

Tese de Mestrado

**Estudo de um Novo Modelo
de Maxwell - Chern - Simons
com Paridade Preservada**

Roger Barreto Ribeiro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, março de 2002

Ao meu avô Aroldo e à minha avó Antuérpia, vivos na memória.

Às garotonas: Márcia, Ângela e Rita.

Às minhas meninas: Aurora e Isabela.

Agradeço

A Deus, núcleo do ser humano.

À minha família, núcleo da minha vida.

A todos os amigos e companheiros que me ajudaram neste trabalho e que de um modo geral contribuíram para a minha formação:

Ao orientador, o Prof. José Abdallah Helayël - Neto, por propiciar o verdadeiro ambiente de trabalho científico, calcado na igualdade e não na autoridade, e por participar dos momentos cruciais desta tese.

Ao orientador, o Prof. Oswaldo Monteiro Del Cima, por ser o verdadeiro responsável pela construção desta tese, pelos conselhos e pela costumeira indignação aos problemas comuns.

Ao Prof. Caride, pela habitual camaradagem e pela preocupação: La Tese, Roger!

Ao Prof. Tião, pelo companheirismo e pelas broncas, que certamente contribuíram à minha postura profissional.

A Álvaro Nogueira, pelas discussões que sempre acabavam em grandes explanações sobre Teoria de Campos. Valeu chefia!

A Cláudio Sazaki e a Ricardo Simões, por propiciarem a escrita desta tese no formato desejado. E a Manoel, Thales, Leonardo (Dudu), Gilmar, Gabriel e a Valéria da biblioteca pela ajuda.

À Cristina, pelos chocolates quentes das tardes frias de Petrópolis.

À Myrian e equipe do CFC, pela preocupação com os prazos.

À Rosa e equipe da biblioteca, pelo carinho habitual.

À Rosângela e Elisete.

Ao povo brasileiro e à CAPES por terem financiado o meu trabalho.

Um grande abraço a todos do "DCP" e do "GFT".

Resumo

Nesta tese, foram calculadas as correções radiativas a 1-loop para o tensor da polarização do vácuo, para um modelo massivo da QED₃ com paridade preservada. Este modelo apresenta acoplados minimamente os usuais campos de gauge eletromagnético (A_μ) e o estatístico (a_μ), oriundos do gauging da simetria global $U(1)_A \times U(1)_a$. Ao lado dos termos de Maxwell associados à (A_μ) e (a_μ), o modelo possui um termo misto de Chern - Simons, que gera massa para os campos de gauge **sem quebra de paridade**.

Para este propósito, foram calculados os propagadores da ação livre, encontrados seus pólos e analisados os respectivos resíduos. Os loops foram calculados com a ajuda das Regras de Feynman para os vértices de interação, via o formalismo das Integrais de Caminho. Considerando o regime das altas energias, também foi encontrado o grau superficial de divergência.

Abstract

In this thesis, we compute the 1-loop radiative correction to the vacuum polarization tensor for a parity-preserving massive QED₃ model.

This model has a minimally coupled usual electromagnetic (A_μ) and statistical (a_μ) gauge fields, both resulting from the gauging of the global $U(1)_A \times U(1)_a$ - symmetry. Besides the Maxwell terms associated to (A_μ) and (a_μ), the model accommodates a mixed Chern-Simons term which generates mass to the gauge fields **without breaking parity**.

For this purpose, the propagators from the free-action have been computed, their poles have been found and the corresponding residues have been analysed. The loops have been calculated with the aid of the Feynman Rules for the interaction vertices, by Path Integral formalism. To take into account the high energy way, we work out the superficial degree of divergence too.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Análise Semi - Clássica dos Campos em $D = 1 + 2$	10
1.1 Cálculo dos Propagadores de A_μ e a_μ	12
1.1.1 Análise de Pólos e Resíduos	15
1.2 Cálculo dos Propagadores dos Espinores	19
1.2.1 Análise de Pólos	21
2 Análise Quântica dos Campos em $D = 1 + 2$	22
2.1 Power Counting da Teoria	23
2.2 Regras de Feynman e Vacuum Polarization dos Campos	25
Conclusões Gerais e Perspectivas de Continuação	37
A Inversão de uma Matriz de Operadores	39
B Integrais a 1 - loop para 3D	41
C Resolução das Integrais Paramétricas	43
C.1 Relações entre as Integrais	44
C.2 Resolução da integral $I(p) = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}}$	44

D Resultados Finais dos Diagramas de Loops	46
D.1 Loop ${}_{AA}\Pi^{\mu\nu}(p)$	47
D.2 Loop ${}_{aa}\Pi^{\mu\nu}(p)$	48
D.3 Loop ${}_{Aa}\Pi^{\mu\nu}(p)$	49
D.4 Loop ${}_{aA}\Pi^{\mu\nu}(p)$	51
Referências	53

Lista de Figuras

2.1	Diagramas de Loops	28
2.2	Loop $_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}$	29
2.3	Correção Quântica do Propagador	34
D.1	Loop $_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}$	47
D.2	Loop $_{AA}\Pi_{--}^{\mu\nu}$	47
D.3	Loop $_{aa}\Pi_{++}^{\mu\nu}$	48
D.4	Loop $_{aa}\Pi_{--}^{\mu\nu}$	48
D.5	Loop $_{Aa}\Pi_{++}^{\mu\nu}$	49
D.6	Loop $_{Aa}\Pi_{--}^{\mu\nu}$	50
D.7	Loop $_{aA}\Pi_{++}^{\mu\nu}$	51
D.8	Loop $_{aA}\Pi_{--}^{\mu\nu}$	51

Lista de Tabelas

1.1 Álgebra Multiplicativa dos Operadores	
Transversais e Longitudinal	28

Introdução

A Eletrodinâmica Quântica em $D = 1 + 2$ - QED₃ - ganhou um grande incentivo no início da década de 80, por sua relação, à temperatura nula, com os modelos quadridimensionais à temperatura finita [1].

Desde então, a chamada Eletrodinâmica Quântica Planar têm sido objeto de intensa análise em Teoria de Campos, não só por suas particularidades e singularidades em relação a QED₄, mas por se apresentar como um novo cenário de discussões fundamentais como quantização, spin e interações [2,3] .

No ambiente maxwelliano, a QED₃ já apresenta algumas características singulares como o comportamento escalar do fóton e a arbitrariedade para os valores de spin.

Tendo, por exemplo, a ação na forma genérica:

$$S_{Maxwell} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right). \quad (I.1)$$

Temos como métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$, para $\mu, \nu = 0, 1, 2$; e o campo de gauge A_μ e o field - strenght $F_{\mu\nu}$ representados de maneira usual. Agora, com duas dimensões espaciais e uma temporal.

Obtendo as equações de Maxwell em 3 dimensões, podemos verificar a propagação de um fóton de massa nula com apenas 1 grau de liberdade, onde os graus de liberdade não - físicos foram eliminados pelas equações de movimento. Portanto, as excitações físicas desta teoria apresentam um caráter escalar (spin 0), configurando o chamado fóton planar, a despeito da natureza vetorial do fóton em 4 dimensões.

Já o spin, a princípio, não é bem definido em $D = 1 + 2$. Dentro da formulação criada por Wigner [4], o spin é tido como um número quântico associado a representações unitárias e irredutíveis dos estados de uma partícula. Estas representações são geradas

pelo “little group”, um subgrupo de rotação do grupo de Poincaré em 3D, o $SO(1,2)$.

Para as partículas massivas, o little group é o $SO(2)$, que por ser isomorfo ao grupo abeliano $U(1)$, vincula representações contínuas e arbitrárias ao spin¹. Ao passo que para as partículas de massa nula, o little group está associado a uma classe de matrizes com autovalores nulos, indicando como única opção $spin = 0$ para estas partículas [5]. Um fato interessante, é que apesar de espinores sem massa terem conseqüentemente spin nulo, sua natureza fermiônica segundo a ótica do princípio de Pauli é mantida [6], conduzindo a uma noção mais profunda da relação spin - estatística para uma relação grupo de Lorentz - estatística.

A idéia de estatística arbitrária, ou comumente chamada fracionária, embora relacionada com a teoria de grupos em $D = 1 + 2$, surgiu no cenário da física nos anos 70 [7,8], e tornou - se conhecida pelos trabalhos de Wilczek [9,10], que denominou estas partículas de spin arbitrário de anyons (any spin). Já no início dos anos 90, as teorias em 3 dimensões ganharam um grande impulso por seu elo com a matéria condensada, principalmente através do estudo do Efeito Hall Quântico Fracionário – EHQF – e da Supercondutividade a Alta Temperatura Crítica – SATc.

A seguir, explanaremos brevemente estes dois fenômenos no âmbito de uma teoria eletrodinâmica quântica planar e a tratabilidade de seus modelos aniônicos através da formulação de Chern - Simons. De um modo geral, os anyons podem ser descritos como bósons ou férmions em interação mediada por um campo de gauge de Chern - Simons [11].

O efeito Hall quântico é identificado pela quantização da condutividade Hall em um gás de elétrons bidimensional, devido a aplicação de um campo magnético a baixas temperaturas ($T < 4$ K). Microscopicamente, o EHQ é caracterizado pela quantização do seu espectro de energia, havendo uma grande concentração de estados em níveis bem definidos de energia, os chamados níveis de Landau. Este fenômeno também é caracterizado por ser um sistema incompressível, isto é, o número máximo de partículas

¹A formulação covariante, empregada em Teoria Quântica de Campos, não separa os graus de liberdade físicos dos não - físicos, associados às representações irredutíveis e redutíveis, respectivamente. Para tal, se empregam as equações de movimento, que separam dentre todos os valores contínuos apenas alguns: Para os espinores, a equação de Dirac, em $D = 1 + 2$, vincula o spin à massa da forma $s = 1/2 \text{ sign}(m) = \pm 1/2$. Para as partículas vetoriais obtemos $s = \text{sign}(m) = \pm 1$, vindo de uma equação de autovalores do pseudoescalar de Pauli - Lubanski.

em um dado nível de energia é fixo².

A incompressibilidade desses sistemas tem relação com o preenchimento integral dos níveis de Landau, expresso por um fator de ocupação inteiro $\nu = n; n = 1, 2, \dots$. Surpreendentemente, Tsui et al. [12] observaram que certos sistemas Hall, com seu caráter incompressível, apresentavam um fator de ocupação dos níveis de Landau fracionário: $\nu = \frac{1}{2n+1}; n = 1, 2, \dots$. Descobrimos, portanto, o Efeito Hall Quântico Fracionário, com as mesmas propriedades do fenômeno convencional, agora EHQ Inteiro, mas com um preenchimento parcial dos níveis de energia.

O caráter energeticamente favorável deste estado de ocupação fracionária foi solucionado por Laughlin [13], que propôs uma função de onda variacional representando um estado coerente de elétrons girando em fase. Desta forma, o conhecimento de estados físicos com números quânticos fracionários de alguns sistemas Hall deu aos anyons um novo status dentro da física, pois o modelo aniônico havia deixado de ser somente uma idéia, para ser um elemento representativo de sistemas bidimensionais em matéria condensada.

Uma nova abordagem do EHQF foi dada pelo modelo ZHK [14], onde a introdução de uma interação não-local, através de um campo estatístico a_μ vinculado ao termo de Chern-Simons, mapeava elétrons em bósons. O fato de que isto se deve é pelo fator de ocupação fracionária dos níveis de Landau poder ser descrito como a razão entre o número de elétrons e a quantidade de fluxóides — os quanta do fluxo magnético — do modelo ZHK: $\nu = \frac{N_e}{N_\phi} = \frac{1}{2n+1}; n = 1, 2, \dots$. Neste modelo, elétrons associados a um número ímpar de fluxóides se comportam como bósons. Da equação acima conclui-se acerca da natureza bosônica do sistema Hall fracionário.

Portanto, através da formulação de Chern-Simons, este modelo foi capaz de explicar aspectos fenomenológicos do EHQF, aumentando a atenção dada a estas teorias no âmbito da QED₃.

A ligação da Eletrodinâmica Quântica Planar e a supercondutividade³ remonta a

²A compressibilidade está relacionada a elevação ou decréscimo do número de partículas em um determinado nível de energia proporcional a um aumento ou diminuição do campo magnético aplicado.

³A supercondutividade se caracteriza pela resistividade nula e pelo efeito Meissner, onde o campo magnético é totalmente expulso de dentro da amostra, ao se passar da fase normal para a fase supercondutora. Para uma consulta mais abrangente e com maior riqueza de detalhes, veja a introdução do trabalho citado na referência [15].

descoberta da Supercondutividade a Alta - Tc, por Bednorz e Müller [16], onde se verificou que cerâmicas de óxido de cobre, por apresentarem uma estrutura planar estratificada em camadas de cobre - oxigênio, apresentavam conseqüentemente a planificação de algumas grandezas físicas fundamentais do estado supercondutor, motivando a implementação do formalismo de campos em 3D. Posteriormente, Kalmeyer e Laughlin [17] propuseram, com base no trabalho de valência - ressonante de Anderson para supercondutores de cobre - oxigênio, que excitações desse modelo correspondiam a estados quânticos de spin fracionário, obedecendo a uma estatística fracionária ou aniônica.

Logo depois, dada a fertilidade de idéias sobre modelos aniônicos, Laughlin propôs um novo estado de supercondutor [18], inaugurando, deste modo, o modelo da supercondutividade aniônica.

Nos supercondutores aniônicos, ao contrário dos sistemas Hall, a compressibilidade é uma premissa básica para a formação do estado supercondutor [19]. No efeito Hall, o campo magnético é um fator externo independente da densidade de carga, ditando o seu caráter incompressível e conseqüentemente a ausência da natureza supercondutora — apresentam supercorrentes, mas não efeito Meissner. Nos supercondutores aniônicos o campo magnético é um fator intrínseco, gerado pelas próprias cargas fermiônicas; fato que proporciona a compressibilidade do sistema, pois a variação do campo magnético num ponto altera localmente a densidade fermiônica.

Outra característica, é também a presença dos níveis de Landau. Estes níveis localizados de energia são gerados pela atuação de um campo magnético de natureza não - local, advindo da média dos fluxóides associados as partículas de toda a amostra. Dentro da aproximação de campo médio, anyons de fator estatístico $\gamma = \pi(1 - 1/n)$, com n inteiro, são vistos como férmions na presença deste campo magnético efetivo.

Todos estes eventos foram culminados com a identificação da Supercondutividade a Alta - Tc⁴ como um fenômeno aniônico, através da aplicação da técnica RPA (Random Phase Approximation) por Laughlin et al. [20] para um fator estatístico $\gamma = \pi/2$, com

⁴A SATc, por ser do tipo II, também pode apresentar fluxóides dentro da amostra; em 3D isto ocorre com a presença de vórtices do campo magnético. De um modo geral, podemos dividir os supercondutores em tipo I: onde o efeito Meissner ocorre abruptamente pela variação de um campo magnético externo. E em tipo II: que apresenta, entre a fase ôhmica e a fase Meissner, uma fase intermediária onde o campo magnético penetra na amostra de forma não - homogênea, concentrada em fluxóides, denominada fase Abrikosov ou de vórtices.

$n = 2$. Resultado também verificado de forma mais genérica por Chen et al. [21], para n inteiro — $\gamma = \pi(1 - 1/n)$.

Posteriormente, contudo, a supercondutividade aniônica comprovou ser impossível a temperatura finita [22]. Havendo a procura de novas abordagens para a SATc. Em Teoria Quântica de Campos, a formulação de Chern - Simons surge como um ferramental apropriado para a substituição dos modelos aniônicos na Eletrodinâmica Quântica Planar [23, 24, 25]. Assim como para o Efeito Hall Quântico Fracionário temos o modelo ZHK, a abordagem de Chern - Simons para a supercondutividade aniônica vem numa relação direta, uma vez que o campo estatístico a_μ , representando uma interação não - local, reproduz perfeitamente a aproximação de campo médio dos supercondutores aniônicos. Formalmente, ele é representado pela ação de Chern - Simons (CS), da forma:

$$S_{CS} = \int d^3x \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\rho\nu} a_\mu \partial_\rho a_\nu \right). \quad (I.2)$$

Uma peculiaridade da eletrodinâmica de Chern - Simons é a geração de um fóton massivo de natureza não - local. Isto se deve pelo fato do termo de CS ter caráter topológico, pois não depende da métrica nem contribui para o tensor energia - momento do sistema [3]. Esta ação também apresenta invarância de gauge, mas não preserva as simetrias de paridade e a simetria por reversão temporal.

Das equações de movimento, geradas por esta ação com acoplamento de corrente, obtemos outras duas importantes características das teorias de Chern - Simons: Uma é pelo fato do campo de CS não apresentar dinâmica, requerendo sempre a adição de mecanismos para propagar o fóton. A outra relata que uma carga em repouso gera tanto um campo elétrico quanto um campo magnético.

Assim como a aquisição de massa para o fóton, a vinculação de um campo magnético a uma carga em repouso são bastante contrastantes com os modelos quadridimensionais. Esta vinculação, por sinal, é o elo de ligação com os modelos aniônicos.

Um dos efeitos do termo de CS, é portanto, associar a cada carga elétrica um quantum de fluxo magnético. A auto - interação entre a carga elétrica e seu fluxo atachado é nula, mas sua interação com outros fluxóides não pode ser desprezada. Interpretando essa particularidade sob a ótica do efeito Aharonov - Bohm, que em

essência implica na possibilidade de uma estatística arbitrária ou fracionária, temos que as partículas que obedecem a esta estatística também apresentam spin arbitrário ou fracionário pela conexão spin - estatística. Portanto, da teoria de Chern - Simons chegamos aos anyons. Estabelecendo que a vinculação entre cargas elétricas e fluxos magnéticos é a base do comportamento aniônico na formulação de CS.

A quebra de paridade é uma característica marcante nas teorias de CS. Por exemplo, o modelo ZHK, do efeito Hall quântico fracionário, associa uma quebra de paridade ao fato de todos os elétrons em um dado nível de Landau apresentarem a mesma polarização. Já nos supercondutores aniônicos não há evidências experimentais definitivas que comprovem a quebra da simetria de paridade do estado supercondutor. Desta forma, modelos sem quebra de paridade constituem uma tentativa no entendimento da supercondutividade planar.

Nesta tese, é sugerida uma nova abordagem de Chern - Simons sem violação da paridade, uma vez que poderá ser usado em futuras investigações da Supercondutividade a Alta - Tc. Portanto, é proposto um termo de CS misto, acoplando os campos de gauge A_μ e a_μ . Desta forma, teremos:

$$S_{CS} = \int d^3x \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu \right). \quad (I.3)$$

Resultando numa formulação invariante de gauge sem quebra de paridade. A conservação da paridade é comprovada pelas transformações:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu = (A_0, A_1, A_2) \xrightarrow{P} A_\mu^P = (A_0, -A_1, A_2). \\ \partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2) \xrightarrow{P} \partial_\mu^P = (\partial_0, -\partial_1, \partial_2). \\ a_\mu = (a_0, a_1, a_2) \xrightarrow{P} a_\mu^P = (-a_0, a_1, -a_2). \end{array} \right. \quad (I.4)$$

Pelo fato do termo de CS não apresentar dinâmica, é necessária a introdução de um mecanismo que construa uma eletrodinâmica propagativa. Neste trabalho, adicionamos a ação de CS a ação de Maxwell, configurando a formulação de Maxwell - Chern - Simons (MCS).

Nesta abordagem, por causa do caráter topológico do fóton de CS, não são introduzidos graus de liberdade adicionais à teoria de Maxwell; portanto, o campo de MCS apresenta apenas um grau de liberdade, caracterizando sua natureza escalar em 3D. A relação entre spin e massa, já mencionada anteriormente, dita $spin = 0$ para o fóton escalar introduzido pelo termo de Maxwell, e $spin = \pm 1$ para o fóton massivo de CS (Ver também [3]).

Desta forma, é proposta uma ação de MCS para ambos os campos de gauge, A_μ e a_μ , com acoplamento de um sistema de férmions com spins up (+) e down (-), da forma:

$$S = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu a^\mu)^2 + i\bar{\psi}_+ \mathcal{D}\psi_+ + i\bar{\psi}_- \mathcal{D}\psi_- - m(\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \right\}. \quad (\text{I.5})$$

Onde as intensidades dos campos são representadas por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, e a derivada covariante definida por $\mathcal{D}\psi_\pm \equiv (\partial + ieA \pm ig\phi)\psi_\pm$, com a definição genérica $\mathcal{C} \equiv \gamma^\mu C_\mu$ e tendo as matrizes gama da forma: $\gamma^\mu = (\tau_x; i\tau_y; -i\tau_z)$, operando no espaço bidimensional.

Pela ação acima podemos ver que a derivada covariante proporciona um acoplamento mínimo dos férmions e dos campos de gauge de MCS. É verificada também a inserção de uma massa fermiônica a “tree - level”, pois é constatado que os férmions sempre resultam massivos, mesmo que originariamente tenham massa nula — fato que advém de correções quânticas radiativas a 1 - loop, dos termos de CS [26]. Concluindo a análise da parte fermiônica, mostra - se as transformações de paridade dos espinores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\pm \xrightarrow{P} \psi_\pm^P = -i\gamma^1 \psi_\mp \\ \bar{\psi}_\pm \xrightarrow{P} \bar{\psi}_\pm^P = i\bar{\psi}_\mp \gamma^1, \text{ sendo } \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \end{array} \right. \quad (\text{I.6})$$

Verificando, através de (I.4) e (I.6), a invariância por paridade da ação (I.5): $S \xrightarrow{P} S^P = S$.

Pelas transformações unitárias dos termos espinoriais, obtemos como os campos de gauge devem se transformar, a fim de encontrarmos uma ação gauge - invariante a tree - level. Portanto, com:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\pm} \longrightarrow \psi'_{\pm} = e^{i(\alpha_{(x)} \pm \beta_{(x)})} \psi_{\pm} \ . \\ \bar{\psi}_{\pm} \longrightarrow \bar{\psi}'_{\pm} = e^{-i(\alpha_{(x)} \pm \beta_{(x)})} \bar{\psi}_{\pm} \ . \\ \mathcal{D}\psi_{\pm} \longrightarrow (\mathcal{D}\psi_{\pm})' = e^{i(\alpha_{(x)} \pm \beta_{(x)})} \mathcal{D}\psi_{\pm} \ . \end{array} \right. \quad (I.7)$$

E através da condição $(\mathcal{D}\psi_{\pm})' = \mathcal{D}'\psi'_{\pm}$, temos as transformações dos campos de gauge, da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{e} \partial_{\mu} \alpha_{(x)} \ . \\ a'_{\mu} = a_{\mu} - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \beta_{(x)} \ . \end{array} \right. \quad (I.8)$$

Portanto, pelas transformações (I.7) e (I.8), é verificada a invariância de gauge a nível clássico da ação de MCS. Invariância, é claro, a menos dos termos de gauge - fixing: $\frac{1}{2\alpha}(\partial_{\mu} A^{\mu})^2$ e $\frac{1}{2\beta}(\partial_{\mu} a^{\mu})^2$, que como veremos, se desacoplam do modelo.

Tendo - se motivado o estudo do formalismo de teoria quântica de campos em $D = 1 + 2$, e ambientado essa discussão no modelo de Chern - Simons, é notória a importância da análise da Eletrodinâmica de MCS com simetria de paridade. O entendimento dos aspectos desse novo modelo de CS com termos mistos e a possível invariância de gauge, a nível quântico, da ação proposta, constituem o verdadeiro objetivo da tese.

Imerso num ambiente com preservação da paridade, parte - se da ação invariante de gauge a tree - level e verifica - se a nível quântico se esta ação continua gauge - invariante. Passando por questões como a causalidade, a unitariedade e a renormalizabilidade da teoria.

Basicamente, a tese é dividida em duas partes.

O primeiro capítulo se destina a uma análise semi - clássica da teoria ou, mais apropriadamente, a uma análise quântica a zero - loop. Nele, são calculados os propagadores

dos campos envolvidos e verificada a causalidade do modelo; seguido do cálculo do resíduo de suas amplitudes, de onde conclui - se acerca da unitariedade da teoria, pelo menos a tree - level. Indicando, também, quais os quanta da teoria que apresentam propagação física.

No segundo capítulo, é calculado através do método do power counting, o grau de divergência do modelo no regime das altas energias, inferindo - se sobre sua renormalizabilidade. Obtêm - se as regras de Feynman para os vértices de interação, e as usa - se no cálculo das correções quânticas de 2ª ordem da massa do fóton. Por esse cálculo se obtém correções quânticas à ordens superiores, no processo denominado vacuum polarization. Concluindo, portanto, se a renormalização da massa do fóton quebra a invariância de gauge a nível quântico.

Seguem - se a Conclusão, os Apêndices e a enumeração das Referências.

No Apêndice A é feita a inversão de uma matriz de operadores, na obtenção dos propagadores dos campos. No Apêndice B estão os resultados das integrais de loop encontradas no cálculo da vacuum polarization. No Apêndice C são calculadas analiticamente, as integrais paramétricas remanescentes do cálculo de loop anterior. Finalmente, no Apêndice D, seguem - se os resultados finais dos loops encontrados neste trabalho.

Capítulo 1

Análise Semi - Clássica dos Campos em $D = 1 + 2$

Quando adotamos o formalismo Lagrangeano no estudo de uma teoria quântica de campos é porque pretendemos uma abordagem econômica, abrangente e de fácil entendimento; uma vez que a dinâmica dos campos a serem trabalhados sai diretamente do princípio de mínima ação.

Se, por um lado, o Formalismo Lagrangeano propicia uma melhor visualização na procura de novas teorias, por outro, ele deve se mostrar consistente no tratamento quântico dado a esta teoria. Para isso, é necessário o preenchimento de alguns requisitos fundamentais:

– **Invariância de Lorentz:** Um dos conceitos mais importantes na física é que as leis naturais devem ter a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas.

– **Causalidade:** Um dado evento só pode ter relações com outros eventos numa velocidade abaixo ou igual à da luz. É imprescindível ressaltar que uma condição necessária desse princípio é o conceito de **localidade** para os campos. A localidade quebra a idéia de ação a distância da Mecânica Newtoniana, indicando que os efeitos físicos de um evento devem ser propagados localmente de um ponto para um outro vizinho. Operacionalmente, partículas de massa imaginária, os tachyons, devem estar ausentes da teoria; pois teriam velocidades maiores que a da luz, violando a causalidade.

– **Unitariedade:** A probabilidade de certos estados quânticos aparecerem é definida positivamente. Funções de onda de normas negativas gerariam estados de probabilidade negativa, os chamados ghosts da teoria, violando a unitariedade.

– **Renormalizabilidade:** A renormalização de uma teoria, ou seja, a retirada dos infinitos é o que proporciona a sua condição de predictibilidade.

Neste capítulo, estaremos interessados em verificar as condições de causalidade e a unitariedade da teoria. Para ambas, a obtenção dos propagadores dos campos da ação proposta é fundamental.

Sabe-se que o propagador é identificado como uma função de Green causal, ou seja, seus pólos são interpretados como as partículas mediadoras estáveis da teoria tratada. Então, pela análise destes pólos é que poderemos verificar a causalidade, que será assegurada pela ausência de tachyons do espectro, e pela análise de resíduos se inferirá sobre a unitariedade da teoria, que será assegurada pela ausência de ghosts ou pelo desacoplamento destes dos demais estados físicos.

Para se obter um melhor rendimento, estudaremos a ação proposta separadamente. Para isso, a ação original é reescrita na forma:

$$S = S_{Aa} + S_{\bar{\psi}\psi} + S_{GF} + S_{int} , \quad (1.1)$$

onde:

$$S_{Aa} \equiv \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \mu \epsilon^{\mu\rho\nu} A_\mu \partial_\rho a_\nu \right\} , \quad (1.2.a)$$

$$S_{GF} \equiv \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu a^\mu)^2 \right\} , \quad (1.2.b)$$

$$S_{\bar{\psi}\psi} \equiv \int d^3x \{ i\bar{\psi}_+ \not{\partial} \psi_+ + i\bar{\psi}_- \not{\partial} \psi_- - m(\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \} \text{ e} \quad (1.2.c)$$

$$S_{int} \equiv \int d^3x \{ i\bar{\psi}_+ (ie\mathcal{A} + ig\hat{t}) \psi_+ + i\bar{\psi}_- (ie\mathcal{A} - ig\hat{t}) \psi_- \}. \quad (1.2.d)$$

1.1 Cálculo dos Propagadores de A_μ e a_μ

Como já foi mencionado, os propagadores são entidades identificáveis com as funções de Green causais; as quais, fisicamente, mostram a dinâmica da propagação dos sinais entre fontes geradoras. Os propagadores são obtidos pela parte quadrática da ação, ou seja, sua parte livre. Então, encontrando os termos bilineares da ação, podemos reescrevê-la na forma:

$$S_{livre} = \int dx \left(\frac{1}{2} \Psi Op \Psi + J \Psi \right), \quad (1.3)$$

onde Op é um operador de onda e J é uma fonte acoplada ao campo, por questão de generalidade.

Temos, contudo, após alguma álgebra, que a interação corrente - corrente é mediada por Op^{-1} :

$$S_{livre} = \int dx \left(\frac{1}{2} \Psi Op \Psi - \frac{1}{2} J Op^{-1} J \right), \quad (1.4)$$

identificando Op^{-1} como o propagador.

Desta forma, o problema central no cálculo dos propagadores, por esse método, reside na inversão de um operador de onda.

Fazendo a análise dos campos escalares primeiro, a ação livre que os contém é a definida por S_{Aa} , (1.2.a).

Portanto, para empregarmos o método adotado, tomamos como exemplo o seu primeiro termo:

$$\int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \square \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\nu \right\}, \quad (1.5)$$

onde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ é o d'alambertiano.

Conhecendo, os operadores de projeção transversal $\Theta^{\mu\nu}$ e longitudinal $\omega^{\mu\nu}$, definidos

como:

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} e \quad (1.6.a)$$

$$\omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}, \quad (1.6.b)$$

teremos:

$$\int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu (\square \Theta^{\mu\nu}) A_\nu \right\}. \quad (1.7)$$

Com isso, surge um problema: Já que os projetores $\Theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ formam uma base completa, a ausência de um deles no operador de onda $\square \Theta^{\mu\nu}$ o torna não inversível. Isso ocorre porque a simetria de gauge suprime a dinâmica do setor longitudinal. Sendo, então, necessária uma prescrição que fixe a configuração do potencial A^μ sem qualquer ambiguidade. Necessária, portanto, é a introdução de um gauge fixing. Ele quebra a invariância de gauge, representada pela transformação local $A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$, fixando uma configuração particular para o potencial A^μ .

Desta forma, com o gauge fixing adotado na ação S_{GF} , (1.2.b):

$$\int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left(\frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} \right) A_\nu \right\}, \quad (1.8)$$

o que nos dá para o campo de Maxwell:

$$S_{livre}(A) = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu \left(\square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} \right) A_\nu \right\}. \quad (1.9)$$

Onde, agora, temos um operador inversível, pois está espalhado na base completa dos projetores transversal e longitudinal.

Encontramos a mesma dificuldade para o campo estatístico a^μ , e por conseguinte, a mesma solução. Daí, em tudo análogo a formulação anterior, encontramos:

$$S_{livre}(a) = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} a_\mu \left(\square \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta} \omega^{\mu\nu} \right) a_\nu \right\}. \quad (1.10)$$

Vale ressaltar, que apesar da componente longitudinal ser inserida no modelo, ela deverá se desacoplar da teoria, pois não interage com as correntes externas, como veremos na análise de resíduos mais a frente. Desta forma, mesmo com a introdução de um gauge fixing, a invariância de gauge, pelo menos a tree - level, será restabelecida no final, e a física do problema não se alterará.

Seguindo a análise para o termo misto de Chern - Simons, definimos o operador de projeção transversal:

$$S^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\rho\nu} \partial_\rho, \quad (1.6.c)$$

o que nos leva de:

$$\int d^3x \{ \mu \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho \} = \int d^3x \{ A_\mu (\mu S^{\mu\nu}) a_\nu \}. \quad (1.11)$$

Não obstante, sabendo que $\int ASa = \frac{1}{2} \int ASa + \frac{1}{2} \int aSA$, conseguimos uma configuração simétrica para os termos mistos da ação S_{Aa} . Portanto, finalmente, poderemos reescrevê-la na forma desejada:

$$S_{Aa} = \int d^3x \frac{1}{2} (A_\mu a_\mu) \begin{pmatrix} \square\Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha}\omega^{\mu\nu} & \mu S^{\mu\nu} \\ \mu S^{\mu\nu} & \square\Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta}\omega^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu \\ a_\nu \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Logo, o propagador para os campos A_μ e a_μ , virá da inversa dessa matriz:

$$\vartheta^{\mu\nu -1} \equiv \begin{pmatrix} \square\Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha}\omega^{\mu\nu} & \mu S^{\mu\nu} \\ \mu S^{\mu\nu} & \square\Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta}\omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.13)$$

Para tal empreitada, foi construída uma tabela multiplicativa, com base nas equações (1.6), da álgebra dos operadores transversais, Θ e S , e longitudinal, ω :

	Θ	ω	S
Θ	Θ	0	S
ω	0	ω	0
S	S	0	$-\square\Theta$

tabela 1.1

De posse dessa tabela, o processo de inversão da matriz acima se torna factível (Vide **Apêndice A.1**). Portanto, a inversa dessa matriz de operadores é da forma:

$$\vartheta^{\mu\nu -1} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^2 + \square} \Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square} \omega^{\mu\nu} & -\frac{\mu}{\square(\mu^2 + \square)} S^{\mu\nu} \\ -\frac{\mu}{\square(\mu^2 + \square)} S^{\mu\nu} & \frac{1}{\mu^2 + \square} \Theta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\square} \omega^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Definindo a matriz dos propagadores como:

$$G^{\mu\nu}(x-y) \equiv i\vartheta^{\mu\nu -1} \delta^3(x-y), \quad (1.15)$$

então encontraremos quatro propagadores, identificados para cada termo da (1.14):

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(\partial) \equiv i \left(\frac{1}{\mu^2 + \square} \Theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square} \omega^{\mu\nu} \right) \delta^3(x-y), \quad (1.16.a)$$

$$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(\partial) \equiv -i \left(\frac{\mu}{\square(\mu^2 + \square)} S^{\mu\nu} \right) \delta^3(x-y), \quad (1.16.b)$$

$$\Delta_{aA}^{\mu\nu}(\partial) \equiv -i \left(\frac{\mu}{\square(\mu^2 + \square)} S^{\mu\nu} \right) \delta^3(x-y) \text{ e} \quad (1.16.c)$$

$$\Delta_{aa}^{\mu\nu}(\partial) \equiv i \left(\frac{1}{\mu^2 + \square} \Theta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\square} \omega^{\mu\nu} \right) \delta^3(x-y). \quad (1.16.d)$$

1.1.1 Análise de Pólos e Resíduos

Para a análise desses propagadores, é mais conveniente que eles sejam expressos no espaço dos momenta. Desta forma, analisando os pólos, podemos determinar as massas

dos possíveis quanta da teoria; seguida pela análise de resíduos para se inferir acerca da natureza física e dinâmica dessas partículas.

Então, identificando $G^{\mu\nu}(x-y)$, através da sua transformada de Fourier:

$$G^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{G}^{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)} , \quad (1.17)$$

com sua forma acima (eq. 1.15) e definindo a delta como:

$$\delta^3(x-y) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)} , \quad (1.18)$$

obtemos a matriz dos propagadores, $\tilde{G}^{\mu\nu}(k)$, no espaço dos momenta:

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(k) = -i \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2-\mu^2}(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} & i \frac{\mu}{k^2(k^2-\mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \\ i \frac{\mu}{k^2(k^2-\mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda & \frac{1}{k^2-\mu^2}(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \end{pmatrix} . \quad (1.19)$$

Fazendo:

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(k) \equiv \begin{pmatrix} \Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) & \Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) \\ \Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) & \Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) \end{pmatrix} , \quad (1.20)$$

iremos estudar os propagadores caso a caso:

$$\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k) = -i \left(\frac{1}{k^2-\mu^2}(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\alpha}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) , \quad (1.21.a)$$

$$\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2-\mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda , \quad (1.21.b)$$

$$\Delta_{aA}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu}{k^2(k^2-\mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \quad e \quad (1.21.c)$$

$$\Delta_{aa}^{\mu\nu}(k) = -i \left(\frac{1}{k^2-\mu^2}(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) + \frac{\beta}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) . \quad (1.21.d)$$

Por uma breve inspeção dos propagadores acima, vemos que:

- $\Delta_{AA}^{\mu\nu}(k)$ têm um pólo simples, $k^2 = \mu^2$, no setor transversal e outro pólo simples, $k^2 = 0$, no setor longitudinal.
- $\Delta_{Aa}^{\mu\nu}(k)$ têm dois pólos simples no setor transversal: $k^2 = 0$ e $k^2 = \mu^2$.
- $\Delta_{aA}^{\mu\nu}(k)$ têm dois pólos simples no setor transversal: $k^2 = 0$ e $k^2 = \mu^2$.
- $\Delta_{aa}^{\mu\nu}(k)$ têm um pólo simples, $k^2 = \mu^2$, no setor transversal e outro pólo simples, $k^2 = 0$, no setor longitudinal.

Apresentadas as massas das possíveis partículas propagadoras dos campos vetoriais, podemos garantir a causalidade, pois para todas $k^2 \geq 0$; indicando a ausência de tachyons do modelo.

Na verificação da unitariedade, o método usualmente empregado consiste no acoplamento de correntes externas ao propagador; obtendo, desse modo, as amplitudes que representam a emissão e absorção das partículas mediadoras, os quanta da teoria.

A unitariedade exige que os resíduos dessas amplitudes tenham sua parte imaginária não negativa. É o que se procura nesta etapa:

- i) $A_{AA} \equiv J_\mu \Delta_{AA}^{\mu\nu} J_\nu \Rightarrow$ Imagem do Resíduo de $A_{AA}|_{\text{pólos}} \geq 0$.
- ii) $A_{Aa} \equiv J_\mu \Delta_{Aa}^{\mu\nu} j_\nu \Rightarrow$ Imagem do Resíduo de $A_{Aa}|_{\text{pólos}} \geq 0$.
- iii) $A_{aA} \equiv j_\mu \Delta_{aA}^{\mu\nu} J_\nu \Rightarrow$ Imagem do Resíduo de $A_{aA}|_{\text{pólos}} \geq 0$.
- iii) $A_{aa} \equiv j_\mu \Delta_{aa}^{\mu\nu} j_\nu \Rightarrow$ Imagem do Resíduo de $A_{aa}|_{\text{pólos}} \geq 0$.

Contudo, observando que estes acoplamentos têm os vínculos $k_\mu J^\mu = k_\mu j^\mu = 0$, ou seja, J^μ e j^μ são propostas como correntes conservadas. Uma consequência da simetria de gauge da ação S_{Aa} , é claro, sem os termos de gauge fixing.

Como consequência desses vínculos, vemos que somente as componentes de spin 1, setor transversal, se propagam; ao passo que todas as componentes de spin 0, setor longitudinal, se desacoplam da teoria, como já foi dito antes. Os termos de gauge fixing realmente não possuem dinâmica, entram no modelo como campos auxiliares.

Deste modo:

$$i) A_{AA} = J_\mu \left(-i \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) J_\nu. \quad (1.22.a)$$

$$ii) A_{Aa} = J_\mu \left(\frac{\mu}{k^2 (k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \right) j_\nu. \quad (1.22.b)$$

$$iii) A_{aA} = j_\mu \left(\frac{\mu}{k^2 (k^2 - \mu^2)} \epsilon^{\mu\lambda\nu} k_\lambda \right) J_\nu. \quad (1.22.c)$$

$$iv) A_{aa} = j_\mu \left(-i \frac{1}{k^2 - \mu^2} \eta^{\mu\nu} \right) j_\nu. \quad (1.22.d)$$

Para o cálculo das amplitudes, escolhemos para $k^2 = 0$ o vetor $k^\mu = (\mu, 0, \mu)$ e para $k^2 = \mu^2$ o vetor $k^\mu = (\mu, 0, 0)$.

Com as correntes externas, definidas no campo real, iguais a $J^\mu \equiv Ak^\mu + B\tilde{k}^\mu + C\varepsilon^\mu$ e $j^\mu \equiv ak^\mu + b\tilde{k}^\mu + c\varepsilon^\mu$; tendo $k^\mu \equiv (k^0, k^1, k^2)$, $\tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -k^1, -k^2)$ e $\varepsilon^\mu \equiv (0, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ obedecendo aos vínculos covariantes $k^\mu \varepsilon_\mu = 0$, $\tilde{k}^\mu \varepsilon_\mu = 0$ e $\varepsilon^\mu \varepsilon_\mu = -1$.

Calculando, desta forma, os resíduos de cada amplitude, obtemos sua imagem:

$$i) \text{Im Res } A_{AA}|_{k^2=\mu^2} = C^2 > 0. \quad (1.23.a)$$

$$ii) \text{Im Res } A_{Aa}|_{k^2=\mu^2}^{k^2=0} = 0. \quad (1.23.b)$$

$$iii) \text{Im Res } A_{aA}|_{k^2=\mu^2}^{k^2=0} = 0. \quad (1.23.c)$$

$$iv) \text{Im Res } A_{aa}|_{k^2=\mu^2} = c^2 > 0. \quad (1.23.d)$$

Para as amplitudes A_{AA} e A_{aa} teremos dois quanta, vindos do termo de Chern-Simons, se propagando com massa igual a μ , já que a parte imaginária dos resíduos é positiva. Para os termos cruzados os quanta não se propagam, pois a imagem dos seus resíduos é nula.

Como todas as constantes são reais, podemos garantir a unitariedade do modelo, pelo menos a tree - level.

Desta forma, temos um quadro resumitivo, com a análise dos propagadores:

- i) $\Delta_{AA}^{\mu\nu}$:
 - Setor Longitudinal , Pólo $k^2 = 0$, Desacoplado do modelo.
 - Setor Transversal , Pólo $k^2 = \mu^2$, Dinâmico , causal e unitário a tree-level.
- ii) $\Delta_{Aa}^{\mu\nu}$:
 - Setor Transversal , Pólo $k^2 = 0$, Sem dinâmica , causal e unitário a tree - level.
 - Setor Transversal , Pólo $k^2 = \mu^2$, Sem dinâmica , causal e unitário a tree-level.
- iii) $\Delta_{aA}^{\mu\nu}$:
 - Setor Transversal , Pólo $k^2 = 0$, Sem dinâmica , causal e unitário a tree - level.
 - Setor Transversal , Pólo $k^2 = \mu^2$, Sem dinâmica , causal e unitário a tree-level.
- iv) $\Delta_{aa}^{\mu\nu}$:
 - Setor Longitudinal , Pólo $k^2 = 0$, Desacoplado do modelo.
 - Setor Transversal , Pólo $k^2 = \mu^2$, Dinâmico , causal e unitário a tree-level.

1.2 Cálculo dos Propagadores dos Espinores

Dando prosseguimento ao cálculo de propagadores da ação proposta S (1.1); vamos, nessa etapa, obter os propagadores dos campos fermiônicos, através da ação $S_{\bar{\psi}\psi}$.

De um modo geral, o procedimento é o mesmo. Pega - se a ação livre (1.2.c), e reescreve - se - a na forma adequada, com o operador de onda ladeado pelos campos:

$$S_{\bar{\psi}\psi} = \int d^3x (\bar{\psi}_+ \bar{\psi}_-) \begin{pmatrix} i\rlap{\not{D}} - m & 0 \\ 0 & i\rlap{\not{D}} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

De modo análogo, o propagador virá da inversa dessa matriz de operadores de onda.

Tendo a matriz:

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} i\rlap{\not{D}} - m & 0 \\ 0 & i\rlap{\not{D}} + m \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

define - se o propagador:

$$G_{\bar{\psi}\psi}(x-y) \equiv -i\varphi^{-1}\delta^3(x-y). \quad (1.26.a)$$

Até aqui, tudo igual ao procedimento do capítulo anterior. Mas, sem os operadores de projeção que formam uma base somente para campos de gauge, lançaremos mão de uma nova definição para o propagador:

$$G_{\bar{\psi}\psi}(x-y) \equiv \begin{pmatrix} ia\not{\partial}+b & 0 \\ 0 & ic\not{\partial}+d \end{pmatrix} G_{esc}(x-y), \quad (1.26.b)$$

onde $G_{esc}(x-y)$ é a função de Green para o campo escalar de Klein - Gordon, que , conseqüentemente satisfaz a relação:

$$(\square + m^2)G_{esc}(x-y) = \delta^3(x-y). \quad (1.27)$$

Usando um artifício que relaciona a nova forma de $G_{\bar{\psi}\psi}(x-y)$ com a matriz que se quer inverter φ , temos:

$$\varphi(-i\varphi^{-1}\delta^3(x-y)) = -i\mathbb{1}\delta^3(x-y), \quad (1.28)$$

onde usamos (1.26.a). Após várias manipulações algébricas, obtemos para a matriz dos propagadores $G_{\bar{\psi}\psi}(x-y)$, a forma:

$$G_{\bar{\psi}\psi}(x-y) = - \begin{pmatrix} \frac{\not{\partial}-im}{\square+m^2} & 0 \\ 0 & \frac{\not{\partial}+im}{\square+m^2} \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (1.29)$$

onde, identificamos os propagadores:

$$\Delta^{++}(\partial) = -\frac{\not{\partial} - im}{\square + m^2} \delta^3(x - y) . \quad (1.30.a)$$

$$\Delta^{--}(\partial) = -\frac{\not{\partial} + im}{\square + m^2} \delta^3(x - y) . \quad (1.30.b)$$

1.2.1 Análise de Pólos

Novamente, por conveniência, reescreveremos os propagadores no espaço dos momenta. Então usando a mesma definição para a delta:

$$\delta^3(x - y) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)} , \quad (1.31)$$

obtemos:

$$\Delta^{++}(k) = i \frac{k - m}{k^2 - m^2} . \quad (1.32.a)$$

$$\Delta^{--}(k) = i \frac{k + m}{k^2 - m^2} . \quad (1.32.b)$$

Observando que ambos os propagadores tem pólos com $k^2 = m^2$, podemos garantir que a causalidade está assegurada, uma vez que $k^2 > 0$.

Capítulo 2

Análise Quântica dos Campos em

$$D = 1 + 2$$

O estudo dos propagadores, feito no capítulo anterior, se objetivou na análise clássica dos quanta: Análise a 0-loop das partículas estáveis mediadoras da teoria, naturalmente observáveis, as ditas partículas on-shell do modelo.

Neste capítulo, a incorporação dos efeitos quânticos é, então, considerada. Numa abordagem perturbativa, iremos calcular as correções a 1-loop do modelo. Levando-se em conta efeitos ainda não considerados de criação e aniquilação de partículas virtuais - não observáveis - da teoria, as chamadas partículas off-shell.

Para tal empreendimento, primeiramente calcularemos o grau superficial de divergência desses diagramas de loops através do método do power-counting. Ele inferirá sobre a renormalizabilidade da teoria, a partir da contagem de potências dos loops.

A seguir, com a obtenção das regras de Feynman para os vértices de interação, é proposto, como cálculo explícito de loop, a correção quântica para os campos escalares propagantes, com base nos diagramas de vacuum polarization. Retirando-se informações, a partir daí, sobre possíveis correções nas massas dos fótons, bem como verificação da simetria de gauge a nível quântico.

2.1 Power Counting da Teoria

O objetivo do power counting é estabelecer resultados sobre a renormalizabilidade da teoria, através da inspeção do modelo na região ultra - violeta ($k \rightarrow \infty$), ou seja, deseja - se conhecer a divergência da teoria a altas energias.

Para isso, é necessário o reconhecimento dos termos minimamente acoplados da ação proposta, obtendo assim, os vértices de interação do modelo.

Deste modo, a ação de interação definida pela (1.2.d), apresenta 4 termos de interação:

$$S_{int}^1 \equiv i \int d^3x \bar{\psi}_+(ieA)\psi_+ \Rightarrow V_{+A+}^\mu \quad (2.1.a)$$

$$S_{int}^2 \equiv i \int d^3x \bar{\psi}_+(ig\phi)\psi_+ \Rightarrow V_{+a+}^\mu \quad (2.1.b)$$

$$S_{int}^3 \equiv i \int d^3x \bar{\psi}_-(ieA)\psi_- \Rightarrow V_{-A-}^\mu \quad (2.1.c)$$

$$S_{int}^4 \equiv i \int d^3x \bar{\psi}_-(-ig\phi)\psi_- \Rightarrow V_{-a-}^\mu \quad (2.1.d)$$

De onde poderemos identificar os seus respectivos vértices de interação, definidos como V_{+A+}^μ , V_{+a+}^μ , V_{-A-}^μ e V_{-a-}^μ .

Passemos ao cálculo da contagem de potências, onde mediremos o grau de divergência da teoria.

Da identidade topológica envolvendo o n° de loops (L), linhas internas (I) e vértices (V), temos:

$$L = I - (V - 1) , \quad (2.2)$$

onde $I = I_{AA} + I_{aa} + I_{Aa} + I_{aA} + I_{\bar{\psi}_+\psi_+} + I_{\bar{\psi}_-\psi_-}$ e $V = V_{+A+}^\mu + V_{+a+}^\mu + V_{-A-}^\mu + V_{-a-}^\mu$.

Como as correções a 1,2,3,...- loops equivalem a integrais simples, duplas, triplas, ... dos propagadores e dos vértices; a contagem de potências é a contagem na escala

logarítmica das potências de k quando $k \rightarrow \infty$. Medindo a divergência da teoria a altas energias.

Temos então, para os propagadores:

$$\langle \bar{\psi}_+ \psi_+ \rangle, \langle \bar{\psi}_- \psi_- \rangle \rightarrow \frac{1}{k}; \quad \langle AA \rangle, \langle aa \rangle \rightarrow \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \langle Aa \rangle, \langle aA \rangle \rightarrow \frac{1}{k^3}.$$

Portanto, o grau superficial de divergência δ , é da forma:

$$\delta = 3L - I_{\bar{\psi}_+ \psi_+} - I_{\bar{\psi}_- \psi_-} - 2I_{AA} - 2I_{aa} - 3I_{Aa} - 3I_{aA}, \quad (2.3)$$

onde, I é a linha interna representando o propagador e 3 é a dimensão.

Sabendo que um vértice (V) se dedesdobra em correntes internas (I) e externas (E), obtemos as relações de V, E e I para cada campo:

$$\psi_+ : \quad 2I_{\bar{\psi}_+ \psi_+} + E_{\bar{\psi}_+ \psi_+} = 2V_{+A+}^\mu + 2V_{+a+}^\mu. \quad (2.4.a)$$

$$\psi_- : \quad 2I_{\bar{\psi}_- \psi_-} + E_{\bar{\psi}_- \psi_-} = 2V_{-A-}^\mu + 2V_{-a-}^\mu. \quad (2.4.b)$$

$$A : \quad 2I_{AA} + I_{Aa} + E_{AA} = V_{+A+}^\mu + V_{-A-}^\mu. \quad (2.4.c)$$

$$a : \quad 2I_{aa} + I_{aA} + E_{aa} = V_{+a+}^\mu + V_{-a-}^\mu. \quad (2.4.d)$$

De posse dessas equações, obtemos sobre o grau superficial de divergência da teoria a altas energias:

$$\begin{aligned} \delta = 3 - \frac{1}{2}E_{AA} - \frac{1}{2}E_{aa} - E_{\bar{\psi}_+ \psi_+} - E_{\bar{\psi}_- \psi_-} - \frac{1}{2}V_{+A+}^\mu + \\ - \frac{1}{2}V_{+a+}^\mu - \frac{1}{2}V_{-A-}^\mu - \frac{1}{2}V_{-a-}^\mu - I_{Aa} - I_{aA}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Desta forma, observando que a divergência δ possui termos de linhas internas, podemos constatar que se trata de uma **teoria super - renormalizável** [27], isto é,

apenas um número finito de diagramas podem conter possíveis divergências.

2.2 Regras de Feynman e Vacuum Polarization dos Campos

Para a análise quântica perturbativa da propagação do fóton massivo, é necessário o conhecimento dos vértices de interação dos campos considerados no modelo. Esses fatores de vértices são obtidos através da derivação das regras de Feynman pela ação efetiva do modelo.

A ação efetiva $\Gamma(A, a, \bar{\psi}, \psi)$, está relacionada ao funcional gerador das funções de Green conexas $Z(J, j, J_{esp}, \bar{J}_{esp})$, por uma transformação de Legendre:

$$\Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi] = Z(J, j, \bar{\mathfrak{S}}, \mathfrak{S}) - \int d^3x (J^\mu A_\mu + j^\mu a_\mu + \bar{\psi} \mathfrak{S} + \bar{\mathfrak{S}} \psi), \quad (2.6)$$

observando que as funções de Green conexas dão os valores esperados de vácuo da teoria, dentro do formalismo das integrais de caminho.

A ação efetiva também é o funcional gerador das funções de vértice irreduzível de n - pontos, as comumente chamadas funções de Green 1PI (One-Particle-Irreducible) de n - pontos. Defina-se-a como:

$$\Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^n \Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi]}{\delta A^\mu(x_1) \dots \delta a^\nu(x_i) \dots \delta \bar{\psi}^\alpha(x_j) \dots \delta \psi^\beta(x_n)} \Bigg|_{\substack{A=a=0 \\ \bar{\psi}=\psi=0}}. \quad (2.7)$$

Esta função representa a soma de todos os gráficos de Feynman conexas que não podem ser reduzidos a outros mais simples. Estes gráficos irreduzíveis tem um papel fundamental na construção sistemática da teoria da perturbação em ordens superiores.

Contudo, expandindo a ação efetiva $\Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi]$ em termos da função de Green 1PI de n - pontos $\Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$, obtemos os vértices de interação que é o nosso objetivo.

Para isso, utiliza-se uma expansão de Taylor generalizada de várias variáveis,

aproximada para o contínuo $(\sum_{k_i} \rightarrow \int d^3 x_i)$:

$$\Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \int d^3 x_1 \dots \int d^3 x_i \dots \int d^3 x_j \dots \int d^3 x_n \times$$

$$\times \left\{ \Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \times A_{(x_1)}^\mu \dots a_{(x_i)}^\nu \dots \bar{\psi}_{(x_j)}^\alpha \dots \psi_{(x_n)}^\beta \right\}, \quad (2.8)$$

que é a chamada expansão de Volterra para o funcional $\Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi]$ [28].

Como os cálculos de loops são trabalhados no espaço dos momenta, devemos, através das transformadas dos campos, obter a ação efetiva neste espaço. Desta forma, com:

$$\bar{\psi}_\alpha(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_\alpha(k) e^{-ikx}. \quad (2.9.a)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} A_\mu(l) e^{ilx}. \quad (2.9.b)$$

$$\psi_\beta(x) = \int \frac{d^3 m}{(2\pi)^3} \psi_\beta(m) e^{imx}. \quad (2.9.c)$$

$$a_\nu(x) = \int \frac{d^3 n}{(2\pi)^3} a_\nu(n) e^{inx}. \quad (2.9.d)$$

Teremos:

$$\Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \int d^3 x_1 \dots \int d^3 x_i \dots \int d^3 x_j \dots \int d^3 x_n \times$$

$$\times \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \Gamma_{\mu \dots \nu \dots \alpha \dots \beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \times$$

$$\times A_{(p_1)}^\mu \dots a_{(p_i)}^\nu \dots \bar{\psi}_{(p_j)}^\alpha \dots \psi_{(p_n)}^\beta \times e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_i x_i} \dots e^{-ip_j x_j} \dots e^{ip_n x_n}. \quad (2.10)$$

Com a ajuda da sua transformada de Fourier, definida como:

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^3 \delta(p_1 + \dots + p_i + \dots + p_j + \dots + p_n) \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\alpha\dots\beta}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) \equiv \\
& \equiv \int d^3x_1 \dots \int d^3x_i \dots \int d^3x_j \dots \int d^3x_n \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\alpha\dots\beta}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \times \\
& \quad \times e^{-ip_1x_1} \dots e^{-ip_ix_i} \dots e^{-ip_jx_j} \dots e^{-ip_nx_n}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Encontramos, finalmente, a ação efetiva no espaço dos momenta:

$$\begin{aligned}
\Gamma[A, a, \bar{\psi}, \psi] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \dots \int \frac{d^3p_{n-1}}{(2\pi)^3} \times \\
& \times \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\alpha\dots\beta}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n) \times A_{(p_1)}^\mu \dots a_{(p_i)}^\nu \dots \bar{\psi}_{(p_j)}^\alpha \dots \psi_{(p_n)}^\beta.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Com $p_j = p_1 + \dots + p_i + \dots + p_n$.

De posse da ação efetiva, expandida no espaço dos momenta, podemos derivar as regras de Feynman para os vértices de interação, identificando - os com a função de Green 1PI de n - pontos neste espaço.

Portanto, pela (2.1.a), podemos obter através das transformadas de Fourier (2.9) e pela delta definida como:

$$\int d^3x e^{-i(k-l-m)x} \equiv (2\pi)^3 \delta^3(k - (l+m)), \tag{2.13}$$

a nova expressão:

$$S_{int}^1 = i \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3m}{(2\pi)^3} (ie\gamma^\mu) \bar{\psi}_+(k) A_\mu(l) \psi_+(m), \tag{2.14}$$

com $k = l + m$. Encontrando, desta forma, o vértice:

$$V_{+A+}^\mu = ie\gamma^\mu. \tag{2.15.a}$$

De forma semelhante, encontramos os outros vértices pelas (2.1.b), (2.1.c) e (2.1.d). Por isso, teremos:

$$V_{+a+}^{\mu} = ig\gamma^{\mu}, \quad (2.15.b)$$

$$V_{-A-}^{\mu} = ie\gamma^{\mu} \text{ e} \quad (2.15.c)$$

$$V_{-a-}^{\mu} = -ig\gamma^{\mu}. \quad (2.15.d)$$

Já conhecidos os propagadores e os vértices de interação, passamos agora ao cálculo da correção quântica da massa do fóton propagante, a dita polarização do vácuo. Neste caso, iremos cacular as correções de 2ª ordem a 1 - loop, células básicas na construção de correções de ordens superiores.

Para isto, teremos como base os diagramas de vacuum polarization a seguir, dos quais iremos calcular seus loops um a um:

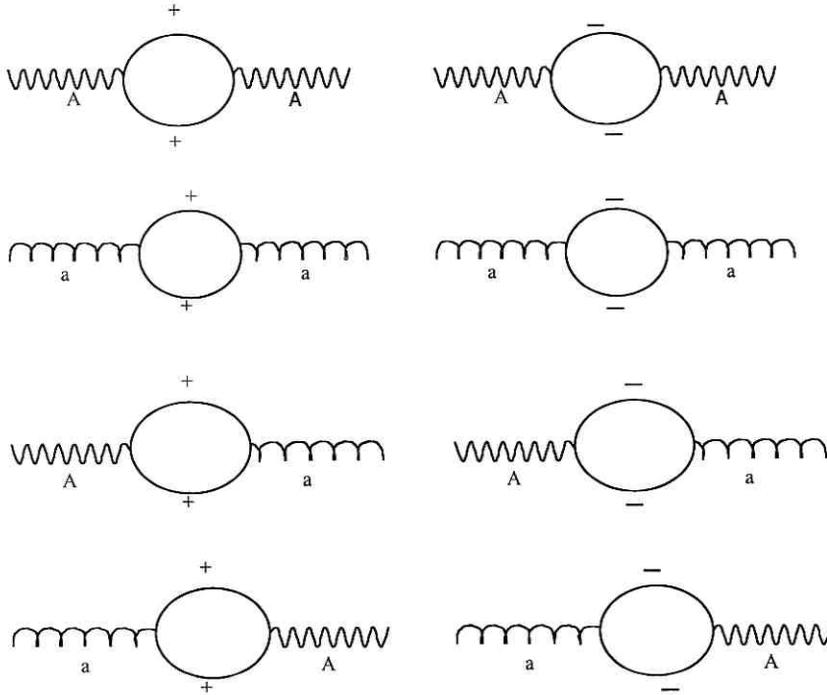


figura 2.1

Para o cálculo desses diagramas não se faz necessário o processo de regularização, pois em 3 dimensões as integrais são finitas. Atemos, então, ao cálculo dos loops. Para começar, o loop do campo de maxwell:

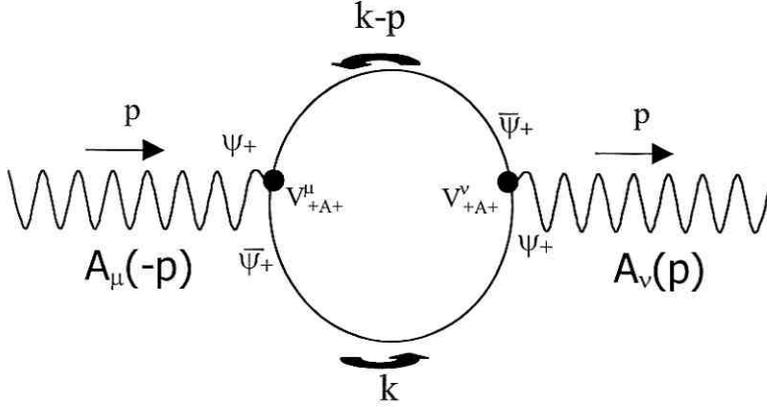


figura 2.2

Onde podemos observar que as partículas virtuais levam o momento k , dado arbitrariamente. Esse loop, definido como ${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p)$, é expresso por:

$${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_{+A+}^\mu \Delta^{++}(k) V_{+A+}^\nu \Delta^{++}(k-p) \right\}. \quad (2.16.a)$$

De onde teremos dos cálculos obtidos:

$${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (ie\gamma^\mu) \left(i \frac{k - m}{k^2 - m^2} \right) (ie\gamma^\nu) \left(i \frac{(k-p) - m}{(k-p)^2 - m^2} \right) \right\}. \quad (2.16.b)$$

Expresso, finalmente, na forma:

$${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = -e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} \times \\ \times tr \left\{ \gamma^\mu (\gamma^\rho k_\rho - m) \gamma^\nu [\gamma^\sigma (k-p)_\sigma - m] \right\}. \quad (2.16.c)$$

Este cálculo será feito em 4 etapas:

I) Primeiramente, o cálculo do traço. Pela expressão do traço em (2), obtemos , com

a ajuda da igualdade:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \mathbb{1}_{2 \times 2} \eta^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho, \quad (2.17)$$

e com $\text{tr } \gamma^\mu = 0$ e $\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 2 \eta^{\mu\nu}$, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & \text{tr} \{ \gamma^\mu (\gamma^\rho k_\rho - m) \gamma^\nu [\gamma^\sigma (k - p)_\sigma - m] \} = \\ & = 2[2k^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu - k^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu}(k^2 - k.p - m^2) + im\epsilon^{\mu\nu\sigma} p_\sigma]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

II) Portanto, a integral proposta fica na forma:

$$\begin{aligned} & {}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = -2e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \frac{2k^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu - k^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu}(k^2 - k.p - m^2) + im\epsilon^{\mu\nu\sigma} p_\sigma}{(k^2 - m^2)(k^2 - m^2 - 2k.p + p^2)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para resolvê-la é necessário colocá-la na forma de integrais de resultados conhecidos, integrais de loop geralmente encontradas no método de regularização dimensional, explicitadas no **Apêndice B**. Deste modo, usando a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{\alpha(\alpha + \beta)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\alpha + \beta x)^2}. \quad (2.20)$$

Colocamos a integral na forma apropriada:

$$\begin{aligned} & {}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = -2e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \frac{2k^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu - k^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu}(\eta_{\sigma\rho} k^\sigma k^\rho - \eta_{\sigma\rho} k^\sigma p^\rho - m^2) + im\epsilon^{\mu\nu\sigma} p_\sigma}{(k^2 - m^2 - 2k.px + p^2 x^2)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde reassumimos os termos k^2 e $k.p$, para efetuarmos os cálculos necessários.

Desta forma, usando as integrais de loop J_0 , J_1^μ e $J_2^{\mu\nu}$ do **Apêndice B**, encontramos, finalmente:

$$\begin{aligned}
{}_{AA}\prod_{++}^{\mu\nu}(p) = & -\frac{ie^2}{4\pi} \int_0^1 dx \times \left\{ (2 p^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} p^2) \frac{x^2}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}} - \right. \\
& -\eta^{\mu\nu} \sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2} - (2 p^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} p^2) \frac{x}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}} + \\
& \left. + (im\epsilon^{\mu\nu\sigma} p_\sigma + \eta^{\mu\nu} m^2) \frac{1}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}} \right\}. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Deixando, portanto, o cálculo do loop representado nos momenta dos campos mediadores estáveis da teoria.

III) Agora pela relação entre as integrais paramétricas, contidas no **Apêndice C.1**, obtemos o tensor ${}_{AA}\prod_{++}^{\mu\nu}(p)$ em função de $I(p)$, definido como:

$$I(p) \equiv \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}}. \tag{2.23}$$

Portanto:

$${}_{AA}\prod_{++}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ mI(p) S^{\mu\nu} + \left(m - \frac{p^2 + 4m^2}{4} I(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \tag{2.24}$$

Onde $\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$ e $S^{\mu\nu} \equiv i\epsilon^{\mu\sigma\nu} p_\sigma$ são os operadores de projeção transversal, já definidos, agora no espaço dos momenta.

IV) Bastando, agora, para completar a resolução, o resultado de $I(p)$, obtida no **Apêndice C.2**:

Portanto, pelas definições:

$$\chi(p) \equiv \ln \left| \frac{2m+p}{2m-p} \right| e \quad (2.25)$$

$$\phi(p) \equiv \arcsen \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right), \quad (2.26)$$

obtemos, finalmente, o tensor ${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p)$ nas variáveis de momento e de massa:

i) Para $p^2 > 0$:

$${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{p} S^{\mu\nu} + \left(m - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \quad (2.27.a)$$

ii) Para $p^2 < 0$:

$${}_{AA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{p} S^{\mu\nu} + \left(\frac{m}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \quad (2.27.b)$$

Onde consideramos m^2 definida positivamente.

Calculamos o loop referente a criação do par virtual elétron - pósitron, de spin - up, devido a propagação do fóton do campo de Maxwell A_μ . Passamos, agora, ao cálculo do loop do spin - down, definido como ${}_{AA} \prod_{--}^{\mu\nu}(p)$. De modo análogo ao cálculo anterior, obtemos através do **Apêndice D.1**, os resultados:

i) Para $p^2 > 0$:

$${}_{AA} \prod_{--}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ -\frac{m\chi(p)}{p} S^{\mu\nu} + \left(m - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \quad (2.28.a)$$

ii) Para $p^2 < 0$:

$${}_{AA} \prod_{--}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{2\pi} \left\{ -\frac{m\phi(p)}{p} S^{\mu\nu} + \left(\frac{m}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \quad (2.28.b)$$

A correção radiativa total a 1-loop, definida como ${}_{AA} \prod^{\mu\nu}(p)$, é a soma dos loops up e down:

${}_{AA}\Pi^{\mu\nu}(p) = {}_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}(p) + {}_{AA}\Pi_{--}^{\mu\nu}(p)$. Portanto, teremos:

i) Para $p^2 > 0$:

$${}_{AA}\overset{\mu\nu}{\prod}(p) = \frac{ie^2}{2\pi} \left(m - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (2.29.a)$$

ii) Para $p^2 < 0$:

$${}_{AA}\overset{\mu\nu}{\prod}(p) = \frac{ie^2}{\pi} \left(\frac{m}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (2.29.b)$$

Onde $\chi(p)$, $\phi(p)$ e $\Theta^{\mu\nu}$ são os termos já definidos anteriormente.

De maneira igual calcula-se o loop corretivo ${}_{aa}\overset{\mu\nu}{\prod}(p)$. Portanto, apresentamos aqui os resultados dos cálculos obtidos para o loop do campo estatístico a^μ , extraídos do **Apêndice D.2**:

i) Para $p^2 > 0$:

$${}_{aa}\overset{\mu\nu}{\prod}(p) = \frac{ig^2}{2\pi} \left(m - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (2.30.a)$$

ii) Para $p^2 < 0$:

$${}_{aa}\overset{\mu\nu}{\prod}(p) = \frac{ig^2}{\pi} \left(\frac{m}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4p} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (2.30.b)$$

Só diferindo do loop do campo de Maxwell pela constante de acoplamento.

Do **Apêndice D.3**, os resultados do loop ${}_{Aa}\overset{\mu\nu}{\prod}(p)$:

i) Para $p^2 > 0$:

$${}_{Aa}\overset{\mu\nu}{\prod}(p) = i \frac{egm}{2\pi p} \chi(p) S^{\mu\nu}. \quad (2.31.a)$$

ii) Para $p^2 < 0$:

$${}_{Aa}\overset{\mu\nu}{\prod}(p) = i \frac{egm}{\pi p} \phi(p) S^{\mu\nu}. \quad (2.31.b)$$

E, finalmente, os resultados do loop ${}_{aA}\overset{\mu\nu}{\prod}(p)$, extraídos do **Apêndice D.4**:

i) Para $p^2 > 0$:

$${}_{aA} \overset{\mu\nu}{\prod}(p) = i \frac{egm \chi(p)}{2\pi p} S^{\mu\nu}. \quad (2.32.a)$$

ii) Para $p^2 < 0$:

$${}_{aA} \overset{\mu\nu}{\prod}(p) = i \frac{egm \phi(p)}{\pi p} S^{\mu\nu}. \quad (2.32.b)$$

Calculados os loops, abordaremos agora quais possíveis correções quânticas poderão se incorporar no modelo. Desta forma, é obtido o propagador corrigido quânticamente e, num processo inverso, é determinada as correções na ação original.

Portanto, de modo referente a todos os campos, a obtenção do propagador genérico corrigido quânticamente se fará através da incorporação de todos os termos corretivos de ordens superiores gerados pelos loops. Como se vê no diagrama ilustrativo:

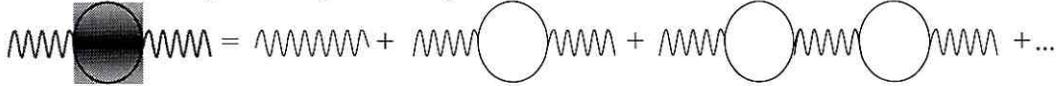


figura 2.3

Portanto, temos para o propagador corrigido, nomeado como $\widehat{\Delta}^{\mu\nu}(p)$, a expressão esquemática:

$$\widehat{\Delta} = \Delta + \Delta \overset{\circ}{\prod} \Delta + \Delta \overset{\circ}{\prod} \Delta \overset{\circ}{\prod} \Delta + \dots \quad (2.33.a)$$

Mostra - se que, da equação acima, têm - se:

$$\widehat{\Delta} = \left(\Delta^{-1} - \overset{\circ}{\prod} \right)^{-1}. \quad (2.33.b)$$

Onde, a partir da definição do propagador pela equação (1.15), encontramos:

$$\Delta^{-1} = -i(Op), \quad (2.34)$$

com Op sendo o operador de onda dos campos considerados, encontrados no capítulo anterior.

Supondo que o propagador corrigido $\widehat{\Delta}$, apresente a mesma forma do seu semelhante

clássico Δ , apresentamos:

$$\widehat{\Delta}^{-1} \equiv -i \left(\widehat{Op} \right), \quad (2.35)$$

onde \widehat{Op} é o operador de onda corrigido quânticamente.

Das relações (2.33.b) e (2.34), obtemos a seguinte correção:

$$\widehat{Op} = Op - i \amalg . \quad (2.36)$$

Desprezando os termos dependentes do momento, dada sua escolha arbitrária, encontramos os loops da forma:

$${}_{AA} \amalg = i \frac{e^2 m}{2\pi} \Theta, \quad {}_{Aa} \amalg = 0, \quad {}_{aA} \amalg = 0 \quad e \quad {}_{aa} \amalg = i \frac{g^2 m}{2\pi} \Theta. \quad (2.37)$$

Portanto, podemos obtemos a ação corrigida quânticamente, substituindo cada operador da ação original (1.12), pelo seu correspondente dado em (2.36). Finalmente, ação corrigida a 1-loop é da forma:

$$S_{Aa} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(A_\mu a_\mu \right) \times \\ \times \begin{pmatrix} \left(\square + \frac{e^2 m}{2\pi} \right) \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\alpha} \omega^{\mu\nu} & \mu S^{\mu\nu} \\ \mu S^{\mu\nu} & \left(\square + \frac{g^2 m}{2\pi} \right) \Theta^{\mu\nu} + \frac{\square}{\beta} \omega^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu \\ a_\nu \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Onde, aplicando o método empregado no capítulo anterior no cálculo dos propagadores, encontramos as devidas correções das massas do fóton escalar de Maxwell e do fóton topológico massivo de Chern - Simons. Pelos pólos dos propagadores encontramos:

$$k_M^2 = 0 \longrightarrow k'^2_M = 0. \quad (2.39.a)$$

$$k_{CS}^2 = \mu^2 \longrightarrow k'^2_{CS} = \mu^2 + \frac{e^2 m}{2\pi}. \quad (2.39.b)$$

Portanto, o único efeito da vacuum polarization é a correção das massas dos fótons. Fato que preserva a simetria de gauge a nível quântico, pelo menos a 1 - loop.

Conclusões Gerais e Perspectivas de Continuação

Nesta tese, houve a intenção de caracterizar o ambiente de trabalho de um teoria de MCS. Enumerando o sucesso de algumas aplicações e relatando suas características. Ambientando a proposta de um modelo de Maxwell - Chern - Simons com paridade preservada, acoplado minimamente a espinores.

Neste modelo, a propagação dos campos de MCS se deu completamente desacoplada dos campos espinoriais. Como devia - se esperar, o fóton escalar, fruto da teoria de Maxwell, por não carregar nenhuma informação física, foi desacoplado do modelo. Havendo propagação somente do fóton massivo topológico, do setor de CS. A propagação da parte espinorial seguiu de forma usual. Este modelo caracterizou - se por ser causal, indicando a ausência de tachyons, e unitário a tree - level, uma vez que estados de ghost não compareceram à teoria. Mas, pelo fato de se ter constatado apenas uma condição necessária, o pleno controle da unitariedade se faz pela análise do limite a altas energias das seções de choque do modelo, que caracterizam os processos de espalhamento incorporados à teoria [29].

Pelo método do power - counting, aplicado no capítulo seguinte, verificou - se ser esta teoria super - renormalizável, seguido do cálculo das regras de Feynman para os vértices de interação. Posteriormente, pelo cálculo das correções radiativas a 1 - loop, gerou - se um termo de correção para a massa do fóton. A renormalização dessa massa, não implicou na quebra da simetria de gauge da ação proposta. Tendo sido comprovado, portanto, a invariância de gauge a tree - level e a 1 - loop.

Desta forma, a análise da ação de Maxwell - Chern - Simons com paridade preservada,

permitiu - nos uma melhor compreensão de seus aspectos principais, no bojo de uma teoria eletrodinâmica em 3D. Indicando um fóton massivo como principal regulador de suas interações e verificando a permanência da simetria de gauge a nível quântico, o que nos faz concluir sobre a boa tratabilidade deste modelo no formalismo da teoria quântica de campos.

Em se tratando de uma teoria super - renormalizável, apresenta um n^o finito de classes de correções a ordens superiores. Motivando, portanto, o cálculo das correções radiativas a 2 - loops num prosseguimento desse trabalho. Topologicamente distintos da vacuum polarization, os processos da self - energy — de onde se tira a massa renormalizada do elétron — e da correção de vértice, seriam também, objetos de interesse futuro, de onde poderia se inferir sobre a renormalização da carga elétrica e do momento magnético do elétron, através do uso das identidades de Ward.

Com relação a possibilidade de aplicação deste modelo sem quebra de paridade à Supercondutividade a Alta - T_c, surge no cenário um interessante modelo de Franz - Tešanovi [30], onde a anisotropia e o uso de dois potenciais vetores se apresentam como característica básica.

Apêndice A

Inversão de uma Matriz de Operadores

Para invertermos uma matriz de operadores, basta seguirmos a regra. Seja:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

Então, sua inversa é dada por:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ (CA^{-1}B - D)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Desta forma, com:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \square\Theta + \frac{\square}{\alpha}\omega & \mu S \\ \mu S & \square\Theta + \frac{\square}{\beta}\omega \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

teremos, então, a inversa dada por:

$$\vartheta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^2 + \square} \Theta + \frac{\alpha}{\square} \omega & -\frac{\mu}{\square(\mu^2 + \square)} S \\ -\frac{\mu}{\square(\mu^2 + \square)} S & \frac{1}{\mu^2 + \square} \Theta + \frac{\beta}{\square} \omega \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Apêndice B

Integrais a 1 - loop para 3D

Abaixo, algumas integrais conhecidas, usadas pelo método da regularização dimensional [31]:

$$1) J_0 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + 2p \cdot k - c)^\alpha} = i(-1)^\alpha \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (c + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)}. \quad (\text{B.1.a})$$

O que fica em 3 dimensões, para $\alpha = 2$, igual à:

$$J_{0(D=3, \alpha=2)} = \frac{i}{(2)^3 \pi} \frac{1}{(c + p^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.1.b})$$

$$2) J_1^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 + 2p \cdot k - c)^\alpha} = i(-1)^{\alpha+1} \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (c + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} p^\mu \times \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)}. \quad (\text{B.2.a})$$

Tendo, em 3 dimensões, para $\alpha = 2$, a forma:

$$J_{1(D=3, \alpha=2)}^\mu = -\frac{i}{(2)^3 \pi} \frac{p^\mu}{(c + p^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.2.b})$$

$$3) J_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + 2p \cdot k - c)^\alpha} = i(-1)^\alpha \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (c + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \times \left\{ \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) p^\mu p^\nu - \frac{1}{2} \Gamma(\alpha - 1 - \frac{D}{2}) \eta^{\mu\nu} (c + p^2)}{\Gamma(\alpha)} \right\}. \quad (\text{B.3.a})$$

Sendo em 3 dimensões, para $\alpha = 2$, igual à:

$$J_{2(D=3,\alpha=2)}^{\mu\nu} = \frac{i}{(2)^3 \pi} \times \left\{ \frac{p^\mu p^\nu}{(c + p^2)^{\frac{1}{2}}} + \eta^{\mu\nu} (c + p^2)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (\text{B.3.b})$$

Apêndice C

Resolução das Integrais Paramétricas

As integrais que vamos resolver são as encontradas em (2.22). Definindo:

$$I(p) \equiv \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}}. \quad (\text{C.1})$$

Encontraremos as outras em função dela. Desta forma, teremos uma subseção para as relações que envolvem estas integrais e outra para o cálculo explícito da última integral.

C.1 Relações entre as Integrais

Usando integração por partes obtemos os resultados desta 1ª parte do apêndice C:

$$\int_0^1 dx \sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2} = \int_0^1 dx \frac{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}} = \frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{p^2 - 4m^2}{8} I(p). \quad (\text{C.2})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}} = \frac{1}{2} I(p). \quad (\text{C.3})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}} = \frac{\sqrt{m^2}}{2p^2} + \frac{(3p^2 - 4m^2)}{8p^2} I(p). \quad (\text{C.4})$$

C.2 Resolução da integral $I(p) = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{p^2 x^2 - p^2 x + m^2}}$

Os cálculos realizados a seguir foram sugeridos em [32].

Primeiramente iremos considerar $p^2 > 0$ e depois $p^2 < 0$.

I) $m^2 > 0$, $p^2 > 0$:

Com $I(p)$ reescrita na forma:

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + \frac{m^2}{p^2}}}, \quad (\text{C.5})$$

podemos definir a variável de substituição u , na forma $u \equiv \sqrt{x^2 - x + \frac{m^2}{p^2}} + x - \frac{1}{2}$.

Com isso, obtemos:

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{m^2} + \sqrt{p^2}}{2\sqrt{m^2} - \sqrt{p^2}} \right|. \quad (\text{C.6})$$

Observando, que quando $p^2 = 4m^2$ teremos aí uma singularidade do tipo logarítmica.

II) $m^2 > 0$, $p^2 < 0$:

Reescrevendo $I(p)$ na forma:

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(x-R)(L-x)}}, \quad (\text{C.7})$$

com L e R as soluções de $-x^2 + x - \frac{m^2}{p^2} = 0$, podemos através da substituição $\sqrt{x-R} \equiv \sqrt{L-R} \text{senu}$ encontrar:

$$I(p) = \frac{2(L-R)}{|L-R|} \left(\arcsen \sqrt{\frac{1-R}{L-R}} - \arcsen \sqrt{\frac{-R}{L-R}} \right). \quad (\text{C.8})$$

Que , com a ajuda da igualdade:

$$\arcsen(A) \pm \arcsen(B) = \arcsen \left(A\sqrt{1-B^2} \pm B\sqrt{1-A^2} \right), \quad (\text{C.9})$$

obtemos:

$$I(p) = \frac{2}{\sqrt{-p^2}} \arcsen \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right). \quad (\text{C.10})$$

Apêndice D

Resultados Finais dos Diagramas de Loops

Na obtenção de resultados para as correções radiativas a 1-loop é bom explicitar novamente os vértices de interação e os propagadores fermiônicos. Portanto:

$$V_{+A+}^{\mu} = ie\gamma^{\mu}, \quad V_{+a+}^{\mu} = ig\gamma^{\mu}, \quad V_{-A-}^{\mu} = ie\gamma^{\mu}, \quad V_{-a-}^{\mu} = -ig\gamma^{\mu},$$

$$\Delta^{++}(k) = i \frac{k-m}{k^2 - m^2} \quad e \quad \Delta^{--}(k) = i \frac{k+m}{k^2 - m^2}.$$

Lembrando também que

$$\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2} \quad e \quad S^{\mu\nu} = i\epsilon^{\mu\sigma\nu}p_{\sigma}$$

são os operadores de projeção transversal no espaço dos momenta , e que

$$\chi(p) \equiv \ln \left| \frac{2\sqrt{m^2} + \sqrt{p^2}}{2\sqrt{m^2} - \sqrt{p^2}} \right| \quad e \quad \phi(p) \equiv \arcsen \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right).$$

D.1 Loop ${}_{AA}\Pi^{\mu\nu}(p)$

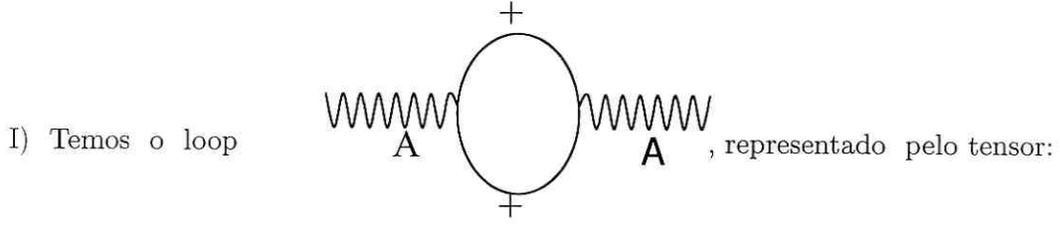


figura D.1

$${}_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{+A+}^{\mu} \Delta^{++}(k) V_{+A+}^{\nu} \Delta^{++}(k-p) \right\}, \quad (D.1)$$

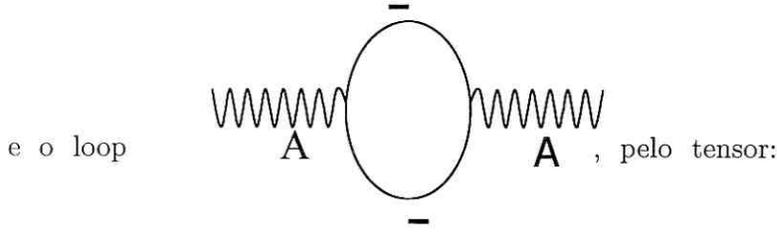


figura D.2

$${}_{AA}\Pi_{--}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{-A-}^{\mu} \Delta^{--}(k) V_{-A-}^{\nu} \Delta^{--}(k-p) \right\}. \quad (D.2)$$

Desta forma, usando ${}_{AA}\Pi^{\mu\nu}(p) = {}_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}(p) + {}_{AA}\Pi_{--}^{\mu\nu}(p)$,

encontramos como resultados finais:

i) Para $m^2 > 0$ e $p^2 > 0$:

$${}_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}.$$

$${}_{AA}\Pi_{--}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ -\frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}.$$

Portanto:

$${}_{AA}\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{2\pi} \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (D.3)$$

ii) Para $m^2 > 0$ e $p^2 < 0$:

$$\begin{aligned}
{}_{AA}\Pi_{++}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ie^2}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \\
{}_{AA}\Pi_{--}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ie^2}{2\pi} \left\{ -\frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$${}_{AA}\bar{\Pi}^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (\text{D.4})$$

D.2 Loop ${}_{aa}\bar{\Pi}^{\mu\nu}(p)$

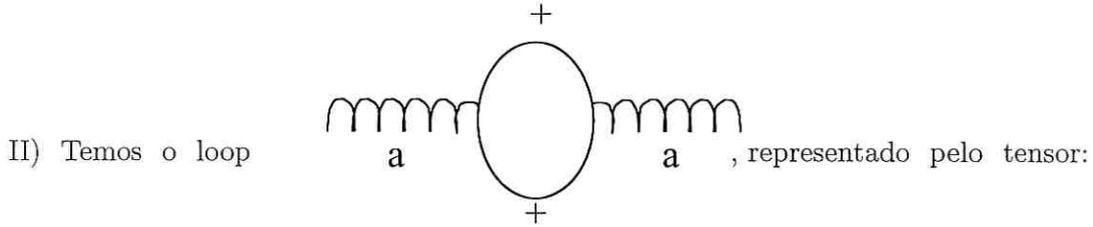


figura D.3

$${}_{++}\bar{\Pi}_{++}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{+A+}^\mu \Delta^{++}(k) V_{+A+}^\nu \Delta^{++}(k-p) \right\}, \quad (\text{D.5})$$

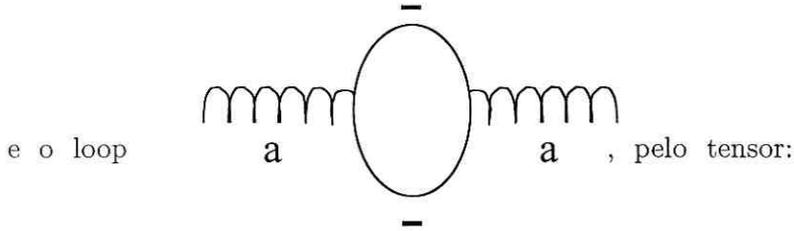


figura D.4

$${}_{--}\bar{\Pi}_{--}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{-a-}^\mu \Delta^{--}(k) V_{-a-}^\nu \Delta^{--}(k-p) \right\}. \quad (\text{D.6})$$

Desta forma, usando ${}_{aa}\bar{\Pi}^{\mu\nu}(p) = {}_{aa}\bar{\Pi}_{++}^{\mu\nu}(p) + {}_{aa}\bar{\Pi}_{--}^{\mu\nu}(p)$, encontramos como resultados finais:

i) Para $m^2 > 0$ e $p^2 > 0$:

$$\begin{aligned} {}_{aa} \Pi_{++}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ig^2}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \\ {}_{aa} \Pi_{--}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ig^2}{4\pi} \left\{ -\frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto:

$${}_{aa} \overset{\mu\nu}{\Pi}(p) = \frac{ig^2}{2\pi} \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (\text{D.7})$$

ii) Para $m^2 > 0$ e $p^2 < 0$:

$$\begin{aligned} {}_{aa} \Pi_{++}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ig^2}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \\ {}_{aa} \Pi_{--}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ig^2}{2\pi} \left\{ -\frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto:

$${}_{aa} \overset{\mu\nu}{\Pi}(p) = \frac{ig^2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu}. \quad (\text{D.8})$$

D.3 Loop ${}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\Pi}(p)$

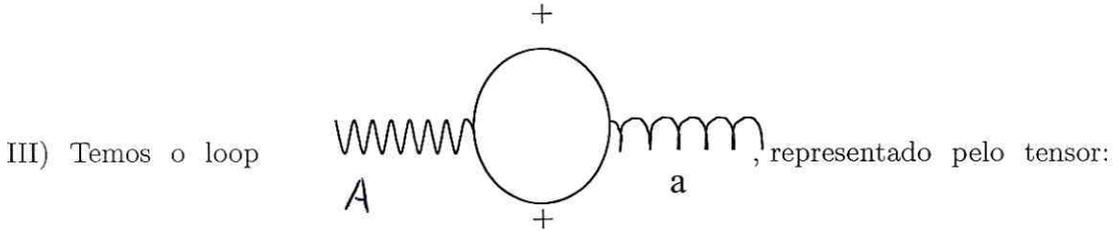


figura D.5

$${}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\Pi}_{++}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{+A+}^\mu \Delta^{++}(k) V_{+a+}^\nu \Delta^{++}(k-p) \right\}, \quad (\text{D.9})$$

e o loop

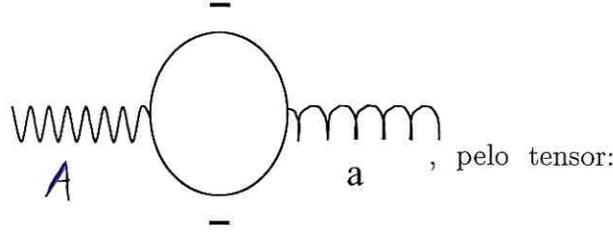


figura D.6

$${}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{--}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{-A-}^\mu \Delta^{--}(k) V_{-a-}^\nu \Delta^{--}(k-p) \right\}. \quad (D.10)$$

Desta forma , usando ${}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}(p) = {}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{++}(p) + {}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{--}(p)$, encontramos como resultados finais:

i) Para $m^2 > 0$ e $p^2 > 0$:

$$\begin{aligned} {}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{++}(p) &= \frac{ieg}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} . \\ {}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{--}(p) &= \frac{ieg}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} - \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} . \end{aligned}$$

Portanto:

$${}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}(p) = i \frac{egm}{2\pi\sqrt{p^2}} \chi(p) S^{\mu\nu}. \quad (D.11)$$

ii) Para $m^2 > 0$ e $p^2 < 0$:

$$\begin{aligned} {}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{++}(p) &= \frac{ieg}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} . \\ {}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}_{--}(p) &= \frac{ieg}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} - \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} . \end{aligned}$$

Portanto :

$${}_{Aa} \overset{\mu\nu}{\prod}(p) = i \frac{egm}{\pi\sqrt{-p^2}} \phi(p) S^{\mu\nu}. \quad (D.12)$$

D.4 Loop ${}_{aA} \prod^{\mu\nu}(p)$

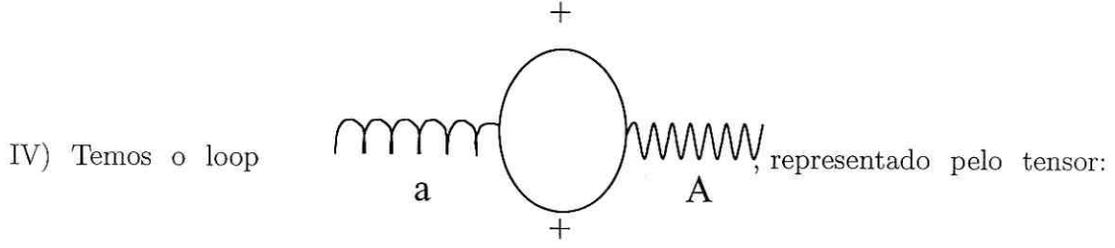


figura D.7

$${}_{aA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{+a+}^{\mu} \Delta^{++}(k) V_{+A+}^{\nu} \Delta^{++}(k-p) \right\}, \quad (D.13)$$

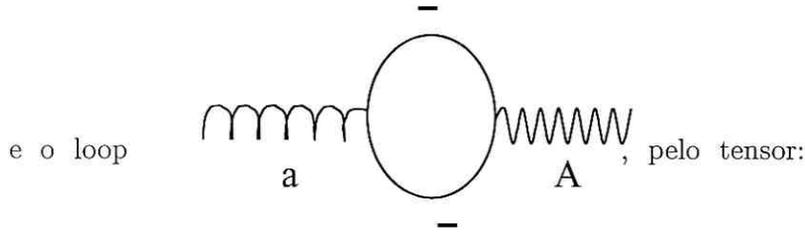


figura D.8

$${}_{aA} \prod_{--}^{\mu\nu}(p) = -tr \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_{-a-}^{\mu} \Delta^{--}(k) V_{-A-}^{\nu} \Delta^{--}(k-p) \right\}. \quad (D.14)$$

Desta forma , usando ${}_{aA} \prod^{\mu\nu}(p) = {}_{aA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) + {}_{aA} \prod_{--}^{\mu\nu}(p)$, encontramos como resultados finais:

i) Para $m^2 > 0$ e $p^2 > 0$:

$${}_{aA} \prod_{++}^{\mu\nu}(p) = \frac{ieg}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} .$$

$${}_{aA} \prod_{--}^{\mu\nu}(p) = \frac{ieg}{4\pi} \left\{ \frac{m\chi(p)}{\sqrt{p^2}} S^{\mu\nu} - \left(\sqrt{m^2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{p^2}} \chi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} .$$

Portanto :

$${}_{aA} \prod^{\mu\nu}(p) = i \frac{egm}{2\pi\sqrt{p^2}} \chi(p) S^{\mu\nu}. \quad (D.15)$$

ii) Para $m^2 > 0$ e $p^2 < 0$:

$$\begin{aligned}
{}_{aA} \Pi_{++}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ieg}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} + \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} . \\
{}_{aA} \Pi_{--}^{\mu\nu}(p) &= \frac{ieg}{2\pi} \left\{ \frac{m\phi(p)}{\sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} - \left(\frac{\sqrt{m^2}}{2} - \frac{(p^2 + 4m^2)}{4\sqrt{-p^2}} \phi(p) \right) \Theta^{\mu\nu} \right\} .
\end{aligned}$$

Portanto:

$${}_{aA} \overset{\mu\nu}{\Pi}(p) = i \frac{egm \phi(p)}{\pi \sqrt{-p^2}} S^{\mu\nu} . \tag{D.16}$$

Referências

- [1] – A. Linde, *Rep. Prog. Phys.* **42** (1979) 389.
- [2] – W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B156** (1979) 135.
- [3] – S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.
- [4] – E. P. Wigner, *Unitary Representations of Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections*, in Istanbul Summer School of Theoretical Physics, ed. F. Gürsey et al. (New York, 1964).
- [5] – B. Binengar, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1511.
- [6] – S. Deser and R. Jackiw, *Phys. Lett.* **B263** (1991) 431.
- [7] – D. Finkelstein and J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1762.
- [8] – J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37B** (1977) 1.
- [9] – F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1144.
- [10] – F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957.
- [11] – R. Iengo and K. Lechner, *Phys. Reports* **213C** (1992) 179.
- [12] – D. C. Tsui *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1559.
- [13] – R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395.
- [14] – S. C. Zhang, T. Hanson and S. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 82.
- [15] – M. M. Ferreira Jr., Tese de Doutorado: *Estudo de Estados Ligados Elétron - Elétron no Contexto da QED₃ e Aplicado à Supercondutividade de Alta - T_c*, CBPF - CCP, Novembro de 2001, Rio de Janeiro, Brasil.
- [16] – J. G. Bednorz and D. E. Müller, *Z. Phys.* **B64** (1986) 189.
- [17] – V. Kalmeyer and R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 2095.
- [18] – R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2677.
- [19] – E. Fradkin, *Phys. Rev.* **B42** (1990) 570.

- [20] – A. L. Fetter, C. B. Hanna and R. B. Laughlin, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 9679.
- [21] – Y. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, *Int. Jour. Mod. Phys.* **B3** (1989) 1001.
- [22] – J. Lykken et al., *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2161.
- [23] – M. A. de Andrade, O. M. Del Cima and J. A. Helayël - Neto, *Electron - Pair Condensation in Parity - Preserving QED₃*, *Il Nuovo Cimento*, **A111** (1998) 1145.
- [24] – H. Belich, O. M. Del Cima, M. M. Ferreira Jr. and J. A. Helayël - Neto, *Electron - Electron Attractive Interaction in Maxwell - Chern - Simons QED₃ at Zero Temperature*, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A16** (2001) 4939.
- [25] – H. Christiansen, O. M. Del Cima, M. M. Ferreira Jr. and J. A. Helayël - Neto, *Electronic Bound States in Parity - Preserving QED₃ Applied to High - T_c Cuprate Superconductors*, submetido ao *Phys. Rev.* **B**.
- [26] – S. Coleman and B. Hill, *Phys. Lett.* **B159** (1985) 184; Y. - C. Kao and M. Suzuki, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 2137.
- [27] – P. Ramond, *Field Theory : A Modern Primer* , ed. Addison - Wesley Publishing Company (1990).
- [28] – W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization* , ed. Springer - Verlag (1996).
- [29] – S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118** (1960) 838; M. Froissart, *Phys. Rev.* **123** (1961) 1053; J. C. Polkinghorne, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 503.
- [30] – M. Franz and Z. Tešanović, *Algebraic Fermi liquid from phase flutuations: “topological” fermions , vortex “berrions” and QED₃ theory of cuprate superconductors*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 257003.
- [31] – F . Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, ed. John Wiley & Sons, Inc. (1993).
- [32] – T. M. Apostol, *Calculus*, **1**, ed. Baisdell Publishing Company (1961).

“Estudo de um novo modelo de Maxwell-Chern-Simons com Paridade preservada”

Roger Barreto Ribeiro

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Oswaldo Monteiro Delcima – Presidente/Univ. Católica de

Petrópolis

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Rafael de Lima Rodrigues – UFPB

Ivan dos Santos Oliveira Junior – CBPF

Suplente: Sebastião Alves Dias

Rio de Janeiro 15 de abril de 2002