos algumas definições que serão necessárias às descrições e ao entendimento desses métodos.

2.2 Funções Elementares e Liouvillianas

2.2.1 Gerador Elementar

Definição: Seja K um corpo de funções. A função θ é um gerador elementar sobre K se:

(a) θ é algébrico sobre K, isto é, θ é solução de uma equação polinomial com coeficientes em K.

(b) θ é uma exponencial sobre K, isto é, existe um η em K tal que $\theta' = \eta'\theta$, que é uma forma algébrica de dizer que $\theta = \exp \eta$.

(c) θ é um logarítmo sobre K, isto é, existe um η em K tal que $\theta' = \eta'/\eta$, que é uma maneira algébrica de dizer que $\theta = \ln \eta$.

2.2.2 Função Elementar

Definição: Seja K um corpo de funções. Uma extensão do corpo $K(\theta_1, ..., \theta_n)$ é chamado um corpo de funções elementares sobre K se todo θ_i é um gerador elementar sobre K. Uma função é elementar sobre K se ela pertence a um corpo elementar sobre K.

Note que se o corpo de funções é $C(x)$ (o corpo das funções racionais), por exemplo, as funções trigonométricas são elementares sobre $C(x)$. No caso de $\sin(x)$, por exemplo, temos

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right),$$

onde θ é a exponencial de ix.

2.2.3 Gerador Liouvilliano

Definição: Seja K um corpo de funções. A função θ é um gerador Liouvilliano sobre K se:

(a) θ é algebrico sobre K, isto é, θ é solução de uma equação polinomial com coeficientes em K.

(b) θ é uma exponencial sobre K, isto é, existe um η em K tal que $\theta' = \eta'\theta$.

(c) θ é uma integral sobre K, isto é, existe um η em K tal que $\theta' = \eta$. , que é uma maneira de dizer que $\theta = \int \eta$.

2.2.4 Função Liouvilliana

Definição: Seja K um corpo de funções. Uma extensão do corpo $K(\theta_1, ..., \theta_n)$ é chamado um corpo de funções Liouvillianas sobre K se todo θ_i é um gerador Liouvilliano sobre K. Uma função é Liouvilliana sobre K se ela pertence a um corpo Liouvilliano sobre K.

Esta definição é mais geral que aquela dada acima para funções elementares uma vez que todo logaritmo é uma integral.

2.3 O Método de Prelle e Singer

Considere a classe de 1EDOs que podem ser escritas como

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{2.11}$$

onde $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são polinômios com coeficientes no corpo dos números complexos.

Em [7], Prelle e Singer provaram que, se existe uma solução escrita em termos de funções elementares de (2.11), então é possível encontrar um fator integrante R com R^n racional para algum inteiro n, tal que

$$\frac{\partial(RN)}{\partial x} + \frac{\partial(RM)}{\partial y} = 0. \tag{2.12}$$

A EDO pode, então, ser resolvida por quadratura.

De (2.12) vemos que

$$N\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial M}{\partial y} = 0. \tag{2.13}$$

Dessa forma, definindo

$$D \equiv N\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.14}$$

podemos reescrever (2.13) na forma

$$\frac{D[R]}{R} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2.15}$$

A seguir, explicitamos a forma do fator integrante como produto de potências de polinômios

$$R = \prod_i f_i^{n_i}, \tag{2.16}$$

onde f_i são polinômios irredutíveis e n_i são números racionais não nulos. De (2.14) obtemos então

$$\begin{aligned} \frac{D[R]}{R} &= \frac{D[\prod_i f_i^{n_i}]}{\prod_i f_k^{n_k}} = \frac{\sum_i f_i^{n_i-1} n_i D[f_i] \prod_{j \neq i} f_j^{n_j}}{\prod_k f_k^{n_k}} \\ &= \sum_i \frac{f_i^{n_i-1} n_i D[f_i]}{f_i^{n_i}} = \sum_i \frac{n_i D[f_i]}{f_i}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pela (2.15), e usando o fato que M e N são polinômios, concluímos que $D[R]/R$ é um polinômio. Assim, vemos a partir de (2.17), que f_i deve ser um divisor de $D[f_i]$. Temos então um critério de busca para candidatos para f_i (encontrar os polinômios tais que $f_i|D[f_i]$). Dessa forma, usando (2.15) e (2.17), devemos ter

$$\sum_i \frac{n_i D[f_i]}{f_i} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2.18}$$

Devemos encontrar um conjunto de n_i e f_i que resolva (2.18), podendo construir um fator integrante para a EDO cuja solução fica reduzida a uma quadratura. O algoritmo de Risch [6] pode ser então aplicado a essa quadratura para determinar se existe solução em termos de funções elementares.

Podemos notar que as equações para f_i escritas na forma

$$D[f_i] = f_i g_i, \tag{2.19}$$

(sendo g_i polinômios) têm aspecto semelhante a uma equação de autovalor, e por essa razão f_i são ocasionalmente chamados autopolinômios [14]. Usa-se mais comumente, no entanto, o termo *Polinômios de Darboux* (PDs) para designar os f_i , e esta será a nomenclatura que adotaremos.

2.3.1 Exemplo

Para ilustrar esse procedimento, faremos a aplicação do método PS para determinar o fator integrante da seguinte equação:

$$y' = \frac{y(x+y)}{x^2}. \tag{2.20}$$

Neste caso, com

$$D = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y(x+y)\frac{\partial}{\partial y},$$

é fácil mostrar que a equação (2.19) é satisfeita para

$$f_1 = y,\ g_1 = x+y,$$

$$f_2 = x,\ g_2 = x.$$

Usando esses resultados em (2.18) temos

$$n_1x + n_2y + n_2x = 3x + 2y,$$

que tem como solução $n_1 = -2$ e $n_2 = -1$. Obtemos então o fator integrante

$$R = f_1^{n_1} f_2^{n_2} = \frac{1}{xy^2}.$$

2.4 1EDOs com Funções Elementares

No procedimento descrito por Prelle e Singer, assume-se que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ que aparecem em (2.11)

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

são polinômios em (x, y), fora desta classe, no entanto, existem muitas 1EDOs que gostaríamos de resolver. Shtokhamer [8] estendeu o método PS para tratar 1EDOs com funções elementares de (x, y) presentes em $M(x, y)$ e $N(x, y)$. Basicamente, trataremos $M(x, y)$ e $N(x, y)$ como *polinômios* em (x, y, u_i), onde u_i são funções elementares. Para permitir que o método PS lide com os termos de funções elementares que aparecem em $M(x, y)$ e $N(x, y)$, o conjunto original de variáveis da EDO (x e y) é acrescido de uma base de funções que chamaremos *potencialmente independentes* $(u_1, u_2, ..., u_n)$ presentes na EDO. Uma nova função u_i é considerada potencialmente independente se ela não é uma potência racional de algum elemento já presente em U. Assim, $u_1 = \sin(x)$ e $u_2 = \cos(x)$ são considerados funções potencialmente independentes para os propósitos de construção de U, apesar de serem algebricamente dependentes pela relação $u_1^2 = 1 - u_2^2$.

Os polinômios de Darboux são então construídos a partir de $(x, y, u_1, u_2, ..., u_n)$.

Notamos então que (2.15)

$$\frac{D[R]}{R} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right), \tag{2.21}$$

é escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{D[R]}{R} = &-\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_i}\right) N(x, y, u_1 \ldots u_n) + \\ &-\left(\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_i}\right) M(x, y, u_1 \ldots u_n).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Uma breve inspeção nesta equação mostra que seu lado direito não será, em geral, um polinômio em $(x, y, u_1, u_2, ..., u_n)$ (como seria desejável para que se aplicasse o método PS). Esses termos não polinomiais podem ter duas origens:

1. $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ podem produzir funções que não estejam em $\{u_1, ..., u_n\}$;
2. $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ podem ser racionais ao invés de polinomiais.

Podemos tratar o primeiro caso notando que os $u_i, (i = 1, \ldots, n)$, presentes na 1EDO são, por hipótese, elementares. Criamos uma extensão da base de funções, U, partindo de $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e diferenciando os elementos de U. Qualquer nova função potencialmente dependente u_i que apareça na diferenciação é adicionada a U e o processo é repetido até que nenhuma nova função apareça, fornecendo a base final $U = \{u_1, \ldots, u_n, \ldots, u_{n+m}\}$.

O segundo problema é eliminado se multiplicarmos (2.22) pelo produto dos denominadores gerados por $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial u_i}{\partial y}$. Nós ilustraremos esses pontos com um exemplo simples. Considere a EDO

$$y' = \frac{\ln(x) + \sin(x)}{y(x)}. \tag{2.23}$$

Buscando termos não polinomiais na EDO encontramos

$$u_1 = \ln(x), \;\; u_2 = \sin(x). \tag{2.24}$$

Calculamos as derivadas destas funções e obtemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{x}, \;\; \frac{\partial u_2}{\partial x} = \cos(x), \;\; \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \;\; \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \tag{2.25}$$

notando que uma nova função, $\cos(x)$, foi introduzida. De maneira que agora passamos a ter

$$u_1 = \ln(x), \;\; u_2 = \sin(x), \;\; u_3 = \cos(x). \tag{2.26}$$

Precisamos checar se as derivadas desse conjunto introduz alguma nova função. Nesse exemplo, fica claro que nenhuma nova função aparece, uma vez que a única possibilidade é

$$\frac{\partial \cos(x)}{\partial x} = -\sin(x), \;\; \left(i.e., \frac{\partial u_3}{\partial x} = -u_2 \right), \tag{2.27}$$

completando, assim, a base de funções potencialmente independentes.

Nesse ponto, nós teremos resolvido o primeiro problema mencionado acima. Ainda assim, da (2.25) podemos ver a derivada de $\ln(x)$ gera o denominador x. Para assegurar que o lado direito de (2.22) seja polinomial temos que multiplicar a equação pelo denominador de $\partial u_1/\partial x$ (neste caso, por x).

Podemos resumir o procedimento pelos seguintes passos:

1. completar U, o conjunto de funções que aparecem na 1EDO;

2. construir P pelo produto dos denominadores das derivadas parciais dos membros de U;

3. definir um novo operadoa diferencial $\mathcal{D} \equiv PD$;

4. substituir $\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}$ por $P\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ obtendo

$$\sum_i \frac{n_i \mathcal{D}[f_i]}{f_i} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) P; \tag{2.28}$$

5. repetir o procedimento utilizado para 1EDOs racionais.

Capítulo 3

Investigando a Estrutura do Fator Integrante

Em nosso trabalho, o ponto central para resolver uma equação diferencial ordinária (seja de primeira ou de segunda ordem) é a obtenção de um de seus fatores integrantes[1]. Neste capítulo, estaremos investigando a estrutura do FI para 1EDOs do tipo 2.1. O resultado obtido por nós nessa investigação será utilizado no próximo capítulo na resolução de L1EDOs.

[1]No caso de equações diferenciais de segunda ordem, o termo *fator integrante* refere-se ao procedimento de reduzir a ordem da equação, conforme apresentado no capítulo 5.

3.1 Primeiro Teorema

Mostraremos, a seguir, que o fator integrante para uma 1EDO do tipo $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, onde M e N são polinômios em (x,y), terá a forma

$$R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}. \tag{3.1}$$

Onde r_0 é uma função racional de (x,y), os p_i's são polinômios irreutíveis em (x,y) e os c_i's são constantes. Mostraremos, ainda, que $D[r_0]$ ($D \equiv N\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y}$) é polinomial, o que acarretará, por exemplo, $p_i | D[p_i]$.

Começamos, portanto, apresentando nosso primeiro resultado na forma de um teorema [16]:

Teorema 1: *Se uma 1EDO da forma $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$ (onde M e N são polinômios em (x,y)) possui solução liouvilliana, então é possível encontrar um fator integrante $R(x,y)$ que pode ser escrito na forma*

$$R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}, \tag{3.2}$$

onde r_0 é uma função racional de (x,y), p_i's são polinômios irreutíveis em (x,y) e c_i's são constantes.

Para provar este teorema, precisaremos do seguinte lema.

Lema: Se ω é uma função de (x,y) tal que as derivadas parciais (ω_x, ω_y) são funções racionais de (x, y), então ω pode ser escrito como:

$$\omega = r_0 + \sum_i \alpha_i \ln(r_i). \tag{3.3}$$

onde os r_i's são funções racionais de (x, y) (incluindo r_0), e α_i são constantes.

Demonstração do Lema:

Coloquemos ω no seguinte formato[2]:

$$\omega = f(x) + g(y) + h(x, y), \tag{3.4}$$

onde f é uma função de x apenas, g é uma função de y apenas e h é uma função tal que $\int h_x\, dx = \int h_y\, dy = h$. Assim, temos que:

$$\omega_x = h_x + \frac{df}{dx} \tag{3.5}$$

$$\omega_y = h_y + \frac{dg}{dy} \tag{3.6}$$

$$\int \omega_x\, dx = \int h_x\, dx + \int \frac{df}{dx}\, dx = h + f \tag{3.7}$$

$$\int \omega_y\, dy = \int h_y\, dy + \int \frac{dg}{dy}\, dy = h + g \tag{3.8}$$

De resultados bem conhecidos a respeito de integração formal [15], temos que se $\rho(u)$ é uma função racional de u, então:

$$\int \rho(u)\, du = \rho_0(u) + \sum_i \kappa_i \ln(\rho_i(u)) \tag{3.9}$$

[2]Qualquer função analítica pode ser escrita nessa forma. Como ficará claro a seguir, esta forma é conveniente para nossa demonstração.

onde ρ_i $(i = 0, ...)$ são funções racionais de u, e κ_i $(i = 1, ...)$ são constantes.

Dessa forma, se tivermos uma função $F(u)$ tal que a derivada (dF/du) é uma função racional de u, então $F(u)$ pode ser escrita como:

$$\int \frac{dF}{du}\, du = F = F_0 + \sum_i C_i \ln(F_i). \tag{3.10}$$

onde os F_i's são funções racionais de u (incluindo F_0), e C_i são constantes.

Suponha agora que as hipóteses do lema são satisfeitas. Então, uma vez que ω_x é uma função racional de (x, y) (veja (3.5)), h_x é uma função racional de (x, y) e df/dx é uma função racional de x. Assim, de (3.10), temos:

$$\int h_x\, dx = h = h_0(x, y) + \sum_i c_i(y) \ln(h_i(x, y)), \tag{3.11}$$

onde h_i são funções de (x, y), racionais em x, e c_i não dependem de x, e

$$\int \frac{df}{dx}\, dx = f = f_0(x) + \sum_j a_j \ln(f_j(x)), \tag{3.12}$$

onde f_j são funções racionais de x apenas, e a_j são constantes.

Segundo resultados de [15], em princípio, h_i e c_i poderiam ser funções algébricas de y. Entretanto, ω_y é uma função racional de (x, y) o que implica (veja (3.6)) que h_y é uma função racional de (x, y) e dg/dy é uma função racional de y apenas. Assim, diferenciando (3.11) em relação a y, temos:

$$h_y = h_{0y} + \sum_i c_i \frac{h_{iy}}{h_i} + \sum_i \frac{dc_i}{dy} \ln(h_i), \tag{3.13}$$

Uma vez que h_y é uma função racional de (x, y), os termos logarítmicos devem desaparecer, levando a (pois eles não podem se cancelar) $dc_i/dy = 0 \rightarrow c_i$ são constantes. Sabendo isto, integrando (3.13) com relação a y temos:

$$\int h_y\, dy = h = h_0(x,y) + \sum_i c_i \ln(h_i(x,y)), \tag{3.14}$$

onde c_i são constantes. Pela (3.10), concluímos que h_i devem ser funções racionais de y e não funções algébricas. Então, os h_i*'s* $(i = 0, 1, ...)$ são funções racionais de (x, y).

Como dg/dy é uma função racional de y, temos:

$$\int \frac{dg}{dy}\, dy = g = g_0(y) + \sum_k b_k \ln(g_k(y)), \tag{3.15}$$

onde b_k são constantes e g_k são funções racionais de y.

Finalmente, uma vez que $\omega = f(x) + g(y) + h(x,y)$, podemos concluir que ω pode ser escrito como (3.3)

$$\omega = r_0 + \sum_i \alpha_i \ln(r_i). \tag{3.16}$$

como queríamos demontrar.

Para demonstrar o teorema, precisaremos , ainda, de um resultado obtido por Singer em ([9]):

Teorema de Singer: *Considere uma L1EDO da forma* $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, *onde* M *e* N *são polinômios em* (x,y). *Seu fator integrante deve ser da forma* $e^{(\int (Udx+Vdy))}$, *onde* U *e* V *são funções racionais de* (x,y) *com* $U_y = V_x$ *de tal forma que sua integral de linha está bem definida*[3].

[3] *A partir de agora, estaremos representando* $\partial_u F$ *como* F_u.

Usando este resultado de Singer e o lema que demonstramos podemos provar o teorema 1:

Demonstração do Teorema 1:

Considere que as hipóteses do teorema de Singer são satisfeitas. Uma vez que $U_y = V_x$, podemos encontrar uma função $\omega(x, y)$ tal que $d\omega = U\,dx + V\,dy$, isto é, $\omega_x = U$ e $\omega_y = V$. Assim, usando o resultado de Singer é imediato que

$$R = e^{\int (U dx + V dy)} = e^{\int d\omega} = e^{\omega}. \tag{3.17}$$

Note que, pelas hipóteses no teorema de Singer, $\omega_x = U$ e $\omega_y = V$ são funções racionais de (x, y). Então, usando o lema que demonstramos, podemos escrever

$$R = e^{\omega} = e^{r_0 + \sum_i \alpha_i \ln(r_i)} = e^{r_0} \prod_i (r_i)^{\alpha_i}, \tag{3.18}$$

onde os r_i's são funções racionais de (x, y) (incluindo r_0), e α_i são constantes. Uma vez que r_i's são racionais, podemos escrever $\prod_i (r_i)^{\alpha_i}$ como um produto de potências de polinômios irredutíveis, que colocaremos na forma

$$R = e^{r_0} \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}. \tag{3.19}$$

onde r_0 é uma função racional de (x, y), os p_i's são polinômios irredutíveis em (x, y) e os β_i's são constantes, completando, assim, a demonstração

3.2 Segundo Teorema

Nesta seção, mostramos que a aplicação do operador $D \equiv N\partial_x + M\partial_y$ na função racional r_0, que aparece no termo exponencial do fator integrante

$$R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$$

tem um resultado polinomial [17].

Teorema 2: *Seja uma L1EDO da forma $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, onde M e N são polinômios em (x,y), com fator integrante R dado por $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$, onde r_0 é função racional de (x,y), p_i são polinômios irredutíveis em (x,y) e c_i são constantes, então $D[r_0]$ é um polinômio em (x,y), onde $D \equiv N\partial_x + M\partial_y$.*

Demonstração do Teorema 2: Na seção (2.3), vimos que se R é um fator integrante para uma 1EDO do tipo $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, obtemos a relação (2.15)

$$\frac{D[R]}{R} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right), \tag{3.20}$$

Substituindo $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$, nesta equação, temos:

$$D[r_0] + \sum_i \frac{c_i D[p_i]}{p_i} = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right), \tag{3.21}$$

Uma vez que r_0 é uma função racional, podemos escrever (4.11) como:

$$D\left[\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right] + \sum_i c_i \frac{D[p_i]}{p_i} = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right), \tag{3.22}$$

onde P e Q são polinômios em (x, y) sem quaisquer fatores comuns. Escrevendo $\sum_i c_i \frac{D[p_i]}{p_i}$ como um único quociente, temos:

$$D\left[\frac{P}{Q}\right] + \frac{\sum_j c_j (\prod_{i, i\neq j} p_i) D[p_j]}{\prod_i p_i} = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right). \tag{3.23}$$

Expandindo $D\left[\frac{P}{Q}\right]$ e multiplicando os dois lados de (3.23) por $\prod_i p_i$, podemos escrever:

$$\prod_i p_i \, \frac{Q\, D[P] - P\, D[Q]}{Q^2} + \sum_j c_j (\prod_{i, i\neq j} p_i) D[p_j] = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right) (\prod_i p_i). \tag{3.24}$$

Como D é um operador diferencial linear, com coeficientes polinomiais, e os p_i's são polinômios, os $D[p_i]$'s também são polinômios. Desta forma, $\sum_j c_j (\prod_{i, i\neq j} p_i) D[p_j]$ é polinomial assim como o lado direito de (3.24). A partir disto, podemos concluir que o termo

$$\prod_i p_i \, \frac{Q\, D[P] - P\, D[Q]}{Q^2} \tag{3.25}$$

é polinomial.

Notando que $Q\, D[P] - P\, D[Q]$ é polinomial e os p_i's são polinômios irredutíveis independentes, $\prod_i p_i$ não pode cancelar Q^2 (isto é, $\prod_i p_i / Q^2$ não pode ser polinomial). Temos então duas situações possíveis:

- $\prod_i p_i$ e Q não têm fatores em comum.

- $\prod_i p_i$ e Q têm fatores em comum.

1. **Primeira situação:** Uma vez que $\prod_i p_i$ não tem qualquer fator em comum com Q (e portanto não tem fator em comum com Q^2) e $\prod_i p_i \frac{Q\,D[P]-P\,D[Q]}{Q^2}$ é polinomial, devemos ter que

$$D[r_0] = \frac{Q\,D[P] - P\,D[Q]}{Q^2} \tag{3.26}$$

é ele próprio um polinômio, como queríamos demonstrar.

2. **Segunda situação:** Neste caso teremos um pouco mais de trabalho. Primeiramente, consideremos que, em $\prod_i p_i$, i varia de 1 a n. Com isto em mente, estabelecemos a seguinte notação:

Representando o fator comum de Q e $\prod_{i=1}^{n} p_i$ como:

$$\mathcal{I} = \prod_{i=1}^{n_{\mathcal{I}}} p_i, \tag{3.27}$$

e os termos em $\prod_{i=1}^{n} p_i$ que não estão presentes em Q como:

$$\pi = \prod_{i=n_{\mathcal{I}}+1}^{n} p_i, \tag{3.28}$$

podemos escrever:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = \pi\,\mathcal{I}. \tag{3.29}$$

Lembrando que Q é polinomial, podemos escrevê-lo como um produto de potências de polinômios irredutíveis. Como, por hipótese, Q tem um fator

$\mathcal{I}$ comum a $\prod_{i=1}^{n} p_i$, escrevemos:

$$Q = \theta\, \mathcal{I} = \left(\prod_{i=1}^{n_\theta} q_i^{m_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{n_\mathcal{I}} p_i\right), \tag{3.30}$$

onde q_i são polinômios irredutíveis e m_i são inteiros positivos[4].

Reescrevendo (3.25) nesta notação e expandindo, temos:

$$\begin{aligned} \prod_i p_i \, \frac{Q\, D[P] - P\, D[Q]}{Q^2} &= (\pi\, \mathcal{I}) \, \frac{Q\, D[P] - P\, D[Q]}{Q\, \theta\, \mathcal{I}} \\ &= \pi \, \frac{Q\, D[P] - P\, D[Q]}{Q\, \theta} = \pi \, \frac{D[P]}{\theta} - \pi\, P \, \frac{D[Q]}{Q\, \theta} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Lembrando que o termo (3.26) é um polinômio, se nós o multiplicarmos por θ (que é ele mesmo um polinômio, veja (3.30)), temos que

$$\pi\, D[P] - \pi\, P \, \frac{D[Q]}{Q} \tag{3.32}$$

é polinomial. Dessa forma, como $\pi\, D[P]$ é um polinômio, nós finalmente concluímos que

$$\pi\, P \, \frac{D[Q]}{Q} \tag{3.33}$$

é um polinômio. Pelo fato que π e P não têm fatores em comum com Q, podemos assegurar que $D[Q]/Q$ é um polinômio. Usando este fato e denotando

$$Q = \prod_{i=1}^{n_q} q_i^{k_i} \, (= \theta\, \mathcal{I}), \tag{3.34}$$

[4]Note que alguns dos q_i's podem ser os mesmos polinômios irredutíveis que aparecem em $\mathcal{I}$.

onde os Q_i são polinômios irredutíveis e os k_i são inteiros, temos que

$$\frac{D[Q]}{Q} = \frac{D[\prod_{i=1}^{n_q} Q_i^{k_i}]}{\prod_{i=1}^{n_q} Q_i^{k_i}} = \sum_{i=1}^{n_q} k_i \frac{D[Q_i]}{Q_i}. \tag{3.35}$$

Se multiplicarmos (3.35) por $\prod_{j=2}^{n_q} Q_j$, temos

$$\left(\prod_{j=2}^{n_q} Q_j\right) \frac{D[Q]}{Q} = k_1 \left(\prod_{j=2}^{n_q} Q_j\right) \frac{D[Q_1]}{Q_1} + \sum_{i=2}^{n_q} k_i \left(\prod_{j=2, j\neq i}^{n_q} Q_j\right) D[Q_i]. \tag{3.36}$$

Uma vez que o lado esquerdo de (3.36) e o segundo termo do lado direito de (3.36) são polinômios, podemos concluir que $k_1 \left(\prod_{j=2}^{n_q} Q_j\right) D[Q_1]/Q_1$ também é polinomial. Considerando que os Q's são independentes (por construção), o produto $\prod_{j=2}^{n_q} Q_j$ não pode cancelar Q_1. Então, concluímos que $Q_1|D[Q_1]$. De maneira análoga, temos que $Q_i|D[Q_i], i = 2 \cdots n_q$. Finalmente, olhando (3.34) (notando que os Q's são apenas outros nomes para os q's e p's que constroem Q), podemos dizer que $q_i|D[q_i]$, $i = 1 \cdots n_\theta$ e $p_i|D[p_i]$, $i = 1 \cdots n_\mathcal{I}$.

Escrevendo eq.(4.11) na forma:

$$D[r_0] + \sum_{i=1}^{n_\mathcal{I}} \frac{c_i D[p_i]}{p_i} + \sum_{i=n_\mathcal{I}+1}^{n} \frac{c_i D[p_i]}{p_i} = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right), \tag{3.37}$$

e, como $p_i|D[p_i], i = 1..n_\mathcal{I}$, temos que $\sum_{i=1}^{n_\mathcal{I}} \frac{c_i D[p_i]}{p_i}$ é um polinômio. Então

$$D[r_0] + \sum_{i=n_\mathcal{I}+1}^{n} \frac{c_i D[p_i]}{p_i} \tag{3.38}$$

é um polinômio. Podemos escrever (4.13) como:

$$D\left[\frac{P}{Q}\right] + \frac{\sum_{j=n_\mathcal{I}+1}^{n} c_j (\prod_{i=n_\mathcal{I}+1, i\neq j}^{n} p_i) D[p_j]}{\prod_{i=n_\mathcal{I}+1}^{n} p_i}. \tag{3.39}$$

Multiplicando (3.39) por $\prod_{i=n_{\mathcal{I}}+1}^{n} p_i$, temos:

$$\prod_{i=n_{\mathcal{I}}+1}^{n} p_i \, \frac{Q\,D[P]-P\,D[Q]}{Q^2} + \sum_{j=n_{\mathcal{I}}+1}^{n} c_j \left(\prod_{i=n_{\mathcal{I}}+1, i\neq j}^{n} p_i \right) D[p_j], \tag{3.40}$$

que também é um polinômio. Como $\sum_j c_j(\prod_{i,i\neq j} p_i)D[p_j]$ é ele próprio um polinômio, podemos afirmar com segurança que:

$$\prod_{i=n_{\mathcal{I}}+1}^{n} p_i \, \frac{Q\,D[P]-P\,D[Q]}{Q^2} \tag{3.41}$$

é um polinômio. Uma vez que $\prod_{i=n_{\mathcal{I}}+1}^{n} p_i$ não tem fator comum a Q, concluímos finalmente que $\frac{Q\,D[P]-P\,D[Q]}{Q^2} = D[r_0]$ é polinomial, como queríamos demonstrar.

Corolário 1: *Se $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$ (onde r_0 é uma função racional de (x,y), os p_i's são polinômios irredutíveis em (x,y) e os c_i's são constantes) é o fator integrante para a L1EDO $dy/dx = M/N$, onde M, N são polinômios em (x,y), então $p_i|D[p_i]$.*

Este resultado é a base para o desenvolvimento de um método para resolver uma classe de L1EDOs, apresentado no próximo capítulo.

3.3 Como nosso Fator Integrante para L1EDOs se reduz ao de Prelle e Singer para E1EDOs?

Ao chegarmos ao resultado descrito pelo teorema 1, com a forma geral do FI para L1EDOs, estamos lidando com um conjunto de 1EDOs mais geral que aquele tratado por Prelle e Singer, uma vez que as soluções liouvillianas englobam as soluções elementares. Para L1EDOs, temos o FI $R = e^{r_0(x,y)}\prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$, e no caso de soluções elementares $R = \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$. Surge então a seguinte pergunta: por que podemos eliminar o termo $e^{r_0(x,y)}$ de R no caso da solução da 1EDO ser elementar?

Para responder esta questão, começaremos lembrando que, com o fator integrante $R(x,y)$, obtemos a solução implícita para a 1EDO $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$ pela expressão (2.6) com os termos $M(x,y)$ e $N(x,y)$ multiplicados pelo FI

$$F(x,y) = \int^{y}\left[R(x,y)N(x,y) + \int^{x}\frac{\partial[R(x,y)M(x,y)]}{\partial y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y - \int^{x} R(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x = C. \quad (3.42)$$

Fazemos, então, a suposição que estamos tratando uma 1EDO com solução expressa em termos de funções elementares. Isto implica (pelo teorema 1) que o FI pode ser escrito na forma (4.9)

$$R = e^{r_0(x,y)}\prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}, \quad (3.43)$$

uma vez que o conjunto de E1EDOs está contido no conjunto de L1EDOs. Substituindo este FI em 3.42 temos

$$\int^{y}\left[e^{r_0}\prod_{i=1}^{n} p_i{}^{c_i}N + \int^{x}\frac{\partial[e^{r_0}\prod_{i=1}^{n} p_i^{c_i}M]}{\partial y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y - \int^{x} e^{r_0}\prod_{i=1}^{n} p_i{}^{c_i}M(x,y)\mathrm{d}x = C, \quad (3.44)$$

onde r_0 é uma função racional de x e y, M, N e p_i são polinômios em x e y, C e c_i são constantes. Após realizarmos as integrais acima, devemos ter (pelas propriedades da exponencial frente integrações)

$$e^{r_0} f(x,y) = C, \tag{3.45}$$

onde, pela nossa suposição, $f(x,y)$ é escrita em termos de funções elementares. Esta função $f(x,y)$, que resulta das integrações em 3.44, deve ser tal que (veja 2.3)

$$\frac{\partial[e^{r_0} f(x,y)]}{\partial y} = R(x,y)N(x,y); \; \frac{\partial[e^{r_0} f(x,y)]}{\partial x} = -R(x,y)M(x,y), \tag{3.46}$$

ou seja,

$$e^{r_0}\left[\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial r_0}{\partial y}\right] = e^{r_0}\prod_{i=1}^{n} p_i{}^{c_i} N(x,y) \tag{3.47}$$

e

$$e^{r_0}\left[\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial r_0}{\partial x}\right] = -e^{r_0}\prod_{i=1}^{n} p_i{}^{c_i} M(x,y). \tag{3.48}$$

Uma vez que o lado direito das equações acima compõe-se apenas de funções racionais, devemos ter

$$\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial r_0}{\partial y} = g(x,y), \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial r_0}{\partial x} = h(x,y), \tag{3.50}$$

onde $g(x,y)$ e $h(x,y)$ são funções racionais. Levando em conta a hipótese que $f(x,y)$ é elementar, vamos reescrevê-la na forma

$$f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y),$$

de maneira que $f_1(x,y)$ seja racional e $f_2(x,y)$ contenha funções elementares. Neste caso, devemos ter

$$\frac{\partial[f_2(x,y)]}{\partial y} = -f_2(x,y)\frac{\partial r_0}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial[f_2(x,y)]}{\partial x} = -f_2(x,y)\frac{\partial r_0}{\partial x}.$$

Estas relações correspondem à definição de exponencial (veja capítulo 1), com $f_2(x,y)$ $= e^{-r_0}$, que torna $f_2(x,y)$ irrelevante em (3.45), restringindo forma geral de $f(x,y)$ a

$$f(x,y) = \prod_{i=1}^{n} q_i{}^{d_i}, \tag{3.51}$$

onde q_i são polinômios e d_i são constantes.

Usando este resultado em (3.45), temos

$$e^{r_0} = \frac{C}{\prod_{i=1}^{n} q_i{}^{d_i}}. \tag{3.52}$$

Podemos, então, reescrever $R(x,y)$ como

$$R = \frac{C}{\prod_{i=1}^{n} q_i{}^{d_i}} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}, \tag{3.53}$$

que podemos expressar na forma

$$R = \prod_{i} f_i^{n_i}. \tag{3.54}$$

Concordando com o resultado de Prelle e Singer para o fator integrante de E1EDOs.

Capítulo 4

Um Método Semi-Algorítmico para Resolver uma Classe de L1EDOs

Neste capítulo, introduziremos um método para encontrar o fator integrante para uma classe de L1EDOs [16]. Inspirados no método de Prelle e Singer, criamos um algoritmo que é capaz de resolver 1EDOs com soluções liouvillianas. Mais especificamente, para a forma geral do FI, $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$, desenvolvemos um processo semi-algorítmico para encontrar R quando o expoente $r_0(x,y)$ se enquadra em alguns casos, que veremos a seguir.

Primeiramente, analizaremos a generalidade do nosso método. Apresentaremos então em detalhes o método, para, depois, finalmente, ilustrar sua aplicabilidade com alguns exemplos.

No capítulo anterior, deduzimos que para L1EDOs do tipo

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{4.1}$$

a forma geral do fator integante é

$$R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}. \tag{4.2}$$

Notemos que, se r_0 for constante, o fator integrante R estará ao alcance do método PS.

Vejamos os exemplos das seguintes 1EDOs:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3\,x^2y^2 + x^3 + 1}{4\,(x+1)\,(x^2 - x + 1)\,y} \tag{4.3}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + yx + x - 1. \tag{4.4}$$

Estas equações apresentam soluções gerais dadas respectivamente por:

$$y^2 - \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}\left(\int \frac{1}{2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}}\,dx - C\right) = 0, \tag{4.5}$$

e

$$y = \frac{2\,e^{(x-2)^2/2}}{i\sqrt{2\pi}\,erf(i\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)) + C} - 1. \tag{4.6}$$

Notamos que ambas as soluções são expressas por funções *não* elementares. Mas para a 1EDO (4.3), o método de PS consegue encontrar a solução (4.5). O mesmo não é verdade para a (4.4), o que está acontecendo?

Estes resultados podem ser melhor compreendidos se olharmos os fatores integrantes para essas 1EDOs, que são respectivamente:

$$R = \left(x^3 + 1\right)^{-3/2}, \tag{4.7}$$

e

$$R = \frac{e^{x\,(x-4)/2}}{(y+1)^2}. \tag{4.8}$$

Uma vez que o procedimento PS padrão constrói candidatos a fatores integrantes a partir de polinômios nas variáveis (x, y), nota-se imediatamente que, se o fator integrante (4.8) apresenta a exponencial $e^{x\,(x-4)/2}$, ele nunca será encontrado pelo método. A seguir, iremos propor um método para encontrar R para uma classe de equações em que r_0 *não* é constante (onde o método PS usual falharia).

Usando a forma geral de R, para L1EDOs dado por

$$R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}, \tag{4.9}$$

em (2.15)

$$\frac{D[R]}{R} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right), \tag{4.10}$$

encontramos

$$D[r_0(x,y)] + \sum_i \frac{c_i D[p_i]}{p_i} = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right). \tag{4.11}$$

No método PS, o análogo da equação acima é (2.18):

$$\sum_i \frac{n_i D[f_i]}{f_i} = -\left(\partial_x N + \partial_y M\right).$$

Note que a maior diferença entre estas duas equações é o termo "extra" $D[r_0]$ em (4.11). Para (2.18), usando o fato que M e N são polinômios em (x, y), prova-se que f_i são autopolinômios do operador D, i.e., $f_i|D[f_i]$[7]. Voltemos à (4.11), no capítulo anterior, mostramos que $D[r_0]$ é um polinômio e, portanto, concluímos que p_i são autopolinômios do operador D, i.e., $p_i|D[p_i]$.

De posse deste conhecimento, podemos propor um método semi-algorítmico (no mesmo sentido do método PS usual) para tratar alguns casos da função $r_0(x, y)$.

4.1 O Método

O método que introduziremos agora lida com três diferentes formas gerais para $r_0(x, y)$:

1. $r_0 = r_0(x)$

2. $r_0 = r_0(y)$

3. $r_0 = r(x) + s(y)$

onde todas as funções acima são racionais.

As L1EDOs que correspondem a esses casos definem a classe de equações que são resolvidas por nosso método.

O primeiro passo de nosso método, para todos os casos descritos abaixo, é usar o fato que os p_i's são auto-polinômios do operador D e, portanto, temos: $D[p_i] = g_i\, p_i$, onde g_i são polinômios chamados auto-valores de D. Podemos, então, calcular todos os p_i e respectivos g_i associados, até um certo grau (da mesma forma que é feito no método PS) para a L1EDO que queremos resolver. Usamos, então, o conjunto dos p_i's e g_i's nas próximas etapas do método. Vejamos agora, em detalhes, os diferentes passos para cada caso:

4.1.1 Primeiro Caso: $r_0 = r_0(x)$

Lembrando que o operador D é definido por $D \equiv N\partial_x + M\partial_y$, (4.11) torna-se:

$$N\frac{dr_0(x)}{dx} + \sum_i \frac{c_i D[p_i]}{p_i} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4.12}$$

Podemos então escrever (4.12) como:

$$N\frac{dr_0(x)}{dx} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) - \sum_i c_i\, g_i. \tag{4.13}$$

Que nos leva a

$$\frac{dr_0(x)}{dx} = -\frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\, g_i}{N}. \tag{4.14}$$

Para encontrar $r_0(x)$ precisamos, primeiramente, integrar (4.14):

$$r_0(x) = -\int \frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\ g_i}{N}\, dx. \tag{4.15}$$

Uma vez que r_0 é uma função racional de x apenas, podemos determinar os c_i's impondo que a derivada do lado direito de (4.15) em relação a y seja igual a zero e que desapareçam os termos logarítmicos que viriam da integração. Da mesma forma, se conseguirmos encontrar um conjunto de c_i's satisfazendo essas condições, no grau considerado, teremos encontrado o fator integrante para a L1EDO. Caso contrário, aumentamos o grau dos p_i's e fazemos nova tentativa, como é feito no método PS.

4.1.2 Segundo Caso: $r_0 = r_0(y)$

Analogamente ao que foi feito para o caso anterior, para este caso, (4.11) torna-se:

$$M\frac{dr_0(y)}{dy} + \sum_i \frac{c_i D[p_i]}{p_i} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4.16}$$

Esta equação (4.16) pode ser reescrita como:

$$M\frac{dr_0(y)}{dy} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) - \sum_i c_i\ g_i. \tag{4.17}$$

E, portanto,

$$\frac{dr_0(y)}{dy} = -\frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\ g_i}{M}. \tag{4.18}$$

E encontramos $r_0(y)$ integrando (4.18):

$$r_0(y) = -\int \frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\ g_i}{M}\, dy. \tag{4.19}$$

Uma vez que r_0 é uma função *racional* de y apenas, podemos determinar os c_i's impondo que a derivada do lado direito de (4.19) em relação a x seja zero e que desapareçam os termos logaritmicos que viriam da integração. Da mesma forma, se conseguirmos encontrar um conjunto de c_i's satisfazendo essas condições, no grau considerado, teremos encontrado o fator integrante para a L1EDO. Caso contrário, aumentamos o grau dos p_i's e fazemos nova tentativa, como é feito no método PS.

4.1.3 Terceiro Caso: $r_0 = r(x) + s(y)$

Para este caso, (4.11) resulta:

$$N\frac{dr(x)}{dx} + M\frac{ds(y)}{dy} + \sum_i \frac{c_i D[p_i]}{p_i} = -\left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4.20}$$

Dividindo a equação acima por N e isolando $\frac{dr(x)}{dx}$, obtemos:

$$\frac{dr(x)}{dx} = -\frac{M}{N}\frac{ds(y)}{dy} - \frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\ g_i}{N}. \tag{4.21}$$

Integrando os dois lados da equação em relação a x:

$$r(x) = -\frac{ds(y)}{dy}\int \frac{M}{N}\, dx - \int \frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\ g_i}{N}\, dx. \tag{4.22}$$

Podemos, então, isolar $\frac{ds(y)}{dy}$ em (4.22) e encontrar:

$$\frac{ds(y)}{dy} = \frac{\displaystyle\int \frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\, g_i}{N}\, dx - r(x)}{\displaystyle\int \frac{M}{N}\, dx}. \tag{4.23}$$

Analogamente:

$$\frac{dr(x)}{dx} = \frac{\displaystyle\int \frac{N_x + M_y + \sum_i c_i\, g_i}{M}\, dy - s(y)}{\displaystyle\int \frac{N}{M}\, dy}. \tag{4.24}$$

Os c_i's têm de ser determinados ainda. Novamente, teremos de impor que $r(x)$ e $dr(x)/dx$ não dependam de de y e, analogamente, $s(y)$ e $ds(y)/dy$ não dependam de x. Feito isto, e impondo que tanto $r(x)$ como $s(y)$ sejam funções *racionais*, podemos esperar encontrar um conjunto adequado de valores para c_i. Neste caso, teremos encontrado $r(x)$ e $s(y)$ e, conseqüentemente o fator integrante. Se falharmos, teremos que aumentar o grau dos p_i's e tentar tudo novamente.

4.2 Exemplos

Nesta seção, apresentaremos um exemplo de aplicação de nosso método para cada um dos caso mencionados acima.

4.2.1 Primeiro Exemplo: $r_0 = r_0(x)$

Considere a L1EDO (**I.129** in [10]):

$$(x+1)\,\frac{dy}{dx} + y\,(y-x) = 0. \tag{4.25}$$

Para esta equação, em grau 1, temos que os auto-polinômios (com autovalores associados) são:

- $p_1 = y, \quad g_1 = (x - y)$,
- $p_2 = (x + 1), \quad g_2 = 1$.

Então, (4.15) fica:

$$r_0(x) = ((2 + c_1)\, y - c_2 + c_1) \ln(x + 1) - x - c_1\, x. \tag{4.26}$$

Impondo que r_0 é uma função racional de x, temos:

$$c_1 = -2, \quad c_2 = -2, \tag{4.27}$$

e, conseqüentemente (usando (4.9)):

$$r_0(x) = x, \quad \rightarrow \quad R = \frac{e^x}{y^2 (x + 1)^2} \tag{4.28}$$

4.2.2 Segundo exemplo: $r_0 = r_0(y)$

Considere a L1EDO (**I.235** in [10]):

$$(xy + a)\, \frac{dy}{dx} + by = 0. \tag{4.29}$$

Para esta equação, em grau 1, temos que os auto-polinômios (com autovalores associados) são:

- $p_1 = y, \quad g_1 = -b,$

Então, (4.15) fica:

$$r_0(y) = (-1 - c_1)\ln(y) + \frac{y}{b} \tag{4.30}$$

Impondo que r_0 é uma função racional de y, temos:

$$c_1 = -1, \tag{4.31}$$

e, conseqüentemente, (usando (4.9)):

$$r_0(y) = \frac{y}{b}, \quad \rightarrow \quad R = \frac{e^{\frac{y}{b}}}{y} \tag{4.32}$$

4.2.3 Terceiro Exemplo: $r_0 = r(x) + s(y)$

Considere a L1EDO de Abel do primeiro tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\,(y + x - 1)}{x^2}. \tag{4.33}$$

Para esta equação, em grau 1, temos que os auto-polinômios (com autovalores associados) são:

- $p_1 = x, \quad g_1 = x,$
- $p_2 = y, \quad g_2 = y^2 + yx - y,$
- $p_3 = x + y, \quad g_3 = x - y + y^2.$

Então, de (4.24) temos:

$$\frac{dr(x)}{dx} = -\frac{((-c_2-2)\,x^2+(2\,c_3+2\,c_2+6+c_1)\,x-c_3-c_2-2)\,y\ln(y)}{x^2\,(x-1+\ln(y)y-\ln(y+x-1)y)} +$$

$$-\frac{((-c_3-1)\,x^2-c_1\,x-1)\,y\ln(y+x-1)}{x^2\,(x-1+\ln(y)y-\ln(y+x-1)y)} +$$

$$-\frac{(-x^2+2\,x-1)\,ys(y)+(c_3+2+c_1)\,x^2+(-c_1-c_3-2)\,x}{x^2\,(x-1+\ln(y)y-\ln(y+x-1)y)} = 0 \qquad (4.34)$$

Levando a:

$$\left(-\frac{dr(x)}{dx}\,x^2y+\Big((-c_3-1)\,x^2-c_1\,x-1\Big)\,y\right)\ln(y+x-1)+\left(\frac{dr(x)}{dx}x^2y+\Big((-c_2-2)\,x^2+(2\,c_3+2c_2 -$$

$$\left(x^3-x^2\right)\frac{dr(x)}{dx}+\left(-x^2+2\,x-1\right)ys(y)+$$

$$(c_3+2+c_1)\,x^2+(-c_1-c_3-2)\,x=0 \qquad (4.35)$$

Como $dr(x)/dx$ e $s(y)$ são funções racionais, os coeficientes das funções logarítmicas na equação acima devem ser zero. Assim:

$$-\frac{dr(x)}{dx}\,x^2y+\Big((-c_3-1)\,x^2-c_1\,x-1\Big)\,y=0 \qquad (4.36)$$

$$\frac{dr(x)}{dx}\,x^2y+\Big((-c_2-2)\,x^2+(2\,c_3+2\,c_2+6+c_1)\,x-c_3-c_2-2\Big)\,y=0 \quad (4.37)$$

Resolvendo (4.36) e (4.37) para $dr(x)/dx$ e integrando em x, temos:

$$r(x) = -x - c_3\, x + x^{-1} - c_1\, \ln(x)) \tag{4.38}$$

$$r(x) = (-2\, c_3 - 2\, c_2 - 6 - c_1) \ln(x) + c_2\, x + 2\, x - 2\, x^{-1} - \frac{c_2}{x} - \frac{c_3}{x} \tag{4.39}$$

Impondo que os termos logaritmicos sejam zero e que os lados direitos de (4.38) e (4.39) sejam iguais, teremos:

$$\{c_1 = 0, c_2 = -c_3 - 3, c_3 = c_3\}\,. \tag{4.40}$$

Usando isso em (4.20), resolvendo a equação resultante para $ds(y)/dy$ e impondo que ela não pode depender de x, obtemos:

$$(1 + c_3)\, x^2 + ((2 + 2\, c_3)\, y - 2 - 2\, c_3)\, x + (1 + c_3)\, y^2 + (-2 - 2\, c_3)\, y + 1 + c_3 = 0, \tag{4.41}$$

que implica em $c_3 = -1$. Então, usando (4.40):

$$\{c_1 = 0, c_2 = -2, c_3 = -1\}\,. \tag{4.42}$$

Substituindo (4.42) em (4.38), encontramos $r(x) = 1/x$. Substituindo $r(x)$ em (4.35) e resolvendo para $s(y)$, obtemos $s(y) = 1/y$.

Usando os resultados em $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$, temos finalmente

$$R = \frac{e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}}{y^2(x+y)}. \tag{4.43}$$

Neste capítulo, apresentamos um método semi-algorítmico (nos moldes do método de Prelle e Singer) para resolver uma classe de 1EDOs com soluções liouvillianas (fora do escopo do método de Prelle e Singer). No próximo capítulo, estaremos descrevendo nossa implementação em Maple do método PS.

Capítulo 5

Uma Implementação em Maple do Método PS com Algumas Extensões

O objetivo deste capítulo é apresentar o pacote computacional **PSsolver**[18] em que implementamos o método de Prelle-Singer para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no ambiente de computação algébrica do Maple (Maple V Release 5.1). Nossa implementação inclui, no universo de 1EDOs do tipo $dy/dx = M/N$, *($R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$ (onde r_0 é uma função racional de (x,y), os p_i's são polinômios irredutíveis em (x,y) e os c_i's são constantes) é o fator integrante para a L1EDO $dy/dx = M/N$, onde M, N são polinômios em (x,y))* aquelas em que M e N se expressam em termos de funções elementares (e não apenas polinômios), conforme os resultados de Shtokhamer [8], que apresentamos brevemente no capítulo 1. **PSsolver** permite, ainda, que se busquem soluções para 1EDOs com FI da forma $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$. Com isso, estendemos a ação do método, possibilitando resolver 1EDOs com soluções liouvillianas.

Para auxiliar no estudo do método PS, **PSsolver** traz uma série de comandos (veja seção 5.1) permitindo ao usuário analisar todos os passos intermediários do processo; desde a construção da base de funções potencialmente independentes e do operador $\mathcal{D}$ até o cálculo dos PDs e a construção do fator integrante. Ao final do capítulo, apresentamos, ainda, alguns testes comparativos de performance.

5.1 Comandos Disponíveis em PSsolver

Faremos a seguir uma breve apresentação dos comandos disponíveis no pacote:

- `PSsolve` resolve 1EDOs usando o método de Prelle-Singer. Além de lidar com 1EDOs racionais (que são o alvo da abordagem PS original), lida também com funções elementares (algébricas e transcendentais).
- `PSIntFac` retorna um fator integrante para uma dada 1EDO.
- `PSDop` constrói o operador $\mathcal{D}$ associado à 1EDO.
- `PSBasis` constói uma lista de equações que define a base de funções potencialmente independentes, $[u_1 = f_1(x,y), \ldots]$, usada para construir o fator in-

tegrante para a 1EDO.

- `dPSBasis` constrói uma lista com o cálculo das derivadas parciais da base de funções potencialmente independentes (e.g., $[\partial u_1/\partial x = -u_2, ...]$).

- `Darboux` calcula os polinômios de Darboux, i.e. os polinômios f_i que satisfazem $\mathcal{D}f_i = g_i f_i$.

- `PSEigenval` calcula os polinômios g_i que são os "autovalores" para a equação $\mathcal{D}f_i = g_i f_i$.

5.1.1 Comando: `PSsolve`

O que faz: Este comando aplica o procedimentoPS para resolver 1EDOs.

Linha de comando

```
> PSsolve(1edo,limite,parametros_opcionais);
```

Parâmetros:

`1edo` - uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

`limite` - um inteiro positivo igual ao grau mais alto do polinômio de Darboux a se buscar.

Parâmetros Opcionais:

`NDarboux=inteiro_positivo` - Informa ao programa o número de PDs, f_i, a serem usados na construção do fator integrante.

`NDarboux=All` - Faz com que o programa use todos os PDs na construção do fator integrante.

`AllSolutions` - Por default `PSsolve` não calcula todos os possíveis PDs, mas apenas um subconjunto que, para a maioria dos casos, permite que se encontre um fator integrante em um tempo consideravelmente menor. Se especificarmos `AllSolutions`, todos os PDs serão calculados. Este procedimento pode ser necessário para algumas 1EDOs de solução mais difícil.

`Extended` - Faz com que o programa use um conjunto de rotinas que incluem exponenciais na construção de um fator integrante. Este parâmetro é utilizado, em geral, quando buscamos soluções liouvillianas.

`Heuristic` - Torna ativo um algoritmo para rápida determinação de candidatos a PDs.

Sinopse:

O comando `PSsolve` é parte do pacote **PSsolver** que, em linhas gerais, é desenhado para resolver 1EDOs com soluções que podem ser expressas em termos de funções algébricas, transcendentais e de algumas funções Liouvillianas. O comando implementa o procedimento PS usual estendido ao resultado de Shtokhamer e pode ser dividido em cinco passos:

1. uma base de funções potencialmente independentes é contruída para a EDO;
2. o operador $\mathcal{D}$ (veja seção 2.4) é construído a patir dessa base;
3. os PDs (autopolinômios) e seus "autovalores" polinomiais associados para o operador $\mathcal{D}$ são calculados;
4. é feita uma tentativa de construir o fator integrante para a 1EDO;
5. se a tentativa tiver sucesso, o fator integrante é usado para resolver a 1EDO.

Os argumentos

O primeiro argumento de `PSsolve` é a 1EDO. O segundo argumento é um inteiro positivo que especifica o mais alto grau de polinômio a ser considerado na busca pelo fator integrante. A necessidade desse argumento é uma característica do método PS, uma vez que não temos um limite teórico para os graus dos polinômios que construirão o fator integrante. Assim, é necessário que o usuário intervenha determinando um ponto de corte. Pela mesma razão, se um fator integrante não é encontrado para um determinado valor de `limite`, isto não significa que não exista um fator integrante, já que pode ser possível construí-lo com polinômios de grau maior que `limite`. O poder computacional, no entanto, impõe um limite prático de quatro para o valor de `limite` ao usar um computador pessoal (veja também [11]).

Argumentos opcionais

Os argumentos opcionais podem ser fornecidos separadamente ou em conjunto e em qualquer ordem. Para aumentar a velocidade e a eficiência do programa `PSsolve` usa, por default, um máximo de sete f_i ao tentar contruir um fator integrante. Para entender porque, vejamos como o fator integrante é construído. Em linhas gerais, este processo pode ser dividido em dois passos: primeiramente, os PDs, f_i, são calculados; posteriormente, determinam-se as potências desses polinômios que irão aparecer no fator integrante (se houver uma solução consistente para essas potências).

Em geral, esse segundo passo é mais dispendioso computacionalmente, e duas coisas foram notadas nos testes:

1. *raramente* são necessários todos os f_i's para encontrar um FI;

2. usualmente os f_i's mais simples são suficientes para construir o FI.

Esta segunda afirmação requer uma explicação mais detalhada. Quando dizemos f_i's mais simples, referimo-nos àqueles que são mais rapidamente calculados. Apesar desta definição parecer circular, existe uma relação entre "simplicidade" e o tamanho do PD. Por essa razão, introduzimos um procedimento para ordenar os PDs por tamanho[1].

[1]A definição de tamanho e as rotinas para determiná-lo são parte de nosso pacote.

O número sete PDs por default foi escolhido heuristicamente. Há casos raros em que sete PDs são insuficientes, assim, deixamos ao usuário a possibilidade de alterar esse default através do argumento opcional `NDarboux=inteiro_positivo`.

No cálculo dos PDs, o tempo computacional pode ser um problema ainda maior se a EDO envolve radicais. Face a essa dificuldade, desenvolvemos uma abordagem alternativa que não busca todos os PDs, mas apenas um número suficiente para encontrar o FI para a grande maioria das EDOs. Para os poucos casos restantes, o argumento opcional `AllSolutions` pode ser utilizado, e o programa irá usar o método mais completo (e mais lento).

A opção `Extended` inclui a função exponencial na construção do fator integrante para encontrar soluções Liouvillianas (não elementares).

Finalmente, a opção `Heuristic` implementa um método baseado em reconhecimento de padrão para determinar PDs candidatos com um grau maior, reduzindo o tempo computacional da ação do programa. Esta opção ajuda a encontrar soluções en alguns casos difíceis, mas, em geral, é menos eficiente, e fica, portanto, desligada por default.

5.1.2 Comando: `PSIntFac`

O que faz: Calcula um fator integrante (R) para a 1EDO.

Linha de comando:

```
> PSIntFac(1edo,limite,parametros_opcionais);
```

Parâmetros:

Os parâmetros `1edo` e `limite` têm o mesmo uso daquele explicado acima [2]. Os parâmetros opcionais também são os mesmos.

Sinopse:

O comando `PSIntFac` é o coração do pacote PSsolver, uma vez que o ponto principal do método PS é a determinação de um fator integrante para a EDO, depois do que, encontrar a solução é imediato. Além disso, a extensão Liouvilliana do prcedimento PS é incorporada a esse comando através do parâmetro opcional `Extended`.

5.1.3 Comando: `PSBasis`

O que faz: Determina a base de funções potencialmente independentes para a 1EDO.

Linha de comando:

```
> PSBasis(1edo);
```

Sinopse:

Para o usuário interessado em pesquisa de EDOs, o pacote PSsolver traz um conjunto de comandos mais especializados. O primeiro desses é o comando `PSBasis`, que gera

[2] Em todos os pontos a seguir, estes parâmetros terão este mesmo significado.

um conjuto de funções que é completo frente diferenciação, baseado nas funções que aparecem na 1EDO.

5.1.4 Comando: `dPSBasis`

O que faz: Retorna uma lista com as derivadas parciais das funções presentes na base de funções potencialmente independentes da EDO.

Linha de comando:

```
> dPSBasis(1edo);
```

Sinopse:

Este é outro comando a ser usado, principalmente, como auxiliar na pesquisa em EDOs. `dPSBasis` gera uma tabela com todas as derivadas parciais de primeira ordem da base de funções potencialmente independentes da EDO, e escreve essas derivadas em termos dos elementos dessa mesma base. Este resultado será usado para construir o operador $\mathcal{D}$.

5.1.5 Comando: `PSDop`

O que faz: Retorna o operador $\mathcal{D}$ para a 1EDO — um ingrediente essencial para o procedimento PS.

Linha de comando:

```
> PSDop(1edo);
```

Sinopse:

`PSDop` retorna o operador $\mathcal{D}$ associado com a 1EDO, escrito em termos da base de funções potencialmente independentes da 1EDO (veja seção 6.2).

5.1.6 Comando: `Darboux`

O que faz: Retorna os PDs (ou auto polinômios) associados com o operador $\mathcal{D}$.

Linha e Comando:

```
> Darboux(1edo,limite);
```

Sinopse:

Este comando encontra todos os PDs, f_i's, com grau até o valor máximo `limite`, que satisfazem a equação $\mathcal{D}f_i = g_i f_i$.

5.1.7 Comando: `EigenPval`

O que faz: Retorna os polinômios "autovalores" do operador $\mathcal{D}$.

Linha de comando:

```
> EigenPval(1edo,limite);
```

Sinopse:

Este comando encontra os polinômios, g_i's, que fazem papel de autovalores na equação $\mathcal{D}f_i = g_i f_i$.

5.2 Exemplos

Nesta seção, ilustraremos alguns aspectos da utilização do pacote. Esperamos mostrar que, apesar da proposta inicial do pacote PSsolver ser a implementação do método PS em Maple (e com isso aumentar a capacidade do Maple para resolver 1EDOs), pudemos utilizá-lo como base para testar e implementar novas idéias que estendem e aprofundam as propostas do método PS.

Evitando detalhes desnecessários e para permitir ao leitor um foco nos pontos mais relevantes, estaremos concentrados em poucas 1EDOs que servem como exemplode uma grande gama das realizações possíveis ao pacote.

5.2.1 Uso dos comandos

Primeiramente, usaremos uma 1EDO simples para exemplificar a ação dos comandos. Considere a 1EDO:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y\left(\cos(x) + ye^{-x} + 1\right)}{\cos(x)}. \tag{5.1}$$

A maioria dos usuários dsejará encotrar a solução da equação. Para tanto, tudo que se tem a fazer é:

```
> eq := diff(y(x),x) = y(x)*(cos(x)+y(x)*exp(-x)+1)/cos(x):
> PSsolve(eq,1);
```

$$\ln(y(x)+e^{x}) - \ln(\tan(1/2\,x)-1) + \ln(\tan(1/2\,x)+1) - \ln(y(x)) - \_C1 = 0 \quad (5.2)$$

Eventualmente, estando o usuário interssado em ver o fator integrante, basta que digite:

```
> PSIntFac(eq,1);
```

For the FOODE in the form

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{y(x)\,(\cos(x)e^{x} + y(x) + e^{x})}{\cos(x)e^{x}}$$

the integrating factor will be

$$\frac{1}{y\cos(x)\,(y+e^{x})}$$

Note que o programa informa ao usuário o formato em que está considerando a EDO. Isto é importante, uma vez que algumas 1EDOs podem ter seu formato inicial modificado por rotinas de simplificação, mudando portanto o fator integrante (apesar da equação continuar, obviamente, sendo a mesma.

O pacote pode também informar acerca da base de funções potencialmente independentes, que pode ser útil para analisar a estrutura da 1EDO.

```
> PSBasis(eq);
```

$$[u_1 = \cos(x), u_2 = \sin(x), u_3 = e^x]$$

Para o usuário interessado nos limites da aplicabilidade do método PS, ou de algum outro modo envolvido em investigações acerca de propriedades algébricas de 1EDOs, essa informação pode ser de grande valia. O mesmo se aplica aos comandos que se seguem. O comando `dPSBasis` dá informação essencial para aplicação do métodoPS.

```
> dPSBasis(eq);
```

$$[\frac{\partial}{\partial x}u_1(x,y) = -u_2, \frac{\partial}{\partial x}u_2(x,y) = u_1, \frac{\partial}{\partial x}u_3(x,y) = u_3,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u_1(x,y) = 0, \frac{\partial}{\partial y}u_2(x,y) = 0, \frac{\partial}{\partial y}u_3(x,y) = 0]$$

O resultado acima é utilizado pelo comando que se segue e que define o operador $\mathcal{D}$.

```
> D_operator:= PSDop(eq);
```

$$D\_operator := w \mapsto u_1 u_3 \frac{\partial}{\partial x} w + y\,(u_1 u_3 + y + u_3)\,\frac{\partial}{\partial y} w - u_2 u_1 u_3 \frac{\partial}{\partial u_1} w +$$
$$u_1{}^2 u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} w + u_3{}^2 u_1 \frac{\partial}{\partial u_3} w$$

Diferentemente dos comandos anteriores, `PSDop` retorna um procedimento, isto é, ele define um mapeamento a ser usado posteriormente pelo usuário. Para explicar melhor, mostramos um exemplo simples. Se aplicarmos `D_operator` definido acima a (por exemplo) u_1 obtemos

```
> D_operator(u[1]);
```

$$-u_2u_1u_3$$

D_operator deve, é claro, ser aplicado a expressões escritas em termos da base de funções potencialmente independentes — em nosso exemplo, isto significa em termos de x, y, u_1, u_2 e u_3.

Os últimos dois comandos são muito especializados e estão voltados a pesquisadores no campo de EDOs. Para nosso exemplo em particular, temos:

```
> Darboux(eq,1);
```

$$[y, e^x, \cos(x), y + e^x, \cos(x) - I\sin(x)]$$

```
> EigenPval(eq,1);
```

$$[\cos(x)e^x + y + e^x, \cos(x)e^x, -e^x\sin(x), y + \cos(x)e^x, -I\cos(x)e^x]$$

Estes comandos retornam listas ordenadas com (respectivamente) os PDs e seus "autovalores" associados. Vemos, portanto, que y é um PD da EDO com "autovalor" $\cos(x)e^x + y + e^x$; e^x é um PD com "autovalor" $\cos(x)e^x$ e assim por diante. Em termos de nossa base de funções potencialmente independentes a primeira dessas relações toma a forma

$$\mathcal{D}[y] = y(u_1u_3 + y + u_3).$$

Apesar de termos usado apenas uma EDO para ilustrar os comandos do pacote, esperamos ter esclarecido as formas de utilização bem como o funcionamento do método PS. Iremos agora mostrar como nosso pacote completa a capacidade de outros resolvedores de EDOs já existentes em Maple. Começaremos tratando 1EDOs com soluções em funções elementares, e mostraremos como PSsolver encontra solução para algumas 1EDOs que não são resolvidas pelas rotinas padrão que Maple utiliza usualmente para tratar simbolicamente as EDOs. Mais tarde, mostraremos como a extensão teórica do método PS (e sua implementação) lida com L1EDOs com soluções Liouvillianas de uma certa classe.

5.2.2 1EDOs com Soluções Elementares

O comando `dsolve` em MAPLE é um poderoso resolvedor de EDOs. No entanto, ele falha na tentativa de resolver as duas seguintes EDOs:

$$eq_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y^2} + 9\,\frac{(e^x)^2}{y^2} - 6\,ye^x + y^4 \tag{5.3}$$

$$eq_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{(y^2\ln(x)^5 + 4\,y\ln(x)^3 + 4\,\ln(x) + y^2)\,y^2}{(y\ln(x)^2 + 2)^2\,x} \tag{5.4}$$

Nosso programa encontra os seguintes fatores integrantes para as 1EDOs acima:

$$R_1 = -\left(-3\,e^x + y^3\right)^{-2}$$

$$R_2 = \frac{1}{xy^4}$$

que por sua vez levam às seguintes soluções:

$$sol_1 = -1 + 9\,xe^x - 3\,xy^3 + 9\,C_1\,e^x - 3\_C1\,y^3 = 0$$

$$sol_2 = -y^3\ln(x)^6 - 6\,y^2\ln(x)^4 - 12\,y\ln(x)^2 - 6\,\ln(x)y^3 - 8 + 6\,C_2\,y^3 = 0$$

Lembramos ao leitor que o comando `dsolve` contém muitos métodos heurísticos baseados na teoria de Lie para resolver EDOs [4, 5]. Mas, devido à sua natureza baseada a adequações a padrões, haverá sempre uma infinidade de casos (dos quais as equações acima são exemplos) para os quais as simetrias não podem ser encontradas. Por outro lado, a natureza (semi-)algoritmica do método PS garante que, *se uma solução elementar existe* ela será encontrada — desde que haja suficiente tempo e poder computacional.

5.2.3 EDOs de Primeira Ordem com Soluções Liouvillianas

Nesta subseção ilustramos o uso da extensão teórica do método PS que permite lidar com 1EDOs cuja solução contém uma subclasse de funções liouvillianas. Em geral, uma função liouvilliana, $L(x)$, é aquela para qual existe uma derivada de ordem n, tal que $\mathrm{d}^nL/\mathrm{d}x^n$ é uma função transcendental. A subclasse de funções Liouvillianas que nos interessam é aquela para a qual $\mathrm{d}L/\mathrm{d}x$ é transcendental. A função erro, por exemplo, $\mathrm{erf}(x) = 2\pi^{-1/2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pertence a esta classe.

Duas EDOs com soluções nesta classe são

$$eq_3 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y + 1 + e^y x^4}{x^2 y} \tag{5.5}$$

e

$$eq_4 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\cos(x)xy - \cos(x)x - \cos(x) + y + 1 + xe^y}{1 + xy} \tag{5.6}$$

PSsolver encontra os seguintes fatores integrantes para estas EDOs:

$$R_3 = \frac{1}{x^2 e^y e^{x^{-1}}}$$

$$R_4 = \frac{1}{e^y e^{\sin(x)}}$$

que, por sua vez, levam às seguintes soluções:

$$sol_3 = -e^{y+x^{-1}} C_3 + 1 + y + e^{y+x^{-1}} \int e^{x+x^{-1}} dx,$$

$$sol_4 = (-xy - 1 - x)\, e^{-y-\sin(x)} - \int x e^{-\sin(x)} dx - C_4 = 0.$$

Como foi mencionado previamente, estas soluções escapariam ao método original de Prelle e Singer. Mais ainda, estes dois exemplos (que são apenas dois de uma classe de infinitos exemplos) também escapam ao comando `dsolve` (Maple V Release 5.1). A implementação dessa extensão ao procedimento PS padrão permite a solução de um certo tipo de 1EDOs com soluções Liouvillianas.

5.3 Performance

Para testar a eficácia de nosso pacote nós usamos como arena o livro clássico em EDOs de Kamke [10]. Das 367 1EDOs deste livro, aquelas que são simples quadraturas, exatas ou separáveis são rapidamente resolvidas por métodos diretos e não foram incluídas em nossos testes (veja tabela 5.1). Além disso, algumas 1EDOs — aquelas cujas soluções envolvem funções especiais, ou funções arbitrárias — não estão no âmbito de 1EDOs tratadas pelo procedimento PS, e também serão excluídas. Finalmente, há um grupo de 1EDOs com soluções Liouvillianas (veja tabela 5.1) que será excluído dos testes do procedimento PS padrão, mas estará presente ao testarmos o método estendido (veja seção 5.3.2).

5.3.1 Testando o Procedimento PS Padrão

Pela tabela 5.1 notamos que o grupo de equações adequadas aos testes do procedimento PS padrão consiste em 215 1EDOs. Na tabela 5.2, apresentamos os resultados da aplicação de PSsolver (sem quaisquer argumentos opcionais) a essas 1EDOs. Além disso, algumas 1EDOs que não aparecem na tabela 5.2 são resolvidas através do uso de argumentos descritos na seção 5.1: 1EDOs 62, 112, 113, 114, 115, 116, 333, e 357 são resolvidas com o uso do parâmetro `AllSolutions` (115 e 333 necessitaram de `NDarboux=All`); 1EDOs 151, 182, 185, 211, 257 e 327 são resolvidas se usarmos apenas `NDarboux=All`; 38, 42, 44, 77, 78 e 106 são resolvidas com o opção `Heuristic` e as rotinas correspondentes para lidar com casos "difíceis" (como descrito na seção 5.1). As 1EDOs 52, 81, 142, 173, 184, 186–189, 266 e 292 não são resolvidas no tempo estipulado para os testes (500 segundos).

5.3.2 Testando a Extensão Liouvilliana para o Procedimento PS

Pela tabela 5.1 vemos que 15 1EDOs de Kamke (numeros 5, 18, 20, 21, 22, 27, 28, 46, 83, 129, 133, 164, 235, 343 e 351) deveriam ser resolvidas com a extensão Liouvilliana. Todas menos duas (1EDOs 22 e 46) sem estourar o limite de tempo de 500 segundos.

Concluindo esta seção com a performance de PSsolver, devemos comentar que, fora os exemplos dados na seção 6.2, 1EDOs 42, 151, 152, 185, 257, 350 e 351 não são resolvidos pelo resolvedor do Maple na versão utilizada nos testes (Maple V Release 5.1). É importante também notar que as rotinas que implementam a extensão Liouvilliana são úteis mesmo no caso geral. Uma vez que elas constroem mais PDs, ocorrem situações em que o FI pode ser construído com um valor mais baixo de `limite`. A 1EDO 142, por exemplo, é resolvida em apenas 3,4 segundos com o uso da extensão Liouvilliana, mas excede o tempo limite de 500 segundos se aplicarmos apenas o procedimento padrão.

Quadraturas, exatas e separáveis	1, 4, 7, 12, 17, 23, 26, 39, 57, 59, 61, 69, 70, 71, 73, 76, 89, 90, 131, 150, 154, 200, 209, 223, 227, 229, 245, 248, 251, 263, 267, 270, 271, 273, 274, 285, 288, 289, 290, 298, 299, 300, 305, 307, 308, 309, 310, 311, 322, 330, 335, 336, 341, 348, 352, 353, 355, 356, 358, 360, 361, 366
1EDOs envolvendo funções arbitrárias	10, 11, 16, 33, 34, 35, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 72, 74, 79, 80, 84, 85, 86, 87, 110, 126, 127, 128, 201, 202, 212, 219, 230, 250, 268, 269, 330, 331, 365, 367
1EDOs com funções especiais nas soluções	13, 14, 24, 25, 30, 36, 37, 40, 43, 45, 47, 48, 63, 66, 82, 88, 95, 99, 100, 105, 107, 111, 121, 139, 144, 145, 146, 147, 157, 166, 168, 169, 176, 179, 203, 205, 206, 234, 237, 253, 265
1EDOs com soluções Liouvillianas fora do escopo do método PS	5, 18, 20, 21, 22, 27, 28, 46, 83, 129, 133, 164, 235, 343, 351

Tabela 5.1: 1EDOs do livro de Kamke que não estão presentes em nossa bateria de testes. A última linha foi incluída nos testes de extensões Liouvillianas.

limite	Tempo médio para solução	1EDOs
1	1.3 s	2, 3, 6, 8, 9, 19, 29, 31, 58, 60, 64, 65, 67, 68, 75, 91, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 101, 102, 103, 117, 118, 119, 120, 122, 123, 124, 125, 130, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 148, 149, 152, 153, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 165, 167, 171, 174, 175, 177, 178, 180, 183, 190, 191, 192, 193, 194, 197, 198, 199, 204, 207, 210, 213, 214, 215, 216, 218, 221, 222, 224, 225, 226, 228,231, 232, 233, 236, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 246, 247, 249, 252,254, 255, 256, 258, 259, 260, 261, 262, 264, 272, 275, 276, 277, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 286, 287, 291, 293, 294, 295, 296, 297, 301, 302, 303, 306, 313, 314, 315, 317, 318, 319, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 332, 333, 334, 338, 339, 342, 344, 345, 346, 347, 349, 350, 354, 357, 359, 362, 363, 364
2	3.3 s	15, 41, 104, 108, 109, 140, 141, 143, 163, 170, 195, 208, 217, 220, 304, 312, 340
3	26.5 s	172, 181, 278, 320

Tabela 5.2: Tempo médio gasto por PSsolver para resolver 1EDOs de Kamke. Tabela organizada segundo o parâmetro `limite`, o grau máximo dos PDs ao construir o FI.

Capítulo 6

EDOs de Segunda Ordem

Apresentaremos aqui uma extensão das idéias descritas nos capítulos anteriores aplicada a 2EDOs [19]. Focaremos nossa atenção principalmente nos invariantes de primeira ordem e, menos, nas soluções das EDOs.

6.1 Introdução

Considere a 2EDO

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x,y,y')}{N(x,y,y')}, \tag{6.1}$$

onde $M(x,y,y')$ e $N(x,y,y')$ são polinômios com coeficientes em C. Assumimos que (6.1) tem uma solução em termos de funções elementares, e que existem duas funções de x y e y', independentes, constantes sobre as soluções de (6.1). São os chamados invariantes de primeira ordem.

$$I_i(x, y, y') = C_i \qquad i = 1, 2. \tag{6.2}$$

Tomemos um desses dois invariantes. Eliminando índices em I_i temos:

$$\mathrm{d}I = \frac{\partial I}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial I}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial I}{\partial y'}\,\mathrm{d}y' = 0. \tag{6.3}$$

Introduzindo a notação $\frac{\partial I}{\partial u} \equiv I_u$, temos

$$I_x + I_y y' + I_{y'} y'' = 0, \tag{6.4}$$

e assim

$$y'' = -\frac{I_x + I_y y'}{I_{y'}}, \tag{6.5}$$

que é a (6.1) escrita em termos do invariante I. Reescrevendo (6.1) como

$$\frac{M}{N}\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y' = 0 \tag{6.6}$$

e observando que

$$y'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y, \tag{6.7}$$

podemos adicionar o termo identicamente nulo $S(x, y, y')y'\,\mathrm{d}x - S(x, y, y')\,\mathrm{d}y$ a (6.6) e obter a 1-forma

$$\left(\frac{M}{N} + Sy'\right)\mathrm{d}x - S\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}y' = 0. \tag{6.8}$$

Note que a 1-forma (6.8) deve ser proporcional à 1-forma (6.3). Assim, uma vez que a 1-forma (6.3) é exata, podemos multiplicar (6.8) pelo fator integrnte $R(x, y, y')$

obtendo

$$\mathrm{d}I = R(\phi + Sy')\,\mathrm{d}x - RS\,\mathrm{d}y - R\,\mathrm{d}y' = 0, \tag{6.9}$$

onde $\phi \equiv M/N$.

Comparando as equações (6.3) e (6.8),

$$\begin{aligned} I_x &= R(\phi + Sy'), \\ I_y &= -RS, \\ I_{y'} &= -R. \end{aligned} \tag{6.10}$$

As equações (6.10) devem satisfazer as condições de compatibilidade $I_{xy} = I_{yx}, I_{xy'} = I_{y'x}$ e $I_{yy'} = I_{y'y}$. Isto implica que

$$D[S] = -\phi_y + S\phi_{y'} + S^2, \tag{6.11}$$

$$D[R] = -R(S + \phi_{y'}), \tag{6.12}$$

$$R_y = R_{y'}S + S_{y'}R, \tag{6.13}$$

onde o operador diferencial D é definido como

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \phi\frac{\partial}{\partial y'}. \tag{6.14}$$

Combinando (6.11) e (6.12) obtemos

$$D[RS] = -R\phi_y. \tag{6.15}$$

Assim, se o produto de S pelo fator integrante R for uma função racional de x, y e y', então $D[RS]$ também será. Uma vez que ϕ é racional (e, portanto, também ϕ_y), a equação (6.15) nos diz que R é racional. Usando (6.12) e argumentos similares concluímos que S deve ser uma função racional de x, y e y'.

Resumindo, de (6.10) concluímos que a suposição que RS é racional é equivalente à existência de um invariante de primeira ordem cujas derivadas em relação a x, y e y' são funções racionais. Com este resultado, nós reestabelecemos nossa suposição original na forma de conjectura.

6.1.1 Conjectura

Primeiramente, citaremos um resultado demonstrado em [7]:

Teorema: *Seja K um corpo diferencial de funções de $n+1$ variáveis e L uma extensão elementar de K. Seja f presente em K e assuma que exista uma função não constante g em L tal que g é constante sobre todas as soluções $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. Então, existem $w_1, \ldots, w_m$ algébricos sobre K e constantes $c_i, \ldots, c_m$ tais que*

$$w_0(x, y, y', y'', .., y^{(n-1)}) + \sum_i c_i \log(w_i(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})) \tag{6.16}$$

é uma constante sobre todas as soluções de $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$.

Este resultado mostra que, para o caso particular de 2EDOs cujas soluções são elementares, há dois invariantes de primeira ordem independentes da forma

$$w_0(x, y, y') + \sum_i c_i \log w_i(x, y, y'). \tag{6.17}$$

Nossa conjectura é que, se existirem esses dois invariantes de primeira ordem, será sempre possível encontrar uma função dos invariantes da forma

$$z_0(x,y,y') + \sum_i c_i \log[z_i(x,y,y')], \tag{6.18}$$

onde z_i são funções *racionais* de x, y e y'.

Conjectura: *Seja K um corpo diferencial de funções de três variáveis e L uma extensão elementar de K. Seja f presente em K e assuma que existam duas funções não constantes independentes $\{g_1, g_2\}$ em L tais que g_i são constantes sobre todas as soluções de $y'' = f(x,y,y')$. Então, existe pelo menos uma constante da forma*

$$z_0(x,y,y') + \sum_i c_i \log(z_i(x,y,y')) \tag{6.19}$$

onde os z_i estão em K.

Pelas considerações anteriores vemos que (6.19) implica que o produto RS é uma função racional de x, y e y'.

Se esta conjectura for válida, nossa extensão do método PS é aplicável a todas 2EDOs da forma (6.1). Em todos os testes que realizamos, não conseguimos encontrar uma equação do tipo (6.1) que servisse de contra-exemplo para nossa conjectura.

6.1.2 Encontrando R e S

Nossa conjectura implica que, se a 2EDO a ser resolvida tiver uma solução geral elementar, então S será uma função racional que podemos escrever como

$$S = \frac{S_n}{S_d} = \frac{\sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j y'^k}{\sum_{i,j,k} b_{ijk} x^i y^j y'^k}. \tag{6.20}$$

Vemos também que (6.11) não envolve R. Então, dado um limite para o grau dos polinômios S_n e S_d, podemos encontrar um conjunto de soluções para essa equação que são, portanto, candidatos a resolver o sistema de equações (6.11)–(6.13).

De (6.12) temos

$$\frac{D[R]}{R} = -(S + \phi_{y'}) = -\frac{S_n}{S_d} - \left(\frac{M}{N}\right)_{y'} = -\frac{S_n N^2 + S_d(N M_{y'} - M N_{y'})}{S_d N^2} \tag{6.21}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{\mathcal{D}[R]}{R} = -S_n N^2 + S_d(N M_{y'} - M N_{y'}), \tag{6.22}$$

onde o operador diferencial $\mathcal{D}$ é definido como

$$\mathcal{D} \equiv (S_d N^2) D. \tag{6.23}$$

lembremos que

- S_n, S_d, N e M são polinômios em x, y e y';
- $\mathcal{D}$ é um operador diferencial linear em que os coeficientes de $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial y'}$ são polinômios em x, y e , y';

- R é uma função racional de x, y e y', que pode ser escrita como

$$R = \frac{R_n}{R_d} = \frac{\sum_{i,j,k} c_{ijk} x^i y^j y'^k}{\sum_{i,j,k} d_{ijk} x^i y^j y'^k}. \tag{6.24}$$

Se tivermos um limite teórico para os graus de R_m e R_d (um *grau limite*), podemos usar um procedimento análogo àquele descrito na seção 2.3 para obter candidatos para o fator integrante R. Nós simplesmente construiríamos polinômios em x, y e y' até o grau limite.

6.1.3 Redução da 2EDO

Uma vez que R e S tenham sido determinados a partir das equações (6.10) teremos todas as primeiras derivadas parciais do invariante diferencial de primeira ordem, $I(x, y, y')$, que é constante sobre as soluções. O invariante pode então ser obtido como

$$\begin{aligned} I(x,y,y') = \int R\,(\phi + Sy')\,dx\, - \\ \int [RS + \frac{\partial}{\partial y}\int R\,(\phi + Sy')\,dx]dy\, - \\ \int \left[R + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\int R\,(\phi + Sy')\,dx - \int [RS + \frac{\partial}{\partial y}\int R\,(\phi + Sy')\,dx]dy\right)\right] dy'. \end{aligned} \tag{6.25}$$

A equação $I(x, y, y') = C_1$ pode então ser resolvida para que se obtenha uma 1EDO para y': a EDO *reduzida*

$$y' = \varphi(x, y, C1). \tag{6.26}$$

Para obter a solução geral da EDO original, podemos aplicar o podemos aplicar o método PS a essa EDO reduzida.

6.2 Exemplos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de 2EDOs com motivações físicas e que são resolvidas com nosso procedimento.[1]. Como um exemplo simples e ilustrativo, começamos com o oscilador harmônico clássico seguido de algumas 2EDOs que aparecem em problemas de astrfísica e relatividade geral.

Exemplo 1: Oscilador Harmônico Simples

Na sua forma mais simples, a equação do oscilador harmônico é

$$y'' = -y. \tag{6.27}$$

Para esta EDO, as equações (6.11), (6.12) e (6.13) são

$$\begin{aligned} S_x + y'S_y - yS_{y'} &= 1 + S^2, & (6.28)\\ R_x + y'R_y - yR_{y'} &= -RS, & (6.29)\\ R_y - R_{y'}S - S_{y'}R &= 0. & (6.30) \end{aligned}$$

Uma solução possível para essas equações é

$$S = \frac{y}{y'}, \quad R = y'. \tag{6.31}$$

[1]Apresentamos apenas a redução das 2EDOs, uma vez que a integração da 1EDO resultante pode ser realizada por diversos métodos, inclusive o próprio método PS.

Dessa solução, e usando (6.25), chegamos à EDO reduzida

$$C1 = y^2 + y'^2, \tag{6.32}$$

que representa, é claro, a conservação de energia para o oscilador.

Este exemplo é muito simples e leva a uma forma de ϕ que é independente de x e y'. Neste caso, assim como para todas EDOs lineares, existem métodos de solução alternativos e mais diretos. Os próximos exemplos ilustram a utilização do método para 2EDOs não lineares que possam ser escritas na forma (6.1).

Exemplo 2: Uma Solução Exata em Relatividade Geral

Uma fonte bastante rica de equações diferenciais não lineares em física se encontra na Relatividade Geral. Em princípio, as equações de Einstein são, é claro, EDs parciais. Existem, porém, classes de equações, que pela simetria imposta, são reduzidas a EDOs em uma variável independente. Um exemplo é a classe de soluções estáticas esfericamente simétricas para modelos estelares, que dependem somente da variável radial, r. A métrica para um espaço-tempo estático esfericamente simétrico geral tem duas funções indeterminadas, que nomearemos $\lambda(r)$ e $\mu(r)$. Impondo que a matéria no espaço-tempo é um fluido perfeito, as equqções de Einstein reduzem-se a duas EDOs acopladas para $\lambda(r)$ e $\mu(r)$. Especificando uma dessas funções, reduzimos o problema a resolver uma EDO (de primeira ou de segunda ordem) para a outra.

Seguindo esse procedimento, Buchdahl [20] obteve uma solução exata para uma esfera de fluido relativístico considerando a métrica isotrópica.

$$\dot{s}^2 = (1-f)^2(1+f)^{-2}\dot{t}^2 - (1+f)^4[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2]$$

com $f = f(r)$. As equações para $f(r)$ reduzem-se a

$$ff'' - 3f'^2 - r^{-1}ff' = 0.$$

Mudando a notação para $y(x) = f(r)$, as equações (6.11), (6.12) e (6.13) assumem a forma

$$\begin{aligned} S_x + y'S_y + \frac{y'\,(3\,y'\,x+y)}{xy}S_{y'} &= -\frac{y'}{xy} + \frac{y'\,(3\,y'\,x+y)}{xy^2} + \\ &\quad \left(\frac{3\,y'\,x+y}{xy} + 3\,\frac{y'}{y}\right)S + S^2, && (6.33)\\ R_x + y'R_y + \frac{y'\,(3\,y'\,x+y)}{xy}R_{y'} &= -R\left(S + \frac{3\,y'\,x+y}{xy} + 3\,\frac{y'}{y}\right), && (6.34)\\ R_y - R_{y'}S - S_{y'}R &= 0. && (6.35) \end{aligned}$$

Uma solução para estas equações é

$$S = -3\,\frac{y'}{y}, \quad R = \frac{1}{xy^3} \tag{6.36}$$

Usando (6.25), obtemos a 1EDO reduzida:

$$C_1 = y'/(y^3x) \tag{6.37}$$

que é separável e que podemos integrar facilmente para obter a solução gheral

$$y(x)^2 = \left(-\,C_1\,x^2 + C_2\right)^{-1}. \tag{6.38}$$

Exemplo 3: Esfera de Fluido Estático em Relatividade Geral

Em um artigo posterior àquele citado no exemplo 2 [21], Buchdahl aborda o problema da efera de fluido relativístico usando um sistema de coordenadas diferente daquele do exemplo anterior.

Substituindo $\xi(r)$ (utilizado originalmente na notação de Buchdahl) por $y(x)$ temos a equação

$$y'' = \frac{x^2y'^2 + y^2 - 1}{x^2y}, \tag{6.39}$$

Pra esta , eqs (6.11, 6.12 e 6.13) tornam-se:

$$\begin{aligned} S_x + y'S_y + \frac{x^2y'^2 + y^2 - 1}{x^2y}S_{y'} &= -2\,x^{-2} + \frac{x^2y'^2 + y^2 - 1}{y^2x^2} \\ &\quad +2\,\frac{y'\,S}{y} + S^2 \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$R_x + y'R_y + \frac{x^2y'^2 + y^2 - 1}{x^2y}R_{y'} = -R\left(S + 2\,\frac{y'}{y}\right) \tag{6.41}$$

$$R_y - R_{y'}S - S_{y'}R = 0 \tag{6.42}$$

Uma solução para estas equações é:

$$S = \frac{-x^2y'^2 - xyy' + 1}{xy^2 + x^2yy'}, \quad R = \frac{y + xy'}{xy^2}. \tag{6.43}$$

Do resultado acima e usando eq. (6.25), chegamos à 1EDO reduzida:

$$C_1 = \frac{2\,xyy' + y^2 + x^2y'^2 - 1}{2x^2y^2}. \tag{6.44}$$

que tem como solução

$$y(x)^2 = \frac{\tan(\sqrt{2}\sqrt{C_1}\,(C_2 + x))^2}{\left(2\,C_1 + 2\,\tan(\sqrt{2}\sqrt{C_1}\,(C_2 + x))^2 C_1\right) x^2} \tag{6.45}$$

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem que é uma extensão das idéias desenvolvidas por Prelle-Singer [7] para tratar 1EDOs. Assim, estabelecemos um método semi-algorítmico para resolver 2EDOs.

A generalidade do método baseia-se numa conjectura (veja seção (6.1.1)). Mesmo que se demonstre a existência de 2EDOs para as quais não exista nenhum invariante da forma (6.19)nosso método continua aplicável a um conjunto significativo de 2EDOs.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta tese, a partir do estudo do fator integrante de 1EDOs e dos invariantes de 2EDOs, obtivemos resultados que permitem estabelecer métodos semi-algorítmicos para resolver determinadas classes de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem.

No capítulo três, estabelecemos a forma geral do fator integrante para 1EDOs do tipo $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ (onde $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são polinomiais) com soluções liouvillianas. De posse deste resultado, $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x, y)^{c_i}$, mostramos que $D[r_0]$ ($D \equiv N\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y}$) é polinomial e $p_i|D[p_i]$.

No capítulo quatro, utilizamos os resultados do capítulo anterior para desenvolver um método semi-algorítmico para resolver 1EDOs com soluções liouvillianas. Ficamos restritos aos casos em que $r_0(x, y)$ era função apenas de x, ou uma função apenas de y ou, no máximo uma soma desses dois casos.

No capítulo cinco, apresentamos nossa implementação em Maple do método PS, com a extensão de Shtokhamer para situações em que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são escritos em termos de funções elementares. Em nossa implementação, utilizamos, ainda, o conhecimento acerca da forma geral do FI para L1EDOs, adicionando ao pacote computacional uma opção em que o usuário pode tentar encontrar $r_0(x,y)$ (em $R = e^{r_0(x,y)} \prod_{i=1}^{n} p_i(x,y)^{c_i}$).

No capítulo seis, expomos nosso método semi-algorítmico para resolver 2EDOs. Neste caso, além de estarmos lidando mais diretamente com exemplos da física, o método é (até onde sabemos) o único a lidar com equações de segunda ordem com uma abordagem algorítmica.

Os trabalhos apresentados ao longo desta tese conduzem naturalmente a inúmeros caminhos para complementar os resultaos obtidos. Há outros tantos levando a novas idéias para resolução e análise de de problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias.

Neste sentido, estamos, agora, aprofundando o estudo do fator integrante para L1EDOs cujas expressões incluem funções elementares nas funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$. Ainda no âmbito de 1EDOs, buscamos novos resultados para aprimorar nosso método semi-algorítmico apresentado no capítulo três. O pacote **PSsolver** terá, em breve, uma nova versão atualizada em que serão incorporados alguns resultados do capítulo três obtidos após a implementação apresentada.

Finalmente, no tratamento de 2EDOs, estamos trabalhando na demonstração (da validade ou não) da conjectura apresentada no capítulo quatro. Além disso, temos uma possibilidade clara de extensão do método que desenvolvemos para situações em que há funções elementares presentes em $M(x, y)$ e $N(x, y)$. Em nossos projetos mais próximos, está, ainda, a implementação desse método em uma plataforma de computação simbólica.

Bibliografia

[1] H. Stephani, Differential equations: their solution using symmetries, ed. M.A.H. MacCallum, Cambridge University Press, New York and London (1989).

[2] G.W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Applied Mathematical Sciences **81**, Springer-Verlag, (1989).

[3] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, (1986).

[4] E.S. Cheb-Terrab, L.G.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota, Computer Algebra Solving of First Order ODEs Using Symmetry Methods. Comput.Phys.Commun. **101**, 254, (1997).

[5] E.S. Cheb-Terrab, L.G.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota, Computer Algebra Solving of Second Order ODEs Using Symmetry Methods. Comput.Phys.Commun. **108**, (1998), 90.

[6] R.H. Risch, The Problem of Integration in Finite Terms. Trans. Amer. Math. Soc. **139**, 167–189, (1969).

[7] M. Prelle and M. Singer, Elementary first integrals of differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **279**, 215, (1983).

[8] R. Shtokhamer, Solving first order differential equations using the Prelle-Singer algorithm, Technical report 88-09, Center for Mathematical Computation, University of Delaware (1988).

[9] M. Singer, Liouvillian First Integrals of Differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc. **333**, 673–688, (1992).

[10] E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Chelsea Publishing Co, New York, (1959).

[11] Y.K. Man, Computing Closed Form Solutions of First Order ODEs Using the Prelle-Singer Procedure. J. Symbolic Computation, **16**, 423–443, (1993)

[12] R. Risch, Algebraic Properties of the Elementary Functions of Analysys. American Journal of Mathematics, **101**, 743-759, (1979).

[13] C.B. Collins, Algebraic Invariants Curves of Polynomial Vector Fields in the Plane, *Preprint.* Canada: University of Waterloo (1993); C B Collins, Quadratic Vector Fields Possessing a Centre, *Preprint.* Canada: University of Waterloo (1993).

[14] Y.K. Man and M.A.H. MacCallum, A Rational Approach to the Prelle-Singer Algorithm. J. Symbolic Computation, **11**, 1–11, (1996), and refferences therein.

[15] J.H. Davenport, Y. Siret and E. Tournier, Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation. Academic Press, Great Britain (1993).

[16] L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota , A Method to Tackle First Order Ordinary Differential Equations with Liouvillian Functions in the Solutions, J. Phys. A: Math. Gen.**35**, 3899-3910, (2002).

[17] L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota , Analyzing the Structure of the Integrating Factor for First Order Differential Equations with Liouvillian Functions in the Solutions, J. Phys. A: Math. Gen.**35**, 1001-1006, (2002).

[18] L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte and L.A.C.P. da Mota , An Extension of the Prelle-Singer Method and a MAPLE implementation. Computer Physics Communications **144**, 46-62, (2002).

[19] L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte, L.A.C.P. da Mota and J.E.F. Skea, Solving second order ordinary differential equations by extending the Prelle-Singer method, J. Phys. A: Math.Gen. **34**, 3015-3024, (2001).

[20] H.A.Buchdahl, A Relativistic Fluid Sphere Resembling the Emden Polytrope of Index 5. Ap. J. **140**, 1512–1516, (1964).

[21] H.A.Buchdahl, General Relativistic Fluid Spheres III. A Static Gaseous Model. Ap. J. **147** 310–316, (1967).

"Abordagens não classificatórias para solução e análise de equações diferenciais ordinárias"

Sérgio Eduardo Silva Duarte

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Luis Eduardo Campinho Pereira da Mota – Presidente/UERJ

Sebastião Alves Dias – Coorientador/CBPF

Jair Koiller – FGV

Renato Portugal – LNCC

Maria Eulália Vares – CBPF

Raul Oscar Vallejos – CBPF

Rio de Janeiro, 29 de abril de 2003