

2002/03
T 665

Tese de Doutorado

CAOS E UNIVERSALIDADE EM
MODELOS COSMOLÓGICOS
COM PONTOS CRÍTICOS
CENTRO-SELA

Eduardo Valentino Tonini

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Março de 2002

“Antes de responder aos argumentos dos adversários, ele os enaltece e fortalece com evidências aparentemente poderosíssimas, o que os faz parecer mais ridículos quando ele por fim destrói suas posições.”

Relato de um contemporâneo falando do estilo de Galileu Galilei.

“...Se raciocinar fosse como puxar, eu concordaria com que vários raciocinadores valeriam mais que um, assim como vários cavalos podem puxar mais sacos de trigo do que um. Mas raciocinar é como correr e não como puxar e um só corcel berbere pode vencer na corrida cem cavalos de tiro”.

Galileu Galilei em *“O ensaiador.”*

Dedicatória

Aos meus, Neide, Luiz Guilherme e João Filipe, Alcino e Maria, Maria Paula e Eduarda.

Agradecimentos

Ao Professor Ivano Damião Soares por aceitar a difícil tarefa de orientar este trabalho, pelos sábios conselhos e o convívio fraterno de sua amizade.

Ao Professor Henrique Pereira de Oliveira pelo estímulo, valorosas discussões e uma grande amizade.

Aos companheiros dos primeiros tempos, Vitório, Renato, Marcelo, Raphael, e aos de todos os tempos, Gino, Johana, Santini, Gabriel, Moíses, Professor Duarte, André, Robson e Martin.

À eficiente Míriam e ao Ricardo na CFC.

Aos Professores da Coordenadoria de Ciência e Tecnologia pelo convívio enriquecedor.

À Direção do CEFETES por possibilitar condições para o término deste trabalho.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro nos primeiros anos.

Sumário

1	Introdução	1
2	Topologia do Espaço de Fase na Vizinhança do Centro-Sela, Plano Invariante e Mapa de Poincaré	10
2.1	Topologia do Espaço de Fase na Vizinhança do Ponto Crítico Centro-Sela	11
2.2	Mapa de Poincaré	15
3	Modelo FRW Fechado com Campo Escalar Massivo e Fluido Perfeito	25
4	Modelo Bianchi IX Axissimétrico	77
5	Hamiltoniana de Hénon-Heiles	93
6	Conclusão	111
A	Hamiltonianas	120
A.1	Modelo <i>FRW</i> com campo escalar acoplado à gravitação	120
A.2	Modelo de Hénon-Heiles	124
B	Parâmetro de Incerteza e Dimensão Fractal	128
C	Equações de Evolução das Perturbações	136
D	Análise Dimensional	140

Lista de Figuras

2.1	Órbitas periódicas no plano (q_1, p_1)	13
2.2	As variedades unidimensionais lineares.	13
2.3	Variedades cilíndricas estável e instável	14
2.4	Ilustração numérica do cilindro.	15
2.5	Mapa de Poincaré.	17
2.6	Ilustração numérica dos cilindros.	19
2.7	Variedades estável e instável.	20
2.8	Estrutura cilíndrica longe do ponto crítico centro-sela.	21
2.9	Entrelaçamento homoclínico.	23
2.10	Comportamento caótico das órbitas.	24
3.1	Movimento rotacional e hiperbólico.	33
3.2	Conservação da energia hiperbólica.	34
3.3	Retrato de fase do plano invariante.	36
3.4	Aproximação oscilatória à região linear.	38
3.5	Aproximação oscilatória ao cilindro na região não linear.	39
3.6	Aproximação oscilatória ao cilindro na região não linear.	40
3.7	Sinal desorganizado.	42
3.8	Projeção do volume quadri-dimensional de condições iniciais.	44
3.9	Densidade de estados constante.	46
3.10	Espaço de fase das condições iniciais no plano (ψ, p_ψ)	48
3.11	Histograma tendo a forma de um platô.	49
3.12	Espaço de fase das condições iniciais projetadas no plano (a, p_a)	50
3.13	Histograma tendo a forma de um platô	50
3.14	Histograma da distribuição de E_{hip}	51

3.15	Gráfico $Ln \times Ln$ do histograma da figura 3.14.	53
3.16	Frequência de oscilação projetada no plano $(\psi \times a)$	54
3.17	Histogramas da distribuição de E_{hip} com $m = 2$ e $m = 16$	55
3.18	Gráfico $Ln \times Ln$ dos histogramas para valores crescentes de m para o caso conformalmente acoplado.	56
3.19	Gráfico $Ln \times Ln$ para valores crescentes de m para o caso minimalmente acoplado.	57
3.20	Gráficos do comportamento do parâmetro q	58
3.21	Tubos estável e instável.	60
3.22	Rotação dos cilindros estável e instável.	60
3.23	Seção de Poincaré para $m = 2$	61
3.24	Histogramas da distribuição de E_{hip} para $R = 10^{-5}$ e $R = 10^{-4}$	62
3.25	Histograma da distribuição de E_{hip} para três superfícies de energia.	64
3.26	Gráfico dos atratores.	67
3.27	Bacias de atração para $m = 1, 2, 8, 16$	68
3.28	Gráfico da relação $f = k_o \epsilon^\alpha$ na escala $Ln \times Ln$ para $m = 2, 4, 8, 16$	69
3.29	Seção de Poincaré para m crescente.	70
3.30	Gráfico de $f = k_o \epsilon^\alpha$ para $m = 8$	73
3.31	Histogramas para poeira.	75
4.1	Retrato de fase do plano invariante.	81
4.2	Aproximação oscilatória à região linear.	83
4.3	Aproximação oscilatória à região não-linear do centro-sela.	84
4.4	Aproximação oscilatória ao cilindro na região não linear.	85
4.5	Aproximação oscilatória ao cilindro na região não linear.	85
4.6	Histogramas da distribuição de E_{hip} para três diferentes valores de E_o	91
4.7	Gráfico $Ln(e) \times Ln(f)$	92
5.1	Retrato de fase do plano invariante.	98
5.2	Histograma da distribuição de E_{hip}	101
5.3	Gráfico $Ln \times Ln$ dos histogramas para valores crescentes de K	103
5.4	Gráfico relacionando K com q	104

5.5	Gráfico da relação $f = k_o \epsilon^\alpha$ na escala $Ln - Ln$ para $K = 100$	105
5.6	Potencial de Hénon-Heiles.	106
5.7	Sinal desorganizado.	109
5.8	Sequência de histogramas.	110
A.1	Mapa de Poincaré para a variação da energia.	126
B.1	Fronteira das duas bacias dos atratores.	131
B.2	$Ln(f(\epsilon))$ como função de $Ln(\epsilon)$	135

Resumo

Nesta tese estudamos modelos cosmológicos inflacionários caracterizados por valores de parâmetros ou regiões do espaço de fase de sua dinâmica, para os quais as equações de Einstein não são integráveis, apresentando uma dinâmica complexa. Esta complexidade é uma generalidade na dinâmica dos modelos em oposição ao estudo padrão de modelos cosmológicos. Os modelos cosmológicos estudados são espacialmente homogêneos do tipo Bianchi IX, e incluem modelos do tipo FRW com campo escalar acoplado a gravitação (minimalmente e conformalmente) ou modelo Bianchi IX axissimétrico. Este último caso inclui modelos de FRW com pequena anisotropia, que como mostraremos, é suficiente para produzir uma dinâmica complexa. No caso dos modelos com campo escalar a complexidade da dinâmica é causada por flutuações do campo escalar. Todos os modelos cosmológicos examinados possuem em seu espaço de fase um ponto crítico do tipo centro-sela que organiza a topologia desta dinâmica em estruturas cilíndricas, que emanam de órbitas periódicas instáveis e constituem a denominada *variedade centro* de órbitas periódicas instáveis do modelo. Na vizinhança do centro-sela estas estruturas cilíndricas são o produto topológico de uma órbita periódica instável da variedade centro com direções de sela, determinando pares de cilindros instáveis e estáveis emanando das órbitas periódicas. A estrutura cilíndrica é consequência da presença de uma constante cosmológica positiva na dinâmica dos modelos. A não integrabilidade do sistema dinâmico induz a infinitos cruzamentos transversais dos cilindros, denominados cruzamentos homoclínicos, analogamente ao caso de quebra e cruzamento de conexões homoclínicas no fenômeno homoclínico de Poincaré. Estes cruzamentos produzem uma dinâmica caótica nos modelos, cuja caracterização invariante é dada pela variedade interseção homoclínica, levando a uma extrema sensibilidade dos estágios finais do modelo em relação a flutuações nas condições iniciais. O exame do comportamento caótico nos modelos e suas consequências físicas são um dos

objetivos principais desta tese.

Mostramos que tais modelos apresentam uma saída caótica para inflação, no sentido de que condições iniciais tomadas tão próximas quanto se queira, podem levar ou não há uma fase inflacionária. Mostramos também que para estes modelos, é possível estabelecer um padrão estatístico no que diz respeito à quantidades conservadas na dinâmica das órbitas quando elas visitam uma vizinhança do centro-sela. Este padrão estatístico está ligado a uma lei de distribuição na forma $p(x) \sim x^{-\gamma}$, onde o valor do parâmetro γ , num regime que denominamos de alta não-integrabilidade, é invariante de escala e independe dos parâmetros que caracterizam o modelo. Baseado nos resultados dos experimentos numéricos, temos evidência suficiente de que o padrão estatístico é uma característica universal do ponto crítico centro-sela, independente do sistema em cujo espaço de fase este ponto crítico está presente. Analisamos a relação de γ com o parâmetro que caracteriza um sistema caótico, o parâmetro de incerteza, obtendo fortes evidências que o valor de γ está relacionado com o caos do modelo, quando associamos códigos aos dois estados assintóticos das órbitas dinâmicas - escape para inflação ou recolapso. Outro fenômeno observado é que, devido ao movimento oscilatório das órbitas na vizinhança do centro-sela imediatamente antes de entrar em sua fase inflacionária, ocorre um mecanismo de amplificação por ressonância paramétrica de perturbações inhomogêneas com um espectro selecionado de número de onda, que pode ter consequências físicas importante para o problema de formação de estruturas.

Utilizando a Hamiltoniana de Hénon-Heiles que descreve o movimento de uma estrela no potencial gravitacional de uma galáxia, encontramos o mesmo padrão estatístico para o centro-sela no espaço de fase de um sistema que apresenta vários pontos críticos deste tipo.

Abstract

In this thesis we study cosmological inflationary models characterized by values of parameters or regions of the phase space of its dynamics, for which the Einstein equations are not integrable and present a complex dynamics. This complexity is a generality in the dynamics of the models in opposition to the standart study of cosmological models. The cosmological models studied are spatially homogeneous of Bianchi-type IX, and include FRW models with a massive escalar field coupled to gravitation (minimally and conformally) or axisymetric Bianchi type IX. This last case includes FRW models with a small anisotropy, that as we will show, is sufficient to produce a complex dynamics. In the case of the models with scalar field the complexity of the dynamics is caused by fluctuations of the scalar field. All the cosmological models examined have in their phase space a saddle-center critical point which organizes the topology of this dynamics in cylindrical structures which emanate from unstable periodic orbits and constitute the so called central manifold of unstable periodic orbits of the model. In the neighbourhood of the saddle-center these cylindrical structures are the topological product of an unstable periodic orbit of central manifold with saddle diretions which determine pairs of unstable an stable cylinders that emanate from periodic orbits. The cylindrical structure is a consequence of the presence of a positive cosmological constant in the models dynamics. The nonintegrability of the dynamics system induces infinite transversal crossings of the cylinders, called homoclinic crossing, analogous to the case of breaking and crossing of homoclinic connections in the Poincaré's homoclinic phenomena. These crossings produce a chaotic dynamics in the models, which is invariantly characterized by the homoclinic intersection manifold, and leads to an extreme sensibility of the final stages of the model with respect to the fluctuations in the initial conditions. The examination in the chaotic behavior of the models and its physical consequences are one of the main objetives of this thesis.

We show that such models present a chaotic exit to inflation, in the sense that the initial conditions taken as close as we wish, can lead or not to an inflationary phase. We also show that in these models it is possible to establish a statistical pattern related to conserved quantities in the dynamics of the orbits when they visit a neighborhood of the saddle-center. This statistical pattern is connected to a distribution law of the form $p(x) \sim x^{-\gamma}$, where the value of the parameter γ , in a regime that we call of high nonintegrability, is invariant in scale and does not depend on the parameters that characterize the model. Based on the results of the numerical experiments, we have sufficient evidence that the statistical pattern is a universal characteristic of the saddle-center critical point, independently of the system in whose phase space this critical point is present. We analyse the relation of γ with the uncertainty parameter, that characterizes a chaos in the system, obtaining strong evidence that the value of γ is related to the chaos of the model when we associate codes to the two asymptotic states of the dynamic of the orbits - escape into inflation or recollapse. Another physical effect observed is that, due to the oscillatory movement of the orbits in the neighbourhood of the saddle-center immediately before entering in its inflationary phase, there occurs a resonance mechanism of amplification of inhomogeneous perturbations with a selected spectrum of wavelenght, that can have important physical consequences to the problem of structure formation.

Using the Hénon-Heiles Hamiltonian which describes the movement of a star in the gravitational potencial of a galaxy, we found the same statistical pattern for the saddle-center in the phase space of a system that presents several critical points of this type.

Capítulo 1

Introdução

A existência de uma fase inflacionária nos estágios iniciais do Universo tornou-se um dos paradigmas da moderna Cosmologia[1], e está sendo objeto de verificação experimental através de medidas da anisotropia em pequena escala verificada na Radiação Cósmica de Fundo(RCF). O ingrediente básico desta fase inflacionária é a existência de um campo escalar[2], o campo *inflaton*, dando origem, via dinâmica gravitacional, a uma expansão exponencial nas escalas comóveis do Universo. Este modelo pode ser pensado como tendo evoluído de uma fase pré-inflacionária saindo da fase de Planck.

Nesta tese iremos examinar modelos cosmológicos que descrevem uma fase do Universo em expansão a partir de sua saída da fase de Planck e imediatamente antes de entrar num período inflacionário, quando o efeito da constante cosmológica positiva, aqui interpretada como a energia do estado do vácuo do campo de *inflaton*, se faz dominante. Nosso objetivo é discutir modelos para esta fase pré-inflacionária e sua saída para a inflação usando um número mínimo de ingredientes: a geometria do modelo fechado de Friedmann-Robertson-Walker(FRW), fluido perfeito mais campo escalar acoplado minimalmente ou conformalmente à gravitação ou ainda um modelo espacialmente homogêneo do tipo Bianchi IX, com anisotropia. O tensor momento-energia do campo escalar pode ser separado num termo do tipo constante cosmológica mais um tensor momento-energia do valor esperado espacialmente homogêneo do campo escalar. Esta configuração, aparentemente simples, com somente dois graus de liberdade, apresenta uma dinâmica complicada: a introdução de graus de liberdade dinâmicos associados ao campo escalar, em adição a uma constante cosmológica positiva, produz uma saída não trivial, caótica, para a inflação[3, 4, 5, 6].

A constante cosmológica também é responsável pelo aparecimento de dois pontos críticos no infinito denominados de atrator e repulsor de de Sitter. A aproximação assintótica à solução de de Sitter constitui a base da chamada conjectura do “*no-hair*”. No domínio de cosmologias homogêneas, Wald[7] mostrou que todos os modelos cosmológicos do tipo Bianchi (exceto Bianchi IX) inicialmente em expansão, evoluem na direção da configuração de de Sitter. Modelos do tipo Bianchi IX necessitam adicionalmente que o valor absoluto da constante cosmológica seja suficientemente grande comparada com os termos de curvatura espacial. Para os casos mais gerais de modelos inomogêneos, Starobinskii[8] mostrou que eles inflacionam se uma constante cosmológica positiva está presente. Como ficará evidente em nosso trabalho, a conjectura do “*no-hair*” deve ser modificada para in-

cluir o fato de que, por exemplo, a dinâmica geral de modelos homogêneos do tipo Bianchi IX deve ser adaptada à questão da saída caótica para a inflação. Este aspecto crucial da constante cosmológica tem sido suficientemente enfatizado na literatura, e muitos autores tem examinado seu papel na produção de uma dinâmica não trivial no estágio inicial da inflação[9].

Nos modelos cosmológicos estudados, a presença da constante cosmológica positiva provoca o aparecimento de um ponto crítico do tipo centro-sela[10, 11]. Como consequência da não integrabilidade das equações de Einstein, temos uma dinâmica caótica devido à quebra e cruzamento de estruturas cilíndricas, que emanam das órbitas periódicas instáveis que existem na vizinhança do centro-sela. Este comportamento caótico é análogo aos chamados fenômenos homoclínicos de Poincaré[12], que é a fonte de caos na maior parte dos sistemas Hamiltonianos. As estruturas cilíndricas permitem uma caracterização invariante do caos na dinâmica relativística geral do modelo[6], tendo profundas implicações para ocorrência ou não de uma fase inflacionária, assim como para a física no estágio inicial da inflação. Existe uma completa imprevisibilidade na determinação para qual estado final o modelo se dirige: se para o início de uma fase inflacionária (órbita em direção ao atrator de de Sitter) ou um recolapso de seu fator de escala. Dizemos então que o modelo possui uma saída caótica para a inflação e é esta saída que nos propomos a estudar, assim como suas implicações físicas.

Nossas equações fundamentais são as equações de Einstein que fornecem a dinâmica para a métrica do espaço-tempo em interação com campos de matéria. A origem do comportamento caótico apresentado pelos nossos modelos está na não-integrabilidade destas equações em consequência de sua alta não-linearidade. Os modelos cosmológicos que iremos analisar são espacialmente homogêneos, cuja dinâmica possui estrutura Hamiltoniana, governada por um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma geral,

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2N})$, sendo N o número de graus de liberdade do sistema. As equações (1.1) definem um sistema dinâmico autônomo no qual podemos aplicar técnicas de sistemas dinâmicos para analisar seu comportamento geral.

Além de modelos no campo da Cosmologia, estudamos um modelo no campo da Astrofísica descrevendo o movimento de uma estrela sujeita a um campo gravitacional de

uma galáxia com simetria axial[13].

Os modelos analisados neste trabalho são completamente determinísticos, tendo como ingredientes para determinação de seu comportamento:

- 1) as equações de evolução temporal (equações de Hamilton);
- 2) os valores dos parâmetros descrevendo o sistema;
- 3) e as condições iniciais;

mas ainda assim comportam-se “randomicamente” em relação ao seu estado final. Até recentemente acreditava-se que a presença de comportamento randômico em sistemas matemáticos era devido a condições iniciais randômicas ou devido ao número muito grande de graus de liberdade. Porém, o que nos é revelado hoje é que apesar das condições acima serem pré-requisito para o início de um comportamento randômico ou caótico em sistemas dinâmicos, nenhum deles é realmente suficiente. Sistemas simples com condições iniciais regulares sem atuação de uma força externa e com poucos graus de liberdade, exibem comportamento que é, para todos os propósitos práticos, completamente imprevisível.

Como é possível que sistemas determinísticos sejam imprevisíveis? Para responder a esta pergunta vamos imaginar um sistema não-integrável descrito por um conjunto de equações diferenciais simples onde conhecemos, por exemplo, precisamente a posição inicial de um determinado ponto P . Sendo assim, também temos condições de conhecer precisamente a posição subsequente do ponto P após um determinado tempo. A questão está na expressão “conhecemos precisamente a posição inicial”. Por exemplo, quanto descrevemos sistemas físicos reais nossas condições iniciais sempre possuem alguma incerteza. Se estamos integrando numericamente as equações de movimento, após alguns passos na integração, nossa incerteza nas condições iniciais, devido ao arredondamento efetuado pela máquina, cuja precisão é finita, crescerá ou permanecerá limitada, dependendo da natureza do sistema. Se o sistema for integrável esta incerteza permanecerá limitada ao longo de toda integração da órbita. No entanto, é um fato conhecido de que, na sua generalidade, os sistemas na natureza são descritos por equações diferenciais ditas não-integráveis. Nesta classe geral de sistemas qualquer pequena incerteza inicial, após alguns passos de integração, terá crescido exponencialmente resultando numa completa imprevisibilidade dos resultados. Estas equações diferenciais são ditas possuírem uma sensível dependência da dinâmica com relação às condições iniciais. Isso significa que

órbitas vizinhas poderão divergir rapidamente após percorrerem um curto espaço e neste processo, após um tempo suficiente, a memória das condições iniciais se apagará completamente: o conhecimento do estado passado não permitirá que os resultados futuros sejam previstos.

O estudo de problemas em Dinâmica tem fascinado o gênero humano por séculos, notadamente aqueles em Mecânica Celeste ligados ao estudo dos movimentos dos corpos no sistema solar. A tentativa de Newton para compreender e criar um modelo para os movimentos observados, incorporando as leis de Kepler, conduziu-o ao desenvolvimento do Cálculo. Com isto o estudo de modelos de sistemas dinâmicos descritos através de equações diferenciais começou. Apesar da grande elegância e simplicidade destas equações, as soluções de problemas específicos experimentou considerável dificuldade e ocupou a mente dos maiores mecanicistas e matemáticos dos séculos *XVIII* e *XIX*. Enquanto uma teoria completa era desenvolvida para equações diferenciais lineares ordinárias, sistemas não-lineares permaneciam inacessíveis, apesar do sucesso da aplicação dos métodos de perturbação para problemas fracamente não-lineares. A Análise permaneceu a ferramenta favorita para o estudo dos problemas de Dinâmica até o trabalho de Poincaré no fim do século *XIX*, mostrando que métodos perturbativos poderiam não fornecer resultados corretos em todos os casos, porque as séries usadas em tais cálculos divergiam. Poincaré então uniu a Análise e a Geometria no desenvolvimento de um método qualitativo para o estudo das equações diferenciais. Mais uma vez, a mais famosa aplicação ocorreu na Mecânica Celeste.

Podemos dizer que a Dinâmica Caótica começou com o trabalho de Poincaré no fim do século *XIX*. A motivação veio do problema das órbitas de três corpos celestes experimentando atração gravitacional Newtoniana (exemplo, uma estrela e dois planetas). Considerando o comportamento de órbitas geradas a partir de um conjunto de condições iniciais (em vez de focalizar a atenção sobre uma órbita apenas), Poincaré foi capaz de mostrar que órbitas muito complicadas eram possíveis (agora chamadas caóticas). Trabalhos matemáticos subsequentes sobre Dinâmica Caótica incluem aqueles de Birkhoff em 1920, Cartwright e Littlewood em 1940, Smale em 1960, e os matemáticos soviéticos, notadamente Kolmogorov e seus colaboradores. Entretanto, a despeito destes trabalhos, a possibilidade de caos em sistemas físicos reais não foi largamente apreciada até re-

centemente. A razão para isso foi que os artigos matemáticos eram difíceis de serem compreendidos em outras áreas, além disso, os teoremas não eram fortes suficientes para convencerem os pesquisadores que caos é um comportamento importante em seus sistemas. Com a melhoria dos processos de computação numérica a situação tem mudado. Podemos realizar simulações através de computadores eliminando quaisquer efeitos em variáveis ou parâmetros que não sejam devidos unicamente à não-integrabilidade do sistema.

Caos e Dinâmica não-linear tem permeado todas as disciplinas científicas e tem também fornecido novas ferramentas teóricas e conceituais que permitem capturar e compreender o surpreendente comportamento complexo de sistemas simples em todos os campos da ciência contemporânea. Esse aspecto universal do Caos é intrigante. O que há em comum no comportamento de um fluido em convecção, que faz sua transição do comportamento simples para o complexo (caótico), ser qualitativamente e quantitativamente idêntico ao modo com que um circuito elétrico oscilante faz a mesma espécie de transição?

O elemento chave nesta compreensão é a noção de não-integrabilidade. Para sistemas não-integráveis, uma pequena mudança em um parâmetro pode nos levar a uma repentina e dramática mudança no comportamento qualitativo e quantitativo dos sistema e o surgimento de um comportamento altamente sensível a flutuações nas condições iniciais, que é aparentemente randômico. Por trás dessa aparente randomicidade caótica está uma ordem determinada, em algum sentido, pelas equações descrevendo o sistema.

Um dos nossos objetivos neste trabalho é mostrar que modelos em cosmologia que possuem um ponto crítico centro-sela em seu espaço de fase, apresentando uma saída caótica para inflação, seguem um mesmo padrão estatístico no que diz respeito a quantidades conservadas na dinâmica das órbitas quando elas visitam uma vizinhança do centro-sela. Verificamos que a natureza do ponto crítico centro-sela caracteriza de modo invariante (independente do sistema onde ele está presente) a distribuição estatística destas quantidades, apresentando o mesmo padrão de comportamento, tanto num regime que denominamos de alta não-integrabilidade, como num regime de transição entre o caso integrável para o caso não-integrável. Em outras palavras, verificamos que os modelos seguem um mesmo padrão de comportamento quando um parâmetro que caracteriza o sistema é modificado e isto pode ser identificado como uma rota para o Caos. Analisamos também a estrutura fractal das fronteiras que separam as regiões do espaço de fase das

condições iniciais com diferentes comportamentos assintóticos (recolapso ou escape para a inflação) e calculamos sua dimensão.

A grande maioria dos estudos de modelos em Cosmologia e Gravitação, utilizando as equações de Einstein, são realizados apenas através de soluções analíticas (caso integrável) que correspondem, no espaço de fase, à região pertencente ao plano invariante do modelo. Toda a dinâmica fora desta região ou mesmo para a região próxima, (perturbação do caso integrável), não é considerada. No passado isto se justificava devido à incapacidade de computarmos estas órbitas numericamente. No entanto, nossa capacidade atual de obtermos soluções numérica, (para todos os efeitos práticos estas soluções podem ser usadas como se fossem analíticas), permite-nos explorar esta região, cuja dinâmica é complexa, e revelar aspectos surpreendentes.

Faremos a análise do comportamento caótico e propriedades estatísticas de quatro modelos em cosmologia e gravitação, cujos espaços de fase apresentam um ou mais pontos críticos do tipo centro-sela:

- 1) Modelo cosmológico FRW fechado com campo escalar massivo minimalmente acoplado, fluido perfeito, constante cosmológica e sem anisotropia.
- 2) Modelo cosmológico FRW fechado com campo escalar massivo conformalmente acoplado, fluido perfeito, constante cosmológica e sem anisotropia.
- 3) Modelo cosmológico tipo Bianchi *IX* axissimétrico (anisotrópico com dois fatores de escala).
- 4) Modelo descrevendo o movimento de uma estrela num potencial gravitacional de uma galáxia utilizando a Hamiltoniana de Hénon-Heiles.

No estudo desses modelos mostramos a existência de uma propriedade universal apresentada pelas órbitas que visitam uma região linear do ponto crítico centro-sela, com relação a partição do que denominaremos de energia do modo rotacional e do modo hiperbólico que são conservadas na vizinhança do ponto crítico centro-sela. O centro-sela organiza de tal modo o espaço de fase que a estatística obtida para as energias obedecem a uma distribuição do tipo lei de potência. Experiências numéricas exaustivas nos levam à conjectura de que o expoente que caracteriza esta distribuição está ligado à dimensão fractal da região de fronteira relativamente ao distinto comportamento assintótico recolapso/escape para a inflação. O caráter universal está ligado ao fato de o valor do expoente

ser independente dos parâmetros do modelo estudado, num regime que caracterizaremos como de alta não integrabilidade.

Para verificarmos o caráter universal dos modelos estudados, em termos da partição das energias, fizemos uso de duas técnicas: histogramas e o cálculo da dimensão fractal.

A técnica do histograma é utilizada para verificarmos a ocorrência de um padrão obedido pela distribuição das energias nos modos rotacional e hiperbólico, de um *ensemble* de órbitas que visitam uma região linear do ponto crítico. Construindo o gráfico das energias hiperbólica ou rotacional *versus* qualquer variável dinâmica, encontramos um sinal completamente randômico. Quando agrupamos estas energias na forma de um histograma (número de órbitas com energia entre $E_i - \Delta E$ e $E_i + \Delta E$ *versus* E_i , onde E_i é o valor da energia rotacional ou hiperbólica centrada no i -ésimo intervalo), verificamos o surgimento de um padrão estatístico que se repete para todos os modelos.

Com a técnica do cálculo da dimensão fractal conseguimos calcular o grau de fractalidade da região de fronteira que divide as bacias de condições iniciais dos dois estados assintóticos assumidos pelas órbitas. Temos evidências numéricas que o modo com que o ponto crítico centro-sela “distribui” a energia para cada solução está intimamente relacionado a fractalidade da região de fronteira, já que os valores desta energia depende da solução escapar ou colapsar.

Além do padrão universal estabelecido pelo ponto crítico centro-sela, iremos examinar duas aplicações físicas relacionadas com o comportamento das órbitas na região próxima ao ponto crítico. Na primeira aplicação nós exibiremos um mecanismo ressonante de amplificação paramétrica de perturbação de densidades inhomogêneas em modelos inflacionários, no qual esta amplificação pode ser usada para explicar a hierarquia de escalas observadas no Universo atual. Na segunda aplicação mostraremos alguns experimentos com sistemas Hamiltonianos cujo fluxo dinâmico assemelha-se ao comportamento de fluidos turbulentos. Os aspectos básicos do sistema associado com este comportamento são: ser não integrável e apresentar um ponto crítico do tipo centro-sela. Usando a técnica de histogramas descrita acima, é possível ilustrar uma rota para o caos quando aumentamos um parâmetro de controle do sistema, numa analogia com a rota para o caos estabelecida por fluidos turbulentos quando aumentamos o número de Reynolds.

Para a realização dos experimentos numéricos foi utilizado um microcomputador Pen-

tium II, 350 MHz. O programa para gerar as condições iniciais randômicas foi escrito em FORTRAN, a integração numérica das equações do sistema e o cálculo da dimensão fractal foram realizados por um programa escrito em linguagem C, com integrador usando o método de Runge-Kutta de oitava ordem, e usamos o software *MAPLE V 5* para a análise dos resultados, confecção dos gráficos e figuras. A precisão utilizada nos cálculos foi de 10^{-16} .

Esta tese esta organizada da seguinte maneira: no capítulo *II* efetuamos uma breve revisão sobre a técnica do mapa de Poincaré, plano invariante e topologia do espaço de fase na vizinhança do ponto crítico centro-sela. Nos capítulos *III* e *IV* desenvolvemos o estudo de três modelos cosmológicos inflacionários onde analisamos as implicações físicas da saída caótica para a inflação. No capítulo *V* analisamos o modelo descrito pela Hamiltoniana de Hénon-Heiles. No capítulo *VI* é feito uma discussão dos resultados e a conclusão da tese. Foram inseridos três apêndices de modo a tornar o trabalho mais completo. Discutimos nesta parte a obtenção das Hamiltonianas que descrevem os modelos, noções do cálculo da dimensão fractal e a obtenção das equações de evolução das perturbações.

Capítulo 2

Topologia do Espaço de Fase na
Vizinhança do Centro-Sela, Plano
Invariante e Mapa de Poincaré

Neste capítulo vamos estabelecer os principais resultados sobre as estruturas responsáveis pelo comportamento caótico dos modelos estudados, associado à presença de um ponto crítico do tipo centro-sela no espaço de fase do modelo. A região do espaço de fase em torno do ponto crítico centro-sela tem a estrutura de cilindros homoclínicos[14], que emanam de uma variedade bi-dimensional, a variedade centro [15], das órbitas periódicas instáveis, resultando que uma órbita geral tem um comportamento oscilatório na vizinhança do centro-sela. Devido a não integrabilidade do sistema, a extensão dos cilindros homoclínicos longe das órbitas periódicas é distorcida, com eventual cruzamento transversal dos cilindros instáveis com os estáveis. Estas interseções produzem conjuntos caóticos no espaço de fase, de uma maneira análoga à quebra e cruzamento de curvas homoclínicas no fenômeno homoclínico de Poincaré, e fornecem uma caracterização topológica de caos na dinâmica relativística do modelo.

2.1 Topologia do Espaço de Fase na Vizinhança do Ponto Crítico Centro-Sela

Para um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade, definimos ponto crítico do tipo centro-sela como o ponto do espaço de fase que é uma solução estacionária e não degenerada do sistema de equações dinâmicas Hamiltonianas, e tal que a matriz de linearização desse sistema na vizinhança do ponto crítico tenha seu polinômio característico (de quarta ordem) com raízes da forma $\lambda_{1,2} = \pm\alpha^2$ e $\lambda_{3,4} = \pm i\beta^2$, onde α e β são números reais[16]. Estes autovalores da matriz de linearização determinam movimentos separáveis em dois setores na vizinhança do ponto crítico, um o setor sela associado a $\lambda_{1,2} = \pm\alpha^2$, e outro o setor centro associado $\lambda_{3,4} = \pm i\beta^2$, estruturando a topologia da dinâmica do espaço de fase na vizinhança do ponto crítico. Para ver isso, nós usaremos o teorema de Moser[17] o qual estabelece que é sempre possível encontrar um conjunto de variáveis canônicas tais que, numa vizinhança linear do centro-sela, a Hamiltoniana é expressa como,

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\Lambda}{2}(p_2^2 - q_2^2) - \sqrt{2\Lambda}(p_1^2 + q_1^2) + \mathcal{O}(3) - E_o + E_{cr} = 0. \quad (2.1)$$

Aqui $\mathcal{O}(3)$ corresponde aos termos não quadráticos da expansão e $\pm\sqrt{\Lambda}$, $\pm 2i\sqrt{2\Lambda}$ são os autovalores do sistema linearizado em torno do ponto crítico P . Para uma vizinhança

do ponto crítico, onde podemos desprezar os termos $\mathcal{O}(3)$ de ordem mais alta, e que denominaremos de vizinhança linear, a Hamiltoniana reduz-se a

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) \sim \frac{\Lambda}{2}(p_2^2 - q_2^2) - \sqrt{2\Lambda}(p_1^2 + q_1^2) - E_o + E_{cr} \approx 0. \quad (2.2)$$

Nesta aproximação, H é separável em duas constantes de movimento dadas pelas equações,

$$E_2 = \frac{\Lambda}{2}(p_2^2 - q_2^2), \quad E_1 = \sqrt{2\Lambda}(p_1^2 + q_1^2), \quad (2.3)$$

onde denominaremos E_2 de energia do movimento hiperbólico e E_1 de energia do movimento rotacional do sistema em torno do ponto crítico P . Passemos agora a descrever os possíveis movimentos de acordo com a análise efetuada nas referências [5, 14].

Se $E_2 = 0$ duas possibilidades aparecem. Na primeira temos $p_2 = q_2 = 0$ significando que os movimentos são órbitas periódicas instáveis τ_{E_o} no plano (q_1, p_1) , sendo que tais órbitas dependem continuamente do parâmetro E_o , conforme *figura 2.1*. A segunda possibilidade é $p_2 = \pm q_2$, o qual define duas variedades unidimensionais lineares: uma estável V_{est} e uma instável V_{ins} , conforme a *figura 2.2*. Essas variedades são tangentes, no ponto crítico, às separatrizes S da variedade invariante (descrita quando $q_1 = 0$ e $p_1 = 0$). O produto direto da órbita periódica τ_{E_o} com V_{est} e V_{ins} gera, na vizinhança linear do ponto crítico, a estrutura de pares de cilindros estáveis $(\tau_{E_o} \times V_{est})$ e instáveis $(\tau_{E_o} \times V_{ins})$, o qual coalescem para as órbitas periódicas τ_{E_o} quando o tempo vai para $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente, como na *figura 2.3*. A energia de qualquer órbita sobre esses cilindros é a mesma que a da órbita periódica τ_{E_o} .

Pode-se mostrar que a extensão não-linear do plano (q_1, p_1) do movimento rotacional constitui uma variedade 2-dimensional, denominada variedade centro, de órbitas periódicas instáveis parametrizadas por E_o . A interseção da variedade centro com a superfície de energia

$$H(E_o - E_{cr}) = 0, \quad (2.4)$$

(cf. 2.2), é uma órbita periódica parametrizada com E_o , da qual um par de cilindros emana. Nós podemos ver facilmente da equação (2.2) que a interseção da variedade centro com a superfície de energia $E_o = E_{cr}$ é exatamente o ponto crítico. Para $E_o > E_{cr}$ a superfície de energia não intercepta a variedade centro, a ocorrência de estruturas cilíndricas fica restrita à superfície de energia no qual $E_o < E_{cr}$. Uma órbita geral,

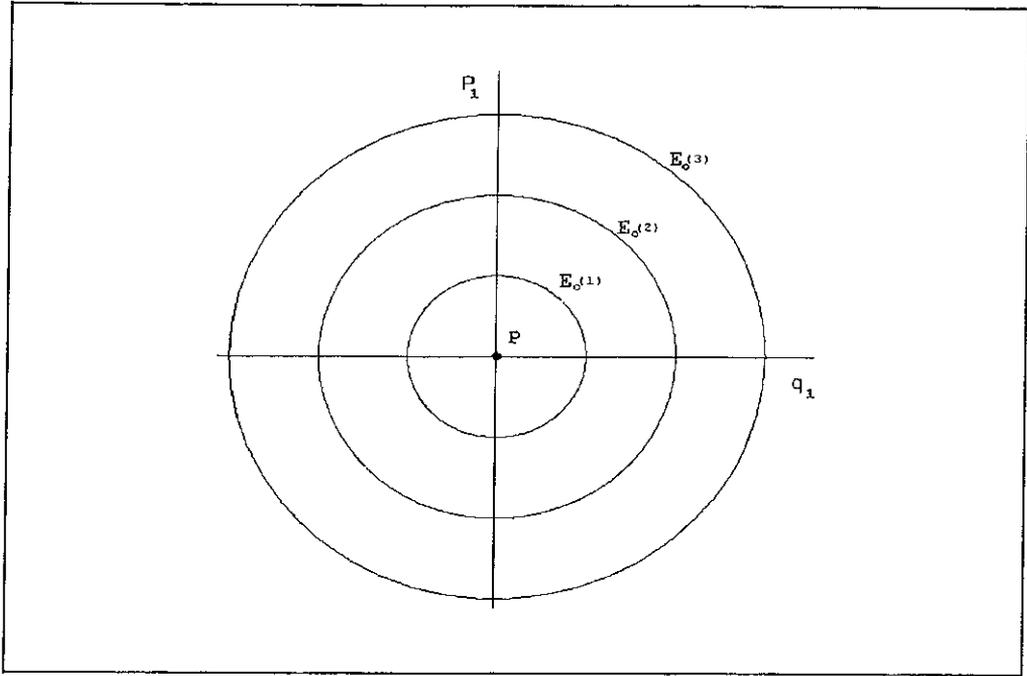


Figura 2.1: Órbitas periódicas de um sistema Hamiltoniano típico na aproximação linear, projetada sobre o plano (q_1, p_1) das variáveis normais e em torno do ponto crítico centro-sela P . Aqui $E_o(i)$, com $i = 1..3$, corresponde a várias energias E_o .

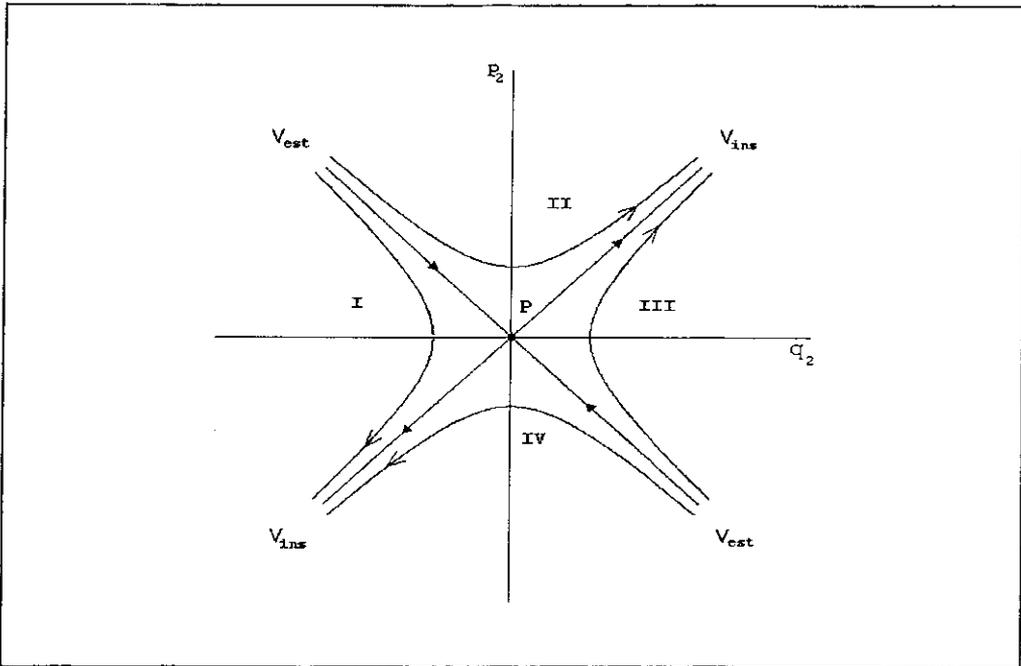


Figura 2.2: As variedades unidimensionais lineares: uma estável V_{est} e outra instável V_{ins} . As hipérboles são as soluções do sistema Hamiltoniano projetadas no plano (q_2, p_2) numa vizinhança do ponto sela para $E_2 < 0$ (região I e III) e $E_2 > 0$ (região II e IV).

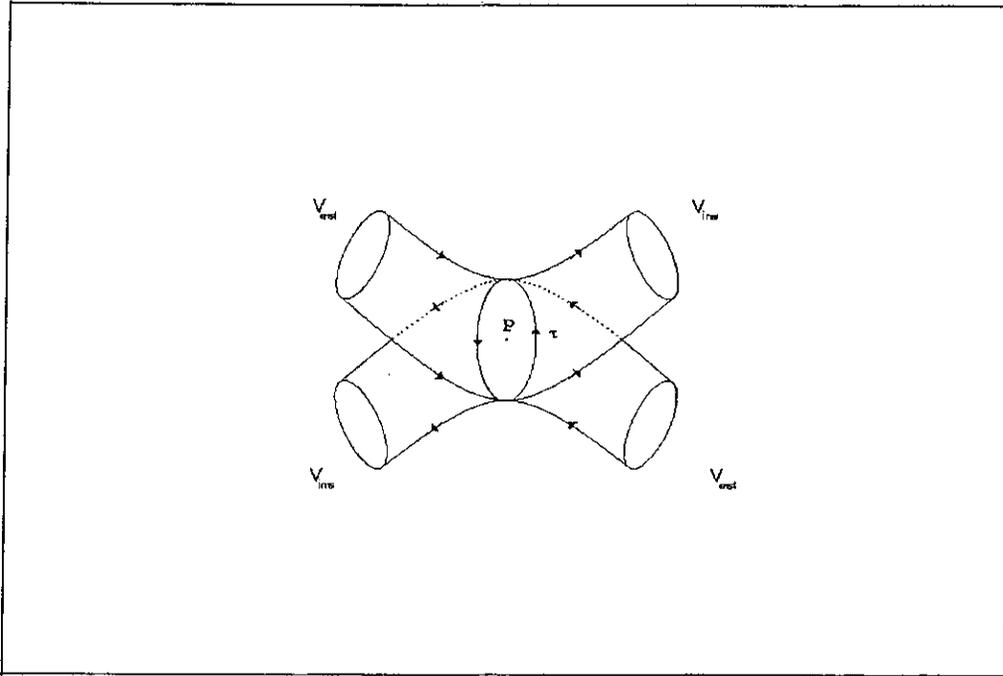


Figura 2.3: Variedades cilíndricas estável e instável emanando da órbita periódica τ . Elas são as extensões não-lineares dos cilindros linearizados $(\tau_{E_o} \times V_{est})$ e $(\tau_{E_o} \times V_{ins})$ na vizinhança de P .

que passe pela vizinhança do ponto crítico, pertence ao caso geral $E_1 \neq 0$ e $E_2 \neq 0$. Nesta região a órbita tem um movimento de aproximação oscilatório aos cilindros lineares, conforme a *figura 2.4*, tanto mais próximo quanto $E_2 \rightarrow 0$. Como iremos ver nos próximos capítulos, devido a este movimento oscilatório na vizinhança do ponto crítico centro-sela, será possível verificar o fenômeno de ressonância para perturbações no modelo, com amplificação de um espectro selecionado de flutuações. Outro aspecto que iremos observar, no caso dos modelos cosmológicos, é que a saída do regime oscilatório terá como estado final um colapso, (considerando $q_2 \rightarrow 0$ como fator de escala do Universo), se $E_2 < 0$ ou escape para o regime inflacionário, ($q_2 \rightarrow \infty$), se $E_2 > 0$, para condições iniciais tomadas no quadrante $q_2 < 0$ e $p_2 > 0$, vide *figura 2.2*. Isto para o regime linear. Em geral, para órbitas que visitam a vizinhança do ponto crítico, a não integrabilidade do sistema Hamiltoniano induz a partição da energia $\Delta E = E_o - E_{cr}$ nos modos rotacional (E_1) e hiperbólico (E_2) ser caótica. Pequenas flutuações em E_o ou nas condições iniciais deste conjunto (q_1, q_2, p_1, p_2) mudará o resultado do comportamento a longo prazo das órbitas. Em outras palavras, dado uma condição inicial geral de energia ΔE , nós não somos mais

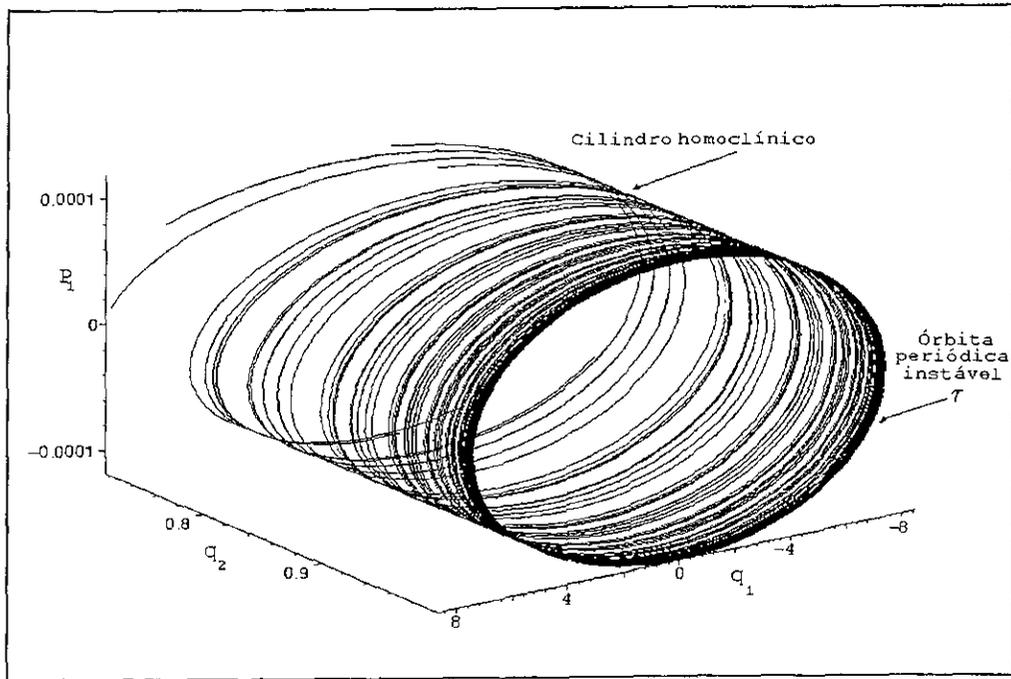


Figura 2.4: Ilustração numérica do cilindro próximo a órbita periódica instável. Para este experimento utilizamos a Hamiltoniana descrevendo um modelo cosmológico com geometria *FRW* e campo escalar conformalmente acoplado. τ corresponde a órbita periódica instável e o eixo da variável q_1 foi multiplicado por 10^6 .

capazes de prever qual quantidade de ΔE vai para cada um dos modos, ou simplesmente, em qual região *I* ou *II* da *figura 2.2* a órbita irá estabelecer-se após visitar a região linear do ponto crítico.

2.2 Mapa de Poincaré

Vamos agora descrever uma importante técnica para o estudo da não-integrabilidade.

A idéia desta técnica surgiu com Poincaré nos seus estudos sobre a estabilidade do sistema solar, basicamente no estudo do problema de três corpos interagindo via gravitação Newtoniana. Poincaré mostrou que em vez de estudarmos órbitas inteiras, informações importantes poderiam ser obtidas estudando a interseção de um conjunto de órbitas com uma superfície de uma dimensão menor que a do espaço de variáveis do sistema.

Passemos a descrever o que é conhecido como mapa de Poincaré. Vamos considerar um sistema 3-dimensional de equações diferenciais ordinárias e uma solução (órbita)

destas equações diferenciais. Agora, escolha alguma superfície 2-dimensional apropriada (a superfície de seção) no espaço de fase 3-dimensional e observe a interseção da órbita com esta superfície. A *figura 2.5* mostra uma visão esquemática de uma órbita C , onde a superfície de seção é o plano S definido com $x_3 = K$. A órbita fura o plano S numa direção adiante no tempo, como por exemplo, nos pontos A e B . Os pontos A e B representam dois sucessivos cruzamentos da superfície de seção no sentido $\dot{x}_3 > 0$. O ponto A unicamente determina o ponto B , porque A pode ser usado como condição inicial nas equações diferenciais para determinar B . Assim deve existir alguma função matemática, que denominaremos de f , que relaciona A a B : $B = f(A)$, onde f , em geral, depende, não somente das equações originais descrevendo o sistema, mas da escolha da superfície de seção. Do mesmo modo, B determina unicamente A usando o tempo reverso nas equações diferenciais e usando B como condição inicial. Assim, o mapa de Poincaré nesta ilustração representa um mapa inversível bi-dimensional que aplica o plano de seção nele mesmo, transformando as coordenadas (x_n^1, x_n^2) do n -ésimo furo da superfície de seção para as coordenadas (x_{n+1}^1, x_{n+1}^2) para o $(n + 1)$ -ésimo furo. O mapa de Poincaré grava as interseções da órbita com a superfície de seção S , não necessariamente para tempos iguais.

Este mapa pode ser iterado para encontrar todos os subseqüentes furos em S . Muito do comportamento dinâmico das órbitas C está presente no mapa bi-dimensional f , como por exemplo, se o sistema apresentar uma solução periódica, então o mapa de Poincaré consistirá de um ponto P (ponto fixo do mapa) tal que $f(P) = P$ ou de uma seqüência finita de pontos que se repetem $P_1 \dots P_n$ (pontos periódicos do mapa) tal que $f^{n+1}(P) = P$.

Esta técnica oferece várias vantagens no estudo de equações diferenciais ordinárias, inclusive as seguintes:

1. *Redução Dimensional*: a construção do mapa de Poincaré envolve a eliminação de ao menos uma das variáveis do problema resultando no estudo de um problema dimensionalmente menor.
2. *Dinâmica Global*: em sistemas com um número pequeno de graus de liberdade, mapas de Poincaré numericamente computados fornecem uma surpreendente exposição da dinâmica global do sistema.

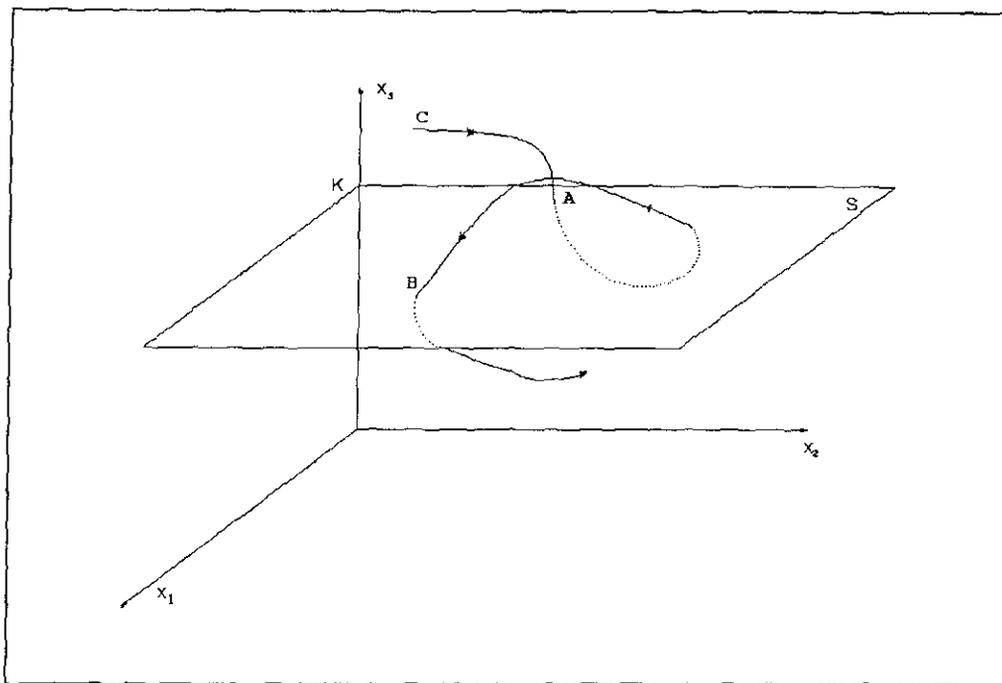


Figura 2.5: Mapa de Poincaré definido pelos sucessivos cruzamentos da curva solução C das equações diferenciais com o plano S tal que $B = f(A)$.

3. *Clareza Conceitual:* muitos conceitos que são de algum modo difíceis de serem estabelecidos para equações diferenciais ordinárias, em geral, são sucintamente estabelecidos para o mapa de Poincaré. Um exemplo é a noção de estabilidade de uma órbita periódica de uma equação diferencial ordinária. Em termos do mapa de Poincaré, este problema reduz-se ao problema da estabilidade de um ponto fixo do mapa, o qual é simplesmente caracterizado em termos dos autovalores do mapa linearizado em torno do ponto crítico.

Com relação aos métodos para a construção do mapa de Poincaré associado com equações diferenciais ordinárias, infelizmente não existe uma regra geral aplicável. A razão maior é que a construção deste mapa requer algum conhecimento da estrutura geométrica do espaço de fase das equações diferenciais ordinárias. Só conhecemos a aplicação de Poincaré a partir da especificação completa do fluxo. De fato, encontrar a função mapa de Poincaré é equivalente a resolver o conjunto original de equações diferenciais e que pode ser difícil ou impossível na prática. Atualmente, com advento de computadores mais poderosos, podemos obter este mapa numericamente por integração direta das equações diferenciais. No entanto, a construção do mapa de Poincaré requer engenhosidade para

uma escolha da superfície de seção que depende do particular problema a ser tratado.

A técnica do mapa de Poincaré será utilizada mais adiante para esclarecer a origem do comportamento caótico nos modelos cosmológicos estudados, como consequência dos cruzamentos homoclínicos de variedades unidimensionais estáveis e instáveis que são a imagem do cruzamento de cilindros estáveis e instáveis com a superfície de seção. Esta estrutura de cilindros está presente no espaço de fase do modelo devido à presença de pontos críticos centro-sela[14]. Os pontos de cruzamento da variedade estável com a variedade instável, do mapa de Poincaré, definem as chamadas órbitas homoclínicas. A dinâmica na vizinhança das órbitas homoclínicas é muito complexa, caracterizando caos no modelo. Para uma revisão veja as referências[14, 17, 18]. Resultados devido a Smale, Moser e Conley [17] mostram que o comportamento do mapa de Poincaré na vizinhança de um ponto homoclínico é análogo ao do mapa da ferradura implicando que a dinâmica do sistema descrito pelo mapa de Poincaré tem a mesma natureza caótica da dinâmica descrita pelo do mapa da ferradura.

Quais as características destas órbitas homoclínicas? O espaço de fase dos nossos modelos é 4-dimensional possuindo estrutura de cilindros que emanam de uma órbita periódica instável. Na *figura 2.4* e *2.6* temos uma representação esquemática desta estrutura cilíndrica numa vizinhança da órbita periódica instável. Apesar de estarmos trabalhando em um espaço de fase 4-dimensional, o sistema possui um vínculo Hamiltoniano que reduz este espaço a três dimensões, o que significa escolhermos a superfície de energia sobre a qual as órbitas irão evoluir. Neste espaço a três dimensões escolhemos uma superfície de seção para traçarmos o mapa de Poincaré de tal modo, que seccione a órbita periódica instável num ponto e os cilindros instável e estável ao longo de linha semi-infinitas[18]. O mapa de Poincaré é esquematicamente apresentado na *figura 2.7*. As linhas semi-infinitas são variedades especiais definidas da seguinte maneira:

- Variedade Estável é um conjunto de pontos \vec{x} , sobre um mapa de Poincaré, tal que as órbitas indo adiante no tempo os pontos \vec{x} aproximam-se do ponto correspondente à órbita periódica.
- Variedade Instável é um conjunto de pontos \vec{x} , sobre um mapa de Poincaré, tal que as órbitas indo de volta no tempo os pontos \vec{x} aproximam-se do ponto correspondente à órbita periódica.

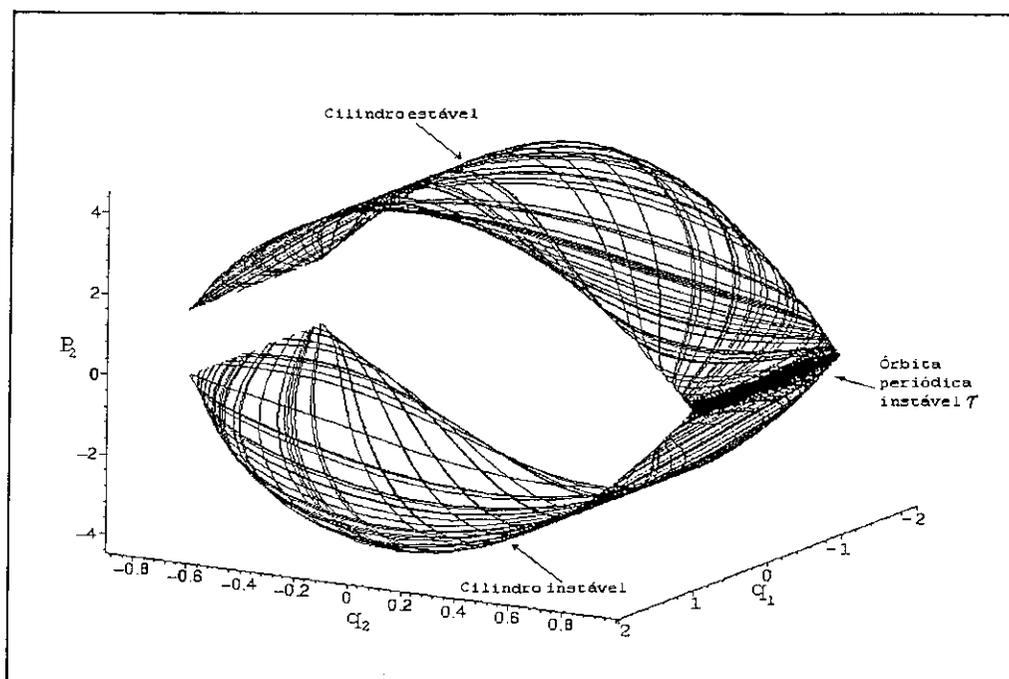


Figura 2.6: Ilustração numérica dos cilindros estável e instável onde observamos que estes coalescem para a órbita periódica τ quando o tempo vai para $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente. O eixo da variável q_1 foi multiplicado por 10^4 .

As curvas na *figura 2.7*, nomeadas $W_{est}(P)$ e $W_{ins}(P)$, são as variedades estável e instável, respectivamente, do ponto sela P . É importante enfatizar que essas curvas não são órbitas, e assim não violam o princípio da unicidade das soluções quando ocorrem interseções entre elas. São na verdade constituídas pelas infinitas interseções dos cilindros estável e instável com a superfície de seção. Por exemplo, se nós tomarmos um ponto s_o sobre $W_{est}(P)$, um ponto para o qual alguma órbita intercepta a superfície de seção, então, admitindo a existência de uma função f (descrita no início da seção) que leva um ponto do mapa ao ponto seguinte, a função mapa de Poincaré f fornecerá s_1 , que é o próximo ponto para o qual a órbita intercepta a superfície de seção. De s_1 nós podemos encontrar s_2 e assim por diante. A sequência de pontos está ao longo da curva nomeada $W_{est}(P)$ e aproxima-se de P quando $n \rightarrow \infty$. De maneira análoga, se u_o está ao longo de $W_{ins}(P)$, então $f(u_o) = u_1$, $f(u_1) = u_2$, sucessivamente, gerando uma série de pontos que divergem de P ao longo de $W_{ins}(P)$. Se nós aplicarmos a função inversa mapa de Poincaré f^{-1} para u_o , nós geramos uma sequência de pontos u_{-1} , u_{-2} , e assim por diante, que se aproxima de P quando $n \rightarrow -\infty$. A curva desenhada na *figura 2.7* representa o total

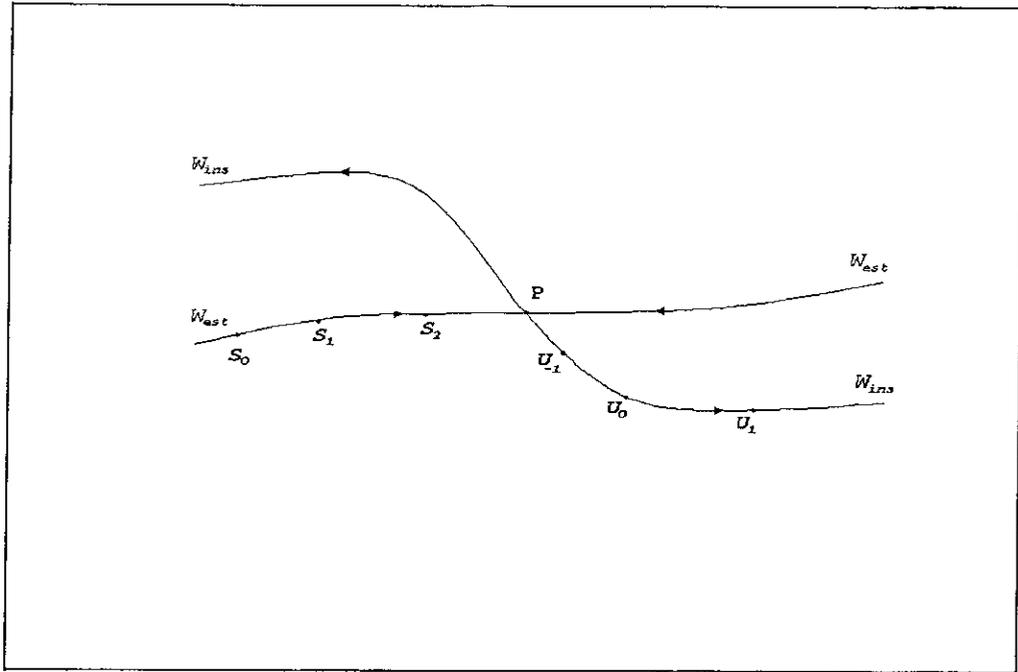


Figura 2.7: O ponto P é um ponto sela na seção de Poincaré. Ele corresponde a órbita periódica instável e consequente estrutura de cilindros no espaço de fase 4-dimensional. A interseção do cilindro estável com a superfície de seção gera a curva W_{est} e a interseção do cilindro instável com a superfície de seção gera a curva W_{ins} .

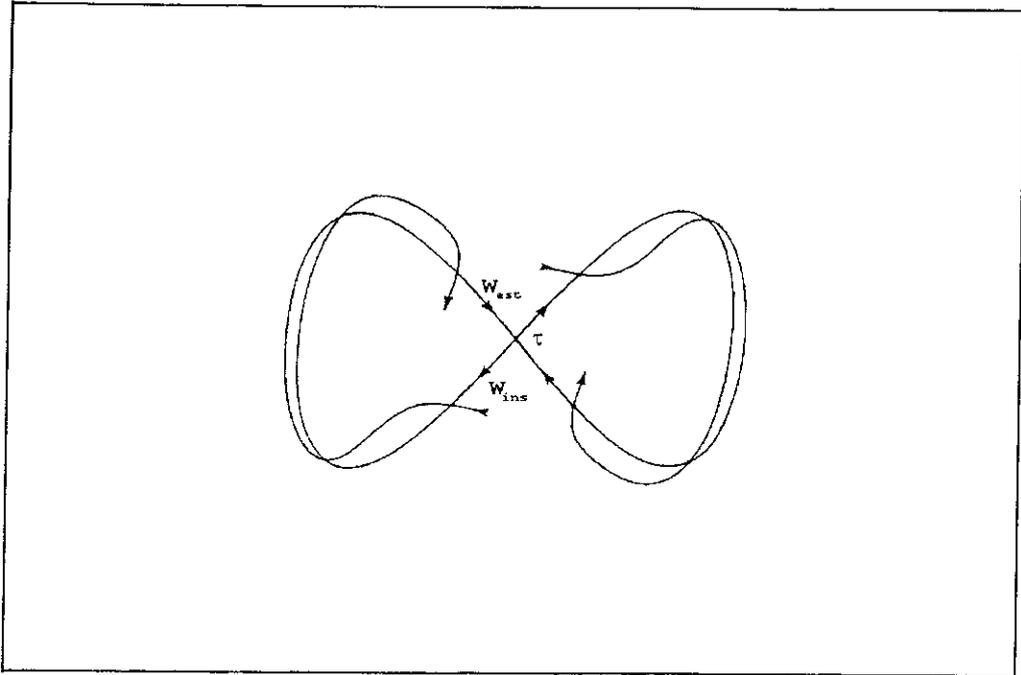


Figura 2.8: Figura padrão da extensão da estrutura cilíndrica longe da órbita periódica instável τ . Devido a não-integrabilidade das equações diferenciais ocorrem cruzamentos transversais entre os cilindros estáveis e os instáveis.

de tal sequência de pontos tomados com um número infinito de pontos iniciais. Para qualquer ponto inicial a sequência salta ao longo de $W_{est}(P)$ ou $W_{ins}(P)$ e não se move continuamente como um ponto sobre uma trajetória no espaço de fase original.

Devido a não-integrabilidade do sistema, de maneira geral, quando um parâmetro ligado ao termo perturbativo do modelo é mudado, a extensão dos cilindros homoclínicos longe das órbitas periódicas é distorcida, com eventual cruzamento transversal dos cilindros instáveis com os estáveis, como mostrado na *figura 2.8*[18]. Se isto ocorre, $W_{est}(P)$ e $W_{ins}(P)$ aproximam-se uma da outra e de fato interceptam-se num ponto Q . Se esta interseção acontece, nós dissemos que ocorreu uma interseção homoclínica em Q e o ponto Q é chamado de ponto homoclínico.

Podemos enunciar que:

Se as variedades estáveis ou instáveis de um ponto sela na seção de Poincaré de um sistema dinâmico interceptam-se numa interseção homoclínica, para um ponto Q , então deve existir um número infinito de interseções homoclínicas.

Para mostrar que isto de fato ocorre, vamos considerar o resultado da aplicação da

função de mapeamento f para Q . Nós obtemos outro ponto Q_1 . Visto que Q pertence a $W_{est}(P) \cap W_{ins}(P)$, então Q_1 também estará sobre $W_{est}(P) \cap W_{ins}(P)$, já que temos arguido acima que a aplicação de f para um ponto sobre $W_{est}(P)$ e $W_{ins}(P)$ gera outro ponto sobre $W_{est}(P)$ e $W_{ins}(P)$, respectivamente. Aplicando continuamente f para esta sequência de pontos, nós geramos um número infinito de pontos homoclínicos. Estas infinitas interseções homoclínicas dão como resultado o que é denominado de entrelaçamento homoclínico, como mostra a *figura 2.9* [18, 20]. Não existe restrição para uma variedade estável cruzar com uma variedade instável. Desenhando as variedades W como curvas fazem-nos pensar incorretamente nelas como soluções de equações diferenciais, o qual, pela unicidade das soluções, nunca podem se cruzar. Entretanto, as variedades W , estável e instável, são compostas, cada uma, pela interseção de infinitas órbitas com a superfície de seção, algumas pertencendo a ambas as variedades que emanam de um ponto fixo. Quando ocorre uma interseção homoclínica, uma órbita sobre a variedade instável une-se a uma órbita sobre a variedade estável para formar uma única órbita que coalesce na órbita periódica para tempos $t \rightarrow \pm\infty$, isto é, é biassintótica a órbita periódica, e cuja interseção com a superfície de seção são os pontos homoclínicos. Como já enunciamos, esta órbita homoclínica deve interceptar a superfície de seção um número infinito de vezes.

Poincaré ficou surpreso ao ver a extrema complexidade que tal interseção causava na dinâmica do mapa. Para entender o que acontece, observe a *figura 2.9*. Sendo o mapa conservativo, os sucessivos lóbulos formados pelas interseções das separatrizes tem a mesma área. Mas a distância entre os sucessivos pontos homoclínicos em $W_{est}(P)$ tendem a zero na vizinhança do ponto fixo, logo os lóbulos tem que se tornar cada vez mais alongados para manter a área e mais convoluidos para evitar auto interação. Temos de fato uma figura complicadíssima com um número infinito de órbitas homoclínicas. Nas palavras de Poincaré[21],

“Que se procure representar a figura formada por essas duas curvas e suas infinitas interseções, onde cada uma corresponde a uma solução duplamente assintótica, suas interseções formando um tipo de trelissa, de tecido, uma rede de malhas infinitamente apertadas; cada uma das curvas não deve jamais se auto-recortar, mas elas têm de dobrar sobre si mesmas de uma maneira complexa para voltar a cortar um número infinito de

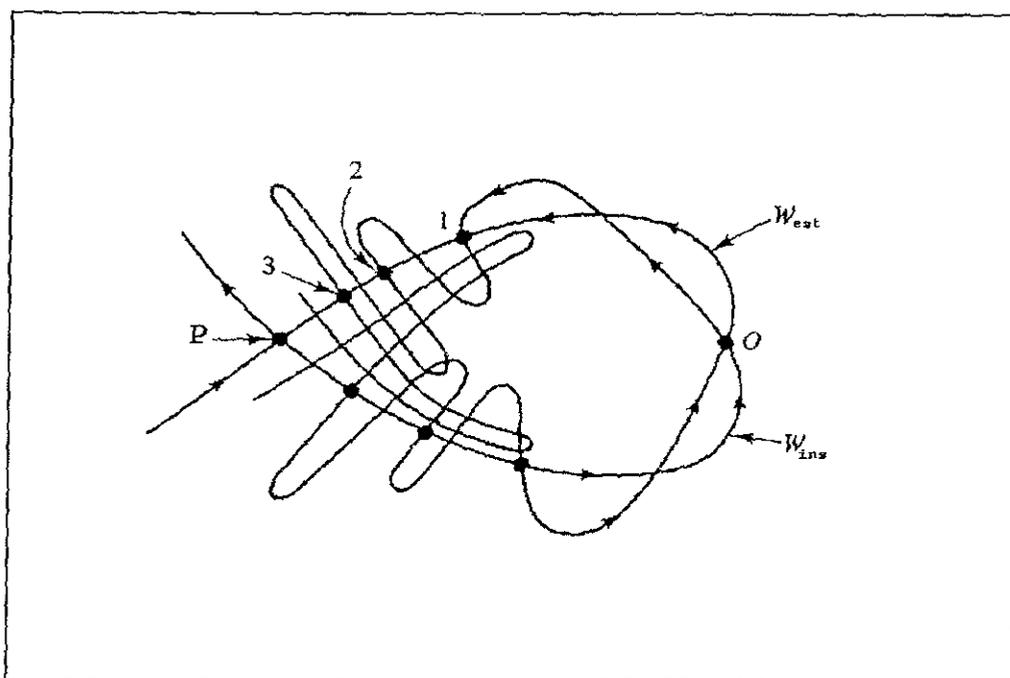


Figura 2.9: Entrelaçamento homoclínico resultado da interseção homoclínica de uma variedade estável $W_{est}(P)$ com uma variedade instável $W_{ins}(P)$ de um ponto sela P . Cada um dos pontos onde ocorre a interseção é um ponto homoclínico.

vezes as malhas da rede.

A complexidade dessa figura é tão atordoante que eu nem mesmo procuro traçá-la. Nada é mais apropriado a nos dar uma idéia da complicação do problema de três corpos e em geral de todos os problemas da Dinâmica em que não há uma integral uniforme...

A órbita homoclínica associada ao ponto crítico sela tem um papel importante na dinâmica global do mapa de Poincaré. Em particular, o violento entrelaçamento das variedades $W_{est}(P)$ e $W_{ins}(P)$ na vizinhança de P leva a uma sensível dependência das órbitas com relação as condições iniciais, tal que a presença destas órbitas tende a promover um comportamento errático. Como por exemplo, o caso de modelos cosmológicos onde q_2 faz o papel de fator de escala do Universo. A figura 2.10 mostra o comportamento caótico das órbitas. Podemos observar nesta figura que condições iniciais tomadas muito próximas, cuja ordem de flutuação é de 10^{-4} , produzem resultados distintos indicando uma completa falta de previsibilidade dos resultados assintóticos das órbitas. Como comentamos anteriormente, este comportamento na vizinhança de um ponto homoclínico no mapa de

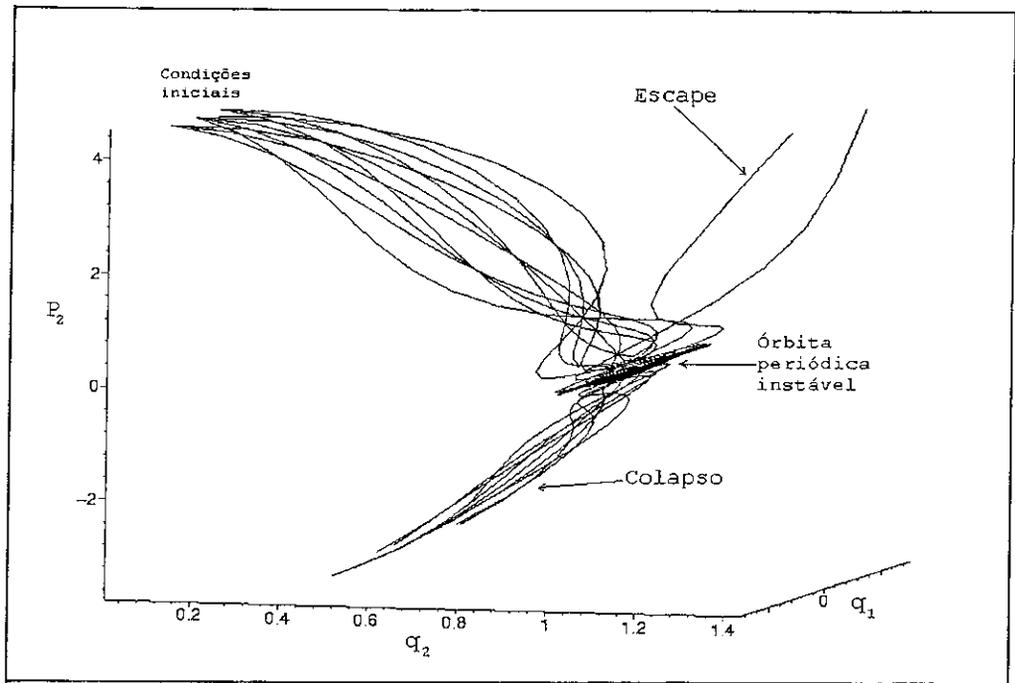


Figura 2.10: Comportamento caótico das órbitas onde q_2 representa o fator de escala do Universo: escape $q_2 \rightarrow \infty$ ou colapso $q_2 \rightarrow 0$. A figura mostra 10 órbitas tomadas em torno da separatriz atingindo o ponto crítico centro-sela. Observamos que apesar das condições iniciais serem tomadas muito próximas, cuja ordem de grandeza das flutuações é 10^{-4} , os resultados do estado final do modelo são completamente distintos.

Poincaré é análogo ao que aparece no mapa da ferradura.

Capítulo 3

Modelo FRW Fechado com Campo Escalar Massivo e Fluido Perfeito

Neste capítulo vamos descrever a dinâmica caótica engendrada pelo ponto crítico centro-sela num universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) fechado, onde o conteúdo material, que gera curvatura, é um fluido perfeito mais um campo escalar acoplado ao campo gravitacional. Este modelo pode ser pensado como descrevendo um Universo em expansão saindo da era de Planck e imediatamente antes de entrar na fase inflacionária. O ingrediente básico deste modelo é a presença do campo escalar - o campo de *inflaton* - cujo tensor momento-energia pode ser separado num termo do tipo constante cosmológica Λ (correspondendo a energia do vácuo do campo de *inflaton*) mais o tensor momento-energia do valor esperado do campo de *inflaton* espacialmente homogêneo $\varphi(t)$. Os graus de liberdade efetivos do sistema serão o fator de escala da geometria de FRW e o campo escalar espacialmente homogêneo. Como discutiremos no apêndice *A*, a dinâmica do fluido perfeito está totalmente determinada pela dinâmica gravitacional, via equações de Einstein, devido a nossa suposição de que o fluido só tem interação com o campo escalar via gravitação. Esta configuração, aparentemente simples, com apenas dois graus de liberdade efetivos, apresenta uma dinâmica complicada. O espaço de fase do sistema apresenta um ponto crítico correspondendo a um extremo do potencial do campo escalar e, quando este extremo é um mínimo, o ponto crítico é um centro-sela. Isto provoca uma dinâmica complexa baseada na estrutura de cilindros instáveis e estáveis que emanam de órbitas periódicas instáveis presentes na vizinhança linear do centro-sela. Nos casos de sistemas não-integráveis, o cilindro estável e o instável se cruzam produzindo uma dinâmica caótica, analogamente àquela presente nos fenômenos homoclínicos de Poincaré.

Vamos considerar a métrica FRW com fator de escala $a(t)$ e elemento de linha dado por

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 [(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2], \quad (3.1)$$

onde t é o tempo cosmológico e (w^1, w^2, w^3) são as 1-formas invariantes de Bianchi do tipo-IX satisfazendo $dw^i = \epsilon^{ijk} w^j \wedge w^k$ e N é a função lapso que define a gauge temporal.

O tensor momento-energia total é descrito por

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\text{fluido perfeito})} + T_{\mu\nu}^{(\varphi)}, \quad (3.2)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{(\text{fluido perfeito})} = (p + \rho) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

sendo ρ e p a densidade de energia e a pressão do fluido, respectivamente, com quadri-velocidade $U^\mu = \delta_0^\mu$ no sistema de coordenadas comóvel, e relacionadas pela equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, com $1 \leq \gamma \leq 2$. O tensor momento-energia do campo escalar $T_{\mu\nu}^{(\varphi)}$ é dado por [22]

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} [\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - 2V(\varphi)] g_{\mu\nu} - \xi \varphi^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + \xi (\nabla \varphi^2 g_{\mu\nu} - \varphi_{;\mu;\nu}^2), \quad (3.4)$$

onde $V(\varphi)$ é o potencial efetivo dado por

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \Lambda, \quad (3.5)$$

e o parâmetro ξ define o acoplamento de φ com a gravitação; para o caso no qual o campo escalar é acoplado conformalmente à gravitação $\xi = \frac{1}{6}$ e no caso de acoplamento mínimo $\xi = 0$. m é definido como $m = \frac{Mc}{\hbar}$, onde M é a massa do campo escalar.

Das identidades de Bianchi segue que a divergência do tensor momento-energia deve ser zero ($T_{\mu;\nu}^\nu = 0$) e devido à suposição de que o fluido perfeito só interage gravitacionalmente, temos que,

$$T_{\mu;\nu}^{\nu(\text{fluido perfeito})} = 0 \quad \text{e} \quad T_{\mu;\nu}^{\nu(\varphi)} = 0, \quad (3.6)$$

independentemente. Daí decorre que, usando a equação de estado e a homogeneidade do fluido, $\rho = E_o a^{-3\gamma}$, onde E_o é uma constante de integração que pode ser interpretada como proporcional a energia total do fluido perfeito. Em todo o capítulo usaremos unidades tais que $8\pi G = 1 = c^4$.

A dinâmica do modelo é governada pelas equações de Einstein

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

para a métrica (3.1) e o tensor-momento energia (3.2). Estas equações são equivalentes às equações Hamiltonianas geradas pelo vínculo Hamiltoniano²

$$H = \frac{p_a^2}{12a[-1 + (1 - 6\xi)\xi\psi^2 a^{-12\xi}]} + \frac{p_\psi^2}{2a^{(3-12\xi)}} - 3ak + a^3 V(\psi a^{-6\xi}) + E_o a^{3(1-\gamma)} + 3k\xi\psi^2 a^{(1-12\xi)} = 0, \quad (3.8)$$

onde $\psi = \varphi a^{6\xi}$ é o campo escalar redefinido, e p_a e p_ψ são os momentos canonicamente conjugados a a e ψ , respectivamente, e $V(\psi a^{-6\xi})$ é o potencial efetivo do campo escalar.

¹No apêndice D tabulamos as unidades das grandezas físicas que aparecem ao longo do texto de acordo com esta convenção

²Veja no apêndice A como foi obtida esta Hamiltoniana.

Fixando a gauge $N = a$, passamos a usar o tempo conforme definido como

$$d\eta = \frac{dt}{a}. \quad (3.9)$$

Para o caso em que o campo escalar está acoplado conformalmente à gravitação, tomamos o valor de $\xi = \frac{1}{6}$ na equação (3.8) obtendo a expressão

$$H = \frac{p_a^2}{12} - \frac{p_\psi^2}{2} + 3a^2k - \frac{k}{2}\psi^2 - a^4V\left(\frac{\psi}{a}\right) - E_o a^{(4-3\gamma)} = 0, \quad (3.10)$$

e para o caso em que o campo escalar está acoplado minimalmente à gravitação, tomamos o valor de $\xi = 0$ na equação (3.8) obtendo a expressão

$$H = \frac{p_a^2}{12} - \frac{p_\psi^2}{2a^2} + 3a^2k - a^4V(\psi) - E_o a^{(4-3\gamma)} = 0. \quad (3.11)$$

Para os dois tipos de acoplamento, conforme e mínimo, vamos analisar os modelos onde o conteúdo material é constituído por radiação ($\gamma = \frac{4}{3}$) e $k = 1$ (modelo fechado).

As equações de Hamilton obtidas através do vínculo Hamiltoniano (3.10) escrevem-se como

$$a' = \frac{p_a}{6}, \quad (3.12)$$

$$p'_a = -6a + 4a^3V\left(\frac{\psi}{a}\right) + a^4 \frac{d}{da}V\left(\frac{\psi}{a}\right), \quad (3.13)$$

$$\psi' = -p_\psi, \quad (3.14)$$

$$p'_\psi = \psi + a^4 \frac{d}{d\psi}V\left(\frac{\psi}{a}\right), \quad (3.15)$$

e para (3.11) as equações de Hamilton escrevem-se como

$$a' = \frac{p_a}{6}, \quad (3.16)$$

$$p'_a = -\frac{p_\psi}{a^3} - 6a + 4a^3V\left(\frac{\psi}{a}\right), \quad (3.17)$$

$$\psi' = -\frac{p_\psi}{a^2}, \quad (3.18)$$

$$p'_\psi = a^4 \frac{d}{d\psi}V\left(\frac{\psi}{a}\right), \quad (3.19)$$

onde ' representa a derivada em relação ao tempo conforme η . Os sistemas autônomos (3.13-3.16) e (3.17-3.20) são completamente equivalentes às equações de Einstein (3.7) para cada caso e as órbitas geradas por eles estão contidas numa variedade tridimensional do espaço de fase que satisfaz o vínculo Hamiltoniano (3.10) e (3.11), respectivamente.

Os sistemas dinâmicos (3.13-3.16) e (3.17-3.20) possuem pontos críticos na região finita do espaço de fase cujas coordenadas são obtidas das condições: $a' = 0$, $p'_a = 0$, $\psi' = 0$ e $p'_\psi = 0$. Trabalhando com o potencial dado pela equação (3.5) e tendo $\Lambda > 0$, encontramos as seguintes coordenadas desses pontos para os dois tipos de acoplamentos

$$P : \quad p_{ao} = 0, \quad a_o = 0, \quad \pm \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}}, \quad p_{\psi o} = 0, \quad \psi_o = 0. \quad (3.20)$$

Temos portanto um ponto crítico localizado na região física do espaço de fase para $a > 0$ e este ponto crítico representa o Universo estático de Einstein. Como veremos adiante, o espaço de fase também tem um par de pontos críticos no infinito, correspondendo à solução de de Sitter, um deles atuando como atrator e o outro como repulsor; o atrator de de Sitter caracteriza, na dinâmica do modelo, uma saída para a inflação.

É possível obter muita informação de um sistema não-linear através de sua linearização em torno do ponto crítico, além de analisarmos sua estabilidade. Linearizando os sistemas autônomos (3.13-3.16) e (3.17-3.20) em torno dos pontos críticos obtemos como resultado uma matriz constante determinando um sistema linear para a dinâmica na vizinhança do ponto crítico. Para isso, introduzimos novas variáveis,

$$\begin{aligned} \delta a &= a - a_o, \\ \delta p_a &= p_a - p_{ao}, \\ \delta \psi &= \psi - \psi_o, \\ \delta p_\psi &= p_\psi - p_{\psi o}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

de modo a trasladar o ponto crítico para a origem. Assim, a expansão das equações (3.13-3.16) em torno dos pontos críticos pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \delta a' &= \frac{1}{6} \delta p_a, \\ \delta p'_a &= (12a_o^2 \Lambda - 6) \delta a, \\ \delta \psi' &= -\delta p_\psi, \\ \delta p'_\psi &= (1 + m^2 a_o^2) \delta \psi, \end{aligned} \quad (3.22)$$

de modo que o sistema pode ser posto sob a forma de matriz, $\delta X' = S \delta X$,

$$\begin{pmatrix} \delta a' \\ \delta p'_a \\ \delta \psi' \\ \delta p'_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ (12a_o^2\Lambda - 6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (1 + m^2a_o^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta p_a \\ \delta \psi \\ \delta p_\psi \end{pmatrix},$$

e para o sistema de equações (3.17-3.20) a expansão é dada por

$$\begin{aligned} \delta a' &= \frac{1}{6}\delta p_a, \\ \delta p'_a &= (12a_o^2\Lambda - 6)\delta a, \\ \delta \psi' &= -\frac{1}{a_o^2}\delta p_\psi, \\ \delta p'_\psi &= m^2a_o^2\delta \psi, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde esse sistema pode ser posto sob a forma de matriz, $\delta X' = S\delta X$,

$$\begin{pmatrix} \delta a' \\ \delta p'_a \\ \delta \psi' \\ \delta p'_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ (12a_o^2\Lambda - 6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a_o^2} \\ 0 & 0 & m^2a_o^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta p_a \\ \delta \psi \\ \delta p_\psi \end{pmatrix}.$$

A natureza do ponto crítico é determinada pelos autovalores da matriz S acima, que são as raízes do polinômio característico associado a S ,

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda \mathbf{1}_{4 \times 4}). \tag{3.24}$$

Estamos interessados em analisar o comportamento das órbitas numa vizinhança do ponto crítico localizado na região física, com $a_o = \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}} > 0$. Por simplicidade, fixamos $\Lambda = \frac{3}{2}$, em (3.20), de modo a obter $a_o = 1$ e assim determinarmos explicitamente o polinômio característico através da equação,

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 12 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & M & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

onde $M = 1 + m^2$ para o caso do acoplamento conforme e $M = m^2$ para o caso do acoplamento mínimo. Como $M > 0$, os autovalores são,

$$\lambda_1 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = -i\sqrt{M}, \quad \lambda_4 = i\sqrt{M}. \tag{3.25}$$

Para o ponto crítico considerado, nos dois tipos de acoplamento, encontramos dois autovalores reais e de sinais opostos e dois autovalores imaginários puros complexo conjugados. Esta estrutura de autovalores caracteriza o ponto crítico centro-sela, como já vimos. O movimento na vizinhança do centro-sela é separável em dois setores, um de movimento rotacional associado aos autovalores imaginários puros (setor centro) e outro de movimento hiperbólico associado aos autovalores reais com sinais opostos (setor sela). Podemos observar que para $m = 0$, no caso do acoplamento conforme, a estrutura de centro-sela permanece, em consequência do termo conforme. Podemos ainda notar que os autovalores correspondendo ao movimento rotacional (λ_3, λ_4) dependem da massa do campo escalar. Mais adiante veremos quais as consequências desse fato.

Para exibirmos mais claramente a estrutura de movimentos mencionada acima, vamos efetuar a expansão de Taylor das Hamiltonianas (3.10) e (3.11) em torno do ponto crítico centro-sela $(a_o = 1, p_{a_o} = 0, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$, obtendo a seguinte equação,

$$H = H_o + \frac{1}{12}p_a^2 - 6\delta a^2 - \frac{1}{2}(p_\psi^2 + M\psi^2) + \mathcal{O}(3), \quad (3.26)$$

onde $H_o = E_{cr} - E_o$, E_{cr} é a energia do ponto crítico, $\delta a = a - a_o$ e $\mathcal{O}(3)$ representa termos de ordem mais alta na expansão.

Numa vizinhança do ponto crítico, onde os termos de ordem mais alta $\mathcal{O}(3)$ podem ser desprezados, e que denominamos vizinhança linear, a Hamiltoniana linearizada é escrita como,

$$H_l = E_{cr} - E_o + \frac{1}{12}p_a^2 - 6\delta a^2 - \frac{1}{2}(p_\psi^2 + M\psi^2) \approx 0. \quad (3.27)$$

Examinando a expressão acima, verificamos a existência de duas constantes de movimento: uma associada ao movimento hiperbólico no plano (a, p_a) e outra associada ao movimento rotacional no plano (ψ, p_ψ) . Isto está de acordo com o teorema de Moser[17], que mostra que é sempre possível encontrar um conjunto de variáveis canônicas tais que, numa vizinhança linear do centro-sela, a dinâmica é separável num movimento rotacional e num movimento hiperbólico, com as energias parciais associadas E_{rot} e E_{hip} , definidas no capítulo I, conservadas. Nesta aproximação, ou seja, numa vizinhança linear do ponto crítico, o fator de escala a tem movimento puramente hiperbólico e é completamente desacoplado do puro movimento rotacional do campo escalar no plano (ψ, p_ψ) . A *figura 3.1* mostra o comportamento das órbitas na vizinhança linear do centro-sela onde observamos o desacoplamento entre os movimentos das variáveis de rotação e hiperbólicas. As

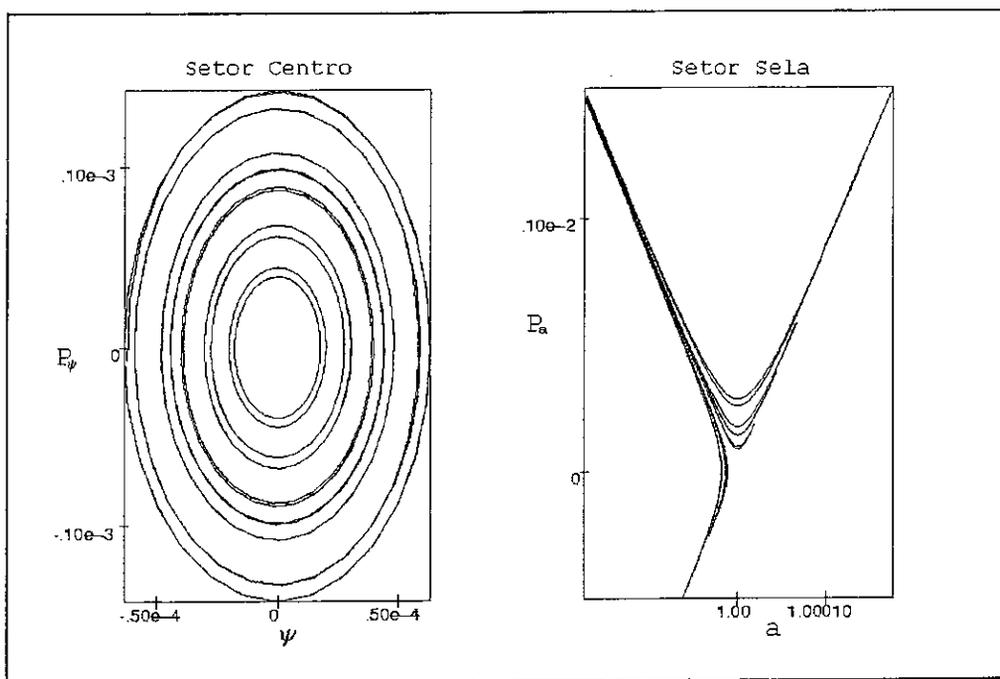


Figura 3.1: Experimento numérico utilizando a Hamiltoniana (3.10) do acoplamento conforme com 11 condições iniciais tomadas tal que as órbitas visitem a região linear do centro-sela. O gráfico da esquerda mostra o movimento rotacional no setor centro e o gráfico da direita apresenta o movimento hiperbólico no setor sela completamente desacoplados.

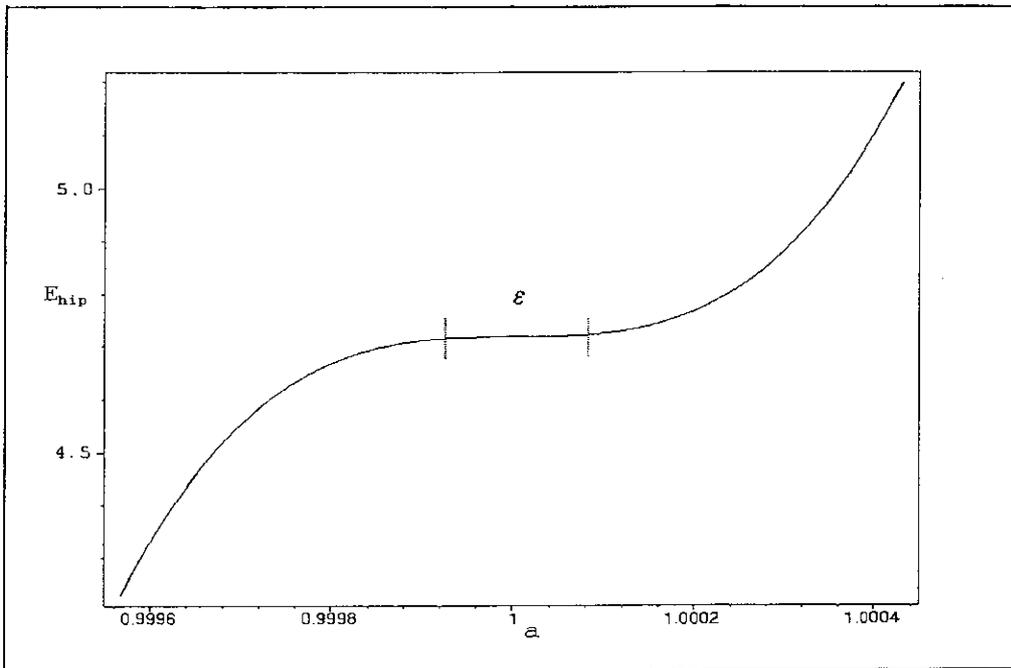


Figura 3.2: Gráficos $E_{hip} \times a$ onde podemos observar a conservação da energia hiperbólica numa região próxima ao ponto crítico $P_o : a_o = 1, p_{a_o} = 0, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0$. Para este experimento utilizamos a Hamiltoniana (3.10) com condições iniciais tomadas tal que as órbitas visitem a região linear do centro-sela. O tamanho da região onde E_{hip} se conserva é $\epsilon \approx 10^{-4}$. O eixo da energia foi multiplicado por 10^9 .

Sobre o plano invariante \mathcal{M} a dinâmica é integrável e governada pelo sistema autônomo bi-dimensional,

$$a' = \frac{p_a}{6}, \quad (3.33)$$

$$p'_a = -6a + 4a^3\Lambda. \quad (3.34)$$

Desta forma, quaisquer que sejam as condições iniciais (a, p_a) escolhidas, as órbitas permanecerão sobre \mathcal{M} , já que $(\psi' = 0), (p'_\psi = 0)$. Usando qualquer das Hamiltonianas (3.10) ou (3.11) obtemos a equação que deve ser satisfeita pelas curvas-soluções no plano invariante,

$$H_s = \frac{p_a^2}{12} + 3a^2 - a^4\Lambda - E_o = 0. \quad (3.35)$$

Sobre o plano invariante \mathcal{M} , próximo ao ponto crítico de coordenadas $P_o : (p_a = 0, a_o = 1, p_{\psi_o} = 0, \psi_o = 0)$, objeto de nossa análise, a estrutura apresentada pelas órbitas corresponde a seção hiperbólica do ponto centro-sela, como pode ser observado da *figura 3.3*. Podemos ainda obter a equação das separatrizes, com $E_o = E_{cr}$, assim,

$$\frac{p_a^2}{12} + 3a^2 - a^4\Lambda = E_{cr}. \quad (3.36)$$

As curvas integrais sobre o plano invariante \mathcal{M} representam a evolução de um Universo *FRW* homogêneo, isotrópico, fechado, com radiação e constante cosmológica. Neste caso não há nenhuma incerteza no estado final do modelo a partir do momento em que definimos a região onde serão tomadas as condições iniciais. Em relação ao tempo em que a órbita leva para atingir e se afastar da região linear do centro-sela, depende da proximidade com que as condições iniciais são tomadas em relação a separatriz. Quanto mais próximo da separatriz, mais tempo a órbita leva para atingir o ponto crítico, tal que, sobre a separatriz este tempo é infinito. Da *figura 3.3* observamos a existência de pontos críticos localizados no infinito (solução de de Sitter). As órbitas localizadas na região *I* da *figura 3.3* tendem ao ponto no infinito que atua como um atrator (configuração estável de Sitter) e descrevem Universos que iniciam a evolução em expansão entrando na fase inflacionária. Neste caso o fator de escala a cresce rapidamente e tem a seguinte expressão assintótica,

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \quad \text{ou} \quad a(\eta) \propto \frac{1}{\eta}, \quad (3.37)$$

com $p_a(t) \propto e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$ ou $p_a(\eta) \propto \frac{1}{\eta^2}$ onde t é o tempo cosmológico e η é o tempo conforme. Já as órbitas localizadas na região *IV* correspondem a Universos que colapsam a partir de um ponto no infinito que atua como um repulsor (configuração instável de de Sitter).

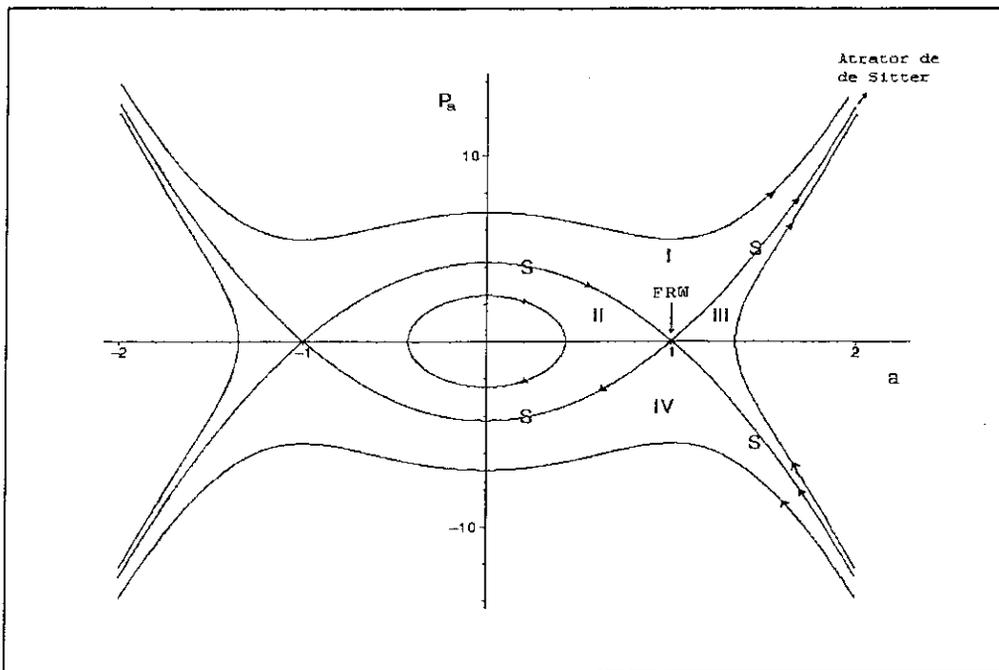


Figura 3.3: Retrato de fase do plano invariante ($\psi = 0, p_\psi = 0$) contendo o ponto crítico centro-sela localizado em $(a = 1, p_a = 0)$, onde tomamos $\Lambda = \frac{3}{2}$. S são as separatrizes atingindo o centro-sela. Note a estrutura hiperbólica apresentada pelas órbitas na região próxima ao ponto crítico em $a = 1$.

A *figura 3.3* apresenta quatro classes de soluções: a região *I* é caracterizada por órbitas com energia $E_o > E_{cr}$ e que escapam para inflação (atrator de de Sitter); idêntico comportamento ocorre para as órbitas na região *III*, agora com energia $E_o < E_{cr}$, porém iniciando a evolução com uma contração em a . Nas regiões *II* e *IV* temos órbitas descrevendo o colapso do Universo ($a \rightarrow 0$) com energia $E_o < E_{cr}$ e $E_o > E_{cr}$, respectivamente, porém em *II* ocorre uma expansão inicial e em *IV* uma contínua contração já que $p'_a < 0$ sempre.

Como já comentamos no capítulo *I*, a tradição no estudo de modelos em Cosmologia ou Gravitação, está na análise dos casos integráveis. Porém, a dinâmica no caso geral quando atua a não-integrabilidade, e mesmo próximo ao caso integrável (perturbação do caso integrável), é bastante complexa e pode ter consequências na evolução de Universos que emergem da fase de Planck. Como exemplo desta complexidade podemos citar a falta de previsibilidade em, conhecendo as condições iniciais, determinarmos o estado final de uma dada órbita assim como os valores das quantidades conservadas (E_{hip} e E_{rot}) definidas na vizinhança linear do centro-sela. Isto acontece, por exemplo, quando as

condições iniciais são escolhidas fora, mais próximo, do plano invariante, num pequeno volume centrado num ponto da separatriz, e com raio da ordem das flutuações permitidas às variáveis. É este tipo de condições iniciais que usamos no nosso estudo onde procuramos caracterizar o ponto crítico centro-sela como um espalhador caótico. A proximidade com a separatriz é a garantia de que as órbitas irão visitar a região linear do centro-sela.

Como já vimos, uma órbita geral que visita a região linear do centro-sela é caracterizada por $E_{hip} \neq 0$ e $E_{rot} \neq 0$. Nesta região a órbita tem uma aproximação oscilatória ao cilindro, tanto mais próximo quanto $E_{hip} \rightarrow 0$. A partição de energia ($E_{cr} - E_o$), nas energias E_{hip} e E_{rot} do movimento em torno ponto crítico, determinará a saída do regime oscilatório em colapso ou escape para a inflação (atrator de de Sitter). De fato, como o movimento na vizinhança do ponto crítico é separável, todas as órbitas que visitam as regiões *I* e *III* do setor sela serão inevitavelmente guiadas para o atrator de de Sitter. Isto vale também para órbitas fora da vizinhança do centro-sela e longe do plano invariante, de modo que a configuração de de Sitter e a singularidade $a = 0$ definem as duas configurações assintóticas possíveis da dinâmica do modelo. Por exemplo, modelos inicialmente em expansão com energia E_o sairão do regime oscilatório para colapso ou escape se a partição de energia, na vizinhança do ponto crítico, é tal que $E_{hip} < 0$ ou $E_{hip} > 0$, respectivamente. Na *figura 3.4* mostramos este comportamento utilizando a Hamiltoniana (3.10).

Contudo, a não-integrabilidade do sistema (3.13-3.16) ou (3.17-2.20), determina que a partição de energia é caótica em geral, e caracterizará uma saída caótica para a inflação na direção do atrator de de Sitter. Em outras palavras, dada uma condição inicial geral com energia E_o , nós não somos mais capazes de prever qual região do setor sela a órbita irá visitar quando passar pela vizinhança do ponto crítico e, conseqüentemente, o seu estado assintótico. Pequenas flutuações em E_o ou nas condições iniciais destes conjuntos mudará o resultado das órbitas de colapso para escape ou vice-versa, caracterizando uma saída caótica para a inflação. Notemos que este comportamento caótico está presente associado à estruturas de cilindros que emanam de órbitas periódicas instáveis da variedade centro, mesmo numa vizinhança não-linear do centro-sela.

Uma outra situação possível é quando tomamos condições iniciais longe de plano invariante. Observamos que é sempre possível encontrar uma superfície de energia de modo

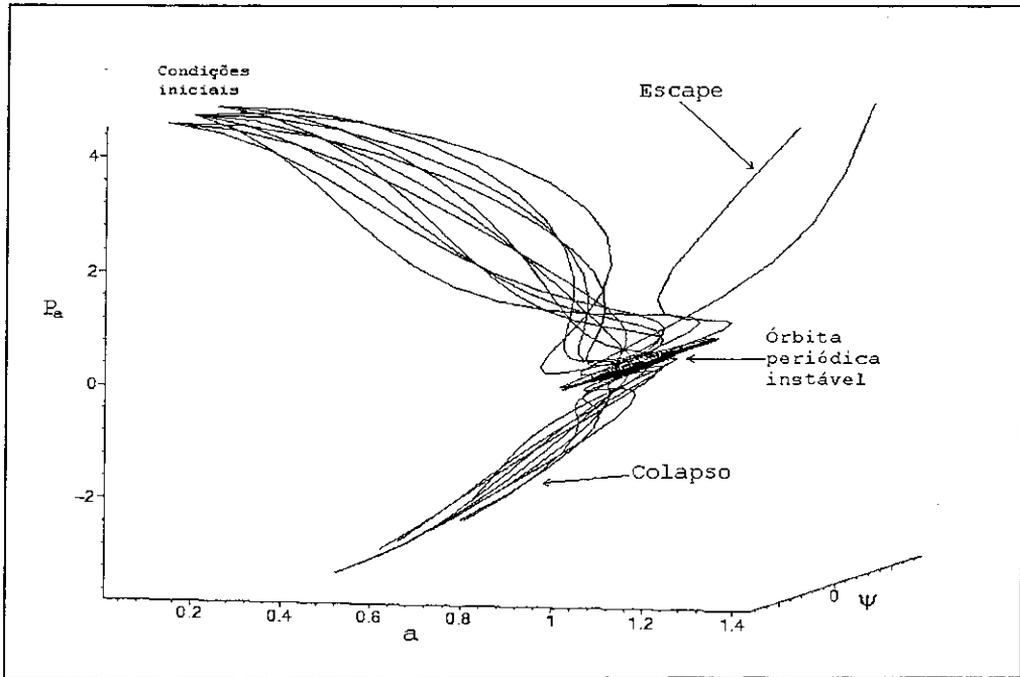


Figura 3.4: Vista tridimensional de 10 órbitas gerais com aproximação oscilatória à vizinhança linear do centro-sela. As condições iniciais foram tomadas em torno do ponto P_o : $(a = 0,01; p_a = 4,242216413037706; \psi = 0; p_\psi = 0)$ com energia $E_o = 1,499999992920542$ e $m = 16$, sendo a ordem das flutuações permitidas às variáveis iniciais de $R = 10^{-4}$. Note que as possíveis saídas da aproximação oscilatória, após a passagem pela região linear do centro-sela, são o colapso ($E_{hip} < 0$) ou o escape para a inflação ($E_{hip} > 0$).

que as órbitas visitem a região próxima ao ponto crítico e neste caso o movimento do setor hiperbólico não é mais desacoplado do movimento do setor rotacional. Na *figura 3.5* e *3.6* mostramos este caso. Podemos observar que o fator de escala tem comportamento oscilatório quando da aproximação ao ponto crítico, podendo a órbita (que corresponde a um dado Universo) oscilar por um tempo arbitrariamente longo antes de escapar para inflação ou colapsar.

Vamos voltar nossa atenção para o caso das órbitas escolhidas próximo ao plano invariante, em torno da separatriz. Como já mencionamos, devido a não integrabilidade do sistema, a partição de energia $(E_{cr} - E_o)$ nas energias E_{hip} e E_{rot} é caótica: para um *ensemble* de condições iniciais, tomado num pequeno volume, e tal que as órbitas visitem a região linear do centro-sela, não é possível predizer qual o valor da energia destas órbitas, por exemplo E_{hip} , como consequência da alta sensibilidade de E_{hip} em relação

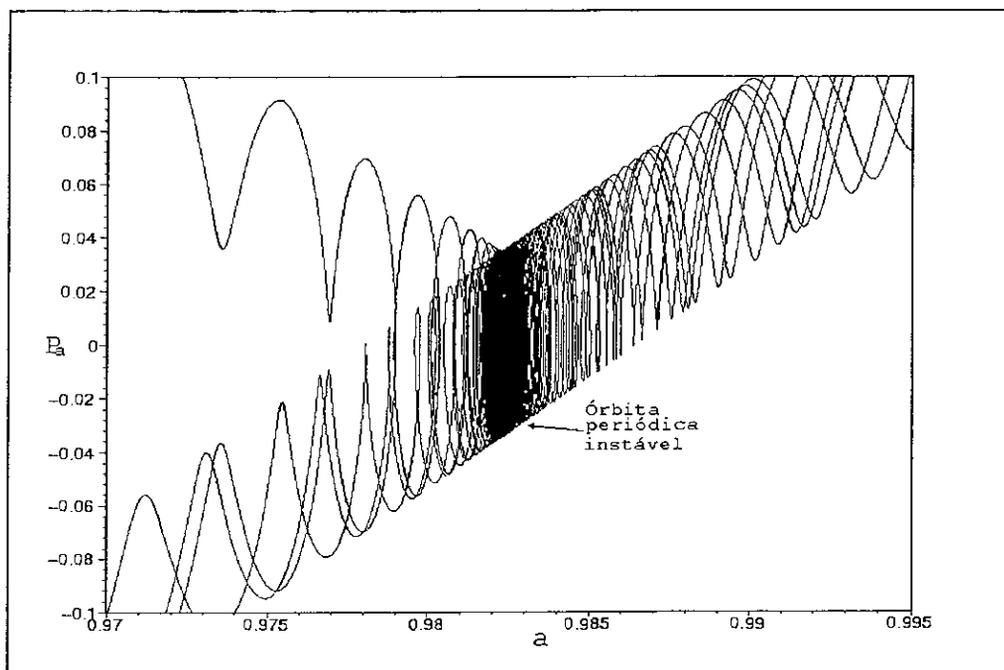


Figura 3.5: Ilustração numérica de 10 órbitas tomadas longe do plano invariante do centro-sela. Estas órbitas aproximam-se da órbita periódica instável da variedade centro numa pequena, mas não infinitesimal, vizinhança do centro-sela, de tal modo que o fator de escala a oscila várias vezes antes de colapsar ou escapar. O experimento foi realizado com a Hamiltoniana do modelo conforme com energia $E_o = 1,083404754$ e $m = 8$, com condições iniciais tomadas fora do plano invariante em torno do ponto P_o : $(a = 0,1, p_a = 3,673915764957057, \psi = 0,25, p_\psi = 0,2)$, dentro de um volume de raio $R = 10^{-8}$.

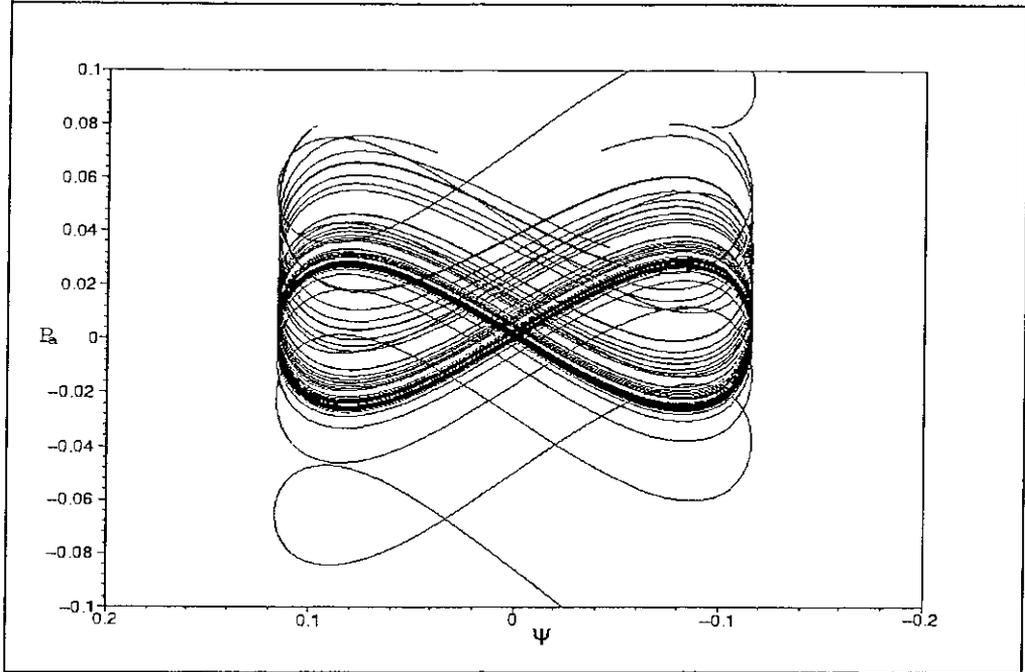


Figura 3.6: Ilustração numérica das 10 órbitas da *figura 3.5* agora com projeção no plano (ψ, p_a) , onde podemos observar as oscilações nas variáveis p_a e ψ .

às condições iniciais. Assim, além do que denominamos de saída caótica para a inflação, existe este aspecto físico relacionado com os valores das quantidades conservadas E_{hip} e E_{rot} consequência da instabilidade da partição de energia ($E_{cr} - E_o$). A seguir iremos mostrar que, num regime que denominaremos de alta não-integrabilidade, a distribuição das quantidades conservadas E_{hip} , associadas a um *ensemble* de condições iniciais \mathcal{D} , satisfaz uma distribuição estatística associada ao centro-sela. Vamos usar métodos estatísticos para examinar esta partição de energia, que nos levará ao estabelecimento do que pode ser um novo padrão estatístico universal associado ao centro-sela, independentemente do sistema dinâmico onde este centro-sela aparece.

Baseado na distribuição caótica das energias E_{hip} e E_{rot} na vizinhança linear do ponto crítico construímos o seguinte experimento numérico. Consideramos um conjunto \mathcal{D} de condições iniciais, tomadas homogêneas e randômicas em torno de um ponto sobre a separatriz dentro de um volume de raio R , tais que todas as órbitas visitem a vizinhança linear do centro-sela. Nesta vizinhança linear calculamos a quantidade conservada ${}^3E_{hip}$ associada a cada órbita, quando da primeira passagem pelo ponto crítico. Para

³Na região linear onde tanto a E_{hip} quanto a E_{rot} se conservam e o vínculo (3.30) é válido, todos os

propósitos práticos, E_{hip} é avaliado no ponto mais próximo ao centro-sela, no sentido Euclidiano de proximidade; entretanto, sua conservação pode ser e é verificada numericamente calculando-a em outros pontos da vizinhança do centro-sela, dentro do raio da ordem $|E_{cr} - E_o|$, conforme *figura 3.2*. Se efetuarmos o experimento do cálculo de E_{hip} com a Hamiltoniana integrável e plotarmos E_{hip} versus o valor de uma das variáveis canônicas, por exemplo a , especificando as condições iniciais no conjunto \mathcal{D} , o resultado mostra um “sinal” apresentando uma distribuição homogênea. Quando utilizamos a Hamiltoniana não-integrável, com as mesmas condições iniciais para construirmos um gráfico análogo, encontramos um resultado que mostra um “sinal” cuja distribuição não é mais homogênea e sim apresentando uma polarização na direção dos valores de E_{hip} menores. Sinais análogos altamente desorganizados aparecem quando usamos as variáveis canônicas ψ, p_a, p_ψ . Também, se outra amostra de pontos é tomada randômica sobre o conjunto \mathcal{D} , nós obtemos um sinal com os mesmos aspectos gerais mas completamente diferente em todos os detalhes dos “sinais” anteriores, aparentando não ter qualquer conexão eles (vide *figura 3.7* onde ilustramos todos estes casos.)

Isto mostra o que já havíamos comentado, que E_{hip} é altamente sensível a flutuações nas condições iniciais. O que necessitamos verificar é a causa desta alta sensibilidade de E_{hip} evidenciada nos gráficos pelo modo randômico como os valores desta energia estão distribuídos. Num primeiro momento poderíamos atribuir a randomicidade do “sinal” à escolha randômica das condições iniciais, sem qualquer vínculo com a não-integrabilidade do sistema. De certa forma isto pode estar acontecendo: apesar das condições iniciais terem de satisfazer o vínculo Hamiltoniano, ainda resta um volume tri-dimensional dentro do qual podemos escolher randomicamente três variáveis. Porém, isto é apenas uma parte da explicação. Estamos interessados em saber qual o papel da não-integrabilidade no modo randômico como o “sinal” apresentado na *figura 3.7* é constituído. Para isto devemos “filtrar” a randomicidade devido à escolha randômica das condições iniciais. Como primeiro passo vamos impor que a amostra deva ser a mais geral possível, ou seja, homogênea e randômica, evitando assim qualquer tipo de polarização. Começamos o nosso estudo verificando se esses sinais desorganizados tem um padrão reproduzível. Como podemos observar da *figura 3.7 b e c*, há uma tendência das E_{hip} a se concentrarem na região de

resultados obtidos para E_{hip} são válidos para E_{rot} .

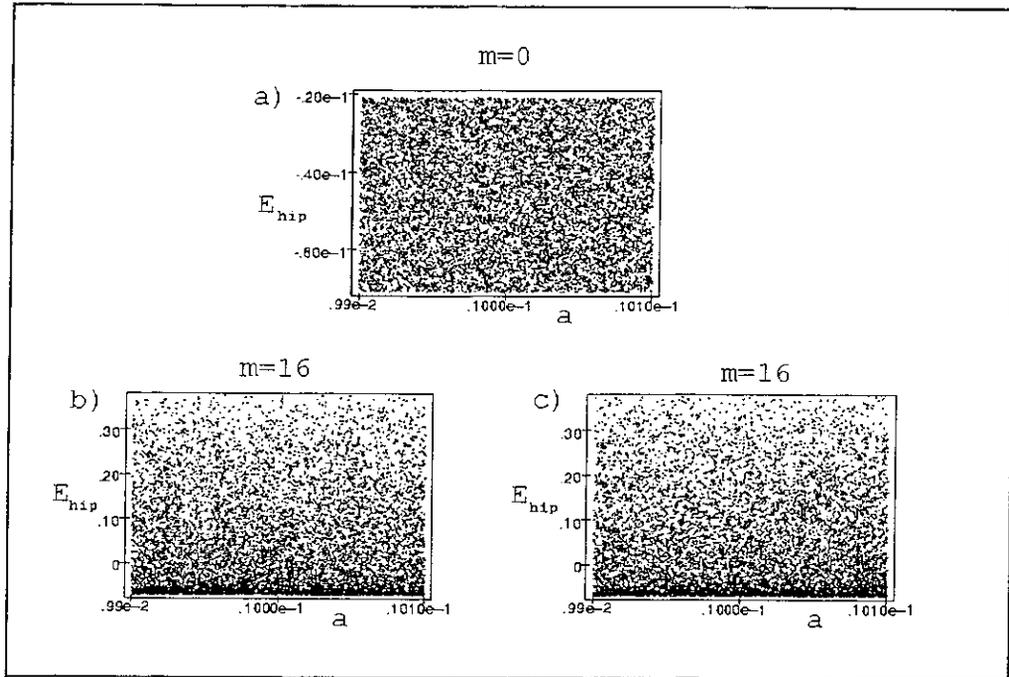


Figura 3.7: a) Gráfico mostrando um “sinal” altamente organizado resultado do cálculo da energia hiperbólica de 5000 condições iniciais tomadas em torno do ponto sobre a separatriz P_o : $(a = 0,01, p_a = 4,242216413037706, \psi = 0, p_\psi = 0)$. Utilizamos a Hamiltoniana (3.10) com $E_o = 1,499999992920542$, $m = 0$ (caso integrável) e as flutuações permitidas às condições iniciais da ordem de $R = 10^{-4}$. b) Gráfico análogo ao anterior, mas agora com $m = 16$. Observamos neste caso um sinal altamente desorganizado. c) Uma nova amostra de condições iniciais foi tomada com os dados da letra a). Um “sinal” análogo foi obtido porém, não demonstrando qualquer semelhança com o gráfico apresentado em b). Nos gráficos b) e c) as energias hiperbólicas foram multiplicadas por um fator 10^7 e no gráfico a) o fator foi 10^9 .

valores menores, enquanto tendem a rarear para valores maiores. Utilizando métodos estatísticos baseados na construção do histograma dos sinais verificamos a existência de um padrão. O método do histograma dos sinais pode ser resumidamente descrito como: dado um “sinal”, o eixo E_{hip} é dividido em um grande número de pequenos intervalos ΔE_{hip} e o histograma é dado pelo número de órbitas com energia hiperbólica dentro do intervalo $[E_{hip}^i - \frac{\Delta E_{hip}}{2}, E_{hip}^i + \frac{\Delta E_{hip}}{2}]$, quando a órbita visita a vizinhança linear do ponto crítico. Aqui E_{hip}^i é o valor da energia hiperbólica centrada no i -ésimo intervalo. Como observação, da equação de partição $E_{cr} - E_o = E_{rot} - E_{hip}$, vemos que quando $E_{rot} \approx 0$, E_{hip} atinge seu valor absoluto máximo. Assim,

$$E_{hip} \leq (E_o - E_{cr}), \quad (3.38)$$

e como vamos usar $E_o < E_{cr}$ podemos observar que para valores onde a $E_{rot} \approx 0$, E_{hip} é sempre negativa.

De modo a normalizar os histogramas, fixamos a origem desses em E_{hip}^{min} , que é o menor valor de E_{hip} obtido nos experimentos numéricos. Para podermos efetuar comparações, todos os histogramas obtidos foram normalizados fixando o pico com valor 100.

Escolhido o método estatístico ainda nos restam dois problemas: (i) usando a técnica do histograma, explicitar a influência da não-integrabilidade sobre a randomicidade do “sinal”, ou ainda, como a não-integrabilidade atua sobre partição da energia ($E_{cr} - E_o$) nos modos hiperbólico e rotacional; (ii) como eliminar a contribuição à randomicidade do “sinal” proveniente da escolha randômica dos valores iniciais das variáveis da amostra. Estes problemas serão solucionados com a fixação de certas características dos *ensembles* de condições iniciais. De exaustivos e cuidadosos experimentos numéricos que realizamos, observamos que a forma do histograma, para pequenos valores de E_{hip} , é sensível à geometria da amostra do conjunto \mathcal{D} . Desta observação surgiu a idéia de tomarmos esta geometria tal que o histograma fosse um platô para o caso integrável associado, independente dos valores dos parâmetros do sistema, dos valores iniciais das variáveis dinâmicas, apenas impondo que esta amostra deva satisfazer ao vínculo Hamiltoniano e ser homogênea e randômica. Deste modo, eliminamos a influência sobre o sinal devido à escolha randômica das variáveis e, qualquer variação na forma do histograma passa a ser atribuída apenas a não-integrabilidade do sistema.

A seguir faremos um desenvolvimento minucioso das idéias apresentadas nos parágrafos

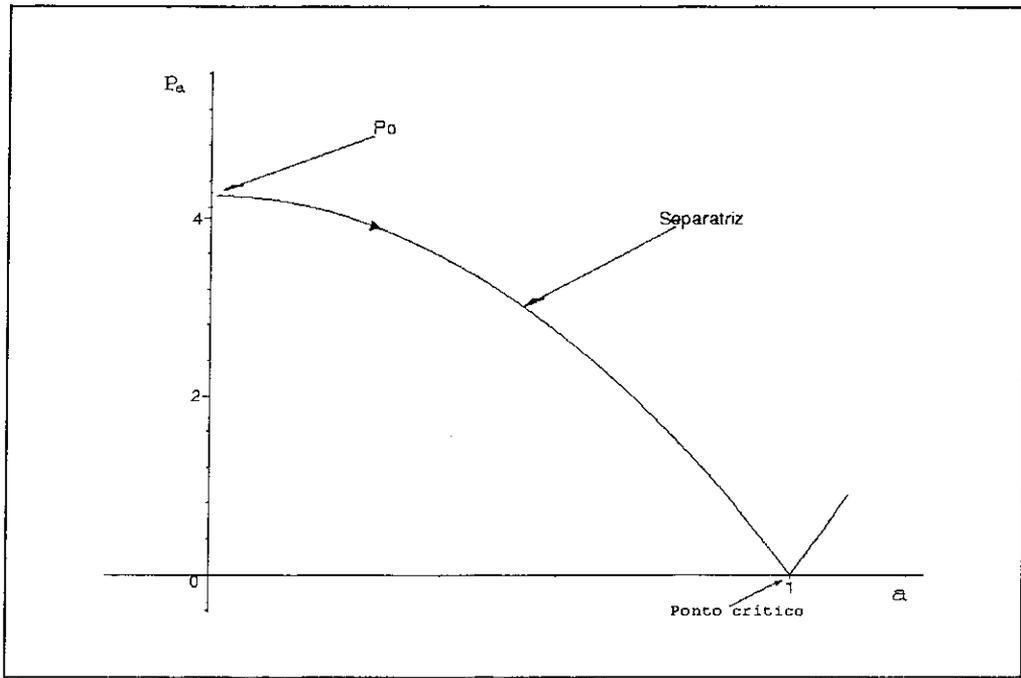


Figura 3.8: Projeção no plano (a, p_a) do centro do volume quadri-dimensional de condições iniciais em torno da separatriz P_o .

anteriores.

Vamos considerar um conjunto \mathcal{D} de condições iniciais arbitrárias o qual corresponde a universos expandindo inicialmente com energia E_o , e tal que todas as órbitas visitem uma vizinhança linear do ponto crítico. O conjunto \mathcal{D} pode ser representado por um pequeno volume 4-dimensional, onde R (em torno de 10^{-4} , 10^{-5} , ..., dependendo da ordem das flutuações que admitiremos para as condições iniciais) é o raio característico do quadri-volume \mathcal{D} , contruido em torno do ponto P_o no espaço de fase satisfazendo o vínculo Hamiltoniano. O ponto P_o pertence ao plano invariante e está localizado sobre uma das separatrizes que atinge o ponto centro-sela. Uma ilustração numérica do volume de condições iniciais tomado em torno do ponto P_o é mostrado na *figura 3.8*.

No estudo de como deveriam ser tomadas as condições iniciais verificamos que a forma do histograma, para pequenos valores da E_{hip} , é sensível à geometria da amostra do conjunto \mathcal{D} . Apesar dessa região do histograma não ser de essencial importância para nossa análise, devemos estabelecer um critério para fixar a geometria de \mathcal{D} tal que nenhuma polarização, devido à geometria do volume da amostra, manifeste-se no histograma, de modo que se houver uma função distribuição estatística, obtida através dos histograma,

esta será conectada somente com o comportamento da não-integrabilidade do sistema. Nós estabelecemos que o domínio \mathcal{D} de pontos distribuídos randômica e uniformemente no espaço de fase deve ter a geometria tal que fornecerá histogramas $\frac{\Delta N(E_{hip})}{\Delta E_{hip}}$ e $\frac{\Delta N(E_{rot})}{\Delta E_{rot}}$ para a Hamiltoniana integrável associada tendo a forma de um platô. Por Hamiltoniana integrável associada nós entendemos a Hamiltoniana do sistema numa vizinhança linear do centro-sela. A geometria de \mathcal{D} é então determinada fixando-a nesta vizinhança. Uma vez que a geometria é fixada, ela é adotada como a geometria de qualquer conjunto \mathcal{D} usado nos experimentos. No caso de uma Hamiltoniana não integrável, qualquer modificação apresentada pelo histograma, construído do mesmo conjunto de condições iniciais \mathcal{D} , se afastando da figura de um platô, reflete a atuação da não integrabilidade do sistema. Outra observação importante é que o histograma da energia rotacional é idêntico ao da energia hiperbólica a menos de uma mudança da origem. Isto se deve a partição de energia (3.30) na vizinhança linear do ponto crítico,

$$E_{rot} = E_{hip} + \Delta E, \quad (3.39)$$

onde $\Delta E = E_{cr} - E_o$. Por uma questão prática, na determinação de qual geometria do volume de condições iniciais deve ser usada para a obtenção de um platô, vamos trabalhar com as variáveis ψ e p_ψ .

Para os modelos que estamos analisando, o conjunto \mathcal{D} foi obtido observando que para a expressão da Hamiltoniana na vizinhança linear do ponto crítico (3.27), a energia rotacional é dada por (3.29),

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(p_\psi^2 + M\psi^2). \quad (3.40)$$

A convenção de um platô para $\frac{\Delta N(E_{rot})}{\Delta E_{rot}}$, gerado via dinâmica (3.27) com $\mathcal{O}(3)$ negligenciados, implica que no plano (ψ, p_ψ) \mathcal{D} deve ter a geometria de uma elipse, com semi-eixos tendo razão igual M , e populada com uma distribuição randômica e homogênea de pontos satisfazendo o vínculo (3.10) ou (3.11). Quando \mathcal{D} coincide com a vizinhança linear, o histograma associado é um platô. Quando recuamos \mathcal{D} do ponto crítico ao longo da separatriz em direção a valores menores de a , uma “cauda” aparece e o tamanho do platô diminui relativamente à “cauda” até que a forma do histograma satura numa forma limite. Um teste para a receita acima pode ser feito usando o caso integrável $m = 0$ do modelo com acoplamento conforme. Uma vez fixada a geometria de \mathcal{D} de acordo com

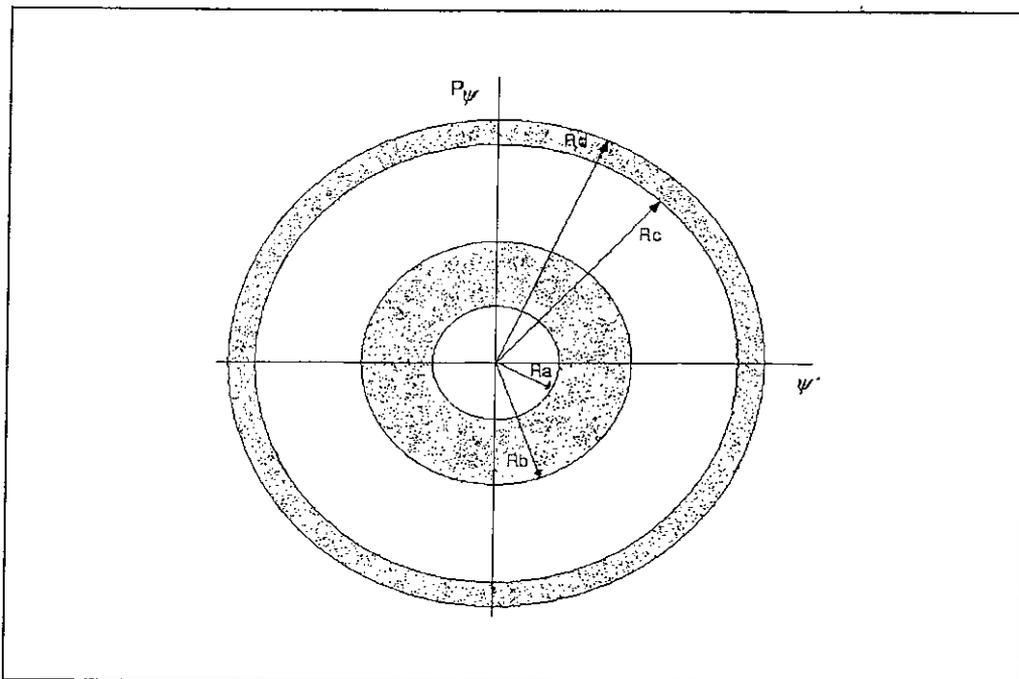


Figura 3.9: Densidade de estados constante no plano (ψ, p_ψ) onde $\psi' = \sqrt{M}\psi$.

a convenção acima, o histograma gerado pela Hamiltoniana integrável associada resulta num platô independente do ponto da separatriz em torno do qual construímos \mathcal{D} .

Observamos ainda que a expressão da E_{rot} é proporcional ao quadrado do raio de um disco no plano $(p_\psi, \sqrt{M}\psi)$, deste modo, se tomarmos as condições iniciais distribuídas randômica e homoganeamente neste disco na vizinhança linear do ponto crítico, isto é, os valores iniciais de p_ψ e ψ , e construirmos o histograma de E_{rot} , obteremos um platô. Mostraremos a seguir a veracidade desta afirmação.

A expressão da energia rotacional (3.29) é

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(p_\psi^2 + M\psi^2), \quad (3.41)$$

ou seja, no espaço de fase (p_ψ, ψ) a E_{rot} é proporcional ao quadrado do raio do disco de condições iniciais, conforme a *figura 3.9*.

Vamos calcular o número de estados (N_a) com energia rotacional entre E_{rotA} e E_{rotB} e a seguir o número de estados (N_b) com energia rotacional entre E_{rotC} e E_{rotD} . A densidade do número de “estados” (condições iniciais) é dada por

$$dN = 2\pi r \rho dr, \quad (3.42)$$

onde ρ é a densidade de estados constante, já que tomamos uma amostra distribuída

homogeneamente. Quando efetuamos a integração entre os limites R_A e R_B obtemos

$$N_a = \pi\rho(R_B^2 - R_A^2). \quad (3.43)$$

Mas $R^2 = p_\psi^2 + (M\psi)^2$ o que implica em $R^2 = 2E_{rot}$, assim,

$$N_a = 2\pi\rho(E_{rotB} - E_{rotA}). \quad (3.44)$$

Procedendo da mesma maneira para o número de estado N_b obtemos

$$N_b = 2\pi\rho(E_{rotD} - E_{rotC}). \quad (3.45)$$

Como no histograma o eixo das energias rotacionais é dividido em partes iguais ($\Delta E = E_{rot}^{i+1} - E_{rot}^i$), então $E_{rotB} - E_{rotA} = E_{rotD} - E_{rotC} = \Delta E$, assim $N_a = N_b$ caracterizando o platô. Desta forma, os valores da variáveis ψ e p_ψ devem ser escolhidos randômica e homogeneamente dentro de uma elipse. Para a determinação dos valores iniciais das variáveis a e p_a , procedemos da seguinte forma: o valor de a é gerado randomicamente através de pequenas flutuações da ordem de R , em torno de um ponto escolhido sobre a separatriz e os valores de p_a são calculados usando o vínculo hamiltoniano.

A escolha do ponto em torno do qual são tomadas as condições iniciais deve satisfazer algumas exigências básicas. Em primeiro lugar devemos tomá-lo a uma distância do ponto crítico suficiente para que os termos perturbativos, responsáveis pela não integrabilidade do sistema, atuem efetivamente na dinâmica. Deste modo, estamos garantindo a atuação destes termos na evolução das órbitas do ponto inicial ao ponto crítico, onde serão tomados os valores das variáveis para o cálculo da E_{hip} e E_{rot} . Em segundo lugar devemos tomar o cuidado de verificar se o vínculo (3.30) é satisfeito pelas órbitas na vizinhança linear do centro-sela. As órbitas que não satisfizerem este vínculo devem ser descartadas.

Vamos agora realizar alguns experimentos para ilustrarmos o conjunto de condições iniciais, o platô e o histograma. Em todos os experimentos numéricos realizados a seguir, o conjunto de condições iniciais \mathcal{D} será tomado em torno de um ponto da separatriz onde as condições acima referidas são satisfeitas. A menos que se diga o contrário, a Hamiltoniana que usamos para ilustrar os exemplos foi a do caso com acoplamento conforme (3.10). Na *figura 3.11* temos a projeção das condições iniciais no plano (p_ψ, ψ) e na *figura 3.10* o histograma associado à Hamiltoniana integrável, correspondente às energias rotacionais(platô) calculadas na primeira passagem das órbitas na região linear do centro-sela.

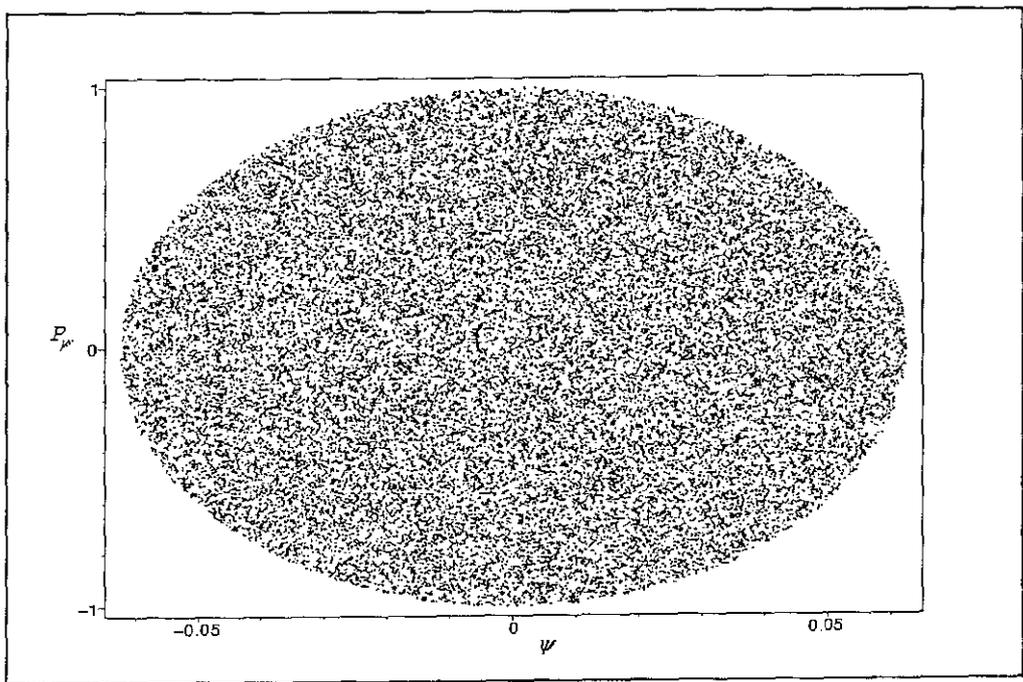


Figura 3.10: Espaço de fase das condições iniciais no plano (ψ, p_ψ) . Tomamos um conjunto \mathcal{D} de 30000 condições iniciais, randômica e homoganeamente distribuidas, para o caso $m = 16$, $R = 10^{-4}$ e $E_o = 1,499999992920542$, em torno do ponto $P_o : (a_o = 0,01, p_{a_o} = 4,242216413037706, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$. Os eixos foram multiplicados por um fator 10^4 .

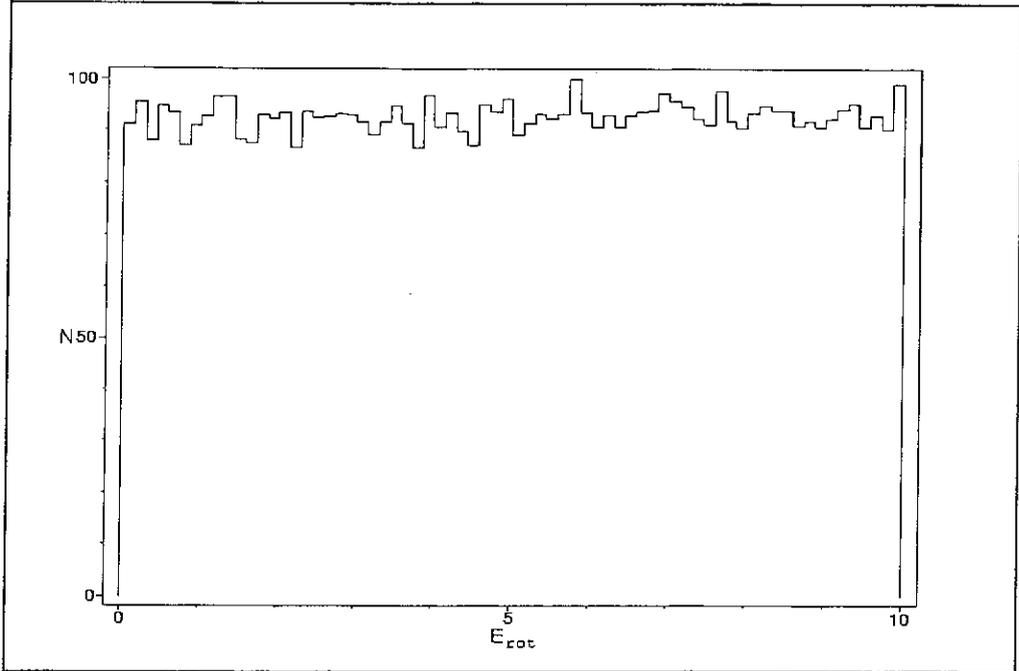


Figura 3.11: Histograma tendo a forma de um platô, gerado de um conjunto \mathcal{D} de 90000 condições iniciais com os mesmos parâmetros da *figura 3.9*. As energias rotacionais foram multiplicadas por um fator de 10^7 e o pico foi normalizado a 100.

Na *figura 3.12* temos a geometria das condições iniciais projetadas no plano (a, p_a) . Construindo o histograma com as energias hiperbólicas calculadas com os valores iniciais de a e p_a , obtemos um platô mostrado na *figura 3.13*. Como escolhemos condições iniciais cujo histograma é um platô, qualquer modificação introduzida no histograma deverá ser creditada a não-integrabilidade do sistema. Assim, descrever as modificações sofrida pelo histograma é descrever a atuação da não-integrabilidade do sistema.

Na *figura 3.14* temos o exemplo de um histograma gerado com $m = 16$, onde as energias E_{hip} foram calculados com os valores de a e p_a medidos na vizinhança linear do centro-sela. Para centro-selas, em sistemas Hamiltonianos, nós obtivemos que todos os histogramas, para um grande intervalo da E_{hip} , tem uma distribuição do tipo lei de potência

$$p(x) \sim x^{-\gamma}, \quad (3.46)$$

onde $x = E_{hip}$ e o parâmetro γ caracteriza o modelo.

Para melhor analisarmos a região ajustada pela equação (3.46), construímos o gráfico $\ln \times \ln$ deste histograma, como mostrado na *figura 3.15*. A região onde obtivemos o

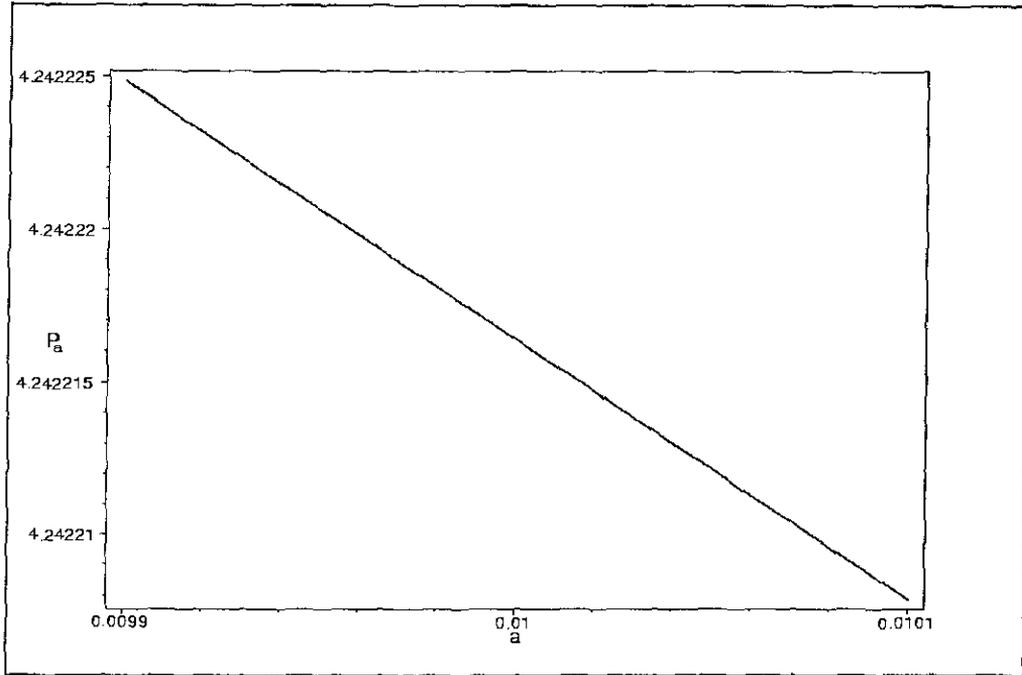


Figura 3.12: Espaço de fase das condições iniciais no plano (a, p_a) , onde tomamos um conjunto \mathcal{D} de condições iniciais com os mesmos parâmetros da *figura 3.9*.

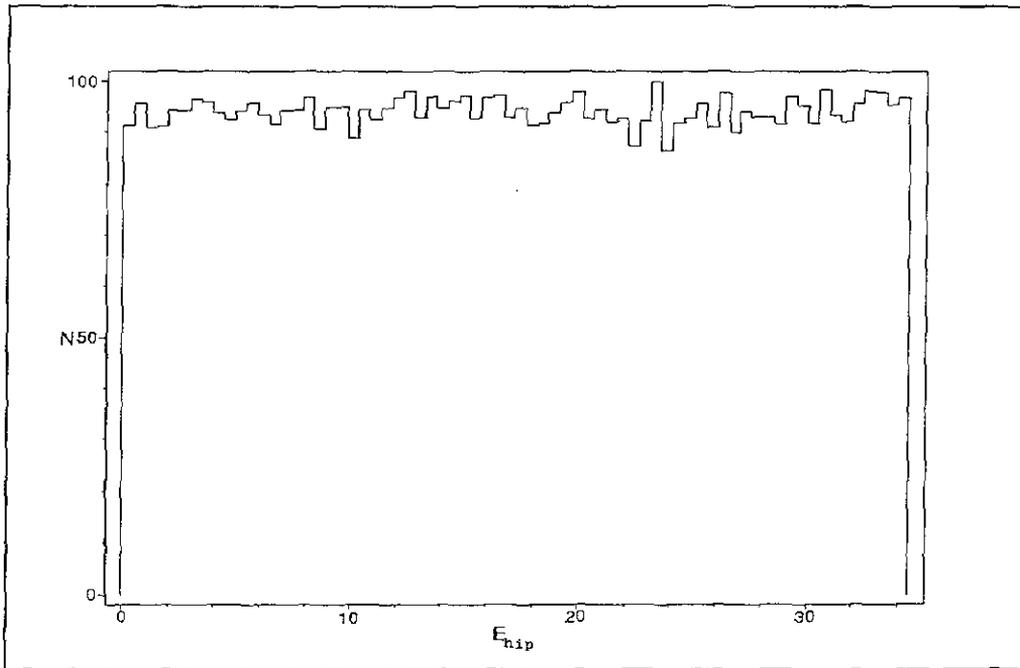


Figura 3.13: Histograma tendo a forma de um platô, gerado de um conjunto \mathcal{D} de 90000 condições iniciais com os mesmos parâmetros da *figura 3.10*. As energias hiperbólicas foram multiplicadas por um fator de 10^7 e o pico foi normalizado a 100. (Comparar com o histograma da *figura 3.11* para energias rotacionais.)

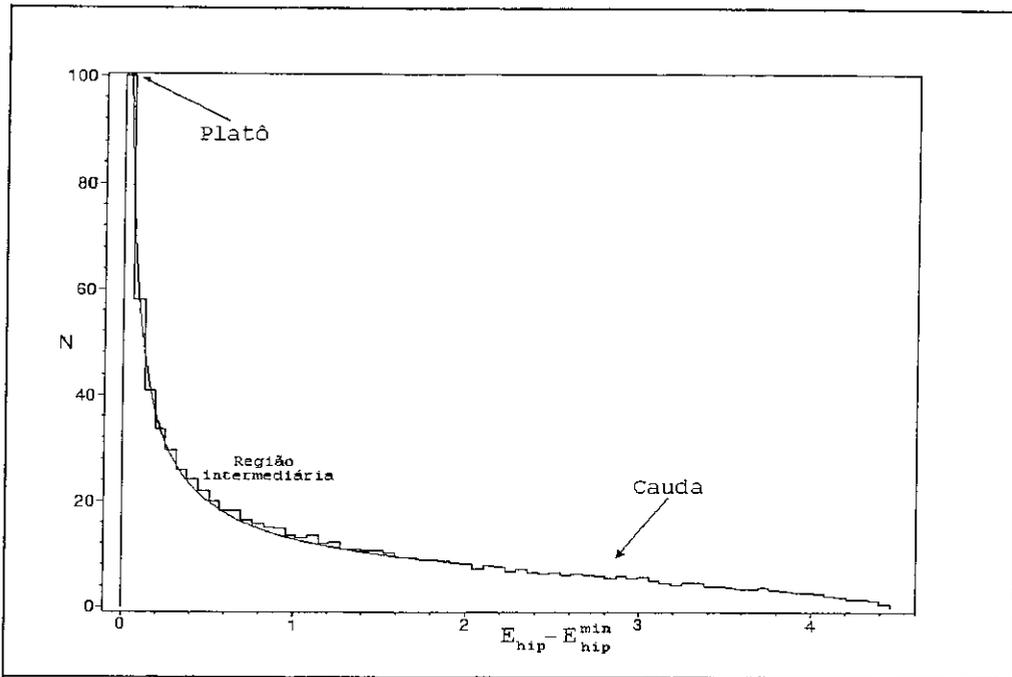


Figura 3.14: Histograma da distribuição de E_{hip} associado a 90000 condições iniciais tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas P_o : ($a_o = 0,01$, $p_{a_o} = 4,242216413037706$, $\psi_o = 0$, $p_{\psi_o} = 0$) com parâmetros: $m = 16$, $R = 10^{-4}$ e $E_o = 1,499999992920542$. A linha contínua corresponde ao melhor ajuste da distribuição $P(x) \sim x^{-\gamma}$. As energias hiperbólicas foram multiplicadas por um fator de 10^7 .

melhor ajuste pela lei de potência, aparece no gráfico $Ln \times Ln$ como uma região linear onde γ é a inclinação dessa reta. Um comentário importante é que o ajuste é obtido a um parâmetro como podemos ver do gráfico $Ln \times Ln$ do histograma, a menos de uma constante de normalização. Para o histograma, se prolongarmos ainda mais a curva de ajuste iremos observar uma discrepância na região da “cauda”. Enquanto a curva de ajuste tende a zero quando $x \rightarrow \infty$, o histograma apresenta um *cutoff* devido ao volume finito da região linear do centro-sela. Para que tivéssemos valores da energia hiperbólica tendendo ao infinito, teríamos que ter os valores de $a \rightarrow \infty$ ou $p_a \rightarrow \infty$, situação que não descreve mais a região linear e nem é fisicamente aceitável.

O presente histograma tem um excesso na “cauda”, isto é, na região de valores grandes da energia hiperbólica positiva, relativo à distribuição de Maxwell-Boltzmann correspondente. De fato, o gráfico $Ln \times Ln$ dos histogramas mostra uma região linear bem definida exibindo um comportamento anômalo em contraste com o caso da distribuição normal de Maxwell-Boltzmann. Isto não é surpreendente desde que estamos lidando com sistemas onde interações de longo alcance estão presentes, e onde conjuntos relevantes no espaço de fase são caóticos e tem uma estrutura do tipo fractal. O comportamento descrito acima é típico de “caudas” de distribuições aparecendo na estatística generalizada de Tsallis[23]-[24], que foi proposta de modo a acomodar ao menos parte dos sistemas que tem um comportamento anômalo com respeito à estatística de Boltzmann-Gibbs. Nós temos evidências que os histogramas podem ser ajustados pela curva

$$P(x) = \left(1 - \frac{a_q}{a_1} + \frac{a_q}{a_1} e^{(q-1)a_1 x}\right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad (3.47)$$

onde a_q e a_1 são constantes, implicando a associação

$$\gamma = \frac{1}{q-1}, \quad (3.48)$$

quando comparamos com (3.46). Isto situa a estatística na vizinhança do ponto crítico centro-sela dentro do contexto da termodinâmica não-extensiva com um índice não entrópico $q \neq 1$, onde o fator de Boltzmann é generalizado numa lei de potência. Em muitas destas aplicações q , e por isso γ , parece refletir alguma fractalidade do sistema[25], como nós verificaremos.

Vamos verificar agora o efeito do parâmetro m sobre as oscilações das variáveis dinâmicas quando a órbita se aproxima do centro-sela e na forma do histograma. O termo que

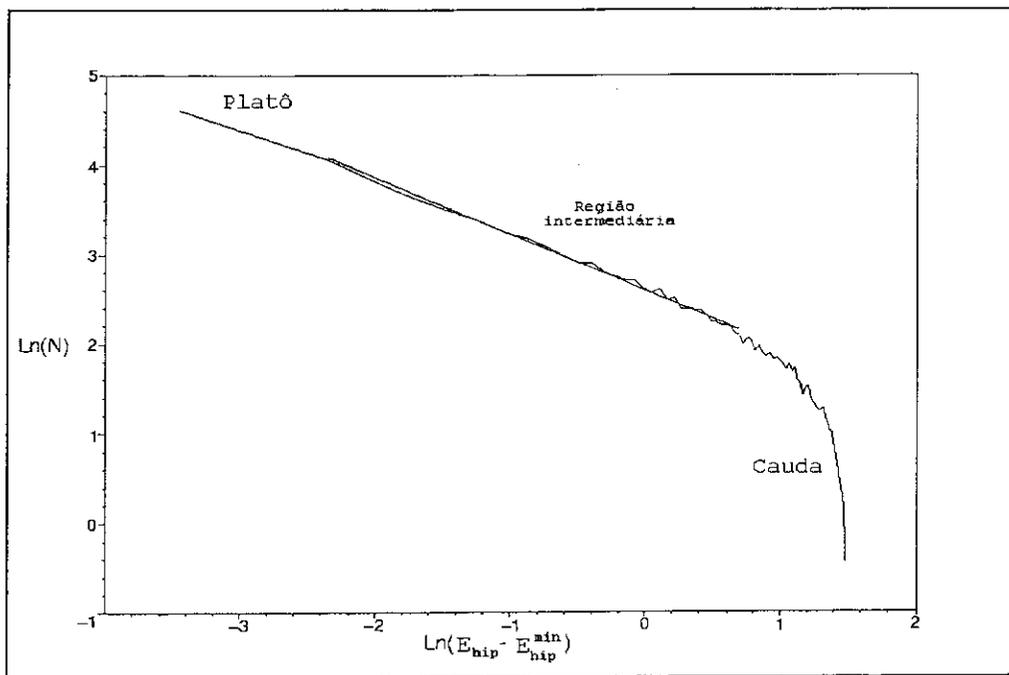


Figura 3.15: Gráfico $\text{Ln} \times \text{Ln}$ do histograma da *figura 3.14*. A linha contínua é o melhor ajuste para a região linear correspondente ao intervalo ajustado pela lei de potência no histograma da *figura 3.14*.

quebra a integrabilidade (perturbativo para m pequeno) na Hamiltoniana completa (3.10) ou (3.11) é o que contém a massa do campo escalar dado por

$$H_{per} = -\frac{1}{2}m^2 a^2 \psi^2. \quad (3.49)$$

Lembrando que os autovalores imaginários correspondentes ao movimento rotacional dependem diretamente da massa, concluímos que ocorre um aumento das oscilações no plano (ψ, p_ψ) com o aumento de m . Na *figura 3.16* observamos a variação da frequência do movimento de ψ quando a massa passa, por exemplo, de $m = 2$ para $m = 16$.

Uma outra modificação diz respeito à forma do histograma. Na *figura 3.17* construímos um histograma para energia hiperbólica com $m = 2$ e outro histograma com $m = 16$, onde usamos a Hamiltoniana (3.10). Observamos que, com o aumento de m , a não-integrabilidade atua de modo a “destruir” o platô diminuindo seu tamanho em relação à “cauda”, isto é, passamos a ter órbitas com valor da energia hiperbólica maior. Através de experimentos numéricos, verificamos que se aumentarmos a massa para qualquer valor maior que $m = 16$, não iremos verificar alterações significativas na forma do histograma. Teremos assim introduzido uma perturbação de tal ordem que estamos num regime que

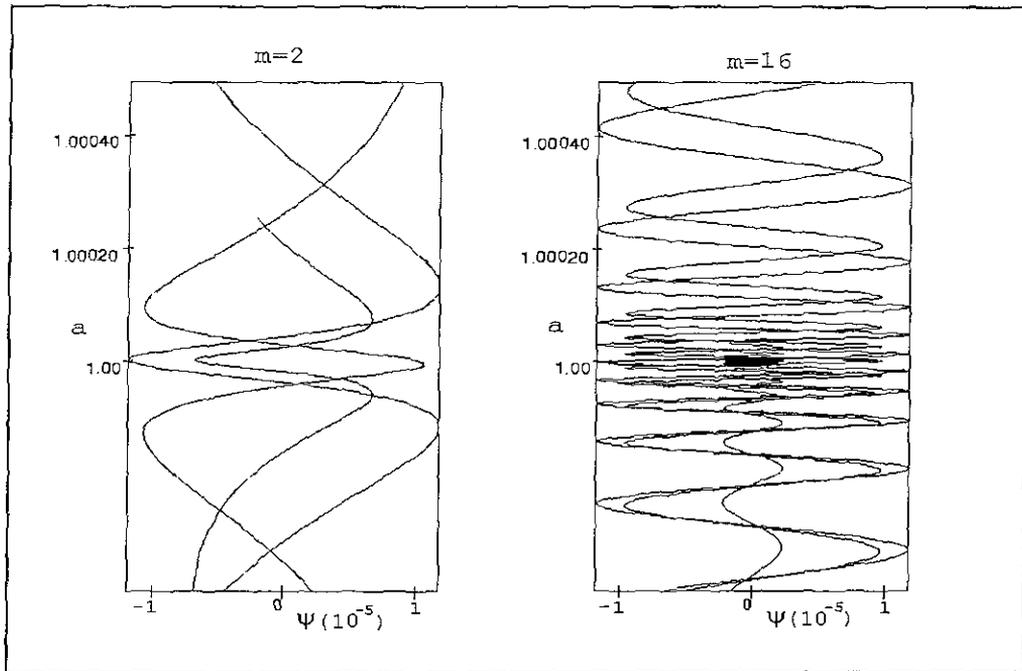


Figura 3.16: Frequência de oscilação para órbitas que visitam uma região linear do ponto crítico projetada no plano $(\psi \times a)$ com $m = 2$, gráfico à esquerda, e $m = 16$, gráfico à direita. A projeção foi feita no plano (ψ, a) para uma melhor visualização. O que podemos notar é que com o aumento da massa do campo escalar o número de oscilações tende a crescer devido a dependência dos autovalores que caracterizam o ponto crítico em relação a massa m .

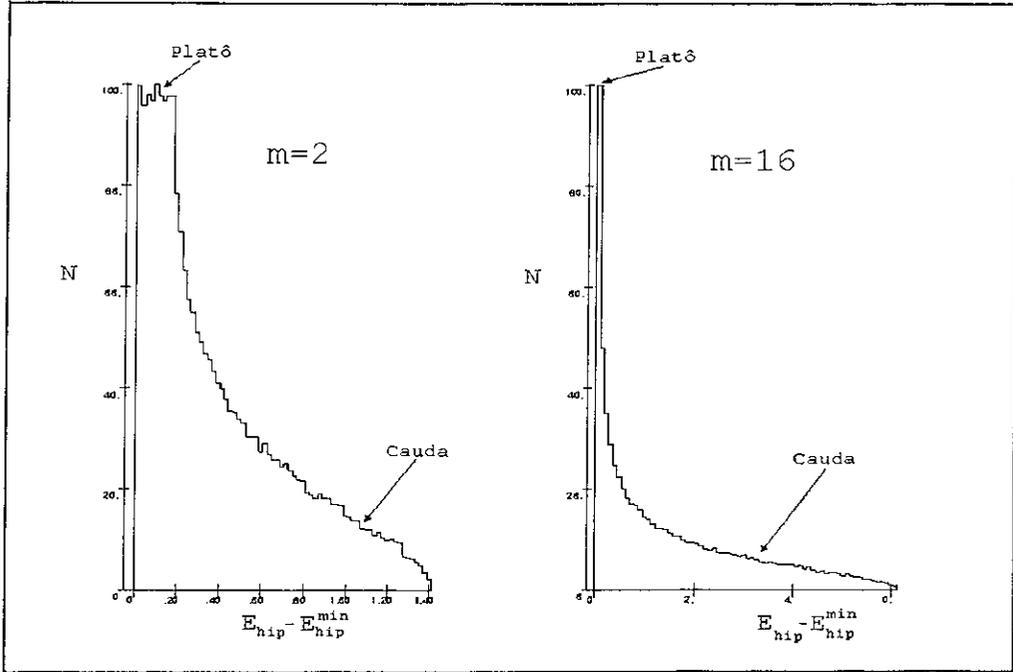


Figura 3.17: Histogramas da distribuição de E_{hip} associado a 90000 condições iniciais tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas $P_o : (a_o = 0,01, p_{a_o} = 4,242216413037706, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$ com $R = 10^{-4}$, $E_o = 1,499999992920542$. As energias hiperbólicas foram multiplicadas por um fator de 10^7 .

denominamos de alta não-integrabilidade e a forma do histograma atinge a saturação (no caso do acoplamento mínimo a saturação ocorre para $m = 8$). Essa propriedade do histograma das energias hiperbólicas ou rotacionais de não sofrer alteração para valores maiores que um determinado valor, vai ser mostrada quantitativamente através do parâmetro γ que caracteriza a curva usada para ajustar o histograma: para valores acima de $m = 16$ (para o caso do acoplamento conforme) e $m = 8$ (para o caso do acoplamento mínimo) esse parâmetro não se altera. De modo a verificarmos a modificação da forma do histograma em relação à mudança do parâmetro m , apresentamos na *figura 3.18* o gráfico $Ln \times Ln$ dos histogramas para valores de m crescentes e um outro gráfico com as inclinações correspondentes, ambos para o caso do acoplamento conforme. Na *figura 3.19* temos os gráficos para o caso do acoplamento mínimo.

Na *tabela 3.1* temos o resultado do cálculo dos parâmetros que caracterizam o ajuste do histograma através da lei de potência (3.46), onde γ_{LL} é o valor da inclinação calculada usando o gráfico $Ln \times Ln$, L é a correlação linear do ajuste e *intervalo* são os intervalos

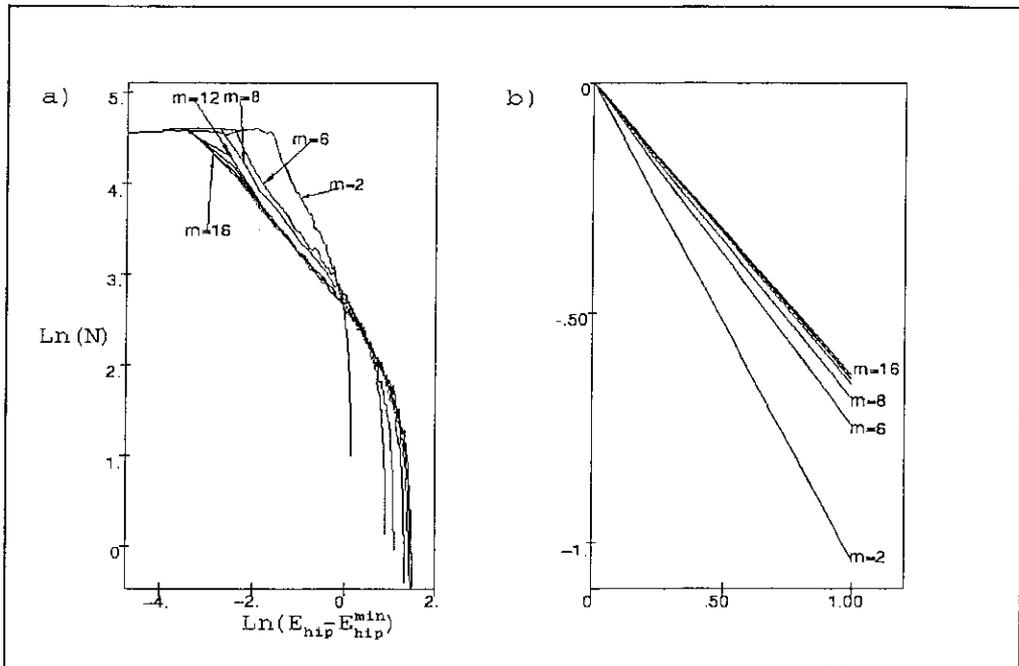


Figura 3.18: Caso conformalmente acoplado. a) Gráfico $\text{Ln} \times \text{Ln}$ dos histogramas para valores crescentes de m , $m = 2, 6, 8, 12, 14, 15, 16$. Nós vemos que a região linear aumenta quando m aumenta, e a inclinação diminui saturando num limite quando $m = 16$. b) Estas linha contínuas são o melhor ajuste para as regiões lineares.

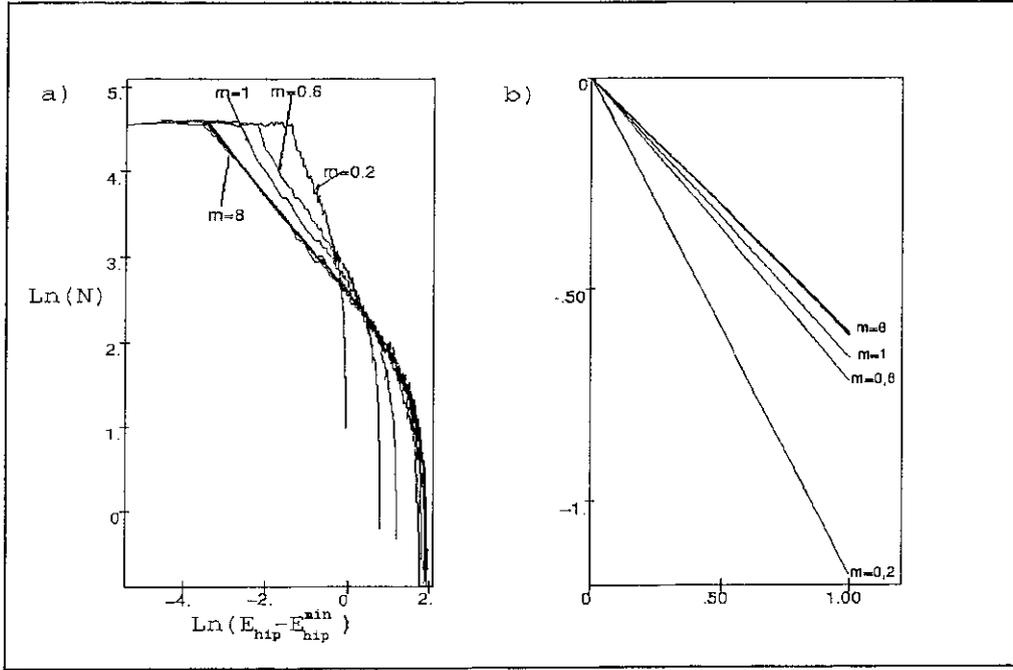


Figura 3.19: Caso minimalmente acoplado. a) Gráfico $\text{Ln} \times \text{Ln}$ para valores crescentes de m , $m = 0, 2; 0, 6; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8$. b) Linhas contínuas representando o melhor ajuste para as regiões lineares.

ajustados pela lei de potência para os histogramas constituídos por 100 intervalos (caso mínimo) e 70 intervalos (caso conforme). Observamos que a inclinação γ_{LL} da região linear (que corresponde à região ajustada pela lei de potência) diminui atingindo seu valor de saturação em $m = 16$ (para o caso conforme) e $m = 8$ (caso mínimo). Na *figura 3.20* apresentamos o gráfico $q \times m^{-0,4}$ onde foi possível obter os valores dos índices entrópicos q_{mix} e q_{eq} relevantes na descrição do formalismo necessário para tornar a Mecânica Estatística Não-Extensiva uma teoria fechada [26]. Para a região onde as condições iniciais foram tomadas, (em torno de um ponto sobre a separatriz), o sistema pode ser considerado fracamente caótico e isto sugere que devemos usar, na proposta de generalização da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, q_{mix} no que concerne a produção de entropia finita e q_{eq} para discutir a Termodinâmica de equilíbrio correspondente. Queremos lembrar que na Estatística de Boltzmann-Gibbs $q_{\text{mix}} = q_{\text{eq}} = 1$.

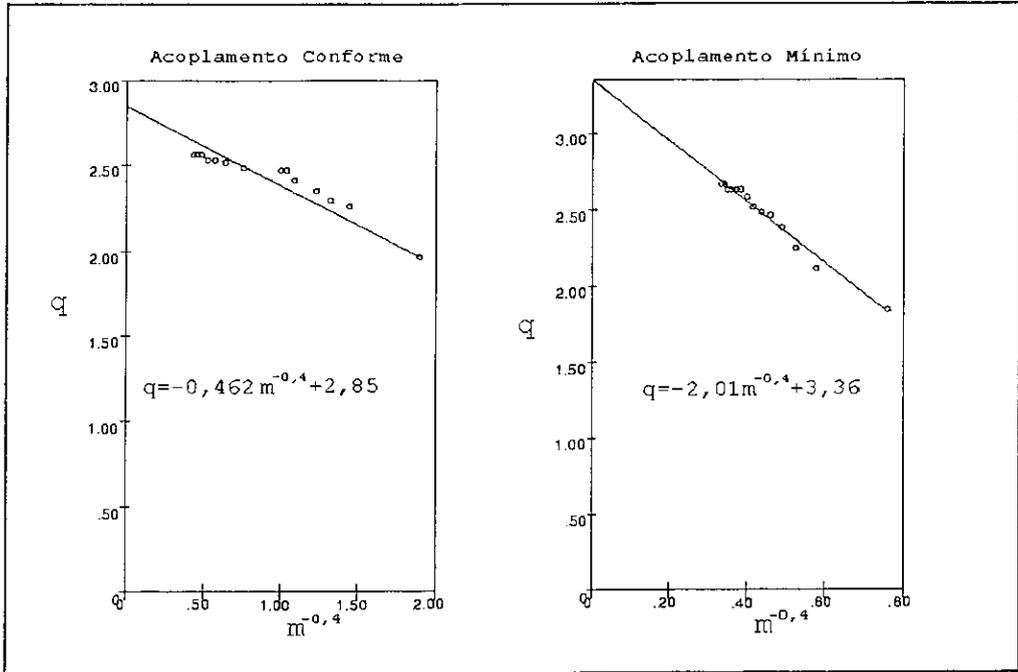


Figura 3.20: Gráficos do comportamento do parâmetro q da estatística de Tsallis em relação ao parâmetro de controle m . Como podemos observar, tanto para o acoplamento conforme quanto para o acoplamento mínimo, o valor de q tende a um limite.

Tabela 3.1

Acoplamento conforme-radiação					Acoplamento mínimo-radiação				
m	γ_{LL}	L	intervalo	q	m	γ_{LL}	L	intervalo	q
2	1,03	0,993	15-49	1,97	0,2	1,18	0,991	32-70	1,85
4	0,79	0,995	6-44	2,27	0,4	0,89	0,993	18-70	2,12
5	0,77	0,996	4-44	2,30	0,5	0,80	0,998	12-62	2,25
6	0,74	0,996	3-44	2,35	0,6	0,72	0,998	7-52	2,39
7	0,71	0,997	3-39	2,41	0,8	0,68	0,997	5-52	2,47
8	0,68	0,998	2-33	2,47	0,9	0,67	0,996	4-52	2,49
9	0,68	0,995	2-35	2,47	1	0,66	0,997	4-52	2,52
10	0,67	0,998	2-35	2,49	2	0,63	0,996	3-52	2,59
11	0,66	0,996	2-35	2,52	3	0,61	0,996	2-50	2,64
12	0,65	0,997	2-35	2,54	4	0,61	0,996	1-48	2,64
13	0,65	0,998	2-33	2,54	5	0,61	0,996	1-48	2,64
14	0,64	0,997	2-32	2,56	6	0,61	0,997	1-48	2,64
15	0,64	0,997	2-32	2,56	7	0,60	0,997	1-48	2,67
16	0,64	0,997	2-32	2,56	8	0,60	0,997	1-48	2,67

Os valores de γ_{LL} e q foram aproximados a segunda casa decimal.

Ainda com relação a variação do parâmetro m , efetuamos dois experimentos utilizando o caso com acoplamento conforme no qual podemos observar que a mudança de $m = 0$ (caso integrável) para $m \neq 0$ (caso não-integrável) induz ao chamado cruzamento dos cilindros homoclínicos associados a variedade estável e instável. O experimento consiste em escolher condições iniciais numa elipse, no plano (ψ, p_ψ) , próximo à órbita periódica instável τ e provocar uma perturbação na direção dos autovetores da sela. Evoluindo estas condições iniciais de volta no tempo, contruímos o cilindro estável e quando evoluímos estas condições adiante no tempo obtemos o cilindro instável. Estes cilindros são mostrados na *figura 3.21*. A medida que a diminui a imagem projetada da elipse original no plano (ψ, p_ψ) sofre uma deformação: a elipse é girada no sentido horário se a seção corresponde ao ramo superior (cilindro estável) e anti-horário se a seção corresponde ao ramo inferior (cilindro instável), como na *figura 3.22*. Este fato é fundamental para garantir o cruzamento dos cilindros e o conseqüente comportamento caótico devido às órbitas homoclínicas, como mencionado no capítulo *II*. Quando construímos a seção de Poincaré [27], tomando a adequada superfície ($p_a = 0$) no plano (ψ, p_ψ) , perpendicular aos cilindros, observamos o cruzamento dos cilindros estável e instável, como mostra a *figura 3.23* onde tomamos $m = 2$. Devemos salientar que neste experimento consideramos apenas o primeiro cruzamento ou interseção homoclínica. Já comentamos no capítulo *II* que a existência de um cruzamento homoclínico provoca o aparecimento de infinitos cruzamentos homoclínicos, produzindo um conjunto de infinitas órbitas homoclínicas, dando origem ao chamado entrelaçamento homoclínico de Poincaré. Este fato caracteriza de modo invariante o caos do modelo.

Realizamos dois experimentos numéricos para mostrar que a forma do histograma e o parâmetro γ , que caracteriza a curva de ajuste, independem das flutuações permitidas às condições iniciais (volume característico da amostra.) Nos dois casos usamos $m = 16$, $E_o = 1,499999992920542$ e o centro do volume da amostra tem coordenadas $P_o : (a_o = 0,01; p_{a_o} = 4,242216413037706; \psi_o = 0; p_{\psi_o} = 0)$. No primeiro caso tomamos $R = 10^{-4}$ e no segundo caso tomamos $R = 10^{-5}$. Os histogramas e os gráficos $Ln \times Ln$ estão mostrados na *figura 3.24*. Gostaríamos de comentar, observando os valores da energia hiperbólica no eixo horizontal, que a medida que aumentamos o volume (como conseqüência do aumento das flutuações), aumenta também o valor da energia hiperbólica

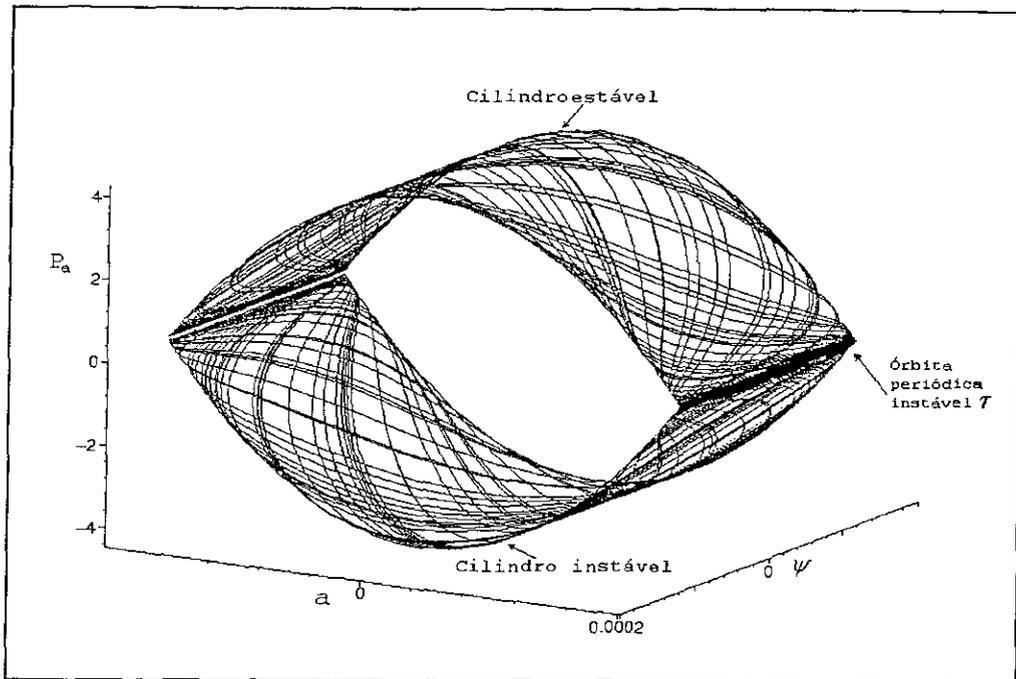


Figura 3.21: Ilustração numérica dos cilindros estável e instável originados de condições iniciais tomadas próximo à órbita periódica τ .

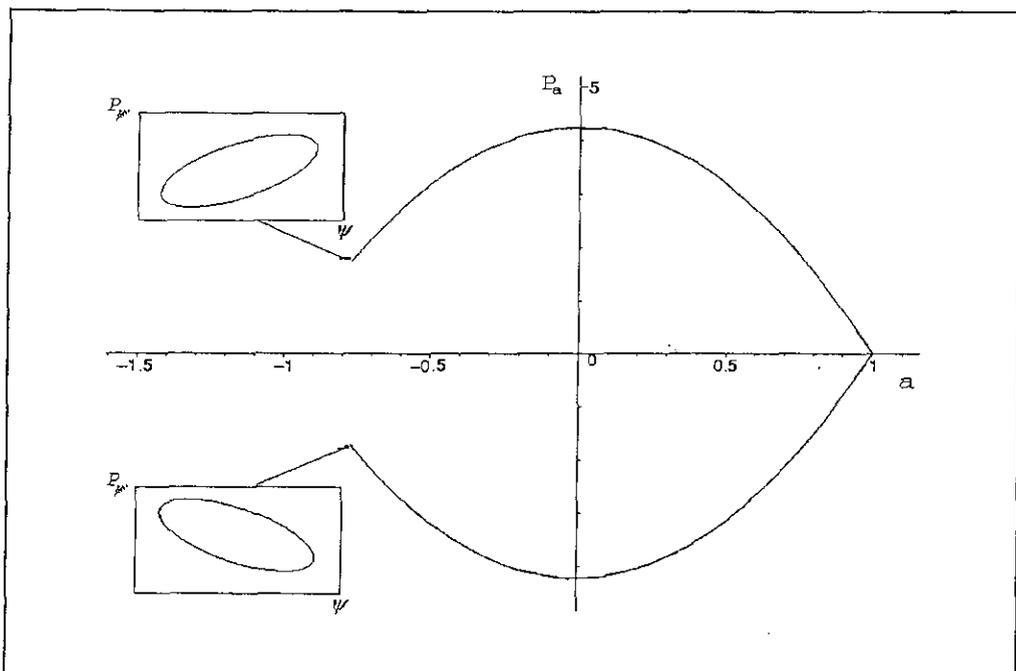


Figura 3.22: Ilustração numérica dos cilindros homoclínicos projetados sobre a subvariedade (p_a, a) . Observe que ocorre rotação em sentido contrário nos cilindros instável e estável para projeção destes no plano (p_{ψ}, ψ) quando o valor da variável a diminui.

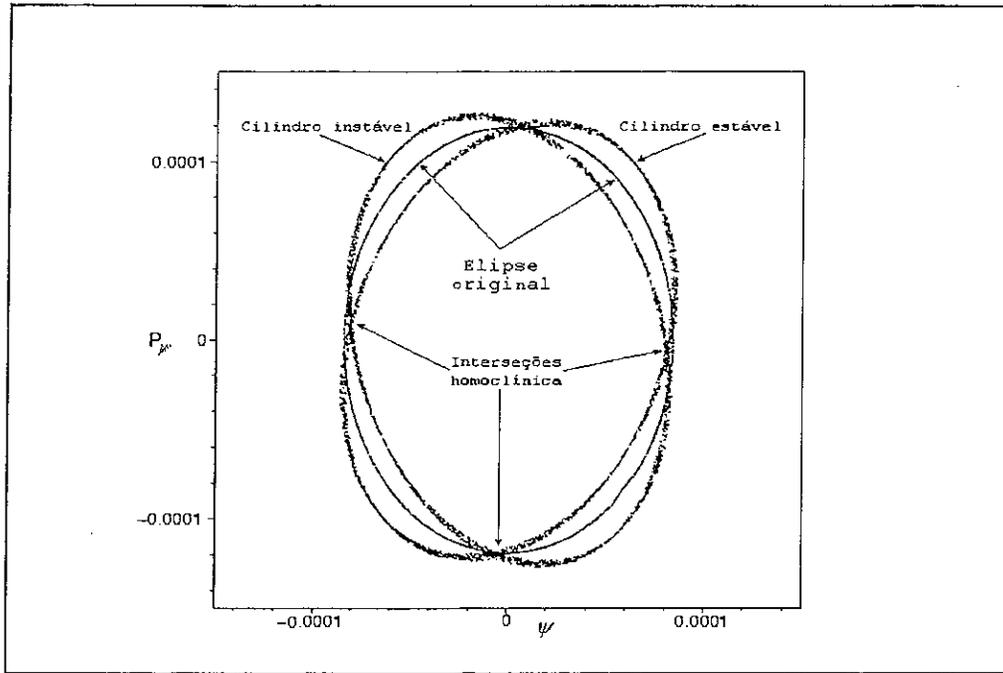


Figura 3.23: Seção de Poincaré para $m = 2$ dos cilindros estável e instável projetados no plano (p_ψ, ψ) com o plano de Poincaré tomado em $p_a = 0$.

máxima. Dos experimentos realizados verificamos que existe um valor de saturação para essa energia hiperbólica máxima. Isto se justifica observando que ao aumentarmos o volume da amostra, incorporamos órbitas que não visitam mais a região linear do ponto crítico e que precisam ser descartadas. As órbitas que escapam contribuem para o aumento da cauda do histograma, energias hiperbólicas positivas, e as órbitas que colapsam contribuem para o aumento do pico do histograma, energias hiperbólicas negativas. Assim, tanto a cauda, extremidade positiva, quanto o pico, extremidade negativa, não aumentam indefinidamente, devido ao descarte das órbitas que não visitam a região linear do centro-sela. Permanece assim, inalterada a região de interesse no histograma para estabelecimento do padrão estatístico que é a região entre os dois extremos.

Efetuamos três experimentos onde analisamos a influência da superfície de energia na forma do histograma. Em todos os experimentos tomamos $R = 10^{-4}$ e $m = 16$ com 90000 condições iniciais tomadas sobre a separatriz em torno do ponto $P_o : (a_o = 0,01, \psi_o = 0, p_{\psi o} = 0)$ e o valor de p_a calculado através do vínculo Hamiltoniano (3.10). No primeiro experimento o valor da energia foi $E_o = 1,499999936904266$ com todas as órbitas colapsando ($a \rightarrow 0$) com energias hiperbólicas negativas. Em outro

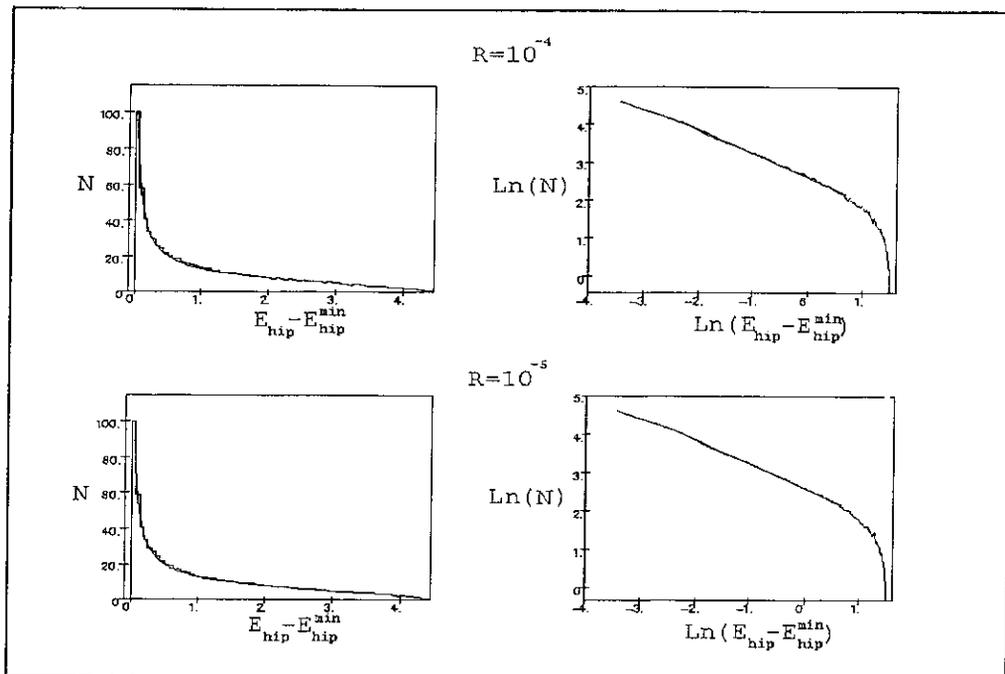


Figura 3.24: Histograma da distribuição de E_{hip} e gráfico $\text{Ln} \times \text{Ln}$ associado para 90000 condições iniciais tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas $P_o : (a_o = 0,01, p_{a_o} = 4,242216413037706, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$ com $m = 16, E_o = 1,4999999992920542$ e o raio R indicado na figura. O eixo das energias para o histograma superior ($R = 10^{-4}$) foi multiplicado por 10^7 e o inferior ($R = 10^{-5}$) por 10^8 .

experimento tomamos $E_o = 1,499999992920542$. Esta região é caracterizada pela mistura no comportamento das órbitas em relação ao estado final (escape ou colapso) do modelo. No último experimento temos $E_o = 1,499999999498813$ com todas as órbitas escapando para a inflação. Os resultados nos mostram que a forma do histograma independe da superfície de energia (veja a *figura 3.25*), reforçando ainda mais as evidências da existência de um padrão para a distribuição das energias hiperbólica e rotacional nas proximidades do ponto crítico centro-sela.

Com os resultados dos experimentos efetuados podemos afirmar que a forma do histograma independe dos parâmetros do modelo, digo, superfície de energia E_o e o raio característico R do volume da amostra. Como havíamos comentado anteriormente, nós obtivemos que todos os histogramas examinados são ajustados pela função distribuição de energia dada pela equação (3.46). Devemos enfatizar que esta função distribuição é válida para o regime de alta não-integrabilidade onde a forma do histograma atinge a saturação. Além disso, a região de ajuste da função (3.46) está compreendida entre o pico e o “cutoff” da “cauda”. O que queremos dizer é que a expressão da curva que ajusta todo histograma tem uma forma geral tal que na região entre o pico e o cutoff (região linear do gráfico $Ln \times Ln$) esta curva pode ser representada por (3.46).

Na *tabela 3.2* estão tabulados os dados obtidos para três experimentos nas três regiões de condições iniciais para diferentes comportamento do estado final (colapso, escape ou uma mistura entre estes dois estados) que aparecem na *figura 3.25*.

Tabela 3.2

Acoplamento conforme-radiação								
Região	m	ΔE	R	γ_{PAW}	χ^2	intervalo	γ_{ll}	L
Colapso	16	$10^{-7,2}$	10^{-4}	$0,64 \pm 0,05$	0,03	2-32	$0,63 \pm 0,01$	0,997
Mistura	16	$10^{-8,15}$	10^{-4}	$0,64 \pm 0,05$	0,04	2-32	$0,64 \pm 0,01$	0,997
Escape	16	$10^{-9,3}$	10^{-4}	$0,63 \pm 0,05$	0,03	2-32	$0,63 \pm 0,01$	0,998
Acoplamento mínimo-radiação								
Colapso	8	10^{-7}	10^{-4}	$0,61 \pm 0,03$	0,05	1-48	$0,61 \pm 0,01$	0,996
Mistura	8	10^{-8}	10^{-4}	$0,61 \pm 0,03$	0,04	1-48	$0,60 \pm 0,01$	0,996
Escape	8	$10^{-9,5}$	10^{-4}	$0,61 \pm 0,03$	0,04	1-48	$0,62 \pm 0,01$	0,996

Os valores de γ_{LL} e γ_{PAW} foram aproximados para segunda casa decimal.

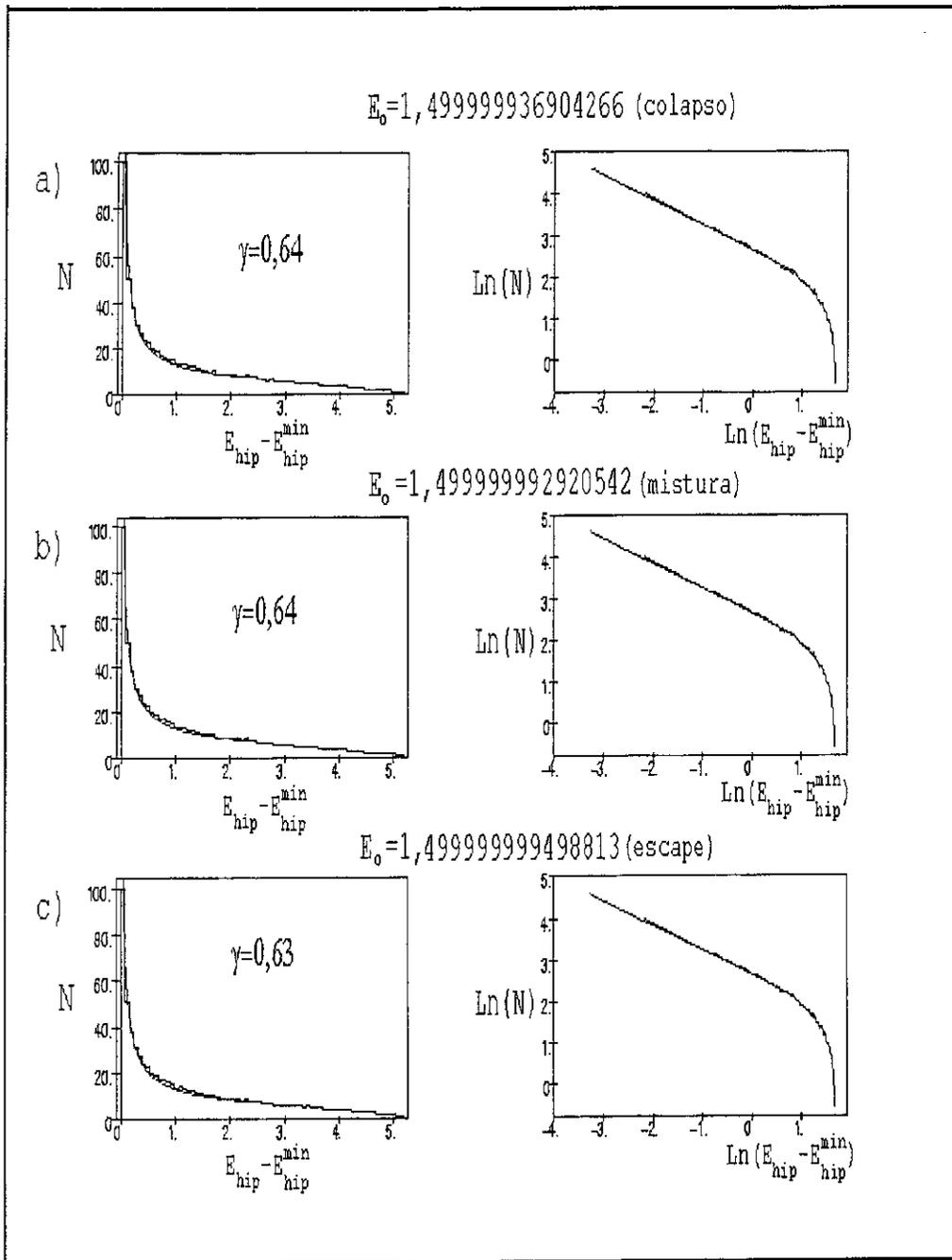


Figura 3.25: Histograma da distribuição de E_{hip} e gráfico $Ln \times Ln$ associado para 90000 condições iniciais tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas P_o : ($a_o = 0,01$, $\psi_o = 0$, $p_{\psi_o} = 0$) com $m = 16$ e raio $R = 10^{-4}$, com a superfície de energia indicada na figura e o valor de p_a obtido através do vínculo Hamiltoniano. Os histogramas são compostos por 70 intervalos e o eixo das energias foi multiplicado por: a) 10^7 , b) 10^8 , c) 10^9 .

Os valores da *tabela 3.2* foram obtidos pelo melhor ajuste da função (3.46) usando o pacote *Physics Analysis Workstation*(PAW) do CERN, negligenciando o extremo da “cauda” do histograma. Na *tabela 3.2* $\Delta E = E_{cr} - E_o$, γ_{PAW} corresponde ao valor do expoente da função (3.46) calculado pelo PAW, χ^2 é a variância desta medida, γ_{LL} é o valor do expoente calculado através da inclinação da reta que ajusta os pontos no gráfico $Ln \times Ln$, L é a correlação linear deste ajuste e *intervalo* são os intervalos ajustados pela lei de potência para um total de 70 intervalos (caso conforme) e 100 intervalos (caso mínimo).

Verificamos assim, que o parâmetro γ descreve o grau de não-integrabilidade do sistema e atinge seu valor característico de saturação para o modelo num regime de alta não-integrabilidade. Uma confirmação da validade da lei de potência é obtida do gráfico $Ln \times Ln$ do histograma. Na *figura 3.25* temos exemplos desses gráficos.

Nós agora exibiremos evidências numéricas de que o ponto crítico centro-sela atua como um espalhador caótico relacionado a natureza fractal do conjunto de condições iniciais. Para verificarmos este comportamento vamos considerar o conjunto de condições iniciais para Universos inicialmente expandindo com energia E_o tal que as órbitas visitem uma vizinhança linear do ponto crítico centro-sela.

O modelo que utilizamos para efetuar os experimentos numéricos foi o caso conformalmente acoplado com radiação. Este modelo permite-nos calcular a dimensão fractal quando permitimos as órbitas evoluírem por um longo tempo (devido a existência de recorrência destas órbitas) para condições iniciais tomadas em torno da separatriz. Nosso sistema é aberto com dois estados assintóticos identificados como atrator (1) e atrator (2) conforme a *figura 3.26*. O código destes dois estados define fronteiras fractais no conjunto de condições iniciais e estas fronteiras estão associadas precisamente às condições iniciais para a variedade de interseção homoclínica, constituída pelo conjunto de órbitas contidas simultaneamente no tubo estável e instável 2-dimensional. Há também um conjunto enumerável de órbitas periódicas de períodos arbitrariamente grandes na vizinhança de cada órbita homoclínica e que tem a órbita homoclínica como um conjunto de acumulação [7, 17]. Este conjunto de órbitas ligadas que estão na fronteira do colapso ou escape contituem o que denominamos de um *repulsor estranho*. Neste sentido, o centro-sela tem a característica de um espalhador caótico com duas saídas absolutas: i) escape para a inflação (atrator (2)) e ii) recolapso à singularidade, para Universos inicialmente

expandindo(atrator (1)).

Para ilustrar isto nós realizamos experimentos para medir a dimensão fractal da fronteira no conjunto de condições iniciais usando o método de *box-counting*⁴[20], com o código de incerteza definido por colapso-atrator (1)/escape-atrator (2). Vamos analisar duas situações que passamos a descrever a seguir. A primeira situação diz respeito ao cálculo da dimensão fractal para órbitas recorrentes. Escolhido o conjunto de condições iniciais de modo que as órbitas visitem a região linear do centro-sela, permitimos que estas órbitas evoluam por um longo tempo até que se estabeleçam em definitivo num dos estados assintóticos que são atrator (1) ou atrator(2), como mostrado na *figura 3.26*. Sob estas condições calculamos a dimensão fractal e construímos as figuras fractais do espaço de fase das condições iniciais. Na *figura 3.27* apresentamos o resultado da figura fractal para os casos $m = 1, 2, 8, 16$. Um fato que se destaca de imediato, observando as figuras, é o aparecimento das fronteiras fractais que separam duas regiões representando os estados assintóticos do modelo. Para o caso $m = 0$ não existe fractalidade na fronteira já que este caso é integrável e quando calculamos a dimensão fractal desta região encontramos um valor inteiro. No caso de $m = 1$ a fronteira já apresenta uma pequena região fractal, o que indica que a não-integralidade começa a atuar não permitindo mais prever para qual estado assintótico a órbita se dirige quando a condição inicial é tomada nesta região. Isto é devido caoticidade do sistema, como uma consequência da estrutura dos cilindros homoclínicos e seus cruzamentos transversais. Para $m = 2$ e $m = 8$ a região de fronteira fractal aumenta, e para $m = 16$ praticamente toda a região onde antes só havia solução que colapsava agora é fractal. Este aumento na fractalidade da região fronteira pode ser observado nos números que fornecem a dimensão fractal destas regiões. Para $m = 0$ temos o parâmetro de incerteza $\alpha = 1$, que de acordo com o apêndice B indica que a incerteza no resultado de uma previsão é proporcional ao tamanho do erro na medida da variável. Para $m = 2$ o valor de $\alpha = 0,26$ enquanto o valor para $m = 16$ é $\alpha = 0,15$. Como mostramos no apêndice B quanto menor o valor do parâmetro de incerteza maior a fractalidade da região de fronteira, o que pode ser confirmado pela *figura 3.27*. Na *figura 3.28* temos os gráficos utilizados para o cálculo do expoente de incerteza α nos casos $m = 2, 4, 8, 16$.

Um outro experimento que realizamos foi obter a seção de Poincaré para valores cres-

⁴No apêndice B fizemos um resumo de como calcular a dimensão fractal de um conjunto caótico.

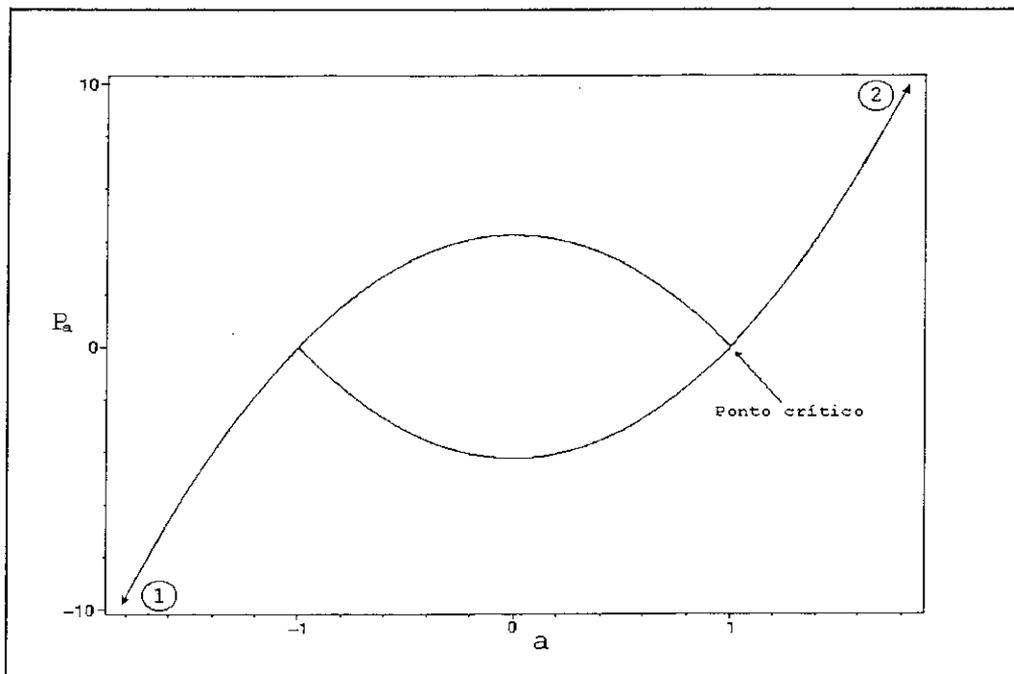


Figura 3.26: Gráfico mostrando o comportamento das órbitas em relação ao código (atrator 1 : $a \rightarrow -\infty$)/(atrator 2 : $a \rightarrow \infty$).

centes de m . Analisamos os casos $m = 0, 4; 1; 3$, com os resultados apresentados na *figura 3.29*. Devemos salientar que a construção da seção de Poincaré só é possível quando ocorre recorrência para as órbitas analisadas. Como o modelo que trabalhamos não é compacto, para valores $m \geq 4$ ocorrem órbitas que escapam para um dos dois estados assintóticos mostrados na *figura 3.26*, não permitindo a obtenção da seção de Poincaré. Porém, apenas com os valores utilizados foi possível observar o aumento na randomicidade da órbita à medida que m aumenta.

Do que analisamos podemos afirmar que, mesmo tomando condições iniciais numa região muito próximo da separatriz, para $m \neq 0$ e permitindo que as órbitas evoluam por um longo tempo, nós não somos mais capazes de prever qual o estado assintótico será atingido por estas órbitas, se atrator (1) ou atrator (2), e isto estabelece fronteiras fractais associadas com estes dois estados, sendo este fato devido ao aumento da não-integrabilidade. Neste sentido podemos afirmar que o modelo apresenta uma saída caótica para a inflação (atrator (2)) e o papel do ponto crítico centro-sela é de um espalhador caótico. Os resultados obtidos acima tem um aspecto interessante do ponto de vista dos sistemas dinâmicos, pois apresentam o comportamento do modelo em função das

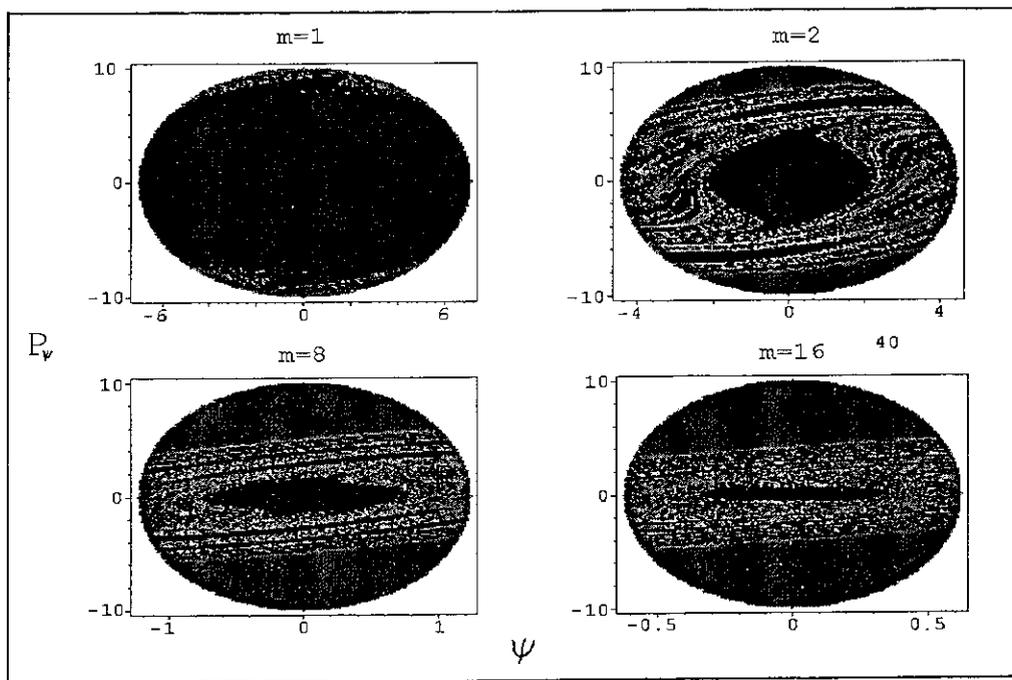


Figura 3.27: Bacias de atração para o espaço de fase das condições iniciais para pontos fixos localizados em $a = -\infty$ (região escura-atrator (1)) e $a = +\infty$ (região cinza-atrator (2)). Podemos notar que com o aumento do parâmetro m ocorre um aumento da fractalidade da região de fronteira indicando uma rota para o caos. Os eixos foram multiplicados por 10^5 .

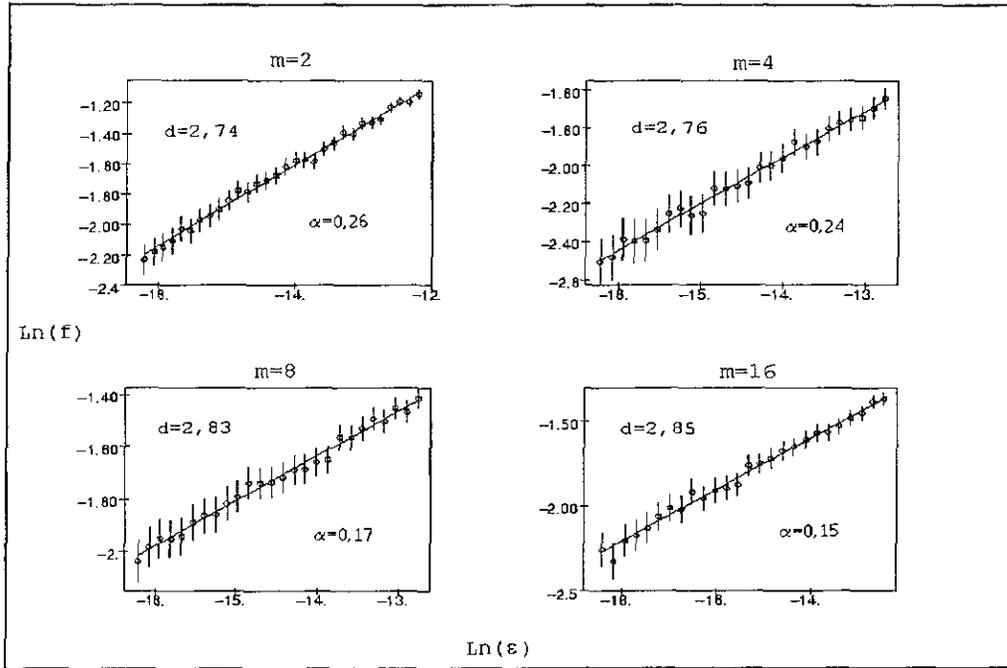


Figura 3.28: Gráfico de $f = k_o \epsilon^\alpha$ para $m = 2, 4, 8, 16$, onde ϵ é o raio de incerteza para um conjunto \mathcal{D} de 5000 condições iniciais e α é o parâmetro de incerteza para um experimento do cálculo da dimensão fractal, $d = N - \alpha$ ($N = 3$), com órbitas recorrentes. f é a fração de \mathcal{D} de condições iniciais incertas com relação aos dois atratores da figura 3.25. O melhor ajuste nos fornece os valores de α apresentados na figura onde usamos o valor de $E_o = 1,499999992920542$ para a superfície de energia. O ponto em torno do qual foram tomadas as condições iniciais foi $P_o : (a_o = 0,01, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$ com $R = 10^{-4}$ e o valor de p_a obtido através do vínculo Hamiltoniano. A barra sobre o círculo é proporcional ao erro da medida para o intervalo considerado.

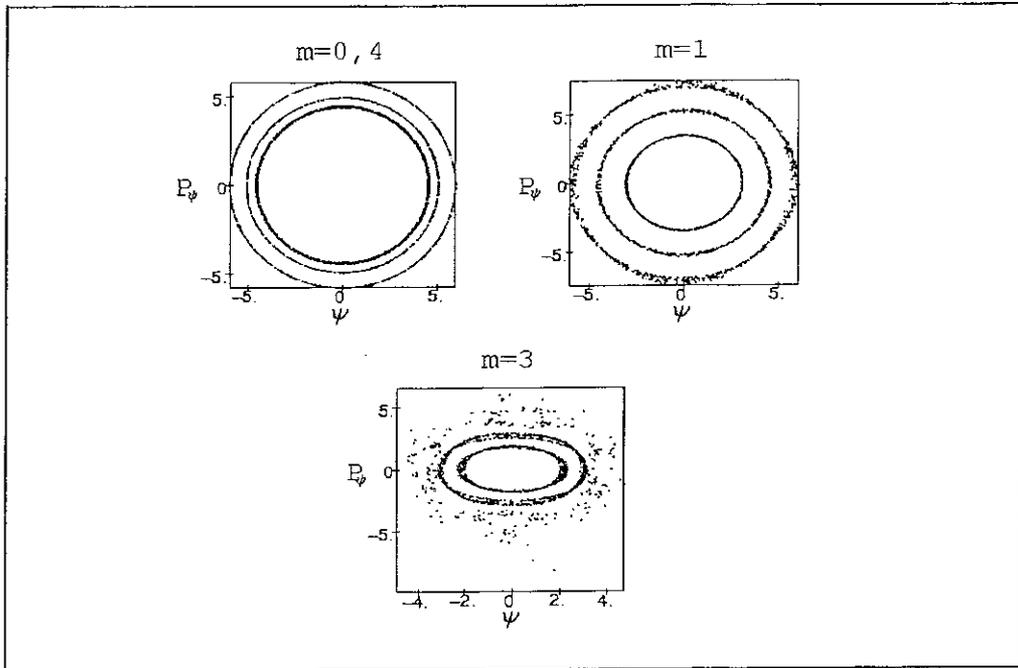


Figura 3.29: Seção de Poincaré para m crescente. Utilizamos 4 condições iniciais para cada experimento no qual escolhemos o plano de Poincaré em $a = 0$. As condições iniciais foram tomadas em torno de um ponto sobre a separatriz de coordenadas P_o : $(a_o = 0,01, p_{a_o} = 4,242216400634557, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$ com $E_o = 1,499999984151068$ e $R = 10^{-4}$. Podemos observar que a medida que m aumenta, órbitas começam a ter maior liberdade para movimentar-se pelo espaço de fase. Isto quer dizer que não se localizam mais sobre os cilindros, resultado do aumento da perturbação.

flutuações nas condições iniciais. Porém, do ponto de vista físico, apresentam dificuldades, já que as órbitas evoluem passando pela singularidade ($a = 0$) antes de recolapsarem. Diante deste fato, passa a ser importante a análise do que ocorre com o sistema na primeira passagem pela região linear do ponto crítico centro-sela, já que este caso é mais realista. É o que faremos a seguir.

A segunda situação que analisamos foi o cálculo da dimensão fractal quando da primeira passagem das órbitas pela região linear do centro-sela. Este experimento é uma tentativa de estabelecer uma relação entre γ e o α para estes experimentos. Como já comentamos, este experimento é fisicamente aceitável pois não temos que lidar com a singularidade. Por outro lado, não temos mais o conceito de incerteza padrão medido pelo parâmetro α , que implica em permitir a evolução das órbitas por um longo tempo. Mesmo assim ainda é possível definir uma incerteza associada ao código colapso/escape e à saída caótica para a inflação, e deste modo calcular o valor de α obtendo ainda uma relação numérica com o expoente γ da lei de potência (3.46). Na análise do comportamento dos histogramas em relação ao parâmetro m , observamos que, com o aumento deste, a não-integrabilidade aumenta sua atuação provocando uma diminuição do platô em relação a “cauda”, com conseqüente diminuição do valor do expoente γ , até o histograma atingir sua forma saturada em um regime que denominamos de alta não-integrabilidade. O que gostaríamos de saber é se existe alguma relação entre a destruição do platô (que representa o caso integral no histograma), e conseqüente diminuição do valor de γ , com o aumento da incerteza (representada por α) na determinação do estado assintótico do modelo quando o valor de m é aumentado. Para os experimentos, vamos empregar o modelo cosmológico com a gravitação acoplada minimalmente com o campo escalar. Após vários experimentos numéricos observamos que para os caso integrável temos $\alpha = 1$ independentemente da geometria da amostra, quando utilizamos o resultado da primeira passagem pelo ponto centro-sela e quando permitimos uma perturbação mais geral nas condições iniciais. Com perturbação mais geral queremos dizer que todas as variáveis (a, p_a, ψ, p_ψ) serão perturbadas. Isto é análogo a tomarmos, no caso dos histogramas, uma amostra mais geral, isto é, homogênea e randômica. Os resultados indicam que para valores do parâmetro m relativamente baixos (abaixo do valor que leva a forma do histograma à saturação), o tamanho da “boa” região para o cálculo de α (região linear) diminui a ponto de produzir

uma medida imprecisa que deve ser desconsiderada. Uma medida confiável para α só é possível quando temos uma região de tamanho considerável. Isto ocorre para valores de $m \geq 5$, atingindo α seu valor de saturação para $m = 8$. Comportamento idêntico apresenta o parâmetro γ em relação ao histograma. Analisando a *tabela 3.1* observamos que para valores baixos de m o valor de γ apresenta um grande variação, e tende a se estabilizar com o aumento de m , saturando em $m = 8$. Na *figura 3.30* apresentamos o gráfico através do qual calculamos o parâmetro de incerteza α e na *tabela 3.3* apresentamos os valores obtidos para os dois modelos considerados.

Tabela 3.3

Acoplamento conforme-irradiação				Acoplamento mínimo-irradiação			
m	ΔE	R	α	m	ΔE	R	α
16	$10^{-8,15}$	10^{-4}	$0,25 \pm 0,01$	8	10^{-8}	10^{-4}	$0,26 \pm 0,01$

Os valores de α foram aproximados a segunda casa decimal.

Destes experimentos concluímos que, como o expoente de incerteza α está ligado à perda de habilidade de prevermos o estado final do modelo, e o parâmetro γ apresenta comportamento que está intimamente relacionado a α quando m aumenta e o sistema atinge o regime de alta não-integrabilidade, o histograma traduz o padrão caótico estabelecido pelo centro-sela para órbitas que visitam a região linear. Com estes experimentos acreditamos que possuímos fortes evidências para afirmar que o centro-sela atua como um espalhador caótico para órbitas que evoluem próximo a separatriz permanecendo por um curto período em sua região linear, e que a distribuição dos valores das energias dos modos rotacional e hiperbólico segue um padrão, descrito por uma lei de potência, que independe dos aspectos do modelo, como já mostramos. Do comportamento de α e γ , principalmente em relação à variação de m , verificamos que para todos os casos analisados a soma destes parâmetros, num regime de alta não-integrabilidade, está compreendida no intervalo

$$0,9 \leq \gamma + \alpha \leq 1,1, \quad (3.50)$$

o que parece reforçar ainda mais o caráter universal da lei de potência (3.46) e a ligação de γ com a fractalidade do sistema.

Apresentamos a título de complementação os resultados de experimentos numéricos para os modelos com acoplamento conforme e mínimo com poeira. Na *figura 3.31* temos

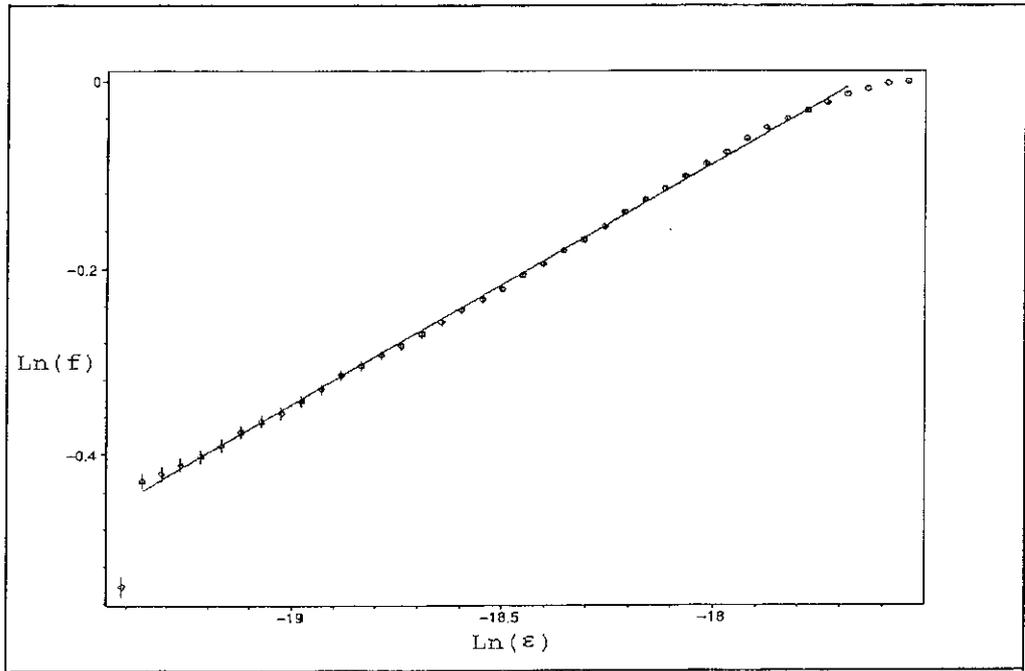


Figura 3.30: Gráfico de $f = k_o \epsilon^\alpha$ para $m = 8$ para o caso minimalmente acoplado, onde ϵ é o raio de incerteza para um conjunto \mathcal{D} de 5000 condições iniciais e α é o parâmetro de incerteza. O melhor ajuste nos fornece o valor de $\alpha \approx 0,26$, onde usamos o valor de $E_o = 1,4999999900000000$ para a superfície de energia. O ponto em torno do qual foram tomadas as condições iniciais foi $P_o : (a_o = 0,4, p_{a_o} = 3,563818160344324, \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0)$ com $R = 10^{-4}$. A barra sobre o círculo é proporcional ao erro da medida para o intervalo considerado. O que denominamos de “boa” região para o cálculo de α é a região linear ajustada pela reta. Esta região tende a zero quando m diminui impedindo uma medida confiável do valor de α .

os histograma e os gráficos $Ln \times Ln$ para os dois modelos. Também neste casos os histogramas atingem uma forma saturada para valores de $m = 8$ (no caso do acoplamento mínimo) e $m = 16$ (no caso do acoplamento conforme.) Na *tabela 3.4* apresentamos os resultados do cálculo dos parâmetros que descrevem os histogramas.

Tabela 3.4

Acoplamento conforme-poeira								
m	ΔE	R	γ_{PAW}	χ^2	intervalo	γ_{II}	L	α
16	$10^{-8.6}$	10^{-4}	$0,84 \pm 0,06$	0,041	8-41	$0,83 \pm 0,03$	0,996	$0,29 \pm 0,01$
Acoplamento mínimo-poeira								
8	10^{-8}	10^{-4}	$0,63 \pm 0,03$	0,049	1-48	$0,61 \pm 0,02$	0,998	$0,35 \pm 0,01$

Os valores de γ_{LL} e γ_{PAW} foram aproximados a segunda casa decimal.

Dos resultados de todos os experimentos numéricos realizados com conjuntos de amostras distintas randômica e uniformemente distribuídas \mathcal{D} , onde sua geometria é descrita como no texto, as seguintes propriedades características dos histogramas foram verificadas numericamente, no regime de alta não-integrabilidade(saturação):

1. a forma do histograma é invariante de escala, isto é, independe do raio R da amostra \mathcal{D} das condições iniciais, a menos de uma mudança de intervalo;
2. a forma do histograma independe do parâmetro ($\Delta E = E_{cr} - E_o$) que permite-nos caracterizar se as órbitas são predominantemente colapso ou escape, após visitar a vizinhança linear do centro-sela;
3. a forma do histograma independe, a partir do valor de saturação, do parâmetro m ;
4. dentro dos erros estatísticos, o histograma é ajustado por uma distribuição do tipo $P(x) \sim x^{-\gamma}$ onde o valor de γ corresponde ao melhor ajuste ao histograma e é o mesmo para todas os histogramas associadas a Hamiltonianas analisada independente de m , ΔE e escalas;
5. dentro do erros estatísticos $0,9 \leq \gamma + \alpha \leq 1,1$;
6. o ponto crítico centro-sela atua como um espalhador caótico induzindo uma saída caótica para a inflação.

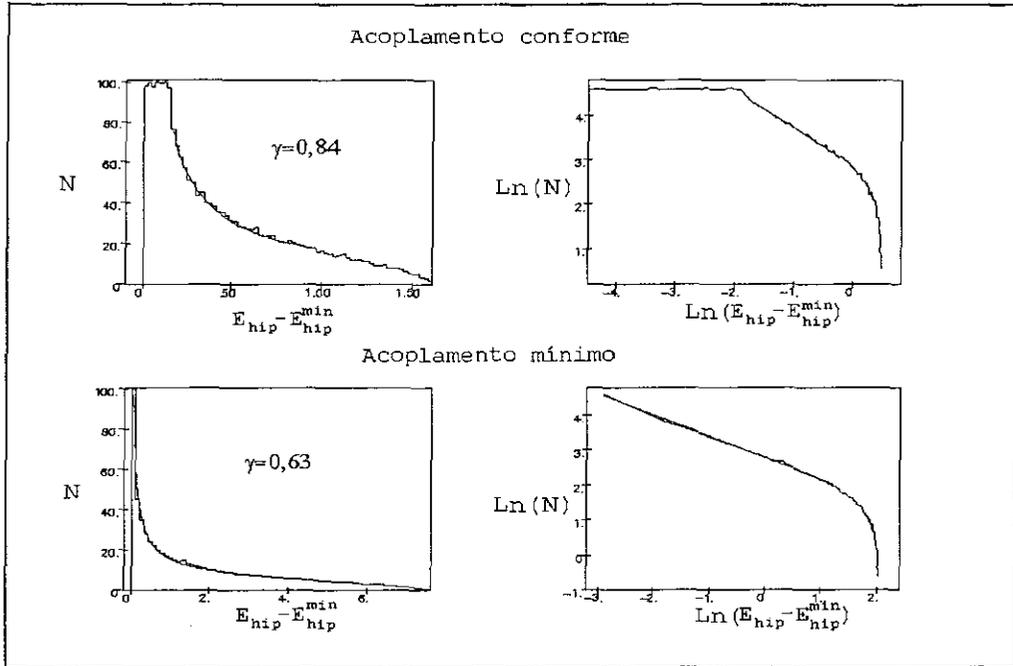


Figura 3.31: Histogramas da distribuição de E_{hip} e gráfico $Ln \times Ln$ associado para 90000 condições iniciais tomadas em torno de um ponto da separatriz. Para o caso conforme $P_o : (a_o = 0,3, p_{a_o} = 2,014249237546638), \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0, m = 16, R = 10^{-4}, E_o = 1,999999997488114$ e o eixo das energias foi multiplicado por 10^9 . Para o caso mínimo $P_o : (a_o = 0,4, p_{a_o} = 2,036467518032144), \psi_o = 0, p_{\psi_o} = 0, m = 8, R = 10^{-4}, E_o = 1.99999999$ e o eixo das energias foi multiplicado por 10^8 .

No próximo capítulo iremos mostrar que os fatos enumerados acima são comuns a outros sistemas Hamiltonianos que possuem um ou mais pontos críticos centro-sela no seu espaço de fase, de modo que a distribuição estatística $P(x) \sim x^{-\gamma}$ aparece como uma propriedade universal deste ponto crítico. w

Capítulo 4

Modelo Bianchi IX Axissimétrico

Neste capítulo vamos analisar um modelo do tipo Bianchi IX axissimétrico, com dois fatores de escala distintos, tendo como conteúdo material um fluido perfeito e constante cosmológica. O modelo pode ser pensado como descrevendo o papel da anisotropia no estágio inicial da inflação, onde a constante cosmológica Λ faz o papel da energia do vácuo do campo de *inflaton*. A ocorrência da constante cosmológica e da anisotropia são suficientes para produzir uma dinâmica caótica na evolução do modelo, devido à presença de um ponto crítico centro-sela no espaço de fase do sistema. Analogamente aos modelos descritos no capítulo anterior, na vizinhança do centro-sela o espaço de fase apresenta a estrutura de cilindros emanando das órbitas periódicas instáveis. A não-integrabilidade do sistema implica que a extensão dos cilindros longe desta vizinhança, tem uma estrutura complicada devido aos infinitos cruzamentos transversais. Aqui não somente vamos examinar a estatística de órbitas na vizinhança do ponto crítico, mas também algumas consequências físicas do movimento oscilatório, nesta vizinhança, antes de o Universo entrar na fase inflacionária. Na vizinhança do centro-sela ocorre uma fase de oscilações na qual o fator de escala permanece um tempo arbitrariamente longo dependendo das condições iniciais da órbitas. Nós mostraremos que estas oscilações fornecem um mecanismo de ressonância paramétrica para a amplificação de um espectro selecionado de comprimentos de onda de perturbações escalares inhomogêneas nos modelos.

Consideramos um modelo anisotrópico do tipo Bianchi IX (axissimétrico) caracterizado por dois fatores de escala, $A(t)$ e $B(t)$, com elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)(w^1)^2 - B^2(t)[(w^2)^2 + (w^3)^2], \quad (4.1)$$

onde t é o tempo cosmológico e (w^1, w^2, w^3) são 1-formas invariantes para o modelo tipo Bianchi IX satisfazendo $dw^i = \epsilon^{ijk}w^j \wedge w^k$. O conteúdo material é assumido ser um fluido perfeito com campo de velocidade $U^\mu = \delta_0^\mu$ no sistema de coordenadas comóvel. Sem perda de generalidade vamos nos restringir ao caso de poeira; o tensor momento-energia do fluido é então descrito por

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu, \quad (4.2)$$

onde ρ é a densidade do fluido como medida pelos observadores comóveis. Em todo o capítulo adotamos $8\pi G = 1 = c$.

As equações de Einstein

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

para a métrica (4.1) e o tensor momento-energia (4.2), são equivalentes às equações Hamiltonianas geradas pelo vínculo Hamiltoniano [5]

$$H(A, B, p_A, p_B) = \frac{p_A p_B}{4B} - \frac{A p_A^2}{8B^2} + 2A - \frac{A^3}{2B^2} - 2\Lambda A B^2 - E_o = 0, \quad (4.4)$$

onde p_A e p_B são os momentos canonicamente conjugados a A e B , respectivamente. E_o é uma constante de integração que aparece das identidades de Bianchi, $2\rho A B^2 = E_o$, e pode ser interpretada como a energia total do fluido perfeito. Para introduzir coordenadas do tipo Moser definidas no capítulo 1, vamos efetuar a transformação canônica

$$A = a(b+1)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.5)$$

$$B = \frac{a}{(b+1)^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.6)$$

$$p_A = \frac{1}{3} \frac{p_a}{(b+1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{p_b (b+1)^{\frac{1}{3}}}{a}, \quad (4.7)$$

$$p_B = \frac{2}{3} (b+1)^{\frac{1}{3}} p_a - \frac{(b+1)^{\frac{4}{3}} p_b}{a}, \quad (4.8)$$

obtendo a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{24} \frac{p_a^2}{a} - \frac{3}{8} \frac{(b+1)^2}{a^3} p_b^2 + 2a(b+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} a(b+1)^{\frac{8}{3}} - 2a^3 \Lambda - E_o = 0, \quad (4.9)$$

onde p_a e p_b são os momentos canonicamente conjugados a a e b , respectivamente.

A dinâmica é governada pelas equações de Hamilton, obtidas através do vínculo Hamiltoniano (4.9) e são dadas por

$$\dot{a} = \frac{1}{12} \frac{p_a}{a}, \quad (4.10)$$

$$\dot{p}_a = -\frac{9}{8} \frac{(b+1)^2 p_b^2}{a^4} + \frac{1}{24} \frac{p_a^2}{a^2} - 2(b+1)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} (b+1)^{\frac{8}{3}} + 6\Lambda a^2, \quad (4.11)$$

$$\dot{b} = -\frac{3}{4} \frac{(b+1)^2 p_b}{a^3}, \quad (4.12)$$

$$\dot{p}_b = \frac{3}{4} \frac{(b+1) p_b^2}{a^3} - \frac{4}{3} (b+1)^{-\frac{1}{3}} a + \frac{4}{3} (b+1)^{\frac{5}{3}} a, \quad (4.13)$$

onde $(\dot{\cdot})$ representa a derivada em relação ao tempo cosmológico.

Na região finita do espaço de fase o sistema dinâmico tem um ponto crítico que, para $\Lambda = \frac{1}{4}$ e para a região física $a > 0$, tem coordenadas

$$p_{a_o} = 0, \quad a_o = 1, \quad p_{b_o} = 0, \quad b_o = 0, \quad (4.14)$$

correspondendo ao Universo estático de Einstein.

A linearização do sistema em torno do ponto crítico resulta

$$\delta\dot{a} = \frac{1}{12}\delta p_a, \quad (4.15)$$

$$\delta\dot{p}_a = 3\delta a, \quad (4.16)$$

$$\delta\dot{b} = -\frac{3}{4}\delta p_b, \quad (4.17)$$

$$\delta\dot{p}_b = \frac{8}{3}\delta b, \quad (4.18)$$

onde $\delta a = a - 1$, $\delta p_a = p_a$, $\delta b = b$, $\delta p_b = p_b$. O polinômio característico associado à matriz constante do sistema linearizado acima tem autovalores

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = -i\sqrt{-2}, \quad \lambda_4 = i\sqrt{2}, \quad (4.19)$$

que caracterizam um ponto crítico do tipo centro-sela.

A Hamiltoniana (4.9) linearizada na vizinhança do centro-sela resulta

$$H_l = E_{cr} - E_o + \frac{1}{24}p_a^2 - \frac{3}{2}(a-1)^2 - \frac{3}{8}p_b^2 - \frac{4}{3}b^2 \approx 0, \quad (4.20)$$

de acordo com o teorema de Moser. Nestas variáveis o movimento é separável, com as duas constantes de movimento: a energia hiperbólica ($E_{hip} = \frac{1}{24}p_a^2 - \frac{3}{2}(a-1)^2$), associada ao movimento hiperbólico no plano $(\delta a, p_a)$ e a energia rotacional ($E_{rot} = \frac{3}{8}p_b^2 + \frac{4}{3}b^2$), associada ao movimento rotacional no plano (b, p_b) na vizinhança linear do centro-sela. Da expressão (4.20) obtemos o vínculo

$$E_{rot} - E_{hip} \approx E_{cr} - E_o, \quad (4.21)$$

onde a energia do ponto crítico $E_{cr} = 1$.

Analogamente aos casos anteriores, a dinâmica apresenta um plano invariante \mathcal{M} , definido por $(b = 0, p_b = 0)$, onde dinâmica Hamiltoniana é integrável e governada pelo sistema bi-dimensional

$$\dot{a} = \frac{p_a}{12a}, \quad (4.22)$$

$$\dot{p}_a = \frac{p_a^2}{24a^2} + \frac{3}{2}(a^2 - 1), \quad (4.23)$$

com a Hamiltoniana associada

$$H_s = \frac{p_a^2}{24a} + \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a^3 - E_o. \quad (4.24)$$

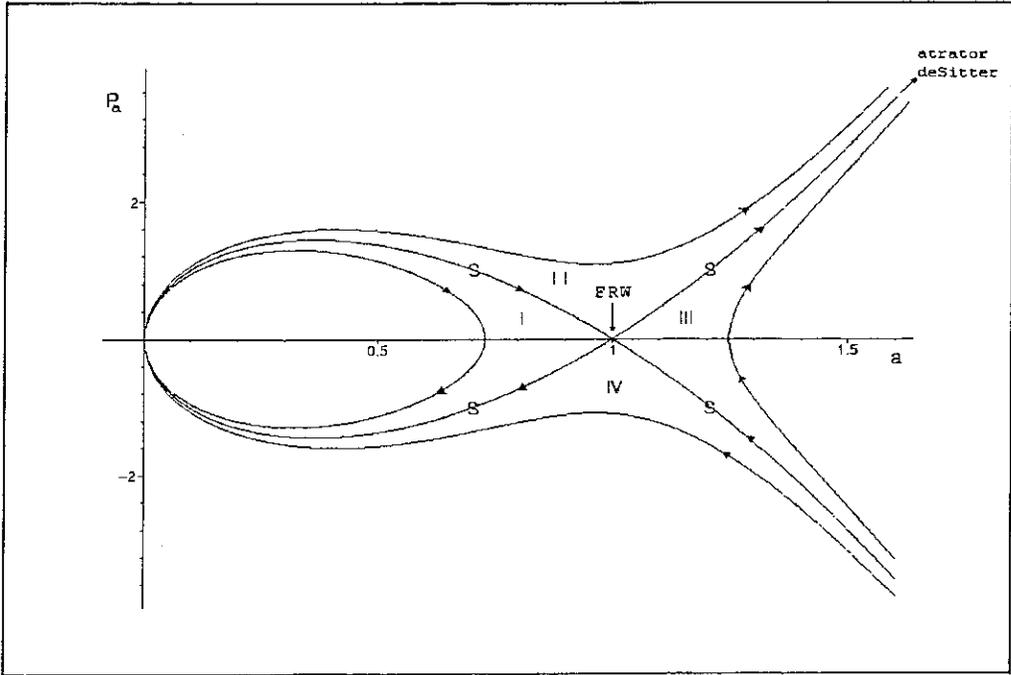


Figura 4.1: Retrato de fase do plano invariante ($b = 0, p_b = 0$) contendo o ponto crítico. S são as separatrizes atingindo o centro-sela.

A *figura 4.1* apresenta as curvas integrais sobre o plano invariante. Neste plano invariante estão localizados dois pontos críticos no infinito correspondendo a configuração de de Sitter, um atrator e o outro repulsor. Como nos casos anteriores o atrator de de Sitter definirá uma saída da dinâmica para a inflação. A região *II* é caracterizada por trajetórias com energia $E_o > E_{cr}$ e que escapam para inflação (atrator de de Sitter). Idêntico comportamento ocorre para as trajetórias na região *III*, agora com energia $E_o < E_{cr}$. Nas regiões *I* e *IV* temos trajetórias descrevendo o colapso do Universo ($a \rightarrow 0$) com energia $E_o < E_{cr}$ e $E_o > E_{cr}$, respectivamente.

Como já discutimos, a dinâmica no plano invariante é integrável, representando a evolução de um Universo *FRW* homogêneo, isotrópico, fechado com constante cosmológica. A introdução de anisotropia corresponde a uma evolução dinâmica fora do plano invariante onde esta se torna mais complexa devido a não-integrabilidade. Vamos então efetuar a análise do comportamento do modelo em situações onde a anisotropia está presente e o modelo se torna não-integrável. Basicamente podemos dividir este estudo na análise de três regiões de condições iniciais definidas relativamente ao plano invariante: (i) condições iniciais tomadas sobre o plano invariante, (ii) condições iniciais próximas

ao plano invariante, (iii) condições iniciais longe do plano invariante. No primeiro caso a análise já foi feita acima. Escolhido um ponto sobre o plano invariante, temos definido a energia do modelo e seu estado final. Como neste caso $b = 0$, isto implica que $A = B$, que corresponde ao modelo isotrópico onde os fatores de escala não oscilam em sua aproximação à região linear do centro-sela.

O Segundo caso ocorre quando tomamos condições iniciais fora, mas próximas ao plano invariante, por exemplo, numa esfera 4-dimensional centrada num ponto do plano e com raio da ordem das flutuações de anisotropia que admitiremos para as condições iniciais. Já mostramos que nas variáveis (a, p_a, b, p_b) , na vizinhança linear do centro-sela, os movimentos do setor hiperbólico e rotacional são desacoplados. Porém, como A e B são definidos em função de a e b , equações (4.5-4.6), e como b oscila, (vide *figura 4.2*), A e B também terão movimentos oscilatórios quando a órbita se aproxima do centro-sela. Este caso pode ser considerado uma perturbação do caso integrável: ao introduzirmos uma pequena anisotropia assistimos o aparecimento de uma dinâmica complexa que provoca a perda de habilidade em prevermos o estado final do modelo, se colapso ou escape para inflação devido à flutuações nas condições iniciais.

No terceiro caso, quando tomamos condições iniciais longe do plano invariante, introduzindo uma completa anisotropia no modelo, tanto a variável b quanto a variável a , oscilam durante a evolução da órbita, antes de a órbita atingir um de seus dois estados assintóticos[9] (vide *figuras 4.3, 4.4 e 4.5*).

Em ambos os casos (ii) e (iii), a não-integrabilidade do sistema introduz uma completa imprevisibilidade no estado final do modelo devida à flutuações nas condições iniciais, o que caracteriza a saída caótica para inflação analogamente aos modelos analisados no capítulo anterior. Retomaremos esta questão mais adiante.

As órbitas geradas a partir dos conjuntos de condições iniciais caracterizadas nos casos (ii) e (iii) anteriores, possuem a propriedade de poderem oscilar por um tempo arbitrariamente longo numa vizinhança do centro-sela antes de colapsarem ou escaparem para a inflação. Esta fase oscilatória pré-inflacionária que ocorre numa vizinhança do centro-sela, poderá ter uma consequência física importante que passamos a discutir: o fenômeno de ressonância paramétrica para perturbações escalares inhomogêneas, com amplificação de um espectro selecionado de perturbações que poderia dar origem a formação de estruturas

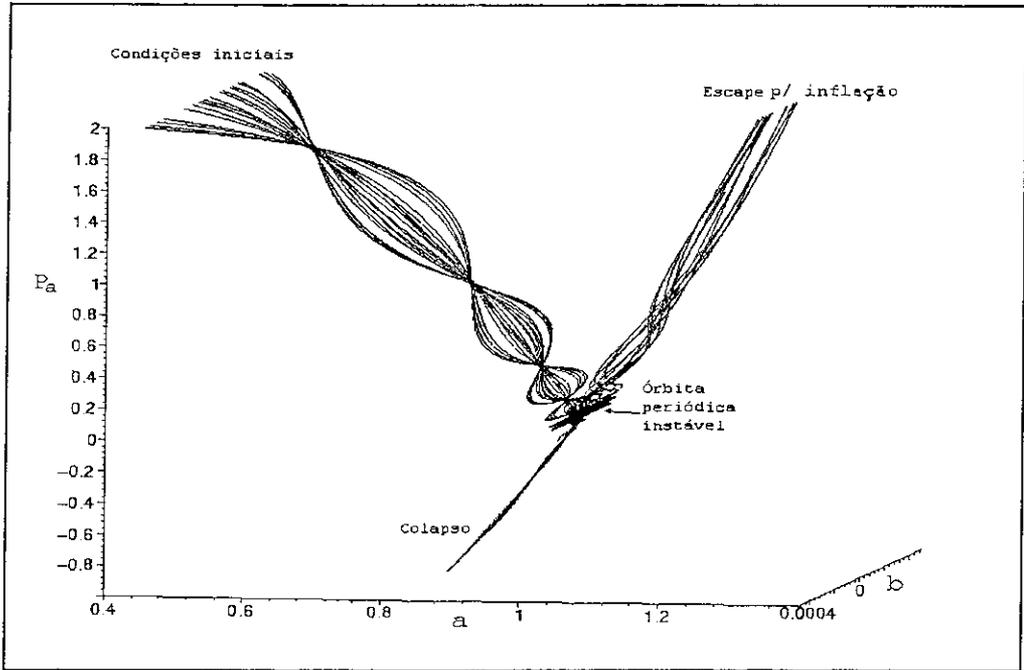


Figura 4.2: Vista tridimensional de 20 órbitas gerais com aproximação oscilatória à vizinhança linear do centro-sela. As condições iniciais foram tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas $P_o : (a_o = 0,25; p_{ao} = 1,948557148800763; b_o = 0; p_{bo} = 0)$ com energia $E_o = 0,9999999936904266$ e $m = 16$, sendo a ordem das flutuações admitidas às variáveis iniciais de $R = 10^{-4}$. Note que as possíveis saídas da aproximação oscilatória, após a passagem pela região linear do centro-sela, são o colapso ($E_{hip} < 0$) ou o escape para a inflação ($E_{hip} > 0$).

com hierarquia de escala.

Para ser considerado bem sucedido, o paradigma inflacionário deve acomodar modelos no qual inhomogeneidades iniciais são geradas, levando à formação das estruturas presentes no Universo atual. Na literatura sobre inflação, tem sido dito que pequenas flutuações no campo escalar poderiam levar ao aparecimento de um espectro independente de escala de perturbações adiabáticas de densidade (o espectro de Harrison-Zeldovich), que é o espectro padrão usado na explicação da formação das galáxias. Entretanto, o número de objetos distintos em larga escala e estruturas em nosso Universo, como galáxias, “clusters” de galáxias, quasares, é muito grande e o tamanho desses objetos forma uma hierarquia de escalas que não é descrita pelo espectro plano das perturbações iniciais. Em outras palavras, as perturbações de Harrison-Zeldovich parecem não serem suficientes

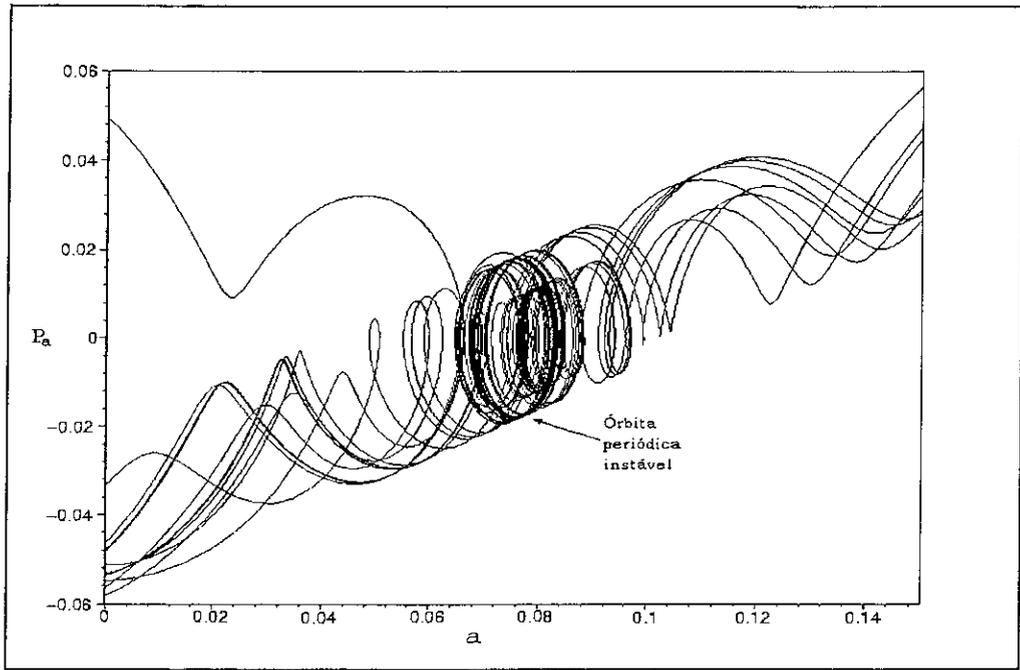


Figura 4.3: Projeção de 20 órbitas sobre o plano (a, p_a) , tomadas longe do plano invariante, que visitam a região não-linear do ponto crítico centro-sela localizado na origem, evidenciando a aproximação oscilatória a esta região. Neste caso tomamos $E_o = 0,9266120345$ e o centro do volume de condições iniciais foi escolhido tendo as coordenadas $P_o = (a_o = -1, p_{ao} = 0,3185295369145966, b_o = 0,25, p_b = 0,2)$. Para estas condições iniciais, as órbitas levam um tempo arbitrariamente longo na vizinhança linear do centro-sela.

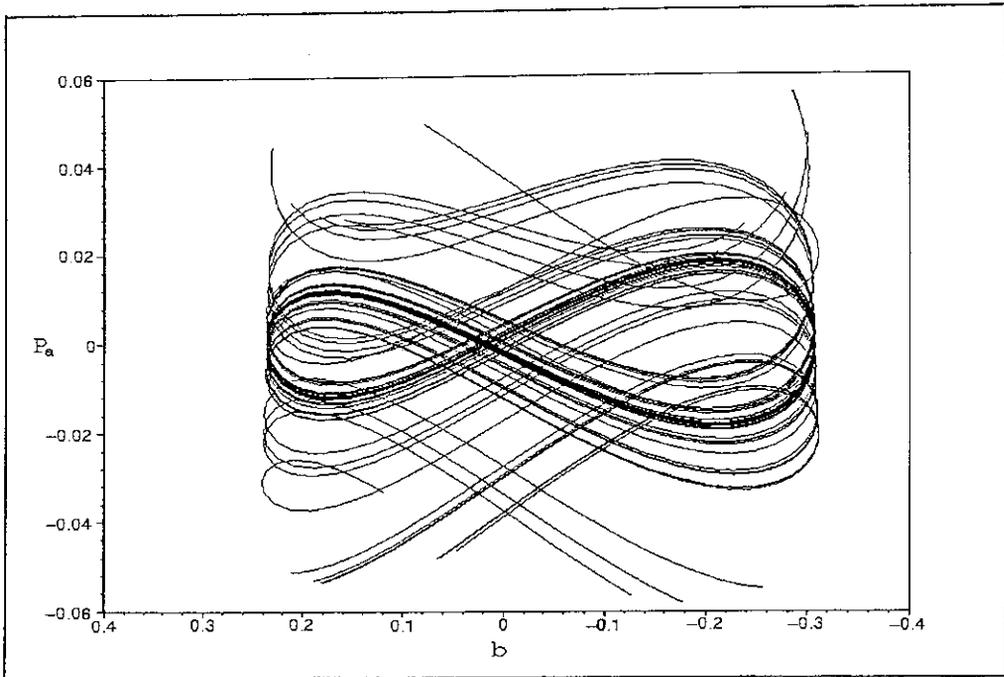


Figura 4.4: Ilustração numérica das 20 órbitas da *figura 4.3* agora com projeção no plano (b, p_a) , onde podemos observar as oscilações nas variáveis p_a e b .

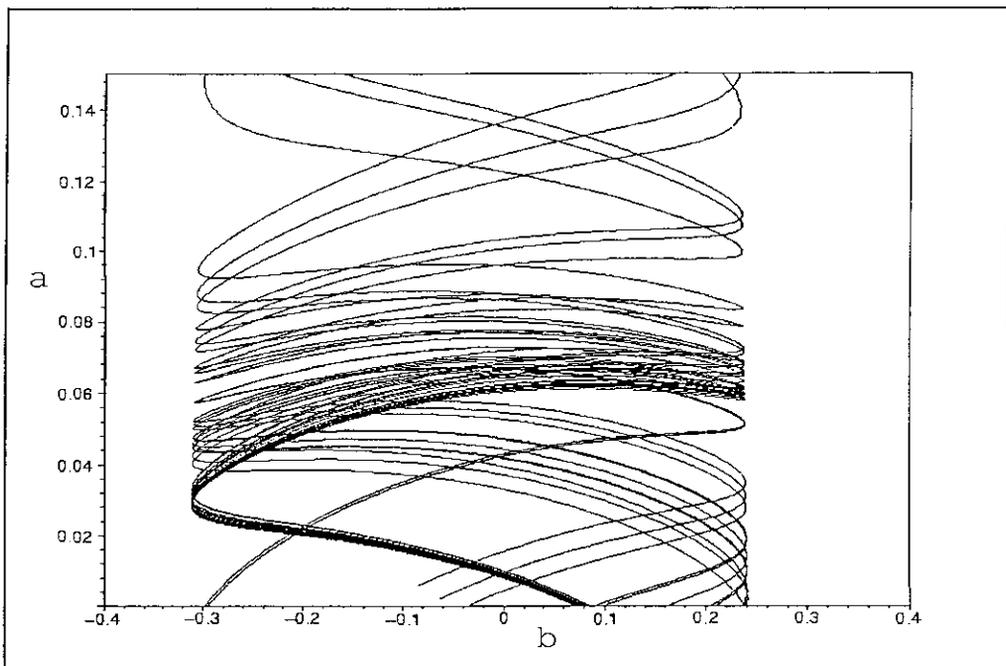


Figura 4.5: Ilustração numérica das 20 órbitas da *figura 4.3* agora com projeção no plano (a, b) , onde podemos observar as oscilações nas variáveis a e b .

para produzir estruturas em larga escala do Universo observado. Por simplicidade vamos considerar o modelo descrito pela Hamiltoniana (4.4), mas os aspectos básicos não são alterados para outros tipos de fluido como radiação, por exemplo, ou campo escalar.

No artigo [9] mostramos que a vizinhança do centro-sela é uma região onde a órbita pode oscilar um tempo arbitrariamente longo. A presença da órbita por um longo tempo na região linear do centro-sela pode ter como consequência o acentuado crescimento das inhomogeneidade [28, 29]. Mostramos que é sempre possível selecionar condições iniciais para Universos expandindo tal que, nesta vizinhança, as órbitas realizem um grande número de oscilações antes de entrarem na fase inflacionária, como mostrado na *figura 4.3*, *4.4* e *4.5*. Em geral, as órbitas tem uma entrada oscilatória na fase inflacionária, enquanto o fator de escala tem uma aceleração positiva global. Este fato tem implicações cruciais no problema da formação de estruturas, produzindo um mecanismo de amplificação por ressonância paramétrica das perturbações inhomogêneas com um espectro selecionado, como iremos mostrar.

Nós consideramos uma dada órbita, correspondendo a um Universo se expandindo inicialmente tal que ela visite a região linear do centro-sela. Para evitar dificuldades técnicas devido ao formalismo perturbativo no *background* anisotrópico, e motivado pelo fato que na dinâmica geral das perturbações, pequenas flutuações de anisotropia podem ser, em média, desconsideradas, nós introduzimos o fator de escala médio $l(t)$ definido por

$$l(t) = (AB^2)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.25)$$

Esta aproximação corresponde a um Universo de FRW fechado com $l(t)$ como fator de escala, tanto num regime oscilatório quanto entrando numa fase inflacionária. A expressão analítica para o fator de escala médio na vizinhança do centro-sela foi obtida no apêndice C e é dada por

$$l(t) = a(t) = a_o + \frac{A_o^2}{36\Lambda a_o} (3a_o^2 w^2 - 2) - \frac{A_o^2}{36a_o} (2 + 3a_o^2 w^2) \cos(2wt) + C_1 e^{\sqrt{\Lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda}t}, \quad (4.26)$$

onde $\omega = \frac{\sqrt{2}}{a_o}$, C_1 e C_2 são pequenas constantes arbitrárias da mesma ordem do raio característico da vizinhança do centro-sela. Os termos exponenciais estão associados com o modo de energia hiperbólico, enquanto o último termo está associado ao modo de energia rotacional. A fase oscilatória pura é caracterizada por $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ (órbita sobre o cilindro), que corresponde a uma classe de soluções especiais associadas a condições

difíceis de realizar para Universos razoáveis. Quanto menor estas constantes, maior o tempo que a órbita passa na fase oscilatória. O escape para inflação corresponde a $C_1 \neq 0$ e $C_2 = 0$, isto é, há um aumento exponencial da amplitude do fator de escala.

Vamos agora examinar o comportamento das perturbações inhomogêneas de matéria $\delta\rho$ e campo escalar $\delta\phi$ nesta fase oscilatória da métrica de fundo. É importante enfatizar que $\delta\phi$ dará origem a perturbações de segunda ordem da densidade de energia do campo escalar, $\delta\rho_\phi$, pois $\dot{\phi}^{(o)} \approx V'(\phi^{(o)}) \approx 0$, com $\phi^{(o)} \approx const$ sendo o campo escalar da métrica de fundo correspondente a um extremo do potencial, e cujo papel efetivo é produzir a constante cosmológica Λ . Como consequência, não existe acoplamento entre $\delta\rho$ e $\delta\phi$ uma vez que o primeiro representa desvio de primeira ordem. A evolução da densidade de contraste $\chi = \delta\rho/\rho = Q_{(k)}(\mathbf{x})\chi_k(t)$ nesta métrica de fundo é dada por[38]

$$\ddot{\chi}_k + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\chi}_k - \frac{1}{2}\rho\chi_k = 0, \quad (4.27)$$

onde χ_k é o modo associado com a base harmônica escalar $Q_{(k)}(\mathbf{x})$ o qual satisfaz

$$h^{\mu\nu}Q_{(k)}(\mathbf{x})_{,\mu;\nu} = (k^2/l^2)Q_{(k)}(\mathbf{x}), \quad (4.28)$$

$h^{\mu\nu}$ sendo o projetor na superfície espacial, e $k = n^2 - 1$ com $n \geq 1$ assumindo valores inteiros. $\rho = E_o/l(t)^3$ é a densidade de energia da métrica de fundo. Na fase oscilatória, em torno do ponto crítico, a equação (4.27), após uma reescala apropriada da variável χ_k (vide apêndice C), assume a forma

$$\ddot{\chi}_k - \left[\frac{E_o}{2a_o^3} + \left(4w^2 + \frac{3E_o}{2a_o^3} \right) \alpha \cos(2wt) \right] \chi_k = 0. \quad (4.29)$$

onde $\alpha = \frac{A_o^2(2+3a_o^2w^2)}{36a_o^2(\Lambda+4w^2)}$. Esta é a equação de Mathieu compreendida na região paramétrica de instabilidade, e conseqüentemente todos os k são igualmente amplificados. Após a fase oscilatória, o Universo sofre uma bem sucedida inflação e todos os modos χ_k são congelados.

Nós agora consideraremos a evolução das perturbações do campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi^{(o)} + Q_{(k)}(\mathbf{x})\delta\phi_k(t)$, onde o $\phi^{(o)} \approx const$ e $\delta\phi_k(t)$ é o modo associado com a base escalar harmônica $Q_{(k)}(\mathbf{x})$. A equação do movimento para os modos perturbados do campo escalar é

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3\frac{\dot{l}}{l}\delta\dot{\phi}_k + \left(V''(\phi^{(o)}) + \frac{k^2}{l^2} \right) \delta\phi_k = 0. \quad (4.30)$$

Introduzindo a variável $\delta_k = l^{3/2}\delta\phi_k$ na equação (4.30), assim como a solução aproximada do fator de escala da métrica de fundo (4.26) no regime oscilatório, nós obtemos

$$\ddot{\delta}_k + \left[\left(V''(\phi^{(o)}) + \frac{k^2}{a_o^2} \right) - \epsilon \left(\frac{2k^2}{a_o^4} - \frac{6w^2}{a_o^2} \right) \cos(2wt) \right] \delta_k = 0, \quad (4.31)$$

que é uma típica equação de Mathieu e $\epsilon = \frac{A_o^2(2+3a_o^2w^2)}{36(\Lambda+4w^2)}$. Uma importante propriedade das soluções desta equação é a existência de zonas de instabilidade no espaço dos parâmetros para $V''(\phi^{(o)}) > 0$, no qual soluções de um particular modo k crescem exponencialmente. Esta instabilidade é conhecida por ressonância paramétrica. Para pequenos valores de ϵ , a condição de ressonância paramétrica é dada por

$$\frac{V''(\phi^{(o)})}{\omega^2} + \frac{k^2}{\omega^2 a_o^2} = j^2 + \Delta(\epsilon), \quad (4.32)$$

onde j é um inteiro arbitrário e Δ é um pequeno número dimensional dependente de ϵ . Isto significa que existe uma regra de seleção para o crescimento exponencial dos modos, e que somente os modos com k satisfazendo a relação (4.32) crescem exponencialmente. Os modos são basicamente determinados pela razão entre a massa do campo escalar $V''(\phi^{(o)})$, e a energia do vácuo do campo escalar através da frequência $\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{a_o^2}$. A razão $\frac{V''(\phi^{(o)})}{\omega^2}$ é um parâmetro fundamental nos modelos inflacionários; a ordem deste parâmetro poderia ser, em princípio, avaliado através de (4.32) desde que o espectro seja determinado experimentalmente. Nós seguimos a referência [30] escolhendo $V''(\phi^{(o)}) \sim (10^{-12} - 10^{-14})m_p^2$, onde m_p é a massa de Planck. Nós obtivemos para a razão $\frac{V''(\phi^{(o)})}{\omega^2}$ um número muito pequeno da ordem $(10^{-12} - 10^{-14})$ que pode ser desprezado. Devido a isto, durante a fase inflacionária um espectro selecionado de modos, centrado nos inteiros $j^2 \approx k^2/\omega^2 a_o^2$, crescem rapidamente, ao passo que os modos remanescentes são mantidos estáveis. Novamente, quando o Universo entra na fase inflacionária, os modos perturbados que cruzam o horizonte não são afetados por processos microfísicos; deste modo eles são congelados até reentrarem no horizonte após a inflação. Entretanto, devido à ressonância paramétrica, os modos que cruzam o horizonte pela primeira vez não tem a mesma amplitude, e são mantidos durante a evolução determinada pelas equações de Einstein até eles reentrarem no horizonte. O espectro de perturbações resultante tem duas componentes: o espectro plano de matéria e o espectro de perturbação selecionado do campo escalar. O primeiro é dominante e o segundo poderia ser visto como uma pequena “flutuação” sobre o espectro de matéria. Em geral, os aspectos globais estão em concordância com as previsões básicas

de um aproximado espectro de inomogeneidades primordiais planas. Por outro lado, a perturbação máxima presente no campo escalar e imposta por (4.32) representa um desvio muito pequeno de um espectro plano, e pode ser importante para explicar a hierarquia de escalas (galáxias, “clusters”, etc.) observada no Universo atual.

Neste modelo também podemos fazer um estudo estatístico analisando a distribuição de quantidades conservadas na vizinhança do centro-sela, para um *ensemble* de órbitas que visitam a região linear do ponto crítico. Apesar de este modelo não possuir um parâmetro arbitrário que possa ser variado, ainda podemos mostrar que a distribuição das energias E_{hip} (histograma) segue o mesmo padrão apresentado pelos modelos anteriores. Aqui também tivemos o cuidado de escolher a geometria do *ensemble* de condições iniciais de modo a não introduzirmos qualquer tipo de polarização na amostra. A escolha da geometria foi feita através Hamiltoniana integrável associada, que fornece um histograma do tipo platô, conforme extensamente discutido no capítulo 3. A forma saturada do histograma é atingida quando escolhemos o centro do volume da amostra, em torno de um ponto da separatriz, afastado do ponto crítico o suficiente para que os termos não lineares possam influenciar na evolução das órbitas. Quando estes cuidados são tomados, encontramos que o platô diminui relativamente à cauda e o histograma para E_{hip} é ajustado pela lei de potência (3.46). Verificamos que o volume da amostra não influencia na forma do histograma e desta maneira mantém inalterado o valor do expoente γ . Para verificar a influência da superfície de energia na forma do histograma, realizamos experimentos numéricos tomando condições iniciais tal que as órbitas atinjam estados finais diferentes. Como já comentamos, dependendo da superfície de energia E_o , as órbitas se estabelecem em diferentes estados assintóticos. Efetuamos um experimento onde todas as órbitas escapam para inflação, outro onde todas as órbitas colapsam e por fim, um experimento no qual as órbitas se distribuem entre os dois resultados anteriores que denominamos de região de mistura. Em todos os três experimentos obtivemos o mesmo padrão para a forma do histograma e por consequência, o mesmo valor para o expoente γ da lei de potência (3.46), trazendo mais evidências de que este padrão é universal. Na *figura 4.6* mostramos os histogramas e os correspondentes gráficos $Ln \times Ln$ para os três diferentes valores da superfície de energia E_o , correspondendo a três diferentes comportamento das órbitas com relação ao seu estado final. Na *tabela 4.1* apresentamos os valores dos parâmetros que

caracterizam o experimento, assim como os valores encontrados para γ , tanto através do pacote *PAW* quanto pelo gráfico $Ln \times Ln$. Notamos que os valores de γ , a menos de erros estatísticos, são iguais aos valores encontrados para os modelos do capítulo anterior (vide *tabela 3.2*). Mostrando mais uma vez que o padrão estatístico estabelecido pelo histograma independe do particular modelo analisado.

Para o conjunto de condições iniciais onde o valor da superfície de energia E_o leva a uma mistura nos estados assintóticos atingidos pelas órbitas, podemos calcular o parâmetro de incerteza α . Devemos lembrar que α estabelece uma medida da caoticidade do modelo relativa ao estado final das órbitas. Quando definimos o código colapso/escape para os estados finais das órbitas e utilizamos o método de *boxcounting* para obter o valor de α , encontramos $\alpha = 0,32 \pm 0,01$. Na *figura 4.7* apresentamos o gráfico $Ln(f) \sim \alpha Ln(\epsilon)$, cuja região linear fornece o valor de α . Este resultado indica uma alta sensibilidade à flutuações nas condições iniciais. Este comportamento deve ser creditado a introdução da anisotropia via escolha das condições iniciais fora, mas não longe, do plano invariante, que corresponde a tomar a dinâmica do sistema não-integrável. Vemos assim, que existe uma riqueza surpreendente no comportamento da dinâmica fora do plano invariante (modelos de FRW padrões) gerada pela presença da anisotropia, que deve ser levada em conta numa descrição mais realista da evolução do Universo em seus estágios iniciais.

Tabela 4.1

Região	ΔE	R	γ_{PAW}	χ^2	intervalo	γ_{LL}	L	q
Colapso	$10^{-7,1}$	10^{-4}	$0,64 \pm 0,03$	0,068	1-34	$0,63 \pm 0,02$	0,997	2,56
Mistura	$10^{-8,2}$	10^{-4}	$0,64 \pm 0,03$	0,057	1-32	$0,61 \pm 0,02$	0,998	2,56
Escape	$10^{-9,3}$	10^{-4}	$0,64 \pm 0,03$	0,071	1-32	$0,62 \pm 0,02$	0,997	2,56

Os valores de γ_{PAW} , γ_{LL} e q foram aproximados a segunda casa decimal. A região de colapso é a região das condições iniciais onde todas as órbitas tendem para $a \rightarrow 0$. Para a região de escape as órbitas tendem a $a \rightarrow \infty$ e na região de mistura temos os dois comportamentos assintóticos. A definição dos parâmetros é a mesma que consta na *tabela 3.2*

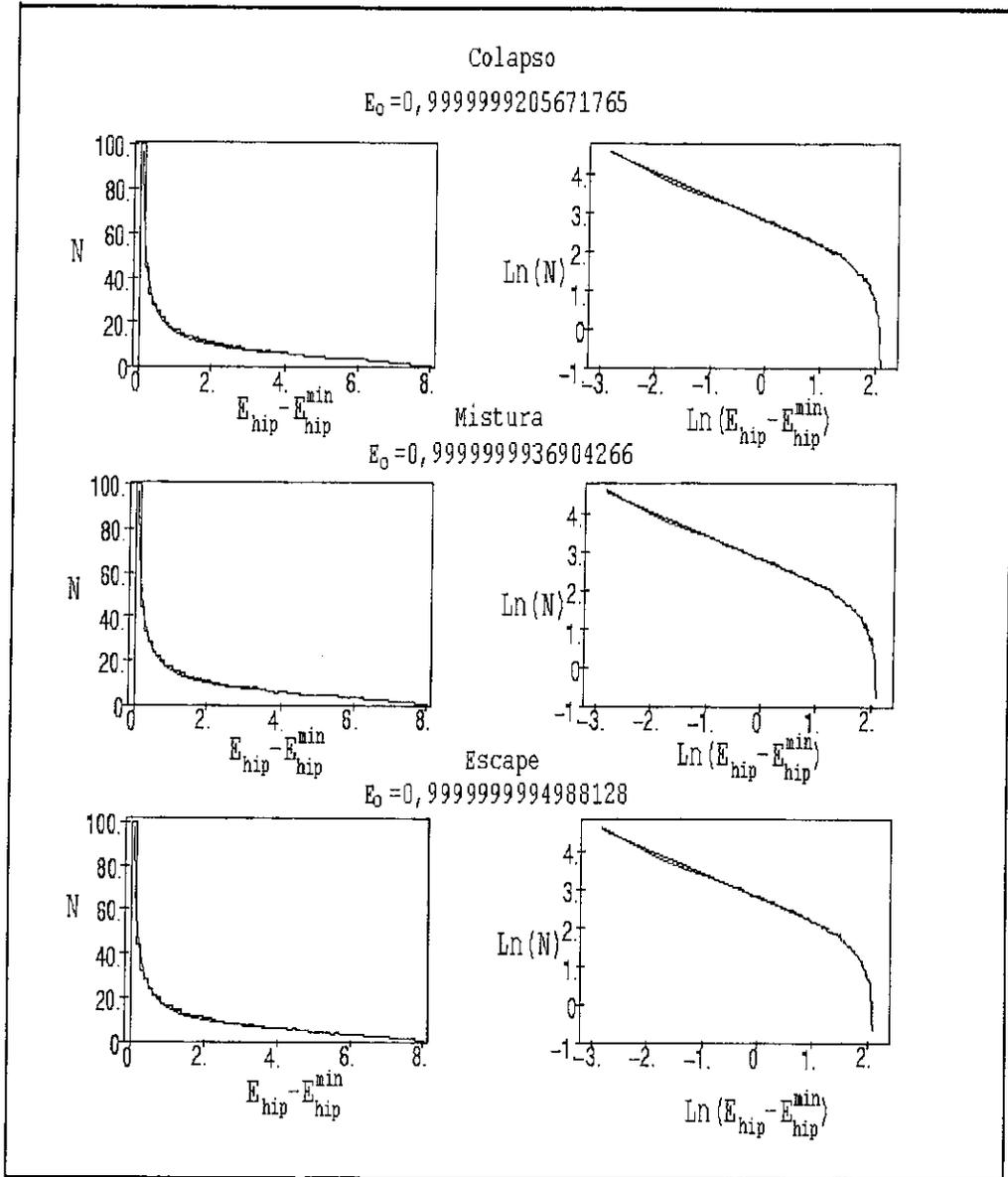


Figura 4.6: Histograma da distribuição de E_{hip} e gráfico $Ln \times Ln$ associado para 90000 condições iniciais tomadas em torno de um ponto sobre a separatriz de coordenadas P_o : $(a_o = 0,25, b_o = 0, p_{bo} = 0)$ com flutuações admitidas da ordem de $R = 10^{-4}$, o valor de p_a é dado pelo vínculo Hamiltoniano (4.9) e E_o está indicado na figura. O eixo das energia foi multiplicado por 10^7 .

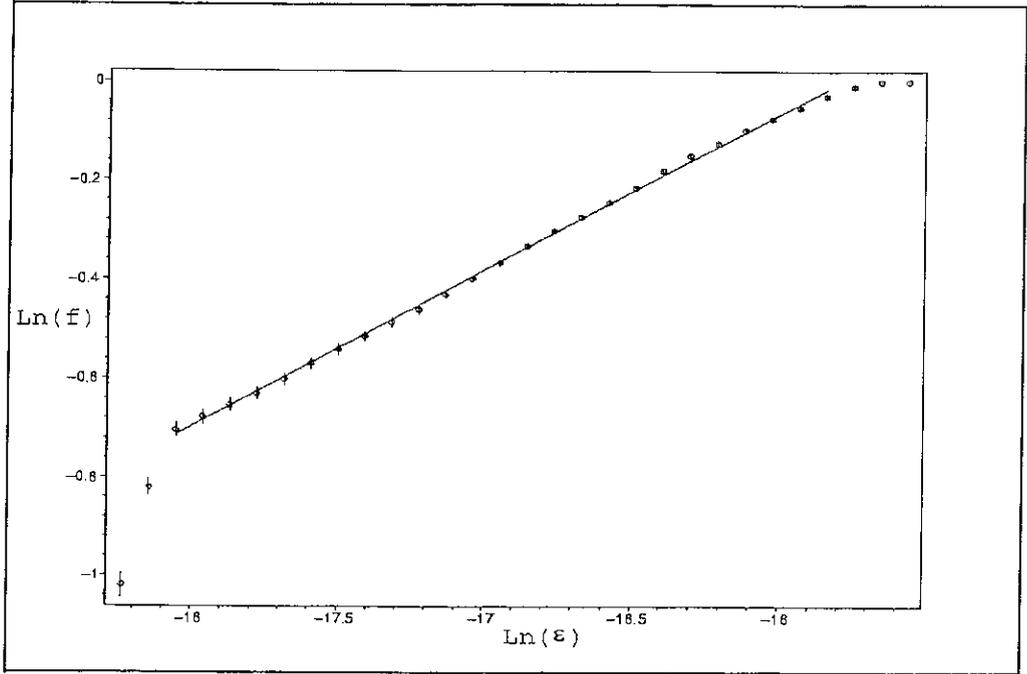


Figura 4.7: Gráfico da relação $f = k_o \epsilon^\alpha$ na escala $Ln \times Ln$ onde ϵ é o raio de incerteza para um conjunto \mathcal{D} de 5000 condições iniciais e α é o parâmetro de incerteza. O melhor ajuste nos fornece o valor de $\alpha \approx 0,32$, onde usamos o valor de $E_o = 0,9999999936904266$ para a superfície de energia. O ponto em torno do qual foram tomadas as condições iniciais foi $P_o : (a_o = 0,25, p_{a_o} = 1,948557148800763, b_o = 0, p_{b_o} = 0)$ com flutuações admitidas da ordem de $R = 10^{-4}$. A barra sobre o círculo é proporcional ao erro da medida para o intervalo considerado.

Capítulo 5

Hamiltoniana de Hénon-Heiles

Este modelo descreve a dinâmica de uma estrela num campo gravitacional de uma galáxia com simetria axial com possibilidade de escape. Este modelo é um paradigma no campo da astrofísica, tanto pela sua simplicidade, quanto pela riqueza dinâmica por ele gerada. O problema do escape de uma estrela do campo gravitacional de uma galáxia tem tanto interesse prático quanto teórico. Para se ter uma idéia, para que uma estrela escape não é suficiente que ela tenha uma energia maior que a energia de escape. Para energias próximas a energia de escape a dinâmica passa a ser caótica não podendo ser previsto o comportamento do sistema a longo prazo. A dinâmica deste modelo é descrita pela Hamiltoniana de Hénon-Heiles[13] e tornou-se um paradigma na dinâmica caótica de sistemas Hamiltonianos.

Nosso interesse na Hamiltoniana de Hénon-Heiles deve-se primeiramente ao fato de que no espaço de fase do modelo estão presente quatro pontos críticos, sendo três do tipo centro-sela. Nos capítulos anteriores nós obtivemos um novo padrão estatístico associado ao centro-sela no domínio da dinâmica de cosmologias inflacionárias, que mostramos ser universal no sentido de ser independente dos parâmetros do modelo e invariante de escala [31]. Um dos nossos objetivos neste capítulo é estender este resultado a outros sistemas Hamiltonianos cujo espaço de fase apresenta um ou mais pontos críticos centro-sela. Nós consideramos que isto fornece evidência suficiente para caracterizar a existência deste padrão estatístico universal característico do centro-sela, independentemente do particular sistema onde o ponto crítico aparece[32]. Iremos verificar que os histogramas, para as quantidades conservadas na região linear do centro-sela, são ajustados por uma lei do tipo potência (3.46) que pode ser considerada como um padrão universal do caos associado à dinâmica do centro-sela num regime de alta não-integrabilidade, como foi discutido nos capítulos anteriores. Além deste aspecto, vamos utilizar o modelo para propor uma analogia entre a mudança na forma do histograma, em face do aumento do valor do parâmetro de controle do modelo, com o início do comportamento turbulento que aparece em experimento com fluidos quando o número de Reynolds é aumentado, como discutido em [33].

Como no caso do modelo cosmológico com acoplamento conforme do campo escalar, discutido no capítulo 3, o comportamento caótico conectado ao centro-sela tem origem homoclínica, devido aos infinitos cruzamentos transversais dos cilindros homoclínicos pre-

sentes no espaço de fase do modelo. A vizinhança do centro-sela apresenta estruturas cilíndricas emanando da órbita periódica instável presente nesta vizinhança, e a quebra e cruzamento destes cilindros é devido a não-integrabilidade da dinâmica.

A Hamiltoniana de Hénon-Heiles foi introduzida no estudo do problema de integrais isolantes no movimento de uma estrela num potencial de uma galáxia. Nas coordenadas canônicas (x, y, p_x, p_y) , onde (x, y) estão associadas às variáveis (R, z) , o sistema de coordenadas axial, esta Hamiltoniana tem a forma geral [34]

$$H = \frac{1}{2}(p_y^2 + p_x^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{y^3}{3} + Kyx^2, \quad (5.1)$$

onde p_y e p_x são os momentos canonicamente conjugados a y e x , respectivamente, e K é um parâmetro de controle.

A dinâmica é governada pelas equações de Hamilton,

$$\dot{y} = p_y, \quad (5.2)$$

$$\dot{p}_y = -y + y^2 - Kx^2, \quad (5.3)$$

$$\dot{x} = p_x, \quad (5.4)$$

$$\dot{p}_x = -x - 2Kyx, \quad (5.5)$$

onde $(\dot{})$ representa a derivada em relação ao tempo.

O espaço de fase apresenta quatro pontos críticos na região finita cujas coordenadas são obtidas das condições $\dot{y} = 0$, $\dot{p}_y = 0$, $\dot{x} = 0$ e $\dot{p}_x = 0$. As coordenadas dos pontos críticos são,

$$P_1 = (y_o = 0, p_{y_o} = 0, x_o = 0, p_{x_o} = 0), \quad (5.6)$$

$$P_2 = (y_o = 1, p_{y_o} = 0, x_o = 0, p_{x_o} = 0), \quad (5.7)$$

$$P_3 = (y_o = -\frac{1}{2K}, p_{y_o} = 0, x_o = \Delta, p_{x_o} = 0), \quad (5.8)$$

$$P_4 = (y_o = -\frac{1}{2K}, p_{y_o} = 0, x_o = -\Delta, p_{x_o} = 0), \quad (5.9)$$

onde $\Delta = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2K} + 1)}$.

Estes pontos tem as seguintes energias críticas:

$$\bullet P_1 \rightarrow E_1 = 0, \quad (5.10)$$

$$\bullet P_2 \rightarrow E_2 = \frac{1}{6}, \quad (5.11)$$

$$\bullet P_3 \rightarrow E_3 = \frac{1}{8K^2} \left(1 + \frac{1}{3K}\right), \quad (5.12)$$

$$\bullet P_4 \rightarrow E_4 = \frac{1}{8K^2} \left(1 + \frac{1}{3K}\right). \quad (5.13)$$

Para o caso da Hamiltoniana original de Henón-Heiles, $K = 1$, os pontos P_2 , P_3 e P_4 passam a localizar-se nos vértices de um triângulo e ter a mesma energia, denominada de energia crítica, $E_{cr} = \frac{1}{6}$. Para a Hamiltoniana completa (5.1), a medida que o parâmetro da perturbação K aumenta, os pontos P_3 e P_4 tendem a se localizar na origem do sistema ($y \rightarrow 0$) e ($x \rightarrow 0$), ou seja, colapsam para o ponto P_1 , ao mesmo tempo que suas energias críticas tendem a zero, mesmo valor da energia crítica do ponto P_1 .

Vamos agora caracterizar os pontos críticos começando nossa análise pelo ponto P_2 . Vamos introduzir novas variáveis

$$\delta y = y - y_o, \quad (5.14)$$

$$\delta p_y = p_y - p_{y_o}, \quad (5.15)$$

$$\delta x = x - x_o, \quad (5.16)$$

$$\delta p_x = p_x - p_{x_o}, \quad (5.17)$$

de modo a trasladar o ponto crítico para a origem. Assim, a expansão das equações (5.2 – 5.5) em torno do ponto crítico P_2 , pode ser escrita como

$$\delta \dot{y} = \delta p_y, \quad (5.18)$$

$$\delta \dot{p}_y = \delta y, \quad (5.19)$$

$$\delta \dot{x} = \delta p_x, \quad (5.20)$$

$$\delta \dot{p}_x = -(1 + 2K)\delta x, \quad (5.21)$$

onde esse sistema pode ser posto sob a forma de matriz, $\delta \dot{X} = S\delta X$,

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{y} \\ \delta \dot{p}_y \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{p}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(1 + 2K) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta p_y \\ \delta x \\ \delta p_x \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico tem a forma,

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda \mathbf{1}_{4 \times 4}), \quad (5.22)$$

cuja forma explicita é dada por,

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -(1+2K) & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

de modo a obter,

$$[\lambda^2 - 1][\lambda^2 + (1 + 2K)] = 0, \quad (5.23)$$

cujas raízes são

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{-(1 + 2K)}, \quad (5.24)$$

ou ainda,

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{1 + 2K}, \quad (5.25)$$

caracterizando um ponto crítico do tipo centro-sela. Efetuando cálculos análogos para os pontos P_3 e P_4 encontramos os autovalores,

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2 + \frac{1}{K}}, \quad (5.26)$$

que também caracterizam pontos críticos do tipo centro-sela. Para o ponto P_1 encontramos autovalores imaginários puros caracterizando um centro. Temos portanto três pontos críticos do tipo centro-sela e para a escolha original de Hénon-Heiles ($K = 1$) os três pontos críticos centro-sela estão na mesma superfície de energia $E = \frac{1}{6}$. Através dos experimentos numéricos, verificamos que o comportamento dos três pontos centro-sela, para o caso do regime que denominamos de alta não-integrabilidade, foi o mesmo, o que justifica o fato de mostrarmos apenas os cálculos referente ao ponto P_2 .

Pelo ponto P_2 passa um plano invariante \mathcal{M} caracterizado por $(p_x = 0, x = 0)$ e dado por,

$$\dot{y} = p_y, \quad (5.27)$$

$$\dot{p}_y = -y + 3y^2, \quad (5.28)$$

conforme *figura 5.1*. O sistema é integrável e usando a Hamiltoniana (5.1) obtivemos a equação que deve ser satisfeita pelas curvas-soluções no plano invariante,

$$H_s = \frac{p_y^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}. \quad (5.29)$$

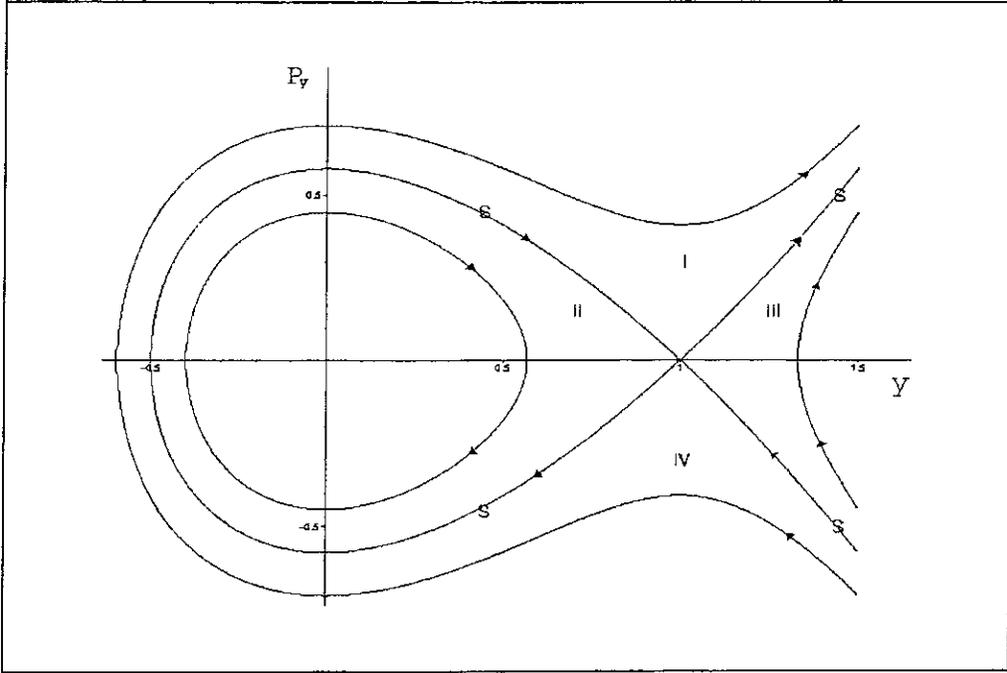


Figura 5.1: Retrato de fase do plano invariante $(x = 0, p_x = 0)$ contendo o ponto crítico P_2 . S são as separatrizes atingindo o centro-sela.

Na *figura 5.1* a região I é caracterizada por condições iniciais onde as órbitas tem energia $E_o > \frac{1}{6}$ e que escapam ($y \rightarrow \infty$). Idêntico comportamento ocorre para condições iniciais tomadas na região III , agora com energia $E_o < \frac{1}{6}$. Nas regiões II e IV temos condições iniciais cujas órbitas tem energia $E_o < \frac{1}{6}$ e $E_o > \frac{1}{6}$, respectivamente, apresentando comportamento ($y \rightarrow 0$).

Efetuada a expansão de Taylor da Hamiltoniana (5.1) em torno do centro-sela P_2 encontramos

$$H = E_{cr} + \frac{1}{2}p_y^2 - \frac{1}{2}\delta y^2 + \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(1 + 2K)x^2 + \mathcal{O}(3), \quad (5.30)$$

onde $E_{cr} = \frac{1}{6}$, $\delta y = y - 1$ e $\mathcal{O}(3)$ representa termos de ordem mais alta na expansão. Numa vizinhança linear do ponto crítico P_2 , os termos $\mathcal{O}(3)$ podem ser desprezados e a Hamiltoniana linearizada é escrita como,

$$H_l = E_{cr} + \frac{1}{2}p_y^2 - \frac{1}{2}\delta y^2 + \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(1 + 2K)x^2. \quad (5.31)$$

As variáveis canônicas (y, p_y, x, p_x) comportam-se como variáveis de Moser numa vizinhança linear do ponto crítico, como podemos observar da expressão da Hamiltoniana linearizada (5.31), e as constantes de movimento são expressas como

- Energia Hiperbólica

$$E_{hip} = \frac{1}{2}p_y^2 - \frac{1}{2}\delta y^2, \quad (5.32)$$

- Energia Rotacional

$$E_{rot} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(1 + 2K)x^2. \quad (5.33)$$

Substituindo as equações (5.32) e (5.33) na equação (5.31) obtemos a equação de partição da energia na vizinhança linear do ponto crítico

$$E_o - E_{cr} \approx E_{rot} + E_{hip}. \quad (5.34)$$

Vamos agora examinar os aspectos que evidenciam as propriedades universais dos pontos críticos centro-sela, no que diz respeito à distribuição de energia entre os modos rotacional e hiperbólico na região linear do centro-sela, satisfazendo a equação (5.34). Como nos modelos analisados anteriormente, vamos fazer uso da função histograma definida no capítulo 3. Aqui também estabelecemos um critério para fixar a geometria de um conjunto \mathcal{D} de condições iniciais tal que nenhuma polarização devido à geometria do volume da amostra manifeste-se na comparação dos histogramas, e tal que a função distribuição estatística obtida para ajustar os histogramas esteja conectada apenas com a não-integrabilidade do sistema. Para isto estabelecemos a convenção que o domínio \mathcal{D} de pontos do espaço de fase distribuídos homogênea e randomicamente deve ter a geometria tal que forneça histogramas para E_{hip} ou E_{rot} tendo a forma de um platô para a Hamiltoniana integrável associada. Devemos lembrar novamente que a Hamiltoniana integrável associada significa a Hamiltoniana do sistema na vizinhança linear do centro-sela. Um interessante teste para esta receita é o caso integrável $K = 0$; uma vez que a geometria de \mathcal{D} é fixada com esta convenção, o histograma gerado pela Hamiltoniana integrável resulta num platô independente do ponto da separatriz em torno do qual nós construímos \mathcal{D} . Nas coordenadas canônicas (x, y, p_x, p_y) temos $E_{rot} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(1 + 2K)x^2$ definida na vizinhança do ponto crítico P_2 e por isso a projeção do conjunto \mathcal{D} no plano (x, p_x) deve ter a forma de uma elipse com razão entre os eixos $\sqrt{(1 + 2K)}$.

A primeira análise que efetuamos com o modelo foi a dependência da forma do histograma com relação ao parâmetro K . Verificamos que a medida que K aumenta, o platô diminui em relação a “cauda”, e a forma do histograma satura para $K \geq 100$, sendo ajustado pela mesma lei de potência $P(x) \sim x^{-\gamma}$ utilizada nos modelos cosmológicos.

Verificamos também a influência da superfície de energia sobre a forma dos histogramas e apresentamos os resultados na *tabela 5.1*.

Tabela 5.1

Região	K	ΔE	R	$\gamma_{\text{PAW}} \pm \epsilon$	χ^2	intervalo	γ_{LL}	L
Col. ($y \rightarrow 0$)	100	$10^{-9,2}$	10^{-4}	$0,62 \pm 0,03$	0,03	1-32	$0,62 \pm 0,02$	0,998
Mistura	100	$10^{-8,4}$	10^{-4}	$0,62 \pm 0,03$	0,03	1-32	$0,62 \pm 0,02$	0,998
Esc. ($y \rightarrow \infty$)	100	$10^{-7,3}$	10^{-4}	$0,62 \pm 0,03$	0,02	1-32	$0,61 \pm 0,02$	0,998

Os valores de γ_{PAW} e γ_{LL} foram aproximados a segunda casa decimal. A definição dos parâmetros é a mesma da *tabela 3.2*. Denominamos de mistura o comportamento do modelo caracterizado pela presença dos dois comportamentos assintóticos: colapso ($y \rightarrow 0$) e escape ($y \rightarrow \infty$).

Na *figura 5.2* mostramos os histogramas e os gráficos $\text{Ln} \times \text{Ln}$ correspondente aos experimentos tabelados em *5.1*. Analisando os dados da *tabela 5.2* e os gráficos da *figura 5.2*, verificamos que a forma do histograma independe da região de energia onde realizamos o experimento. Gostaríamos de comentar que nos histogramas a origem do eixo das energias foi modificada subtraindo o valor da energia hiperbólica máxima e tomando o negativo deste resultado. Com a mudança na origem, os histogramas passam a ter o mesmo padrão apresentado pelos modelos cosmológicos, e assim podemos efetuar comparações entre eles.

Na *tabela 5.2* apresentamos os valores da inclinação da região linear que aparece nos gráficos $\text{Ln} \times \text{Ln}$ dos histogramas apresentados na *figura 5.3* para valores crescentes de K . Podemos observar que o expoente γ (inclinação da região linear) atinge o valor de saturação $\gamma = 0,62$ para $K \geq 100$. A razão para este grande valor de K é o seguinte. Nós notamos que para $K = 0$ a Hamiltoniana (5.1) é integrável, tal que podemos imaginar Kx^2y como um termo que quebra a integrabilidade. Neste sentido uma configuração dinâmica altamente não-integrável pode então ser definida conectada com altos valores de K . Além disso, como podemos observar da *figura 5.3*, a lei de distribuição emergirá como o melhor ajuste para uma extensa região que aparece no gráfico $\text{Ln} \times \text{Ln}$ para todos os histogramas obtidos com experimentos realizados na vizinhança linear de P_2 com grandes valores de K . Os histogramas usados para obtenção dos gráficos $\text{Ln} \times \text{Ln}$ são compostos por 70 intervalos e a região linear de saturação está compreendida entre o primeiro e o trigésimo segundo intervalo. A *tabela 5.2* também traz os valores de q que é o índice entrópico da estatística não extensiva de Tsallis. Na *figura 5.4* temos o gráfico

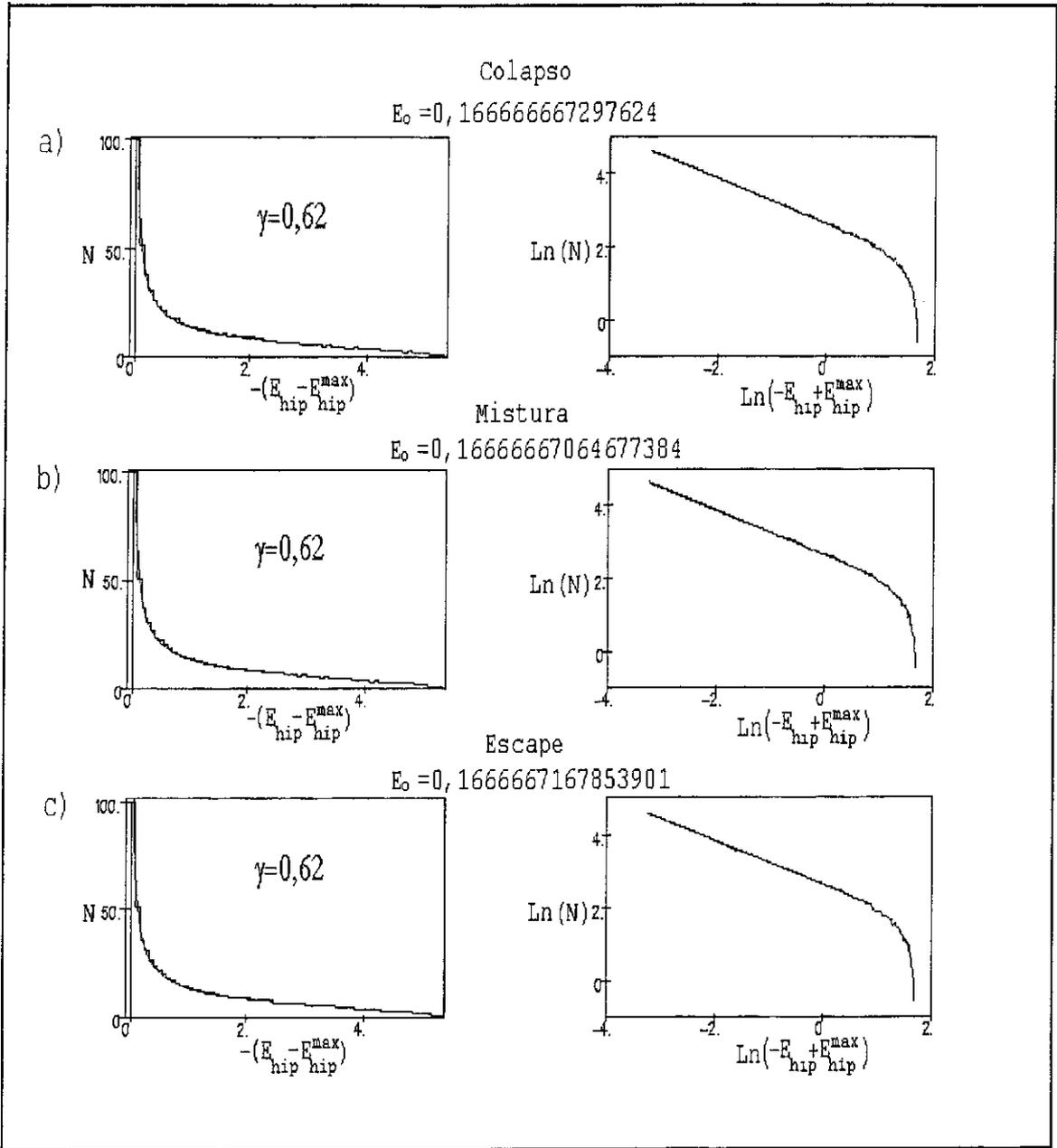


Figura 5.2: Histogramas da distribuição de E_{hip} e gráficos $Ln \times Ln$ associado para 90000 condições iniciais tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas P_o : $(y_o = -0,1, x_o = 0, p_{x_o} = 0)$ com $K = 100, R = 10^{-4}$ e o valor de p_y é obtido através do vínculo Hamiltoniano (5.1). Os valores das energias estão indicados na figura. Os eixos das energias para os histogramas foram multiplicados por: a) 10^9 , b) 10^8 e c) 10^7 . Os histogramas são compostos por 70 intervalos sendo que a região onde foi obtido o melhor ajuste para a lei de potência está compreendida entre o primeiro e o trigésimo segundo intervalo com valor para o expoente $\gamma = 0,62$.

relacionando os valores de K e q tabulados em 5.2 mostrando, de acordo com[26], um $q_{eq} \approx 2,8$ e o expoente $-0,35$ fazendo o papel de q_{mix} .

Tabela 5.2

K	γ_{LL}	L	intervalo	q
1	1,33	0,995	25-49	1,75
5	0,82	0,996	10-39	2,22
10	0,77	0,996	7-39	2,30
15	0,72	0,997	5-37	2,39
20	0,70	0,997	4-36	2,43
30	0,68	0,997	3-34	2,47
40	0,67	0,997	2-33	2,49
50	0,65	0,998	2-30	2,54
60	0,65	0,997	2-32	2,54
70	0,63	0,997	2-32	2,59
80	0,62	0,997	2-32	2,61
90	0,62	0,997	1-32	2,61
100	0,62	0,997	1-32	2,61

A relação entre q e γ é dado por $q = \frac{\gamma+1}{\gamma}$.

Testes numéricos foram realizados para analisar o comportamento do histograma em relação ao tamanho das flutuações permitidas as condições iniciais (volume da amostra). Encontramos que, usando o valor de K no qual a forma do histograma atinge a saturação, as mudanças no volume da amostra não alteram o valor do parâmetro γ . Desta forma, constatamos a existência de um padrão que caracteriza o comportamento de ponto crítico centro-sela em relação a distribuição das E_{hip} e E_{rot} , que independe dos valores destes parâmetros quando num regime de alta não-integrabilidade ($K \geq 100$).

Tradicionalmente o comportamento caótico da Hamiltoniana de Hénon-Heiles é analisado modificando-se a superfície de energia sobre o qual evoluem as órbitas. Além disso os valores destas energias estão distantes do valor da energia crítica $E_{cr} = \frac{1}{6}$. No nosso caso a superfície de energia é mantida constante e muito próxima a E_{cr} , e a análise do comportamento caótico do modelo é feita em relação ao parâmetro de controle K . O que obtivemos é que a variação do parâmetro K estabelece uma espécie de rota para o

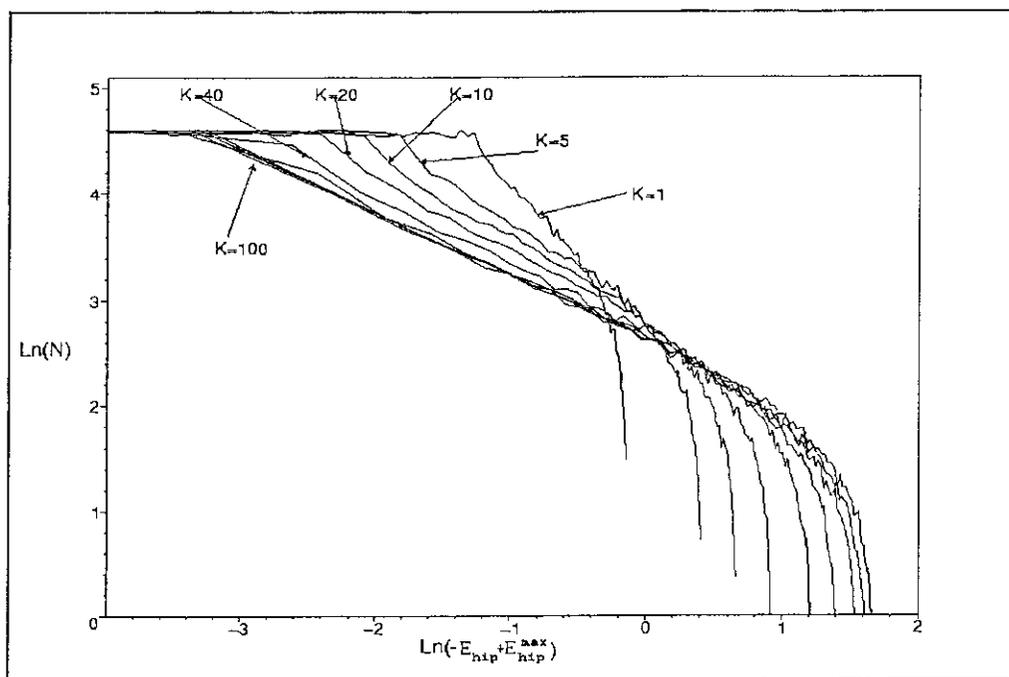


Figura 5.3: Gráfico $\ln \times \ln$ dos histograma para valores crescentes de K , $K = 1, 5, 10, 20, 40, 70, 80, 90, 100$. Vemos que a região linear aumenta quando K aumenta e a inclinação decresce atingindo seu valor de saturação $\gamma = 0,62$ para $K = 100$. O experimento foi realizado com 90000 condições iniciais, para cada valor de K , tomadas em torno do ponto sobre a separatriz de coordenadas $P_o : (y_o = -0,1, p_{y_o} = 0,5680375644522201, x_o = 0, p_{x_o} = 0)$ com $R = 10^{-4}$ e $E_o = 0,1666666706477384$.

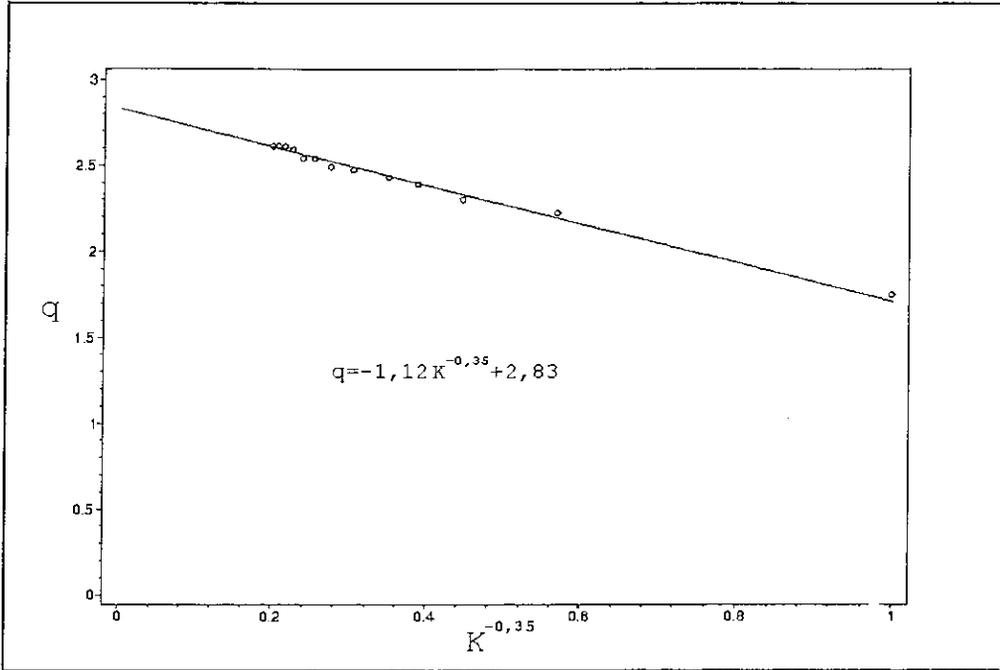


Figura 5.4: Gráfico relacionando K com q , onde obtivemos o valor do q_{eq} e do q_{mix} efetuando uma reparametrização do eixo horizontal.

caos ligada ao aumento da não-integrabilidade do sistema. E isto pode ser compreendido lembrando da relação existente entre o parâmetro que quebra a integrabilidade do sistema e o parâmetro de incerteza α , como discutido no capítulo 3. Também no modelo de Hénon-Heiles, um aumento no parâmetro de controle K provoca uma diminuição de α , correspondendo a um aumento na incerteza na previsão do estado assintótico do modelo. Como exemplo, efetuamos experimentos numéricos onde calculamos o parâmetro de incerteza α quando definimos os códigos $\text{colapso}(y \rightarrow 0)/\text{escape}(y \rightarrow \infty)$ para os estados assintóticos do modelo. Na *figura 5.5* mostramos a região linear que caracteriza α . Na *figura 5.6* apresentamos as saídas do potencial para os dois estados finais possíveis.

No capítulo 3 mostramos que há uma relação entre a variação do parâmetro que quebra a integrabilidade (no caso da gravitação a massa do campo escalar) com o valor do parâmetro de incerteza α e a forma do histograma. No caso de Hénon-Heiles ocorre comportamento idêntico entre a variação na forma do histograma, medida pelo parâmetro γ , e a variação de α , evidenciando uma ligação com a fractalidade do sistema. Resumindo: quando aumentamos o parâmetro K , estamos aumentando a não-integrabilidade do sistema, observamos que ocorre uma diminuição do platô em relação à “cauda” e uma

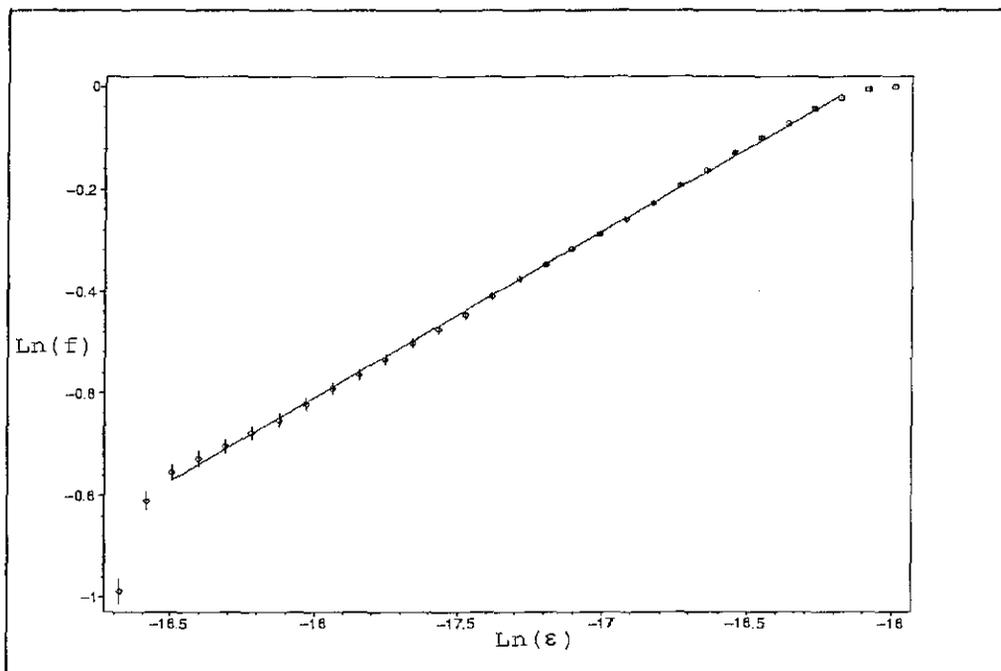


Figura 5.5: Gráfico de $f = k_o \epsilon^\alpha$ para $K = 100$, onde ϵ é o raio de incerteza para um conjunto \mathcal{D} de 5000 condições iniciais e α é o parâmetro de incerteza. O melhor ajuste nos fornece o valor de $\alpha \approx 0,33$, onde usamos o valor de $E_o = 0,1666666706477384$ para a superfície de energia. O ponto em torno do qual foram tomadas as condições iniciais foi $P_o : (y_o = -0,1, p_{y_o} = 0,5680375644522201, x_o = 0, p_{x_o} = 0)$ com $R = 10^{-4}$. A barra sobre o círculo é proporcional ao erro da medida para o intervalo considerado.

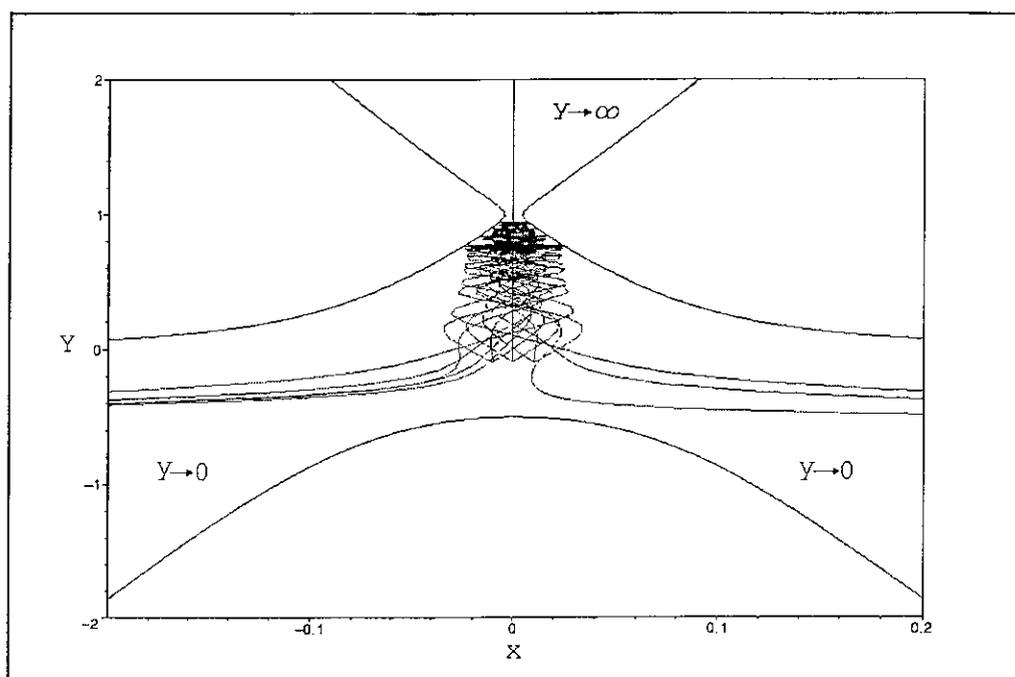


Figura 5.6: Projeção das órbitas sobre o plano (x, y) junto com a projeção da curva potencial $V(x) = \frac{1}{2}(y^2 + x^2) - \frac{1}{3}y^3 + x^2y = E_0$. Note que as órbitas “ricocheteiam” nas paredes do potencial até estabelecerem-se num estado final representado por uma das três saídas.

diminuição do parâmetro α , deste modo fica estabelecida uma relação entre os histogramas com o comportamento caótico do modelo.

Uma analogia para o padrão de evolução dos histogramas, conforme K cresce até o histograma atingir sua forma saturada, pode ser feita com a dinâmica de fluidos, na transição de um comportamento regular para um comportamento turbulento do fluxo à medida que o número de Reynolds cresce. Em 1880 Reynolds introduziu um parâmetro adimensional \mathcal{R} , hoje conhecido como número de Reynolds, dado por $\mathcal{R} = \frac{U L}{\nu}$, onde L e U são, respectivamente, uma escala característica e a velocidade do fluido, e ν é sua viscosidade cinética. Uma observação fundamental feita no estudo da turbulência é que um fluido que passa por um obstáculo mantido num ângulo perpendicular à direção do fluxo passa de um comportamento suave e regular para um comportamento caótico, turbulento quando o número de Reynolds é aumentado. Ainda, para valores altos do número de Reynolds \mathcal{R} , se um fluxo uniforme do fluido passa através de um *grid* regular de barras mantido perpendicular à direção do fluxo, o campo de velocidades do fluxo após o *grid* consiste na mesma velocidade uniforme junto com uma distribuição randômica de velocidade sobreposta. No caso do movimento turbulento, acredita-se que a equação de Navier-Stokes possa também dar uma solução para o campo de velocidade turbulento, (a componente turbulenta do fluxo sendo dada como parte das condições iniciais), e o problema seria seguir sua história. Entretanto, considerando as tendências recentes no tratamento da turbulência, a forma precisa da equação de Navier-Stokes é ignorada e o usual é fazer uso somente de seus aspectos gerais, como não-linearidade e dissipação. Turbulência pode então ser considerada como um problema em sistemas dinâmicos. Neste sentido não é necessário invocar singularidades para explicar o comportamento imprevisível do fluxo turbulento, nem existir qualquer ruído externo para explicar o comportamento randômico. Existe uma grande variedade de experimentos que exibem comportamento turbulento como, por exemplo, a convecção de Rayleigh-Bérnard ou o fluxo Taylor-Couette. Informações quantitativas sobre turbulência podem ser obtidas através da medição da velocidade do fluxo, por exemplo, como discutido em [35]. Em todos estes experimentos o procedimento consiste em analisar o sinal representando a componente randômica da velocidade do fluxo turbulento. Este sinal turbulento tem três aspectos relevantes: (i) parece desorganizado e apresenta estrutura em todas as escalas; (ii) parece imprevisível em seu comportamen-

to; (iii) algumas de suas propriedades são reproduzíveis. Esta última característica leva à construção do histograma do sinal mostrando que suas propriedades estatísticas são na verdade reproduzíveis. Tais observações tem motivado os teóricos a procurar uma descrição probabilística para Turbulência.

O sistema de Hénon-Heiles não é dissipativo e sim Hamiltoniano com dois graus de liberdade. No entanto, alguns aspectos da sua dinâmica assemelha-se ao comportamento turbulento, no sentido de que experimentos realizados com o fluxo hamiltoniano nesse sistema produzem sinais com os três aspectos acima. A natureza do comportamento randômico que aparece nestes experimentos dependerá de um parâmetro, por exemplo K , da Hamiltoniana, que em alguns aspectos assemelha-se ao número de Reynolds e permite caracterizar o regime de alta não-integrabilidade do sistema. Do ponto de vista de sistema Hamiltoniano, o aumento de K corresponderá a uma transição de uma configuração integrável ($K = 0$), para uma configuração completamente caótica o qual denotaremos regime de alta não-integrabilidade. Os aspectos cuja analogia queremos explorar aqui é o fato de que num sistema turbulento sempre existem quantidades associadas ao fluxo cujo comportamento randômico têm um padrão estatístico, como mencionado anteriormente, e que o padrão é atingido quando a transição do estado regular para o estado turbulento ocorre. Em nosso modelo uma quantidade análoga é a energia hiperbólica para as órbitas que visitam a região linear do centro-sela. Na *figura 5.7* apresentando o gráfico construído com E_{hip} versus o valor ordenado de y (ou qualquer outra variável que especifique o sistema), tendo como resultado um “sinal” altamente desorganizado evidenciando que E_{hip} é altamente sensível às flutuações nas condições iniciais. Este “sinal” apresenta todas as características descritas acima em (i)-(iii) de um sinal turbulento obtido em experimentos com fluidos em laboratório. Na *figura 5.8* apresentamos um conjunto de histogramas cuja mudança na forma traduz a transição de um comportamento regular para um comportamento caótico, associado ao regime de alta não-integrabilidade. O aumento de K corresponde a transição de uma configuração integrável de um sistema para uma configuração altamente não-integrável com um padrão estatístico universal. Os histogramas da *figura 5.8* estão conectados a sinais do tipo mostrado na *figura 5.7*. Tal figura estabelece uma analogia muito interessante com o início da turbulência em fluidos, como uma transição de um estado integrável ($K = 0$) para um estado completamente caótico

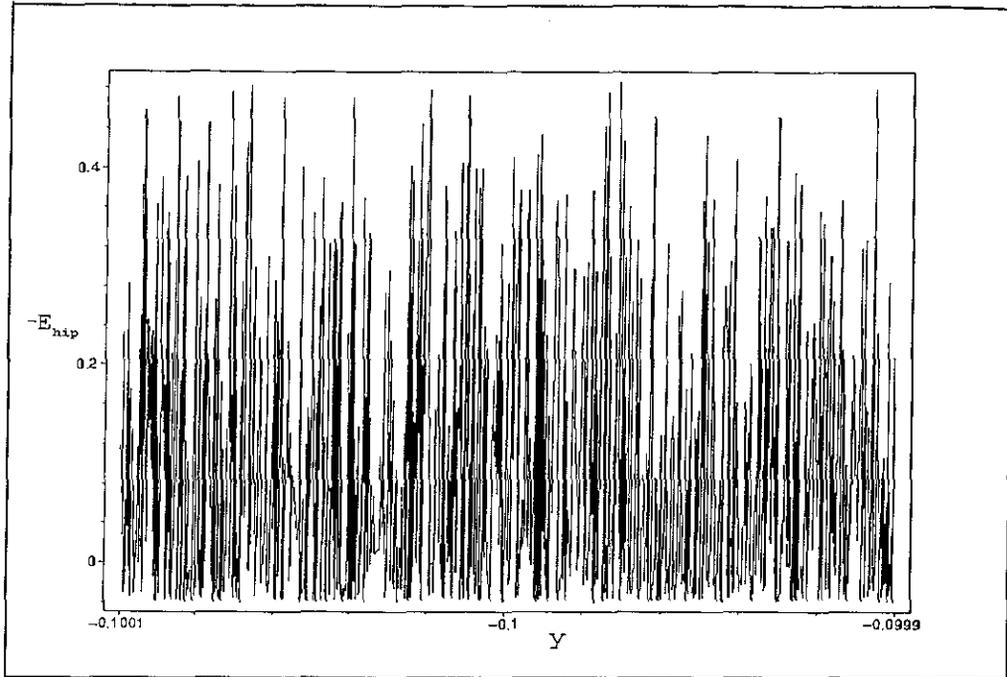


Figura 5.7: Sinal resultando de uma distribuição da E_{hip} versus o valor ordenado de y para o experimento realizado na vizinhança do centro-sela com $K = 100$. Nós consideramos uma amostra de 1000 condições iniciais tomada homogênea e randômica em torno do ponto $P_o : (y_o = -0,1, p_{y_o} = 0,5680375644522201, x_o = 0, p_{x_o} = 0)$ com $R = 10^{-4}$ e $E_o = 0,1666666706477384$. Os pontos foram conectados para sucessivos y para uma melhor visualização e o eixo das energias foi multiplicado por 10^7 .

($K \geq 100$) através do aumento de um parâmetro K “tipo Reynolds”; este é o efeito sobre um fluido Hamiltoniano quando este é obrigado a passar pela vizinhança linear do centro-sela. Dentro desta analogia nós podemos imaginar o centro-sela como uma espécie de “ponto” tendo o papel de produzir uma perturbação no fluxo do fluido Hamiltoniano quando este é restringido a passar pela região linear, e determinando padrões estatísticos universais para o “sinal” turbulento produzido para altos valores de K .

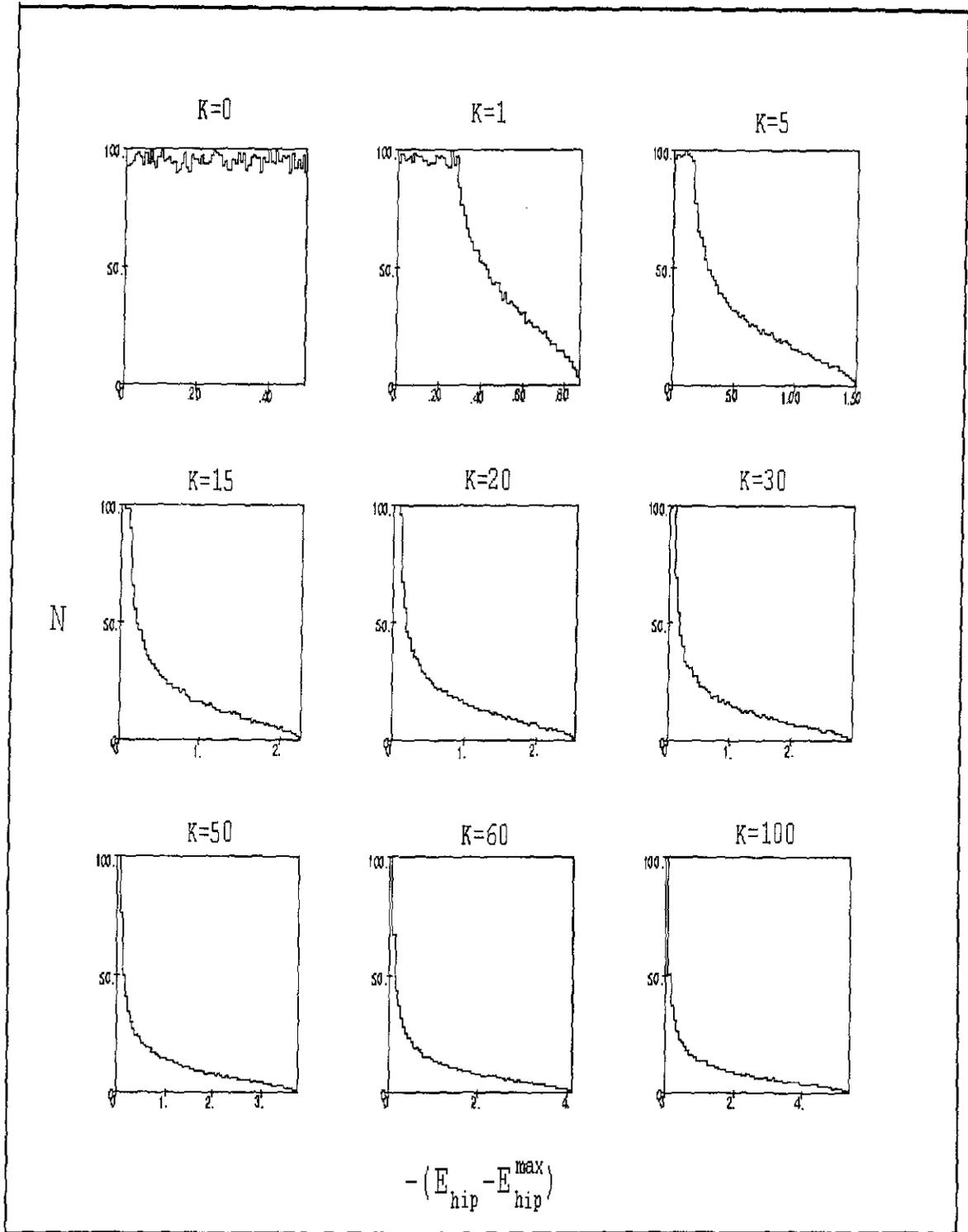


Figura 5.8: Sequência de histogramas mostrando a transição do regime integrável para um regime altamente não-integrável onde a forma do histograma atinge um padrão universal. É perfeitamente visível que o tamanho do platô diminui em relação à cauda do histograma quando K aumenta. Este comportamento é análogo ao que ocorre quando o número de Reynolds \mathcal{R} , para um fluido turbulento, é aumentado.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta tese estudamos modelos cosmológicos inflacionários caracterizados por valores de parâmetros ou regiões do espaço de fase de sua dinâmica, para os quais as equações de Einstein não são integráveis, apresentando uma dinâmica complexa. Esta complexidade é uma generalidade na dinâmica dos modelos em oposição ao estudo padrão de modelos cosmológicos. Os modelos cosmológicos estudados são espacialmente homogêneos do tipo Bianchi IX, e incluem modelos do tipo FRW com campo escalar acoplado a gravitação (minimalmente e conformalmente) ou modelo Bianchi IX axissimétrico. Este último caso inclui modelos de FRW com pequena anisotropia, que como mostramos, é suficiente para produzir uma dinâmica complexa. Vimos também que nos modelos com campo escalar a complexidade da dinâmica é causada por flutuações do campo escalar. Todos os modelos cosmológicos examinados possuem em seu espaço de fase um ou mais pontos críticos do tipo centro-sela que organizam a topologia desta dinâmica em estruturas cilíndricas, que emanam de órbitas periódicas instáveis e constituem a denominada *variedade centro de órbitas periódicas instáveis* do modelo. Na vizinhança do centro-sela estas estruturas cilíndricas são o produto topológico de uma órbita periódica instável da variedade centro com direções de sela, determinando pares de cilindros instáveis e estáveis emanando das órbitas periódicas. A estrutura cilíndrica é consequência da presença de uma constante cosmológica positiva na dinâmica dos modelos. A não integrabilidade do sistema dinâmico induz a infinitos cruzamentos transversais dos cilindros, denominados cruzamentos homoclínicos, analogamente ao caso de quebra e cruzamento de conexões homoclínicas no fenômeno homoclínico de Poincaré. Estes cruzamentos produzem uma dinâmica caótica nos modelos, cuja caracterização invariante é dada pela variedade interseção homoclínica, levando a uma extrema sensibilidade dos estágios finais do modelo em relação a flutuações nas condições iniciais. Outro aspecto importante dos modelos estudados é o fato de todos admitirem um plano invariante sobre o qual a dinâmica é integrável. Contido no plano invariante temos o ponto crítico e as separatrizes, que são soluções das equações dinâmicas completas. O exame do comportamento caótico nos modelos e suas consequências físicas constituíram os objetivos principais desta tese.

Podemos enumerar seis aspectos ligados a este comportamento caótico que surgem quando permitimos condições iniciais fora do plano invariante. O primeiro aspecto diz respeito a evolução da órbitas dependendo da região onde as condições iniciais são tomadas.

Como vimos acima, as órbitas evoluem obedecendo a organização montada pelo centro-sela no espaço de fase do modelo. Esta estrutura é composta pelas estruturas cilíndricas, (o cilindro estável e o instável), pelo plano invariante e pelas separatrizes sobre este plano que atingem o ponto crítico. Quando tomamos condições iniciais sobre o plano invariante o sistema é integrável e as soluções representam a evolução de um Universo de FRW homogêneo e isotrópico. Neste caso o fator de escala não possui movimento oscilatório e a dinâmica é caracterizada pelo desacoplamento entre os movimentos no setor rotacional e no setor hiperbólico. Isto corresponde a dizer que no caso do modelo Bianchi IX axisimétrico não introduzimos qualquer anisotropia, e no caso dos modelos com a presença de um campo escalar a evolução das órbitas se dá sem a influência do campo. Condições iniciais tomadas numa vizinhança do plano invariante correspondem, no caso do modelo axissimétrico, a introdução de uma pequena anisotropia obtida permitindo que os valores das condições iniciais flutuem no interior de um volume centrado num ponto pertencente a separatriz. Para esta situação, encontramos que o movimento dos setores rotacional e hiperbólico são misturados, não ocorrendo mais o desacoplamento (válido agora apenas para a região linear do centro-sela.) O acoplamento entre os dois modos leva a que os fatores de escala possuam movimentos oscilatórios em sua aproximação à vizinhança do centro-sela. No caso dos modelos com campo escalar, tomar condições iniciais em torno de um ponto sobre a separatriz corresponde a considerar a influência de flutuações do campo escalar na dinâmica das órbitas. Nestes casos, apesar de podermos considerar esta situação como uma perturbação do caso integrável, observamos o aparecimento de uma dinâmica complexa que, como vimos ao longo deste trabalho, provoca a perda de habilidade de prevermos o estado final do modelo. Observamos também que o comportamento acima não está restrito a condições iniciais tomadas numa pequena vizinhança da separatriz. Qualquer conjunto de condições iniciais tomado numa vizinhança do plano invariante que resulte em órbitas que visitem a vizinhança do centro-sela apresenta comportamento caótico. Condições iniciais tomadas fora do plano invariante, que corresponde a admitirmos uma forte influência da anisotropia ou do campo escalar sobre a evolução das órbitas do modelo, possuirão uma dinâmica complexa. Uma característica comum aos dois últimos casos (condições iniciais tomadas próximo ao plano invariante e longe deste) é que as órbitas possuem a propriedade de oscilarem por um tempo arbitrariamente

longo numa vizinhança do centro-sela. Esta fase oscilatória tem consequências físicas que discutiremos adiante.

O segundo aspecto é o que denominamos saída caótica para a inflação. Considerando os modelos cosmológicos inicialmente em expansão a partir de uma fase de Planck e devido ao comportamento caótico exposto acima, não temos mais condições de prever se a fase posterior será inflacionária ou não. Como já discutimos ao longo deste trabalho, o estágio final do modelo, quando as órbitas visitam uma vizinhança do centro-sela, está ligado ao sinal da energia hiperbólica, que é uma quantidade bem definida e dinamicamente conservada numa vizinhança linear do centro-sela. Se $E_{hip} > 0$, o modelo entra em uma fase inflacionária dirigindo-se para o atrator de de Sitter, caso $E_{hip} < 0$, ocorre o colapso do fator de escala do Universo. Como o sinal de E_{hip} depende da partição da energia ($\Delta E = E_{cr} - E_o$) nos modos rotacional e hiperbólico, e como mostramos, esta partição é caótica, não podemos mais prever o comportamento das órbitas após a passagem pela vizinhança do centro-sela. Neste sentido podemos falar de uma saída caótica para a inflação. Verificamos ainda que é sempre possível encontrar uma superfície de energia na qual as órbitas evoluirão apresentando esta incerteza no estágio final. Quando levamos em conta a presença de um campo escalar massivo, verificamos que o valor da massa m influencia no intervalo de energia onde o comportamento caótico ocorre. Quanto maior o valor de m maior este intervalo de energia. Como m está ligado ao termo perturbativo da Hamiltoniana, temos a primeira indicação de que sua variação leva o sistema a se tornar mais ou menos caótico. Mesmo para modelos onde não há a presença de um campo escalar, como no caso do modelo axissimétrico, a presença da anisotropia é suficiente para produzir uma partição de energia caótica levando a uma incerteza no estágio final do modelo. Os experimentos numéricos realizados sugerem que o campo escalar, assim como a anisotropia, tem um importante papel numa evolução não-linear ou caótica de modelos cosmológicos, podendo acionar ou não a fase inflacionária e a subseqüente dinâmica de formação de estrutura. Com estes resultados podemos deduzir que o ponto crítico centro-sela atua como um espalhador caótico induzindo uma saída caótica para a inflação em sistemas Hamiltonianos representando modelos cosmológicos.

O terceiro aspecto é sobre os valores “distribuídos” aos modos rotacional e hiperbólico da energia do modelo. Como comentamos acima, o ponto crítico centro-sela organiza o

espaço de fase de modo que a Hamiltoniana na região linear deste ponto tem a dinâmica separável nos movimentos rotacional (setor puro centro) e hiperbólico (setor puro sela), quando tomamos condições iniciais em torno de um ponto sobre a separatriz. A partição de energia entre estes dois modos é que vai determinar o estágio final do modelo através do sinal de E_{hip} . Além disso, verificamos que os valores distribuídos a cada um dos modos, apesar de serem completamente randômicos para conjuntos arbitrários de condições iniciais, os histogramas das E_{hip} e E_{rot} apresentam um padrão estatístico. Ou seja, o modo com que o centro-sela “distribui” a energia para os dois modos segue uma regra que é descrita por uma lei de potência na forma $p(x) \sim x^{-\gamma}$. O histograma apresenta três regiões distintas: a região do “pico”, que sofre forte influência da geometria da amostra de condições iniciais, a região intermediária, onde obtemos o ajuste através da lei de potência e a região da “cauda”, fortemente influenciada pelo volume finito da amostra. Através dos histogramas analisamos a influência do parâmetro de controle m ligado ao termo perturbativo da Hamiltoniana, no comportamento do caos no modelo e o que isto provoca na forma do histograma. Para tanto estabelecemos que a geometria da amostra deve ser escolhida de tal modo a não interferir na região do “pico” do histograma e que a variação do parâmetro de controle fosse o único responsável pelas modificações na forma do histograma. Após diversos experimentos concluímos que a geometria da amostra deve ser uma elipse no espaço de fase das variáveis ligadas ao movimento rotacional, como extensamente discutido no texto. Deste modo garantimos que as modificações na forma do histograma se devem unicamente à variação do parâmetro de controle responsável pela intensidade da não-integrabilidade. No estudo de qual distribuição estatística poderia ser usada para ajustar o histograma, verificamos que a distribuição de Maxwell-Boltzmann não era adequada pois o histograma apresenta um excesso na cauda em relação a esta distribuição. Observamos ainda que o comportamento de uma grande região do histograma, a região entre o “pico” e o final da “cauda”, pode ser ajustada através da distribuição de Tsallis, que foi proposta de modo a acomodar ao menos uma parte dos sistemas que tem comportamento anômalo em relação à estatística de Boltzmann-Gibbs. Isto coloca a estatística determinada pelo centro-sela no âmbito das estatísticas não-extensivas, abrindo novas perspectivas de estudo. Isto era de se esperar visto que estamos trabalhando com sistemas onde interações de longo alcance estão presentes, e onde conjuntos relevantes

no espaço de fase são caóticos e tem estrutura fractal. O sistema certamente não está no reino da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, o qual essencialmente se atem a não-interação ou interações de curto alcance em sistemas Hamiltoniano de muitos corpos. Estes resultados podem ter alguma aplicação física interessante para a dinâmica de modelos cosmológicos imediatamente antes do Universo entrar no regime inflacionário ou recolapsar, ambas alternativas dependendo das flutuações típicas do sistema. Por exemplo, nós podemos usar a função estatística (3.46) para calcular o valor médio da energia hiperbólica para um *ensemble* de Universos. Como nós mostramos ao longo do trabalho, o sinal da energia hiperbólica determina o estado final do modelo. Assim, o sinal da energia hiperbólica média irá determinar o comportamento a longo tempo do *ensemble*. Com o intuito de verificarmos a validade da lei de potência para o ajuste do histograma em modelos fora da Cosmologia, analisamos o caso da Hamiltoniana de Hénon-Heiles. Encontramos que o histograma mantém todos os aspectos apresentados nos casos cosmológicos, indicando fortemente que o padrão estabelecido pelo centro-sela é universal, sendo determinado pela não-integrabilidade do sistema para órbitas que visitam a região linear do centro-sela. Além disso, a organização do espaço de fase, determinada pelo centro-sela, onde as órbitas evoluem, é a mesma, não importando o sistema Hamiltoniano considerado. Por outro lado, as energias E_{hip} e E_{rot} são quantidades inerentes à presença deste ponto crítico em sistemas Hamiltonianos. E, como garantido pelo teorema de Moser, devem estar presentes em todos os sistemas Hamiltonianos em que aparece o centro-sela. Desta forma o padrão estabelecido para os valores das energias E_{hip} e E_{rot} deve ser o mesmo, não importando o modelo, já que a causa do aparecimento destas quantidades é a mesma, o centro-sela. A relação que há entre o teorema de Moser e o padrão estatístico estabelecido pelo centro-sela, é de caráter operacional. Todas as Hamiltonianas foram “preparadas” encontrando uma transformação canônica em que obtivemos a forma explícita de E_{hip} e E_{rot} , que possibilitou o cálculo numérico destas quantidades e a posterior construção dos histogramas. Assim, da mesma maneira que ao nos referirmos a um sistema Hamiltoniano possuindo um centro-sela, podemos dizer que a Hamiltoniana, na região linear do ponto crítico, pode ser escrita como a soma de duas constantes de movimento (como estabelece o teorema de Moser), podemos agora acrescentar que, além disso, os valores destas constantes obedecem a uma distribuição estatística, cujo histogra-

ma pode ser ajustado por uma curva da forma $p(x) \sim x^{-\gamma}$. E mais ainda, quando num regime de alta não integrabilidade um padrão é estabelecido a partir do qual a forma do histograma não sofre variação devido ao aumento do parâmetro de controle, como por exemplo m (modelos cosmológicos) e K (Hénon-Heiles).

Listamos abaixo as principais propriedades dos histogramas obtidas através de experimentos numéricos realizados com os modelos.

1. a forma do histograma é invariante de escala, isto é, independe do raio R da amostra \mathcal{D} das condições iniciais, a menos de uma mudança de intervalo;
2. a forma do histograma independe do parâmetro ($\Delta E = E_{cr} - E_o$) que permite-nos caracterizar se as órbitas são predominantemente colapso ou escape, após visitar a vizinhança linear do centro-sela;
3. a forma do histograma independe, a partir do valor de saturação, do parâmetro de controle m ou K ;
4. dentro dos erros estatísticos, o histograma, em um grande intervalo, é ajustado por uma distribuição do tipo $P(x) \sim x^{-\gamma}$ onde γ é o mesmo para todas os histogramas associados a Hamiltonianas independente de m ou K , ΔE e escalas;

O quarto aspecto que abordamos foi a relação entre o expoente γ da lei de potência e o parâmetro de incerteza α da lei $f \sim \epsilon^\alpha$, onde f é a fração das órbitas cujo resultado é incerto em relação ao estado final e ϵ é a perturbação nos valores das variáveis iniciais. Na literatura o cálculo de α se faz utilizando órbitas que evoluem por um longo tempo, inclusive passando por diversas vezes pela região do centro-sela. Como dissemos no texto estas são as chamadas órbitas recorrentes. No entanto, para os modelos cosmológicos analisados, as órbitas recorrentes são irreais, no sentido de que fisicamente não é aceitável que uma órbita atinja a região onde o fator de escala do Universo tenha valor zero. Deste modo parece-nos mais realista calcularmos, para estes modelos, o valor de α no momento da primeira passagem na vizinhança do centro-sela. Assim, definimos os códigos escape para inflação e recolapso, e calculamos o valor de α em relação a estes códigos. Como discutido no apêndice B, o valor de α está ligado ao valor da dimensão fractal do espaço

de fase das condições iniciais através da equação $d = N - \alpha$, onde $N = 3$ para os modelos analisados. O valor de α está ligado a sensibilidade dos estágios finais do modelo a flutuações nas condições iniciais. Para $\alpha = 0$ todas as órbitas são incertas no sentido de que qualquer perturbação nos valores das condições iniciais leva a um estado final diferente, no entanto, a dimensão fractal é inteira. Para $\alpha = 1$, indica que temos uma pequena quantidade de órbitas incertas, também apresentando a dimensão fractal inteira. No cálculo de α para nossos modelos encontramos $0,25 \leq \alpha \leq 0,35$, o que indica um espaço de fase fractal levando o sistema a um comportamento caótico. Este resultado reforça ainda mais a característica de centro-sela de espalhador caótico. Como a razão para o centro-sela ser um espalhador caótico é devido a não-integrabilidade, cuja atuação é mostrada através do histograma, deve haver uma ligação entre o valor do expoente γ e o valor de α . Devemos lembrar também que o histograma é construído com os valores das energias no momento da primeira passagem. No texto mostramos que com o aumento do parâmetro de controle ocorre um aumento da não-integrabilidade e isto acarreta um aumento no caos do modelo. Este aumento no caos é verificado pela diminuição do valor de γ e de α . O que obtivemos é que, quando atingimos o regime que denominamos de alta não-integrabilidade, os valores de γ e α , para todos os modelos, satisfazem a relação

$$0,9 \leq \gamma + \alpha \leq 1,1,$$

indicando que a variação na forma do histograma, de algum modo, está ligada a um aumento do caos do modelo em relação aos valores das E_{hip} e E_{rot} .

O quinto aspecto discutido foram as consequências físicas do comportamento oscilatório das órbitas na vizinhança do centro-sela, gerando um mecanismo de amplificação por ressonância paramétrica de perturbações inomogêneas com um espectro selecionado. Mostramos que a equação da evolução das perturbações do campo escalar pode ser escrita como uma equação de Mathieu, com a propriedade da existência de zonas de instabilidade no espaço paramétrico da equação, para $V''(\phi^{(o)}) > 0$, onde as soluções crescem exponencialmente, para um espectro selecionado de modos k . Estas perturbações podem ser vistas como uma “flutuação” sobre o espectro de matéria, podendo ser importante para explicar a hierarquia de escalas observada no Universo atual.

Por último, utilizamos o resultado de que o expoente γ mantém uma relação com α e fizemos uma analogia entre o comportamento da dinâmica de um fluido no início da

fase turbulenta com um fluxo Hamiltoniano na transição de um regime integrável para um regime de alta não-integrabilidade. Observamos que estes dois fluxos apresentam aspectos muito semelhantes no que diz respeito ao comportamento randômico de grandezas relacionadas com a velocidade do fluido e a energia hiperbólica do fluxo Hamiltoniano na vizinhança do centro-sela.

Apêndice A

Hamiltonianas

A.1 Modelo *FRW* com campo escalar acoplado à gravitação

Nesta seção vamos obter as Hamiltonianas que utilizamos para descrever o comportamento caótico dos modelos nos casos onde o campo escalar está acoplado conformalmente e minimalmente à gravitação.

Vamos admitir o modelo inflacionário *FRW* com campo escalar massivo acoplado mais fluido perfeito (dependente apenas do tempo) e constante cosmológica.

Seja o elemento de linha,

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 \right], \quad (\text{A.1})$$

e a densidade lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_f, \quad (\text{A.2})$$

onde \mathcal{L}_G é a densidade lagrangeana da gravitação, \mathcal{L}_φ é a densidade lagrangeana do campo escalar φ , \mathcal{L}_I é a densidade lagrangeana da interação entre o campo escalar e a gravitação e \mathcal{L}_f é a densidade lagrangeana do fluido perfeito definidas pelas equações,

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{2} \right), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L}_\varphi = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \varphi^{,\nu} - V(\varphi) \right), \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{L}_I = \sqrt{-g} \left(\frac{\xi}{2} \varphi^2 R \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{L}_f = \sqrt{-g} \rho, \quad (\text{A.6})$$

no qual g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, $V(\varphi)$ é o potencial efetivo do campo escalar e R é o escalar de Ricci dado por

$$R = -\frac{6}{N^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + N^2\frac{k}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN}\right). \quad (\text{A.7})$$

A ação é dada por

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}. \quad (\text{A.8})$$

Na densidade lagrangeana do fluido perfeito, com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, tomamos $\rho = E_o a^{-3\gamma}$, sem nenhum grau de liberdade dinâmico. Isto resulta da suposição de pura interação gravitacional do fluido (com tensor momento-energia (3.2)), e das equações de Einstein. Isto é justificado pela seguintes hipóteses:

(i) fluido homogêneo e isotrópico, o que implica na ausência de gradiente de pressão e portanto de acelerações relativas entre as partes do fluido;

(ii) fluido perfeito, o que implica na conservação da entropia do fluido;

portanto o fluido não tem graus de liberdade dinâmicos e a variação temporal de ρ é consequência somente da expansão cosmológica dos volumes próprios do Universo.

Assim de (A.8) temos,

$$S = \int_V \frac{dr r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} dr d\theta d\varphi \int dt N a^3 \left[-\frac{R}{2}(1 - \xi\varphi^2) + \frac{1}{2N^2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) - E_o a^{-3\gamma} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Como o modelo é homogêneo com seções espaciais compactas, eliminamos, por uma integração imediata, o elemento de volume espacial na ação, resultando em

$$S \propto \int dt N a^3 \left[-\frac{R}{2}(1 - \xi\varphi^2) + \frac{1}{2N^2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) - E_o a^{-3\gamma} \right], \quad (\text{A.10})$$

ou ainda,

$$S \propto \int dt \left[\frac{3}{N}(\ddot{a}a^2 + \dot{a}^2 a + N^2 k a - \frac{\dot{a}\dot{N}a^2}{N})(1 - \xi\varphi^2) + \frac{a^3}{2N}\dot{\varphi}^2 - N a^3 V(\varphi) - N E_o a^{3(1-\gamma)} \right]. \quad (\text{A.11})$$

Mas $\frac{\ddot{a}a^2}{N}(1 - \xi\varphi^2) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{a}a^2(1 - \xi\varphi^2)}{N} \right] - \frac{2\dot{a}^2 a}{N}(1 - \xi\varphi^2) + \frac{\dot{a}a^2\dot{N}}{N^2}(1 - \xi\varphi^2) + \frac{2}{N}\xi\dot{a}a^2\varphi\dot{\varphi}$ e descartando o termo em derivada total, substituindo o resultado em (A.11) obtemos

$$S \propto \int dt \left[\frac{-3\dot{a}^2 a}{N} + 3kaN + \frac{a^3\dot{\varphi}^2}{2N} + \frac{3\xi\dot{a}^2 a\varphi^2}{N} + \frac{6\xi\dot{a}a^2\varphi\dot{\varphi}}{N} - 3kaN\xi\varphi^2 - N a^3 V(\varphi) - N E_o a^{3(1-\gamma)} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Para uma simplificação futura, vamos efetuar a transformação $\varphi = \psi a^n$, da qual obtemos

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi}a^n + \psi(na^{n-1}\dot{a}), \quad (\text{A.13})$$

e substituindo na expressão (A.12), encontramos

$$S \propto \int dt \left[\frac{-3\dot{a}^2 a}{N} + 3kaN - Na^3 V(\psi a^n) - NE_o a^{3(1-\gamma)} + \frac{a^{2n+3} \dot{\psi}^2}{2N} + \frac{na^{2n+2} \dot{\psi} \dot{a} \psi}{N} \right. \\ \left. + \frac{n^2 \dot{a}^2 \psi^2 a^{2n+1}}{2N} + \frac{3}{N} \xi a^{2n+1} \dot{a}^2 \psi^2 + \frac{6}{N} \xi a^{2n+2} \dot{a} \psi \dot{\psi} + \frac{6}{N} \xi na^{2n+1} \dot{a}^2 \psi^2 - 3N \xi ka^{2n+1} \psi^2 \right]. \quad (\text{A.14})$$

Vamos eliminar os termos cruzados $\dot{a} \dot{\psi}$ na expressão (A.14) fazendo

$$n + 6\xi = 0, \quad (\text{A.15})$$

e a equação (A.14) passa a ser escrita como

$$S \propto \int dt \left[\frac{-3\dot{a}^2 a}{N} + \frac{a^{(3-12\xi)}}{2N} \dot{\psi}^2 + \frac{3(1-6\xi)\xi}{N} \dot{a}^2 \psi^2 a^{(1-12\xi)} + 3Nak \right. \\ \left. - Na^3 V(\psi a^{-6\xi}) - NE_o a^{3(1-\gamma)} - 3k\xi N \psi^2 a^{(1-12\xi)} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Da equação (A.16) podemos tirar a expressão da Lagrangeana

$$L = \frac{-3\dot{a}^2 a}{N} + \frac{a^{(3-12\xi)}}{2N} \dot{\psi}^2 + \frac{3(1-6\xi)\xi}{N} \dot{a}^2 \psi^2 a^{(1-12\xi)} + 3Nak \\ - Na^3 V(\psi a^{-6\xi}) - NE_o a^{3(1-\gamma)} - 3k\xi N \psi^2 a^{(1-12\xi)}, \quad (\text{A.17})$$

e da definição dos momentos canonicamente conjugados a a e ψ , $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}$ e $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$, respectivamente, temos

$$p_a = \frac{-6\dot{a}a}{N} + \frac{6(1-6\xi)\xi}{N} \dot{a} \psi^2 a^{(1-12\xi)}, \quad (\text{A.18})$$

$$p_\psi = \frac{a^{(3-12\xi)}}{2N} \dot{\psi}, \quad (\text{A.19})$$

onde, após uma imediata identificação dos termos, podemos escrever

$$S \propto \int dt \left\{ \dot{a} p_a + \dot{\psi} p_\psi - N \left[\frac{p_a^2}{12a[-1 + (1-6\xi)\xi \psi^2 a^{-12\xi}]} + \frac{p_\psi^2}{2a^{(3-12\xi)}} - 3ak \right. \right. \\ \left. \left. + a^3 V(\psi a^{-6\xi}) + E_o a^{3(1-\gamma)} + 3k\xi \psi^2 a^{(1-12\xi)} \right] \right\}. \quad (\text{A.20})$$

Considerando N como um multiplicador de Lagrange, da variação da ação em relação a N obtemos

$$\frac{\delta S}{\delta N} \equiv 0, \quad (\text{A.21})$$

o que implica em,

$$\frac{\delta NH}{\delta N} = 0 \implies H = 0. \quad (\text{A.22})$$

Assim, a expressão do vínculo Hamiltoniano escreve-se

$$H = \frac{p_a^2}{12a[-1 + (1-6\xi)\xi \psi^2 a^{-12\xi}]} + \frac{p_\psi^2}{2a^{(3-12\xi)}} - 3ak + a^3 V(\psi a^{-6\xi}) + E_o a^{3(1-\gamma)} + 3k\xi \psi^2 a^{(1-12\xi)} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Acoplamento conforme

Para o caso onde o campo escalar está acoplado conformalmente à gravitação, tomamos o valor de $\xi = \frac{1}{6}$ e fixamos a gauge para $N = a$ obtendo a expressão para o vínculo (A.23),

$$H = \frac{p_a^2}{12} - \frac{p_\psi^2}{2} + 3a^2k - \frac{k}{2}\psi^2 - a^4V\left(\frac{\psi}{a}\right) - E_o a^{(4-3\gamma)} = 0, \quad (\text{A.24})$$

onde, com a escolha da gauge, passamos a usar o tempo conforme definido como,

$$d\eta = \frac{dt}{a}. \quad (\text{A.25})$$

Acoplamento mínimo

Para o caso onde o campo escalar está acoplado minimalmente à gravitação, tomamos o valor de $\xi = 0$ e fixamos a gauge para $N = a$ obtendo a expressão para o vínculo (A.23),

$$H = \frac{p_a^2}{12} - \frac{p_\psi^2}{2a^2} + 3a^2k - a^4V(\psi) - E_o a^{(4-3\gamma)} = 0, \quad (\text{A.26})$$

onde, com a escolha da gauge, passamos a usar o tempo conforme definido como,

$$d\eta = \frac{dt}{a}. \quad (\text{A.27})$$

A.2 Modelo de Hénon-Heiles

Usando a técnica do mapa de Poincaré, podemos compreender melhor como um sistema passa de um comportamento regular para um comportamento caótico. Os modelos analisados nesta tese tem espaço de fase 4-dimensional, possuindo um termo perturbativo constituído por um parâmetro de controle (m ou K) que, quando nulos, tornam o sistema integrável, possibilitando às órbitas evoluírem sobre uma superfície bidimensional de um torus. Se utilizarmos o mapa de Poincaré neste caso, encontraremos superfícies fechadas indicando a presença destes torus. Com a variação do parâmetro de controle o sistema torna-se não-integrável, e as trajetórias ganham a liberdade de mover-se fora da superfície do torus num espaço 3-dimensional. Verificamos, neste caso, que o mapa de Poincaré apresenta torus destruídos, indicando o movimento randômico das órbitas neste espaço tridimensional. A pergunta que nos vem é como ocorre a destruição dos torus se de maneira gradual ou abrupta?

Para responder a esta pergunta, vamos examinar um modelo introduzido pela primeira vez por Hénon-Heiles[13] como um modelo que descreve o movimento de uma estrela no interior de uma galáxia. A Hamiltoniana tem dois graus de liberdade e tem a forma

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + [q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3]. \quad (\text{A.28})$$

Esta Hamiltoniana representa dois osciladores harmônicos simples acoplados por um termo cúbico, o qual torna a Hamiltoniana não-integrável. Se tivermos $q_1 = x, q_2 = y, p_1 = p_x, p_2 = p_y$ (com x e y como coordenadas espaciais num plano), então a Hamiltoniana pode também ser interpretada como um modelo para uma partícula movendo-se em duas dimensões sob a ação de uma força descrita por uma função energia potencial

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \quad (\text{A.29})$$

Esta função energia potencial tem um mínimo local próximo da origem ($x = 0, y = 0$). Se a partícula inicia o movimento próximo da origem com energia $E_o < \frac{1}{6}$, ela permanecerá em órbita próximo da origem durante todo o tempo. Se a energia for $E_o > \frac{1}{6}$ a partícula pode escapar do mínimo local e ir ao infinito. Se a energia for muito pequena, a partícula permanece próximo da origem e as órbitas parecerão como as de uma partícula com movimento periódico num potencial harmônico simples.

Apesar do sistema ser quadridimensional, a conservação da energia impõe que as órbitas devem permanecer num volume tridimensional, já que o sistema é Hamiltoniano. Nós usaremos a técnica da seção de Poincaré para reduzir o movimento destas órbitas neste volume tridimensional a um plano. Tradicionalmente plota-se a órbita no plano (p_y, y) com superfície de seção de Poincaré tomada em $x = 0$, e é o que faremos.

Antes de construirmos as seções de Poincaré, vamos descrever rapidamente, em linhas gerais, o artigo de Hénon-Heiles. No artigo “The applicability of the third integral of motion: some numerical experiment” [13], M. Hénon e C. Heiles estudam a possibilidade da existência de uma terceira integral de movimento num potencial com um eixo de simetria, através de experimentos numéricos simulando o movimento de uma estrela em tal potencial. A pergunta que tentam responder é o que acontece com a trajetória de uma estrela quando esta revoluciona por um longo tempo no interior de uma galáxia?

Inicialmente os autores verificaram que o problema considerado é completamente equivalente ao problema do movimento de uma partícula num plano com a existência de três integrais de movimento independentes. Uma integral é a energia da estrela e outra integral é não-isolante, sem significado físico. Não existe a integral correspondente ao momento angular, pois o potencial, por ser arbitrário, não tem necessariamente que ter alguma simetria. O que se seguiu foi a procura sob quais condições esta segunda integral passava a existir. Para esta análise os autores empregaram a técnica da seção de Poincaré verificando o comportamento das órbitas dentro do volume

$$\frac{1}{2}p_y + V(x, y) \leq E. \quad (\text{A.30})$$

Se não existir a segunda integral de movimento, o volume acima será totalmente preenchido pelas trajetórias e se chamará ergótico. Se existir esta segunda integral, as trajetórias estarão sobre uma superfície. Já comentamos no início que com o aumento de energia da estrela, esta pode escapar ou permanecer ligada próximo ao mínimo do potencial. Os experimentos realizados foram conduzidos aumentando a energia e analisando os pontos gravados no plano de Poincaré. Na *figura B.1* apresentamos o resultado destes experimentos composto pela seção de Poincaré e o gráfico do potencial correspondente a energia considerada.

Como podemos observar da *figura A.1*, quando usamos $E_o = \frac{1}{12}$ encontramos, para o plano de coordenadas (y, p_y) , que os pontos estão sobre uma curva. Esta figura prova

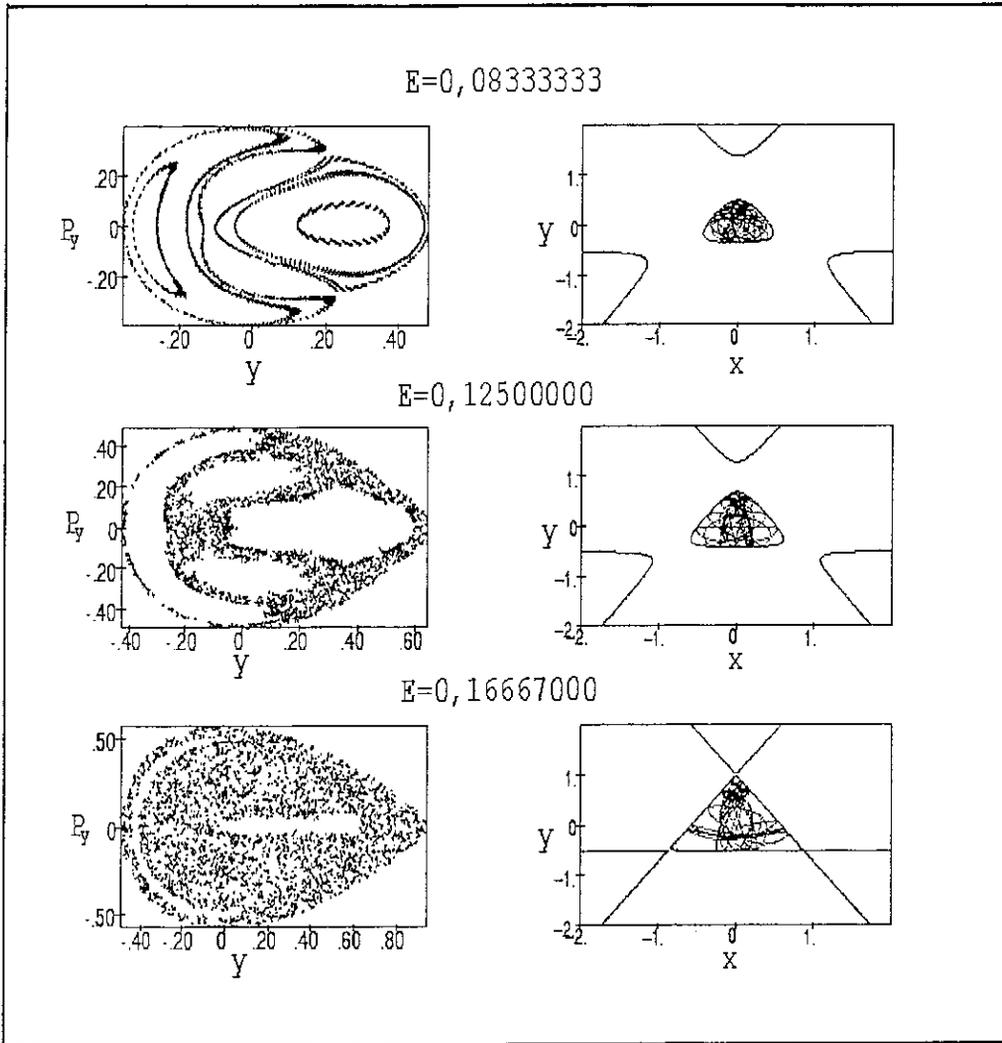


Figura A.1: Mapa de Poincaré para uma variação de energia crescente, onde podemos observar a destruição dos torus. Com o aumento da energia a órbita passa a ter liberdade de percorrer o volume tridimensional limitado pelo vínculo Hamiltoniano. Ao lado de cada mapa apresentamos o potencial correspondente a cada energia e o comportamento das órbitas no interior deste potencial.

da existência da segunda integral do movimento. A surpresa aparece quando a energia é aumentada, por exemplo para $E_o = 0,125$. Aqui temos pontos pertencentes a mesma trajetória onde é impossível desenhar qualquer curva através deles. Eles parecem distribuir-se randomicamente nas áreas livres entre as curvas fechadas. Quando aumentamos ainda mais a energia, as curvas fechadas diminuem e os pontos isolados, pertencentes a uma única trajetória, cobrem quase que toda área, como mostra o gráfico para $E_o = 0,16667$.

A conclusão a que se chega é que para energias $E_o > \frac{1}{6}$ as linhas equipotenciais se abrem e a estrela pode eventualmente escapar para o infinito. Em termos de segunda integral temos que quando a energia é pequena, a segunda integral sempre existe. Para energias acima da energia crítica ($E_{cr} = \frac{1}{6}$) existem um número infinito de regiões separadas no espaço de fase tal que a segunda integral parece existir. Porém o espaço entre elas é uma região ergótica no qual a integral é não isolante e a estrela pode ou não escapar. A medida que a energia é aumentada a região ergótica aumenta e tende a ocupar o espaço todo. Respondendo a pergunta inicial, a destruição dos torus se dá de maneira gradual com o aumento da energia da estrela.

A formulação da Hamiltoniana de Hénon-Heiles que usaremos para o estudo do comportamento do ponto crítico centro-sela, foi obtida do artigo [34] e contém quatro parâmetros de ajuste,

$$E = \frac{1}{2}(p_y^2 + p_x^2 + c_1 y^2 + c_2 x^2) + ax^2 y - \frac{1}{3}by^2. \quad (\text{A.31})$$

Sem perda de generalidade, vamos redefinir os parâmetros que aparecem na equação (A.31) escrevendo,

$$c_1 = c_2 = m^2, \quad a = K \quad \text{e} \quad \frac{b}{3} = \Lambda,$$

deste modo a Hamiltoniana passa a ser escrita como,

$$E = \frac{1}{2}(p_y^2 + p_x^2) + \frac{m^2}{2}(y^2 + x^2) + Kx^2 y - \Lambda y^3. \quad (\text{A.32})$$

que é expressão que usamos nesta tese, com $m = 1$ e $\Lambda = \frac{1}{3}$.

Apêndice B

Parâmetro de Incerteza e Dimensão

Fractal

Queremos responder a pergunta de quanto caótico é um sistema. Gostaríamos de ter um modo quantitativo de classificar o verdadeiro caos separando-o do comportamento ruidoso e probabilístico devido a complexidade do sistema. Com o objetivo de descrever e quantificar o comportamento caótico, iremos utilizar uma quantidade relacionada à natureza geométrica das trajetórias no espaço de fase. Para tanto, permitiremos que o sistema evolua por um longo período de tempo e então examinaremos a geometria do espaço de fase das condições iniciais dando a cada estado final um código. Podemos dizer que neste caso estaremos olhando para as “pegadas” deixadas pelas trajetórias ao evoluírem. Como estamos trabalhando com aspectos geométricos do espaço de fase, uma das maneiras de quantificar o caos seria determinar a dimensão da figura geométrica formada no espaço de fase das condições iniciais, ou seja, calcular a dimensionalidade das figuras formadas. A dimensionalidade do espaço de fase nos dá importantes informações sobre o comportamento dinâmico do sistema. Aspectos como a sensibilidade do estado final com relação às condições iniciais e como são as fronteiras que separam regiões de diferentes comportamentos, podem ser verificados através da dimensionalidade.

A questão que se coloca é como determinar quantitativamente a dimensionalidade. Em primeiro lugar existem diferentes definições de dimensionalidade e que fornecem diferentes valores numéricos para um mesmo caso. O conceito de dimensão que usaremos aqui aplica-se a conjuntos em espaços onde o conceito de distância, isto é, uma métrica, é definida. A

definição de dimensão que iremos adotar é denominada de *box-counting* ou *capacidade*[20].

Uma descrição teórica e sumária do método é a seguinte: usando cubos de lado ϵ , vamos cobrir o espaço ocupado pelo objeto geométrico. Depois de coberto, efetuamos a contagem dos cubos fazendo o tamanho desses cubos cada vez menor. A quantidade de cubos necessário para cobrir o objeto, quando as dimensões do cubo tendem a zero, dá a dimensão do objeto. A definição de *capacidade* de um conjunto foi originalmente definida por Kolmogorov e é expressa por,

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Ln } N(\epsilon)}{\text{Ln } \left(\frac{1}{\epsilon}\right)}, \quad (\text{B.1})$$

onde, se o conjunto em questão é um sub-conjunto limitado de um espaço Euclidiano R^p , $N(\epsilon)$ é o número mínimo de cubos p -dimensionais de lado ϵ necessário para revestir o conjunto. Exemplo: para um ponto, $N(\epsilon) = 1$, para uma linha, $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-1}$, para uma área, $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-2}$ e de acordo com a equação acima temos $d_c = 0, 1, 2$ respectivamente. Para conjuntos mais gerais, d_c pode não ser inteiro (conjuntos fractais). E ainda, para sistemas Hamiltonianos, que são os casos analisados neste trabalho, a dimensionalidade d do conjunto de pontos gerados pelas trajetórias na região de fronteira, deve ser $d > D - 1$, (D é a dimensão do espaço de fase), pois as trajetórias estão confinadas a uma superfície de energia constante. Sistemas dinâmicos típicos tem em comum o fato de possuírem fronteiras fractais, que são regiões do espaço de fase das condições iniciais onde temos grande dificuldade em prever para qual estado assintótico o sistema eventualmente se estabelece. Isto é, condições iniciais localizadas em diferentes regiões, porém muito próximas, podem gerar órbitas que exibem diferentes comportamentos assintóticos. Devido a não-linearidade, flutuações nas condições iniciais do sistema evoluem de tal modo que podem alterar completamente o estado final das trajetórias não-perturbadas do espaço de fase. Estas fronteiras fractais apresentam as seguintes propriedades:

- tem estrutura fina, isto é, apresentam detalhes sob escalas arbitrariamente pequenas;
- estruturas bastante irregulares para serem descritas numa linguagem geométrica tradicional;
- alguma forma de auto-similaridade.

Vamos agora analisar a influência de uma fronteira fractal sobre o comportamento do sistema. Sistemas dinâmicos não-lineares típicos podem ter mais de um possível estado final assintótico[37]. Este estado final atingido depende do estado inicial do sistema. Devemos assim, considerar em que extensão a incerteza nas condições iniciais leva-nos a incerteza no estado final. Para compreendermos melhor a situação vamos considerar o espaço de fase bi-dimensional mostrado na *figura A.1*. Existem dois possíveis estados finais denominados de A e B . Condições iniciais de um lado direito da fronteira Σ , eventualmente dirigem-se para B , enquanto aqueles do lado esquerdo de Σ eventualmente vão para A . Se as condições iniciais são incertas por uma quantidade ϵ , nós não podemos dizer, a priori, para qual estado a órbita eventualmente tende. Na *figura B.1*, 1 e 2 representam duas condições com incerteza ϵ , ou seja, a condição inicial de fato poderia estar em qualquer lugar num disco de raio ϵ centrado no valor da medida. A órbita gerada pela condição inicial 1 está ligada ao estado B , enquanto a condição 2 é incerta no sentido que a órbita gerada pode ter estado final em A ou B . Vamos assumir que condições iniciais são escolhidas randomicamente com distribuição uniforme no retângulo mostrado na *figura B.1*. Em particular, considere a fração de incertas no volume do espaço de fase dentro do retângulo mostrado e denote esta fração de f . Para o caso mostrado, condições iniciais dentro da faixa de largura 2ϵ , centradas na fronteira, são incertas. Claramente temos $f \sim \epsilon$, ou seja, o número de condições incertas é proporcional a incerteza na medida. Ocorre que para sistemas dinâmicos não-lineares a relação de f com ϵ é do tipo $f \sim \epsilon^\alpha$, onde $\alpha < 1$ e dissemos que existe um estado final sensível¹. A noção de estado final sensível será desenvolvida em termos da fração do espaço de fase consistindo das condições iniciais, o qual são incertas quando especificadas com erro ϵ . A determinação do grau de sensibilidade (incerteza) não será feita sobre o tamanho da fração de incertas do espaço de fase, e sim sobre o modo com que esta fração varia quando o erro é reduzido. Quando $\alpha \ll 1$ uma substancial melhora na incerteza das condições iniciais ϵ , fornecerá somente relativo decréscimo na incerteza do estado final quando medido por f . Para o caso da *figura B.1* temos $\alpha = 1$ onde as fronteiras são suaves.

Queremos agora obter a expressão que relaciona a dimensionalidade d , a dimensão do

¹Se a condição inicial especificada com erro ϵ está dentro daquela distância da fronteira fractal, o estado final para o qual ela se estabelecerá não pode ser predito com certeza.

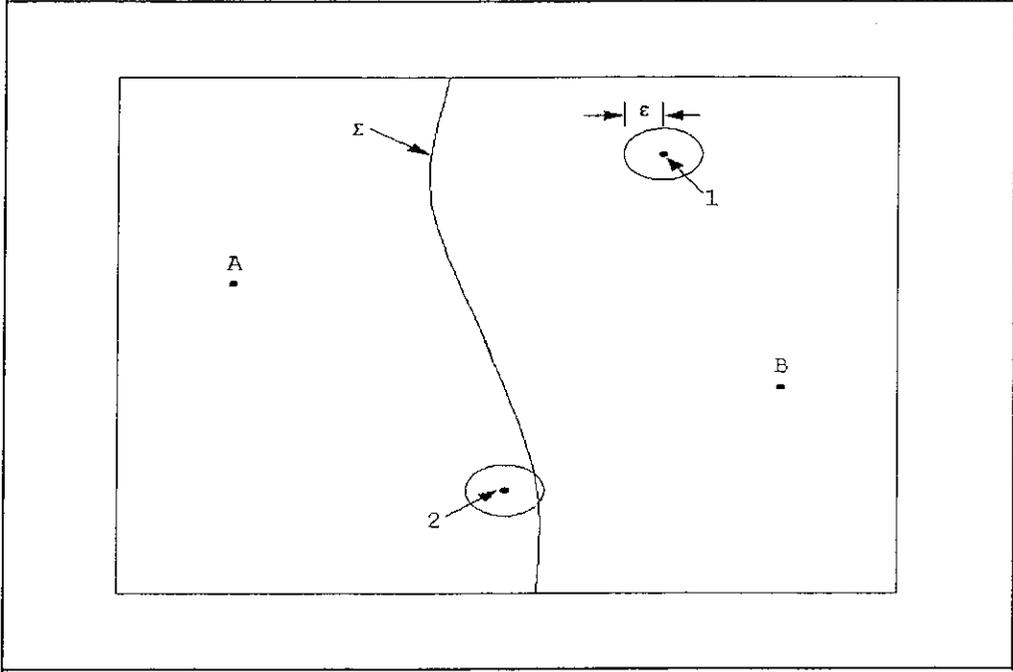


Figura B.1: A região do espaço de fase dividida pela fronteira Σ em duas bacias de atração para os atratores A e B . 1 e 2 representam duas condições iniciais com incerteza ϵ .

espaço de fase D e o expoente de incerteza α . Para isso vamos determinar o volume da região incerta cobrindo-a com cubos de aresta ϵ . Assim

$$V_{in} = N(\epsilon)\epsilon^D, \quad (\text{B.2})$$

onde $N(\epsilon)$ é o número de cubos necessário para cobrir a região incerta e ϵ^D é o volume de cada cubo D -dimensional.

Usando a definição de *capacidade* da dimensão,

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Ln } N(\epsilon)}{\text{Ln} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)}, \quad (\text{B.3})$$

e para $\epsilon \ll 1$ podemos escrever,

$$\text{Ln } N(\epsilon) \sim d_c \text{Ln} \left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

ou

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo na expressão do volume da região incerta (B.2), temos

$$V_{in} \sim \epsilon^{-d_c} \epsilon^D = \epsilon^{D-d_c}. \quad (\text{B.5})$$

Mas o volume da região incerta é proporcional ao número de condições incertas e assim temos

$$V_{in} \sim f(\epsilon) \sim \epsilon^{D-d_c}, \quad (\text{B.6})$$

tendo ainda,

$$f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha, \quad (\text{B.7})$$

assim

$$\alpha = D - d_c. \quad (\text{B.8})$$

Se obtivermos o valor de α teremos calculado a dimensão do objeto fractal.

Para verificarmos a influência de α , expoente de incerteza, na sensibilidade do estado final do sistema, façamos, $f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$ e $f(\epsilon') \sim (\epsilon')^\alpha$, onde $f(\epsilon)$ é a fração de incertas para um erro de magnitude ϵ e $f(\epsilon')$ o análogo para ϵ' . Assim

$$\frac{f(\epsilon')}{f(\epsilon)} = \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^\alpha \quad (\text{B.9})$$

ou

$$f(\epsilon') = \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^\alpha f(\epsilon). \quad (\text{B.10})$$

Como $\epsilon' < \epsilon$ (diminuição do erro na medida dos valores das condições iniciais) e $\alpha < 1$

$$\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^\alpha > \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right), \quad (\text{B.11})$$

o que implica em

$$\frac{f(\epsilon')}{f(\epsilon)} > \frac{\epsilon'}{\epsilon}, \quad (\text{B.12})$$

ou seja, para obtermos uma pequena melhora na previsão do estado assintótico das condições iniciais devemos diminuir consideravelmente o erro na medida dos parâmetros. Com esse resultado compreendemos o efeito que erros na medida dos valores das condições iniciais do sistema tem sobre a habilidade de prever para qual estado final uma particular órbita se dirige quando trabalhamos com fronteiras fractais.

Vamos agora determinar as características da fronteira do espaço de fase que separa as condições iniciais que levam a diferentes estados finais. Para verificarmos se uma região do espaço de fase das condições iniciais é fractal, iremos efetuar o cálculo da dimensão da fronteira em diferentes regiões usando o método da sensibilidade do estado final. O método consiste em determinar a probabilidade média de cometer um erro na previsão

do estado final de uma condição inicial se esta condição não é conhecida exatamente, mas com uma incerteza de tamanho ϵ . Para tanto, tomamos um grande número de condições iniciais numa região e evoluímos para determinar o estado final. Em seguida efetuamos uma perturbação da ordem de ϵ num plano de coordenadas. A probabilidade de erro na previsão do estado final é estimada como a fração das condições iniciais cujos estados finais são alterados pela perturbação ϵ . A fração é dada por

$$f(\epsilon) = \frac{N^*}{N}, \quad (\text{B.13})$$

onde N é o número total de condições iniciais e N^* é o número daquelas que alteraram o estado final devido a perturbação ϵ . Em nossos experimentos numéricos N sempre é tomado grande o bastante tal que $N^* \geq 400$. Como para uma amostra tomada randomicamente o erro estatístico do número de condições iniciais incerta para cada valor de ϵ é dado por $\frac{\sqrt{N^*}}{N}$, este valor corresponde a uma incerteza estatística de 5% em $f(\epsilon)$.

Como mostrado acima $f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$, para fronteiras fractais $0 < \alpha < 1$ e para fronteiras não fractais $\alpha = 1$. Como a dimensão fractal d está relacionada com a dimensão do espaço de fase D e com o expoente de incerteza α pela equação $d = D - \alpha$, obter seu valor se resume a determinar a inclinação da reta

$$\text{Ln}f(\epsilon) = \alpha \text{Ln}(\epsilon). \quad (\text{B.14})$$

Para implementarmos o cálculo da dimensionalidade através do método de *box-counting*, usaremos o seguinte procedimento: para que $f(\epsilon)$ esteja bem definida nos casos onde o espaço de fase do sistema é infinito, nós restringiremos as condições iniciais a estarem em alguma sub-região finita do espaço de fase, mas que contenha a fronteira. Esta região deve ser representativa no sentido de que a relação entre $f(\epsilon)$ e ϵ não seja influenciada por esta escolha, ou seja, o expoente α é independente da sub-região analisada. Escolhida a sub-região, selecionamos N condições iniciais randômicas distribuídas uniformemente nesta sub-região e evoluímos cada uma para determinarmos seu estado final. Cada condição (x_o, p_{x_o}) é então perturbada de uma quantidade ϵ produzindo duas condições perturbadas $(x_o \pm \epsilon, p_{x_o})$. Evoluímos estas $2N$ condições iniciais perturbadas para determinarmos seus estados finais e comparamos com o estado final da condição não-perturbada. Se uma ou as duas condições iniciais perturbadas associadas com uma particular condição inicial não-perturbada atingirem estados finais diferentes da não-perturbada, nós dissemos que

esta condição inicial é incerta sob o erro ϵ . Anotamos a fração $\bar{f}(\epsilon)$ das condições iniciais quando ϵ é variado. Em nossos cálculos, admitiremos que esta fração $\bar{f}(\epsilon)$ das condições iniciais incerta é proporcional a fração das incertas $f(\epsilon)$ do volume do espaço de fase. Repetimos o cálculo para diversos valores de ϵ cada vez menores, sempre anotando a fração de incertas $\bar{f}(\epsilon)$.

Plotando num gráfico $Ln \times Ln$ estes resultados e observando a relação

$$Ln\bar{f}(\epsilon) = \alpha Ln\epsilon, \quad (B.15)$$

vemos que a inclinação da reta nos fornece o valor do expoente de incerteza α .

Para determinar-mos o erro estatístico no número \bar{N} de condições iniciais incertas para cada valor de ϵ usaremos $\sqrt{\bar{N}}$ que é a expressão para uma amostra tomada randomicamente.

Para o cálculo numérico da dimensão fractal da fronteira utilizamos o pacote denominado *Ndynamics* [36] que trabalha em ambiente *MAPLE* com integrador *C*. O principal objetivo deste pacote é determinar numericamente a lei de escala acima.

Devemos agora adotar um critério para a escolha do intervalo entre os valores de ϵ . Dado esse o intervalo para as condições iniciais, o qual define o hipervolume V d -dimensional, distribuimos N condições iniciais através deste volume. O maior valor de ϵ não pode exceder a distância média entre as condições iniciais, para que não ocorra sobreposição levando à perda de capacidade da dimensão fractal. Por outro lado, o menor valor de ϵ usado é determinado pelo erro estatístico associado com o número de condições iniciais caindo dentro da fronteira fractal.

Na *figura B.2* temos um gráfico representando um experimento típico no cálculo da dimensão fractal de uma fronteira. O gráfico representa a relação entre as condições iniciais incertas $f(\epsilon)$ e a perturbação ϵ , qual seja, $Ln f(\epsilon) = \alpha Ln(\epsilon)$.

Podemos observar claramente três regiões distintas:

a) região (*I*) com $\alpha \approx 1$, representando as condições iniciais perturbadas com ϵ muito pequeno. Desta forma temos pontos com baixa estatística, abaixo do limite inferior que estamos admitindo ($N_{ic} \geq 400$);

b) região (*II*) onde temos condições que, para uma perturbação ϵ , um número razoável de condições iniciais são incertas em relação ao código colapso/escape e estão entre $400 \leq N_{ic} \leq N_T$, onde N_{ic} é o número de condições incertas e N_T é o número total de condições

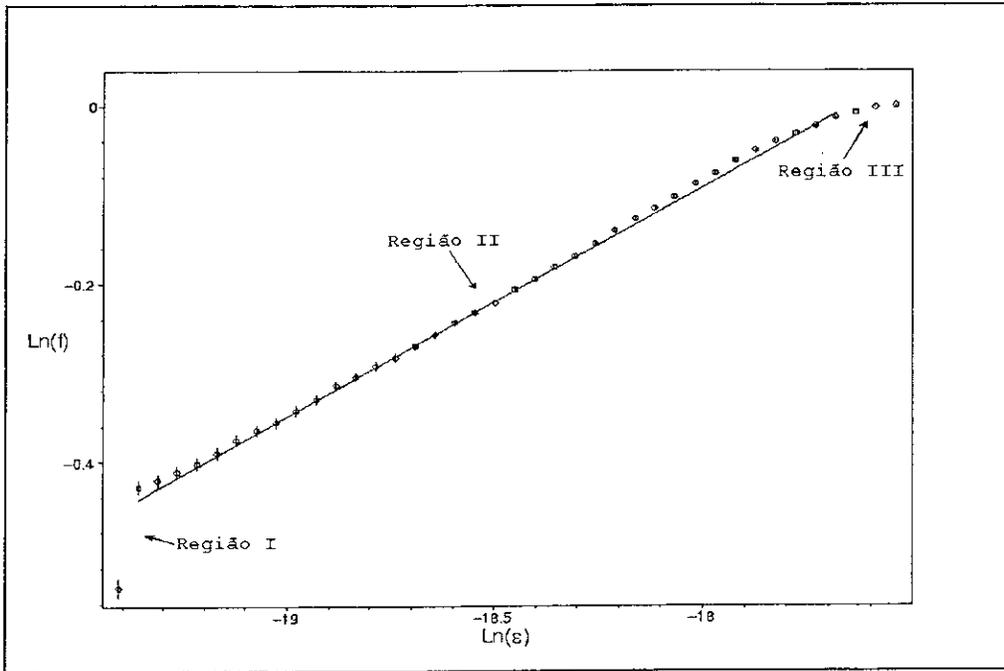


Figura B.2: $\ln(f(\epsilon))$ como função de $\ln(\epsilon)$. A inclinação da reta fornece o valor da parâmetro de incerteza α .

iniciais;

c) região (III) onde a perturbação ϵ é de tal ordem que mascara o comportamento fractal do conjunto. Para uma perturbação ϵ muito grande, uma condição inicial pode passar de uma bacia de um estado assintótico para outra, sendo portanto considerada incerta, mas não tendo o comportamento caótico que esperamos verificar.

A região descrita nos itens a e c devem ser descartadas para o cálculo de α , só levando em consideração a região linear central descrita no item b. É preciso um certo cuidado ao escolhermos o limite inferior e superior desta reta, já que esta pode não estar bem definida, isto é, os pontos extremos podem estar fora da reta. Neste caso devemos retirá-los antes de calcularmos a inclinação α . Estes efeitos causam d_c tender na direção de zero para grandes valores de ϵ e na direção de 1 para ϵ pequenos.

Apêndice C

Equações de Evolução das Perturbações

Neste apêndice vamos mostrar como obtivemos os resultados da expressão do fator de escala médio e das equações de Mathieu para a evolução das perturbações das amplitudes da densidade de contraste e do campo escalar. Para a obtenção da expressão analítica do fator de escala médio vamos partir da definição[9]

$$l(t) = (AB)^{1/3}. \quad (\text{C.1})$$

Mas das equações de transformações (4.5) e (4.6) obtemos que

$$l(t) = a(t). \quad (\text{C.2})$$

Devemos assim encontrar a expressão analítica para $a(t)$. Introduzimos novas variáveis

$$\delta a = a - a_o,$$

$$\delta p_a = p_a - p_{a_o},$$

$$\delta b = b - b_o,$$

$$\delta p_b = p_b - p_{b_o},$$

onde $(a_o, b_o, p_{a_o}, p_{b_o})$ são as coordenadas do ponto crítico, e expandimos em torno deste ponto o sistema (4.10-4.13) obtendo

$$\delta \dot{a} = \frac{1}{12a_o} \delta p_a, \quad (\text{C.3})$$

$$\delta\dot{p}_a = 12\Lambda\delta a + 6\Lambda\delta a^2 + \frac{4}{3}\delta b^2 - \frac{9}{8a_o^4}\delta p_b^2 + \frac{1}{12a_o^2}\delta p_a^2, \quad (\text{C.4})$$

$$\delta\dot{b} = -\frac{3}{4a_o^3}\delta p_b, \quad (\text{C.5})$$

$$\delta\dot{p}_b = \frac{8}{3}a_o\delta b + \frac{4}{9}a_o\delta b^2 + \frac{3}{4a_o^3}\delta p_b^2. \quad (\text{C.6})$$

Assumindo as relações $\delta p_b \gg \delta p_a$ e $\delta b \gg \delta a$, obtidas através de experimentos numéricos em [9], as equações (C.4) e (C.6) passam a ser escritas como

$$\delta\dot{p}_a = 12\Lambda\delta a + 6\Lambda\delta a^2 + \frac{4}{3}\delta b^2 - \frac{9}{8a_o^4}\delta p_b^2, \quad (\text{C.7})$$

$$\delta\dot{p}_b = \frac{8}{3}a_o\delta b. \quad (\text{C.8})$$

Vamos agora resolver o sistema de equações formado por (C.3), (C.7), (C.5) e (C.8). Primeiramente vamos trabalhar com o setor de rotação. A equação para δb , usando (C.8), escreve-se como

$$\delta\ddot{b} + w^2\delta b = 0, \quad (\text{C.9})$$

com $w^2 = \frac{2}{a_o^2}$, cuja solução é

$$\delta b = A_o \cos(wt). \quad (\text{C.10})$$

Desta forma, de acordo com (C.5), temos

$$\delta p_b = \frac{4}{3}A_o a_o^3 w \sin(wt). \quad (\text{C.11})$$

As equações para as variáveis do setor hiperbólico são obtidas como segue. A equação para δa escreve-se como

$$\delta\ddot{a} = \Lambda\delta a + \frac{1}{9a_o}\delta b^2 - \frac{3}{32a_o^5}\delta p_b^2. \quad (\text{C.12})$$

Vamos em primeiro lugar obter a solução para a equação homogênea,

$$\delta\ddot{a}_H - \Lambda\delta a_H = 0, \quad (\text{C.13})$$

cujas soluções são

$$\delta a_H = C_1 e^{\sqrt{\Lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda}t}, \quad (\text{C.14})$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

Para a solução particular faremos

$$\delta\ddot{a}_p = \Lambda\delta a_p + \frac{1}{9a_o}\delta b^2 - \frac{3}{32a_o^5}\delta p_b^2, \quad (\text{C.15})$$

onde podemos usar as equações (C.10) e (C.11), obtendo

$$\delta\ddot{a}_p = \Lambda\delta a_p + \frac{A_o^2}{9a_o} \cos^2(wt) - \frac{A_o^2 a_o w^2}{6} \sin^2(wt). \quad (\text{C.16})$$

Com a transformação trigonométrica

$$\sin^2(wt) = \frac{1 - \cos(2wt)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2(wt) = \frac{1 + \cos(2wt)}{2},$$

a equação (C.16) passa a ser escrita como

$$\delta\ddot{a}_p = \Lambda\delta a_p + \frac{A_o^2(2 - 3a_o^2 w^2)}{36a_o} + \frac{A_o^2(2 + 3a_o^2 w^2)}{36a_o} \cos(2wt). \quad (\text{C.17})$$

Considerando a solução particular

$$\delta a_p = B_o + B \cos(2wt), \quad (\text{C.18})$$

e substituindo na expressão (C.17), obtemos os valores de B_o e B ,

$$B_o = \frac{A_o^2}{36\Lambda a_o} (3a_o^2 w^2 - 2), \quad (\text{C.19})$$

$$B = -\frac{A_o^2}{36a_o} (2 + 3a_o^2 w^2). \quad (\text{C.20})$$

Desta forma a solução geral para δa pode ser escrita como

$$\delta a = \frac{A_o^2}{36\Lambda a_o} (3a_o^2 w^2 - 2) - \frac{A_o^2}{36a_o} (2 + 3a_o^2 w^2) \cos(2wt) + C_1 e^{\sqrt{\Lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda}t}. \quad (\text{C.21})$$

Como $\delta a = a(t) - a_o$, a expressão para o fator de escala médio $l(t)$ é dada por

$$l(t) = a_o + \frac{A_o^2}{36\Lambda a_o} (3a_o^2 w^2 - 2) - \frac{A_o^2}{36a_o} (2 + 3a_o^2 w^2) \cos(2wt) + C_1 e^{\sqrt{\Lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda}t}, \quad (\text{C.22})$$

onde $w^2 = \frac{2}{a_o^2}$.

Para a obtenção da equação de Mathieu para a evolução das perturbações na amplitude de densidade de contraste $\chi = \frac{\delta\rho}{\rho}$, vamos partir da equação[38],

$$\delta\ddot{\chi}_k + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\chi}_k - \frac{1}{2}\rho\bar{\chi}_k = 0. \quad (\text{C.23})$$

Efetuada a transformação

$$\bar{\chi}_k = l^{-1}\chi_k, \quad (\text{C.24})$$

a equação (C.23) passa a ser escrita como

$$\ddot{\chi}_k - \left(\frac{\rho}{2} + \frac{\dot{l}}{l}\right)\chi_k = 0. \quad (\text{C.25})$$

Da equação (C.22), na fase oscilatória ($C_1 = C_2 = 0$), temos

$$\frac{\dot{l}}{l} \approx \frac{4w^2 A_o^2 (2 + 3a_o^2 w^2)}{36a_o^2 (\Lambda + 4w^2)}, \quad (\text{C.26})$$

e da relação $\rho = \frac{E_o}{l^3}$, onde E_o é uma constante de intergração das identidades de Bianchi interpretada como a energia do modelo, obtemos

$$\frac{E_o}{l^3} = \frac{E_o}{a_o^3} (1 - \alpha \cos(2wt))^{-3} \approx \frac{E_o}{a_o^3} (1 + 3\alpha \cos(2wt)), \quad (\text{C.27})$$

onde $\alpha = \frac{A_o^2 (2 + 3a_o^2 w^2)}{36a_o^2 (\Lambda + 4w^2)} \cos(2wt)$. Substituindo estas aproximações em (C.25), obtemos

$$\ddot{\chi}_k - \left[\frac{E_o}{2a_o^3} + \left(4w^2 + \frac{3E_o}{2a_o^3} \right) \alpha \cos(2wt) \right] \chi_k = 0. \quad (\text{C.28})$$

A equação de movimento para os modos perturbados do campo escalar é dada por

$$\delta \ddot{\phi}_k + 3 \frac{\dot{l}}{l} \delta \dot{\phi}_k + \left[V''(\phi^{(o)}) + \frac{k^2}{l^2} \right] \delta \phi_k = 0. \quad (\text{C.29})$$

Efetuada a transformação

$$\delta \phi_k = \delta_k l^{-\frac{3}{2}}, \quad (\text{C.30})$$

e substituindo em (C.29), obtemos

$$\ddot{\delta}_k + \left[\left(V''(\phi^{(o)}) + \frac{k^2}{l^2} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{l}}{l} \right)^2 + \frac{\ddot{l}}{l} \right] \delta_k = 0. \quad (\text{C.31})$$

Para a fase oscilatória temos ($C_1 = C_2 = 0$) e o termo $\frac{\dot{l}}{l}$ é dado pela equação (C.26), enquanto o termo $\frac{\ddot{l}}{l}$ pode ser escrito como

$$\left(\frac{\dot{l}}{l} \right)^2 \sim \sin^2(2wt). \quad (\text{C.32})$$

Em comparação com $\frac{\dot{l}}{l} \sim \cos(2wt)$, o termo acima pode ser desprezado. A expansão do termo $\frac{k^2}{l^2}$ nos fornece

$$\frac{k^2}{l^2} \approx \frac{k^2}{a_o^2} (1 + 2\alpha), \quad (\text{C.33})$$

onde α foi definido acima. Desta forma a equação (C.31) passa a ser escrita como

$$\ddot{\delta}_k + \left[\left(V''(\phi^{(o)}) + \frac{k^2}{a_o^2} \right) - \epsilon \left(\frac{2k^2}{a_o^4} - \frac{6w^2}{a_o^2} \right) \cos(2wt) \right] \delta_k = 0, \quad (\text{C.34})$$

onde $\epsilon = \frac{A_o^2 (2 + 3a_o^2 w^2)}{36(\Lambda + 4w^2)}$.

Apêndice D

Análise Dimensional

Com a convenção adotado $8\pi G = c = 1$ as unidades das grandezas físicas ficam definidas como na tabela abaixo.

Símbolo	Definição	Unidade	Notação
a	fator de escala	adimensional	
r	coordenada espacial	comprimento	L
t	coordenada temporal	comprimento	L
$G_{\mu\nu}$	tensor de Einstein	comprimento ²	L^2
Λ	constante cosmológica	inverso do comprimento	$\frac{1}{L}$
k	curvatura espacial	$\frac{\text{comprimento}}{\text{massa}}$	$\frac{L}{M}$
φ	campo escalar	$\sqrt{\frac{\text{massa}}{\text{comprimento}}}$	$\sqrt{\frac{M}{L}}$
m	parâmetro de massa	inverso do comprimento	$\frac{1}{L}$
E_o	parâmetro de energia	inverso do comprimento ²	$\frac{1}{L^2}$
H	Hamiltoniana	comprimento ²	L^2

Referências Bibliográficas

- [1] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early Universe*, Frontiers of Physics, Addison-Wesley, New York, (1990).
- [2] S. K. Blau e A. H. Guth, *300 Years of Gravitation: Inflationary Cosmology*, editado por S. Hawking e W. Israel, Cambridge University Press, (1990);
- [3] E. Calzetta and C. El Hasi, *Nontrivial Dynamics in the Early Stages of Inflation*, Phys. Rev. D **51**, 2713(1995);
- [4] N. J. Cornish and J. J. Levin, *Chaos, Fractal, and Inflation*, Phys. Rev. D **53**, 3022(1996);
- [5] H. P. de Oliveira, I. Damião Soares and T. J. Stuchi, *Chaos in Anisotropic Preinflationary Universes*, Phys. Rev. D **56**, 730(1997);
- [6] G. A. Monerat, H. P. de Oliveira and I. D. Soares, *Chaos in Preinflationary Friedmann-Robertson-Walker Universe*, Phys. Rev. D **58**, 63504(1998);
- [7] R. M. Wald, *Asymptotic Behavior of Homogeneous Cosmological Models in the Presence of a Positive Cosmological Constant*, Phys. Rev. D **28**, 2118(1983);
- [8] A. A. Starobinski, JETP Lett. **37**, 66(1983);
- [9] R. Barquine, H. P. de Oliveira, I. D. Soares e E. V. Tonini, *Homoclinic Structure of the Dynamics of Axisymmetric Bianchi Type-IX Universes and the Oscillatory Loitering Phase*, Phys. Rev. D **63**, 63502(2001);
- [10] A. Mielke, P. Holmes e O. O'Reilly, *Cascades of Homoclinic Orbits to, and Chaos Near, a Hamiltonian Saddle-Center*, J. Dyn. Diff. Eqns. **4**, 95(1997);

- [11] R. L. Devaney, *Homoclinic Orbits in Hamiltonian Systems*, J. Diff. Eqns. **21**, 431-438(1976);
- [12] J. Koiller, J. R. T. de Mello Neto and I. D. Soares, *Homoclinic Phenomena in the Gravitational Collapse*, Phys. Lett. **110A**, 260(1985);
- [13] M. Hénon and C. Heiles, *The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments*, Astrophys. J. **69**, 73(1964);
- [14] W. M. Werner e A. M. Ozorio de Almeida, *Study of Chaos in Hamiltonian Systems via Convergent Normal Forms*, Physica D **90**, 9(1996);
- [15] J. Llibre, R. Martinez e C. Simó, *Transversality of the Invariant Manifolds Associated to the Lyapunov Family of Periodic Orbits Near L_2 in the Restricted Three-Body Problem*, J. Diff. Eqns. **58**, 104(1985);
- [16] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations do Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences Vol. 42 (Springer-Verlag, New York);
- [17] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, New Jersey, 1973;
- [18] A. M. Ozorio de Almeida, N. de Leon, M. A. Mehta e C.C. Marston, *Geometry and Dynamics of Stable and Unstable Cylinders in Hamiltonian Systems*, Physica D**26**, 265(1990);
- [19] W. M. Vieira, *Uso de Formas Normais no Estudo de Dinâmica Caótica em Sistemas Hamiltonianos*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1994;
- [20] E. Ott, *Chaos in Dynamics Systems* (Cambridge University Press, 1993);
- [21] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems, Chaos and Quantization*, (Cambridge University Press, Princeton, NJ, 1973);
- [22] M. Novello, *VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation: Theoretical Cosmology*, editado por M. Novello, Editions Frontières, 1994;

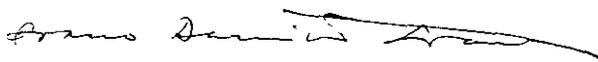
- [23] C. Tsallis, *Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479(1988); E. M. F. Curado e C. Tsallis, *Generalized Statistical Mechanics: Connection with Thermodynamics*, J. Phys. A **24**, L69(1991); *Corrigendum* **24**, 3187(E)(1991); **25**, 1019(E)(1992).
- [24] C. Tsallis, R. S. Mendes e A. R. Plastino, *The Role of Constraints Within Generalized Nonextensive Statistics*, Physica A **261**, 534(1998);
- [25] C. Tsallis, G. Bemski e R. S. Mendes, *Is Re-Associated in Folded Proteins a Case of Nonextensivity?*, Phys. Lett. A **257**, 93-98(1999);
- [26] C. Tsallis, E. P. Borges e F. Baldovin, *Mixing and Equilibration: Protagonist in the Scene of Nonextensive Statistical Mechanics*, Physica A (in press).
- [27] E. S. Cheb-Terrab e H. P. de Oliveira, *Poincaré Sections of Hamiltonian Systems*, Com. Phys. Commun. **95**, 171-189(1996);
- [28] V. Sahni, H. Feldman e A. Stebbins, *Loitering Universe*, Astrophys. J. **385**, 1-8(1992);
- [29] V. Sahni e A. Starobinsky, *The Case For a Positive Cosmological Λ -Term*, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373(2000);
- [30] H. P. de Oliveira e I. D. Soares, *Chaos and a Resonance Mechanism for structure Formation in Inflationary Models*, Mod. Phys. Lett. A **13**, 23, 1881(1998);
- [31] H.P. de Oliveira, S.L. Sautu, I. Damão Soares e E.V. Tonini, *Chaos and Universality in The Dynamics of Inflationary Cosmologies*, Phys. Rev. D **60**, 121301-5(1999);
- [32] H.P. de Oliveira, I. Damão Soares e E.V. Tonini, *Universality in the Chaotic Dynamics Associated With Saddle-Centers Critical Points*, Physica A **295**, 348-358(2001);
- [33] H.P. de Oliveira, I. Damão Soares e E.V. Tonini, *Turbulence Inspired Experiments and Universal Statistical Patterns in Hamiltonian Systems*, Phys. Letters A **277**, 101-106(2000);
- [34] A. P. Fordy, *The Hénon-Heiles System Revisited*, Physica D **52**, 204(1991);

- [35] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995;
- [36] L. G. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota, H. P. de Oliveira, R. O. Ramos e J. E. F. Skea, *Numerical Analysis of Dynamics Systems and the Fractal Dimensions of Boundaries*, *Comp. Phys. Communications* 119, 256(1999);
- [37] C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott e J. A. Yorke, *Final State Sensitivity: an Obstruction to Predictability*, *Phys. Lett.* 99A, 415(1983);
- [38] J. M. Salim, *Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1982;

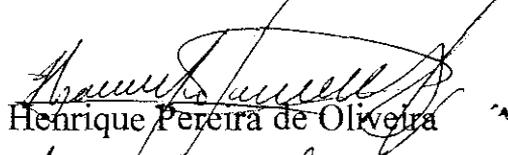
“CAOS E UNIVERSALIDADE EM MODELOS COSMOLÓGICOS COM PONTOS CRÍTICOS CENTRO-SELA”

Eduardo Valentino Tonini

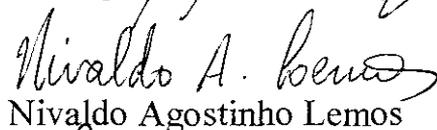
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



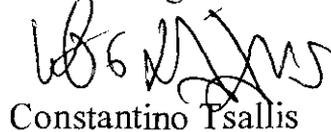
Ivano Damião Soares – Presidente



Henrique Pereira de Oliveira



Nivaldo Agostinho Lemos



Constantino Tsallis



Mário Novello



José Martins Salim / Suplente

Rio de Janeiro, 26 de março de 2002