Tese de Doutorado

YANG-MILLS SUPERSIMÉTRICO N = 2

Multipleto de Matéria com Massa Induzida

Sortelano Araújo Diniz

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro

Resumo

Obtenção de representação do grupo supersimétrico N=2.Obtenção de massa induzida para o supermultipleto de Matéria (supermultipleto de Fayet) por vínculo de carga central. Construção do modelo de Yang-Mills correspondente.

Agradecimentos

Há muitas pessoas que tenho que agradecer. Todavia não é com palavras ou citações em uma tese que pretendo fazê-lo. É com o compromisso de usar o que aprendi para divulgar a ciência e o conhecimento a todos aqueles que eu puder, principalmente aos jovens, no sentido de construir um mundo melhor para todos.

Índice Geral

Apresentação **1**

1 Considerações Iniciais **2**

O Spin e a Estatística em Teorias de Lie e em Teorias Supersimétricas. 6

.... I

2 Grupos de Simetria **2**

2.1 Grupos de Lie e o Teorema Coleman Mandula 2

2.2 O Grupo Supersimétrico. 3

2.3 A super-álgebra N=2 3

2.4 O Super-espaço N=2 4

2.5 Representação de Wess-Zumino para a Super-álgebra N=2 5

2.6 Derivadas Covariantes D_A no Super-espaço 6

3 O Hipermultipleto de Fayet: Uma Representação Irredutível para o Supergrupo de Poincaré N=2: **8**

3.1 As Componentes do hipermultipleto de Fayet. 9

3.2 Generalização do Vínculo de Carga Central e Obtenção das Transformações Supersimétricas. 10

3.3 Lagrangiano para o Multipleto de Fayet Livre. 13

3.4 Equações de Movimento 16

4 Paridade, Vínculo(s) de Carga Central e Equações de Movimento.. 17

4.0.1 Obtenção de Condições Necessárias e Suficientes para $|M_\mu|^2$ ser Real e Positivo. 19

4.1 O Lagrangiano do sistema.......... 21

4.1.1 Paridade 22

5 Massa Induzida em Teorias super Yang-Mills N=2 24

5.1 O Supercampo de Matéria em super-YM N=2 24

5.2 A Conexão de Gauge 26

5.2.1 Transformação de Gauge e Derivada Covariante no super-espaço. 26

5.2.2 Restrições à Supercurvatura e ao Supercampo de Gauge. 28

5.2.3 O Supermultipleto de Gauge 29

5.2.4 O Lagrangiano do Multipleto de Gauge 31

5.3 Vínculo de Carga Central e Leis de Transformação Gauge Covariante. 31

5.4 Lagrangiano do Hipermultipleto de Fayet e Acoplamento Mínimo com Conexão de Gauge. 33

6 Considerações Finais. 35

A Representações para Grupos de Lie e para Grupos Supersimétricos. 36

B Notações e Convenções. 42

Bibliografia 44

Apresentação

Os grupos supersimétricos e suas representações têm certas particularidades nas propriedades do espaço vetorial de suas representações, na interpretação física dos geradores supersimétricos e na técnica do "super-espaço" usada para representá-los como operadores "diferencias". No prefácio ("Considerações Iniciais") e no Capítulo-1 discutimos estes pontos e estabelecemos a linguagem a ser utilizada ao longo de todo trabalho. Das "particularidades supersimétricas", em especial, a massa de um supermultipleto está intimamente relacionada com Z (e $\bar{Z}$) as *cargas centrais*[6]. Na literatura, com o vínculo de carga central proposto por Sohnius, a equação de movimento para qualquer componente C' do multipleto de Fayet "livre" escreve-se na forma $|Z|\, C' = mC'$. Isto sugeriu-me que a massa do multipleto poderia ser induzida por vínculo de carga central mais adequado. É o que, no caso clássico, desenvolvemos no Capítulo-2. Obtivemos que a massa pode ter duas contribuições: uma devida a parâmetro puramente algébrico e outra "by hand". Obtivemos ainda o lagragiano e as equações de movimento para o caso "livre". Constatamos que usando qualquer combinação linear dos geradores de carga central na equação de vínculo é possível obter uma representação finita, mas apenas certas combinações particulares admitem lagragiano supersimétrico. No Capítulo-3 obtivemos a dinâmica para qualquer representação finita e demonstramos que impondo paridade o lagrangiano "by hand" deve ser descartado e a massa é completamente induzida por parâmetros puramente algébricos. No Capítulo-4 extendemos os resultados obtidos no caso "livre" para o caso de acoplamento mínimo com um supermultipleto de gauge.

Capítulo 1
Considerações Iniciais

Na Física Quântica, um dos fenômenos mais interessantes está expresso pelo *Princípio da indistinguibilidade de partículas idênticas.* Este último, conjugado com outros Princípios implicam no importantíssimo resultado de que na Física Quântica as partículas estão divididas em dois grandes grupos com propriedades estatísticas opostas: 1)O grupo dos *bósons* - partículas de spin inteiro- com estatística simétrica; 2)O grupo dos *férmions* -partículas de spin semi-inteiro- com estatística anti-simétrica. A estatística assim definida significa que o estado final de um sistema composto, formado por um número qualquer de partículas, deve ser simétrico na permutação de dois bósons idênticos e anti-simétrico na permutação de dois férmions idênticos. Aqui as *permutações* é o grupo de simetria (grupo discreto). Mas, os grupos de simetria mais importantes na Física são os grupos de Lie (grupos contínuos) e, entre eles, o principal talvez seja o grupo das Transformações Gerais de Coordenadas (TGC), sejam coordenadas do espaço-tempo, sejam coordenadas internas. Os geradores destas transformações formam uma álgebra de Lie e, além disto,estes geradores são objetos bosônicos. Assim sob as TGC a estatística é preservada de forma que os estados bosônicos são levados em estados bosônicos e os estados fermiônicos em estados fermiônicos.

De uma forma genérica vou me reportar às teorias, sejam clássicas ou quânticas, contidas no "conjunto" de teorias acima como "teorias de Lie", os campos nelas contidos como "campos de Lie" , e as partículas associadas como "partículas de Lie" dado que, essencialmente, estas diferentes teorias são caracterizadas por diferentes grupos de Lie. A axiomatização das teorias Lie, bem como a interpretação física dos diferentes objetos que nelas aparecem, são bem conhecidos. A representação de um grupo de Lie associa univocamente a cada elemento g do grupo uma transformação linear $T(g)$ sobre algum espaço vetorial $\{V\}$ de forma que as propriedades do grupo sejam "preservadas". No caso dos geradores das translações do grupo de Poincaré o espaço vetorial $\{V\}$ pode ser formado por funções locais -campos- analíticas e, neste caso, os geradores são representados por operadores diferencias. Um campo de Lie é um conjunto de funções que -embora possam ser independentes nos valores numéricos que cada uma assuma nos pontos da variedade- guardam entre si certas correlações sob uma transformação do grupo de Lie correspondente. Assim, por exemplo, o campo eletromagnético $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ é um conjunto de quatro campos (componentes) e o valor que, digamos, a componente A_0 assuma em um dado ponto do espaço-tempo é totalmente independente dos valores que as demais componentes assumam neste ponto. Mas, sob uma transformação de Lie o campo A_μ é levado em outro campo A'_μ de forma que a componente A'_0 (e todas as demais) deste novo campo é (são) totalmente determinada(s) por combinações das quatro componentes do campo original A_μ. Em particular, nas translações, dado que os geradores são representados por operadores diferenciais, as componentes não se "misturam": A'_0 é totalmente determinado por A_0 e suas derivadas, idem para as demais componentes. O mesmo raciocínio vale para qualquer campo de Lie: sob as translações suas componentes não se "misturam" de forma que cada componente do campo transformado é dada completamente pela respectiva componente do campo original e suas derivadas.

A meu ver, a situação é bem diferente quando consideramos o "conjunto" das teorias supersimétricas -caracterizadas por grupos supersimétricos. Isto porque os grupos supersimétricos têm geradores bosônicos e fermiônicos, com isto, sob uma transformação supersimétrica a estatística dos campos não é preservada: bósons são levados em férmions e vice-versa. A consequência é que qualquer representação de um supergrupo não se dá sobre um espaço vetorial, mas, há dois espaços vetoriais distintos: $\{V_B\}$, o sub-espaço bosônico; e $\{V_F\}$, o sub-espaço fermiônico. A técnica do "super-espaço" para a representação de um supergrupo consiste, basicamente, em estenter o conceito de analiticidade das funções, considerando *supercampos* como funções analíticas nas coordenadas bosônicas da super-variedade e também "analíticas" nas coordenadas fermiônicas - variáveis de Grassmann. Trata-se de um artifício para considerar $\{V_B\}$ e $\{V_F\}$ como formando um só espaço vetorial (sob o corpo dos complexos + Grassmann). Em teorias de Lie, os campos são objetos *locais*, ou seja, dados os valores numéricos das coordenadas de um ponto da variedade os campos são determinados univocamente. Já em teorias supersimétricas descritas em super-espaço, perde-se a noção de "*localidade*", pois, não é possível atribuir um valor numérico às coordenadas fermiônicas e, desta forma, para um dado ponto da "super-variedade" não se sabe como determinar os valores dos supercampos. Abandonando o conceito de supercampo e trabalhando apenas com os supermultipletos -que são um conjunto de campos de uma dada representação supersimétrica- retomamos a noção de *localidade* . Mas com ela, ao contrário do que ocorre nas teorias de Lie, os geradores supersimétricos não têm representação simples.

Por isto, nas teorias supersimétricas a axiomatização me parece imprecisa e a interpretação física dos objetos nelas contidos julgo ainda incompleta. É com esta preocupação que desenvolvo o trabalho desta tese. Em primeiro lugar, sempre procurando observar o respeito aos Princípios Fundamentais da Física e depois procurando extender as metodologias/modelos das teorias de Lie às teorias supersimétricas.

Com este procedimento em mente, o nosso trabalho foi construir uma representação do grupo supersimétrico N=2 - o Hipermultipleto de Fayet- inicialmente sem conexão de gauge e posteriormente introduzindo a conexão.

É sabido que para obter uma representação finita do supergrupo em estudo é necessário impor vínculos relativos à carga central [6] no caso livre, no caso da presença de campos de gauge (conexão) é necessário acrescentar ainda vínculos às torsões e às curvaturas [2]. Para o caso livre generalizamos o vínculo proposto por Sohnius na referência [6] e aquilo que para Sohnius é uma equação de vínculo *reinterpretamos como uma equação de autovalor para um gerador de carga central particular*. A consequência é que o autovalor deste gerador representa massa induzida para o multipleto de Fayet. Finalmente, extendemos para o caso de acoplamento com um multipleto de gauge.

Fomos capazes de obter uma representação finita utilizando na equação de vínculo qualquer combinação linear

$$M = \frac{1}{2}\left(Z + e^{iw}\bar{Z}\right) \quad : \quad \text{w = qualquer}$$

dos geradores de carga central $\{Z, \bar{Z}\}$, todavia obtivemos lagrangiano supersimétrico para o sistema apenas com as combinações $M = \frac{1}{2}\left(Z + e^{iw}\bar{Z}\right)$ com w real, além disto, concluímos que neste caso a fase pode ser eliminada por uma redefinição dos campos.

Assim, para w não real, embora tenhamos uma representação concluímos que não há lagrangiano supersimétrico. De qualquer forma, no capítulo-3 descrevemos forma alternativa para a obtenção da dinâmica do sistema neste caso.

Concluimos ainda que escolhendo w real na combinação linear $M = \frac{1}{2}\left(Z + e^{iw}\bar{Z}\right)$, o gerador correspondente tem espectro contínuo e impondo invariância de paridade o módulo $|M|$ de seu autovalor é a massa do hipermultipleto. Assim, dado que a massa é completamente induzida por propriedades algébricos ela, possivelmente, será não renormalizada ao nível de campos quantizados, onde as simetrias são expressas pelas identidades de Ward.

O Spin e a Estatística em Teorias de Lie e em Teorias Supersimétricas.

Na construção da representação que trabalhamos, em primeiro lugar procuramos observar a estrutura geral do espaço vetorial em uma representação de Lie e comparar com o caso supersimétrico. Em teorias de Lie todos os geradores são bosônicos de forma que os vetores -campos- de uma dada representação têm todos a mesma estatística. Em verdade, temos situação ainda mais restritiva pois não é apenas a estatística (boson/férmion) mas o próprio spin- momento angular intrínseco- de um campo de Lie que é fixo, independente das transformações.

Do teorema de Coleman-Mandula[1] é fácil concluir que os estados Ψ acessíveis a uma partícula de Lie podem ser escritos como combinações lineares de vetores da forma

[1] Veja Capítulo-1, para breve enunciado deste Teorema

genérica:

$$\Psi = \sum [\text{vetor de SU(2)}][\text{Função do espaço-tempo}][\text{Vetor de Yang-Mills}] \qquad (1.1)$$

onde [vetor de SU(2)] na expressão acima representa a função de onda de spin da partícula.

As transformações de Lie que estão continuamente ligadas à identidade levam vetores de um espaço vetorial a outros vetores do mesmo espaço vetorial. Assim, as transformações de Lie correspondem, excencialmente, a uma "mudança de base", ou seja, a um novo conjunto completo de observáveis compatíveis, ou equivalentemente, a um novo conjunto de números quânticos que rotula os estados acessíveis às partículas. Desta forma a função de onda de spin de uma partícula pode alterar-se sob uma transformação de Lie, todavia seu spin $\vec{s}^2 = s(s+1)$ é invariante.

Assim, sob uma transformação de Lie, os vetores que aparecem na equação (1.1) acima podem mudar suas "componentes" mas permanecem vetores da mesma representação dos vetores originais (definição de uma representação).

Para campos de Lie o Teorema spin-estatística assegura que partículas de spin inteiro devem satisfazer a estatística de Bose-Einstein enquanto partículas de spin semi-inteiro obedecem a estatística de Fermi-Dirac. O Teorema parte das hipóteses de: indistinguibilidade das partículas; invariância de Lorentz; estabilidade do vácuo (excitações apenas com energia positiva); causalidade e estados com norma positiva.

É importante destacar que a estatística que um campo deve satisfazer é uma informação que não está contida em seu lagrangiano e/ou equações de movimento, mas é imposta *ad hoc* para satisfazer o teorema spin-estatística. Assim, por exemplo, para um campo Ψ qualquer as equações de Heisenberg

$$\dot{\Psi} = i[H, \Psi]; \qquad \dot{\Pi}_{\Psi} = i[H, \Pi_{\Psi}] \tag{1.2}$$

podem ser satisfeitas quantizando-o tanto por regras de comutação quanto por regras de anticomutação, independentemente de seu spin, todavia apenas a escolha de comutação para os bósons e anticomutação para os férmions é que satisfaz o Teorema spin-estatística.

Analogamente às partículas de Lie, de uma forma genérica os estados Ψ acessíveis a uma (super)partícula pode ser escrito como *combinações lineares de vetores da forma*[2]:

$$\Psi = [\text{(super)vetor de SU(2)}][\text{Função do espaço-tempo}][\text{Vetor de Yang-Mills}] \tag{1.3}$$

Onde [(super)vetor de SU(2)] na equação acima representa a função de onda de spin, e este último pode assumir a série de valores de spin que caracterizam o supermultipleto. Em outras palavras, ao contrário do que ocorre nas teorias de Lie, no caso supersimétrico o spin $\vec{s}^2 = s(s+1)$ não é invariante sob as transformações do (super)grupo. Isto ocorre porque, ao contrário das teorias de Lie, nas teorias supersimétricas há, além dos geradores bosônicos, os geradores fermiônicos. Estes últimos são responsáveis por transformações que alteram o spin da partícula original, como se acrescentassem-lhe um "quantum" de spin $s = \frac{1}{2}$ levando partículas de spin inteiro a partículas de spin semi-inteiro e vice-versa. Desta forma, após as transformações supersimétricas, os vetores [(super)vetor de SU(2)] da equação (1.3) estão em representação de Lorentz diferente da representação dos vetores originais. Isto decorre do fato de que os geradores supersimétricos não comutam com os geradores de Lorentz. Em resumo:

[2] Os coeficientes desta combinação linear pode ser números complexos e/ou variáveis de Grassmann

a)Qualquer transformação supersimétrica, como ocorre em qualquer transformação de Lie ligada continuamente à identidade, pode ser dada como um conjunto de sucessivas transformações lineares em seus geradores.

b)Dado que os vetores transformados têm spin de "natureza" diferente do spin dos vetores iniciais, vemos que se queremos considerá-los como pertencentes a um mesmo espaço vetorial, somos forçados a trabalhar com vetores que não têm spin de "natureza" bem definida. Desta forma concluimos que a partícula supersimétrica (superpartícula) não tem o spin determinado. De fato, fixado o grupo supersimétrico e se determinamos se a superpartícula é massiva ou não, pode-se determinar o conjunto de valores de spin- o hipermultipleto- que poderá descrevê-la[2];

c)Ou seja, um sistema supersimétrico é um sistema "degenerado" no spin, cujo aspecto mais interresante é a degenerescência Fermi-Bose que todo sistema supersimétrico apresenta;

d)Todavia, a indistinguibilidade de partículas de spin de natureza diferente é incompatível com o Teorema spin-estatística. Assim, por exemplo, se consideramos um gás supersimétrico formado por um conjunto infinito de partículas idênticas, todas com mesmo estado de spin e se o spin é inteiro o sistema apresentará fenômeno de condensação Bose-Einstein, obviamente o fenômeno não irá perdurar se o gás é de spin semi-inteiro e então somos forçados a concluir que a degenerescência Fermi-Bose não está mantida (para sistemas compostos).

Capítulo 2
Grupos de Simetria

2.1 Grupos de Lie e o Teorema Coleman Mandula

Em teorias relativísticas não-supersimétricas os grupos de simetria correspondentes são **grupos de Lie** que devem, necessariamente, conter o grupo de Poincaré P e, virtualmente, um outro conjunto G de geradores. Coleman e Mandula[13] demonstraram que impondo as propriedades físicas fundamentais que a matriz-S e o vácuo devem satisfazer, todos os geradores de P devem comutar com os geradores de G e que G deve ser fechado, desta forma, o grupo de Lie esperado deverá ser dado pelo produto direto $P \otimes G$, sendo que G forma um grupo de simetria interno. *Assim, pelo teorema de Coleman-Mandula, a álgebra de Lie mais geral possível em uma teoria fisicamente aceitável será da forma:*

$$\begin{aligned}
&[P_a, P_b] = 0 \\
&[P_a, J_{bc}] = (\eta_{ab}P_c - \eta_{ac}P_b) \\
&[J_{ab}, J_{cd}] = -(\eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bc}J_{ad}) \\
&[T_r, T_s] = f^t_{rs}T_t \\
&[P_a, T_r] = [J_{ab}, T_r] = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $\{P_a, J_{bc}\}$ são os geradores do grupo de Poincaré P e $\{T_r\}$ são os geradores do grupo interno G.

2.2 O Grupo Supersimétrico.

A noção de "grupo" supersimétrico (supergrupo de Poincaré) nasceu do artigo de Gelfand e Likhtman[14] onde os autores estenderam a noção de grupo de simetria para algo mais geral que um grupo de Lie, ampliando a álgebra correspondente e permitindo que haja geradores do grupo cuja *anticomutação* repoduza outros geradores do grupo:

$$\{Q_A, Q_B\} = Q_A Q_B + Q_B Q_A = \text{outros geradores} \tag{2.5}$$

Assim, além dos geradores acima, os geradores do grupo supersimétrico contêm necessariamente $\{P_a, J_{bc}\}$ e, virtualmente, $\{T_r\}$ que satisfazem à álgebra (2.4). Resta então estabelecer a álgebra dos geradores $\{Q_A\}$ entre si e com os demais geradores.

Rudolf Haag et.al. generalizaram o Teorema de Coleman-Mandula para o caso supersimétrico e demonstraram que os geradores $\{Q_A\}$ estão, necessariamente, na representação $(0, \frac{1}{2})$ ou $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz. Por isto estes geradores são classificados como geradores "fermiônicos" e os demais como geradores "bosônicos". Os geradores $\{Q_A\}$ além de objetos de Lorentz conforme acima, podem ser vetores na representação fundamental de SU(N). Assim os índices A dos geradores $\{Q_A\}$ representam os índices de Lorentz e os índices "internos" de SU(N). Vamos trabalhar apenas no caso N=2.

2.3 A super-álgebra N=2

A supersimetria N=2 está definida pela super-álgebra[3] de Wess-Zumino dos seus geradores:

[3] O símbolo [A,B] representa o anticomutador de A e B caso ambos sejam fermiônicos e o comutador nos demais casos.

$$[\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B\} = T^C_{AB}\mathcal{P}_C \tag{2.6}$$

onde

$$\mathcal{P}_A = (P_a, Q^i_\alpha, \bar{Q}^i_{\dot\alpha}, Z, \bar{Z}) \tag{2.7}$$

são, respectivamente:

1)os geradores das translações P_a, ($a = 0, 1, 2, 3$) e que são vetores de Lorentz;

2) os geradores supersimétricos, Q^i_α, e seu hermitiano conjugado $\bar{Q}_{i\dot\alpha}$ que são espinores de Weyl e dubletos de SU(2)- os índices de spin $\alpha = 1, 2$ e $\dot\alpha = 1, 2$ correspondem, respectivamente, as representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz e os índices internos $i = 1, 2$ são os índices de SU(2) na representação fundamental ("isospin");

3) as cargas centrais Z, $\bar{Z}$ que são escalares de Lorentz.

Finalmente, as constantes de estrutura da super-álgebra (2.6) - as "torções"- são dadas por[1] :

$$T^{ij}_{\alpha\beta}{}^{z} = 2i\varepsilon^{ij}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad T^{ij}_{\dot\alpha\dot\beta} = 2i\varepsilon^{ij}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \quad T^{ij}_{\alpha\dot\beta}{}^{a} = -2i\varepsilon^{ij}\sigma^a_{\alpha\dot\beta} \tag{2.8}$$

todas as demais "torsões" são nulas.

2.4 O Super-espaço N=2

O super-espaço N=2 forma uma variedade estendida, um "ponto" desta super-variedade pode estar descrito pelas coordenadas do super-espaço

$$\mathcal{A} = (x^a, \theta^i_\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha}_i, z, \bar{z}) \tag{2.9}$$

[1] Veja apêndice (B) para conveções.

que são, respectivamente, as coordenadas do espaço-tempo x^a, as coordenadas espinoriais θ^i_α e $\bar{\theta}^\alpha_i$, a coordenada de carga central z e sua conjugada $\bar{z}$. As coordenadas z, $\bar{z}$ e x^a são bosônicas enquanto θ^i_α e $\bar{\theta}^\alpha_i$ são fermiônicas (variáveis de Grassmann). Suas propriedades de (anti)comutação são dadas por

$$\mathcal{A}^M \mathcal{A}^N = (-)^{mn} \mathcal{A}^N \mathcal{A}^M \tag{2.10}$$

onde os índices (M e N, neste caso) representam as componentes de $\mathcal{A}$, e o sinal $(-)^m$ é função da coordenada $\mathcal{A}^M$ de forma que $(-)^m = 1$, ou seja, $m = 0$ se $\mathcal{A}^M$ é coordenada bosônica, e $(-)^m = -1$, ou seja, $m = 1$ se $\mathcal{A}^M$ é coordenada fermiônica. Da relação (2.10) decorre ainda que

$$\partial_M \partial_N = (-)^{mn} \partial_N \partial_M \qquad ; \qquad \partial_M \mathcal{A}^N = \delta^N_M \tag{2.11}$$

Para os parâmetros bosônicos as relações acima decorrem naturalmente do fato de que estes parâmetros são coordenadas fidedignas de uma variedade diferenciável[12], ao passo que para os parâmetros fermiônicos as relações acima são uma definição.

2.5 Representação de Wess-Zumino para a Super-álgebra N=2

Uma representação no super-espaço para a super-álgebra (2.7) é dada por *supercampos* que são "funções" do super-espaço e que se transformam sob os geradores da super-álgebra na forma:

$$
\begin{aligned}
P_a\phi &= \partial_a\phi \\
Q^i_\alpha\varphi &= \left(\partial^i_\alpha - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}\partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^i_\alpha\partial_z\right)\varphi \\
\bar{Q}_{\dot{\alpha}i}\varphi &= \left(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}i} + i\theta^\alpha_i\partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\alpha}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}i}\partial_{\bar{z}}\right)\varphi \\
Z\varphi &= \partial_z\varphi \\
\bar{Z}\varphi &= \partial_{\bar{z}}\varphi
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

onde $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$; $\partial^i_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha_i}$; $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}i} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}}$; etc.

2.6 Derivadas Covariantes D_A no Super-espaço

As derivadas covariantes D_A são definidas de forma que $D_A\varphi$ se transforma da mesma forma que o próprio supercampo φ. Estão dadas pelos operadores "diferenciais":

$$
D_A = (\partial_z, \partial_{\bar{z}}, \partial_a, D^\alpha_i, \bar{D}^i_{\dot{\alpha}})
\tag{2.13}
$$

onde D^α_i e $\bar{D}^i_{\dot{\alpha}}$ têm, respectivamente, a representação:

$$
D^\alpha_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i_\alpha} + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i(\bar{\sigma}^a\varepsilon)^\alpha_{\dot{\alpha}}\partial_a - i\theta^\alpha_i\partial_Z \quad ; \quad \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_i} + i\theta^i_\alpha(\sigma^a\varepsilon)^\alpha_{\dot{\alpha}}\partial_a + i\bar{\theta}^i_{\dot{\alpha}}\partial_{\bar{Z}}
\tag{2.14}
$$

A partir de suas definições obtemos que os operadores D_A satisfazem à álgebra:

$$
\left\{D^i_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}_j\right\} = 2i\delta^i_j(\sigma^a\varepsilon)^{\dot{\alpha}}_\alpha\partial_a
\tag{2.15}
$$

$$
\left\{D^i_\alpha, D^j_\beta,\right\} = -2i\varepsilon^{ij}\varepsilon_{\alpha\beta}\partial_z
\tag{2.16}
$$

$$
\left\{\bar{D}^{\dot{\alpha}}_i, \bar{D}^{\dot{\beta}}_j\right\} = 2i\varepsilon_{ij}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial_{\bar{z}}
\tag{2.17}
$$

e todos os demais (anti)comutadores são nulos.

A álgebra dos operadores diferencias, D_A , pode ser compactamente escrita por

$$[D_A, D_B\} = -iT_{AB}{}^{C} D_C \tag{2.18}$$

onde as "torsões" T_{BA}^{C} estão dadas por (2.8) e são diferente de zero apenas nos casos em que A e B são ambas fermiônicas.

As *"componentes"* de um supermultipleto são os "coeficientes" da expansão do *supercampo* associado $\phi(\mathcal{A})$ em potências das "coordenadas" fermiônicas $(\theta^i_\alpha, \bar{\theta}^i_{\dot{\alpha}})$. Uma componente genérica é escrita da forma

$$C_{(n)} = (D)^n \phi| \tag{2.19}$$

onde $(D)^n\phi|$ representa qualquer produto das derivadas fermiônicas (D^i_α e $\bar{D}^i_{\dot{\alpha}}$) aplicadas ao supercampo ϕ e, ao final, avaliado em $(\theta^i_\alpha, \bar{\theta}^i_{\dot{\alpha}}) = (0, 0)$. Em termos das componentes acima definidas os geradores (2.7) do supergrupo são representados pelas superderivadas (2.13)[6]:

$$\mathcal{P}_A C_{(n)} = D_A (D)^n \phi| \tag{2.20}$$

Capítulo 3
O Hipermultipleto de Fayet: Uma Representação Irredutível para o Supergrupo de Poincaré N=2:

O nosso objeto de estudo é o supermultipleto de Fayet -dado por quatro campos[5] $(\phi_i, \chi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, F_i)$ - em interação com o supermultipleto de gauge. Sendo que (ϕ_i, F_i) são ambos campos bosônicos, escalares de Lorentz e dubletos de $SU(2)$; ao passo que $(\chi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}})$ são campos fermiônicos (variáveis de Grassmman) dados por espinores de Weyl, respectivamente nas representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ do Grupo de Lorentz, de forma que a partir de ambos podemos construir espinores de Dirac e/ou Majorana, etc. Numa teoria de Yang-Mills o hipermultipleto de Fayet é interpretado como (super)campo de matéria.

Neste Capítulo vamos considerar apenas o supermultipleto de matéria livre, no próximo capítulo consideraremos o seu acoplamento com o supermultipleto de gauge.

Para a construção do supermultipleto de Fayet e obtenção das leis de transformação de suas componentes, usaremos o formalismo de *supercampos* e introduzimos o supercampo de Fayet $\phi(\mathcal{A})$. Este é um escalar de Lorentz e um dubleto de SU(2) que satisfaz à propriedade de que suas derivadas supersimétricas são singletos de SU(2) (condição de Fayet):

$$D^i_\alpha \phi^j(\mathcal{A}) + D^j_\alpha \phi^i(\mathcal{A}) = 0 \quad ; \quad \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} \phi^j(\mathcal{A}) + \bar{D}^j_{\dot{\alpha}} \phi^i(\mathcal{A}) = 0 \qquad (3.21)$$

[5] Obviamente, consideramos também seus respectivos comjugados $\left(\bar{\phi}^i, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}, \psi_\alpha, \bar{F}^i\right)$

e com a propriedade acima a nossa tarefa é construir uma representação do supergrupo $\mathcal{N} = 2$.

3.1 As Componentes do hipermultipleto de Fayet.

Para a construção da representação do hipermultipleto de Fayet, começamos definindo os supercampos:

$$
\begin{array}{ll}
\phi^i(\mathcal{A}) \equiv \phi^i(\mathcal{A}) & \bar{\phi}^i(\mathcal{A}) \equiv \bar{\phi}^i(\mathcal{A}) \\
\chi_\alpha(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} D^i_\alpha \phi_i(\mathcal{A}) & \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{D}^i_{i\dot{\alpha}} \bar{\phi}_i(\mathcal{A}) \\
\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} \phi_i(\mathcal{A}) & \psi_\alpha(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} D^i_\alpha \bar{\phi}_i(\mathcal{A}) \\
F^j(\mathcal{A}) \equiv \frac{i}{4} D^{i\alpha} D_{i\alpha} \phi^j(\mathcal{A}) = \partial_z \phi^j(\mathcal{A}) & \bar{F}^j(\mathcal{A}) \equiv -\frac{i}{4} \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}_i \phi^j(\mathcal{A}) = -\partial_{\bar{z}} \phi^j(\mathcal{A})
\end{array}
\tag{3.22}
$$

E desta forma, para estabelecer as leis de transformação supersimétricas das componentes do supermultipleto de Fayet$-(\phi^i, \chi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, F^i)-$ e do conjugado $-(\bar{\phi}^i, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}, \psi_\alpha, \bar{F}^i)-$ conforme equações (2.19 e 2.20) estas componentes são definidas pelos respectivos supercampos (3.22) avaliados em $(\theta^i_\alpha, \bar{\theta}^i_{\dot{\alpha}}) = 0$:

$$
\begin{array}{ll}
\phi^i(z, \bar{z}, x_a) \equiv \phi^i(\mathcal{A})\big| & \bar{\phi}^i(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{\phi}^i(\mathcal{A})\big| \\
\chi_\alpha(z, \bar{z}, x_a) \equiv \chi_\alpha(\mathcal{A})| & \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A})| \\
\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A})\big| & \psi_\alpha(z, \bar{z}, x_a) \equiv \psi_\alpha(\mathcal{A})| \\
F^j(z, \bar{z}, x_a) \equiv F^j(\mathcal{A})| & \bar{F}^j(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{F}^j(\mathcal{A})\big|
\end{array}
\tag{3.23}
$$

Com as definições acima, e usnado as equações (2.19 e 2.20) fica claro como determinar as leis de transformação supersimétricas das componentes do multipleto de Fayet (3.23): a atuação de qualquer gerador $\mathcal{P}_A$ sobre qualquer dos campos $C(z, \bar{z}, x_a)$ do multipleto é dada pela superderivada $D_{\mathcal{A}}$ correspondente atuando sobre o respectivo supercampo $C'(\mathcal{A})$ e, ao final, avaliado em $\theta = \bar{\theta} = 0$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} C(z, \bar{z}, x_a) = D_{\mathcal{A}} C(\mathcal{A})| \tag{3.24}$$

3.2 Generalização do Vínculo de Carga Central e Obtenção das Transformações Supersimétricas.

A representação obtida pelas leis de transformação (3.24) é fechada no espaço das funções de $(z, \bar{z}, x_a)$, mas, implicam em derivadas de $(\partial_z, \partial_{\bar{z}})$, logo, possivelmentemente, em uma série infinita de novos campos em x_a. A série poderá ser finita se, em algum instante, uma combinação linear das derivadas $(\partial_z, \partial_{\bar{z}})$ reproduzir múltiplos e/ou derivadas ∂_a de campos já obtidos em transformações anteriores. Ora, se isto ocorrer para um dado campo, também terá ocorrido para a primeira componente φ_i, pois $(\partial_z, \partial_{\bar{z}})$ comutam com todos os demais geradores. E é com este raciocínio que proponho o vínculo de carga central

$$\left(\partial_z - e^{iw}\partial_{\bar{z}}\right)\varphi_i = i\Lambda\varphi_i \qquad \left(\partial_{\bar{z}} - e^{-iw^*}\partial_z\right)\bar{\varphi}_i = i\bar{\Lambda}\bar{\varphi}_i \tag{3.25}$$

que é uma generalização do vínculo proposto por Sohnius[6], onde agora aparece um parâmetro tipo massa, Λ, e uma "fase", w. Até aqui, ambos são bem gerais e podem ser inclusive complexos.

Conforme já destacamos, dado que as derivadas covariantes (2.14) comutam com ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$ é nítido que se a equação acima vale para o supercampo $\varphi_i(\bar{\varphi}_i)$ valerá para todas as suas derivadas, em particular para as derivadas (3.22) que definem as componentes (3.23) do multipleto de Fayet. Desta forma, para uma componente genérica $C'(z, \bar{z}, x_a)$ do supermultipleto temos:

$$\left(\partial_z - e^{iw}\partial_{\bar z}\right) C = i\Lambda C \qquad \left(\partial_{\bar z} - e^{iw}\partial_z\right) \bar C = i\bar\Lambda \bar C \tag{3.26}$$

Com o vínculo acima, com a super-álgebra (2.18), com a condição de Fayet (3.21) e com as definições (3.22) dos supercampos, obtemos as leis de transformação para as componentes (3.23) do supermultipleto conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
&Q^i_\alpha \phi_j = \sqrt{2}\delta^i_j \chi_\alpha && \bar Q^i_{\dot\alpha} \phi_j = \sqrt{2}\delta^i_j \bar\psi_{\dot\alpha} \\
&Q^i_\alpha \chi_\beta = -\sqrt{2} i \varepsilon_{\alpha\beta} F^i && \bar Q^i_{\dot\alpha} \chi_\beta = -\sqrt{2} i \not\partial_{\beta\dot\alpha} \phi^i \\
&Q^i_\alpha \bar\psi_{\dot\beta} = \sqrt{2} i \not\partial_{\alpha\dot\beta} \phi^i && \bar Q^i_{\dot\alpha} \bar\psi_{\dot\beta} = e^{-iw}\sqrt{2} i \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(F^i - i\Lambda\phi^i\right) \\
&Q^i_\alpha F_j = \sqrt{2}\delta^i_j\left(-e^{iw}\not\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} + i\Lambda\chi_\alpha\right) && \bar Q^i_{\dot\alpha} F_j = -\sqrt{2}\delta^i_j \not\partial_{\beta\dot\alpha}\chi^\beta
\end{aligned} \tag{3.27}$$

e as transformações de carga central

$$\begin{aligned}
&Z\phi^i = F^i\,. && \bar Z\phi^i = e^{-iw}(F^i - i\Lambda\phi^i)\,. \\
&Z\chi_\alpha = e^{iw}\partial_{\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta} + i\Lambda\chi_\alpha\,. && \bar Z\chi_\alpha = \partial_{\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta}\,. \\
&Z\bar\psi_{\dot\beta} = \partial_{\alpha\dot\beta}\chi^\alpha\,. && \bar Z\bar\psi_{\dot\beta} = e^{-iw}(\partial_{\alpha\dot\beta}\chi^\alpha - i\Lambda\bar\psi_{\dot\beta})\,. \\
&ZF^i = e^{iw}\Box\phi^i + i\Lambda F^i\,. && \bar Z F^i = \Box\phi^i\,.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

e transformações similares para o supermultipleto conjugado.

Vemos pelas equações (3.23 e 3.26) que os campos da representação acima têm todos a mesma dependência nas coordenadas de carga central. Assim, para cada valor destas coordenadas há uma representação, então, há "infinitas" representações nas coordenadas do espaço-tempo. Mas todas estas representações são isomórficas. Desta forma, podemos fixar arbitrariamente o valor das coordenadas de carga central e obter representação finita composta por campos locais no espaço-tempo.

Temos uma família de representações (w, Λ)-depententes, a super-álgebra destas leis de transformação se fecha conforme a super-álgebra (2.18), independentemente destes parâmetros, inclusive ambos podem ser complexos. Todavia a parte real da "fase" w pode ser eliminada por uma redefinição dos campos e coordenadas do super-espaço.

Definindo

$$z \rightarrow e^{iu/2} z \qquad \bar{z} \rightarrow \bar{z} e^{-iu/2} \qquad \Lambda \rightarrow e^{-iu/2} \Lambda \tag{3.29}$$

e

$$u = \mathrm{Re}(w) \qquad ; \qquad v = \mathrm{Im}(w) \tag{3.30}$$

com estas redefinições a equação de vínculo de carga central se reescreve como:

$$\left(\partial_z - e^{-v} \partial_{\bar{z}}\right) C = i\Lambda C \qquad \left(\partial_{\bar{z}} - e^{-v} \partial_z\right) \bar{C} = i\bar{\Lambda} \bar{C} \tag{3.31}$$

as redefinições acima exigem as transformações

$$\begin{array}{llll} \theta \rightarrow e^{iu/4} \theta & \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} e^{-iu/4} & x \rightarrow x & \\ D^i_\alpha \rightarrow e^{-iu/4} D^i_\alpha & \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{iu/4} \bar{D}^i_{\dot{\alpha}} & & \\ \varphi \rightarrow \varphi & \chi \rightarrow e^{-iu/4} \chi & \bar{\psi} \rightarrow e^{iu/4} \bar{\psi} & F \rightarrow e^{-iu/2} F \\ \bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi} & \bar{\chi} \rightarrow e^{iu/4} \bar{\chi} & \psi \rightarrow e^{-iu/4} \psi & \bar{F} \rightarrow e^{iu/4} \bar{F} \end{array} \tag{3.32}$$

as leis de transformação ficam:

$$
\begin{aligned}
&Q^i_\alpha \phi_j = \sqrt{2}\delta^i_j \lambda_\alpha && \bar{Q}^i_{\dot\alpha}\phi_j = \sqrt{2}\delta^i_j \bar{\psi}_{\dot\alpha} \\
&Q^i_\alpha \lambda_\beta = -\sqrt{2} i \varepsilon_{\alpha\beta} F^i && \bar{Q}^i_{\dot\alpha}\lambda_\beta = -\sqrt{2} i \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\phi^i \\
&Q^i_\alpha \bar{\psi}_{\dot\beta} = \sqrt{2} i \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta}\phi^i && \bar{Q}^i_{\dot\alpha}\bar{\psi}_{\dot\beta} = e^{v}\sqrt{2} i \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(F^i - i\Lambda\phi^i\right) \\
&Q^i_\alpha F_j = \sqrt{2}\delta^i_j\left(-e^{-v}\partial\!\!\!/_{\alpha\dot\alpha}\bar{\psi}^{\dot\alpha} + i\Lambda\lambda_\alpha\right) && \bar{Q}^i_{\dot\alpha}F_j = -\sqrt{2}\delta^i_j \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\lambda^\beta
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

e as transformações de carga central

$$
\begin{aligned}
&Z\phi^i = F^i \,. && \bar{Z}\phi^i = e^{v}(F^i - i\Lambda\phi^i)\,. \\
&Z\lambda_\alpha = e^{-v}\partial_{\alpha\dot\beta}\bar{\psi}^{\dot\beta} + i\Lambda\lambda_\alpha \,. && \bar{Z}\lambda_\alpha = \partial_{\alpha\dot\beta}\bar{\psi}^{\dot\beta}\,. \\
&Z\bar{\psi}_{\dot\beta} = \partial_{\alpha\dot\beta}\lambda^\alpha \,. && \bar{Z}\bar{\psi}_{\dot\beta} = e^{v}(\partial_{\alpha\dot\beta}\lambda^\alpha - i\Lambda\bar{\psi}_{\dot\beta})\,. \\
&ZF^i = e^{-v}\Box\phi^i + i\Lambda F^i \,. && \bar{Z}F^i = \Box\phi^i \,,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

e transformações similares para o multipleto conjugado.

3.3 Lagrangiano para o Multipleto de Fayet Livre.

O lagrangiano do multipleto de Fayet será obtido a partir de um algoritmo devido a Hasler[4], baseado em

Proposição: Considere um supercampo polinomial L^{ij} -dito "kernel"- e de derivada cíclica zero

$$
D^{(i}_\alpha L^{jk)} = 0 \qquad \bar{D}^{(i}_{\dot\alpha} L^{jk)} = 0 \tag{3.35}
$$

então os supercampos

$$
L \equiv -D^\alpha_k \Gamma^k_\alpha \quad : \quad \bar{L} \equiv -D_{\dot\alpha k}\bar{\Gamma}^{\dot\alpha k} \quad : \text{ com } \quad \Gamma^k_\alpha \equiv D_{\alpha i}L^{ik} \quad \text{e} \quad \bar{\Gamma}^{\dot\alpha k} \equiv \bar{D}^{\dot\alpha}_i L^{ik} \tag{3.36}
$$

têm a transformação supersimetrica - com parâmetros infinitesimais ξ e $\bar{\xi}$- dadas por

$$
\begin{aligned}
\delta L &= i\partial_z(\xi^\alpha_k\Gamma^k_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}k}\bar{\Gamma}^{\dot{\alpha}k}) - 2i\bar{\partial}^{\dot{\alpha}\alpha}(\bar{\xi}_{\dot{\alpha}k}\Gamma^k_\alpha) \\
\delta\bar{L} &= -i\partial_{\bar{z}}(\xi^\alpha_k\Gamma^k_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}k}\bar{\Gamma}^{\dot{\alpha}k}) - 2i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}(\xi^\alpha_k\bar{\Gamma}^{\dot{\alpha}k})
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Em termos dos campos de Fayet consideramos o kernel

$$L^{ij} = i\bar{\phi}^i\partial_z\phi^j + ie^{i\gamma}\partial_{\bar{z}}\bar{\phi}^j\phi^i \tag{3.38}$$

onde a "fase" γ é um número complexo e arbitrário[6]. E então tomamos combinação linear dos supercampos L e $\bar{L}$

$$L_\theta = L + e^{i\theta}\bar{L} \qquad \text{onde } \theta \text{ é parâmetro complexo arbitrário} \tag{3.39}$$

dado que os parâmetros ξ e $\bar{\xi}$ são independentes, segue-se de (3.37) que as condições necessária e suficientes para que L_θ seja invariante supersimétrico são

$$(\partial_z - ie^{i\theta}\partial_{\bar{z}})\Gamma^k_\alpha = \text{divergente total} \quad ; \quad (\partial_z - ie^{i\theta}\partial_{\bar{z}})\bar{\Gamma}^{\dot{\alpha}k} = \text{divergente total} \tag{3.40}$$

Dado que o kernel L^{ij} é bilinear nos supercampos ϕ e $\bar{\phi}$, a partir das transformações de carga central (3.34) para ϕ e das equações de vínculo (3.26) (e equações correspondentes para o campo conjugado $\bar{\phi}$) obtemos que condição suficiente para que equação (3.40) seja satisfeita é

$$v = 0; \quad \theta = \gamma = 0; \quad \Lambda^* = \Lambda \tag{3.41}$$

---

[6] Com esta fase fazemos pequena generalização do kernel proposto na literatura[2][3].

E então, obtemos o lagrangiano supersimétrico - invariante a menos de uma derivada total - como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{24} L_0 + c.c. = \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_\lambda$$

$$\mathcal{L}_{cin} = \bar{F}F - \partial_a \bar{\phi} \partial^a \phi - i\chi \partial\!\!\!/ \bar{\chi} - i\psi \partial\!\!\!/ \bar{\psi} \tag{3.42}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -i\frac{\lambda}{2}(\bar{F}\phi - \bar{\phi}F + i\chi\psi + i\bar{\psi}\bar{\chi})$$

Observe-se que com as condiçoes (3.41), o vínculo de carga central (3.31) se reescreve agora como

$$(\partial_z - \partial_{\bar{z}})C = i\Lambda C \quad ; \quad (\partial_{\bar{z}} - \partial_z)\bar{C} = i\bar{\Lambda}\bar{C} \qquad \text{com} \quad \Lambda = \bar{\Lambda} = \Lambda^* \tag{3.43}$$

E desta forma, embora as equações (3.33) e (3.34) constituam uma representação da superalgebra (2.6) para c real e Λ complexo, apenas para $c = 0$ e Λ real é possível obter um lagrangiano invariante. No próximo capítulo discutiremos forma alternativa de estabelecer a dinâmica dos campos para quaisquer valores de c real e Λ complexo.

Observe-se que o lagrangiano $\mathcal{L}_\lambda$ é formado por termos de massa e foi completemente induzido pelas leis de transformação definidas na seção anterior. Ao mesmo tempo, é possível introduzir um termo de massa "by hand", usando o algoritmo de Hasler e o kernel

$$L^{ij}_m = m(\bar{\phi}^i \phi^j + \bar{\phi}^j \phi^i) \tag{3.44}$$

e o lagrangiano invariante obtido é

$$\mathcal{L}_m = m(\bar{F}\phi + \bar{\phi}F - i\chi\psi + i\bar{\psi}\bar{\chi}) \qquad \text{com } m \text{ real} \tag{3.45}$$

3.4 Equações de Movimento

Combinando as equações (3.42) e (3.45) o lagrangiano total fica
$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{massa}$.

$$\mathcal{L}_{cin} = \bar{F}F - \partial_a\bar{\phi}\partial^a\phi - i\chi\partial\!\!\!/\bar{\chi} - i\psi\partial\!\!\!/\bar{\psi}$$

$$\mathcal{L}_{massa} = M\bar{F}\phi + M^*\bar{\phi}F - iM^*\chi\psi + iM\bar{\psi}\bar{\chi} \qquad \text{com } M = m - i\tfrac{\lambda}{2},\ M^* = m + i\tfrac{\lambda}{2} \tag{3.46}$$

e implica nas equações de movimento

$$\begin{aligned} &F_i + M\phi_i = 0 \\ &\partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + M^*\chi_\alpha = 0 \\ &\bar{\partial\!\!\!/}^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha + M\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = 0 \\ &\Box\phi_i + M^*F_i = 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

As equações acima generalizam as equações da literatura pela presença do parâmetro λ contribuindo para o parâmetro de massa M. A despeito de M ser complexo, não há taquions na teoria. E, de fato, é fácil verificar que todas as componentes do multipleto são campos de Klein-Gordon com massa real $|M|$:

$$(-\Box + M^*M)\,C = 0 \qquad \text{com } C = \phi, F, \chi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{3.48}$$

E similarmente para o multipleto conjugado.

Capítulo 4
Paridade, Vínculo(s) de Carga Central e Equações de Movimento.

Na seção (3.3) obtivemos o lagrangiano de Fayet a partir do algoritmo de Hasler. E para isto foi necessário fixar os parâmetros que aparecem na equação de vínculo (3.31) de forma que $v = 0$ e $\lambda = \lambda^*$. Conforme já dissemos para outros valores destes parâmetros, temos uma representação da super-álgebra mas não temos lagrangiano invariante super-simétrico. Vamos considerar forma alternativa para a obtenção das equações de movimento (e do lagrangiano) para $v \neq 0$ (real) e λ complexo. Conforme veremos, neste caso, embora sejamos capazes de obter a dinâmica dos campos, o lagrangiano correspondente não é supersimétrico.

É nítido das equações (3.34 e 3.31) que se fixarmos ambas as cargas centrais

$$ZC = \mu_z C \quad ; \quad \bar{Z}C = \mu_{\bar{z}} C \tag{4.49}$$

decorre as equações de movimento para os campos, ou seja, é equivalente a trabalharmos "on shell". Ao mesmo tempo, conhecendo as equações de movimento, podemos tentar dar um passo atrás e construir o lagrangiano correspondente. Todavia ao fixar ambas as cargas centrais devemos respeitar a equação de vínculo (3.31).

Com este objetivo, é conveniente substituir as coordenadas de carga central $(z, \bar{z})$ por duas novas coordenadas (p, q):

$$p = z + e^{v}\bar{z}; \qquad q = z - e^{v}\bar{z} \tag{4.50}$$

onde o parâmetro v é o mesmo que aparece na equação de vínculo (3.26)[7] . Pela regra da cadeia, em termos das novas coordenadas (p, q) as transformações de carga central para uma dada componente C do multipleto (ou do multipleto conjugado) ficam:

$$ZC = \partial_z C = \frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = \partial_p C + \partial_q C \implies \partial_z = \partial_p + \partial_q \tag{4.51}$$

similarmente para $\bar{Z}$:

$$\bar{Z}C = e^{v}(\partial_p C - \partial_q C) \implies \partial_{\bar{z}} = e^{v}(\partial_p - \partial_q) \tag{4.52}$$

por simples manipulação das equações acima temos que

$$\partial_q = \tfrac{1}{2}(\partial_z - e^{-v}\partial_{\bar{z}}) \qquad \partial_p = \tfrac{1}{2}(\partial_z + e^{-v}\partial_{\bar{z}}) \tag{4.53}$$

Simples uso das leis de transformação (3.33 e 3.34) leva que para qualquer componente do supermultipleto temos

$$Z\bar{Z}C = \Box C \tag{4.54}$$

Em termos dos geradores ∂_q e ∂_p , a equação acima fica

$$Z\bar{Z}C = \Box C = e^{v}(\partial_p^2 - \partial_q^2)C \tag{4.55}$$

resultado que iremos utilizar mais a frente. Alem disto, para fixar ambas as cargas centrais escrevemos equações de vínculo para os geradores (4.53):

$$\partial_q C = i\mu_q C \qquad \partial_p C = i\mu_p C \tag{4.56}$$

---

[7] Aqui poderíamos substituir v por uma fase complexa $w = u + iv$, mas, conforme já discutimos, a parte real de w pode ser eliminada por uma redefinição de campos.

da definição (4.53) é nitido que a primeira equação acima reproduz a equação de vínculo (3.31) com

$$\mu_q = \frac{\Lambda}{2} \tag{4.57}$$

Das equações (4.56), (4.51) e (4.52) decorre que

$$ZC = i(\mu_p + \mu_q)C \qquad \bar{Z}C = ie^{r}(\mu_p - \mu_q)C \tag{4.58}$$

Substituindo as equações acima nas leis de transformação de carga central (3.34), as equações de movimento obtidas são:

$$\begin{aligned}
&F_i = i(\mu_p + \mu_q)\phi_i \\
&\partial_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = ie^{r}(\mu_p - \mu_q)\chi_\alpha \\
&\partial_{\alpha\dot{\beta}}\chi^{\alpha} = i(\mu_p + \mu_q)\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \\
&\Box\phi_i = ie^{r}(\mu_p - \mu_q)F_i
\end{aligned} \tag{4.59}$$

As equações acima implicam que todas as componentes do multipleto são campos de Klein-Gordon satisfazendo a equação

$$\Box C = e^{r}(-\mu_p^2 + \mu_q^2)C \equiv |M_\mu|^2\, C \tag{4.60}$$

4.0.1 Obtenção de Condições Necessárias e Suficientes para $|M_\mu|^2$ ser Real e Positivo.

Da equação (4.60) decorre que

$$|M_\mu|^2 = e^{r}(\mu_q^2 - \mu_p^2) = -e^{r}(\mu_p - \mu_q)(\mu_p + \mu_q) \tag{4.61}$$

para que $|M_\mu|^2$ seja real e positivo é necessário e suficiente que

$$-e^{v}(\mu_p - \mu_q) = \beta^2(\mu_p + \mu_q)^*; \qquad \text{com a constante arbitrária } \beta^2 \geq 0 \tag{4.62}$$

tendo em conta que o gerador $-\bar{Z}$ é o hermitiano conjugado de Z, o seu autovalor deve ser o complexo conjugado do autovalor de Z. Pela equação (4.58) vemos que isto implica em fixar $\beta^2 = 1$. Com este resultado e escrevendo

$$\mu_p = |\mu_p|\, e^{iw_p} \qquad\qquad \mu_q = |\mu_q|\, e^{iw_q} \tag{4.63}$$

a equação (4.62) fica

$$\begin{bmatrix} (e^{v}+1)\cos w_p & -(e^{v}-1)\cos w_q \\ -(e^{v}-1)\sin w_p & (e^{v}+1)\sin w_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\mu_p| \\ |\mu_q| \end{bmatrix} = 0 \tag{4.64}$$

A equação acima só admite solução se o determinante da matriz é zero. Simples manipulação nos leva à equação transcendental

$$(e^{2v}+1)\sin(w_q - w_p) + 2e^{v}\sin(w_q + w_p) = 0 \tag{4.65}$$

de solução, certamente, complicada.

Todavia vimos que a supersimetria só está mantida se consideramos

$$v = 0 \tag{4.66}$$

neste caso, se consideramos a equação (4.64) acima com $v = 0$ e, ao mesmo tempo, se queremos $|\mu_p| \neq 0$ e/ou $|\mu_q| \neq 0$ temos, necessariamente, que

$$w_p = (n + \frac{1}{2})\pi \qquad \text{e/ou} \qquad w_q = m\pi \tag{4.67}$$

ou seja, μ_q é real e μ_p é imaginário puro:

$$\mu_p = \pm i\,|\mu_p| \quad \Longrightarrow \quad \mu_q = \pm\,|\mu_q| \tag{4.68}$$

Combinando as equações (4.61, 4.68 e 4.66) decorre que

$$|M_\mu|^2 = \left(|\mu_p|^2 + |\mu_q|^2\right) = (-\mu_p^2 + \mu_q^2) \tag{4.69}$$

onde é nítido que $|M_\mu|^2 \geq 0$, sendo ainda que $|M_\mu| = 0$ somente no caso em que ambos os parâmetros de carga cental são nulos.

4.1 O Lagrangiano do sistema.

A partir das equações de movimento (4.59) podemos escrever o lagrangiano do sistema:

$$\mathcal{L} = -\partial^a\bar\phi\partial_a\phi - i\chi\not\partial\bar\chi - i\psi\not\partial\bar\psi + \bar F F - i(\mu_q + \mu_p)(\bar F\phi + i\bar\chi\bar\psi) + ie^v(\mu_q - \mu_p)(\bar\phi F - i\chi\psi) \tag{4.70}$$

O lagrangiano acima só é invariante supersimétrico se fazemos $v = 0$. E este caso reproduz o lagrangiano (3.46) estudado na seção (3.3), com

$$m = -i\mu_p = \pm|\mu_p| \quad : \quad \frac{\Lambda}{2} = \mu_q \quad \Longrightarrow \quad M = \pm|\mu_p| - i\mu_q \tag{4.71}$$

E assim, em ambos os casos, o parâmetro de massa M tem duas contribuições, a saber: uma contribuição imaginária

$$\mathrm{Im}(M) = -\mu_q = -\frac{\Lambda}{2} \tag{4.72}$$

que é dada pelo parâmetro da equação de vínculo (3.26) com $v = 0$ que agora se reescreve

$$\partial_q C = \frac{1}{2}(\partial_z - \partial_{\bar z})C = i\mu_q C = i\frac{\Lambda}{2}C \tag{4.73}$$

e uma contribuição real

$$\mathrm{Re}(M) = \pm|\mu_p| = m \tag{4.74}$$

que pode ser obtida por um lagrangiano do tipo (3.45) colocado "by-hand" ou pelo parâmetro de uma segunda equação de vínculo usando agora o gerador ∂_p, mas com $v = 0$ que então se reescreve por

$$\partial_p C = \frac{1}{2}(\partial_z + \partial_{\bar{z}})C = i\mu_p C \tag{4.75}$$

4.1.1 Paridade

O lagragiano de massa $\mathcal{L}_{massa}$ presente no lagrangiano total (3.46) usualmente não é invariante por paridade, definida pelas transformações

$$\begin{aligned} (x^o, x^a) &\longrightarrow (x^o, -x^a) \\ (\phi^i, F^i, \chi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) &\leftrightarrow (\bar{\phi}_i, -\bar{F}_i, \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}, \psi_\alpha) \end{aligned} \tag{4.76}$$

a partir de (3.46) é fácil ver que esta invariância ocorre se, e somente se, $M = -M^*$, ou seja, $\mathrm{Re}(M) = 0$, logo

$$m = \mu_p = 0 \Longrightarrow M = -\frac{i\lambda}{2} \tag{4.77}$$

assim vemos que a invariância por paridade implica que a massa está gerada exclusivamente pelo parâmetro $\lambda = 2\mu_q$ das transformações supersimétricas. Ao nível quântico, onde as simetrias estão expressas pelas Identidades de Ward, a massa estará expressa como um parâmetro das Identidades de Ward supersimétricas - ao contrário do caso usual onde a massa é introduzida "by hand" como um lagrangiano do tipo $\mathcal{L}_m$ descrito acima. *Sendo a massa um parâmetro das leis de transformação, ela será não renormalizada.*

Obviamente se, ao contrário de fixar o gerador ∂_q, fixarmos o gerador ∂_p a massa também estaria, inicialmente, determinada por um parâmetro das leis de transformação. Todavia neste caso não está garantido que a massa estará não renormalizada, pois a simetria de "proteção" -paridade- que definimos em (4.76) não proíbe um contratermo do tipo $\mathcal{L}_m$ como correção radiativa. Talvez seja possível definir nova transformação de paridade que permita tal proteção.

Desta forma fixando o gerador ∂_q e exigindo invariância de paridade (4.76) podemos garantir a massa não renormalizada, ao menos no caso de "campos livres". O "Teorena de não-renormalização" que estabelecemos aqui mostra-se trivial no atual contexto, todavia se tornará importante no caso do acoplamento com campos de gauge, o que passamos a estudar no próximo capítulo.

Capítulo 5
Massa Induzida em Teorias super Yang-Mills N=2

Conforme ocorre para campos "livres", uma formulação de YM de teorias super-simétricas descritas em um super-espaço deve ser elaborada em termos de supercampos que obdecem equações de vínculo[5]. No caso que estamos estudando -teorias de gauge supersimétricas N=2- as equações de vínculo concernem às "torções" e curvaturas dos supercampos de gauge bem como ao (super)campo de matéria - supermultipleto de Fayet- e sua dependência na carga central[2].

O objetivo do presente capítulo é descrever o acoplamento supermultipleto de matéria e supercampo de gauge. Para isto vamos considerar a generalização do mecanismo de indução de massa descrito nos capítulos (3 e 4), as leis de transformação e o lagrangiano lá obtidos de forma a obter a formulação de gauge correspondente.

Veremos que, mesmo na presença dos campos de gauge, o vínculo de carga central apropriado e a imposição de invariância de paridade implicam na possibilidade de um "Teorema de não-renormalização" para a massa do multipleto de matéria.

5.1 O Supercampo de Matéria em super-YM N=2

Em teorias super-YM N=2 o supermultipleto de matéria é representado pelo hipermultipleto de Fayet (e seu conjugado) que -conforme no caso "livre"- suas componentes serão os coeficientes da expansão de um supercampo φ_i que é um dubleto de SU(2) e um escalar de Lorentz, mas que agora pertence a alguma representação $\mathcal{R}$ de um grupo de Lie compacto $\mathcal{G}$, o grupo de Gauge. Naturalmente, o supercampo conjugado $\bar{\varphi}^i$ pertence à representação conjugada $\overline{\mathcal{R}}$. Naturalmente, as componentes do hipermultipleto estão na mesma representação do grupo $\mathcal{G}$ que o supercampo.

Na próxima seção introduziremos as derivadas supersimétricas gauge covariantes $\mathcal{D}^i_\alpha$ e $\mathcal{D}_{i\dot{\alpha}}$. Em termos destas derivadas as condições de Fayet (3.21) são generalizadas por

$$\mathcal{D}^i_\alpha \varphi^j + \mathcal{D}^j_\alpha \varphi^i = 0 \qquad \mathcal{D}_{i\dot{\alpha}} \varphi^j + \mathcal{D}_{j\dot{\alpha}} \varphi^i = 0 \tag{5.78}$$

Ainda em termos destas derivadas os supercampos e as respectivas componentes do supermultipleto são dados pela extensão covariante das definições (3.22 e 3.23):

$$\begin{array}{ll}
\varphi^i(\mathcal{A}) \equiv \varphi^i(\mathcal{A}) & \bar{\varphi}^i(\mathcal{A}) \equiv \bar{\varphi}^i(\mathcal{A}) \\
\chi_\alpha(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{D}^i_\alpha \varphi_i(\mathcal{A}) & \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{D}^i_{i\dot{\alpha}} \bar{\varphi}_i(\mathcal{A}) \\
\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{D}^i_{\dot{\alpha}} \varphi_i(\mathcal{A}) & \psi_\alpha(\mathcal{A}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{D}^i_\alpha \bar{\varphi}_i(\mathcal{A}) \\
F^j(\mathcal{A}) \equiv \partial_z \varphi^j(\mathcal{A}) & \bar{F}^j(\mathcal{A}) \equiv = -\partial_{\bar{z}} \varphi^j(\mathcal{A})
\end{array} \tag{5.79}$$

E as componentes ficam

$$\begin{array}{ll}
\varphi^i(z, \bar{z}, x_a) \equiv \varphi^i(\mathcal{A})\big| & \bar{\varphi}^i(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{\varphi}^i(\mathcal{A})\Big| \\
\chi_\alpha(z, \bar{z}, x_a) \equiv \chi_\alpha(\mathcal{A})| & \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A})| \\
\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\mathcal{A})\big| & \psi_\alpha(z, \bar{z}, x_a) \equiv \psi_\alpha(\mathcal{A})| \\
F^j(z, \bar{z}, x_a) \equiv F^j(\mathcal{A})| & \bar{F}^j(z, \bar{z}, x_a) \equiv \bar{F}^j(\mathcal{A})\big|
\end{array} \tag{5.80}$$

Dadas as definições acima, a nossa tarefa é definir as derivadas covariantes $\mathcal{D}_A$ em termos das derivadas D_A do super-espaço e das conexões de gauge Φ_A; reescrever a super-álgebra (2.18) agora em termos das derivadas covariantes $\mathcal{D}_A$; considerar a generalização do vínculo de carga central (3.26); obter as leis de transformação para as componentes do multipleto; obter o lagrangiano total no caso do acoplamento mínimo do campo de matéria com uma conexão super-YM

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Fayet} + \mathcal{L}_{gauge-Fayet} \tag{5.81}$$

e, finalmente, as equações de movimento.

5.2 A Conexão de Gauge

5.2.1 Transformação de Gauge e Derivada Covariante no super-espaço.

Os geradores do grupo de gauge $\mathcal{G}$ na representação $\mathcal{R}$ são matrizes anti-hermitianas T_r e que satisfazem a álgebra de Lie

$$[T_r, T_s] = f^t_{rs} T_t \qquad ; \qquad f^t_{rs} = \text{constantes de estrutura do grupo } \mathcal{G} \tag{5.82}$$

A invariância de gauge local implica na introdução de super-conexão de gauge

$$\Phi_A = \Phi^r_A T_r, \qquad \text{com } \Phi_A = \left(\Phi_a \, , \, \Phi^i_\alpha \, , \, \Phi_{i\dot\alpha} \, , \, \Phi_z \, , \, \Phi_{\bar z}\right) \tag{5.83}$$

satisfazendo às condições de (anti)hermiticade

$$(\Phi_A)^\dagger = \left(-\Phi_a, -\Phi_{i\dot\alpha}, -\Phi^i_\alpha, \Phi_{\bar z}, \Phi_z\right) \tag{5.84}$$

E as transformações de gauge infinitesimais dos supercampos são

$$\delta\varphi_i = \Omega\varphi_i \quad , \quad \delta\bar\varphi_i = \bar\varphi_i\Omega \quad , \quad \delta\Phi_A = D_A\Omega - [\Phi_A, \Omega] \tag{5.85}$$

onde o parâmetro infinitesimal

$$\Omega = \Omega^r T_r \tag{5.86}$$

deve ser dado por supercampo antihermitiano e que deve satisfazer certas restrições em virtude dos vínculos impostos ao multipleto de Fayet, conforme será discutido na próxima seção.

Em consistência com as transformações (5.85) as derivadas de gauge covariantes são

$$\mathcal{D}_A\varphi_i = D_A\varphi_i - \Phi_A\varphi_i \quad , \quad \mathcal{D}_A\bar{\varphi}_i = D_A\bar{\varphi}_i + \bar{\varphi}_i\Phi_A \tag{5.87}$$

sendo D_A as derivadas ordinárias covariantes no super-espaço definidas nas equações (2.13-2.18). Das definições (5.87) acima decorre que as derivadas $\mathcal{D}_A\varphi_i$ e $\mathcal{D}_A\bar{\varphi}_i$ se transformam, respectivamente, da mesma forma que φ_i e $\bar{\varphi}_i$ na equação (5.85). Observe-se ainda que das definições acima decorre que $\bar{\varphi}^i\varphi_i$ é invariante de gauge, de forma que

$$\mathcal{D}_A\left(\bar{\varphi}^i\varphi_i\right) = D_A\left(\bar{\varphi}^i\varphi_i\right) \tag{5.88}$$

Sobre as componentes Φ_A da conexão a derivada de gauge são dadas por

$$\mathcal{D}_A\Phi_B = D_A\Phi_B - [\Phi_A, \Phi_B\} \tag{5.89}$$

As super-curvaturas de YM $\mathcal{F}_{AB}$ são dadas por

$$\mathcal{F}_{AB} = T^C_{AB}\Phi_C + D_A\Phi_B - (-)^{bc}D_B\Phi_A - (\Phi_A, \Phi_B\} \tag{5.90}$$

onde as torsões T^C_{AB} são as mesmas (2.8) do caso livre. As supercuvaturas acima definidas se transformam na representação adjunta

$$\delta\mathcal{F}_{AB} = [\Omega, \mathcal{F}_{AB}] \tag{5.91}$$

bem como sua derivada covariante

$$\mathcal{D}_C\mathcal{F}_{AB} = D_C\mathcal{F}_{AB} - (\Phi_C, \mathcal{F}_{AB}\} \tag{5.92}$$

Em termos das derivadas de gauge (5.87) ou (5.92) a super-álgebra é dada por

$$[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B\}\bullet \ = -T^C_{AB}\mathcal{D}_C\bullet \ -\mathcal{F}_{AB}\bullet \tag{5.93}$$

5.2.2 Restrições à Supercurvatura e ao Supercampo de Gauge.

Conforme já destacamos, os supercampos de gauge Φ_A devem satisfazer algumas restrições no sentido de viabilizar uma teoria de gauge [5][9]. O caso que estudamos é caracterizado pela presença de coordenadas de carga central no super-espaço, e os vínculos naturais consistem em considerar nulas as componentes da supercuvatura caracterizadas por ambos os índices fermiônicos[11][10]

$$\mathcal{F}^{ij}_{\alpha\beta} = \mathcal{F}^{ij}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \mathcal{F}^{ij}_{\dot{\alpha}\beta} = 0 \tag{5.94}$$

além disto os supercampos de gauge não devem depender da carga central

$$\partial_z\Phi_A = \partial_{\bar{z}}\Phi_A = 0 \tag{5.95}$$

Com as condições (5.94) e (5.95) pode-se utilizar as identidades de Bianchi

$$\sum_{ciclico(ABC)} \left(\mathcal{D}_C\mathcal{F}_{AB} - T^E_{CA}\mathcal{D}_C\mathcal{F}_{BE}\right) = 0 \tag{5.96}$$

para demonstrar que todas as componentes não nulas da supercurvatura podem ser escritas em termos do supergaugino Φ^i_α e seu conjugado[11]

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{ia}_{\alpha} &= i\sigma^a_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi^{i\dot{\alpha}} & \mathcal{F}^{\dot{\alpha}a}_{i} &= -i\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\beta}\Phi_{i\alpha} \\
\mathcal{F}^{\dot{\alpha}}_{zi} &= -4\Phi^{\dot{\alpha}}_i & \mathcal{F}^{i}_{\bar{z}\alpha} &= 4\Phi^i_\alpha \\
\mathcal{F}_{ab} &= \tfrac{i}{16}\sigma^{\alpha\beta}_{ab}\mathcal{D}_{\alpha\beta} + \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{ab}\mathcal{D}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\
\mathcal{F}_{z\bar{z}} &= -\left[\Phi_z, \Phi_{\bar{z}}\right]
\end{aligned} \tag{5.97}$$

com

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{D}^k_\alpha \mathcal{D}_{\beta k} + \mathcal{D}^k_\beta \mathcal{D}_{\alpha k}$$
$$\mathcal{D}_{\dot\alpha\dot\beta} \equiv \mathcal{D}^k_{\dot\alpha} \mathcal{D}_{\dot\beta k} + \mathcal{D}^k_{\dot\beta} \mathcal{D}_{\dot\alpha k} \tag{5.98}$$

A partir das condições (5.94-5.98) acima Gaida[3] demonstra que todas as componentes da curvatura dependem apenas das componentes $\Phi_{\bar z}$ e Φ_z que são (anti)chiral e satisfazem às identidades

$$\Phi^i_\alpha = -\mathcal{D}^i_\alpha \Phi_{\bar z} \qquad \mathcal{D}^k_{\dot\alpha}\Phi_{\bar z} = 0$$
$$\Phi^{\dot\alpha}_i = -\mathcal{D}^{\dot\alpha}_i \Phi_z \qquad \mathcal{D}^i_\alpha \Phi_z = 0 \tag{5.99}$$

5.2.3 O Supermultipleto de Gauge

O supercampo chiral $\Phi_{\bar z}$ gera as componentes do supermultipleto de gauge que consiste em um escalar de Lorentz e singleto de SU(2) X; um espinor de Weyl e dubleto de SU(2) X^i_α(gaugino); um escalar de Lorentz e tripleto de SU(2) X^{ij}; e finalmente, um tripleto de Lorentz e escalar de SU(2) $X_{\alpha\beta}$:

$$X = -\Phi_{\bar z}|$$
$$X^i_\alpha = -\mathcal{D}^i_\alpha \Phi_{\bar z}|$$
$$X^{ij} = -\mathcal{D}^{ij}\Phi_{\bar z}| \qquad \text{com} \quad \mathcal{D}^{ij} \equiv \mathcal{D}^{i\alpha}\mathcal{D}^j_\alpha + \mathcal{D}^{j\alpha}\mathcal{D}^i_\alpha \tag{5.100}$$
$$X_{\alpha\beta} = -\mathcal{D}_{\alpha\beta}\Phi_{\bar z}|$$

sendo que o tripleto de SU(2) satisfaz à condição de realidade

$$(X^{ij})^\dagger = -X_{ij} = -\bar X_{ij} \tag{5.101}$$

Ao mesmo tempo o tripleto de Lorentz pode ser expresso em termos da curvatura $\mathcal{F}_{ab}$

$$\mathcal{F}_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a - [A_a, A_b] \qquad \text{com} \quad A_a = \Phi_a| \tag{5.102}$$

pela relação

$$X_{\alpha\beta} = 8i\sigma^{ab}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{ab} \qquad \bar{X}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 8i\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{ab}\mathcal{F}^{ab} \tag{5.103}$$

ou a relação inversa

$$\mathcal{F}_{ab} = \frac{-i}{16}\left(\sigma^{\alpha\beta}_{ab}X_{\alpha\beta} + \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{ab}\bar{X}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right) \tag{5.104}$$

A partir das definições (5.100) e da super-álgebra (5.93) as leis de transformação das componentes do multipleto de gauge são

$$\begin{aligned}
&Q^i_\alpha X = X^i_\alpha \\
&Q^i_\alpha X^j_\beta = -i\varepsilon^{ij}\varepsilon_{\alpha\beta}[\bar{X}, X] + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}X^{ij} - \varepsilon^{ij}X_{\alpha\beta} \\
&Q^i_\alpha X^{jk} = 4i\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\left(\varepsilon^{ij}\bar{X}^{k\dot{\beta}} + \varepsilon^{ik}\bar{X}^{j\dot{\beta}}\right) - 4i\left[\varepsilon^{ij}X^k_\alpha + \varepsilon^{ik}X^j_\alpha, \bar{X}\right] \\
&Q^i_\alpha X_{\beta\gamma} = 4i\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\mathcal{D}_{\gamma\dot{\beta}} + \varepsilon_{\alpha\gamma}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\right)\bar{X}^{i\dot{\beta}} \\
&\bar{Q}_{i\dot{\beta}}X = 0 \\
&\bar{Q}_{i\dot{\beta}}X^k_\alpha = -2i\delta^k_i\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}X \\
&\bar{Q}_{i\dot{\beta}}X^{jk} = 4i\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\left(\delta^j_i X^{\alpha K} + \delta^k_i X^{\alpha j}\right) - 4i\left(\delta^j_i\bar{X}^K_{\dot{\beta}} + \delta^k_i\bar{X}^j_{\dot{\beta}}\right) \\
&\bar{Q}_{i\dot{\beta}}X_{\alpha\beta} = -4i\left(\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}X_{i\alpha} + \mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}X_{i\beta}\right)
\end{aligned} \tag{5.105}$$

E equações similares para o multipleto conjugado $\bar{X} = (\bar{X}, \bar{X}_{k\dot{\beta}}, X_{ij}, \bar{X}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}})$. Nas equações acima usamos a definição

$$\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}} \equiv \sigma^a_{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{D}_a = \sigma^a_{\alpha\dot{\beta}}\left(\partial_a - [A_a,\ ]\right) \tag{5.106}$$

5.2.4 O Lagrangiano do Multipleto de Gauge

Sendo o multipleto de gauge chiral, o lagrangiano gauge-invariante e supersimétrico - a menos de uma derivada total- pode ser definido por

$$\mathcal{L}_{gauge} = \frac{1}{3 \cdot 2^9} Tr \left(\mathcal{D}^{ij} \mathcal{D}_{ij} (\Phi_{\bar{z}})^2 + c.c. \right) \Big| \tag{5.107}$$

com $\mathcal{D}^{ij}$ definida em (5.100). Usando as leis de transformação (5.105) e a definição (5.104) da curvatura $\mathcal{F}_{ab}$ o lagrangiano obtido explicitamente é

$$\mathcal{L}_{gauge} = \tfrac{1}{4}\, Tr \left\{ \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a \bar{X} X + \bar{X} \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a X + \tfrac{i}{2} \bar{X}^{\dot{\alpha} i} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} X_i^\alpha - \tfrac{i}{2} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{X}^{\dot{\alpha} i} X_i^\alpha \right\} \Big| +$$

$$\tfrac{1}{4}\, Tr \left\{ -\mathcal{F}^{ab} \mathcal{F}_{ab} + \tfrac{1}{6!} X^{ij} X_{ij} + \tfrac{i}{2} \bar{X} \left\{ X^{\alpha i}, X_{\alpha i} \right\} + \tfrac{i}{2} \left\{ \bar{X}^i_{\dot{\alpha}}, \bar{X}^{\dot{\alpha}}_i \right\} X + \tfrac{1}{2} \left[\bar{X}, X \right] \bar{X} X \right\} \Big| \tag{5.108}$$

5.3 Vínculo de Carga Central e Leis de Transformação Gauge Covariante.

A condição de Fayet para o supermultipleto está expressa na equação (5.78) e as derivadas de gauge estão definidas em (5.87), por outro lado - como ocorre no caso livre- para obtenção das leis de transformação é necessário impor vínculos de carga central, e usaremos as mesma condições utilizadas naquele caso

$$(\partial_z - \partial_{\bar{z}})\phi_i = i\Lambda\phi_i \qquad\qquad (\partial_{\bar{z}} - \partial_z)\bar{\phi}_i = i\Lambda\bar{\phi} \tag{5.109}$$

A compatibilidade do vínculo acima com a invariância de gauge se assegura pois as componentes z e $\bar{z}$ da conexão, a saber, $\bar{X}$ e X são covariantes o que implica que as derivadas ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$ também são covariantes. Aqui também poderíamos considerar uma "fase" $e^{\prime\prime}$ multiplicando $\partial_{\bar z}$ na primeira equação e ∂_z na segunda, todavia esta fase, como vimos no caso livre, compromete a existência de uma ação invariante e por isto é descartada. Com as definições (5.79), (5.80), (5.87) e com o vínculo acima, as leis de transformação do multipleto obtidas são

$$
\begin{aligned}
&Q^i_\alpha \phi_j = \sqrt{2}\delta^i_j \chi_\alpha , && \bar{Q}_{i\dot\alpha}\phi^j = \sqrt{2}\delta^j_i \bar{\psi}_{\dot\alpha} \\
&Q^i_\alpha \chi_\beta = -\sqrt{2} i \varepsilon_{\alpha\beta}\left(F^i + \bar{X}\phi^i\right), && \bar{Q}_{i\dot\alpha}\chi_\beta = -\sqrt{2} i \mathcal{D}_{\beta\dot\alpha}\phi_i \\
&Q^i_\alpha \bar{\psi}_{\dot\alpha} = \sqrt{2} i \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\phi_i , && \bar{Q}_{i\dot\alpha}\bar{\psi}_{\dot\beta} = \sqrt{2} i \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(F_i - (i\Lambda - X)\phi_i\right) \\
&Q^i_\alpha F_j = \sqrt{2}\delta^i_j \left(\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\bar{\psi}^{\dot\alpha} + (i\Lambda - X)\chi_\alpha - X^k_\alpha \phi_k\right). \\
&\bar{Q}_{i\dot\alpha} F^j = -\sqrt{2}\delta^j_i \left(\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\chi^\alpha - \bar{X}\bar{\psi}_{\dot\alpha} + \bar{X}^k_{\dot\alpha}\phi_k\right)
\end{aligned}
\tag{5.110}
$$

E as transformações de carga central ficam

$$
\begin{aligned}
&Z\phi_i = F_i && \bar{Z}\phi_i = F_i - (i\Lambda - X)\phi_i \\
&Z\chi_\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\bar{\psi}^{\dot\alpha} + (i\Lambda - X + \bar{X})\chi_\alpha - X^k_\alpha\phi_k && \bar{Z}\chi_\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\bar{\psi}^{\dot\alpha} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}X^k_\alpha\phi_k . \\
&Z\bar{\psi}_{\dot\alpha} = \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\chi^\alpha + \bar{X}^k_{\dot\alpha}\phi_k && \bar{Z}\bar{\psi}_{\dot\alpha} = \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\chi^\alpha + \bar{X}^k_{\dot\alpha}\phi_k - (i\Lambda - X + \bar{X})\bar{\psi}_{\dot\alpha} \\
&ZF_i = \Box\phi_i + (i\Lambda + \bar{X})F_i && \bar{Z}F_i = \Box\phi_i + XF_i
\end{aligned}
\tag{5.111}
$$

E transformações similares para o supermultipleto conjugado $\bar{\phi}^i$. Nestas equações fazemos,

$$\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha} = \sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a = \sigma^a_{\alpha\dot\alpha}(D_a - A_a) \tag{5.112}$$

5.4 Lagrangiano do Hipermultipleto de Fayet e Acoplamento Mínimo com Conexão de Gauge.

Para a construção do lagrangiano do hipermultipleto de matéria (Fayet) e o acoplamento mínimo com a conexão de gauge seguimos, basicamento, o procedimento adotado no caso "livre" [8] que está baseado na proposição de Hasler discutido na seção (3.3). A extensão é simples pois o "kernel" L^{ij} é bilinear $\bar{\phi}^i\phi^j$ nos supercampos e/ou suas derivadas e por isto é gauge invariante

$$\mathcal{D}_A L^{ij} = D_A L^{ij} \qquad \text{para todo } A \tag{5.113}$$

e desta forma a extensão natural do algoritmo de Hasler para obter um lagragiano gauge-independente consiste em substituir a derivada ordinária do super-espaço D_A em cada etapa do algoritmo pela derivada de gauge correspondente $\mathcal{D}_A$, sempre usando a propriedade

$$D_A Tr(\bar{\varphi}\varphi') = \mathcal{D}_A Tr(\bar{\varphi}\varphi') = Tr(\mathcal{D}_A\bar{\varphi}\varphi' + \bar{\varphi}\mathcal{D}_A\varphi') \tag{5.114}$$

sendo $\bar{\varphi}$ e φ' o supercampo de Fayet ou qualquer de suas derivadas covariantes. Dado que estas últimas definem as componentes do supermultipleto (5.79-5.80) e suas leis de transformação (5.110) podemos computar o lagrangiano gauge-independente correspondente ao caso livre discutido na seção (3.3) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Fayet} = {} & \bar{F}F - \mathcal{D}^a\bar{\phi}\mathcal{D}_a\phi - i\psi^{\alpha}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^{\alpha} + \\
& i\psi X\chi - i\bar{\chi}\bar{X}\bar{\psi} + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\psi^{\alpha}X^k_{\alpha}\phi_k - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\bar{\phi}^k\bar{X}_{k\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\bar{\phi}^k X_{k\alpha}\chi^{\alpha} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{X}^{k\dot{\alpha}}\phi_k + \\
& -\tfrac{1}{2}\bar{\phi}(\bar{X}X + X\bar{X})\phi + \tfrac{i}{8}\bar{\phi}^i X_{ij}\phi^j + \\
& -\tfrac{i}{2}\Lambda\left[\bar{F}\phi - \bar{\phi}F + i\psi\chi + i\bar{\chi}\bar{\psi} - \bar{\phi}(\bar{X} + X)\phi\right]
\end{aligned} \tag{5.115}$$

Como no caso livre um lagragiano do tipo massa pode ser colocado "by hand", por uma extensão gauge-invariante do lagragiano (3.45) obtido do kernel (3.44), o lagrangiano assim obtido é

$$\mathcal{L}_m = m\left[\bar{F}\phi + \bar{\phi}F - i\psi\lambda + i\bar{\lambda}\bar{\psi} + \bar{\phi}(\bar{X} + X)\phi\right] \qquad \text{com } m \text{ real} \tag{5.116}$$

Todavia este lagrangiano é também eliminado pelo requerimento de invariância por paridade:

$$\begin{aligned}
&(x^0, \mathbf{x}) \longrightarrow (x^0, -\mathbf{x})\\
&\left(\phi^i, \lambda^\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, F^i\right) \longleftrightarrow (\bar{\phi}_i, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \psi^\alpha, -\bar{F}_i)\\
&(X, \bar{X}, X^k_\alpha, \bar{X}^{\dot{\alpha}}_k, X^{ij}) \longrightarrow (-\bar{X}^T, \; -X^T, \; (\bar{X}^T)^{\dot{\alpha}}_k \; -(X^T)^k_\alpha, \; (X^T)_{ij} \;)
\end{aligned} \tag{5.117}$$

onde T significa transposição.

E finalmente, para completar a descrição do modelo escrevemos as equações de movimento para os campos de matéria:

$$\begin{aligned}
&F^i - iM\phi^i = 0,\\
&\mathcal{D}^a\mathcal{D}_a\phi_i + iMF_i + \left[iM(\bar{X} - X) - \tfrac{1}{2}(\bar{X}X + X\bar{X})\right]\phi_i +\\
&-\tfrac{i}{\sqrt{2}}(\bar{X}_{i\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + X_{\alpha i}\lambda^\alpha)\phi_i + \tfrac{i}{8}X_{ik}\phi^k = 0,\\
&-i\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} + (M + iX)\lambda_\alpha + \tfrac{i}{\sqrt{2}}X^k_\alpha\phi_k = 0,\\
&i\mathcal{D}^{\alpha\dot{\beta}}\lambda_\alpha - (M + i\bar{X})\bar{\psi}^{\dot{\beta}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\bar{X}^{\dot{\beta}k}\phi_k = 0
\end{aligned} \tag{5.118}$$

onde a massa M é dada pelo parâmetro

$$M = \frac{\Lambda}{2} \tag{5.119}$$

Capítulo 6
Considerações Finais.

Generalizamos o vínculo de carga central proposto por Sohnius introduzindo parâmetro de massa Λ e "fase complexa" w.conforme equação (3.25). Vimos que a parte real de w pode ser eliminada e que equação de vínculo pode ser escrita por $(\partial_z \pm e^{-v}\partial_{\bar{z}})C = i\Lambda_{\pm}C$ com v real e, com qulquer um dos vínculos obtem-se representação finita do multipleto de Fayet. Todavia, apenas para o caso $v = 0$ temos lagrangiano supersimétrico. Com isto, ficam as indagações: *por que* $v \neq 0$ *admite representação finita para o supermultipleto de Fayet mas não admite lagrangiano supersimétrico ? Fenômeno similar ocorreria para outras representações ?*

Vimos que a generalização do vínculo de carga central (3.43) proposto no caso livre também permanece válido no acoplamento mínimo do supercampo de matéria com superconexão de YM. Em ambos os casos o parâmetro de massa tem contribuição devida ao parâmetro Λ da equação de vínculo e contribuição devida ao lagrangiano de massa $\mathcal{L}_m$ colocado "by hand". Todavia, tanto no caso livre quanto no caso de acoplamento mínimo com o campo de gauge, o lagrangiano $\mathcal{L}_m$ deve ser descartado se exigirmos invariância de paridade, e então a massa é completamente induzida pelo parâmetro Λ do vínculo de carga central, presente nas leis de transformação. *Desta forma concluímos que o vínculo de carga central que utilizamos, juntamente com a invariância de paridade implicam na possibilidade de Teorema de não-renormalização da massa.*

Apêndice A
Representações para Grupos de Lie e para Grupos Supersimétricos.

Grupos e Grupos de Lie

Um Grupo $\mathcal{G}$ é um conjunto de elementos que têm uma operação binária $(\cdot)$ e que satisfaz aos axiomas:

i)O grupo sob a operação $(\cdot)$ é fechado : Se f e g pertencem a $\mathcal{G}$ então $h = f \cdot g$ também pertence a $\mathcal{G}$:

ii)Associatividade: se f, g, h pertencem a $\mathcal{G}$ então $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$

iii)Existe elemento identidade e pertencente a $\mathcal{G}$ tal que $e \cdot g = g \cdot e$ para qualquer g pertencente a $\mathcal{G}$;

iv)Elemento inverso: para qualquer g pertencente a $\mathcal{G}$ existe elemento único g^{-1} tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

v)Se $f \cdot g = g \cdot f$ para quaisquer f e g pertencentes a $\mathcal{G}$, então $\mathcal{G}$ é dito grupo abeliano, caso contrário $\mathcal{G}$ é não-abeliano.

Há grupos contínuos e grupos não contínuos. Por exemplo, os números inteiros juntamente com a operação binária adição $+ = \cdot$ formam um grupo abeliano discreto(não contínuo). Grupos de Lie são grupos contínuos: em torno de qualquer elemento g pertencente a $\mathcal{G}$ é sempre possível definir um aberto que tem um mapeamento unívoco (bijeção) em um aberto de R^n. Um exemplo simples de grupo de Lie são as translações em R^n: $\mathbf{x} \longrightarrow$

x + a: a = constante. Sendo a operação binária entre dois elementos $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ...\mathbf{a}_n)$ e $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ...\mathbf{b}_n)$ do grupo definida por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, ...\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Neste caso, ocorre que R^n e $\mathcal{G}$ são isomórficos (a cada elemento de $\mathcal{G}$ é associado um e somente um elemento de R^n e vice-versa) e $\mathcal{G}$ é abeliano.

Álgebra de Lie.

Cada grupo de Lie $\mathcal{G}$ tem sua álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ associada. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\{A\}$ sob o corpo dos reais e finito (necessariamente) que contem uma operação bilinear -usualmente, designada por [.]- entre dois vetores **a** e **b** quaisquer pertencentes a $\{A\}$, operação que reproduz um vetor também pertencente a $\{A\}$ e que satisfaz às propriedades:

$$1) \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]; \tag{A.1}$$

$$2) \quad [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = 0 \quad \text{(Identidade de Jacobi)} \tag{A.2}$$

Para qualquer base $\{\mathbf{a}_i\}$ de $\{A\}$, a equação (A.1) acima juntamente com a condição de que a operação [.] reproduz um vetor pertencente a $\{A\}$, implicam que:

$$[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] = f_{ij}^k a_k \quad ; \quad \text{com} \quad f_{ij}^k = -f_{ji}^k \tag{A.3}$$

As constantes f_{ij}^k são ditas *constantes de estrutura* da álgebra do grupo, obviamente diferentes bases $\{\mathbf{a}_i\}$ de $\{A\}$ terão diferentes constantes de estrutura. Caso todas as constantes de estrutura sejam nulas, a álgebra e o grupo de Lie associado são ditos *abelianos*, caso contrário, são ditos *não-abelianos*. É um exercício simples para o leitor constatar que caso o grupo seja *(não)-abeliano* em uma base o será em qualquer outra base. É simples também verificar que a equação (A.2) acima implica em certo vínculo entre as constantes de estrutura:

$$f_{il}^{l}f_{jk}^{l} + f_{kl}^{l}f_{ij}^{l} + f_{jl}^{l}f_{ki}^{l} = 0 \tag{A.4}$$

Dada uma base $\{\mathbf{a}_i\}$ qualquer de $\{A\}$, os elementos de $\{\mathbf{a}_i\}$ são ditos geradores infinitesimais do grupo de Lie associado $\mathcal{G}$. Isto porque:

1)dado um vetor qualquer

$$\mathbf{a} = \alpha^i \mathbf{a}_i \tag{A.5}$$

a partir de $\mathbf{a} = \alpha^i \mathbf{a}_i$ é possível construir um sub-grupo (abeliano) de $\mathcal{G}$ caracterizado por um parâmetro real t

$$g(\mathbf{a}, t) = e^{it\mathbf{a}} \tag{A.6}$$

é nítido que todos os elementos $g(\mathbf{a}, t)$ satisfazem às condições i-v), sendo que o produto de dois elementos tem a lei:

$$\begin{aligned} &g(\mathbf{a}, t_1) \cdot g(\mathbf{a}, t_2) = e^{i(t_1+t_2)\mathbf{a}} = g(\mathbf{a}, t_2) \cdot g(\mathbf{a}, t_1) \\ &[g(\mathbf{a}, t)]^{-1} = g(\mathbf{a}, -t) \\ &g(\mathbf{a}, 0) = e \end{aligned} \tag{A.7}$$

2)Qualquer elemento de $\mathcal{G}$ pode ser escrito na forma (A.6). Todavia, dados dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, em geral

$$g(\mathbf{a}.t) \cdot g(\mathbf{b}.t) \neq g(\mathbf{a} + \mathbf{b}.t) \tag{A.8}$$

mas sempre existe um vetor $\mathbf{c}$ tal que

$$g(\mathbf{a}, t) \cdot g(\mathbf{b}, t) = g(\mathbf{c}, t) \quad ; \quad t\mathbf{c} = t\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \frac{1}{2}t^2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + ... \tag{A.9}$$

Assim, associado a cada vetor de $\{A\}$ existe um sub-espaço vetorial de $\mathcal{G}$ escrito na forma (A.6). Varrendo todo o espaço vetorial $\{A\}$ varremos todo o grupo $\mathcal{G}$. Desta forma, para uma dada base $\{\mathbf{a}_i\}$ cada elemento $g(\mathbf{a}, t)$ de $\mathcal{G}$ é determinado univacamente por um conjunto de parâmetros reais $\{t\alpha_i\}$, as coordenadas do vetor $t\mathbf{a}$.

Uma representação de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ é uma bijeção entre $\mathcal{G}$ e um conjunto de transformações lineares T. É um mapeamento "one-to-one" de cada elemento $g \in \mathcal{G}$ e uma transformação linear $T(g)$ sob algum espaço vetorial $\{V\}$[8], de tal forma que as propriedades do grupo sejam "preservadas": i)$T(e) = I$: associada ao elemento identidade e do grupo está a transformação identidade I sobre $\{V\}$ (neste caso não há mudança nos vetores deste espaço); ii)$T(g^{-1}) = [T(g)]^{-1}$: associada ao elemento inverso g^{-1} do elemento g está a transformação inversa da transformação associada a g; iii)$T(gh) = T(g) \circ T(h)$: a transformação associada ao produto de dois elementos de $\mathcal{G}$ é dada pelo produto de suas respectivas transformações. Dado que a representação é uma bijeção segue-se que $T(g) \neq T(h)$ se $g \neq h$. E dado que é uma tranformação linear sugue-se que T leva um vetor $u \in \{V\}$ em um vetor $v \in \{V\}$, pois qualquer combinação linear de elementos de $\{V\}$ também é um elemento de $\{V\}$. Uma representação é dita *irredutível* se $\{V\}$ não contém nenhum sub-espaço $\{V_0\}$ que é invariante sob $\mathcal{G}$, ou seja, caso não haja nenhum sub-espaço $\{V_0\}$ tal que qualquer transformação $T(g)$ de qualquer vetor $u_0 \in \{V_0\}$ leve em um vetor $v_0 \in \{V_0\}$.

---

[8] Em outras palavras T são tensores $\binom{1}{1}$ sobre $\{V\}$. Este espaço vetorial não deve ser confundido com o espaço vetorial $\{A\}$ formado pelos geradores álgebra.

Na construção de uma representação de um grupo de Lie é necessário olhar a sua álgebra e o domínio de seus geradores. Assim, por exemplo, no grupo das translações em R^n definido acima, podemos considerar que o domínio dos geradores $\mathcal{P}_n$ é formado pelo espaço vetorial $\{V\}$ dado pelo conjunto das funções locais $f(\alpha^i) = f(R^n)$ -campos- com a restrição de que sejam funções analíticas [9].

E, neste caso, os geradores $\{\mathcal{P}_n\}$ das translações são representados por operadores diferenciais:

$$\mathcal{P}_n u = \partial_n u \tag{A.10}$$

No caso das translações do grupo de Poincaré as equações acima ficam simplesmente

$$\mathcal{P}_a f(x^0, \mathbf{x}) = \partial_a f(x^0, \mathbf{x}) \quad : \quad \partial_a = (\partial_0, \dot{\nabla}) \tag{A.11}$$

Álgebra de Lie Graduada, Álgebra Supersimétrica.

Ao contrário do que ocorre em uma álgebra de Lie usual, os geradores de uma álgebra supersimétrica não formam um espaço vetorial sob o corpo dos reais. Em verdade há dois sub-espaços vetorias distintos. Um sub-espaço formado por geradores bosônicos (geradores pares, $s = 0$) e outro sub-espaço formado por geradores fermiônicos (geradores ímpares, $s = 1$) e as equações (A.1 e A.2) se reescrevem:

$$[\mathrm{a}, \mathrm{b}\} = -(-)^{s(\mathrm{a})s(\mathrm{b})}[\mathrm{b}, \mathrm{a}\} \tag{A.12}$$

[9] Estritamente falando, não é necessário que sejam funções analíticas, basta que sejam de quadrado integráveis dentro do intervalo de R^n em que as coordenadas $\{\alpha_i\}$ podem variar. E quando é este o caso pode-se demonstrar que $f(R^n)$ sempre pode ser aproximada por uma função $F(R^n)$ analítica.

$$[a, [b, c\}\} + \left((-)^{s(c)}\right)^{s(b)+s(a)} [c, [a, b\}\} + \left((-)^{s(a)}\right)^{s(b)+s(c)} [b, [c, a\}\} = 0 \qquad (A.13)$$

Representação de uma Álgebra Graduada

Assim como ocorre com os geradores de uma álgebra supersimétrica, os vetores de uma dada representação não formam um espaço vetorial sob o corpo dos reais, em verdade, há dois sub-espaços vetorias de estatísticas diferentes: i)$\{V_B\}$, sub-espaço vetorial de estatística bosônica e ii)$\{V_F\}$, sub-espaço vetorial de estatística fermiônica. O mecanismo de Wess-Zumino para representação de um supergrupo consiste em "fundir" estes dois sub-espaços vetoriais em um só espaço vetorial sob o corpo dos complexos + variáveis de Grassmannm $(\theta, \bar{\theta})$, formando os *supercampos: funções "locais" e "analíticas" das coordenadas da supervariedade*. Assim os geradores supersimétricos são considerados como "operadores diferenciais" neste super-espaço. As *componentes dos supermultipletos* são dadas pelos respectivos supercampos avaliados em $(\theta, \bar{\theta}) = (0, 0)$. Com este mecanismo obtem-se as leis de transformação supersimétrica das *componentes dos supermultipletos*. E estas são funções analíticas (no sentido usual) apenas das variáveis bosônicas da supervariedade.

Apêndice B
Notações e Convenções.

As coordenadas x_a do espaço-tempo formam um espaço de Minkowski, cada uma das quatro componentes são denotadas por letras latinas $a, b, ... = 0, 1, 2, 3$ e a métrica é escolhida por

$$\eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1) \tag{B.1}$$

Os espinores de Weyl são formados por duas componentes complexas ψ_α, $\alpha = 1, 2$ na representação $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz ou $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$, $\dot{\alpha} = 1, 2$ na representação $(0, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz. Os $N = 2$ índices internos de simetria são índices de "isospin" SU(2), os iso-espinores são denotados por X^i, $i = 1, 2$. Os seus índices podem ser levantados ou abaixados, respectivamente, pelos tensores antisimétricos ε^{ij} e ε_{ij} :

$$X^i = \varepsilon^{ij} X_j; \quad X_i = \varepsilon_{ij} X^j; \quad \text{com } \varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}; \quad \varepsilon^{12} = 1; \quad \varepsilon^{ij}\varepsilon_{jk} = \delta^i_k; \quad \varepsilon^{ij}\varepsilon_{kl} = \delta^j_k \delta^i_l - \delta^i_k \delta^j_l \tag{B.2}$$

e as mesmas convenções acima valem para os índices de Lorentz, com os tensores anti-simétricos $\varepsilon^{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

Multiplicação de espinores são realizadas conforme as convenções

$$\psi\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha; \quad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}; \quad XY = X^i Y_i \tag{B.3}$$

A conjugação complexa está denotada por * e tem as convenções

$$(X^i_\alpha)^* = \bar{X}_{i\dot{\alpha}}; \quad (\bar{X}_{i\dot{\alpha}})^* = X^i_\alpha \tag{B.4}$$

As matrizes σ^a e $\bar{\sigma}^a$ estão definidas por

$$\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^a_{\beta\dot{\beta}}$$

$$\sigma^0 = \mathbf{I}; \quad \boldsymbol{\sigma}^i(i = 1,2,3) = \text{matrizes de Pauli} \tag{B.5}$$

$$\bar{\sigma}^0 = \mathbf{I}; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^i(i = 1,2,3) = -\text{matrizes de Pauli}$$

e obedecem as propriedades

$$\sigma^a\bar{\sigma}^b + \sigma^b\bar{\sigma}^a = -2\eta^{ab}; \qquad \sigma^a_{\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_a = -2\delta^\alpha_\beta\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \tag{B.6}$$

Bibliografia

[1] P. Fayet, *Nucl. Phys.* B113 (1976) 135;

[2] P. West, *"Introduction to Supersymmetry and Supergravity"*, Extended second edition, World Scientific (1990); E referências lá contidas;

[3] I. Gaida, *Phys. Lett.* B373 (1996) 89, e-Print Archive: hep-th/9512165;
Ingo Gaida, *"The hypermultiplet in $\mathcal{N} = 2$ superspace"*, e-Print Archive: hep-th/9607216;

[4] M.F. Hasler, *Eur.Phys.J.* C1 (1998) 729, e-Print Archive: hep-th/9606076;
R. Grimm, M.F. Hasler and C. Herrmann, *Int. J. Mod. Phys.* A13 (1998) 1805, e-Print Archive: hep-th/9706108;
G. Akemann, R. Grimm, M.F. Hasler and C. Herrmann,
Class. Quantum Grav. 16 (1999) 1617, e-Print Archive: hep-th/9812026;
M.F. Hasler, PhD thesis, Université de Marseille;

[5] J. Wess and J. Bagger, *"Supersymmetry and Supergravity"*, 2nd Rev., Princeton Series in Physics, Princeton Univ Press (1992); E referências lá contidas.

[6] M.F. Sohnius, *Nucl. Phys.* B138 (1978) 109; *Phys. Lett.* 81B (1979) 1;

[7] O. Piguet and S.P. Sorella, *"Algebraic Renormalization"*, Lecture Notes in Physics **m28**, Springer-Verlag (Berlin - Heidelberg), 1995.

[8] S. A. Diniz and O. Piguet, *"Mass of the Fayet hipermultiplet induced by a central charge constraint"*, *J. High Energy Phys.* **03** (2002) 006 [hep-th/0108028]

[9] R. Grimm, M. Shonius and J. Wess, *Nucl. Phys* **B 133** (1978) 275;

[10] R. Grimm, M. F. Hasler and C. Hermann, *Int. J. Mod. Phys.* **A A13**(1998) 1805 [hep-th/9706108];

[11] A. Hindawi, B. A. Ovrut and D. Waldram, *Phys. Lett.* **B 392**(1997) 85 [hep-th/9609016]

[12] Bernard Schutz, *"Geometrical methods of mathematical physics"*, *Cambridge University Press* (1980)

[13] S. R. Coleman and J. Mandula, *"All Possible Symmetries of The S Matrix"*, *Phys. Rev.* **159**:1251-1256(1967)

[14] Y. A. Gelfand and E. S. Likhtman, *JETP Lett.* **13**, 323 (1971)

[15] Rudolf Haag, J.T. Lopuszanski and M. Sohnius, *"All Possible Generators of Supersymmetries of S Matrix"*, *Nucl. Phys.* **B88:**257(1975)

[16] S.A. Diniz and O. Piguet, *"Induced Mass in N=2 Super Yang-Mills Theories"*, *J. High Energy Phys.* **02** (2003) 002 [hep-th/0211039]

“Yang-Mills Supersimétrico. Multipleto de Matéria com Massa Induzida”

Sortelano Araujo Diniz

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Olivier Piguet – Presidente/UFES

Eduardo Cantera Marino – UFRJ

Marcelo Batista Hott – UNESP

Nathan Jacob Berkovits – IFT/UNESP

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Francesco Toppan - CBPF

Rio de Janeiro, 16 de abril de 2003