

Tese de  
Mestrado

Distribuição da Energia de Átomos Excitados  
em Cavidades

Yony Walter Milla Gonzales

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Setembro 2002.

*Dedicado a meus pais,  
Leoncio Milla e Juana Gonzales  
e a meu amor Jackeline.*

## Agradecimentos

À CAPES, pela bolsa recebida no mestrado.

A Adolfo Malbouisson, meu orientador; sem sua ajuda, não teria sido possível realizar esta tese.

A Myriam Simões Coutinho, pela amabilidade com que nos atende na CFC.

Ao pessoal da biblioteca, pela ajuda na procura de livros e papers, e pela gentileza com que nos tratam; em geral, a todos os funcionários do CBPF.

A Gabriel Flores , pela sua ajuda na organização desta tese.

Aos professores do CBPF, pelos conhecimentos que me transmitiram.

Ao pessoal do LAFEX em geral.

Ao meu amigo Pablo Solorzano.

Aos meus pais e irmãos, por seu constante apoio.

## Resumo

Consideramos um sistema constituído de um átomo na aproximação de um oscilador harmónico de frequência  $\bar{\omega}$ , linearmente acoplado a um campo escalar dentro de uma cavidade esférica refletora de raio  $R$ . Utilizamos as coordenadas *vestidas* intruduzidas em N. Andion, A.P.C. Malboussoin, A. Mattos Neto, J. Phys. A - Math. Gen., 34, 3735 (2001), as quais permitem uma descrição unificada não perturbativa do processo de radiação do átomo. Realizamos um estudo da distribuição da energia entre as partes do sistema dentro da cavidade para diferentes situações, incluindo o caso quando a cavidade é muito grande (caso livre). Para pequenas cavidades fizemos um estudo da evolução do átomo com a condição inicial que este se encontre no primeiro estado excitado e concluimos pela quasi-estabilidade do átomo excitado. Por exemplo, para uma frequência  $\bar{\omega}$  da ordem de  $\bar{\omega} \sim 4.00 \times 10^{14}/s$  (luz visível vermelha), partindo da condição inicial de que o átomo se encontre no primeiro nível excitado, encontramos que para uma cavidade com diâmetro da ordem de  $2R \sim 1.0 \times 10^{-6}m$ , a probabilidade de que o átomo depois de um tempo infinito ainda se encontre nesse primeiro nível excitado, será da ordem de 97%. Para uma microonda típica de frequência  $\bar{\omega} \sim 2.00 \times 10^{10}/s$  encontramos a estabilidade no primeiro estado excitado também da ordem de 97% para uma cavidade de raio da ordem de  $R \sim 1.4 \times 10^{-2}m$ .

## Abstract

We consider a system consisting of an atom in the approximation of a harmonic oscillator of frequency  $\bar{\omega}$ , coupled to the scalar potential inside a spherical reflecting cavity of radius  $R$ . We use *dressed* coordinates introduced in N. Andion, A.P.C. Malboussoin, A. Mattos Neto, J. Phys. A - Math. Gen., 34, 3735 (2001), which allow a non-perturbative unified description of the atom radiation process, including for the case when the cavity is very great (free case). We made a study of the distribution of energy between the constituent parts of the system within the cavity for different situations. We perform a study of the energy distribution in a small cavity, with the initial condition that the atom is in the first excited state we conclude for the quasi-stability of the excited atom. For instance, for a frequency  $\bar{\omega}$  of the order  $\bar{\omega} \sim 4.00 \times 10^{14}/s$  (in the visible red), starting from the initial condition that the atom is in the first excited level, we find that for a cavity with diameter  $2R \sim 1.0 \times 10^{-6}m$ , the probability that the atom be at any time still in the first excited level, will be of the order of 97%. For a typical microwave frequency  $\bar{\omega} \sim 2.00 \times 10^{10}/s$  we find stability in the first excited state also of the order of 97% for a cavity radius  $R \sim 1.4 \times 10^{-2}m$ .

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A colocação do problema e a transformação para os eixos principais</b>	<b>7</b>
2.1	Redução do problema a um sistema de osciladores acoplados . . . . .	7
2.2	Diagonalização da Hamiltoniana do sistema de osciladores acoplados . . . . .	10
2.3	O espectro das autofrequências . . . . .	13
2.4	A matriz de transformação . . . . .	15
2.5	Distribuição de energia dos modos e o conceito de osciladores vestidos . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Distribuição de energia dentro da cavidade esférica</b>	<b>19</b>
3.1	Cavidade com raio arbitrariamente grande ( $R \rightarrow \infty$ ) . . . . .	19
3.2	Cavidade de raio finito . . . . .	20
3.2.1	Se $\bar{\omega} \gg \sqrt{g\Delta\omega}$ . . . . .	21
3.2.2	Se $\bar{\omega} \ll \sqrt{g\Delta\omega}$ . . . . .	28
3.2.3	Se $\bar{\omega} = \sqrt{g\Delta\omega}$ . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Introdução das coordenadas vestidas e o processo de radiação para <math>R \rightarrow \infty</math></b>	<b>36</b>
4.1	As coordenadas vestidas $q'_\mu$ . . . . .	37
4.2	As configurações vestidas . . . . .	39
4.3	Evolução temporal da coordenada vestida do átomo . . . . .	41
4.4	O processo de radiação . . . . .	44
4.5	Processo de radiação para uma cavidade arbitrariamente grande . . . . .	45
<b>5</b>	<b>O processo de radiação em cavidades pequenas</b>	<b>47</b>
5.1	O espectro das auto-frequências em uma microcavidade ( $R \ll \frac{c}{g}$ ) . . . . .	47
5.2	A distribuição das energias . . . . .	50
5.3	O processo da radiação em pequenas cavidades . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Conclusões e observações finais</b>	<b>54</b>
6.1	Conclusões . . . . .	54
6.2	Observações . . . . .	55
<b>A</b>	<b>A diagonalização da Hamiltoniana</b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>Distribuição da energia das vibrações</b>	<b>59</b>



# Lista de Figuras

2.1	Solução numérica da Eq.(2.39), onde a variável $x$ é dado por $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ . . . . .	15
3.1	Solução numérica da Eq.(3.7), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ , na aproximação $\frac{c}{gR} \ll 1$ e $\frac{R\bar{\omega}^2}{cg\pi^2} \gg 1$ . . . . .	22
3.2	Solução numérica da Eq.(3.12), onde $x = \frac{\Omega}{\bar{\omega}}$ e $\frac{R\bar{\omega}}{c} \gg 137$ . . . . .	24
3.3	Solução numérica da Eq.(3.19), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ e $\frac{R\bar{\omega}^2}{cg\pi^2} \gg 1$ . . . . .	26
3.4	Solução numérica da Eq.(3.20), onde $x = \frac{\Omega}{g}$ , com $\alpha^2 \ll 1$ . . . . .	27
3.5	Solução numérica da Eq.(3.27), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ , na aproximação $\frac{c}{gR} \ll 1$ . . . . .	29
3.6	Solução numérica da Eq.(3.32), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ . . . . .	31
3.7	Solução numérica da Eq.(3.36), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ e $\frac{c}{gR} \ll 1$ . . . . .	33
3.8	Solução numérica da Eq.(3.44), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ . . . . .	35
5.1	Solução numérica da Eq.(2.41), onde $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ , na aproximação $\frac{c}{gR} \gg 1$ . . . . .	49
C.1	. . . . .	65

# Capítulo 1

## Introdução

O propósito da Física Teórica é construir modelos que descrevam apropriadamente os fenômenos naturais. Nas diferentes áreas da física existem certos tipos de problemas que podem ser resolvidos de forma exata e cujas soluções são conhecidas há muito tempo. Em geral este tipo de problema é descrito por equações lineares que envolvem uma quantidade pequena de graus de liberdade. Mas este tipo de problema só descreve situações físicas muito especiais tais como, por exemplo, um oscilador harmônico simples ou uma partícula num campo externo com simetria esférica. Por outro lado é comum encontrar nas diferentes áreas da física, tais como a Mecânica Celeste, a Mecânica Estatística e a Teoria de Campos, equações diferenciais acopladas e/ou não lineares para as quais é muito difícil encontrar soluções exatas.

Na Mecânica Estatística e em Teoria Construtiva de Campos Locais, teoremas gerais podem ser derivados usando a expansão em clusters e outros métodos relacionados [1]. O método da expansão em clusters em Mecânica Estatística foi desenvolvido por Kahn e Uhlenbeck [2]. Em alguns casos, estes métodos permitem a construção rigorosa de modelos teóricos de campos [3], mas não são de grande utilidade em cálculos de caráter preditivo.

Na atualidade, muitos problemas da Teoria de Campos são resolvidos usando-se cálculos numéricos. Desde há muito tempo o único método sistemático para se fazer cálculos de caráter preditivo tem sido a teoria de perturbações. Os métodos perturbativos partem de soluções exatas do problema mais simples (por exemplo, uma delas pode ser a trajetória de um corpo num potencial externo simples) e os termos que impossibilitam a solução exata do problema são incorporados sistematicamente ordem por ordem em séries de potências numa certa constante de acoplamento, as ditas séries perturbativas. É claro que este método vai estar limitado pelo valor da constante de acoplamento. Esta constante tem que ser pequena comparada com algum parâmetro presente na parte do problema que admite uma solução exata. O desenvolvimento da teoria de perturbações remonta aos tempos do uso do método Hamiltoniano na Mecânica celeste. Um tratamento completo sobre o uso da teoria de perturbações no cálculo de órbitas de corpos celestes pode ser encontrado na Ref. [4].

Na física moderna, uma situação típica como, por exemplo, em teorias de gauge abelianas, é um sistema, composto de partículas carregadas descritas por um campo de matéria e que interagem com um campo neutro através de um acoplamento ( em geral não linear) caracterizado por algum parâmetro  $g$ , usualmente chamado de constante de acoplamento ou de carga da partícula. A solução perturbativa desta situação é obtida por meio da introdução dos campos nus, sem interação, para a matéria e para o campo neutro (campo de radiação no caso eletromagnético), aos quais são associados os quanta (partículas "nuas"), a interação sendo introduzida ordem por ordem em potências da constante de acoplamento na expansão perturbativa dos observáveis. Este método dá bons resultados tanto em Eletrodinâmica Quântica como em interações fracas. Em física de

altas energias, a liberdade assintótica permite aplicar a Cromodinâmica Quântica (QCD) em sua forma perturbativa, tendo dado resultados muito importantes nas décadas passadas. No entanto, para que a QCD perturbativa funcione, é importante que o processo seja uma interação de curta distância, de modo que o termo perturbativo seja suficientemente pequeno, para que a teoria de perturbações seja válida (liberdade assintótica ultravioleta).

Em todas as situações do tipo das descritas acima, a partícula física é acoplada sempre ao campo neutro (campo de radiação no caso eletromagnético), ou seja, ela se encontra "vestida" por uma nuvem quântica do campo neutro (fotons, no caso do campo eletromagnético). Na teoria de perturbações esta absorção dos quanta do campo de gauge pela partícula carregada é feita pelo procedimento da "renormalização", introduzindo correções aos parâmetros físicos ordem por ordem em potências da constante de acoplamento renormalizada [5]. No entanto, apesar de sua grande aplicabilidade, existem situações onde o uso da teoria de perturbações não é possível, como é o caso na Cromodinâmica Quântica de baixas energias onde ocorre confinamento de quarks e gluons. Neste caso a técnica mais promissora é a teoria de gauge na rede, onde o contínuo espaço-tempo é substituído por uma rede de pontos discretos e as equações da QCD são resolvidas numericamente.

No caso da Eletrodinâmica em cavidades e em Óptica Quântica, há também situações em que o método perturbativo é de muito pouca utilidade, como é o caso na observação de efeitos de ressonância associados ao acoplamento de átomos com campos fortes de radiofrequência [6]. A compreensão teórica destes efeitos em termos perturbativos requer o cálculo de termos de ordem muito alta na série perturbativa, o que faz com que a técnica dos diagramas de Feynman não seja confiável nesses casos [7]. As experiências

de tratamento não perturbativo de tais sistemas, conduziram à idéia de "átomos vestidos", introduzida originalmente nas refs [8] e [9]. Este conceito têm sido utilizado desde então para investigar várias situações envolvendo a interação de átomos com o campo eletromagnético [10, 11, 12].

Em situações realistas a maior dificuldade é o caráter não-linear do problema, o que implica em procedimentos matemáticos muito complicados. Uma maneira de contornar estas dificuldades matemáticas, é supor que sob certas condições o sistema acoplado átomo-campo eletromagnético pode ser aproximado por um sistema composto de um oscilador harmônico acoplado linearmente ao campo escalar, através de uma certa constante de acoplamento efetiva  $g$ . Este é o caso no contexto geral da teoria da resposta linear em QED, onde a interação do campo eletromagnético com o dipolo elétrico dá a contribuição principal ao processo da radiação [13, 14]. Aproximações lineares deste tipo podem ser aplicadas em eletrodinâmica de cavidades, em particular na investigação teórica dos "cat-states" de Schrodinger em cavidades altamente refletoras ("high-Q cavities"), como foi feito, por exemplo, em [15]. Enfoques deste tipo, também foram usados em física da matéria condensada para estudar o movimento Browniano e também em óptica quântica para estudar a decoerência, supondo um acoplamento linear entre um modo harmônico de uma cavidade com um banho térmico de osciladores à temperatura zero [16, 17].

A idéia de confinar o sistema em um volume finito, não é recente posto que já existia na literatura há bastante tempo como um tipo de mecanismo de regularização para evitar as divergências que se apresentam ao calcular as quantidades do sistema no espaço livre [18]. Este artifício é introduzido para fazer com que o problema dos autovalores seja matematicamente bem definido, embora tomar o limite de volume infinito não seja trivial

[19, 20]. Idéias similares foram recentemente empregadas na teoria da radiação [21].

Nós consideramos um sistema composto de um átomo (aproximado por um oscilador harmônico) acoplado linearmente a um campo escalar, o sistema todo estando confinado ao interior de uma esfera refletora de raio  $R$ . Nós damos um tratamento não perturbativo para nosso sistema átomo-campo escalar introduzindo certas coordenadas "vestidas", que, do ponto de vista físico nos permitem dividir o sistema acoplado em duas partes: o átomo "vestido" e o campo "vestido", o que faz desnecessário trabalhar diretamente com os conceitos de átomo nú e campo nú e de interação entre eles. Por exemplo, para descrever o processo de radiação, tendo como condição inicial que somente o oscilador mecânico (o átomo) descrito por uma coordenada  $q_0$  se encontra excitado, o procedimento usual deve considerar o termo da interação no Hamiltoniano escrito em termos de  $q_0$  e dos modos do campo  $q_i$  como uma perturbação, a qual induz a transição entre os auto-estados do Hamiltoniano livre. Nesta forma é possível tratar de maneira aproximada o problema, tendo como condição inicial que somente o oscilador nú (o átomo) esteja excitado. Mas é bem sabido que esta condição inicial é fisicamente inconsistente devido à divergência da frequência do oscilador nú, em razão da interação com o campo. A forma tradicional para contornar esta dificuldade é mediante o proceso da renormalização, introduzindo perturbativamente ordem por ordem as correções para a frequência do oscilador. No presente trabalho adotamos um procedimento alternativo introduzido em [19]. Não fazemos uso explícito dos conceitos de interação entre o oscilador nú e o campo nú, descritos pelas coordenadas  $q_0$  e  $q_i$ . Nós introduzimos certas coordenadas "vestidas"  $q'_0$  e  $q'_i$  para o átomo vestido e os modos do campo vestidos, respectivamente. Em termos destas novas coordenadas é possível um enfoque não perturbativo do processo de radiação e da distribuição

de energia dentro da cavidade.

# Capítulo 2

## A colocação do problema e a transformação para os eixos principais

Em primeiro lugar vamos considerar o oscilador harmônico  $q_0$  de frequência  $\omega_0$  linearmente acoplado a um campo escalar  $\phi(\vec{r}, t)$ . Em seguida vamos confinar o sistema oscilador-campo em uma cavidade esférica de raio  $R$  centrada na posição do oscilador. O sistema é descrito pela seguinte Lagrangeana,

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}q_0^2 + \int d^3\vec{r} \left[ \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(\vec{r}, t)\partial^\mu\Phi(\vec{r}, t) + 2\pi\sqrt{gc}q_0\Phi(\vec{r}, t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right], \quad (2.1)$$

onde  $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$ ,  $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla})$ ,  $c$  é a velocidade da luz e  $\vec{r}_0 = 0$  é o ponto de equilíbrio do oscilador;  $g$  e  $c$  são a constante de acoplamento e a velocidade da luz, respectivamente.

### 2.1 Redução do problema a um sistema de osciladores acoplados

Da Lagrangeana acima definida utilizamos as equações de Euler-Lagrange para obter as seguintes equações do movimento do sistema oscilador-campo escalar,

$$\ddot{q}_0 + \omega^2 q_0 = 2\pi\sqrt{gc} \int d^3\vec{r} \Phi(\vec{r}, t) \delta(\vec{r}), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 2\pi\sqrt{gc} q_0(t) \delta(\vec{r}). \quad (2.3)$$

Como o sistema está confinado a uma cavidade esférica de radio  $R$ , o campo deve obedecer à condição de fronteira,

$$\phi(\vec{R}) = 0, \quad (2.4)$$

e podemos expandir o campo  $\Phi(\vec{r}, t)$  numa base ortonormal de funções  $\{\phi_i(\vec{r})\}$

$$\Phi(\vec{r}, t) = c \sum_i q_i(t) \phi_i(\vec{r}), \quad (2.5)$$

onde a dependência temporal é dada através dos coeficientes  $q_i(t)$ . Podemos escolher os  $\phi_i(\vec{r})$  como sendo as soluções da equação

$$\nabla^2 \phi_k(\vec{r}) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} \phi_k(\vec{r}), \quad (2.6)$$

onde os  $\phi_k(\vec{r})$  devem obedecer também à condição  $\phi_k(\vec{R}) = 0$ , de forma tal que a condição de fronteira dada pela Eq. (2.4) seja satisfeita. De um ponto de vista físico, já que o oscilador  $q_0$  se encontra em todos os instantes em torno do ponto  $\vec{r} = \vec{0}$ , ele vai sentir os efeitos do campo praticamente da mesma forma em todas as direções, isto é, o problema tem simetria esférica. Então a Eq. (2.6) vai depender somente da parte radial, e a solução para o campo vai depender apenas de  $|\vec{r}| = r$ . Escrevendo o operador  $\nabla^2$  em coordenadas esféricas, dado que os  $\phi_k(r)$  não dependem das coordenadas angulares, a Eq. (2.6) se reduz a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \phi_k(r) \right) = -\frac{\omega_k^2}{c^2} \phi_k(r), \quad (2.7)$$

cuja solução normalizada é dada pela expressão,

$$\phi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{\omega_k r}{c}\right)}{r}, \quad (2.8)$$

onde

$$\omega_k = \frac{k\pi c}{R}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Por outro lado temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi_k(r) = \frac{\omega_k}{c\sqrt{2\pi R}}, \quad (2.10)$$

com que a expressão do campo (2.5) fica,

$$\Phi(\vec{r}, t) = c \sum_k^{\infty} q_k(t) \frac{\sin\left(\frac{\omega_k r}{c}\right)}{r\sqrt{2\pi R}}. \quad (2.11)$$

Em seguida, fazendo uso das equações (2.5), (2.6) e (2.10), escrevemos a Lagrangeana dada por (2.1) da seguinte maneira,

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2} q_0^2 + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \left( \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \phi_i \phi_j - c^2 \sum_{i,j} q_i q_j \nabla \phi_i \nabla \phi_j \right) + 2\pi q_0 c \sqrt{cg} \int d^3\vec{r} \sum_i q_i \phi_i(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (2.12)$$

onde ao integrar por partes a segunda soma, devemos ter em conta que o campo é nulo na fronteira, neste caso na superfície esférica. Então temos que

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2} q_0^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \int d^3\vec{r} \phi_i \phi_j + c^2 \sum_{i,j} q_i q_j \int d^3\vec{r} \phi_i \nabla^2 \phi_j \right) + 2\pi q_0 c \sqrt{cg} \int d^3\vec{r} \sum_i q_i \phi_i(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (2.13)$$

e introduzindo o valor de  $\nabla^2 \phi_i$  dado pela eq. (2.6), temos que

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2} q_0^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \int d^3\vec{r} \phi_i \phi_j - \sum_{i,j} \omega_i^2 q_i q_j \int d^3\vec{r} \phi_i \phi_j \right) + 2\pi q_0 c \sqrt{cg} \int d^3\vec{r} \sum_i q_i \phi_i(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (2.14)$$

As integrais que aparecem na Eq. (2.14) devem ser efetuadas em todo o espaço euclidiano, e tendo em conta que a parte espacial da solução do campo foi tomada numa base ortonormal e cuja solução é dada por (2.5), é fácil calcular as integrais do terceiro e quarto termos de (2.14), as quais dão como resultado o valor um, ao mesmo tempo em que a última integral dá o valor da função espacial do campo no limite  $r \rightarrow 0$ . Então, nossa Lagrangeana fica,

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}q_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N q_i^2 \omega_i^2 - \eta \sum_{i=1}^N q_0 q_i \omega_i, \quad (2.15)$$

onde

$$\eta = \sqrt{2g\Delta\omega}, \quad (2.16)$$

$\Delta\omega = \pi c/R$ , é o intervalo entre as frequências vizinhas do campo, e  $g$  é a constante de acoplamento linear do oscilador com o campo.

Da Lagrangeana (2.15) obtemos que os momentos conjugados são dados por  $p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = \dot{q}_0$  e  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k$ , com os quais a Hamiltoniana para nosso sistema constituído do oscilador harmônico acoplado ao campo escalar dentro da cavidade esférica de raio  $R$  é dada por

$$H = \frac{1}{2} \left\{ p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_0 q_k \right\}. \quad (2.17)$$

Onde  $N \rightarrow \infty$

## 2.2 Diagonalização da Hamiltoniana do sistema de osciladores acoplados

Tendo encontrado a Hamiltoniana do nosso sistema oscilador-campo em termos de um sistema de osciladores acoplados, Eq. (2.17), nosso trabalho seguinte é procurar a sua forma diagonalizada, de maneira que nosso sistema oscilador campo escalar fique expresso pela

Hamiltoniana de um sistema de osciladores livres. Para isso faremos uma transformação linear das coordenadas e dos momentos generalizados da Hamiltoniana. Nós fazemos uso da seguinte transformação,

$$q_\mu = \sum_r t_\mu^r Q_r \quad (2.18)$$

$$p_\mu = \sum_r t_\mu^r P_r, \quad (2.19)$$

onde  $T = (t_\mu^r)$  é uma matriz ortonormal,

$$\sum_{r=0}^N t_\mu^r t_\nu^r = \delta_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

$$\sum_{\mu=0}^N t_\mu^r t_\mu^s = \delta^{rs}, \quad (2.21)$$

com que a forma diagonalizada da hamiltoniana é obtida,

$$H = \frac{1}{2} \sum_r^N (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2). \quad (2.22)$$

Neste procedimento de diagonalização ( ver apendice A) também encontramos,

$$t_k^r = \frac{\eta \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r \quad (2.23)$$

e

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}, \quad (2.24)$$

com que, utilizando a condição de normalização (2.21) e (2.23), obtemos também,

$$t_0^r = \left[ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

A Hamiltoniana escrita na sua forma diagonal, Eq. (2.22), descreve o sistema como um conjunto de osciladores livres, onde os  $\Omega_r$ 's são as frequências normais dos modos de oscilação coletivos desses osciladores. A Eq. (2.24) contém as  $N + 1$  soluções para  $\Omega_r$ ,

as quais correspondem aos  $N + 1$  modos normais coletivos. Esta equação ainda pode ser transformada através de algumas operações algébricas simples, de onde resulta que

$$\omega_0^2 - N\eta^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (2.26)$$

Para uma análise preliminar, podemos chamar  $\Omega_r = \Omega$  de tal forma que a Eq. (2.26),

$$\omega_0^2 - N\eta^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2}, \quad (2.27)$$

fique expressa, em ambos os membros, como função de  $\Omega$ . Assim, podemos analisar a Eq. (2.27) da seguinte forma,

a) No caso em que  $\omega_0^2 - N\eta^2 > 0$ , podemos ter duas opções para  $\Omega^2$ :

a.1) Se  $\Omega^2 < 0$ , analisando a Eq. (2.27) temos que o primeiro membro é positivo enquanto o segundo membro é negativo, existindo uma inconsistência e por conseguinte a opção  $\Omega^2 < 0$  não será considerada.

a.2) Se  $\Omega^2 > 0$ , analisando a Eq. (2.27) vemos que ambos membros da equação tem o mesmo sinal o que implica que esta opção é correta. Portanto quando  $\omega_0^2 - N\eta^2 > 0$ , encontramos soluções positivas para  $\Omega^2$ , o que significa que o sistema oscila harmônicamente em todos os seus modos.

b) No caso em que  $\omega_0^2 - N\eta^2 < 0$ , podemos analisar (2.27) fazendo,

$$F(\Omega^2) = (\omega_0^2 - N\eta^2) - \Omega^2 - \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} \quad (2.28)$$

com que temos que,

$$F(\Omega^2 = 0) = \omega_0^2 - N\eta^2 < 0 \quad (2.29)$$

$$F(\Omega^2 \rightarrow -\infty) \rightarrow +\infty \quad (2.30)$$

$$F(\Omega^2 \rightarrow +\infty) \rightarrow -\infty. \quad (2.31)$$

De (2.29),(2.30) e (2.31) vemos que existe solução negativa para  $\Omega^2$ . Confirmamos este fato analisando a derivada  $dF(\Omega^2)/d\Omega^2$ ,

$$\frac{dF}{d\Omega^2} = -1 - \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2} < 0, \quad (2.32)$$

de onde encontramos que para qualquer valor de  $\Omega^2$  a derivada da função  $F(\Omega^2)$  é sempre negativa. Isto quer dizer que a função dada em (2.28) é monotonicamente decrescente. Então temos que para o caso  $\omega_0^2 - N\eta^2 < 0$ , existirá solução negativa  $\Omega^2 = \Omega_-^2$ . Esta situação não é de interesse para nós, posto que, com este modo de oscilação não se consegue uma configuração estacionária de nosso sistema. Então, nós assumimos que  $\omega_0^2 - N\eta^2 > 0$  e como a frequência livre do oscilador  $\omega_0$  é uma quantidade infinita devido à interação com os  $N \rightarrow \infty$  modos do campo, então nós definimos a frequência renormalizada  $\bar{\omega}$  [21], sendo ela a frequência física do oscilador uma quantidade finita.

$$\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - N\eta^2}. \quad (2.33)$$

Em termos da frequência renormalizada, a equação (2.26) fica,

$$\bar{\omega}^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_r^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (2.34)$$

## 2.3 O espectro das autofrequências

Depois de ter diagonalizado a Hamiltoniana do sistema oscilador-campo escalar, este é agora expresso como um sistema de  $(N + 1)$  osciladores livres, onde  $N$  corresponde ao número de osciladores do campo, no limite de  $N$  infinito. Considerando  $N$  infinito, nós vemos a necessidade de introduzir a frequência renormalizada, dada pela Eq. (2.33), de tal forma que esta frequência seja uma grandeza finita no limite  $N \rightarrow \infty$ . A renormalização da frequência é exatamente análoga à renormalização da massa na Teoria de Campos .

Sendo a frequência renormalizada uma grandeza finita na equação (2.34), podemos agora encontrar as autofrequências  $\Omega_r$  correspondendo aos modos coletivos normais. Lembrando que  $\omega_k = k \frac{c\pi}{R}$ , com  $k = 1, 2, 3, \dots$ , podemos ter uma expressão semelhante para  $\Omega$ ,

$$\Omega = x \frac{c\pi}{R}, \quad (2.35)$$

onde  $x$  é um número real positivo. Então introduzindo as expressões acima das frequências  $\omega$  e  $\Omega$  nas equações precedentes, temos que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2} \quad (2.36)$$

Onde usaremos a identidade,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2} [1 - x\pi \cot x\pi], \quad (2.37)$$

de tal forma que tenhamos agora,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega R}{c} \right) \cot \left( \frac{\Omega R}{c} \right) \right]. \quad (2.38)$$

Introduzindo esta última expressão em (2.34) obtemos,

$$\cot \left( \frac{\Omega R}{c} \right) = \frac{\Omega}{g\pi} + \frac{c}{\Omega R} \left( 1 - \frac{R}{\pi g c} \bar{\omega}^2 \right). \quad (2.39)$$

ou,

$$\cot(x\pi) = \frac{c}{gR}x + \frac{1}{x\pi} \left( 1 - \frac{R\bar{\omega}^2}{gc\pi} \right). \quad (2.40)$$

Na equação (2.39) temos duas funções que dependem da variável  $\Omega$ , sendo a função da direita uma curva secante. O gráfico dessas duas funções se mostram na fig.2.1 onde o eixo horizontal é dado por  $\Omega/\Delta\omega$ . Nós observamos que a curva secante corta somente uma vez cada ramo da função cotangente, com que as soluções para as autofrequências coletivas estarão dadas da seguinte maneira,

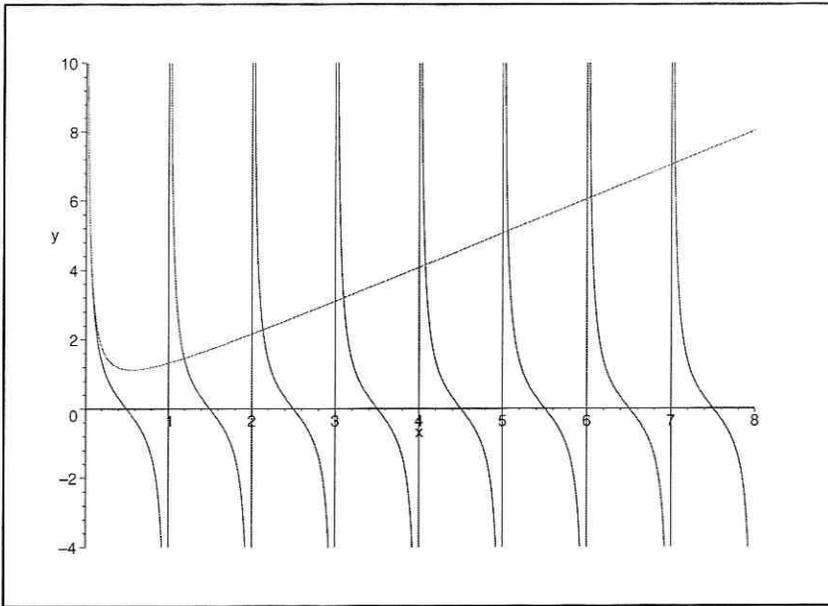


Figura 2.1: Solução numérica da Eq.(2.39), onde a variável  $x$  é dado por  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ .

$$\Omega_r = (r + \epsilon_r) \frac{c\pi}{R} . \quad (2.41)$$

onde  $r = 0, 1, 2, \dots$  e  $0 < \epsilon_r < 1$ . O espectro das autofrequências  $\Omega_r$  será estudado no capítulo seguinte.

## 2.4 A matriz de transformação

Nesta secção vamos encontrar uma forma mas explicita para os elementos da matriz da transformação que diagonaliza o Hamiltoniano do sistema oscilador-campo, que é descrito formalmente por  $(N + 1) \rightarrow \infty$  osciladores independentes. Da equação (2.42)

$$t_0^r = \left[ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

temos que,

$$t_0^r = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2}}}. \quad (2.43)$$

Se nós escrevemos o termo da soma na expressão acima como uma função  $F(\Omega_r)$ ,

$$F(\Omega_r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2}, \quad (2.44)$$

esta mesma função pode ser expressa da seguinte maneira,

$$F(\Omega_r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} + \frac{\Omega_r}{2} \frac{d}{d\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (2.45)$$

Tendo em conta a equação (2.38) temos,

$$F(\Omega_r) = \frac{1}{2\Omega_r^2} \left( 1 - \frac{R\Omega_r}{c} \cot\left(\frac{R\Omega_r}{c}\right) \right) + \frac{\Omega_r}{2} \frac{d}{d\Omega_r} \left[ \frac{1}{2\Omega_r^2} \left( 1 - \frac{R\Omega_r}{c} \cot\left(\frac{R\Omega_r}{c}\right) \right) \right], \quad (2.46)$$

com que após algumas manipulações chegamos a,

$$F(\Omega_r) = -\frac{R}{4c\Omega_r} \cot\left(\frac{R\Omega_r}{c}\right) + \frac{R^2}{4c^2} \left( 1 + \cot^2\left(\frac{R\Omega_r}{c}\right) \right). \quad (2.47)$$

Introduzindo a eq. (2.39) em (2.47) e fazendo as simplificações algébricas necessárias, encontramos que a função  $F(\Omega_r)$  pode ser escrita na forma,

$$F(\Omega_r) = -\frac{\bar{\omega}^2 R}{4\Omega_r^2 c g \pi} + \frac{R^2}{4c^2} + \frac{r^2 \Omega_r}{4c^2 g^2 \pi^2} + \frac{R}{4c g \pi} - \frac{R^2 \bar{\omega}^2}{2c^2 g^2 \pi^2} + \frac{R^2 \bar{\omega}^4}{4\Omega_r^2 c^2 g^2 \pi^2}. \quad (2.48)$$

Então, da Eq. (2.43) e introduzindo a expressão  $F(\Omega_r)$  dada por (2.48), lembrando também que  $\eta = \sqrt{2\pi g c / R}$ , temos,

$$(t_0^r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gc\pi}{R} \left( -\frac{\bar{\omega}^2 R}{4\Omega_r^2 c g \pi} + \frac{R^2}{4c^2} + \frac{r^2 \Omega_r}{4c^2 g^2 \pi^2} + \frac{R}{4c g \pi} - \frac{R^2 \bar{\omega}^2}{2c^2 g^2 \pi^2} + \frac{R^2 \bar{\omega}^4}{4\Omega_r^2 c^2 g^2 \pi^2} \right)}}, \quad (2.49)$$

ou,

$$(t_0^r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{2\Omega_r^2} + \frac{gR\pi}{2c} + \frac{R\Omega_r^2}{2gc\pi} + \frac{1}{2} - \frac{R\bar{\omega}^2}{gc\pi} + \frac{R\bar{\omega}^4}{2gc\pi\Omega_r^2}}}. \quad (2.50)$$

Simplificando e reagrupando termos em (2.50), encontramos finalmente que a expressão para o elemento da matriz  $(t_0^r)$  é,

$$t_0^r = \frac{\Omega_r}{\sqrt{\frac{R}{2\pi gc}(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2}(3\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{g\pi R}{2c}\Omega_r^2}}, \quad (2.51)$$

e também, pela Eq.(2.23):

$$t_k^r = \frac{\eta\omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r. \quad (2.52)$$

## 2.5 Distribuição de energia dos modos e o conceito de osciladores vestidos

Se nós fazemos a transformação do Hamiltoniano (2.17) a eixos principais utilizando as transformações dadas por (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21), separadamente para cada um dos termos correspondentes respectivamente ao oscilador mecânico, ao campo escalar livre e ao acoplamento entre eles, mostramos mediante cálculo simples (ver apêndice B) que, a infinidade negativa que aparece como produto da interação campo-oscilador compensa as infinitudes do oscilador e do campo livres, de tal maneira que a energia renormalizada, a qual inclui a subtração da energia do vácuo correspondente a cada um dos modos coletivos  $\Omega_r$  do sistema, pode simplesmente ser escrita da forma seguinte:

$$E_r = \hbar\Omega_r \left[ (t_0^r)^2 + \sum_{k=1} (t_k^r)^2 \right]. \quad (2.53)$$

Desta maneira vemos que o sistema pode, agora, ser considerado como formado por duas partes: uma, que contém a fração  $(t_0^r)^2 \hbar\Omega_r$  da energia, que chamaremos de "oscilador" e o outro com a fração  $\sum_k (t_k^r)^2 \hbar\Omega_r$  de energia, que chamaremos de "campo". Naturalmente,

aqui já não se trata do oscilador e do campo livres (nus) que inicialmente tínhamos, agora se trata de um *oscilador vestido* e um *campo vestido*, entendendo-se por *vestimentas* aos incrementos de energia que aparecem quando o oscilador e o campo são acoplados. Assim, podemos expressar o nosso sistema como um conjunto de sistemas de osciladores *vestidos*.

# Capítulo 3

## Distribuição de energia dentro da cavidade esférica

Neste capítulo nós vamos analisar a distribuição da energia dos modos coletivos, entre o oscilador vestido e o campo vestido, os conceitos de oscilador vestido e de campo vestido foram introduzidos ao final do capítulo anterior. Nós vamos calcular as frequências dos modos normais  $\Omega_r$  para diferentes valores do raio da cavidade tendo em consideração algumas situações da frequência renormalizada do oscilador  $\bar{\omega}$ , logo analisaremos a distribuição da energia do primeiro modo  $\Omega_0$  nas duas partes constituintes do sistema: o oscilador vestido e o campo escalar vestido. Apresentaremos primeiramente o caso de uma cavidade muito grande ( $R \rightarrow \infty$ ) o que foi estudado em detalhe em [19]. Para nossa análise particular vamos definir a constante de acoplamento linear como  $g = \alpha\bar{\omega}$ , onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina,  $\alpha = 1/137$ .

### 3.1 Cavidade com raio arbitrariamente grande ( $R \rightarrow \infty$ )

Nesta secção, estudaremos a situação onde o raio da cavidade é arbitrariamente grande. Tendo em conta que estamos estudando o nosso sistema confinado numa cavidade esférica, o procedimento correto é estudar o sistema para  $R$  finito e posteriormente fazer  $R \rightarrow$

$\infty$ , como foi discutido na Ref. [19]. Neste caso, quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $(\Delta\omega = c\pi/R) \rightarrow 0$  e as soluções para  $\Omega_r$  são tais que  $\Delta\Omega = \Delta\omega \rightarrow 0$ . Então da eq. (2.51) temos,

$$(t_0^r)^2 = \frac{\Omega_r}{\frac{R}{2\pi g c}(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2}(3\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{\pi g R}{2c}\Omega_r^2}. \quad (3.1)$$

Se  $R \gg \frac{c}{g}$  e tendo em conta que  $\Delta\omega = \frac{\pi c}{R}$ , a Eq. (3.1) é aproximada a

$$(t_0^r)^2 = \frac{\Delta\omega 2g\Omega_r^2}{(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_r^2}, \quad (3.2)$$

onde podemos definir:

$$(t_{\bar{\omega}}^{\Omega})^2 = \frac{2g\Omega_r^2}{(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_r^2}. \quad (3.3)$$

Então a Eq. (3.2) fica expressa como

$$(t_0^r)^2 = \Delta\omega (t_{\bar{\omega}}^{\Omega})^2. \quad (3.4)$$

e da Eq. (2.52), encontramos também,

$$(t_k^r)^2 = \frac{2g(\Delta\omega)^2(\omega_k)^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} (t_{\bar{\omega}}^{\Omega})^2. \quad (3.5)$$

As equações (5.12) e (3.5) dão as frações da distribuição da energia dos modos normais para uma cavidade muti grande (caso livre). Quando o valor de  $R$  é muito grande ( $R \rightarrow \infty$ ) podemos usar o fato  $\Delta\omega = \Delta\Omega = \frac{\pi c}{R}$ . Ademais, no limite  $R \rightarrow \infty$ , os valores das frequências dos modos normais tornam-se valores contínuos; neste caso temos que  $\Delta\Omega \rightarrow d\Omega$ . E a normalização dos elementos da matriz, neste caso, é dada por  $\sum_r^\infty (t_0^r)^2 = \int_0^\infty (t_{\bar{\omega}}^{\Omega})^2 d\Omega = 1$ .

## 3.2 Cavidade de raio finito

Agora vamos estudar a distribuição da energia dentro de uma cavidade de raio finito.

Para isso, vamos resolver numericamente a Eq. (2.39) para encontrar o espectro das

auto-frequências dos modos normais, considerando as restrições e as aproximações em cada caso. Em seguida utilizaremos as equações (2.51) e (2.52) para calcular os elementos da matriz, que elevado ao quadrado, serão as frações de distribuição da energia para cada um dos modos normais coletivos.

### 3.2.1 Se $\bar{\omega} \gg \sqrt{g\Delta\omega}$

Nesta situação a eq. (2.39) é aproximada por,

$$\cot\left(\frac{R\Omega}{c}\right) = \frac{\Omega}{g\pi} - \frac{\bar{\omega}^2}{g\pi\Omega}. \quad (3.6)$$

Nós podemos ter uma equação equivalente a (3.6) fazendo  $\Omega = x\left(\frac{\pi c}{R}\right)$ ,

$$\cot(x\pi) = \frac{c}{gR}x - \frac{R\bar{\omega}^2}{cg\pi^2} \frac{1}{x}. \quad (3.7)$$

Esta última equação vai ser analisada nos casos seguintes.

a)  $R \gg \frac{c}{g}$ .

Neste caso o coeficiente do primeiro termo da direita da eq. (3.7) é muito menor do que a unidade, e o coeficiente do segundo termo é muito maior do que a unidade. Então, levando em conta este fato podemos obter a solução numérica para o espectro das auto-frequências, dado por (3.7). A fig.3.1 mostra este caso onde observamos que existem soluções para as autofrequências com o seguinte comportamento,

$$\Omega_{n-1} \approx n\Delta\omega, \quad \text{com } n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

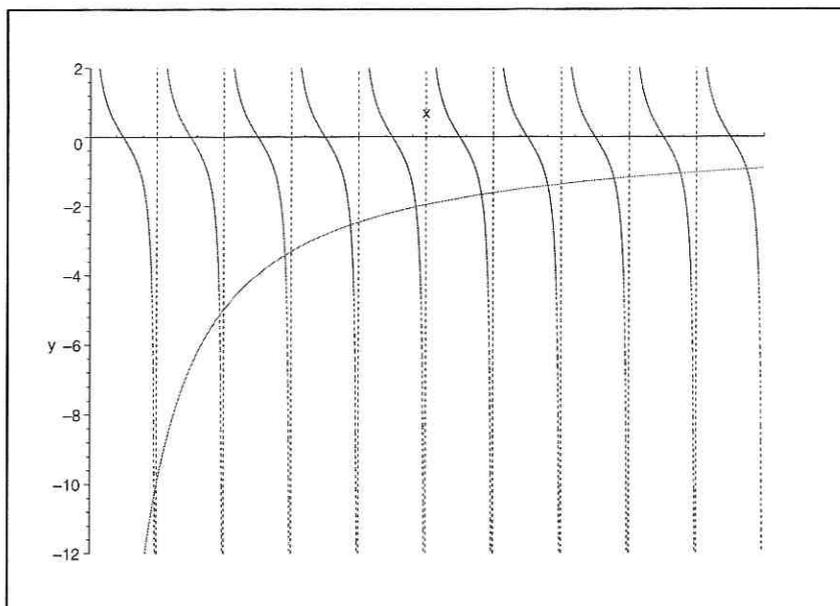


Figura 3.1: Solução numérica da Eq.(3.7), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ , na aproximação  $\frac{c}{gR} \ll 1$  e  $\frac{R\bar{\omega}^2}{cg\pi^2} \gg 1$ .

A restrição para  $n$  neste caso pode ser encontrada tendo em conta que, para essas soluções, a curva secante (ver fig.3.1) corta a cotangente muito perto das assíntotas. Da Eq. (3.7) temos que

$$\frac{n}{g} \ll \frac{R\bar{\omega}^2}{gc\pi^2 n}, \quad (3.9)$$

de onde obtemos que

$$n^2 \ll \frac{R\bar{\omega}^2}{c\pi^2}. \quad (3.10)$$

Assim as  $n$ -primeiras soluções das autofrequencias dos modos normais são  $\Omega_0 \approx \Delta\omega$ ,  $\Omega_1 \approx 2\Delta\omega$  ....  $\Omega_{n-1} \approx n\Delta\omega$ , com a restrição para  $n$  dada por (3.10). Para as demais soluções, vemos que, quando o valor de  $n$  cresce, a curva secante corta a cotangente em pontos cada vez mais afastados da assíntota (ver fig.3.1). Então, as soluções para as

demais auto-frequências são dadas por

$$\Omega_k = (k + \epsilon_k)\Delta\omega, \quad \text{com } k > n \text{ e } 0 < \epsilon_k < 1. \quad (3.11)$$

Por outro lado, tínhamos definido  $g = \alpha\bar{\omega}$  o que, combinando com a condição  $\frac{Rg}{c} \gg 1$ , fornece uma restrição equivalente,  $\frac{R\bar{\omega}}{c} \gg \frac{1}{\alpha} = 137$ . Desta maneira temos outra equação equivalente à eq.(3.6),

$$\cot\left(\frac{R\bar{\omega}}{c} \frac{\Omega}{\bar{\omega}}\right) = \frac{137}{\pi} \frac{\Omega}{\bar{\omega}} \left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\Omega}\right)^2\right). \quad (3.12)$$

A solução numérica da Eq. (3.12) é mostrado na fig.3.2, na qual o eixo  $x$  é dada por  $x = \frac{\Omega}{\bar{\omega}}$ . Da análise deste gráfico podemos observar que a solução para a auto-frequência  $\Omega_0$  se encontra quasi na primeira assintota. O valor da primeira assintota, segundo o argumento da função cotangente na Eq. (3.12), é  $x_0 = \frac{c\pi}{R\bar{\omega}} = \frac{\Omega_0}{\bar{\omega}}$ , com o que encontramos o valor aproximado de  $\Omega_0$  dado por,

$$\Omega_0 \approx \frac{c\pi}{R}, \quad (3.13)$$

ou, tendo em conta que  $g = \alpha\bar{\omega}$ , a solução (3.13) fica expressa como

$$\Omega_0 \approx \frac{c\pi\alpha\bar{\omega}}{gR}, \quad (3.14)$$

onde vemos que  $\Omega_0 \ll \bar{\omega}$ .

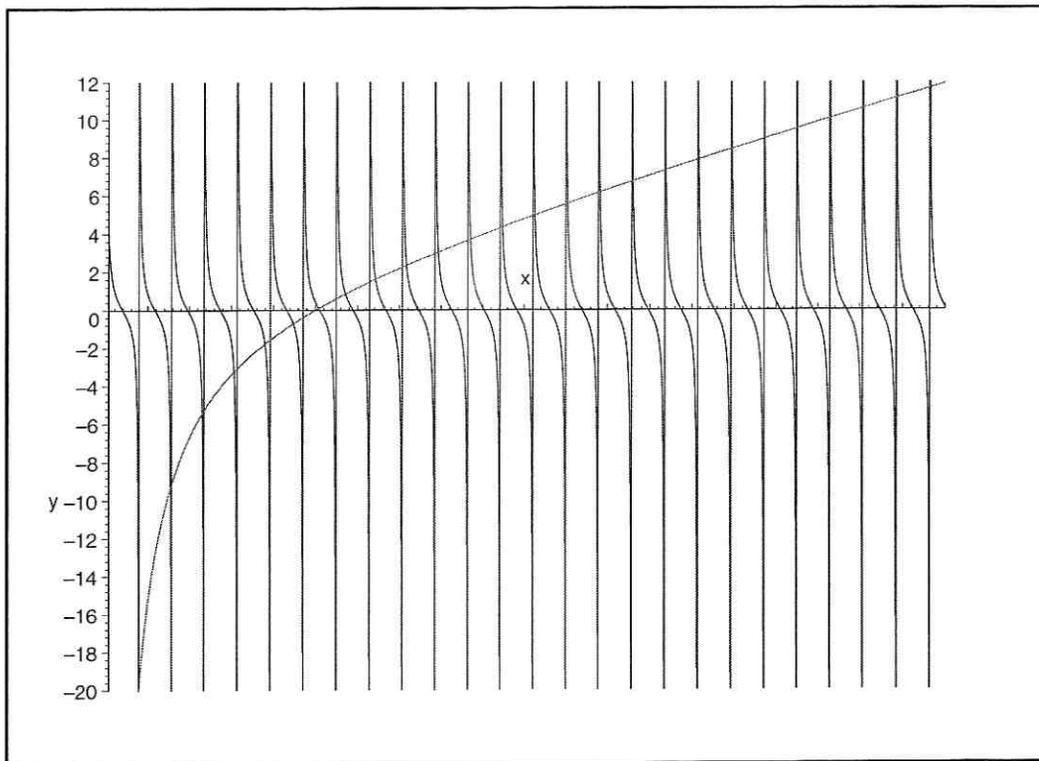


Figura 3.2: Solução numérica da Eq.(3.12), onde  $x = \frac{\Omega}{\bar{\omega}}$  e  $\frac{R\bar{\omega}}{c} \gg 137$ .

Em seguida, passamos a calcular a distribuição de energia para o primeiro modo. Da Eq. (2.51), elevando ambos os termos ao quadrado, temos que

$$(t_0^0)^2 = \frac{\Omega_0^2}{\frac{R}{2\pi gc}(\Omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2}(3\Omega_0^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{gR\pi}{2c}\Omega_0^2} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.14) em (3.15) e efetuando algumas aproximações, temos que,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{\bar{\omega}^2}{\frac{g^2 R^2}{c^2} \left( \frac{R}{2\pi gc} \bar{\omega}^4 - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 + \frac{\pi c}{2gR} \bar{\omega}^2 \right)}, \tag{3.16}$$

ou, tomando a ordem dominante, encontramos que

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{2\pi c^3}{gR^3 \bar{\omega}^2} \tag{3.17}$$

Elevando ao quadrado a eq. (2.52) e introduzindo (3.17), obtemos,

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4\pi c^4}{R^4 \bar{\omega}^2} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_0^2)^2}. \quad (3.18)$$

Para as condições  $\bar{\omega} \gg \sqrt{g\Delta\omega}$  e  $R \gg \frac{c}{g}$ , temos que  $(t_0^0)^2 \ll 1$  e  $\sum_{k=1} (t_k^0)^2 \approx 1$ . Então, neste caso, a energia do primeiro modo normal é distribuída quase exclusivamente no campo vestido.

b)  $R = \frac{c}{g}$

Neste caso o raio da cavidade esférica é igual ao comprimento de coerência. Então, de (3.7) obtemos que

$$\cot(x\pi) = x - \frac{R\bar{\omega}^2}{cg\pi^2} \frac{1}{x}. \quad (3.19)$$

A solução numérica da eq.(3.19) está mostrada na fig.2.3. A análise deste gráfico mostra que a solução para a autofrequência do primeiro modo normal  $\Omega_0$  é dada por  $\Omega \approx \Delta\omega$ , e as soluções para os demais modos são dadas por  $\Omega_k = (k + \epsilon_k)\Delta\omega$ , onde  $\epsilon_k$  tende à unidade quando  $k$  cresce. Como no caso anterior, podemos também utilizar a equação (3.6) e introduzir a condição  $R = \frac{c}{g}$  e, tendo em conta que  $g = \alpha\bar{\omega}$ , encontramos a seguinte equação equivalente,

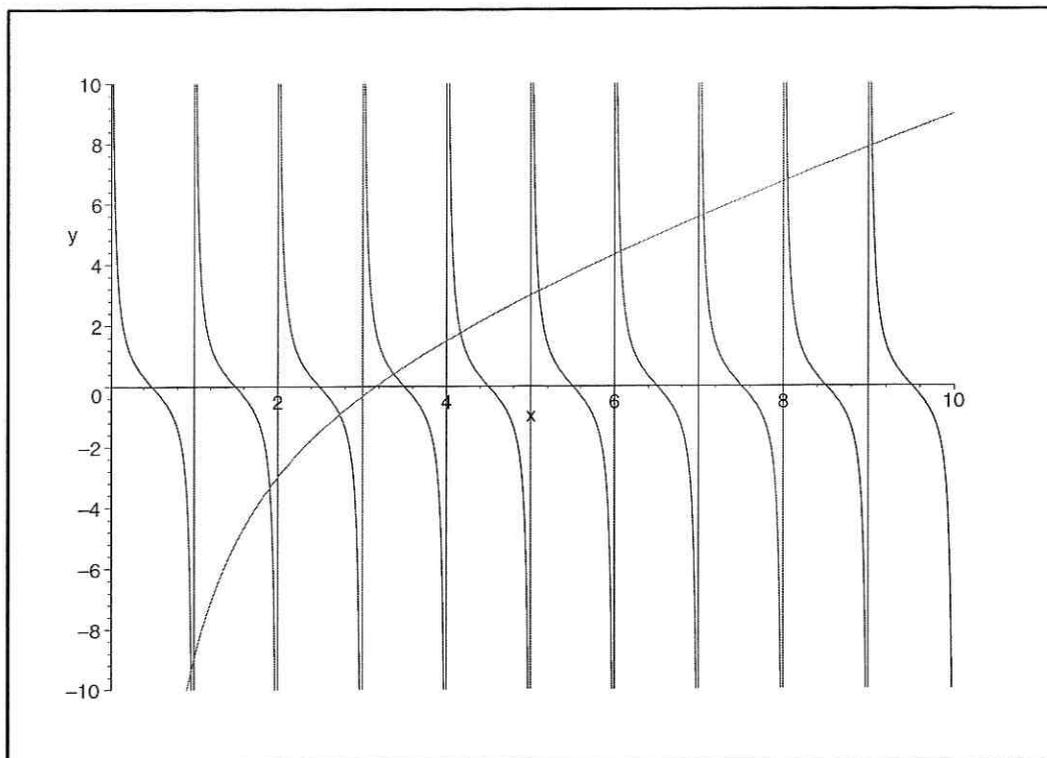


Figura 3.3: Solução numérica da Eq.(3.19), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$  e  $\frac{R\omega^2}{cg\pi^2} \gg 1$ .

$$\cot\left(\frac{\Omega}{g}\right) = \frac{\Omega}{g} \frac{1}{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi} \frac{g}{\Omega}. \quad (3.20)$$

A solução numérica da eq. (3.20) está ilustrada na fig.3.4, sendo o eixo  $x$  igual a  $\frac{\Omega}{g}$ .

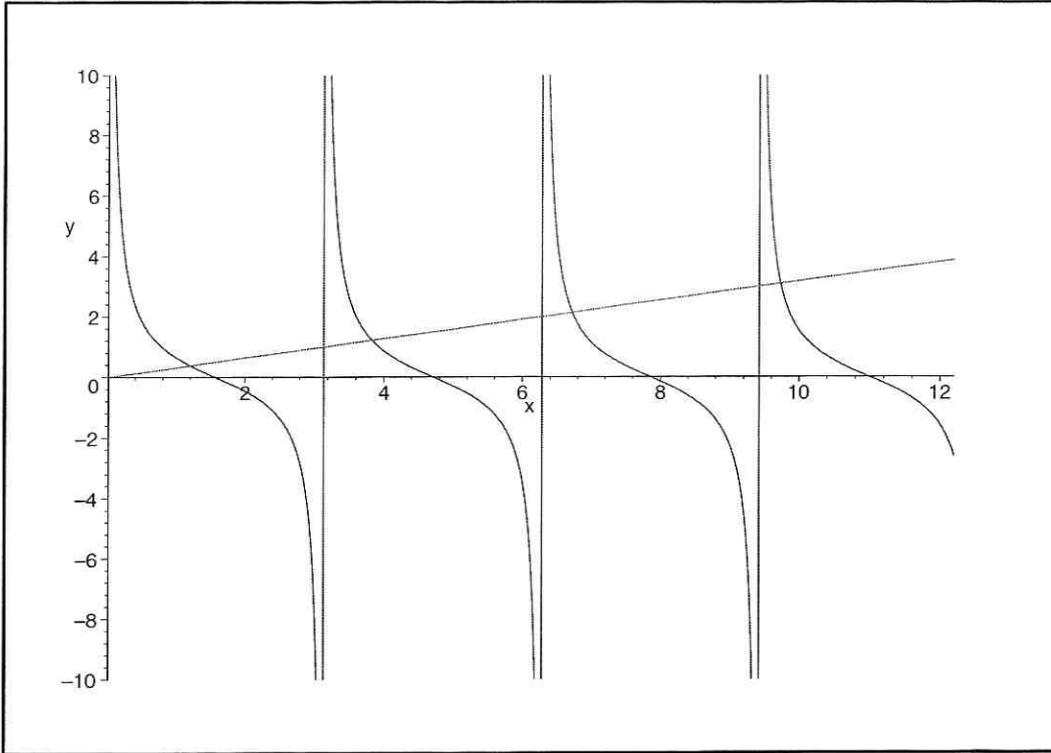


Figura 3.4: Solução numérica da Eq.(3.20), onde  $x = \frac{\Omega}{g}$ , com  $\alpha^2 \ll 1$ .

Da análise deste gráfico encontramos que  $\Omega_0 \approx \alpha \bar{\omega}$ , e as demais soluções para as auto-freqüências são dadas por  $\Omega_k = (k\pi + \epsilon_k)\alpha\bar{\omega}$ , onde  $\epsilon_k \rightarrow 0$  quando  $k$  é muito grande. Efetuando o cálculo da distribuição da energia para o primeiro modo normal, e tendo em conta que  $\alpha \ll 1$ , encontramos que

$$(t_0^0)^2 = \frac{\alpha^2 \bar{\omega}^2}{\frac{R}{2\pi g c} \bar{\omega}^4 + \frac{\bar{\omega}^2}{2} + \frac{\pi \alpha^2 \bar{\omega}^2}{2}}, \quad (3.21)$$

e fazendo as aproximações com as restrições para este caso e substituindo  $g$  pelo seu valor

$\alpha\bar{\omega}$ , obtemos,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{\alpha^2}{\frac{1}{2\pi\alpha^2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\alpha^2}, \quad (3.22)$$

onde encontramos que,

$$(t_0^0)^2 \approx 2\pi\alpha^4. \quad (3.23)$$

De (2.52), encontramos também o seguinte valor aproximado,

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4\pi^2 c g \alpha^4}{R} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_0^2)^2}, \quad (3.24)$$

e, fazendo  $\Omega_0 \approx \pi g$ , temos que

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4\pi^2 c g \alpha^4}{R} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \pi^2 g^2)^2}. \quad (3.25)$$

Neste caso vemos também que  $(t_0^0)^2 \ll 1$ , então  $\sum_{k=1} (t_k^0)^2 \approx 1$ . Quer dizer que a energia do primeiro modo normal se encontra distribuída quase na sua totalidade no campo vestido.

### 3.2.2 Se $\bar{\omega} \ll \sqrt{g\Delta\omega}$

Nesta aproximação a equação (2.39) fica,

$$\cot\left(\frac{R\Omega}{c}\right) = \frac{\Omega}{g\pi} + \frac{c}{R\Omega} \quad (3.26)$$

ou na sua forma equivalente,

$$\cot(x\pi) = \frac{c}{Rg}x + \frac{1}{\pi x}. \quad (3.27)$$

Em seguida, procedemos à análise nos casos que se seguem.

a)  $R \gg \frac{c}{g}$ .

De (3.27) vemos que o coeficiente do primeiro termo da esquerda é muito menor do que a unidade. A solução numérica é exibida na fig.3.5.

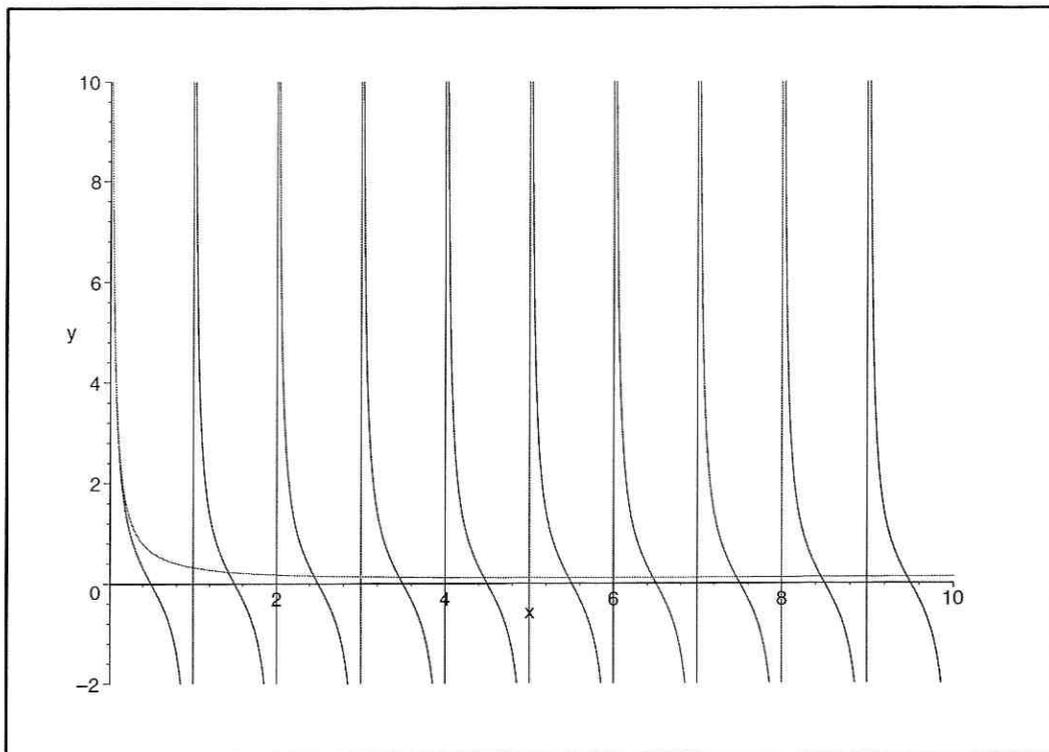


Figura 3.5: Solução numérica da Eq.(3.27), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ , na aproximação  $\frac{c}{gR} \ll 1$ .

Encontramos a solução  $\Omega_0 = \epsilon_0 \Delta\omega$ , onde  $\epsilon_0 \ll 1$ , e também as soluções para os demais modos, dadas por  $\Omega_k = (k + \epsilon_k) \Delta\omega$ , com  $k = 1, 2, \dots$  e  $0 < \epsilon_k < 1$ . Com a restrição para  $\bar{\omega}$  estudada neste caso, e com a solução obtida para  $\Omega_0$ , encontramos que  $\Omega_0 \ll \bar{\omega}$ . Então, nestas condições, a Eq.(3.15) é aproximada por,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{\Omega_0^2}{\frac{R\omega_0^2}{2\pi g c} + \frac{3}{2}\omega_0^2 + \frac{gR\pi}{2c}\Omega_0^2}, \quad (3.28)$$

a qual pode ser também aproximada utilizando a condição sobre as dimensões da cavidade,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{2c}{Rg\pi}, \quad (3.29)$$

com que encontramos também

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4c^2}{R^2} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_0^2)^2}. \quad (3.30)$$

Este resultado (3.30) pode ainda ser aproximado, tendo em conta que  $\epsilon_0 \ll 1$ , então  $\Omega_0^2 = \epsilon_0^2 \Delta\omega^2 \ll \omega_k^2$ , com que obtemos,

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4c^2}{R^2 \omega_k^2}. \quad (3.31)$$

Neste caso considerado, temos que de (3.29),  $(t_0^0)^2 \ll 1$ ; logo de (3.31), temos que  $\sum_{k=1} (t_k^0)^2 \approx 1$ . Então, para o caso considerado aqui, a energia do primeiro modo normal fica distribuída quase na sua totalidade no campo vestido.

b)  $R = \frac{c}{R}$

Neste caso, a eq.(3.27) fica

$$\cot(x\pi) = x + \frac{1}{\pi x}. \quad (3.32)$$

A solução numérica de (3.32) exhibe-se na fig.3.6. As soluções para as frequências dos modos são encontradas,  $\Omega_0 = \epsilon_0 \Delta\omega$ ,  $\Omega_k = (k + \epsilon_k) \Delta\omega$ ,  $\Omega_{k'} \approx k' \Delta\omega$ , onde  $\frac{\Delta\omega k'}{(1 + \pi \Delta\omega^2 k'^2)} < \epsilon_k < 1$  e  $k < k'$

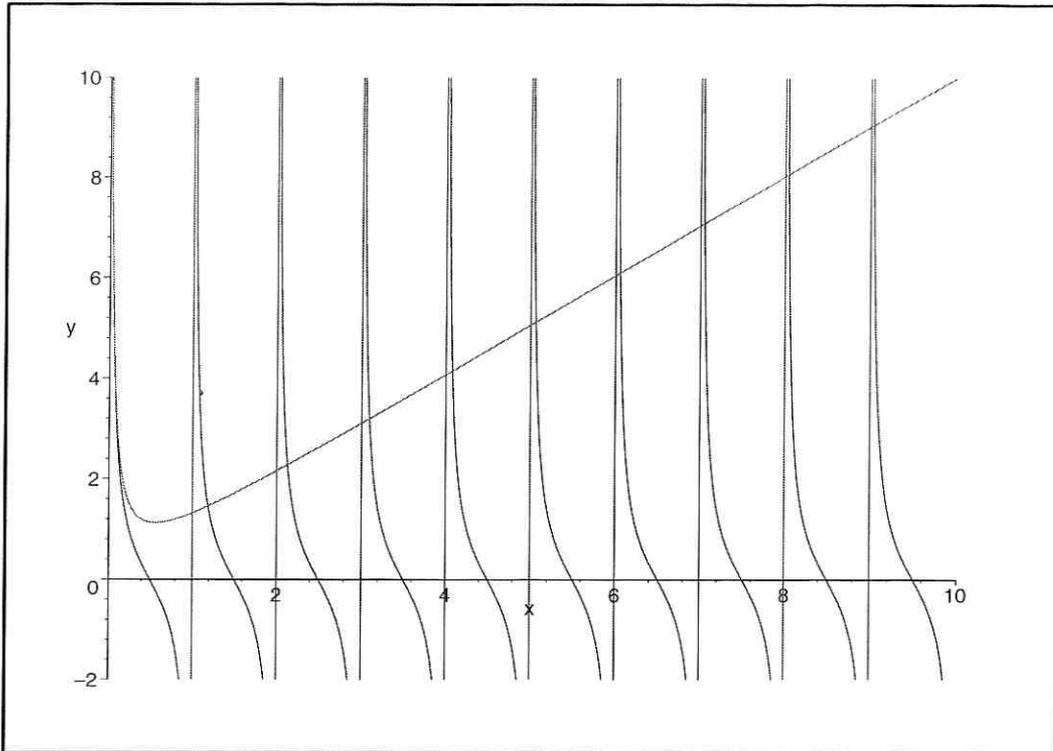


Figura 3.6: Solução numérica da Eq.(3.32), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ .

Como a solução para  $\Omega_0$  é a mesma do caso anterior, então as expressões para a distribuição da energia dos modos podem ser encontradas diretamente das eq (3.29) e (3.31), e tendo em conta que  $gR/c = 1$ , encontramos que

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{2}{\pi} \approx 0,63 \quad (3.33)$$

e

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4g^2}{\omega_k^2}. \quad (3.34)$$

Neste caso, encontramos que a energia do primeiro modo normal é distribuída no oscilador

vestido e no campo vestido. A probabilidade de distribuição para o oscilador é da ordem de 0,63.

### 3.2.3 Se $\bar{\omega} = \sqrt{g\Delta\omega}$

Neste caso a eq. (2.39) é aproximada por,

$$\cot\left(\frac{R\Omega}{c}\right) = \frac{\Omega}{g\pi}, \quad (3.35)$$

ou na sua forma equivalente,

$$\cot(\pi x) = \frac{c}{gR}x. \quad (3.36)$$

Continuando nossa análise vejamos os casos que se seguem

a) Se  $R \gg \frac{c}{g}$

Neste caso temos que o coeficiente no segundo termo da eq. (3.36),  $\frac{c}{gR} \ll 1$ . A análise numérica [ver (fig.3.7)] mostra as soluções seguintes,

$$\Omega_0 \approx \frac{1}{2}\Delta\omega \quad (3.37)$$

e

$$\Omega_k \approx \left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta\omega, \quad (3.38)$$

ou tendo em conta que neste caso  $\Delta\omega = \frac{\bar{\omega}^2}{g}$ , as soluções das auto-freqüências ficam dadas

por

$$\Omega_0 \approx \frac{1}{2}\frac{\bar{\omega}^2}{g} \quad (3.39)$$

e

$$\Omega_k \approx \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\bar{\omega}^2}{g}. \quad (3.40)$$

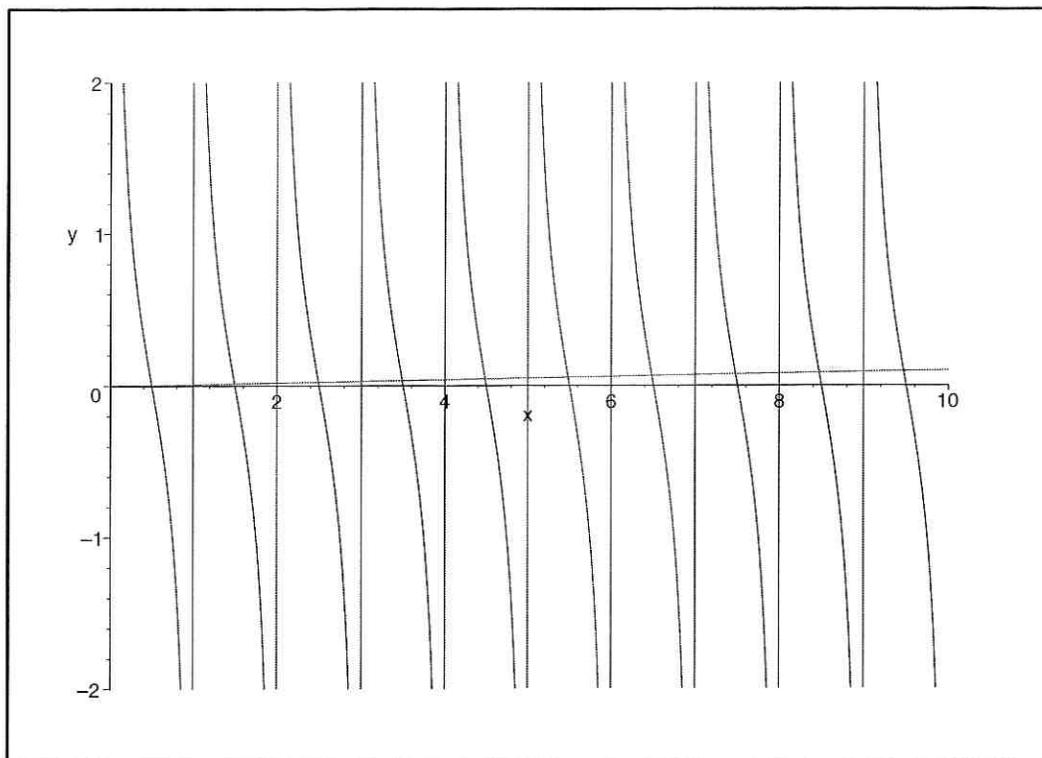


Figura 3.7: Solução numérica da Eq.(3.36), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$  e  $\frac{c}{gR} \ll 1$ .

Da Eq. (3.39) vemos que  $\Omega_0^2 \gg \bar{\omega}^2$ . Combinando com a restrição em  $\bar{\omega}$ , calculamos os coeficientes para a distribuição da energia, entre o campo e o oscilador vestido que resulta serem,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{\Omega_0^2}{\frac{R}{2\pi g c} \Omega_0^2 + \frac{3}{2} \Omega_0^2 + \frac{gR\pi}{2c} \Omega_0^2}, \quad (3.41)$$

ou, simplificando e fazendo aproximações encontramos que,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{2c}{gR\pi}. \quad (3.42)$$

e

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4c^2}{R^2} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_0^2)^2} . \quad (3.43)$$

Neste caso vemos que  $(t_0^0)^2 \ll 1$  e  $\sum_{k=1} (t_k^0)^2 \approx 1$ . Então a energia do primeiro modo normal é distribuída quase exclusivamente no campo vestido.

b)  $R = \frac{c}{g}$ 

Neste caso a eq. (3.36) é aproximada por,

$$\cot(\pi x) = x . \quad (3.44)$$

Da análise numérica de (3.44) (ver fig.3.8) encontramos que as soluções para as autofrequências são dadas em forma aproximada por,

$$\Omega_0 \approx \frac{2}{5} \Delta\omega \quad (3.45)$$

e

$$\Omega_k = (k + \epsilon_k) \Delta\omega \quad (3.46)$$

onde  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

Procedendo como no caso anterior encontramos ainda,

$$\Omega_0 \approx \frac{2 \bar{\omega}^2}{5 g} \quad (3.47)$$

e

$$\Omega_k = (k + \epsilon_k) \frac{\bar{\omega}^2}{g} . \quad (3.48)$$

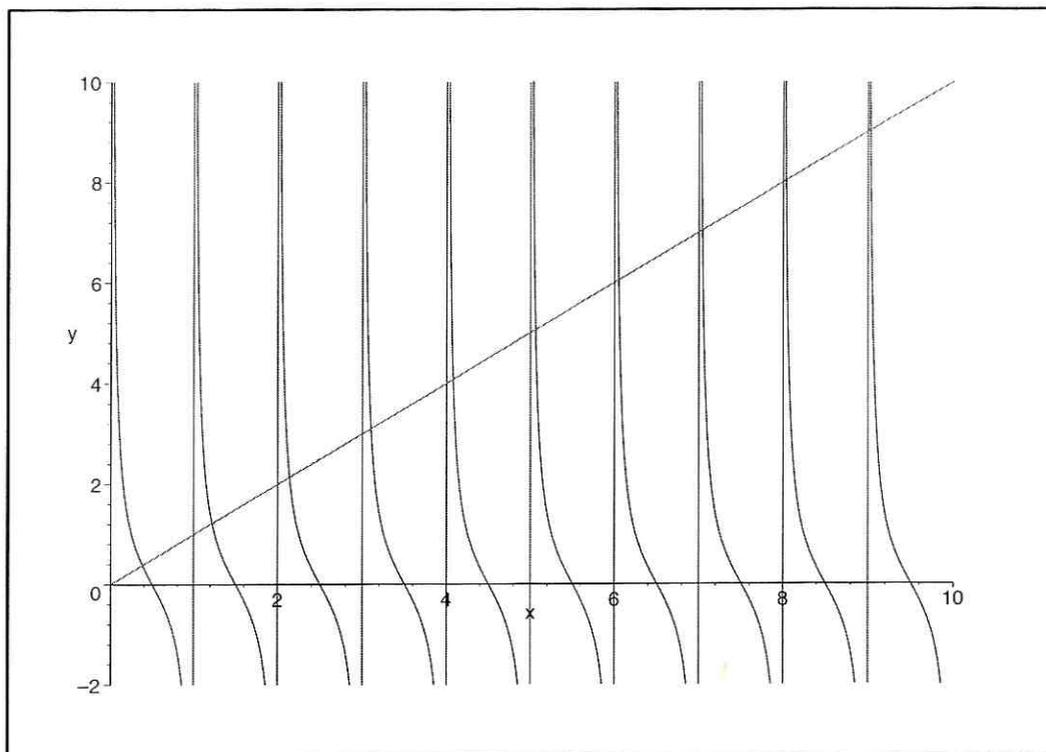


Figura 3.8: Solução numérica da Eq.(3.44), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ .

Utilizando os resultados precedentes encontramos que os coeficientes para a distribuição da energia entre o oscilador vestido e o campo vestido estão dados por,

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{2}{\pi} \quad (3.49)$$

e

$$(t_k^0)^2 \approx \frac{4\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_k^0)^2}. \quad (3.50)$$

Neste caso, a distribuição da energia do primeiro modo normal, fica distribuído com 0,63 de probabilidade no oscilador vestido.

## Capítulo 4

# Introdução das coordenadas vestidas e o processo de radiação para $R \rightarrow \infty$

Neste capítulo nós vamos definir algumas coordenadas  $q'_0$  e  $q'_i$  associadas ao sistema oscilador-campo vestido. Com estas coordenadas tornaremos possível uma descrição não perturbativa do sistema oscilador-campo. Trabalhos recentes sobre sistemas atômicos em cavidades se encontram em [14] e para uma referência histórica em tratamentos perturbativos para sistemas oscilador-campo citamos a ref [22]. As condições gerais que as coordenadas vestidas devem satisfazer, levando em conta que o sistema é rigorosamente descrito pelas coordenadas coletivas associadas aos modos normais  $Q_r$ , são as seguintes:

- Como nosso problema tem caráter linear, então as novas coordenadas vestidas  $q'_0, q'_i$  devem ser também funções lineares das coordenadas coletivas  $Q_r$ .

- Elas devem permitir construir configurações ortonormais (" estados vestidos") para a separação do sistema em duas partes, o oscilador vestido e o campo vestido.

- O conjunto destas configurações devem conter o estado fundamental,  $\Gamma_0$ .

A última condição dada, restringe a transformação entre as coordenadas vestidas  $q'_\mu$ ,  $\mu = 0, i, i = 1, 2, 3...$  e os modos coletivos  $Q_r$  de tal forma que deixe invariante a forma

quadrática,

$$\sum_r \Omega_r Q_r^2 = \bar{\omega}(q'_0)^2 + \sum_i \omega_i (q'_i)^2 . \quad (4.1)$$

As nossas configurações se comportarão em primeira aproximação como estados independentes, mas evoluirão no tempo, ocorrendo transições entre elas, enquanto que a configuração básica  $\Gamma_0$  representa um rigoroso auto-estado do sistema que não se altera com o passar do tempo. As novas coordenadas  $q'_\mu$  vão descrever as configurações quânticas do oscilador vestido e do campo vestido. A Eq. (4.1) é deduzida na secção seguinte.

## 4.1 As coordenadas vestidas $q'_\mu$

Em termos das coordenadas normais os auto estados de nosso sistema estão representados pelas auto-funções normalizadas,

$$\Psi_{n_0, n_1, n_2, \dots}(Q, t) = \prod_s \left[ N_s H_{n_s} \left( \sqrt{\frac{\Omega_s}{\hbar}} Q_s \right) \right] \Gamma_0(Q) e^{-i \sum_s n_s \Omega_s t} , \quad (4.2)$$

onde  $H_{n_s}$  é o  $n_s$ -ésimo polinômio de Hermite,  $N_s$  é o coeficiente de normalização,

$$N_{n_s} = (2^{-n_s} n_s!)^{-\frac{1}{2}} , \quad (4.3)$$

e  $\Gamma_0$  é a representação normalizada do estado fundamental (vácuo),

$$\Gamma_0(Q) = \exp \left[ - \sum_s \frac{\Omega_s Q_s^2}{2\hbar} - \frac{1}{4} \sum_s \ln \frac{\Omega_s}{\pi\hbar} \right] . \quad (4.4)$$

A idéia é considerar o nosso sistema composto de duas partes, o oscilador vestido e o campo vestido, por meio das coordenadas vestidas  $q'_0$  e  $q'_i$  convenientemente definidas anteriormente e associadas respectivamente ao oscilador vestido e ao campo vestido. O oscilador vestido conterà automaticamente todos os efeitos do campo sobre si. Posto que nosso problema é de caráter linear, como foi mencionado acima, deve haver uma

transformação linear entre as coordenadas normais e as coordenadas *vestidas*  $q'_0$  e  $q'_i$ . Também exigimos a condição física da estabilidade do vácuo. Então, nós podemos supor que para um dado instante ( $t = 0$ ) o nosso sistema é descrito por certos *estados vestidos*, descritos pelas funções de onda,

$$\Phi_{k_0, k_1 \dots}(q') = \prod_{\mu} \left[ N_{k_{\mu}} H_{k_{\mu}} \left( \sqrt{\frac{\bar{\omega}_{\mu}}{\hbar}} q'_{\mu} \right) \right] \Gamma_0(q'), \quad (4.5)$$

onde agora o estado do vácuo pode ser expresso como,

$$\Gamma_0(q') \propto e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_{\mu} \bar{\omega}_{\mu} (q')^2}, \quad (4.6)$$

enquanto que na base dos estados normais,

$$\Gamma_0(Q) \propto e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_s \Omega_s Q_s^2}. \quad (4.7)$$

Para satisfazer a invariância do vácuo é necessário que os fatores exponenciais de (4.6) e de (4.7) sejam iguais; assim, encontramos que a condição que foi estabelecida na Eq. (4.1) é válida. Então, da condição de ortonormalidade da matriz ( $t_{\mu}^r$ ) e utilizando a Eq.(4.1) encontramos que as coordenadas vestidas e as coordenadas normais estão relacionadas da seguinte maneira,

$$\sqrt{\frac{\bar{\omega}_{\mu}}{\hbar}} q'_{\mu} = \sum_r t_{\mu}^r \sqrt{\frac{\Omega_r}{\hbar}} Q_r. \quad (4.8)$$

Esta relação satisfaz à condição de invariância da forma quadrática (4.1) onde  $\bar{\omega}_{\mu} = \{\bar{\omega}, \omega_i\}$ . Em termos das coordenadas nuas as coordenadas vestidas são expressas como,

$$q'_{\mu} = \sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu} q_{\nu}, \quad (4.9)$$

onde

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}_{\mu}}} \sum_r t_{\mu}^r t_{\nu}^r \sqrt{\Omega_r}. \quad (4.10)$$

## 4.2 As configurações vestidas

Para clareza da linguagem nós usamos o termo fóton para indicar os quanta de energia do campo, mesmo se estamos tratando de um campo escalar em lugar de um campo eletromagnético. Nós falaremos então da emissão ou da absorção de um fóton pelo oscilador, referindo-nos neste caso aos quanta de energia do campo escalar. Para representar a função de estado de nosso sistema em coordenadas vestidas nós havíamos definido a Eq. (4.5) estando a invariância do estado fundamental assegurada mediante a definição das coordenadas vestidas dada pela Eq. (4.8). Cada função  $\Phi_{k_0 k_1 \dots}(q')$  descreve um estado no qual o oscilador vestido  $q'_\mu$  está no  $k_\mu$ -ésimo estado excitado. Usando a Eq.(4.9), as autofunções (4.5) podem ser expressas em termos das coordenadas normais  $Q_r$ . Posto que (4.2) é um conjunto completo de funções ortonormais, as autofunções (4.5) podem ser escritas como combinações lineares das auto funções do sistema acoplado (4.2).Então, para  $t = 0$  nos escrevemos as autofunções que descrevem os estados vestidos  $\Phi$ , em termos das autofunções (4.2),

$$\Phi_{k_0, k_1, \dots}(q') = \sum_{n_0, n_1, \dots} T_{k_0, k_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots}(0) \Psi_{n_0, n_1, \dots}(Q, 0), \quad (4.11)$$

e como estas autofunções  $\Psi_{n_0, n_1, \dots}(Q, 0)$  formam uma base completa de funções ortonormais, encontramos que,

$$T_{k_0, k_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots}(0) = \int dQ \Phi_{k_0, k_1, \dots} \Psi_{n_0, n_1, \dots} \quad (4.12)$$

configuração  $\Phi$  na qual o oscilador vestido  $q'_\mu$  esteja no seu  $N$ -ésimo estado excitado, e todos os outros osciladores vestidos  $q'_\nu$ ,  $\nu \neq \mu$ , no estado fundamental,então temos que

$$\Phi_{0, \dots, N(\mu), 0, \dots}(q'_\mu) = N_N H_N \left( \sqrt{\frac{\bar{\omega}_\mu}{\hbar}} q'_\mu \right) \Gamma_0. \quad (4.13)$$

E os coeficientes (4.12) podem ser calculados, neste caso, usando as equações (4.13), (4.5) e (4.8),

$$T_{0..N(\mu),0,..}^{n_0,n_1..}(0) = \int dQ N_N H_N \left( \sqrt{\frac{\bar{\omega}^\mu}{\hbar}} q'_\mu \right) \Gamma_0 \prod_s \left[ N_{n_s} H_{n_s} \left( \sqrt{\frac{\Omega_s}{\hbar}} Q_s \right) \right] \Gamma_0, \quad (4.14)$$

ou,

$$T_{0..N(\mu),0,..}^{n_0,n_1..}(0) = \int dQ N_N H_N \left( \sum_r t_\mu^r \sqrt{\frac{\Omega_r}{\hbar}} Q_r \right) \Gamma_0 \prod_s \left[ N_{n_s} H_{n_s} \left( \sqrt{\frac{\Omega_s}{\hbar}} Q_s \right) \right] \Gamma_0. \quad (4.15)$$

e com a ajuda do teorema [25],

$$\begin{aligned} \frac{1}{N!} \left[ \sum_r (t_\mu^r)^2 \right]^{\frac{N}{2}} H_N \left( \frac{\sum_r t_\mu^r \sqrt{\frac{\Omega_r}{\hbar}} Q_r}{\sqrt{\sum_r (t_\mu^r)^2}} \right) = \\ \sum_{m_0+m_1+..=N} \frac{(t_\mu^0)^{m_0} (t_\mu^1)^{m_1}..}{m_0! m_1!..} H_{m_0} \left( \sqrt{\frac{\Omega_0}{\hbar}} Q_0 \right) H_{m_1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_1}{\hbar}} Q_1 \right) .., \end{aligned} \quad (4.16)$$

a Eq. (4.15) é transformada como.

$$\begin{aligned} T_{0..N(\mu),0,..}^{n_0,n_1..}(0) = \int dQ N_N N! \sum_{m_0+m_1+..=N} \frac{(t_\mu^0)^{m_0} (t_\mu^1)^{m_1}..}{m_0! m_1!..} H_{m_0} \left( \sqrt{\frac{\Omega_0}{\hbar}} Q_0 \right) H_{m_1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_1}{\hbar}} Q_1 \right) .. \\ .. \Gamma_0 N_{n_0} H_{n_0} \left( \sqrt{\frac{\Omega_0}{\hbar}} Q_0 \right) N_{n_1} H_{n_1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_1}{\hbar}} Q_1 \right) .. \Gamma_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Multiplicamos e dividimos peos coeficientes  $N_{m_s}$  cada um dos polinomios de Hermite que ainda não estejam normalizados por estes coeficientes, de modo que a expressão acima fica escrita na forma,

$$\begin{aligned} T_{0..N(\mu),0,..}^{n_0,n_1..}(0) = \int dQ N_N N! \sum_{m_0+m_1+..=N} \frac{(t_\mu^0)^{m_0} (t_\mu^1)^{m_1}..}{m_0! m_1!..} \frac{N_{m_0}}{N_{m_0}} H_{m_0} \left( \sqrt{\frac{\Omega_0}{\hbar}} Q_0 \right) \times \\ \frac{N_{m_1}}{N_{m_1}} H_{m_1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_1}{\hbar}} Q_1 \right) .. \Gamma_0 N_{n_0} H_{n_0} \left( \sqrt{\frac{\Omega_0}{\hbar}} Q_0 \right) N_{n_1} H_{n_1} \left( \sqrt{\frac{\Omega_1}{\hbar}} Q_1 \right) .. \Gamma_0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Então, ao efetuar a soma obtemos,

$$T_{0,..N\mu,0,..}^{n_0,n_1,..} = \frac{N_N N!}{n_0! n_1! .. N_{n_0} N_{n_1} ..} (t_\mu^0)^{n_0} (t_\mu^1)^{n_1} .. \delta_{N(\mu), n_0+n_1+..} , \quad (4.19)$$

ou, usando (4.3),

$$T_{0,..N(\mu),0,..}^{n_0,n_1,..}(0) = \frac{(2^{-N} N!)^{-\frac{1}{2}} N!}{n_0! n_1! .. (2^{-n_0} n_0!)^{-\frac{1}{2}} (2^{-n_1} n_1!)^{-\frac{1}{2}} ..} (t_\mu^0)^{n_0} (t_\mu^1)^{n_1} .. \delta_{N(\mu), n_0+n_1+..} , \quad (4.20)$$

de onde finalmente obtemos,

$$T_{0,..N(\mu),0,..}^{n_0,n_1,..}(0) = \left( \frac{N!}{n_0! n_1! n_2! ..} \right)^{\frac{1}{2}} (t_\mu^0)^{n_0} (t_\mu^1)^{n_1} (t_\mu^2)^{n_2} .. \delta_{N(\mu), n_0+n_1+..} , \quad (4.21)$$

onde os subíndices  $\mu = 0, i$  referem-se respectivamente ao oscilador vestido e ao campo vestido; ademais os números quânticos  $n_\mu$  são submetidos à condição  $n_0 + n_1 + .. = N$ .

### 4.3 Evolução temporal da coordenada vestida do átomo

Nós podemos escrever o estado inicial de nosso sistema, o átomo vestido e o campo vestido, na forma seguinte [26],

$$|\alpha, n'_1, n'_2, ..; t = 0 \rangle = |\alpha \rangle \otimes |n'_1, n'_2, .. \rangle . \quad (4.22)$$

Onde  $|\alpha \rangle$  é o estado inicial do átomo vestido e  $|n'_1, n'_2, .. \rangle$  é o estado inicial do campo vestido. Lembramos que a trajetória clássica, no caso do oscilador harmónico quântico, ela é dada pelo valor médio do operador posição num estado coerente, nós definimos  $|\alpha \rangle$  como um estado coerente vestido dada por,

$$|\alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} |n'_0 \rangle . \quad (4.23)$$

Então o nosso sistema total inicial é descrito por ,

$$|\alpha, n'_1, n'_2, ..; t = 0 \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} |n'_0, n'_1, .. \rangle . \quad (4.24)$$

posto que os autoestados  $|n'_0, n'_1, n'_2, \dots\rangle$  formam uma base completa (Eq.(4.2)); então (podemos escrever 4.24) como,

$$|\alpha, n'_1, n'_2, \dots; t = 0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} \sum_{n_\mu} (|n_0, n_1, \dots\rangle \langle n_0, n_1, \dots|) |n'_0, n'_1, \dots\rangle, \quad (4.25)$$

ou,

$$|\alpha, n'_1, n'_2, \dots; t = 0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} \sum_{n_\mu} \langle n_0, n_1, \dots | n'_0, n'_1, \dots \rangle |n_0, n_1, \dots\rangle, \quad (4.26)$$

e tendo em conta (4.12), temos,

$$|\alpha, n'_1, n'_2, \dots; t = 0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} \sum_{n_\mu} T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} |n_0, n_1, \dots\rangle, \quad (4.27)$$

e considerando a evolução temporal para nosso sistema e tendo em conta (4.12) temos,

$$|\alpha, n'_1, n'_2, \dots; t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} \sum_{n_\mu} T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} e^{-i \sum_r (n_r + 1/2) \Omega_r t} |n_0, n_1, \dots\rangle. \quad (4.28)$$

Em seguida, procedemos a calcular a evolução temporal da coordenada vestida,  $q'_\alpha$ , do átomo, da seguinte maneira,

$$q'_\alpha(t) = \langle \alpha, n'_1, n'_2, \dots; t | q'_0 | \alpha, n'_1, n'_2, \dots; t \rangle, \quad (4.29)$$

ou,

$$q'_\alpha(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n'_0, m'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0}}{\sqrt{n'_0!}} \frac{(\alpha^*)^{m'_0}}{\sqrt{m'_0!}} \sum_{\{n_r, m_r\}} T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} T_{m'_0, m'_1, \dots}^{* m_0, m_1, \dots} e^{-i \sum_r (n_r - m_r) \Omega_r t} \times \langle m_0, m_1, \dots | q'_0 | n_0, n_1, \dots \rangle. \quad (4.30)$$

Tendo em conta (4.8) para  $\mu = 0$  e

$$\langle m_r | Q_r | n_r \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_r}} (\sqrt{n_r} \delta_{m_r, n_r - 1} + \sqrt{n_r + 1} \delta_{m_r, n_r + 1}) \quad (4.31)$$

Na Eq.(4.30), temos,

$$q'_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\bar{\omega}}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n'_0, m'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0} (\alpha^*)^{m'_0}}{\sqrt{n'_0!} \sqrt{m'_0!}} \sum_{\{n_r, m_r\}} T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} T_{m'_0, m'_1, \dots}^{m_0, m_1, \dots} e^{-i \sum_r (n_r - m_r) \Omega_r t} \\ \times \sum_{r=0}^N \left[ t_0^r (\sqrt{n_r} \delta_{m_r, n_r-1} + \sqrt{n_r+1} \delta_{m_r, n_r+1}) \prod_{s \neq r} \delta_{m_s, n_s} \right]. \quad (4.32)$$

Tendo em conta que  $T^* = T$  da equação anterior obtemos

$$q'_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\bar{\omega}}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n'_0, m'_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'_0} (\alpha^*)^{m'_0}}{\sqrt{n'_0!} \sqrt{m'_0!}} \sum_{\{n_r\}} \sum_{r=0}^N t_0^r \sqrt{n_r+1} \times \\ (T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} T_{m'_0, m'_1, \dots}^{n_0, n_r+1, \dots} e^{-i\Omega_r t} + T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_r+1, \dots} T_{m'_0, m'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} e^{i\Omega_r t}), \quad (4.33)$$

fazendo algumas manipulações algébricas e reagrupando termos, temos,

$$q'_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\bar{\omega}}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n_r} \sum_{r=0}^N t_0^r \sqrt{n_r+1} \sum_{n'_0, m'_0=0}^{\infty} T_{n'_0, n'_1, \dots}^{n_0, n_1, \dots} T_{m'_0, m'_1, \dots}^{n_0, n_r+1, \dots} \times \\ \left[ \frac{\alpha^{n'_0} (\alpha^*)^{m'_0}}{\sqrt{n'_0!} \sqrt{m'_0!}} e^{-i\Omega_r t} + \frac{\alpha^{n'_0} (\alpha^*)^{m'_0}}{\sqrt{n'_0!} \sqrt{m'_0!}} e^{i\Omega_r t} \right]. \quad (4.34)$$

para o caso em que  $n'_1 = n'_2 = \dots = 0$  da Eq. (4.21) obtemos,

$$T_{n'_0, 0, \dots}^{n_0, n_1, \dots} = \left( \frac{n'_0!}{n_0! n_1! n_2! \dots} \right)^{\frac{1}{2}} (t_0^0)^{n_0} (t_0^1)^{n_1} \dots (t_0^r)^{n_r} \dots \delta_{n'_0, n_0+n_1+\dots}, \quad (4.35)$$

e

$$T_{m'_0, 0, \dots}^{n_0, n_1, \dots, n_r+1, \dots} = \left( \frac{m'_0!}{n_0! n_1! n_2! \dots (n_r+1)! \dots} \right)^{\frac{1}{2}} (t_0^0)^{n_0} (t_0^1)^{n_1} \dots (t_0^r)^{n_r+1} \dots \delta_{m'_0, 1+n_0+n_1+\dots}, \quad (4.36)$$

substituindo (4.35) e (4.36) em (4.34) e fazendo alguns cálculos algébricos necessários, obtemos.

$$q'_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\bar{\omega}}} e^{-|\alpha|^2} \sum_{r=0}^N (t_0^r)^2 \prod_r \frac{(t_0^r)^{2n_r}}{n_r!} \sum_{n_r=0}^{\infty} |\alpha|^2 \sum_r n_r (\alpha e^{-i\Omega_r t} + \alpha^* e^{i\Omega_r t}), \quad (4.37)$$

reagrupando e realizando alguns cálculos algébricos adicionais finalmente encontramos,

$$q'_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\bar{\omega}}} \sum_{r=0}^N (\alpha (t_0^r)^2 e^{-i\Omega_r t} + \alpha^* (t_0^r)^2 e^{i\Omega_r t}). \quad (4.38)$$

ou,

$$q'_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\bar{\omega}}} \left( \alpha f^{00}(t) + \alpha^* [f^{00}(t)]^* \right). \quad (4.39)$$

Onde

$$f^{00}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (t_0^r)^2 e^{-i\Omega_r t}. \quad (4.40)$$

## 4.4 O processo de radiação

Para descrever o processo de radiação, tendo como condição inicial que somente o oscilador mecânico  $q_0$  se encontre excitado, o procedimento usual é considerar o produto da coordenada  $q_0$  com as coordenadas do campo escalar  $q_i$ , como termos da interação oscilador-campo no Hamiltoniano os quais iduzem as transições entre os auto-estados do Hamiltoniano livre. Desta forma é possível tratar aproximadamente o problema, tendo como condição inicial, que somente o oscilador nú se encontre excitado. Mais essa condição é fisicamente inconsistente devido à divergencia da frequência do oscilador nú se houver uma interação com o campo. A forma tradicional de evitar esta dificuldade é utilizar o procedimento da renormalização, introduzindo perturbativamente ordem por ordem as correções à frequência do oscilador. Em nosso trabalho adotamos um procedimento alternativo, que consiste inicialmente em expressar a interação do oscilador nú com o campo escalar mediante as coordenadas  $q_0$  e  $q_i$  e em seguida efetuar a transformação destas coordenadas para as coordenadas vestidas  $q'_0$  e  $q'_i$ . Em seguida nós vamos centralizar a nossa atenção no comportamento do sistema com a condição inicial que somente um oscilador vestido  $q'_\mu$  ( oátomo vestido ou um dos modos do campo vestido ) se encontre no  $N$ -ésimo estado excitado. Nós estudaremos em detalhe o caso particular do primeiro nível excitado,  $N = 1$ , o qual será suficiente para ter uma clara compreensão da utilidade das

coordenadas vestidas para o estudo do processo da radiação em cavidades. Chamaremos  $\Gamma_1^\mu$  a configuração na qual somente o oscilador vestido  $q'_\mu$  está no primeiro estado excitado. Então a evolução temporal deste estado é dado por [19],

$$\Gamma_1^\mu(t) = \sum_\nu f^{\mu\nu}(t)\Gamma_1^\mu(0), \quad (4.41)$$

onde os coeficientes  $f^{\mu\nu}$  são dados por

$$f^{\mu\nu}(t) = \sum_s t_\mu^s t_\nu^s e^{-i\Omega_s t}. \quad (4.42)$$

Da Eq. (4.41) nós podemos ver que o oscilador vestido, inicialmente excitado, distribui sua energia entre si próprio e com todos os outros osciladores vestidos, ao evoluir no tempo, com a amplitude de probabilidade dada por (4.42). Se o oscilador mecânico vestido  $q'_0$  (o átomo vestido) está no primeiro estado excitado em  $t = 0$ , este decai com o passar do tempo; a taxa de decaimento pode ser calculada usando a expressão

$$\Gamma_1^0(t) = \sum_\nu f^{0\nu}(t)\Gamma_1^\mu(0). \quad (4.43)$$

Na Eq. (4.43) os coeficientes  $f^{0\nu}(t)$  têm uma interpretação simples:  $f^{00}(t)$  e  $f^{0i}(t)$  são as amplitude das probabilidades no tempo  $t$  que o átomo vestido, esteja no primeiro estado excitado ou, irradie um fóton de frequência  $\omega_i$  respectivamente. Nosso formalismo em coordenadas vestidas, nos permite uma descrição exata do processo de radiação, quando nosso sistema evolui no tempo.

## 4.5 Processo de radiação para uma cavidade arbitrariamente grande

Em seguida vamos a estudar a evolução temporal do nosso sistema, considerado como um átomo excitado, no seu primeiro nível, dentro de uma cavidade esférica muito grande.

Encontraremos a probabilidade de decaimento de seu primeiro estado excitado. No caso de uma cavidade muito grande nosso método generaliza o que pode ser obtido da teoria das perturbações. A amplitude de probabilidade de que o átomo se encontre no primeiro estado excitado no tempo  $t$  pode ser obtida a partir das equações (3.7) e (4.42) para  $f^{00}$ ,

$$f^{00}(t) = \int_0^\infty \frac{2g\Omega^2 e^{-i\Omega t} d\Omega}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2}. \quad (4.44)$$

Para um tempo  $t$  ( $t \gg 1/\bar{\omega}$ ), e para um acoplamento arbitrário  $g$ , encontramos que a probabilidade do que o átomo excitado ainda se encontre neste estado, é dada por (ver apêndice C)

$$|f^{00}(t)|^2 = e^{-\pi g t} \left( 1 + \frac{\pi^2 g^2}{4\bar{\omega}^2} \right) + e^{-\pi g t} \frac{8\pi g}{\pi \bar{\omega}^4 t^3} \left( \sin \tilde{\omega} t + \frac{\pi g}{2|\tilde{\omega}|} \cos \tilde{\omega} t \right) + \frac{16g^2}{\bar{\omega}^8 t^6}. \quad (4.45)$$

Onde  $\tilde{\omega} = \sqrt{(\bar{\omega})^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}}$ . Na expressão acima a condição  $t \gg 1/\bar{\omega}$  desempenha um papel importante nos dois últimos termos, devido às dificuldades de avaliar exatamente a integral na Eq. (4.45) ao longo do eixo imaginário usando o teorema de Cauchy. O primeiro termo vem do resíduo em  $\Omega = \tilde{\omega} + i\frac{\pi g}{2}$  e será o mesmo se nós fizermos um cálculo exato. Se nós consideramos na Eq. (4.45) que  $g \ll \bar{\omega}$ , o que corresponde na teoria eletromagnética ao fato de que a constante de estrutura fina é pequena quando comparada com a unidade, obtemos a conhecida lei perturbativa de decaimento exponencial para o átomo,

$$|f^{00}(t)|^2 \approx e^{-\pi g t}. \quad (4.46)$$

# Capítulo 5

## O processo de radiação em cavidades pequenas

### 5.1 O espectro das auto-freqüências em uma microcavidade ( $R \ll \frac{c}{g}$ )

Consideramos nesta secção o átomo localizado no centro de uma cavidade pequena, por exemplo, que satisfaça à condição que seu raio seja muito pequeno quando comparado com o comprimento de coerência,  $R \ll c/g = L$ . Para obter o espectro das autofreqüências, resolvemos numericamente a eq. (2.41), ver fig.5.1. Assim, podemos ver que para o caso de uma cavidade pequena de raio  $R \ll L$ , quase todas as suas soluções estarão muito perto dos valores das freqüências correspondentes às assíntotas da curva  $\cot(\frac{R\Omega}{c})$ , que correspondem aos modos armônicos do campo  $\omega_k = k\pi c/R$ . Vemos que a primeira solução se encontra mais afastada da assíntota do que as outras soluções, mas à medida que o valor de  $k$  cresce, as soluções vão se encontrando cada vez mais perto das suas assíntotas respectivas. A primeira solução corresponde a  $\Omega_0$ . Por exemplo, para uma microcavidade de raio  $R$  da ordem de  $10^{-2}m$  e  $\bar{\omega} \sim 10^{10}/s$ , só a primeira autofreqüência  $\Omega_0$  é significativamente diferente da freqüência armônica do campo correspondendo à primeira assíntota, ver (fig.5.1), todas as outras autofreqüências  $\Omega_k, k = 1, 2, \dots$  estando muito próximas dos mo-

dos do campo  $\omega_k = k\pi c/R$ . Para valores maiores de  $\bar{\omega}$  correspondentes menores valores de  $R$ , a diferença entre as autofrequências e as frequências dos modos harmônicos do campo continuam sendo muito pequenas.

Então, para obter a solução da Eq. (2.39) para as autofrequências maiores nós expandimos a função  $\cot(\frac{R\Omega}{c})$  ao redor dos valores correspondentes das assíntotas. Nós escrevemos,

$$\Omega_k = \frac{\pi c}{R}(k + \epsilon_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

com  $0 < \epsilon_k < 1$ , satisfazendo à equação,

$$\cot(\pi\epsilon_k) = \frac{c}{gR}(k + \epsilon_k) + \frac{1}{(k + \epsilon_k)}\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2 R}{\pi g c}\right). \quad (5.2)$$

Nesta equação podemos expandir em série de potências a função  $\cot(\pi\epsilon_k)$ , considerando a expansão até a primeira ordem em  $\epsilon_k$ , posto que  $\epsilon_k \ll 1$ ,

$$\cot \pi\epsilon_k = \frac{\cos \pi\epsilon_k}{\sin \pi\epsilon_k} = \frac{1 + \dots}{\pi\epsilon_k + \dots} \approx \frac{c}{gR}k + \frac{1}{\pi k}\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2 R}{\pi g c}\right). \quad (5.3)$$

de onde encontramos que,

$$\epsilon_k = \frac{\pi g c R k}{\pi^2 c^2 k^2 + \pi g c R - \bar{\omega}^2 R^2} \quad (5.4)$$

Levando em conta a condição  $R \ll c/g$  a expressão para  $\epsilon_k$  fica,

$$\epsilon_k = \frac{\pi g c R k}{\pi^2 c^2 k^2 - \bar{\omega}^2 R^2}. \quad (5.5)$$

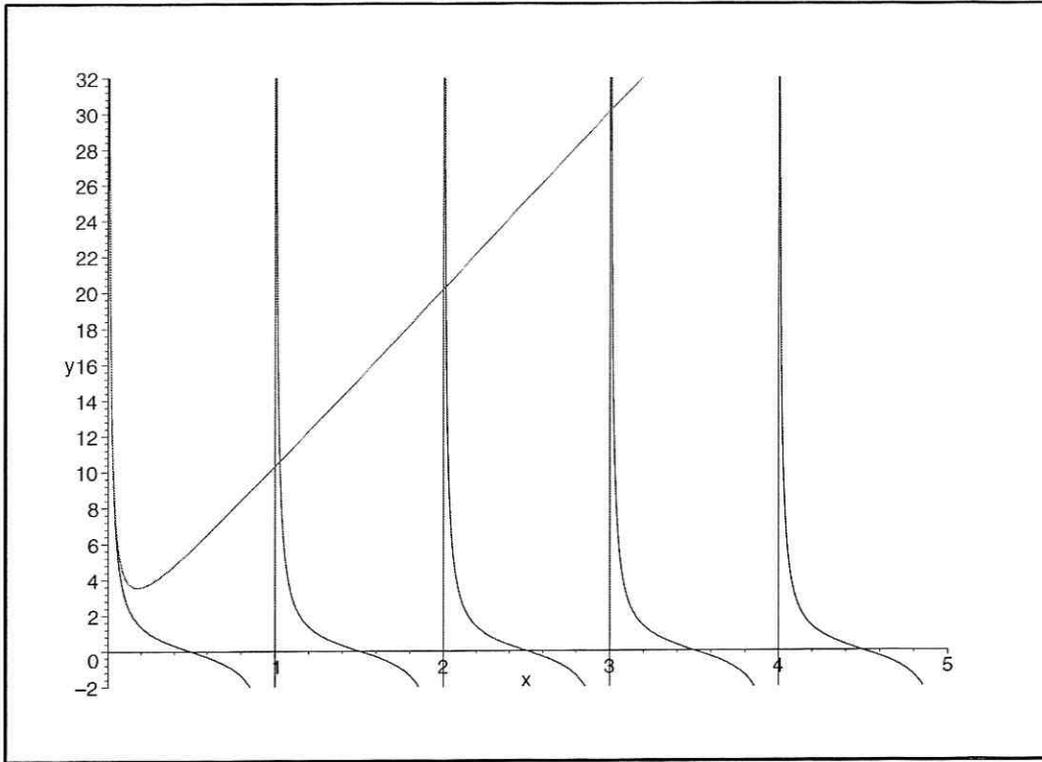


Figura 5.1: Solução numérica da Eq.(2.41), onde  $x = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ , na aproximação  $\frac{c}{gR} \gg 1$ .

As equações (5.1) e (5.5) dão as soluções aproximadas para as autofreqüências  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Para resolver a equação (2.41) em relação à autofreqüência mais baixa  $\Omega_0$ , nós supomos que  $\Omega_0 R/c \ll 1$  (ver fig.5.1), e fazemos esta condição ser compatível com a condição de uma microcavidade definida acima. Então, introduzindo a condição  $\Omega_0 R/c \ll 1$  na equação (2.39) e desprezando os termos de ordem maior que os quadráticos procedemos à expansão

$$\frac{1 - \left(\frac{\Omega_0 R}{c}\right)^2 + \dots}{\frac{\Omega_0 R}{c} + \dots} = \frac{\Omega_0}{g\pi} + \frac{c}{R\Omega_0} \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2 R}{gc\pi}\right), \quad (5.6)$$

de onde encontramos a expressão aproximada para  $\Omega_0$ ,

$$\Omega_0 = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{1 + \frac{\pi g R}{c}}} . \quad (5.7)$$

Combinando a eq. (5.7) e a condição  $\Omega_0 R/c \ll 1$ , podemos encontrar uma nova condição para o raio da cavidade, ou seja,

$$\frac{\Omega_0 R}{c} = \frac{\bar{\omega} R}{c \sqrt{1 + \frac{\pi g R}{c}}} \ll 1 . \quad (5.8)$$

Temos então que,

$$R^2 \bar{\omega}^2 - \pi g c R - c^2 \ll 0 , \quad (5.9)$$

de onde encontramos a solução positiva para  $R$ ,

$$R \ll \frac{c \pi}{g} \left( \frac{g}{\bar{\omega}} \right)^2 \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{g} \right)^2} \right] . \quad (5.10)$$

Por outro lado, usando a Eq. (5.1) encontramos que,

$$\frac{\Omega_k^2 R^2}{c^2} \approx k^2 \pi^2 \gg 1 , \quad (5.11)$$

e também, usando a Eq. (5.8) e tendo em consideração que  $\frac{\pi g R}{c} \ll 1$  encontramos que,

$$\frac{\bar{\omega}^2 R^2}{c^2} \ll 1 . \quad (5.12)$$

## 5.2 A distribuição das energias

Vamos definir a constante de acoplamento  $g$  pela condição  $g = \alpha \bar{\omega}$ , onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina,  $\alpha = 1/137$ . Então o fator multiplicativo  $c/g$  na Eq. (5.10) é  $\sim 0.07$  e a condição  $R \ll c/g$  é substituída pela mais restrita condição  $R \ll 0.07(c/g)$ . Assim, por exemplo, para uma frequência típica no infravermelho, com  $\bar{\omega} \sim 2,0 \times 10^{11}/s$ , nossos cálculos serão válidos para raios  $R \ll 10^{-3}m$ .

Da equação (2.51) e fazendo uso das expressões encontradas para as autofrequencias na microcavidade, nós podemos obter a distribuição de probabilidade,

$$(t_0^0)^2 = \frac{\Omega_0^2}{\frac{R}{2\pi gc}(\Omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2}(3\Omega_0^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{\pi g R}{2c}\Omega_0^2}. \quad (5.13)$$

Usando a aproximação  $\Omega_0^2 \approx \bar{\omega}^2$  dada pela Eq. (5.7), temos que

$$(t_0^0)^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi g R}{2c}}, \quad (5.14)$$

ou seja,

$$(t_0^0)^2 \approx 1 - \frac{\pi g R}{2c}. \quad (5.15)$$

Da Eq. (5.15), vemos que o segundo termo é muito menor que a unidade, concluindo-se neste caso, que quasi a totalidade da energia do modo  $\Omega_0$ , se encontra no oscilador vestido.

De outro lado, encontramos também os elementos de matriz  $(t_0^k)^2$ , que é.

$$(t_0^k)^2 = \frac{\Omega_k^2}{\frac{R}{2\pi gc}(\Omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2}(3\Omega_k^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{\pi g R}{2c}\Omega_k^2}, \quad (5.16)$$

que, utilizando (5.11) e (5.12) pode ser simplificada,

$$(t_0^k)^2 = \frac{\Omega_k^2}{\frac{R}{2\pi g R}\Omega_k^4 + \frac{3}{2}\Omega_k^2 + \frac{\pi g R}{2c}\Omega_k^2}. \quad (5.17)$$

Simplificando ainda mais e introduzindo o valor de  $\Omega_k$  sem o termo corretivo  $\epsilon_k$  e em seguida fazendo a aproximação  $(\pi c k^2 / g R) \gg 3/2 \gg (\pi g R / c)$  na eq.(5.17), encontramos finalmente que,

$$(t_0^k)^2 \approx \frac{2gR}{\pi c k^2}. \quad (5.18)$$

Para obter este último resultado nós não utilizamos o termo corretivo  $\epsilon_k$  da solução para os  $\Omega_k$ . Não obstante, a correção será incluída quando se procure obter os elementos da matriz  $(t_k^k)$ , evitando singularidades espúrias devidas à nossa aproximação.

### 5.3 O proceso da radiação em pequenas cavidades

Da mesma forma que para o caso em que o raio da cavidade  $R \rightarrow \infty$ , nós consideramos que o átomo vestido se encontra inicialmente no primeiro estado excitado. Então da equação (4.43) e (4.40) nós podemos encontrar a probabilidade de que o átomo ainda esteja neste estado excitado depois de um tempo  $t$ ,

$$|f^{00}(t)|^2 = \sum_s \sum_r (t_0^s)^2 (t_0^r)^2 e^{-i(\Omega_s + \Omega_r)t} \quad (5.19)$$

ou,

$$|f^{00}(t)|^2 = ((t_0^0)^2 e^{-i\Omega_0 t} + (t_0^1)^2 e^{-i\Omega_1 t} + \dots)((t_0^0)^2 e^{-i\Omega_0 t} + (t_0^1)^2 e^{-i\Omega_1 t} + \dots). \quad (5.20)$$

Reagrupando os termos, a equação (5.20) fica expressa como

$$|f^{00}(t)|^2 = (t_0^0)^4 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (t_0^0)^2 (t_0^k)^2 \cos(\Omega_k - \Omega_0)t + \sum_{k,l=1}^{\infty} (t_0^k)^2 (t_0^l)^2 \cos(\Omega_k - \Omega_l)t. \quad (5.21)$$

Fazendo uso das equações (3.23) e (3.24), nós obtemos que

$$|f^{00}(t)|^2 = 1 - \pi\delta + 4\left(\frac{\delta}{\pi} - \delta^2\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(\Omega_k - \Omega_0)t + \pi^2\delta^2 + \frac{4}{\pi^2}\delta^2 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 l^2} \cos(\Omega_k - \Omega_l)t, \quad (5.22)$$

onde introduzimos o parâmetro adimensional  $\delta = Rg/c \ll 1$ , o qual corresponde a uma cavidade muito pequena, e também lembramos que as autofrequências são dadas pelas equações (5.1) e (5.5). Com o passar do tempo, a probabilidade de que o átomo esteja excitado alcança periodicamente um valor mínimo dado por,

$$\text{Min}(|f^{00}(t)|^2) = 1 - \frac{5\pi}{3}\delta + \frac{14\pi^2}{9}\delta^2. \quad (5.23)$$

Para uma frequência da ordem de  $\bar{\omega} \approx 4.00 \times 10^{14}/s$  (luz visível vermelha), a qual corresponde a  $\delta \approx 0.01$  e  $R \approx 1.0 \times 10^{-6}m$ , nós vemos que a probabilidade de que o

átomo em um tempo  $t$  ainda se encontre no estado excitado é da ordem de 97% . Em outras palavras, os átomos que têm tal frequência de emissão, colocados em uma cavidade muito pequena no primeiro estado excitado, ficarão estáveis, por um tempo infinito, nesse primeiro estado excitado com uma probabilidade da ordem de 97% . Este resultado é muito interessante se nós comparamos com as observações experimentais em [23], [24], onde a estabilidade de átomos excitados com frequência de emissão no vermelho visível colocado entre duas placas paralelas separadas a uma distancia de  $L = 1.1 \times 10^{-6}m$  é encontrada.

# Capítulo 6

## Conclusões e observações finais

### 6.1 Conclusões

- Foi estudado neste trabalho uma versão simplificada do sistema Átomo-Campo eletromagnético confinado numa cavidade, na aproximação do um oscilador mecânico linearmente acoplado a um campo escalar confinado dentro de uma cavidades esférica de raio arbitrario.

- Estudamos a distribuição da energia dos modos normais ( caso particular para o primeiro modo  $\Omega_0$ ) para diferentes valores da frequência  $\bar{\omega}$  para diferentes valores do raio da cavidade, observando-se que o comportamento de átomos confinados é muito diferente do caso livre.

- Usamos o conceito de estados vestidos introduzindo adequadamente certas coordenadas vestidas  $q'_0$  e  $q'_i$  associadas ao oscilador vestido e o campo vestido respectivamente, para estudar o processo da emissão do átomo numa cavidade e foi possível encontrar que: para o caso de cavidade muito grande (espaço livre) nossos resultados estão em concordancia com os resultados teóricos estabelecidos pela teoria de perturbações. Para sistemas atômicos confinados, recuperamos os resultados das observações experimentais, que estados excitados numa cavidade suficientemente pequena, são estáveis. Para a emissão

com frequência de luz vermelha nossos resultados concordam com resultados encontrados experimentalmente [23].

## 6.2 Observações

Para um estudo mais rigoroso utilizando o formalismo dos estados vestidos, devemos considerar a interação do átomo com o campo eletromagnético, onde os estados de polarização, as orientações do campo com respeito do momento dipolar e o efeito Casimir, são tomados em conta.

# Apêndice A

## A diagonalização da Hamiltoniana

Nós temos a seguinte Hamiltoniana,

$$H = \frac{1}{2} \left[ p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_0 q_k \right]. \quad (\text{A.1})$$

e queremos encontrar a sua forma diagonalizada,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2). \quad (\text{A.2})$$

Para isto, vamos efetuar a diagonalização através das seguintes transformações lineares,

$$q_\mu = \sum_r t_\mu^r Q_r, \quad (\text{A.3})$$

$$p_\mu = \sum_r t_\mu^r P_r \quad (\text{A.4})$$

onde os elementos de matriz  $T = (t_\mu^r)$ , com  $\mu = (0, k)$ ,  $k = 1, 2 \dots N$ ,  $r = 0, \dots N$ , obedecem às condições de ortonormalidade,

$$\sum_{r=1}^N t_\mu^r t_\nu^r = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\sum_{\mu=0}^N t_\mu^r t_\mu^s = \delta_{rs}. \quad (\text{A.6})$$

Introduzindo (A.3) e (A.4) na eq. (A.1), temos

$$H = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r,s} (t_0^r P_r)(t_0^s P_s) + \sum_{r,s} \omega_0^2 (t_0^r Q_r)(t_0^s Q_s) + \sum_{r,s} \sum_k \omega_k^2 (t_k^r Q_r)(t_k^s Q_s) - 2\eta \sum_{r,s} \sum_k \omega_k (t_0^r Q_r)(t_0^s Q_s) \right] \quad (\text{A.7})$$

e utilizando as condições de orto-normamalidade (A.5) e (A.6) na Eq. (A.7), obtemos que,

$$H = \frac{1}{2} \left[ \sum_r P_r^2 + \sum_{r,s} \left( \omega_0^2 t_0^r t_0^s + \sum_k (\omega_k t_k^r - 2\eta \omega_k t_0^r) t_k^s \right) Q_s Q_r \right], \quad (\text{A.8})$$

ou novamente reagrupando os termos em (A.8), temos,

$$H = \frac{1}{2} \left[ \sum_r P_r^2 + \sum_{r,s} \left( (\omega_0^2 t_0^s - \eta \sum_k \omega_k t_k^s) t_0^r + \sum_k (\omega_k^2 t_k^r - \eta \omega_k t_0^r) t_k^s \right) Q_r Q_s \right] \quad (\text{A.9})$$

Para conseguir que a Hamiltoniana em (A.9) tenha a expressão diagonal, é necessário que

$$\omega_0^2 t_0^s - \eta \sum_k \omega_k t_k^s = \Omega_r \Omega_r \delta_{rs} t_0^s \quad (\text{A.10})$$

e

$$\omega_k^2 t_k^r - \eta \omega_k t_0^r = \Omega_r \Omega_s \delta_{rs} t_k^r. \quad (\text{A.11})$$

Tendo em conta a ortonormalidade das matrizes de transformação e as equações acima,

a eq (A.9) é reduzida a

$$H = \frac{1}{2} \left[ \sum_r P_r^2 + \sum_r \left( \Omega_r^2 (t_0^r)^2 + \sum_k \Omega_r^2 (t_k^r)^2 \right) Q_r^2 \right], \quad (\text{A.12})$$

ou, reagrupando termos, encontramos que,

$$H = \frac{1}{2} \left[ \sum_r P_r^2 + \sum_r \Omega_r^2 Q_r^2 \sum_\mu (t_\mu^r)^2 \right]. \quad (\text{A.13})$$

Utilizando uma vez mais a ortonormalidade das matrizes de transformação, encontramos

finalmente a forma diagonal da hamiltoniana, que é,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2). \quad (\text{A.14})$$

Da eq (A.11), temos que

$$\omega_k^2 t_k^r - \eta \omega_k t_0^r = \Omega_r^2 t_0^r, \quad (\text{A.15})$$

$$t_k^r = \frac{\eta \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r. \quad (\text{A.16})$$

Deste resultado podemos calcular o elemento  $(t_0^r)$  efetuando algumas operações algébricas simples,

$$\sum_k (t_k^r)^2 + (t_0^r)^2 = \sum_k \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} (t_0^r)^2 + (t_0^r)^2, \quad (\text{A.17})$$

onde, aplicando a condição de normalização, encontramos

$$t_0^r = \left[ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.18})$$

Por outro lado, da Eq. (A.11), temos que

$$\omega_0^2 t_0^r - \eta \sum_k \omega_k t_k^r = \Omega_r^2 t_0^r, \quad (\text{A.19})$$

$$\Omega_r^2 = \omega_0 - \eta \frac{\sum_k \omega_k t_k^r}{t_0^r}, \quad (\text{A.20})$$

e introduzindo o valor de  $t_k^r$  e fazendo as simplificações na eq (A.20), obtemos a equação para as autofreqüências

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \sum_k \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_r^2}. \quad (\text{A.21})$$

# Apêndice B

## Distribuição da energia das vibrações

Temos o Hamiltoniano para o oscilador acoplado linearmente a um campo escalar, dado por,

$$H = \frac{1}{2} \left[ p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) - 2 \sum_{k=1}^N \eta \omega_k q_0 q_k \right]. \quad (\text{B.1})$$

Então vamos modificar cada um de seus termos utilizando as transformações lineares, as mesmas utilizadas no Apêndice A obtemos,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r,s} (t_0^r t_0^s P_r P_s + \omega_0 t_0^r t_0^s Q_r Q_s) - \eta \sum_k \sum_{r,s} t_0^r t_0^s \omega_k Q_r Q_s + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{r,s} (t_k^r t_k^s P_r P_s + \omega_k^2 t_k^r t_k^s Q_r Q_s). \quad (\text{B.2})$$

Vamos supor que o sistema, uma vez excitado, se encontra no estado cuja frequência normal é  $\Omega_N$ . Então, nosso sistema será descrito por uma autofunção normalizada, que em coordenadas normais é escrita como

$$\Psi_1(Q) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q) \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\Gamma_0(Q) = e^{-\sum_s \frac{\Omega_s Q_s}{2\hbar} - \frac{1}{4} \sum_s L_n \frac{\omega_s}{\pi \hbar}} \quad (\text{B.4})$$

é a auto-função normalizada do vácuo e

$$H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_n}{\hbar}} Q_N \right) = 2 \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \quad (\text{B.5})$$

é o polinômio de Hermite de ordem 1. Em seguida vamos calcular os valores médios dos termos cruzados  $Q_r Q_s$  e  $P_r P_s$  no Hamiltoniano, em dito estado excitado; utilizando a representação de coordenadas  $Q = Q$  e  $P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q}$ , procedemos a calcular.

$$\langle P_n P_m \rangle = \int dQ \Phi_1^*(Q) (P_n P_m) \Phi_1(Q), \quad (\text{B.6})$$

ou,

$$\langle P_n P_m \rangle = \frac{1}{2} \int dQ H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q) \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial Q_n} \frac{\partial}{\partial Q_m} \right) H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q). \quad (\text{B.7})$$

Fazendo as derivadas respectivas sobre as coordenadas  $Q_n$  e  $Q_m$ , obtemos,

$$\langle P_n P_m \rangle = -\frac{\hbar^2}{2} \int dQ \left[ H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q) \right]^2 \frac{\Omega_n Q_n}{\hbar} \frac{\Omega_m Q_m}{\hbar}. \quad (\text{B.8})$$

Transformando a integral (B.8) em termos da função do vácuo (B.4) e dos polinômios de Hermite (B.5), e tendo em conta que  $dQ = dQ_0 dQ_1 \dots dQ_n \dots dQ_m \dots dQ_N \dots$ , calculamos as integrais para todas as coordenadas normais desde  $-\infty$  até  $\infty$ . Temos,

$$\langle P_n P_m \rangle = -2\hbar \left( \dots 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dQ_n \frac{\Omega_n Q_n}{\hbar} e^{-\frac{\Omega_n Q_n^2}{\hbar}} \dots 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dQ_m \frac{\Omega_m Q_m}{\hbar} e^{-\frac{\Omega_m Q_m^2}{\hbar}} \dots \right), \quad (\text{B.9})$$

onde somente temos escrito as integrais para as coordenadas normais  $Q_n$  e  $Q_m$ , posto que elas se anulam. Então, de (B.9) obtemos,

$$\langle P_n P_m \rangle = 0, \quad n \neq m. \quad (\text{B.10})$$

De igual maneira calculamos,

$$\langle Q_n Q_m \rangle = \frac{1}{2} \int dQ H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q) (Q_n Q_m) H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q). \quad (\text{B.11})$$

Como no caso anterior, ao calcular a integral (B.11) sobre todas as coordenadas normais, aparecerão integrais de funções ímpares as quais dão o valor zero. Então temos que,

$$\langle Q_n Q_m \rangle = 0, \quad n \neq m. \quad (\text{B.12})$$

Por outro lado, podemos também calcular os valores médios  $\langle P_r^2 \rangle$ ,  $\langle P_N^2 \rangle$ ,  $\langle Q_r^2 \rangle$  e  $\langle Q_N^2 \rangle$ . Assim,

$$\langle P_r^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2} \int dQ H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q) \left( \frac{\partial^2}{\partial Q_r^2} \right) H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q), \quad (\text{B.13})$$

ou,

$$\langle P_r^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \int dQ H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q) \left( \frac{\Omega_r}{\hbar} - \frac{\Omega_r^2 Q_r^2}{\hbar^2} \right) H_1 \left( \sqrt{\frac{\Omega_r}{\hbar}} Q_N \right) \Gamma_0(Q), \quad (\text{B.14})$$

de onde ao calcular a integral para cada uma das coordenadas normais resulta,

$$\langle P_r^2 \rangle = \frac{\hbar \Omega_r}{2}. \quad (\text{B.15})$$

De igual maneira calculamos o valor medio  $\langle P_N^2 \rangle$  o que resulta,

$$\langle P_N^2 \rangle = \frac{3\hbar \Omega_N}{2}. \quad (\text{B.16})$$

Por outro lado, ao calcular os valores  $\langle Q_r^2 \rangle$  e  $\langle Q_N^2 \rangle$  só tomamos em conta a integral da variável normal envolvida, posto que pela ortonormalidade dos polinômios de Hermite, elas dão o valor da unidade. Assim temos que,

$$\langle Q_r^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Omega_r}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \int dQ_r e^{-\frac{\Omega_r Q_r^2}{\hbar}}. \quad (\text{B.17})$$

Como a função a integrar na Eq. (B.17) é de uma função simétrica em relação à origem, podemos então, calcular a integral de zero a infinito e multiplicar por dois o valor obtido. A integral da Eq. (B.17) é conhecida, resultando:

$$\langle Q_r^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\Omega_r}. \quad (\text{B.18})$$

De igual maneira calculamos o valor  $\langle Q_N^2 \rangle$ :

$$\langle Q_N^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Omega_N}{\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} \int dQ_N Q_N^4 e^{-\frac{\Omega_N Q_N^2}{\hbar}}, \quad (\text{B.19})$$

com o mesmo método do caso anterior, e encontramos:

$$\langle Q_N^2 \rangle = \frac{3 \hbar}{2 Q_N}. \quad (\text{B.20})$$

Assim, o Hamiltoniano (B.2) pode ser escrito como,

$$H = \langle H \rangle = \frac{1}{2} \left( \sum_r^N (t_0^r)^2 \langle P_r^2 \rangle + \omega_0^2 \sum_r^N (t_0^r)^2 \langle Q_r^2 \rangle \right) - \eta \sum_{k,r}^N t_0^r t_k^r \langle Q_r^2 \rangle + \frac{1}{2} \left( \sum_{k,r}^N (t_k^r)^2 \langle P_r^2 \rangle + \sum_{k,r}^N \omega_k^2 (t_k^r)^2 \langle Q_r^2 \rangle \right) \quad (\text{B.21})$$

De outro lado tínhamos encontrado que

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2). \quad (\text{B.22})$$

Se em (B.21) e (B.22) somente consideramos a contribuição do modo  $\Omega_N$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle P_N^2 + \Omega_N^2 Q_N^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left[ (t_0^N)^2 + \frac{\omega_0^2 (t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \right] - \left( \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \sum_k^N \frac{\eta \omega_k (t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \left( \frac{\eta \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_N^2} \right) + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left[ \sum_k^N (t_k^N)^2 + \sum_k^N (t_0^N)^2 \frac{\eta^2 \omega_k^2}{\Omega_N^2 (\omega_k^2 - \Omega_N^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

introduzindo o valor de  $\omega_0^2$  obtido de (A.21) no segundo termo da Eq. (B.23), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle P_N^2 + \Omega_N^2 Q_N^2 \rangle &= \frac{3}{4} \hbar \Omega_N \left[ (t_0^N)^2 + \left( \sum_k^N \frac{\eta^2 \omega_k^2}{\omega_k^2 - \Omega_N^2} + \Omega_N^2 \right) \frac{(t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \right] - \\ &\frac{3}{2} \hbar \Omega_N \sum_k^N \frac{\omega_k (t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \left( \frac{\eta^2 \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_N^2} \right) + \frac{3}{4} \hbar \Omega_N \left[ \sum_k^N (t_k^N)^2 + \sum_k^N (t_0^N)^2 \frac{\eta^2 \omega_k^2}{\Omega_N^2 (\omega_k^2 - \Omega_N^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Fazendo as manipulações algébricas necessárias no último termo da Eq.(B.24), simplificando e reagrupando termos, obtemos

$$\frac{1}{2} \langle P_N^2 + \Omega_N^2 Q_N^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar \Omega_N (t_0^N)^2 + \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \sum_k^N (t_k^N)^2 \quad (\text{B.25})$$

o que pode ser escrito como

$$\frac{1}{2} \langle P_N^2 + \Omega_N^2 Q_N^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \left[ (t_0^N)^2 + \sum_{k=1}^N (t_k^N)^2 \right]. \quad (\text{B.26})$$

Da mesma maneira podemos calcular para  $r \neq N$ , de onde encontramos que

$$\frac{1}{2} \langle P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \Omega_r \left[ (t_0^r)^2 + \sum_k (t_k^r)^2 \right]. \quad (\text{B.27})$$

Como havíamos suposto que o nosso sistema excitado se encontra num estado quântico de frequência  $\Omega_N$ , então a Eq.(B.27) representa a distribuição de energia do vácuo que se acopla ao sistema com o mesmo tipo de distribuição. Então para encontrar a energia de excitação no modo  $\Omega_N$  temos que subtrair dita distribuição do vácuo (??) e obtemos a distribuição da energia para o modo  $N$  que é dado por

$$E_N = \hbar \Omega_N \left[ (t_0^N)^2 + \sum_k (t_k^N)^2 \right]. \quad (\text{B.28})$$

# Apêndice C

## Cálculo da integral (4.44)

Vamos a calcular a integral da Eq. (4.44)

$$f^{00}(t) = \int_0^\infty \frac{2g\Omega^2 e^{-i\Omega t}}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega \quad (\text{C.1})$$

fazendo

$$F(\Omega) = \frac{2g\Omega^2 e^{-i\Omega t}}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} \quad (\text{C.2})$$

ou

$$F(\Omega) = \frac{2g\Omega^2 e^{-i\Omega t}}{(\Omega - \bar{\omega} + i\frac{\pi g}{2})(\Omega - \bar{\omega} - i\frac{\pi g}{2})(\Omega + \bar{\omega} + i\frac{\pi g}{2})(\Omega + \bar{\omega} - i\frac{\pi g}{2})} \quad (\text{C.3})$$

onde vemos que existem quatro polos simples dados por

$$\Omega_{1,2} = -i\frac{\pi g}{2} \pm \tilde{\omega} , \quad (\text{C.4})$$

$$\Omega_{3,4} = i\frac{\pi g}{2} \pm \tilde{\omega} , \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\bar{\omega}^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}} . \quad (\text{C.6})$$

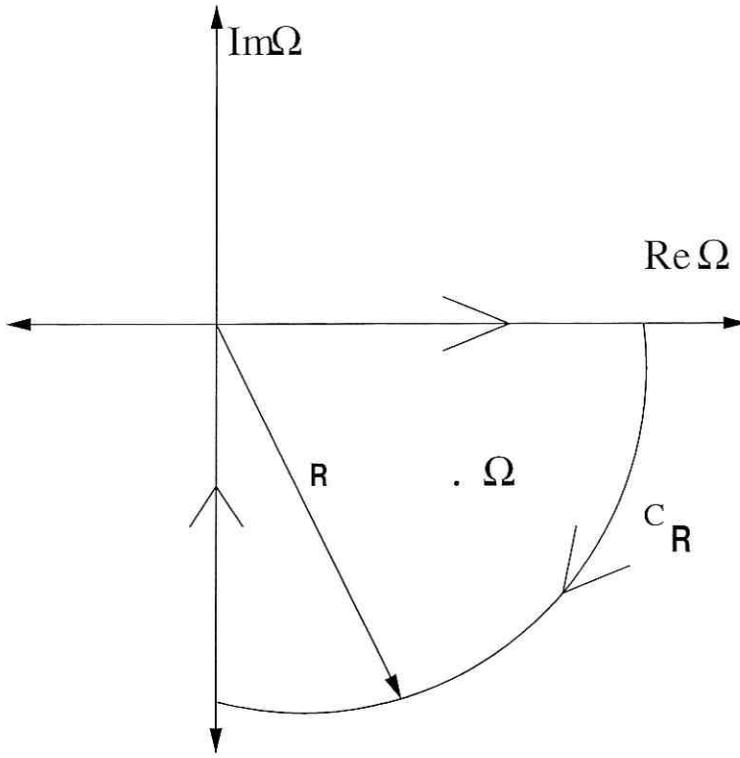


Figura C.1:

A integral (C.1) pode ser calculada fazendo uso do teorema do resíduo. Como os limites da nossa integral são de 0 até  $\infty$ , e analisando o fator exponencial nos polos, vemos que ela não diverge no o polo  $\Omega = \tilde{\omega} - i\frac{\pi g}{4}$ . Então nossa integral so vai ser calculada utilizando o contorno no quarto quadrante do plano complexo, onde dito polo se encontra. O contorno de integração se mostra na Fig.C.1. Temos então que,

$$\int_C F(\Omega)d\Omega = \int_{-\infty}^0 \frac{2g(-iy)^2 e^{yt}}{((-iy)^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 (-iy)^2} (-idy) + \int_0^{\infty} F(\Omega)d\Omega + \int_{C_R} F(\Omega)d\Omega , \tag{C.7}$$

donde obtemos,

$$\int_0^{\infty} F(\Omega)d\Omega = \int_C F(\Omega)d\Omega - \int_{-\infty}^0 \frac{2g(-iy)^2 e^{yt}}{((-iy)^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 (-iy)^2} (-idy) - \int_{C_R} F(\Omega)d\Omega . \tag{C.8}$$

Pelo teorema de residuo obtemos

$$\int_C F(\Omega) d\Omega = (1 - i \frac{\pi g}{2\bar{\omega}}) e^{-i(\bar{\omega} - i \frac{\pi g}{2})t} . \quad (C.9)$$

Calculando o segundo termo de (C.8) como

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{2g(-iy)^2 e^{yt}}{((-iy)^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 (-iy)^2} (-idy) \quad (C.10)$$

e fazendo a seguinte mudança de variavel,  $y \rightarrow -x$ , temos

$$I = 2gi \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-xt}}{(x^2 + \bar{\omega}^2)^2 - \pi^2 g^2 x^2} dx , \quad (C.11)$$

onde o fator  $e^{-xt}$  é uma função de  $x$  com parametro  $t$  com  $x > 0$  e  $t > 0$ , o qual converge a partir de  $t \approx \frac{1}{x}$  isto quer dizer que podemos fazer  $x$  bem pequena de tal forma que  $x \ll \bar{\omega}$  o que implica que a integral (C.10) converge na aproximação  $t \gg \frac{1}{\bar{\omega}}$ . Assim temos que a integral fica aproximada a

$$I = 2gi \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-xt}}{\bar{\omega}^4} dx . \quad (C.12)$$

Esta integral (C.12) pode ser escrita como

$$I = \frac{2gi}{\bar{\omega}^4} \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_0^{\infty} e^{-xt} dx \right) \quad (C.13)$$

calculando o fator integral temos,

$$I = \frac{2gi}{\bar{\omega}^4} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{t} \right) , \quad (C.14)$$

onde fazendo a doble derivação obtemos que,

$$I = \frac{4gi}{\bar{\omega}^4 t^3} . \quad (C.15)$$

Para calcular o terceiro termo de (C.8) fazemos  $\Omega = Re^{i\theta}$ , então temos que

$$\int_{C_R} F(\Omega) d\Omega = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{2igR^3 e^{3i\theta} e^{-itR\cos\theta + i\sin\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 R^2 e^{2i\theta}} \quad (C.16)$$

A integral (C.16) tende ao valor zero quando  $R \rightarrow \infty$ , ou seja

$$\int_{C_R} F(\Omega) d\Omega = 0. \quad (\text{C.17})$$

Substituindo (C.9), (C.15) e (C.17) em (C.8), encontramos que

$$\int_0^\infty F(\Omega) d\Omega = \left(1 - i\frac{\pi g}{2\tilde{\omega}}\right) e^{-i(\tilde{\omega} - i\frac{\pi g}{2})t} + \frac{4gi}{\tilde{\omega}^4 t^3}. \quad (\text{C.18})$$

Onde finalmente encontramos que,

$$f^{00}(t) = \left(1 - i\frac{\pi g}{2\tilde{\omega}}\right) e^{-i(\tilde{\omega} - i\frac{\pi g}{2})t} + \frac{4gi}{\tilde{\omega}^4 t^3}. \quad (\text{C.19})$$

Agora procedemos a calcular  $|f^{00}(t)|^2$ . Temos:

$$|f^{00}(t)|^2 = \left[ \left(1 - i\frac{\pi g}{2\tilde{\omega}}\right) e^{-i(\tilde{\omega} - i\frac{\pi g}{2})t} + \frac{4gi}{\tilde{\omega}^4 t^3} \right] \left[ \left(1 + i\frac{\pi g}{2\tilde{\omega}}\right) e^{i(\tilde{\omega} + i\frac{\pi g}{2})t} - \frac{4gi}{\tilde{\omega}^4 t^3} \right]. \quad (\text{C.20})$$

Fazendo as multiplicações respeitivas e reagrupando termos obtemos,

$$|f^{00}(t)|^2 = \left(1 + \frac{\pi^2 g^2}{4\tilde{\omega}^2}\right) e^{-\pi g t} - \frac{8gie^{-\frac{\pi g t}{2}}}{\tilde{\omega}^4 t^3} \left(\frac{e^{i\tilde{\omega} t} - e^{-i\tilde{\omega} t}}{2i}\right) - \frac{4g^2 \pi e^{-\frac{\pi g t}{2}}}{\tilde{\omega} \tilde{\omega}^4 t^3} \left(\frac{e^{i\tilde{\omega} t} + e^{-i\tilde{\omega} t}}{2}\right) + \frac{16g^2}{\tilde{\omega}^8 t^6}, \quad (\text{C.21})$$

ou

$$|f^{00}(t)|^2 = \left(1 + \frac{\pi^2 g^2}{4\tilde{\omega}^2}\right) e^{-\pi g t} - \frac{8gie^{-\frac{\pi g t}{2}}}{\tilde{\omega}^4 t^3} \sin \tilde{\omega} t - \frac{4g^2 \pi e^{-\frac{\pi g t}{2}}}{\tilde{\omega} \tilde{\omega}^4 t^3} \cos \tilde{\omega} t + \frac{16g^2}{\tilde{\omega}^8 t^6}, \quad (\text{C.22})$$

donde obtemos

$$|f^{00}(t)|^2 = \left(1 + \frac{\pi^2 g^2}{4\tilde{\omega}^4}\right) e^{-\pi g t} - \frac{8g}{\tilde{\omega}^4 t^3} e^{-\frac{\pi g t}{2}} (\sin \tilde{\omega} t + \frac{\pi g}{2\tilde{\omega}} \cos \tilde{\omega} t) + \frac{16g^2}{\tilde{\omega}^8 t^6}. \quad (\text{C.23})$$

# Referências

- [1] J. Glimm, A.Jaffe, Quatum Physics, a Functional Integral Point of View, Springer-Verlag-Berling, 2nd. ed. 1987.
- [2] B. Kahn and G.E.Uhlenbeck, Physica, 5, 399 (1938).
- [3] C. de Calan, P. A. Faria de Veiga, J. Magnen, R. Sénéor, Phys. Lett, 66, 3233 (1991)
- [4] Hagihara, Yusuke, Celestial Mechanics, vol. 2, parts 1 and 2, Perturbation Theory (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1972. (Chapter 11)) .
- [5] B. F. Hatfield, Quantum Field Theory of Point Particles and Strings, 1992
- [6] J. M. Winter, Ann. Phys. (Paris) 4, 745 (1959).
- [7] C.Cohen-Tannoudji, "Atoms in Electromagnetic Fields", World Scientific Publishing Co. (1994).
- [8] N. Polansky, Doctoral thesis, Escole Supérieure, Paris (1964).
- [9] S. Haroche, Doctoral thesis, Escole Normale Supérieure, Paris (1964).
- [10] C. Audoin, C. Cohen-Tannoudji, S. Haroche, J.P. Schermann, Phys. Rev. Lett., 24, 861 (1970).
- [11] C. Cohen-Tannoudji, S. Haroche, Phys. Rev. Lett., 24 974 (1970).

- [12] S. Haroche, S. Liberman, "Frontiers in Laser Spectroscopy", eds. R. Balian, North Holland, 1977, p. 1.
- [13] A. McLachlan, Proc. Royal Soc., London, Ser. a 271, 381 (1963).
- [14] W. Jhe, K. Jang, Phys. Rev. A53(2), 1126 (1996).
- [15] J.M.C. Malbouisson, B. Baseia, J. mod. Opt. 46, 2015 (1999).
- [16] L. Davidovitch, M. Brune, J.M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. A 53, 1295 (1996)
- [17] K.M. Fonseca-Romero, M.C. Nemes, J.G. Peixoto de Faria, A.N. Salgueiro, A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev. A 58, 3205 (1998).
- [18] E.M.Purcell, Phys. Rev. 69 (1946) 681.
- [19] N. Andion, A.P.C. Malbouisson, A. Mattos Neto, J. Phys. A-Math. Gen., 34,3735 (2001).
- [20] V.I Bykov, V.I. Tatarskii, Sov. Phys.Usp. 34, 167 (1997).
- [21] W. Thirring, F. Schwabl, Ergeb. Exakt. Naturw, 36,219 (1964).
- [22] G. Beck, Z. Phys. 42, 77 (1927).
- [23] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi, S. Haroche, Phys. Rev. Lett., 58, 666 (1987).
- [24] R. G. Hulet, E. S. Hifler, D. Kleppner, Phys. Rev. Lett., 55, 2137 (1985).
- [25] H. Ederly et al.; Higher Transcendental Functions, New York, Mc Graw-Hill (1953), p. 196, formula (4.16).

- [26] G. Flores-Hidalgo, A.P.C. Malbouisson, "Dressed States Approach to Quantum System", quantum-ph/025042.

# “Distribuição da energia de átomos excitados em cavidades”

Yony Walter Milla Gonzales

Tese apresentada no Centro Brasileiro de  
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca  
examinadora os seguintes Professores:

Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson – Presidente/CBPF

Basilio Baseia – UFGO

Itzhak Roditi – CBPF

Suplente: Francesco Toppan – CBPF

Rio de Janeiro 31 de outubro de 2002