

Tese de Doutorado

Simetrias Modulares e Localização Modular

em

Física Quântica Local

Lúcio Souza Fassarella

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

2002

Contents

0.1	Agradecimentos	vi
0.2	Resumo	vii
0.3	Prólogo	viii
0.4	Espaço-tempo, Notações e Convenções	1
1	Introdução	7
1.1	Campo Massivo Escalar Auto-dual Livre	7
1.2	Física Quântica Local	16
I	Física Quântica Local	19
2	Axiomas e Propriedades	21
3	Setores de Superseleção e Álgebra de Campos	31
4	Estrutura Modular da Física Quântica Local	39
4.1	Estrutura Modular da Representação de Vácuo	41
5	Teoria dos Campos Quantizados	47
5.1	Campos Quantizados Livres	53
II	Simetrias Modulares	57
6	Estrutura Modular e Simetrias	59
6.1	Covariância Modular e Simetria Espaço-Temporal	60
6.2	Estrutura Modular e Simetria de Gauge Global	63
6.2.1	A Abordagem de Wiesbrock	63
6.2.2	A Abordagem de Kawahigashi-Longo-Müger	65
7	Teorias Quirais Locais	67
7.1	O Grupo $Diff(S^1)$ o Grupo de Möbius e a Álgebra de Virasoro	68
7.2	Axiomas das Teorias Quirais	71

8	Pré-cofeixe CW	75
8.1	Teoria dos Setores de Superseleção	80
8.1.1	Representação Universal	82
8.2	Extensões Locais do Pré-cofeixe CW	83
9	A Origem Modular do Grupo de Simetria $Diff(S^1)$	91
10	Setores de Superseleção em Teorias Quirais	101
10.1	Álgebras de Multi-Intervalos em Teorias Quirais	101
10.1.1	O Caso do Pré-cofeixe CW e suas Extensões Locais	103
10.2	Cociclos Localizados em Teorias Quirais	104
10.2.1	O Caso do pré-cofeixe CW e suas Extensões Locais	106
III	Localização Modular	107
11	Localização Modular na Teoria Quântica Local	109
12	Estrutura Modular da Teoria de Wigner	113
12.1	Domínio e Ação dos Operadores de Tomita	127
12.1.1	Funções-de-Onda e Funções Teste	127
12.1.2	Ciclicidade dos Subespaços Modulares: Caso Escalar	130
12.1.3	Ciclicidade dos Subespaços Modulares: Casos padrão	134
12.1.4	Não Ciclicidade dos Subespaços Modulares nos Casos não-padrão?	136
IV	Métodos Construtivos Modulares	139
13	Construção Modular de Teorias Livres	141
14	Estrutura Modular e Interação	145
14.1	Operadores Modulares e Matriz- S	146
14.2	Geradores Livres de Polarização do Vácuo	149
14.3	Métodos Construtivos	150
14.3.1	O Método Modular Espacial	150
14.3.2	O Método Modular Holográfico	150
14.3.3	Método PFG	151
A	$SL(2, \mathbb{C})$ e Representações	161
A.1	Representações e Spinors	162
A.1.1	Representações Irredutíveis de $SL(2, \mathbb{C})$	163
A.1.2	Representações Unitárias Irredutíveis Padrão de \mathcal{P}_+^\uparrow	166
A.1.3	Representações Unitárias Irredutíveis Padrão de $\mathcal{P}_+^{\downarrow}$	167

B Teoria Modular	169
B.1 Teoria Modular de Tomita-Takesaki	169
B.1.1 Grupos Modulares e Cociclo-de-Connes	170
B.2 Teoria Modular Espacial de Rieffel-van Daele	171
B.2.1 Estrutura Simplética	171
B.2.2 Teoria Modular Espacial	173
Bibliografia	177

0.1 Agradecimentos

*Devo tantas coisas a tantas pessoas
a começar pela vida aos pais queridos
e a alegria de vivê-la aos amigos.
Mas esta tese devo ao prof. Bert Schroer,
a quem ela é sinceramente dedicada.*

Também agradeço ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) por fornecer as boas condições de estudo e pesquisa, a todos os colegas que contribuíram de alguma forma para que este trabalho fosse realizado, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro.

0.2 Resumo

Esta tese trata da *estrutura modular* da física quântica local, mostrando como ela pode ser usada na análise de propriedades gerais e na construção de modelos desta teoria. Especificamente:

- Focalizamos a origem modular da simetria espaço-temporal e das simetrias de gauge global em circunstâncias gerais e nos casos particulares das teorias quirais locais e das extensões locais dos modelos de correntes (álgebras de Weyl dos modelos de correntes abelianas sobre S^1);

- Definimos a *localização modular* de estados na teoria quântica local e na teoria de Wigner e deduzimos suas propriedades básicas.

- Discutimos o uso da teoria modular na construção de modelos de teoria quântica local e apresentamos três possíveis métodos construtivos, sendo um deles específico para o caso particular dos modelos integráveis massivos no espaço-tempo bidimensional.

Abstract

This thesis deals with the *modular structure* of local quantum physics, showing how it can be used to analyse general properties and to construct models of this theory. Specifically:

- We focus the modular origin of space-time symmetry and global gauge symmetries in general and also in the special cases of local chiral theories and local extensions of current models (the Weyl algebra of Abelian currents over S^1);

- We define the *modular localization* of states within local quantum theory and Wigner theory and we deduce its basic properties.

- We discuss the use of modular theory in the construction of models of local quantum physics and present three possible constructive methods, one specifically for the case of massive integrable models on the two-dimensional spacetime.

0.3 Prólogo

A Física tem conseguido compreender e descrever várias instâncias da realidade através de teorias que são ao mesmo tempo simples, precisas e belas. É importante notar que essas características referem-se a aspectos distintos das teorias: a *simplicidade* refere-se aos princípios fundamentais (sendo estes tanto mais simples quanto mais gerais e abrangentes forem); a *precisão* refere-se à concordância entre a descrição teórica e o fato experimental (algo considerado demarcador do que é uma teoria científica, e que tem sido verificado na descrição física desde escalas subatômicas até escalas cósmicas); mas a *beleza* refere-se tanto à teoria quanto aos próprios teóricos - é uma idéia subjetiva, dependente de fatores históricos e sociológicos - talvez não seja tão útil na prática quanto as outras noções mas é pelo menos tão importante, porque desperta o interesse e a inspiração do físico - talvez seja indefinível, mas assim mesmo vale uma tentativa (sem qualquer pretensão de ser original): *o belo nas teorias físicas é a harmonia que se percebe na descrição matemática do mundo.*¹

O tema, a motivação e a metodologia

Nesta tese discutiremos exclusivamente aspectos teóricos da física de partículas elementares no formalismo da *física quântica local*, também chamada de formulação algébrica da teoria quântica de campos. O motivo primordial para tanto é o próprio desejo de obter um entendimento teórico mais completo da física de partículas elementares, particularmente em vista da falta de abrangência e fundamentação conceitual e matemática por parte das teorias que atualmente descrevem essa categoria de fenômenos.

Atualmente, nossa compreensão dos fenômenos da física de altas energias é representada pelo *Modelo Padrão das Partículas Elementares*, baseado na *teoria de perturbação renormalizada*. É notável o sucesso dessa teoria totalmente fundamentada nos princípios da teoria quântica e da teoria da relatividade (especial), que consegue previsões teóricas compatíveis com os dados experimentais até ordem de grandeza 10^{-11} . Entretanto, a teoria perturbativa possui limitações intrínsecas quanto à sua aplicação na física de partículas e sua ampla utilização (talvez por ser intuitiva para muitos) ocorre apenas às custas da clareza conceitual e do rigor matemático; isso aliado à falta de conquistas recentes (todas as suas principais descobertas ocorreram antes do ano de 1975) talvez seja a razão para que a partir dessa abordagem surgissem tantas especulações fantásticas tidas por "teorias revolucionárias" mas sem qualquer corroboração empírica². O problema parece ser que *pela adoção de um formalismo matemático inadequado para exprimir princípios físicos entendidos como fundamentais, elabora-se artisticamente uma "teoria" que tem aparência científica mesmo sendo ambígua e obscura, e que fascina ao pretender explicar tudo*

¹A idéia de uma harmonia no universo tem acompanhado o desenvolvimento da ciência desde seus primórdios na era moderna, tendo encontrado destacada expressão em Kepler.

²Destaca-se aqui a *teoria das cordas e similares*, que mesmo sem ter gerado qualquer previsão teórica ou algum conhecimento novo além daquele referente a si própria, é por muitos considerada ser a própria "teoria de tudo".

*ainda que não consiga descrever nada.*³ Em contraste, podemos dizer que a física quântica local constitui-se numa formulação matemática axiomática absolutamente rigorosa dos princípios físicos da teoria quântica e da teoria da relatividade com a qual esperamos alcançar uma descrição tanto mais simples quanto mais ampla e completa dos fenômenos naturais.

É importante notar que os princípios físicos não são dogmas (verdades universais eternas) mas sim hipóteses bastante gerais sobre o comportamento da matéria (abstraídos de situações experimentais descritas por modelos fenomenológicos e semi-fenomenológicos, tais como a teoria de perturbação renormalizada); e os axiomas que definem tais princípios não constituem uma palavra final sobre os mesmos, mas sim uma formulação matemática tentativa, escolhida dentre as possíveis segundo nosso conhecimento e conveniência. Tendo esse ponto de vista, dificilmente somos levados a crer que a teoria física para explicar uma determinada categoria de fenômenos naturais deva ser de uma maneira e não de outra sem que realizemos uma devida comparação crítica, tal como indicamos superficialmente aqui.

A Física e a Matemática da Teoria Quântica Local

A escolha da teoria matemática sobre a qual definir a teoria física é tão fundamental quanto a própria abstração de princípios físicos gerais a partir das situações experimentais e modelos teóricos particulares. Realmente, estes dois procedimentos se entrelaçam porque o próprio “fato físico” é uma mistura dos dois: tanto a elaboração de modelos fenomenológicos que descrevam as situações experimentais requer um formalismo matemático preliminar, quanto a escolha desse formalismo matemático se assenta em pressupostos que já extrapolam as situações experimentais.⁴

De acordo com o formalismo geral da física quântica, a física quântica local é definida por axiomas sobre uma rede de álgebra de operadores indexada pelas regiões do espaço-tempo. Nesse caso, o objeto básico da teoria é a própria rede de álgebras locais e não meramente as álgebras locais que constituem a rede: a informação física da teoria está codificada nas relações de inclusão das álgebras locais, sendo que nada significa uma álgebra local considerada isoladamente⁵. Aqui, mesmo o espaço-tempo perde seu caráter fundamental desde que deixa de ser o “lugar” em que ocorrem os fenômenos físicos para ser apenas o ente que define a estrutura local da rede⁶. Isso não quer dizer que podemos descartar o espaço-tempo da teoria, pelo menos se pretendemos descrever partículas nos

³Esta situação parece-se com aquela da alquimia: está fundada numa linguagem poética e hermética que define a realidade e a verdade, por sua vez acessíveis somente aos próprios alquímicos.

⁴Por exemplo, o princípio da incerteza foi descoberto por Heisenberg a partir da teoria da transformação desenvolvida por Jordan e Dirac, e não por notar que são de certa maneira mutuamente exclusivos os dispositivos experimentais para medida de posição e velocidade de partículas atômicas. De fato, ele diz ter sido inspirado pela observação de Einstein de que “é a teoria que decide o que pode ser observado” [93].

⁵De fato, sob certas circunstâncias gerais todas as álgebras locais são isomorfas entre si - ao único, módulo isomorfismo, fator hiperfinito do tipo III₁.

⁶De fato, há generalizações da teoria quântica local sem que haja um espaço-tempo sub-

termos da *teoria do espalhamento*, mas deixa claro que a teoria das inclusões de álgebras (de von Neumann) revela-se essencial para a análise das propriedades estruturais das teorias quânticas locais. De fato, encontramos aqui três tipos básicos de inclusões de álgebras de von Neumann: *inclusões canônicas*, *inclusões modulares* e *inclusões cindidas* (ou seja, com a propriedade de cisão).

A Estrutura Modular da Teoria Quântica Local

Esta tese focaliza a estrutura modular da teoria quântica local. Esta estrutura aparece em duas circunstâncias distintas da teoria: por um lado ela define uma propriedade característica do setor de vácuo, chamada de *covariância modular*, e por outro ela define os estados de equilíbrio termodinâmicos, via *propriedade KMS*. Não é então surpreendente que a estrutura modular revele que as restrições de estados para álgebras locais apresentem propriedades térmicas; mas é particularmente intrigante que a restrição do estado de vácuo para as álgebras de regiões *tipo cunha* revele uma analogia com a termodinâmica dos buracos negros, via efeito Hawking-Unruh.

A estrutura modular da teoria quântica local nos fornece meios para analisar as propriedades da rede de álgebras locais, tais como suas simetrias. Dizemos que uma *simetria tem origem modular* quando ela pode ser obtida diretamente a partir da estrutura modular. Nesse sentido, a simetria de Poincaré tem origem modular, e possivelmente as simetrias de gauge global também (fato plenamente verdadeiro no caso de certas teorias quirais). Outra aplicação da estrutura modular está numa caracterização intrínseca das ‘perturbações locais do vácuo’, inspirada na qual definimos a *localização modular*, tanto na teoria quântica local quanto na teoria de Wigner (que descreve uma partícula relativística livre). Percebemos que essa noção é importante na elaboração de métodos de construção de modelos de teoria quântica local pelo fato de ser suficiente para a construção de modelos livres.

Modelos de Física Quântica Local

Apesar das muitas propostas para definir uma teoria física unificando a mecânica quântica e a teoria da relatividade (especial), até agora nenhuma delas foi plenamente satisfatória no sentido de possuir sólida formulação matemática e ampla corroboração experimental. A física quântica local não está fora desta regra, pois os modelos que até agora possui não podem descrever situações físicas realizáveis - são todos modelos que descrevem partículas livres (sem interação, no sentido de que a matriz de espalhamento é igual à identidade). Podemos avaliar a necessidade de construção de modelos não-triviais de teoria quântica de campos e da física quântica local a partir dos seguintes pronunciamentos:

“De fato, o Problema Principal da teoria quântica de campos reduziu-se a matá-la ou curá-la: ou mostramos que as idealizações envolvidas

jascente (como vemos nas teorias quirais locais). Além disso, idéias recentes apontam para um formalismo que evita o uso do espaço-tempo como conceito fundamental [84],[86],[87]!

nas noções fundamentais da teoria (invariância relativística, mecânica quântica, campos locais, etc.) são incompatíveis em algum sentido físico, ou colocamos a teoria na forma de uma linguagem prática para a descrição da dinâmica das partículas elementares.” (Streater-Wightman, [?])

“O problema principal, a questão de saber se os postulados fundamentais são compatíveis apenas com uma matriz- S trivial (i.e. $S = 1$), sendo portanto fisicamente inadmissíveis, parece tão difícil que a maioria dos pesquisadores da área julga-o sem esperanças. Foi possível ignorar essa questão até agora, porque pudemos tratar muitos problemas solúveis e não-triviais.” (Jost, [97])

“A Física Quântica Local não tem adquirido muita publicidade. Por que não? Eu acredito que temos encontrado idéias interessantes. Infelizmente, elas não são tão amplamente conhecidas ou apreciadas como deveriam. Mas há algo mais. Nós temos focalizado [apenas] princípios gerais, sua implementação e consequências. Nós apresentamos um formalismo e uma linguagem, mas nenhuma teoria específica.” (Haag, [88])

Infelizmente, mesmo a construção de modelos não-triviais a despeito de suas aplicações físicas, tem-se revelado extremamente difícil. Uma dessas dificuldades está na conjunção das propriedades de *localidade* e *condição espectral* [19, Foreword]; outra, pensamos, é a falta de uma relação explícita entre o espectro de partículas e o espectro de cargas (ou seja, uma correspondência entre a teoria do espalhamento e a teoria dos setores de superseleção).

O estudo da teoria quântica local nos mostra que sua estrutura modular deve fornecer a chave para resolvermos o problema de construir modelos com interação. Além da construção modular de teorias livres, é através da estrutura modular que estabelecemos relações entre a condição espectral e a localidade, ou que vislumbramos caracterizações algébricas das teorias com interação. Enfim, foi pensando em aplicar a teoria modular para construir modelos de teoria quântica local que esta tese foi elaborada; mas se ainda não alcançamos êxito, podemos pelo menos dizer que já obtemos vários resultados positivos.

Sumário 1 *A Introdução motiva o desenvolvimento da física quântica local e do conceito de localização modular partindo das teorias quânticas de campos; apresenta didaticamente as idéias básicas no caso especial do campo escalar massivo auto-dual livre e comenta os demais casos.*

A Parte I (Física Quântica Local) constitui uma introdução à física quântica local e à sua estrutura modular, apresentando suas definições e propriedades básicas. Nada neste capítulo é novo, exceto a própria apresentação, direcionada segundo nossos interesses.

Na Parte II (Simetrias Modulares) discutimos a idéia de que a partir da estrutura modular é possível obter as simetrias de uma teoria quântica local, especialmente a simetria espaço-temporal e as simetrias de gauge global. Consideramos particularmente o caso das teorias quirais, onde o conhecimento da relação entre estrutura modular e simetrias é mais completo, e especializamos nossa análise para o caso dos modelos de correntes abelianas, onde podemos exibir explicitamente alguns operadores modulares de especial interesse.

A Parte III (Localização Modular) é dedicada tanto à definição e análise do conceito de localização modular em física quântica local e na teoria de Wigner, quanto à construção modular dos modelos livres da teoria quântica local a partir desse conceito.

A Parte IV (Construção Modular de Teorias Quânticas Locais) discute a aplicação da teoria modular na construção de modelos de teoria quântica local.

Os Apêndices foram acrescentados para servir ao texto principal como referência para conceitos, teoremas e fórmulas matemáticos. Eles são simplificados, mas indicam literatura que aborda os assuntos de modo sistemático e completo.

A Bibliografia contribui para que esta tese sirva como introdução à física quântica local e aos tópicos aqui abordados, contendo referências à discussões mais completas e a trabalhos originais e de importância histórica, além daquelas contendo as provas omitidas no texto.

Observação 2 *Procuramos mostrar nesta tese as diversas aplicações da estrutura modular na física quântica local. A extensão da tese reflete palidamente a extensão dessas aplicações, pelo que poderíamos ter nos estendido mais não fossem nossas limitações de tempo. Nossas idéias e resultados originais compõem dois artigos submetidos para publicação em revistas especializadas:*

L. Fassarella, B. Schroer, Wigner Particle Theory and Local Quantum Physics, Journal of Physics A;

L. Fassarella, B. Schroer, Modular Origin of Chiral Diffeomorphisms and the Fuzzy Analogs in Higher Dimensional Quantum Field Theory, Physics Letters B.

0.4 Espaço-tempo, Notações e Convenções

Aqui, apresentamos a notação e convenções que serão utilizadas ao longo da tese.

0) Símbolos Matemáticos

Números Complexos

Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, denotamos sua parte real por $\Re(z)$ e sua parte imaginária por $\Im(z)$.

Definimos para cada par de números reais $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ as faixas complexas fechada e aberta de largura $b - a$:

$$st[a, b] = \{z \in \mathbb{C} / a \leq \Im(z) \leq b\} \text{ e } st(a, b) = \{z \in \mathbb{C} / a < \Im(z) < b\}$$

Classes de Operadores Lineares

Dado um espaço de Hilbert \mathcal{H} , utilizamos a seguinte notação:

$\mathcal{L}(\mathcal{H}) :=$ classe dos operadores lineares (limitados ou não-limitados) agindo em \mathcal{H}

$\mathcal{B}(\mathcal{H}) :=$ classe dos operadores lineares limitados agindo em \mathcal{H}

$\mathcal{U}(\mathcal{H}) :=$ classe dos operadores unitários agindo em \mathcal{H}

I) O Espaço de Minkowski e sua Estrutura Causal.

Como ocorre em geral na física de partículas, tomamos o espaço de Minkowski como modelo do espaço-tempo, com o grupo de Poincaré representando o grupo de simetrias espaço-temporais. O espaço de Minkowski \mathcal{M} é definido como sendo o espaço linear \mathbb{R}^4 com métrica pseudo-Riemanniana

$$\eta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} , \eta(x, y) := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (1)$$

Outra notações para a ação de η são

$$\eta(x, y) = x \cdot y = x_\mu y^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\mu y_\nu , \forall x, y \in \mathbb{R}^4$$

Utilizamos a seguinte terminologia para classificar os vetores do espaço de Minkowski:

$$v \in \mathcal{M} \text{ é um vetor } \begin{cases} \text{tipo-tempo} \\ \text{tipo-luz} \\ \text{tipo-espaço} \\ \text{causal} \end{cases} \text{ quando } \begin{cases} v^2 > 0 \\ v^2 = 0 \\ v^2 < 0 \\ v^2 \geq 0 \end{cases} , \text{ respectivamente} \quad (2)$$

Analogamente, temos a seguinte terminologia para classificar as curvas contínuas diferenciáveis $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$:

$$\gamma \text{ é uma curva } \begin{cases} \text{tipo-tempo} \\ \text{tipo-luz} \\ \text{tipo-espaço} \\ \text{causal} \end{cases} \text{ quando } \begin{cases} \gamma'(s)^2 > 0 \\ \gamma'(s)^2 = 0 \\ \gamma'(s)^2 < 0 \\ \gamma'(s)^2 \geq 0 \end{cases}, \forall s \in (a, b), \text{ respectivamente.} \quad (3)$$

Dizemos que uma curva contínua $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ é *completa* quando sua imagem $\gamma(\mathbb{R})$ é um subconjunto fechado de \mathcal{M} . Portanto, as curvas completas do tipo-tempo, tipo-luz, tipo-espaço ou tipo-causal tendem para o infinito (do respectivo tipo) quando seu parâmetro tende para $\pm\infty$.

A *estrutura causal* do espaço de Minkowski é dada pela relação simétrica de “*disjunção causal*” entre subregiões:

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{M}, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \text{não existe curva causal conectando } \mathcal{O}_1 \text{ e } \mathcal{O}_2 \quad (4)$$

onde ‘ \times ’ lê-se “... é causalmente disjunto de...”.

O *complemento causal*, o *fecho causal* e a *sombra causal* de uma região $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ são definidos respectivamente por:

$$\mathcal{O}' := \{x \in \mathcal{M} / \text{ toda curva causal completa contendo } x \text{ é disjunta de } \mathcal{O}\} \quad (5)$$

$$\mathcal{O}^c := \{x \in \mathcal{M} / \text{ toda curva causal completa contendo } x \text{ intersecta } \mathcal{O}\}$$

$$\mathcal{O}^t := \{x \in \mathcal{M} / \text{ existe uma curva causal completa contendo } x \text{ que intersecta } \mathcal{O}\}$$

Vale:

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{M}, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$$

e também

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{M}, \Leftrightarrow \mathcal{O}^c = \mathcal{O}''$$

Observação 3 *Variedades Lorentzianas e Globalmente Hiperbólicas*

A definição são válidas para qualquer variedade Lorentziana.

II) Grupo de Poincaré. Nesta tese, chamamos de grupo de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow o subgrupo conexo do grupo das isometrias do espaço de Minkowski, ou seja as isometrias próprias e ortocrônicas. Ele é o produto semi-direto do grupo das

translações espaço-temporais pelo grupo de Lorentz (próprio ortocrônico) \mathcal{L}_+^\uparrow , que por sua vez é o subgrupo conexo das isometrias lineares de \mathcal{M} :

$$\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \otimes \mathcal{L}_+^\uparrow, \quad (a, \Lambda) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (6)$$

O grupo de Poincaré próprio \mathcal{P}_+ é o subgrupo das isometrias do espaço de Minkowski que preserva a orientação. Ele é dado por⁷

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_+^\uparrow \cup \mathcal{P}_+^\downarrow, \quad \mathcal{P}_+^\downarrow = -\mathcal{P}_+^\uparrow$$

III) Regiões Especiais. Alguns tipos de regiões especiais serão utilizadas sistematicamente nesta tese, tanto por causa de sua geometria simples quanto pelo fato de serem causalmente fechadas e formarem famílias invariantes sob ação do grupo de Poincaré.

Cones tipo-tempo. Para $a \in \mathcal{M}$,

$$V_a^\pm = \left\{ y \in \mathcal{M} / (y - a)^2 > 0, \pm (y^0 - a^0) > 0 \right\} \quad (7)$$

No caso especial do cone tipo-tempo com vértice na origem, temos

$$V^\pm := V_0^\pm = \left\{ y \in \mathcal{M} / \pm y^0 > \sqrt{\vec{y}^2} \right\}$$

Cones tipo-luz. Para $a \in \mathcal{M}$,

$$\partial V_x^\pm = \left\{ y \in \mathcal{M} / (y - a)^2 = 0, \pm (y^0 - a^0) > 0 \right\}$$

Cones tipo-espaço. Para $a \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ limitada tipo-espaço separada de a ,

$$C = \{ a + sx ; x \in \mathcal{O}, s > 0 \} \quad (8)$$

Regiões tipo-cunha. Apresentamos duas definições equivalentes para regiões do tipo-cunha::

W1) Para $x_0, x_1 \in \mathcal{M}$ tais que $x_0^2 = 1, x_1^2 = -1$ e $x_0 \cdot x_1 = 0$,

$$W(x_0, x_1) := \{ y \in \mathcal{M} / |x_0 \cdot y| < -x_1 \cdot y \} \quad (9)$$

W2) Para $l_1, l_2 \in \partial V^+$ distintos

$$W(l_1, l_2) := \{ x = \mu l_1 - \nu l_2 + l^\perp \in \mathcal{M} ; \mu, \nu > 0 ; l^\perp \in \mathcal{M}, l^\perp \cdot l_1 = l^\perp \cdot l_2 = 0 \} \quad (10)$$

O caso especial da cunha na direção- x^1

$$W_1 := W(e_1 + e_0, e_1 - e_0) = \{ x \in \mathcal{M} / x^1 > |x^0| \} \quad (11)$$

⁷Lembramos que $\mathcal{P}_+^\downarrow = -\mathcal{P}_+^\uparrow$ apenas em espaços-tempo de dimensão par.

Diamantes. Para $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ tais que $x_2 \in V_{x_1}^+$

$$\mathcal{O}_{x_1, x_2} := V_{x_1}^+ \cap V_{x_2}^- \quad (12)$$

Coletamos essas diversas regiões em classes:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{\text{diamantes}\} \\ \mathcal{C} &:= \{\text{cones tipo-espaço}\} \\ \mathcal{V} &:= \{\text{cones tipo-tempo}\} \\ \mathcal{W} &:= \{\text{regiões tipo-cunha}\} \\ \mathcal{K} &:= \{\text{regiões causalmente completas}\} \end{aligned} \quad (13)$$

Temos

$$\mathcal{K} = \mathcal{D} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{W}$$

Pode ser mostrado que o grupo de Poincaré age transitivamente em cada uma das famílias acima. A família das cunhas é gerada pela ação das transformações de Poincaré sobre a cunha W_1 ,

$$\forall W \in \mathcal{W}, \exists L \in \mathcal{P}_+^\uparrow / LW_1 = W \quad (14)$$

IV) W -Reflexões e W -Boosts. Nós consideramos as seguintes transformações associadas à cunha W_1 : a reflexão no eixo de W_1 , ou a W_1 -reflexão

$$r_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_+^\downarrow \quad (15)$$

a rotação espacial de ângulo π ao redor do eixo- $\widehat{x^3}$, a W_1 -rotação

$$r'_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_+^\uparrow \quad (16)$$

e o grupo um-parâmetro de boosts que deixam W_1 invariante, os W_1 -boosts

$$\Lambda_1(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_+^\uparrow, t \in \mathbb{R} \quad (17)$$

Nós fixamos uma família de transformações de Poincaré $\{L_W; W \in \mathcal{W}\}$ indexada pela família de cunhas e satisfazendo

$$L_W W_1 = W, \forall W \in \mathcal{W} \quad (18)$$

Então, definimos para cada cunha $W \in \mathcal{W}$, a W -reflexão, a W -rotação e os W -boosts correspondentes

$$r_W := L_W r_1 L_W^{-1}, \quad r'_W := L_W r'_1 L_W^{-1}, \quad \Lambda_W(t) := L_W \Lambda_1(t) L_W^{-1} \quad (19)$$

Essas definições de r_W , $r'_W(\pi)$ e Λ_W são independentes da transformação de Poincaré $L_W \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ escolhida, devido ao seguinte lema:

Lema 4 *As transformações de Poincaré que deixam a cunha W_1 globalmente invariante comutam com r_1 , r'_1 e Λ_1 ;*

$$g \in \mathcal{P}_+^\uparrow, \quad gW_1 = W_1 \Rightarrow gr_1 = r_1g, \quad gr'_1 = r'_1g, \quad g\Lambda_1(t) = \Lambda_1(t)g \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

Este é um caso particular da *proposição 108*.

Chapter 1

Introdução

Esta introdução pretende salientar sucintamente a importância da *localização modular* na construção de modelos de teoria quântica local, além também de colocar em perspectiva a *física quântica local* em relação à *teoria geral dos campos quantizados*. Em nossa abordagem aqui, consideramos primeiramente o *campo escalar massivo auto-dual livre* para introduzir os conceitos e resultados básicos; depois mencionamos os demais casos livres e por fim descrevemos a rede de álgebras de observáveis de uma teoria quântica local.¹

1.1 Campo Massivo Escalar Auto-dual Livre

A Partícula Livre Escalar Massiva

Segundo Wigner, uma partícula relativística é descrita por uma representação unitária irredutível do recobrimento universal do grupo de Poincaré

$$u : \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$$

-) \mathfrak{h} é um espaço de Hilbert e

onde :

-) $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ é o espaço dos operadores unitários agindo em \mathfrak{h}

No caso de uma partícula escalar massiva, o espaço de Hilbert é dado pelo conjunto das funções quadrado-integráveis com respeito à medida Lorentz-invariante do hiperbolóide de massa:

$$\mathfrak{h} := L^2(\Gamma_m^+, d\mu(p)) \quad , \quad \begin{cases} \Gamma_m^+ := \{p \in \mathcal{M} / p^2 = m^2, p^0 > 0\} \\ d\mu(p) = \frac{d\vec{p}}{2\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \quad , \quad p = (\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}) \end{cases}$$

¹Para seguir nossa argumentação é suficiente um conhecimento básico de teoria quântica de campos (principalmente dos campos livres), conforme apresentado, por exemplo, em [141]. Conceitos de análise funcional serão apropriadamente (embora sem qualquer pretensão de rigor) definidos ao longo do texto sempre que forem necessários.

e a representação do grupo de Poincaré é definida por

$$u : \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \quad , \quad (u(a, \Lambda)\varphi)(p) = e^{ia \cdot p} \varphi(\Lambda^{-1}p)$$

A partir da representação unitária (u, \mathfrak{h}) , construímos canonicamente o espaço de Fock associado:

$$\mathcal{H} := \overline{\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n}} \quad , \quad \begin{cases} \mathcal{H}_{sym}^0 := \mathbb{C} \\ \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n} := \text{expansão linear de } \left\{ \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n ; \varphi \in \mathfrak{h} \right\} \end{cases} \quad , \quad n \geq 1$$

e a representação unitária do grupo de Poincaré induzida:

$$U : \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad , \quad \left(U(a, \Lambda) \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n \right) = \underbrace{u(a, \Lambda)\varphi \otimes \dots \otimes u(a, \Lambda)\varphi}_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

O estado de vácuo é definido pelo vetor

$$\Omega = (1, 0, \dots) \in \mathcal{H}$$

O vácuo e seus múltiplos são os únicos estados invariantes sob ação da representação U , i.é

$$U(g)\Omega = \Omega \quad \forall g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$$

O Campo Escalar Massivo Auto-dual Livre

Como é bem conhecido, o campo escalar massivo auto-dual livre é uma distribuição (temperada) tomando valores em operadores sobre o espaço de Fock \mathcal{H}

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}) \ni f \rightarrow A(f) = \int_{\mathcal{M}} f(x) A(x) dx \quad (1.2)$$

definida em termos de um núcleo²

$$\mathcal{M} \ni x \rightarrow A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Gamma_m^+} (e^{-ip \cdot x} a(p) + e^{ip \cdot x} a^*(p)) d\mu(p) \quad (1.3)$$

²Ocasionalmente utilizamos a seguinte terminologia: o núcleo $A(x)$ chamamos de *campo (escalar) pontual* e o operador $A(f)$ chamamos de *campo (escalar) espalhado* pela função teste $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$.

definido em termos dos operadores de criação $a^*(p)$ e aniquilação $a(p)$, os quais satisfazem por sua vez as *relações canônicas de comutação*³

$$\begin{cases} [a(p_1), a(p_2)] = [a^*(p_1), a^*(p_2)] = 0 \\ [a(p_1), a^*(p_2)] = \delta(p_1 - p_2) \end{cases}, \forall p_1, p_2 \in \Gamma_m^+ \quad (1.4)$$

Os campos espalhados possuem um domínio comum denso no espaço de Fock, a saber:⁴

$$D := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n} = \text{expansão linear} \left\{ e^\varphi := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n ; \varphi \in \mathfrak{h} \right\} \quad (1.6)$$

dado pelo subespaço sobre o qual estão definidos os operadores de criação e aniquilação. Sobre elementos desse domínio comum temos definidas as operações de soma e produto de campos.

Chamamos de *álgebra polinomial* a *-álgebra de operadores definida pelos campos espalhados (i.e., o conjunto das somas de produtos finitos de campos espalhados e seus conjugados hermitianos)

$$\mathcal{P} := \text{*álgebra} \{A(f) ; f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})\} \quad (1.7)$$

A Localização Off-Shell

Fisicamente, a *idéia relativística de localização* consiste na propriedade de que operações (ou medidas) realizadas em regiões causalmente disjuntas não se influenciam (ou são compatíveis). No caso específico que estamos tratando,

³Os operadores de criação e aniquilação espalhados por uma função-de-onda $\psi \in \mathfrak{h}$ são definidos explicitamente no espaço de Fock por:

$$\begin{aligned} a(\psi) \left(\underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n \right) &:= (\psi, \varphi) \left(\underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{n-1} \right) \\ a^*(\psi) \left(\underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n \right) &:= \sum_{k=0}^n \left(\underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_k \otimes \psi \otimes \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_{n-k} \right) \end{aligned}$$

Nesse caso, as relações canônicas de comutação assume a forma

$$\begin{cases} [a^*(\psi_1), a^*(\psi_2)] = [a(\psi_1), a(\psi_2)] = 0 \\ [a(\psi_1), a^*(\psi_2)] = (\psi_1, \psi_2) \end{cases}$$

⁴Lembramos que os vetores do tipo

$$e^\varphi := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n \in \mathcal{H} \quad (\varphi \in \mathfrak{h}) \quad (1.5)$$

são chamados de *estados coerentes*.

podemos definir matematicamente essa noção de localização por uma *correspondência entre os observáveis e regiões do espaço-tempo*

$$\mathcal{M} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{P}$$

satisfazendo a propriedade de que operadores associados a regiões causalmente disjuntas comutam entre si:

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2, F_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_1), F_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_2) \implies [F_1, F_2] = 0 \quad (1.8)$$

onde 'x' lê-se "...é causalmente disjunto de..." (definição 4).

O que chamamos de *localização off-shell* é definida diretamente pelo suporte das funções-teste:

$$\mathcal{M} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{O}) := \text{*álgebra}\{A(f) ; f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), \text{supp}(f) \subset \mathcal{O}\} \quad (1.9)$$

Por cálculo direto, verificamos que essa definição satisfaz a condição (1.8).⁵

Observação 5 *Simbolicamente:*

$$\text{Suporte das Funções-teste} \implies \text{Localização off-shell}$$

Álgebras de Observáveis Locais

A partir da álgebra polinomial (que é uma álgebra de operadores não-limitados definidos no domínio comum D) e da *localização off-shell* definimos naturalmente uma *rede⁶ de álgebras de operadores limitados*:

⁵Com efeito, basta verificar as relações de comutação para os monômios de campos espalhados (o que é quase trivial)! Assim, considere duas funções-teste $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ com suportes contidos em regiões causalmente disjuntas $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$; temos (diretamente das relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação (1.4):

$$\begin{aligned} A(f_1) A(f_2) &= \int_{\mathcal{M}} f_1(x) dx \int_{\mathcal{M}} f_2(y) dy \{A(x) A(y)\} \\ &= \int_{\mathcal{O}_1} \frac{f_1(x) dx}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{O}_2} \frac{f_2(y) dy}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Gamma_m^+} d\mu(p_1) \int_{\Gamma_m^+} d\mu(p_2) \times \\ &\quad \times (e^{-ip_1 \cdot x_a(x)} + e^{ip_1 \cdot x_a^+(x)}) (e^{-ip_2 \cdot y_a(y)} + e^{ip_2 \cdot y_a^+(y)}) \\ &= \int_{\mathcal{O}_2} \frac{f_2(y) dy}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{O}_1} \frac{f_1(x) dx}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Gamma_m^+} d\mu(p_2) \int_{\Gamma_m^+} d\mu(p_1) \times \\ &\quad \times (e^{-ip_2 \cdot y_a(y)} + e^{ip_2 \cdot y_a^+(y)}) (e^{-ip_1 \cdot x_a(x)} + e^{ip_1 \cdot x_a^+(x)}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} dy f_2(y) \int_{\mathcal{M}} f_1(x) dx \{A(y) A(x)\} \\ &= A(f_2) A(f_1) \end{aligned}$$

⁶Por *rede de álgebras* subentendemos que a correspondência $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O})$ é *isotônica*, i.é:

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{M}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \rightsquigarrow \mathcal{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}_2)$$

$$\mathcal{M} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O}) := \mathcal{P}(\mathcal{O}')^w \quad (1.10)$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}')^w = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) / (A\varphi, F\psi) = (F^*\varphi, A^*\psi), \forall F \in \mathcal{P}(\mathcal{O}'), \forall \varphi, \psi \in D\}$$

onde \mathcal{O}' é o complemento causal de \mathcal{O} (*definição 5*). e ' w ' significa o comutante fraco (definido precisamente pela expressão acima).

Para cada $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, a álgebra $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ é uma álgebra de von Neumann em \mathcal{H} (i.e. *-subálgebras fracamente fechadas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) chamada de *álgebra dos observáveis localizados em \mathcal{O}* (apesar do fato dessas álgebras conterem elementos que não são auto-adjuntos). A correspondência $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O})$ é chamada de *rede quântica local*. Definimos a álgebra universal (dos observáveis quase-locais) pelo fecho (na topologia da norma) da união de todas as álgebras de observáveis locais

$$\mathfrak{A} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathcal{M}} \mathcal{R}(\mathcal{O})} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (1.11)$$

Descrição On-Shell

Apesar dos observáveis locais (elementos de \mathfrak{A}) terem sido definidos a partir dos campos (elementos de \mathcal{P}), podemos obtê-los diretamente a partir da representação de Wigner, numa descrição que chamamos de *on-shell*. Para tanto, será essencial considerar a seguinte relação natural entre funções-teste e funções-de-onda, definida pela *restrição da transformada de Fourier das funções-teste ao hiperbolóide de massa*:

$$S(\mathcal{M}) \ni f \rightarrow \varphi_f := (p) := \hat{f} \Big|_{\Gamma_m^+} \in L^2(\Gamma_m^+, d\mu(p)) \quad (1.12)$$

$$\hat{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{M}} e^{-ip \cdot x} f(x) dx$$

Notamos imediatamente que

$$A(f) = \int_{\Gamma_m^+} \left(\varphi_f(p) a(p) + \overline{\varphi_f(p)} a^*(p) \right) d\mu(p)$$

Portanto, é natural considerarmos o chamado *campo de Segal* (definido em termos de funções-de-onda ao invés de funções-teste):

$$\mathfrak{h} \ni \varphi \rightarrow \Phi(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathcal{M}} \left\{ \varphi(p) a(p) + \overline{\varphi(p)} a^*(p) \right\} dx \quad (1.13)$$

A partir dos operadores de Segal definimos os *operadores de Weyl*:

$$\mathfrak{h} \ni \varphi \rightarrow W(\varphi) := e^{i\overline{\Phi(\varphi)}} \quad (1.14)$$

Os operadores de Weyl são operadores unitários que satisfazem as *relações canônicas de comutação (CCR)*

$$W(\varphi)W(\psi) = e^{-i\mathfrak{S}(\varphi,\psi)}W(\varphi + \psi) \quad (1.15)$$

e a seguinte *identidade de conjugação (Cdo)*

$$W(\varphi)^* = W(-\varphi) \quad (1.16)$$

Finalmente, definimos a *álgebra de Weyl* associada ao *espaço simplético* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{S})$ (conforme o *apêndice B.2.1*) como sendo a C^* -álgebra gerada pelos operadores de Weyl

$$\text{Weyl}(\mathfrak{h}) := C^*\text{-álgebra}\{W(\varphi) ; \varphi \in \mathfrak{h}\} \quad (1.17)$$

Como consequência quase imediata da identidade

$$A(f) = \sqrt{2}\Phi(\varphi_f) , \forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}) \quad (1.18)$$

obtemos que a álgebra de observáveis coincide com a álgebra de Weyl:⁷

$$\mathfrak{A} = \text{Weyl}(\mathfrak{h}) \quad (1.19)$$

Observação 7 *Temos mostrado que a álgebra de observáveis possui uma descrição on-shell (ou seja, definida diretamente a partir da representação de Wigner); resta-nos mostrar que também a localização definida pela rede quântica local (1.10) possui uma descrição on-shell.*

Localização Modular (On-Shell)

Para obtermos uma descrição on-shell da localização, recorreremos às *relações do tipo Paley-Wiener* que existem entre *propriedades do suporte das funções-teste* e *propriedades analíticas das funções-de-onda* definidas pela fórmula (1.12). Essas relações podem ser estabelecidas para funções-de-onda com suporte em regiões arbitrárias do espaço-tempo [112], mas aqui basta-nos considerar a situação mais simples das *regiões tipo-cunha* (definição 9 ou 10)

$$W_1 := \{x \in \mathcal{M} ; |x^0| < x^1\}$$

$$g \in \mathcal{P}_+^\uparrow \rightsquigarrow W_g := gW_1$$

⁷Vale o seguinte teorema:

Teorema 6 (Stone-von Neumann) *Existe uma única álgebra- C^* gerada por operadores satisfazendo as relações CCR (1.15) e Cdo (1.16), módulo *-isomorfismos.*

às quais temos associadas seguintes transformações de Poincaré (*definições 15, 16, 17, 19*)⁸

$$r_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_+^\dagger, \quad r'_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_+^\dagger \quad (1.20)$$

$$\Lambda_1(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_+^\dagger (t \in \mathbb{R})$$

$$g \in \mathcal{P}_+^\dagger, \rightsquigarrow r_{W_g} := g r_1 g^{-1}, \quad r'_{W_g} := g r'_1 g^{-1}, \quad \Lambda_{W_g} := g \Lambda_1 g^{-1}$$

Teorema 8 (Vide seção 12.1.2) *A) Se o suporte da função-teste $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ está contido numa região cunha W , então a função*

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow u(\Lambda_W(-2\pi t)) \varphi_f$$

possui uma continuação analítica na faixa

$$st(-1/2, 0) := \{z \in \mathbb{C}; -1/2 < \Im(z) < 0\}$$

definida pela extensão de φ_f à uma certa subregião do hiperbolóide de massa complexo.

Além disso, o valor de bordo $u(\Lambda_W(i\pi)) \varphi_f$ define uma função-de-onda no hiperbolóide da massa com energia negativa:

$$\Gamma_m^- \ni q \rightarrow \varphi_f(q) := (u(\Lambda_W(i\pi)) \varphi_f)(r_{Wq})$$

B) Vale também que para qualquer região $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, é denso no espaço das funções-de-onda \mathfrak{h} o conjunto das funções-de-onda φ_f dadas por funções-teste $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ com suporte contido em \mathcal{O} .

As relações tipo Paley-Wiener dadas nesse teorema são expressas na teoria de Wigner intrinsecamente em termos de sua *estrutura modular*, definida a partir das transformações de Poincaré associadas às regiões cunha. Para definir essa estrutura modular, temos que estender a representação u do grupo de Poincaré \mathcal{P}_+^\dagger a uma *representação (anti-)unitária* do grupo de Poincaré próprio \mathcal{P}_+ (conforme definição 105); isso conseguimos simplesmente definindo a representação das inversões r_W 's; em nosso caso particular, temos explicitamente:

$$u(r_W) : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad (u(r_W) \varphi)(p) := \overline{\varphi(-r_W p)} \quad \forall p \in \Gamma_m^+ \quad (1.21)$$

⁸Geometricamente, r_1 é a reflexão nos eixos 'oz₁' e 'ot', r'_1 é a rotação espacial de ângulo π em torno do eixo 'oz₃' e Λ_1 é um grupo 1-parâmetro de boosts que deixam a região cunha W_1 invariante.

Enfim, a partir da fórmula (1.21) e do teorema acima, para cada região cunha $W \subset \mathcal{M}$ está bem definido sobre um subconjunto denso de \mathfrak{h} o chamado operador de Tomita espacial (vide capítulo 12)

$$s_W := u(r_W) u(\Lambda_W(i\pi)) \quad (1.22)$$

e, finalmente: se o suporte de uma função-teste $f \in S(\mathcal{M})$ está contido na região cunha $W \subset \mathcal{M}$, então a função-de-onda φ_f pertence ao domínio do operador de Tomita espacial s_W e também é deixada invariante pela ação deste operador:

$$\varphi_f \in \text{Dom}(s_W) \quad , \quad s_W \varphi_f = \varphi_f$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (s_W \varphi_f)(p) &= \overline{\varphi_f(-p)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{M}} e^{-i(-p) \cdot x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{M}} e^{-ip \cdot x} f(x) dx \\ &= \varphi_f(p) \quad , \quad \forall p \in \Gamma_m^+ \end{aligned}$$

Agora podemos definir a correspondência entre regiões do espaço de Minkowski e subvariedades do espaço dos estados \mathfrak{h} que chamamos de *localização modular da teoria de Wigner*:

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) := \bigcap_{W \supset \mathcal{O}} \mathfrak{h}_R(W) \quad (1.23)$$

$$\mathfrak{h}_R(W) := \{\varphi \in \text{Dom}(s_W) / s_W \varphi = \varphi\} \quad \forall \text{ região tipo-cunha } W \subset \mathcal{M}$$

É possível mostrar que para toda região não-vazia $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ com complemento causal não-vazio, o espaço $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ é um subespaço real *padrão* de \mathfrak{h} , i.é., satisfazendo:⁹

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) + i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \text{ é denso em } \mathfrak{h} \\ \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cap i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) = \emptyset \end{cases} \quad (1.24)$$

Então, nessas circunstâncias fica bem definido o seguinte operador de Tomita espacial associado à região \mathcal{O} :

$$s_{\mathcal{O}} : (\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) + i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})) \rightarrow (\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) + i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})) \quad , \quad s_{\mathcal{O}}(\varphi + i\psi) = \varphi - i\psi \quad (1.25)$$

Essa fórmula generaliza para regiões arbitrárias (com complemento causal não-vazio) a fórmula do operador de Tomita espacial associado a regiões wedge (1.22).

⁹Este é um resultado análogo ao teorema Reeh-Schlieder (18), dado pela parte B do teorema acima.

Observação 9 *Simbolicamente:*

Analicidade das Funções-de-onda \Rightarrow Localização Modular (on-shell)

O fato fundamental que justifica toda essa construção é o seguinte teorema:

Teorema 10 *Para toda região $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, vale*

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) = \text{Weyl}(\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}))$$

Observação 11 *Podemos resumir os fatos apresentados até agora dizendo que: não apenas a álgebra de observáveis \mathfrak{A} , mas também a própria rede quântica local (definida pela correspondência)*

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O})$$

pode ser obtida diretamente da representação de Wigner $(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$, via localização modular.

Estrutura Modular

A estrutura modular da teoria de Wigner é naturalmente estendida para o espaço de Fock:

$$\mathcal{H}_R(\mathcal{O}) := \mathbb{R}\text{-linear expansão de } \{e^\varphi; \varphi \in \mathfrak{h}_R(\mathcal{O})\} \quad (1.26)$$

$$S_{\mathcal{O}} : \mathcal{H}_R(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}_R(\mathcal{O}) \quad , \quad S_{\mathcal{O}} e^\varphi := e^{s_{\mathcal{O}} \circ \varphi}$$

Para toda região \mathcal{O} com complemento causal não-vazio, $\mathcal{H}_R(\mathcal{O})$ é um subespaço linear padrão do espaço de Fock \mathcal{H} e $S_{\mathcal{O}}$ é um operador anti-linear bem definido, chamado de *operador de Tomita da região \mathcal{O}* .

Proposição 12 *Para qualquer região $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ com complemento causal não-vazio, o correspondente operador de Tomita $S_{\mathcal{O}}$ é caracterizado por:*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\mathcal{O})\Omega \text{ é um core de } S_{\mathcal{O}} \\ S_{\mathcal{O}}A\Omega = A^*\Omega \quad , \quad \forall A \in \mathcal{R}(\mathcal{O}) \end{cases} \quad (1.27)$$

Generalizações

A localização modular e a construção modular de redes quânticas locais livres estão definidas para qualquer *representação própria do (recobrimento universal do) grupo de Poincaré próprio (105) $\tilde{\mathcal{P}}_+$* , embora nos casos de helicidade infinita (“torres de spin”) a localização esteja restrita a regiões do espaço-tempo contendo cones tipo-espaço. Contudo, essa generalização não é realizada trivialmente; as principais dificuldades são as seguintes:

1) Para spin/helicidade não-zero, é preciso resolver o problema da presença da *rotação de Wigner* na representação de Wigner (se usamos a técnica analítica descrita nesta tese).

2) Na construção modular das álgebras de observáveis, utilizamos o chamado *Functor de Weyl* nos casos de spin/helicidade semi-inteiro par e utilizamos o *Functor de Clifford* nos casos de spin/helicidade semi-inteiro ímpar (refletindo a conexão entre spin e estatística dos campos quânticos).

3) Para os casos de spin-infinito, a expectativa é de que os subespaços de localização modular $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ sejam triviais para regiões “menores” do que cones tipo-espaço (sugerindo que as possíveis “partículas” de helicidade-infinita sejam objetos extensos semelhantes a cordas semi-infinitas).

1.2 Física Quântica Local

O fato da rede de álgebras de observáveis de um sistema de campos livres ser fisicamente interpretada sem mencionar dos campos quânticos associados e também por ser construída diretamente das subrepresentações irredutíveis da ação covariante do grupo de Poincaré sobre os campos, sugere que podemos tratá-la como objeto fundamental da física de partículas.¹⁰ A física quântica local é uma realização dessa idéia e está constituída sobre um conjunto de axiomas extraídos das propriedades básicas das teorias livres, possivelmente válidas também para teorias apresentando interação não-trivial. Nossa tarefa de construir tais modelos de teoria quântica local com interação significa obter uma realização explícita dessa possibilidade.

A abordagem algébrica da física quântica local se justifica por definir os princípios básicos da física quântica relativística num contexto tanto mais natural quanto mais amplo e rigoroso do que a própria teoria geral dos campos quantizados.

No contexto da física quântica local sua estrutura modular surge muito naturalmente como consequência direta do teorema Reeh-Schlieder. Esta estrutura modular incorpora considerável (talvez toda) informação física da teoria; particularmente as *interações*, pela fórmula

$$S_{sc} = S_W S_{0W}$$

relacionando os operadores de Tomita S_W e S_{0W} da teoria original e da teoria livre subjacente (definida pela teoria do espalhamento), respectivamente, de uma região cunha W com respeito ao estado de vácuo Ω através da matriz de espalhamento S_{sc} . Nessa fórmula, notamos que S_{0W} e S_{sc} são caracterizados pelas partículas e interações descritas pela teoria, donde concluímos que o operador de Tomita da teoria original S_W é determinado por tais dados de espalhamento, sem necessidade de qualquer outra informação adicional.

¹⁰Esse ponto de vista é reforçado também pelo fato da rede de álgebras locais ser intrinsecamente determinada pela interação (matriz de espalhamento), ainda que esteja associada a uma infinidade de sistemas de campos quânticos (pertencentes à mesma classe de Borchers).

O fato não trivial relacionando os operadores de Tomita das regiões tipo-cunha com o espectro de partículas da teoria (as subrepresentações irredutíveis da ação covariante do grupo de Poincaré) e também por trás da fórmula acima é a propriedade chamada *covariância modular*:

Para toda cunha $W \subset \mathcal{M}$, o grupo modular associado satisfaz:

$$\Delta_W^{1/2} = U(\Lambda_W(i\pi))$$

Essencialmente, a covariância modular relaciona as transformações geométricas associadas às regiões cunha a operadores algébricos (modulares) das correspondentes álgebras de observáveis no setor de vácuo, através da ação covariante do grupo de Poincaré.

Construção Modular de Modelos de Teoria Quântica Local

Os métodos de construção modular de teorias quânticas consistem basicamente em partir do conhecimento da estrutura modular da teoria o dada pela correspondência

$$\underbrace{(u, \mathfrak{h}) + S_{sc}}_{\text{partículas + interação}} \rightarrow \underbrace{\{S_{\mathcal{O}}, \mathcal{H}_R(\mathcal{O})\}}_{\text{estrutura modular}} \quad (1.28)$$

para obter (de algum modo) a rede quântica local:

$$\underbrace{\{S_{\mathcal{O}}, \mathcal{H}_R(\mathcal{O})\}}_{\text{estrutura modular}} \rightarrow \underbrace{\{\mathcal{R}(\mathcal{O})\}}_{\text{rede quântica local}}$$

Mencionamos três possibilidades discutidas nesta tese para realizar uma essa correspondência:

- i) O *Método Espacial*, baseado na caracterização dos *cones naturais* dada por Alain Connes;
- ii) O *Método Holográfico*, baseado na idéia de construir uma teoria quântica local a partir de um conjunto de teorias em espaço-tempo em dimensão inferior;
- iii) O *Método PFG*, que utiliza os chamados *geradores livres de polarização do vácuo*.

Part I

Física Quântica Local

Chapter 2

Axiomas e Propriedades

Relatividade e Mecânica Quântica

A *teoria da relatividade* e a *mecânica quântica* foram desenvolvidas na primeira quarta parte do século XX, motivadas tanto pela descoberta de incongruências experimentais quanto por considerações basicamente teóricas acerca da física clássica, a qual compreende a mecânica de Newton, o eletromagnetismo de Maxwell e tudo o que havia sido construído a partir desses. Essas novas teorias foram revolucionárias porque fundamentadas em princípios físicos que levaram a um entendimento da realidade física radicalmente diferente daquela sustentada pela física clássica. Esses princípios têm se mostrado extremamente adequados para a descrição da realidade física, e neles estão os fundamentos da *física quântica local* e de tantas outras teorias, tais como a *teoria dos campos quantizados* (capítulo 5), a *teoria causal*, a *teoria da perturbação renormalizada* [141, Chapter 12], o formalismo da *integral-de-caminho*, a *teoria de matriz-S* [14, Chapter 14], o *formalismo LSZ* [14, Chapter 13] e a *mecânica quântica relativística (de partícula)* [44],[45],[46],[47].

Rede Quântica Local

A *física quântica local* se caracteriza pela idéia de que toda informação física deve estar contida nos *observáveis*, donde temos que o objeto fundamental da teoria é a chamada *rede de álgebras de observáveis locais*, ou seja, uma correspondência entre regiões do espaço-tempo e álgebras- C^* satisfazendo as propriedades de isotonia, localidade e covariância de Poincaré.

Numa generalização da mecânica quântica, podemos considerar que um sistema físico é caracterizado por suas propriedades (mensuráveis), que por sua vez são definidas por referência a dispositivos experimentais, os quais chamamos então de observáveis físicos do sistema¹; portanto, defimos uma teoria quântica

¹Um ponto de vista semelhante:

“Um ‘sistema físico’ é um conjunto de ‘quantidades físicas’, que são definidas operacionalmente através dos valores médios de vários tipos de experimentos. Estes são experimentos idealizados, que medem quantidades macroscópicas por

como sendo uma relação entre a classe dos observáveis físicos \mathcal{D} e a classe dos operadores auto-adjuntos de uma álgebra- C^* \mathfrak{A}

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{A}_{sa}$$

Então, se assumimos que pode ser definida uma relação entre regiões do espaço-tempo e os subconjuntos dos observáveis físicos nelas localizados

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}$$

esta se traduz numa relação entre regiões do espaço-tempo e subconjuntos da álgebra de observáveis \mathfrak{A}_{sa}

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}_{sa}$$

Nesse caso, o princípio de localidade pode ser definido pela exigência

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = \{0\}$$

que implica na compatibilidade (ou independência) das observações realizadas em regiões causalmente disjuntas. *Essa é a estrutura essencial da física quântica local*, e todos os demais conceitos que fazem parte da teoria podem ser entendidos como meios para extrair dessa estrutura as informações que desejamos saber sobre os sistemas físicos.

Interpretação Física

A interpretação física da teoria quântica local estende a *interpretação minimal* da mecânica quântica ²:

0) Observáveis e Estados: um sistema físico Ξ é uma classe de *objetos* (podemos pensar em partículas) caracterizados por um conjunto de propriedades definidas operacionalmente por outra classe de *objetos* (dispositivos experimentais, instrumentos de medida) chamados *observáveis*. As leis da teoria quântica versam sobre o comportamento de ‘ensambles’ estatísticos de sistemas Ξ , chamados de *estados*.³ Uma medida significa a interação (de exemplares) do sistema

leituras analógicas precisas, mas que provavelmente não dão valores definidos para as quantidades físicas do sistema. Neste caso, a quantidade não é medida ‘exatamente’ e pode ter qualquer um dentre vários possíveis valores, com várias probabilidades.” (Segal, [128])

²A interpretação minimal consiste naquela interpretação (mais) puramente operacional, subjacente a todas as demais interpretações da mecânica quântica [42].

³O chamado *corte de Heisenberg*, i.e. a divisão do universo em partes observadora e observada (e o meio-ambiente restante) é realmente necessária quando os sistemas físicos são caracterizados operacionalmente, ainda que a “posição” do corte não tenha significado intrínseco (ou seja, dependa de certas convenções). Obviamente, esse procedimento não pode ser aplicado numa descrição do universo inteiro, mas é conveniente para nosso interesse em descrever partículas.

físico com um instrumento de medida e a descrição matemática é feita por um par estado-observável (φ, A) .

i) **Quadro de Haag-Kastler:** consideramos que Ξ seja descrito por uma correspondência entre regiões do espaço-tempo e álgebras- C^*

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

sendo que para cada região \mathcal{O} do espaço-tempo, os elementos auto-adjuntos da álgebra local $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ e os funcionais lineares contínuos normalizados e positivos sobre esta álgebra são respectivamente os observáveis e os estados do sistema, localizados nessa região.⁴

ii) **Interpretação Estatística:** a probabilidade relativa dos possíveis valores para uma medida do sistema especificada por um par (φ, A) é dada pelo módulo dos coeficientes da decomposição espectral de φ com respeito a A ; portanto, o valor médio destas medidas é dado por $\varphi(A)$.⁵

iii) **Simetria Espaço-Temporal:** sistemas de coordenadas fixados em referenciais inerciais são fisicamente indistinguíveis, e o grupo de Poincaré estabelece a correspondência entre as medidas realizadas em diferentes sistemas de coordenadas.

Observação 13 Nesta tese, como em geral, chamamos de "observáveis" os elementos das álgebras locais, sendo estes auto-adjuntos ou não. Isso consiste apenas numa simplificação de terminologia, desde que qualquer operador de uma álgebra- C^* é uma combinação linear de operadores auto-adjuntos:

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i \frac{A - A^*}{2i}$$

Enfim, definimos o conceito de *rede quântica local*:

Axioma 14 (Rede Quântica Local) *Seja \mathfrak{A} uma álgebra- C^* com unidade e seja $C^*(\mathfrak{A})$ a classe das subálgebras- C^* de \mathfrak{A} contendo a unidade.*

⁴Os axiomas da física quântica local se referem aos observáveis (ou mais precisamente, à rede de observáveis) e não aos estados, pois os estados (ou mais precisamente, as vizinhanças fracas destes) podem ser obtidos pelo *monitoramento* ou pela *filtragem*, que são processos definidos em termos de observáveis.

⁵Um ponto de vista semelhante:

"Na interpretação minimal, a mecânica quântica é considerada como uma teoria física probabilística, consistindo de uma *linguagem* (proposições sobre os resultados de medidas), uma *estrutura probabilística* (um conjunto convexo de medidas de probabilidade representando as possíveis distribuições de resultados de medidas) e *lei probabilística*. Em adição, as probabilidades são interpretadas como limites de frequências relativas de resultados de medidas, isto é, no sentido de uma *interpretação estatística epistemológica*" (Busch-Pekka-Mittelstaedt, [42] - traduzido)

Uma terna $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ dada por uma correspondência

$$\mathcal{A}: \mathcal{D} \rightarrow C^*(\mathfrak{A})$$

e uma ação do grupo de Poincaré

$$\alpha: \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{A}) \quad , \quad \alpha(g) = \alpha_g$$

é dita ser uma rede quântica local quando satisfaz as seguintes propriedades:

i) *Isotonia*

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{D}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$$

ii) *Localidade*

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{D}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}'_2)'$$

iii) *Covariância*

$$\alpha(a, \Lambda) \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}(a + \Lambda \mathcal{O}) \quad , \quad \forall (a, \Lambda) \in \mathcal{P}_+^\uparrow, \forall \mathcal{O} \in \mathcal{D}$$

iv) *Propriedade Geradora*⁶

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{D}} \mathcal{A}(\mathcal{O})} \quad (C^*\text{-limite-indutivo})$$

Notação 15 Utilizaremos a seguinte terminologia, ocasionalmente com a omissão dos adjetivos entre parênteses, conforme é usual:

A álgebra- C^* \mathfrak{A} chamaremos de álgebra de observáveis (quase-locais) e as álgebras $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O} \in \mathcal{D}$) de álgebras de (observáveis localizados em) \mathcal{O} . Também definimos a álgebra (de observáveis) local

$$\mathfrak{A}_{loc} := \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{D}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

Se $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ é uma rede quântica local (definida sobre regiões do tipo diamante), podemos definir as álgebras de observáveis das regiões não compactas pelo limite C^* -indutivo das álgebras de observáveis localizadas em subregiões limitadas:

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K}, \mathcal{A}(\mathcal{O}) := \overline{\bigcup_{\mathcal{D} \ni \mathcal{Q} \subset \mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{Q})} \subset \mathfrak{A} \quad (2.1)$$

(A barra denota o fecho na topologia da norma.) Trivialmente, essa extensão da rede quântica local para o conjunto de regiões causalmente completas \mathcal{K} preserva as propriedades de isotonia, localidade e covariância. No que segue, usaremos essa definição sistematicamente

⁶A propriedade geradora torna redundante mencionar a álgebra- C^* \mathfrak{A} nessa definição da rede quântica local, mas é conveniente mencioná-la para o bem da simplicidade.

Definição 16 (Estados e Representações da Rede Quântica Local) *Seja $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ uma rede quântica local.*

Um estado da rede é um funcional linear contínuo positivo e normalizado da álgebra de observáveis \mathfrak{A} , i.e um elemento $\varphi \in \mathfrak{A}^$. satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(A^*A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{A} \quad (\text{positividade}) \\ \|\varphi\| := \sup \left\{ \frac{\varphi(A^*A)}{\|A\|^2} : A \in \mathfrak{A} \setminus \{0\} \right\} \quad (\text{normalização}) \end{array} \right.$$

*Uma representação da rede é uma *-representação da álgebra de observáveis \mathfrak{A} , i.e. uma aplicação linear $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ no espaço dos operadores lineares limitados agindo num espaço de Hilbert separável \mathcal{H} que preserva a operação de conjugação.*

Para cada estado $\varphi \in \mathfrak{A}^$, temos a representação da rede definida pela construção GNS [22, Section 2.3.3] para o par (\mathfrak{A}, φ) , i.e. uma *-representação $\pi_\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathcal{H}_\varphi)$ e um vetor $\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ (únicos módulo *-isomorfismos) tais que*

$$\pi_\varphi(\mathfrak{A})\Omega_\varphi \text{ é denso em } \mathcal{H}_\varphi$$

e

$$\varphi(A) = (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi), \forall A \in \mathfrak{A}$$

Nesse caso, obtemos álgebras de von Neumann locais fechando fracamente a representação das álgebras de observáveis locais:

$$\mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}) := \pi_\varphi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))'' \subset \mathcal{H}_\varphi, \forall \mathcal{O} \in \mathcal{D} \quad (2.2)$$

Chamamos a terna $(\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ de representação GNS da rede $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ gerada por φ .

Para que a física quântica local descreva partículas, é necessário que a álgebra de observáveis admita estados satisfazendo certas propriedades especiais. Certamente, é necessário a existência um estado descrevendo o espaço-tempo “vazio”:

Definição 17 (Estado de Vácuo) *Seja ω um estado sobre \mathfrak{A} e seja $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$ a representação GNS associada.*

Dizemos que ω é um estado de vácuo da rede quântica local (\mathcal{A}, α) quando este satisfaz as seguintes propriedades

vácuo 1) Invariância Translacional: *O estado de vácuo é invariante sob ação das translações espaço-temporais*

$$\omega \circ \alpha(a) = \omega, \forall a \in \mathbb{R}^4$$

Nesse caso, a ação das translações é unitariamente implementada no espaço de Hilbert \mathcal{H} , i.e. existe uma representação unitária fortemente contínua das translações do espaço-tempo⁷

$$U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

⁷A representação U pode ser escolhida de modo que os operador-momentum é um observável: $P^\mu \in \pi(\mathfrak{A})''$ [17].

satisfazendo

$$U(a)\Omega = \Omega \\ \pi_\omega \circ \alpha(a) = adU(a) \circ \pi_\omega, \quad \forall a \in \mathbb{R}^4$$

Seja $P = (P^0, \vec{P})$ o gerador infinitesimal das translações (conforme o teorema de Stone [113, Section VIII.4])

$$U(a) = e^{iP \cdot a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^4$$

vácuo 2) Condição Espectral: O espectro de P pertence ao fecho do cone tipo-tempo futuro

$$Spect(P) \subset \overline{V^+}$$

O estado de vácuo ω é dito ser puro quando satisfaz uma (e portanto todas) das seguintes condições equivalentes [3, Theorem 4.6]:

puro 1) $\pi(\mathfrak{A})''$ é um fator ($\pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}1$)

puro 2) $\pi(\mathfrak{A})$ é irredutível ($\pi(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}1$);

puro 3) Todo vetor de \mathcal{H} translacionalmente invariante é proporcional a Ω . (2.3)

Apresentaremos agora algumas das propriedades básicas da rede quântica local

Propriedade Reeh-Schlieder

A propriedade Reeh-Schlieder diz que na representação de vácuo cada observável local corresponde a um único vetor de estado

$$\mathfrak{A}_{loc} \ni A \mapsto A\Omega \in \mathcal{H}_\omega$$

Esta relação pode ser tornada biunívoca localmente, se consideramos para cada álgebra local $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ o conjunto $\mathcal{R}_\eta(\mathcal{O})$ dos seus operadores afiliados⁸ cujo domínio contém o vácuo, então

$$\mathcal{R}_\eta(\mathcal{O}) \ni F \longleftrightarrow F\Omega \in \mathcal{H}_\omega$$

Esse tipo de correspondência entre álgebras de von Neumann e subespaços vetoriais implica que cada teoria modular de Tomita-Takesaki define trivialmente uma teoria modular de Rieffel-Daele. Entretanto, o problema inverso não é trivial e não possui solução geral, embora seja um problema importante para a física quântica local por estar relacionado com os aspectos contrutivos da teoria.

⁸Se \mathcal{A} é uma álgebra atuando num espaço de Hilbert \mathcal{H} , então o conjunto dos seus operadores afiliados é dado pelos operadores F em \mathcal{H} (limitados ou não) que comutam com o comutante de \mathcal{A} .

Teorema 18 (Reeh-Schlieder) *Seja (\mathcal{A}, α) uma rede quântica local, ω um estado de vácuo e $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$ a representação GNS associada.*

Se a representação de vácuo satisfaz a propriedade de aditividade fraca, i.e.

$$\pi(\mathcal{A})'' = \left(\bigcup_{x \in \mathcal{M}} \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O} + x)) \right)'', \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

então o vetor de vácuo Ω é cíclico e separante para as álgebras locais, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \overline{\pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))\Omega} \\ A &\in \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))'', \quad A\Omega = 0 \implies A = 0 \end{aligned}, \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \quad (2.4)$$

Para uma prova, vide [3, Theorem 4.14] ou [52, Theorem 1]. Nesta segunda referência, temos uma generalização do teorema Reeh-Schlieder apresentado aqui: *todo vetor do espaço de Hilbert da representação de vácuo com a propriedade de ser analítico para a energia é cíclico e separante para todas as álgebras locais. Além disso, o subespaço gerado por esses vetores é denso no espaço de Hilbert da representação de vácuo.*

Em essência, o teorema de Reeh-Schlieder tem duas mensagens: a primeira (ciclicidade) diz que qualquer estado da álgebra de observáveis (no setor de vácuo) pode ser arbitrariamente aproximado por estados produzidos a partir do próprio estado de vácuo pela ação de observáveis localizados em regiões arbitrárias do espaço-tempo; a segunda mensagem (separabilidade) diz que a representação de vácuo é localmente fiel, ou seja, que a álgebra de observáveis não possui aniquiladores locais.⁹

Observação 19 *O teorema de Reeh-Schlieder é o fato fundamental para a existência da estrutura modular nas teoria quânticas locais.*

Propriedade de Cisão

As álgebras locais na representação de vácuo são em geral fatores hiperfinitos do tipo III₁. Esse fato é responsável por diferenças essenciais entre a teoria quântica local e a mecânica quântica. Entretanto, *propriedade de cisão* garante certas semelhanças, tais como as seguintes:

- 1) existência de estados de equilíbrio termodinâmico em qualquer temperatura [37];
- 2) unicidade do estado de vácuo (para tanto, é suficiente a chamada *propriedade de cisão distal* [61]) [26, Theorem 3.1];

⁹O teorema Reeh-Schlieder tem gerado certas discussões entre teóricos devido a supostos paradoxos decorrentes do mesmo (vide [90]). Contudo, não existe nenhum paradoxo e o caráter anti-intuitivo do teorema Reeh-Schlieder deve-se meramente à extrapolação das condições normais às quais estamos habituados: as excitações locais do vácuo não devem formar um conjunto denso no espaço de Hilbert dos estados se têm a energia limitada por dado valor - fato relacionado com o *requerimento de nuclearidade* e *propriedade split* discutidos a seguir.

3) é necessária para se definir uma noção de “entropia quântica” [122].

Essencialmente, a propriedade de cisão significa que a inclusão ‘própria’ de álgebras de observáveis é “intermediada” por um fator tipo I; precisamente:

Definição 20 (Propriedade de Cisão) Dizemos que uma representação $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ rede quântica local (\mathcal{A}, α) satisfaz a propriedade de cisão quando

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{D}, \overline{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \exists \text{ fator tipo I } \mathcal{N} \subset \mathcal{H} / \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1))'' \subset \mathcal{N} \subset \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}_2))'' \quad (2.5)$$

A propriedade de cisão é também equivalente à propriedade de que as álgebras de observáveis localizadas em regiões causalmente disjuntas sejam *estatisticamente independentes*¹⁰; precisamente:

Proposição 21 Seja $(\mathcal{R}, \mathcal{H}, U, \Omega)$ a representação de vácuo de uma rede quântica local satisfazendo a propriedade Reeh-Schlieder.

Então, são equivalentes:

- i) a representação de vácuo satisfaz a propriedade de cisão;
- ii) Para todo par de regiões $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{D}$ tais que $\overline{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{O}_2$ temos que $\mathcal{R}_0(\mathcal{O}_1)$ e $\mathcal{R}_0(\mathcal{O}_2)'$ são estatisticamente independentes.

Para uma prova, vide [85, Proposition 5.2.1].

Observação 22 Embora a propriedade de cisão não tenha uma motivação física explícita, ela é equivalente à não existência de limitações absolutas para se preparar um estado localmente [32, section 2]. Ela decorre do requerimento de nuclearidade que limita o espaço de fase da teoria, evitando os “paradoxos” do teorema Reeh-Schlieder (vide [85, section V.5.1-2] e as referências citadas).

Dualidade de Causal

10

Independência Estatística: Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 um par de álgebras de von Neumann agindo em \mathcal{H} .

Dizemos que \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 são estatisticamente independentes quando

- i) \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 comutam entre si: $[A_1, A_2] = 0 \quad \forall A_1 \in \mathcal{R}_1, A_2 \in \mathcal{R}_2$
- ii) para todo par de estados normais $\varphi_1 \in (\mathcal{R}_1)_*$, $\varphi_2 \in (\mathcal{R}_2)_*$ existe um estado normal $\varphi \in (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$ satisfazendo:
 $\varphi(A_1 A_2) = \varphi_1(A_1) \varphi_2(A_2) \quad , \quad \forall A_1 \in \mathcal{R}_1, \forall A_2 \in \mathcal{R}_2$
 (em particular, φ é uma extensão normal de φ_1 e φ_2 para $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$)

Proposição: Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert, $\mathcal{R} \subset \hat{\mathcal{R}}$ uma inclusão de fatores agindo em \mathcal{H} , e $\Omega \in \mathcal{H}$ um vetor cíclico e separante para \mathcal{R} , $\hat{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{R}' \cap \hat{\mathcal{R}}$.

Então, \mathcal{R} e $\hat{\mathcal{R}}'$ são estatisticamente independentes se e somente se

$$\text{existe um vetor } \Phi \in \mathcal{H} \text{ cíclico e separante para } \mathcal{R} \vee \hat{\mathcal{R}} \text{ tal que:}$$

$$(\Phi, AB'\Phi) = (\Omega, A\Omega)(\Omega, B'\Omega) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{R}, \forall B' \in \hat{\mathcal{R}}'$$

A dualidade causal consiste numa versão forte da localidade, no sentido de que as álgebras locais de uma rede Haag dual são maximais com respeito à essa propriedade. Outras definições de dualidade com respeito à estrutura causal também são úteis:

Definição 23 (Dualidade Causal) *Dada uma rede quântica local (\mathcal{A}, α) , definimos sua rede dual por*

$$\mathcal{A}^d : \mathcal{K} \rightarrow C^*(\mathfrak{A}) , \mathcal{A}^d(\mathcal{O}) := \mathcal{A}(\mathcal{O}')' \quad (2.6)$$

Trivialmente, a localidade da rede \mathcal{A} implica

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}^d(\mathcal{O}) , \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

Dizemos que a rede \mathcal{A} satisfaz dualidade causal quando ela é igual à sua rede dual:

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}^d(\mathcal{O}) , \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \quad (2.7)$$

Dizemos que a rede \mathcal{A} satisfaz dualidade essencial quando sua rede dual satisfaz dualidade causal:

$$\mathcal{A}^d(\mathcal{O}) = \mathcal{A}^{dd}(\mathcal{O}) , \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \quad (2.8)$$

Também dizemos que a rede \mathcal{A} satisfaz dualidade das cunhas quando

$$\mathcal{A}(W') = \mathcal{A}(W)' , \forall W \in \mathcal{W}$$

A rede dual pode não ser local, mas é fácil ver que ela satisfaz localidade se e somente se satisfaz dualidade causal!

Proposição 24 1) *Se a representação de vácuo de uma rede quântica local satisfaz dualidade das cunhas, então ela satisfaz dualidade essencial [10, Lemma 1.14.8];*

2) *Se a representação de vácuo de uma rede quântica local satisfaz a propriedade de covariância modular, então ela satisfaz dualidade das cunhas [20].¹¹*

Observação 25 *A teoria-DHR e -BF dos setores de superseleção pressupõe que a rede quântica local satisfaça dualidade essencial. Portanto, também a existência de setores de superseleção do tipo DHR e BF é uma consequência importante da propriedade de covariância modular!*

Propriedade B

Definição 26 (Propriedade B) *Uma representação de vácuo $(\pi, \mathcal{H}, U, \Omega)$ de uma rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ satisfaz a propriedade B quando para todo par de diamantes $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{D}$ tais que $\overline{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{O}_2$ vale que para toda projeção $0 \neq E \in \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1))$, existe uma isometria parcial $W \in \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}_2))$ tal que $E = WW^*$.*

¹¹A propriedade de covariância modular será definida no capítulo seguinte.

A propriedade B vale automaticamente se as álgebras locais são fatores tipo III, e nesse caso, toda projeção de uma álgebra local é dada por uma isometria parcial da própria álgebra.

Proposição 27 *Se na representação de vácuo de uma rede quântica local vale aditividade fraca, então vale a propriedade B.*

Chapter 3

Setores de Superseleção e Álgebra de Campos

Uma das motivações originais para a formulação da física quântica local [89] foi o desejo de compreender a natureza das regras de superseleção descobertas na física quântica, tais como a univalência [142]. É notável que as conquistas alcançadas nesse tópico tenham corroborado a idéia fundamental de basear a teoria nos observáveis apenas; de fato, nas análises de Doplicher-Haag-Roberts e Buchholz-Fredenhagen dos setores de superseleção, o conhecimento dos observáveis no setor de vácuo é suficiente para construir todos os demais setores, estados e campos carregados (satisfazendo os respectivos critérios de seleção) de acordo com a concepção de Wick-Wightman-Wigner [142], então realizando um “desejo físico” como um “teorema matemático”¹.

A física quântica local é formulada em termos de álgebras de operadores e não campos, embora sob algumas circunstâncias possa ser definida por uma teoria quântica de campos de Wightman. De qualquer modo, a física quântica local alcança os sucessos da teoria quântica de campos e mesmo os aprofunda. Para citar um exemplo, consideremos o caso do *teorema spin-estatística*: enquanto na teoria de Wightman o teorema spin-estatística é demonstrado assumindo que os campos de Wightman comutem ou anti-comutem em pontos causalmente disjuntos [132, seção 4.4],[97, seção 5.3], na teoria quântica local não há hipóteses sobre as relações de comutação dos campos e, entretanto, se obtém que um sistema de campos é univocamente determinado pela exigência de que os mesmos satisfaçam as relações normais de comutação [3, seção 6, teorema 6.26]; portanto,

¹Estas são literalmente as palavras de Baumgärtel em [10, seção 3.5]: “... these physical concepts [on superselection theory of Wick-Wightman-Wigner] can be established within our approach [namely, DHR superselection theory in local quantum physics], in other words, a ‘physical desire’ is transformed into a ‘mathematical theorem’.”

De fato, essas análises possuem limitações intrínsecas e, por exemplo, não descrevem os setores de superseleção associados à carga elétrica; mas isso é uma característica dessas análises, e não da teoria em si. Para uma prova de que a carga elétrica define regras de superseleção vide [134]. Para uma análise do espaço de estados da eletrodinâmica quântica vide [29].

em relação à teoria de Wightman, a teoria quântica local revela que a conexão spin-estatística não é uma propriedade intrínseca dos campos quânticos mas uma conveniente convenção (sempre possível de ser adotada quando a dimensão do espaço-tempo é superior a três)².

Observação 28 (Cargas e Campos na Física Quântica Local) *Em física quântica local, denominamos de cargas os índices dos setores de superseleção e de campos (quânticos) os operadores que interpolam diferentes setores de superseleção. Portanto, dizemos que os campos são carregados e os observáveis são neutros, pois estes mas não aqueles preservam os setores de superseleção.*

Nesta tese, chamamos de campos quantizados os campos pontuais do tipo de Wightman (definidos no capítulo 5).

Genericamente, os setores de superseleção de uma rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ são definidos como sendo classes de equivalência unitária de representações da álgebra de observáveis \mathfrak{A} e as cargas são definidas como sendo os índices desses setores

$$\text{Setor}(\mathcal{A}) := \frac{\text{representações de } \mathfrak{A}}{\text{equivalência unitária}} =: \bigcup_{\sigma \in \text{Cargas}(\mathcal{A})} \{[(\pi_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)]\}$$

Entretanto, nem todas as representações da álgebra de observáveis são fisicamente relevantes (por exemplo, para descrever partículas); portanto, a teoria dos setores de superseleção começa por selecionar uma classe particular de representações como seu objeto de análise. Dois critérios de seleção se mostram particularmente importantes [85, Sections IV.1-IV.3]: o critério DHR e o critério BF.³

Seja $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ uma teoria quântica local e $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega)$ uma representação de vácuo irredutível.

Critério 29 (DHR) *Uma representação $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ da rede \mathcal{A} é do tipo DHR quando é localizada em alguma região diamante, i.e.*

$$\exists \mathcal{O} \in \mathcal{D} / \pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \simeq \pi_\omega|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$$

Este critério seleciona setores dados por estados φ da álgebra de observáveis (via construção GNS) que se tornam indistinguíveis do estado de vácuo ω em regiões suficientemente tipo-espaço distantes, precisamente: para toda exaustão do espaço-tempo por regiões diamante $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\varphi - \omega)|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}'_n)}\| = 0$$

²Em espaço-tempo de dimensão dois ou três podem ocorrer setores apresentando *estatísticas do tipo-trança*, que não podem ser trivializadas por transformações de Klein [74].

³DHR vem de Doplicher-Haag-Roberts e BF vem de Buchholz-Fredenhagen, proponentes e pioneiros na análise dos setores selecionados por esses critérios.

Critério 30 (BF) Uma representação $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ da rede \mathcal{A} é do tipo BF quando existe uma representação unitária fortemente contínua $U_\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ implementando a ação covariante das translações espaço-temporais

$$\pi \circ \alpha(a) = adU_\pi(a) \circ \pi, \quad \forall a \in \mathbb{R}^4$$

e possuindo um gerador P_π estritamente positivo

$$\text{Spect}(M_\pi) \subset (m, \infty) \text{ para algum } m > 0, \text{ onde } M_\pi = \sqrt{P_\pi^2}$$

Este critério seleciona setores dados por estados ψ da álgebra de observáveis (via construção GNS) que descrevem um espaço-tempo com distribuição de matéria concentrada numa região finita (caso contrário, a energia poderia ser diminuída arbitrariamente pelo aumento da concentração de matéria numa região finita do espaço-tempo).

Um importante teorema mostra que o critério BF é uma generalização do critério DHR:

Teorema 31 ([35]) Se $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma representação fatorial⁴ da rede \mathcal{A} , é do tipo BF se e somente se é localizada em algum cone tipo-espaço, i.e.

$$\exists \mathcal{O} \in \mathcal{C} / \pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \simeq \pi_\omega|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}'')}$$

As representações do tipo DHR e do tipo BF são obtidas a partir do estado de vácuo por endomorfismos localizados da álgebra de observáveis locais; com efeito:

Seja $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ uma representação DHR ou BF localizada em $\mathcal{O} \in \mathcal{D}$ ou \mathcal{C} e seja uma transformação linear unitária $V : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ tal que

$$V\pi(A)V^* = \pi_\omega(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')$$

Definindo a aplicação⁵

$$\mathfrak{A}_{loc} \ni A \rightarrow \rho(A) := \pi_\omega^{-1}(V\pi(A)V^*)$$

verificamos que ρ é um endomorfismo de \mathfrak{A}_{loc} localizado em \mathcal{O} , i.e

$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}') \Rightarrow \rho(A) = A$$

e obtemos que $(\pi, \mathcal{H}_\pi, V^*\Omega)$ é unitariamente equivalente à representação GNS associada ao estado $\omega \circ \rho$

$$\omega \circ \rho(A) = (\Omega, \rho(A)\Omega) = (V^*\Omega, \pi(A)V^*\Omega)$$

⁴ π é dita ser uma representação fatorial quando as álgebras de von Neumann locais $\pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))'' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são fatores, para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{D}$.

⁵Temos que ρ é uma aplicação bem definida porque a representação de vácuo é localmente fiel.

Identificando o espaço de representação \mathcal{H}_π com \mathcal{H}_ω pela transformação unitária V obtemos

$$\pi(A) = \rho(A) \quad , \quad \forall A \in \mathfrak{A}_{loc}$$

Se a representação de vácuo é causalmente-dual, então $V \in \pi_\omega(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''$, pois

$$A' \in \mathcal{A}(\mathcal{O}') \rightsquigarrow \pi_\omega(A')V = \pi(A')V = V\pi_\omega(A')V^*V = V\pi_\omega(A') \Rightarrow V \in \pi_\omega(\mathcal{A}(\mathcal{O}'))'$$

Assim, *classes de equivalência de representações DHR ou BF módulo transformações unitárias correspondem a classes de equivalência de endomorfismos localizados da álgebra de observáveis módulo endomorfismos internos.*

Além da localização, podemos requerer também que as representações DHR ou BF sejam transportáveis, i.e. que sejam unitariamente equivalentes a representações localizadas em regiões diamante ou cone tipo-espaço arbitrárias. Nesse caso também temos uma correspondência biunívoca entre setores DHR ou BF transportáveis e classes de endomorfismos localizados transportáveis módulo endomorfismo interno

$$\text{Setor}(A) = \{[\rho]; \rho \in \Delta\}$$

onde Δ denota a classe dos endomorfismos localizados transportáveis.

A análise dos setores de DHR e BF parte dessas observações para então definir *composição* e *conjugação* de setores (ou cargas) a partir das operações naturais de composição de endomorfismos da álgebra de observáveis locais no setor de vácuo.

Teorema 32 (Conjugação de Carga) *Se $[\rho]$ é um setor irredutível com dimensão estatística finita⁶, então existe um único setor $[\bar{\rho}]$ tal que $[\rho\bar{\rho}]$ contém a representação de vácuo. Nesse caso, $[\bar{\rho}]$ também é irredutível e tem a mesma dimensão estatística de $[\rho]$.*

Dizemos que um endomorfismo localizado $\rho \in \text{End}(\mathfrak{A}_{loc})$ é $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ -covariante quando existe uma representação unitária fortemente contínua $U_\rho : \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ satisfazendo

$$\text{ad}U_\rho(\tilde{g}) \circ \rho = \rho \circ \alpha(g) \quad \forall g \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$$

A covariância de um setor sob ação do recobrimento do grupo de Poincaré $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ implica na conexão entre *spin* e *estatística*:

⁶Quando um setor possui dimensão estatística finita, ele se comporta como um sistema de partículas do tipo para-bosons ou para-férmions.

Teorema 33 (Spin-Estatística) *Seja $\rho \in \text{End}(\mathfrak{A}_{loc})$ um endomorfismo localizado pertencente a um setor irredutível com dimensão estatística finita e $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ -covariante.*

Então, se a representação covariante de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ deste setor possui uma subrepresentação irredutível de massa $m > 0$ e spin s , vale

$$(-1)^{2s} = \text{sign}(d_\rho)$$

onde $d_\rho \in \mathbb{R}$ é a dimensão estatística do setor.

Um tratamento unificado de todos os setores de superseleção é realizado pela introdução de operadores interpolando diferentes setores. Essa é a razão para definirmos um sistema de campos locais para uma teoria quântica local, em analogia à própria definição desta⁷:

Definição 34 (Sistema de Campos Locais) *Sejam $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ uma rede quântica local e G um grupo de Lie.*

Um sistema de campos locais com simetria de gauge G para $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ é uma 4-upla $(\mathcal{F}, \gamma, \hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi})$ onde temos definido

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &\text{ é um espaço de Hilbert separável} \\ \mathcal{F} : \mathcal{C} &\rightarrow W^*(\mathcal{H}) \text{ é uma aplicação} \\ \gamma : G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{F}) \text{ é uma representação} \\ \hat{\pi} : \mathfrak{A} &\rightarrow B(\mathcal{H}) \text{ é uma representação} \end{aligned}$$

e também

$$\mathfrak{F} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(\mathcal{O})} \subset B(\hat{\mathcal{H}})$$

satisfazendo:

0) Extensão

Existe um subespaço $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$ invariante sob $\hat{\pi}(\mathfrak{A})$ tal que:

0.i) $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \supset \hat{\pi}(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$, $\forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}$;

0.ii) $(\hat{\pi}|_{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$ é uma representação de vácuo irredutível de (\mathcal{A}, α) .

i) Isotonia

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{C}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$$

ii) Localidade

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{C}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Rightarrow \hat{\pi}(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)'$$

⁷A definição considera a rede de campos indexada pela classe dos cones tipo-espaço para incluir setores tipo BF.

iii) *Simetria de Gauge Global*

$$\gamma(g)|_{\mathcal{F}(\mathcal{O})} \in \text{Aut}(\mathcal{F}(\mathcal{O})) \quad , \quad \forall g \in G, \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}$$

$$\hat{\pi}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}^G := \{F \in \mathfrak{F} / \gamma(g)F = F, \forall g \in G\}$$

$$\hat{\pi}(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{F}(\mathcal{O})^G := \mathcal{F}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{F}^G \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}$$

iv) *Irredutibilidade*

$$\mathfrak{F}' = \mathbb{C}1$$

v) *Propriedade Reeh-Schlieder*

$$\overline{\mathcal{F}(\mathcal{O})\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}$$

vi) *Relações Normais de Comutação* Dizemos que a rede de campos $(\mathcal{F}, \gamma, \hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi})$ tem uma estrutura graduada quando existe um elemento central involutivo não-trivial do grupo de gauge, i.e.

$$\mathfrak{z} \in Z(G) / \mathfrak{z} \neq 1, \mathfrak{z}^2 = 1$$

a partir do qual definimos o operador-twist

$$Z := \frac{1 + i\gamma(\mathfrak{z})}{1 - i} \in \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$$

e a univalência dos campos

$$F \in \mathfrak{F} \text{ é um campo } \begin{cases} \text{bosônico} \\ \text{fermiônico} \end{cases} \text{ sse } \begin{cases} \gamma(\mathfrak{z})F = F \\ \gamma(\mathfrak{z})F = -F \end{cases}$$

Nesse caso, dizemos que a rede \mathcal{F} satisfaz as relações normais de comutação com respeito a estrutura graduada definida por \mathfrak{z} quando

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{C}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}'_2 \Rightarrow Z\mathcal{F}(\mathcal{O}_1)Z^* \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)'$$

Em particular, se F_1^\pm, F_2^\pm são campos bosônicos/fermiônicos localizados em regiões causalmente disjuntas, temos

$$F_1^+ F_2^\pm = F_2^\pm F_1^+ \quad , \quad F_1^- F_2^- = -F_2^- F_1^-$$

vii) *Completeza* Dizemos que a rede de campos é completa para uma classe de setores de superseleção $\Gamma \subset \text{Sect}(\mathcal{A})$ quando estes setores são unitariamente equivalentes a subrepresentações de $(\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}})$.

Os campos estão agrupados em famílias associadas às subrepresentações irredutíveis de $\hat{\pi} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}})$:

$$(\pi_\rho, \mathcal{H}_\rho) \text{ subrepres. irredutível} \iff \mathcal{F}_\rho \text{ subfamília de campos tais que}$$

$$\mathcal{H}_\rho = \mathcal{F}_\rho \mathcal{H} \text{ e } \pi_\rho(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{F}_\rho \pi(\mathcal{A}(\mathcal{O})) \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}$$

Teorema 35 (Construção DR [62]) *Seja $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ é uma rede quântica local cuja representação de vácuo satisfaz a propriedade B.*

Então existe um sistema de campos locais com simetria de gauge global compacta satisfazendo as relações normais de comutação e completa para a classe de setores de superseleção do tipo-DHR.

Além disso, vale a relação de conjugação de carga, i.e. para todo setor DHR $[\rho]$ irredutível com dimensão estatística finita vale

$$\mathcal{F}_{[\bar{\rho}]}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}_{[\rho]}^*(\mathcal{O}) \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}$$

e a estrutura graduada do sistema de campos corresponde à dimensão estatística dos setores de superseleção, i.e. para todo setor DHR $[\rho]$ irredutível com dimensão estatística finita e $\widehat{\mathcal{P}}_+^\dagger$ -covariante vale

$$\gamma(\mathfrak{z})|_{\mathcal{F}_{[\rho]}} = \text{sinal}(d_\rho)$$

Este teorema possui uma generalização para o caso de setores do tipo-BF em [62].

Para uma análise completa da teoria DHR vide [3, Chapter 6], [85, Chapter IV], [10, Chapter 2] ou os artigos originais [59],[60]; e para o caso da teoria BF vide [85, Chapter IV],[62] ou o artigo original [35].

Chapter 4

Estrutura Modular da Física Quântica Local

Definirmos a estrutura modular da rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ de acordo com a teoria de Tomita-Takesaki apresentada no Apêndice B.1. Para isso, precisamos lidar com estados da rede que sejam *localmente padrão*:

Definição 36 (Estado Localmente Padrão) *Seja $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ e $(\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ a representação da rede \mathcal{A} gerada por φ .*

Dizemos que φ é um estado localmente padrão de \mathcal{A} quando Ω_φ é um vetor cíclico e separante para toda álgebra de observáveis local, i.e.

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O})\Omega_\varphi} = \mathcal{H}_\varphi \\ A \in \mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}), A\Omega_\varphi = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}, \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

Pelo teorema de Reeh-Schlieder (2.4), toda rede quântica local (satisfazendo aditividade fraca) possui uma miríade de estados localmente padrão, sendo o vácuo o mais notável deles.

Definição 37 (Estrutura Modular) *Seja $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ é um estado localmente padrão de \mathcal{A} . Então, para cada $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ temos que $(\mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}), \Omega_\varphi)$ é uma álgebra de von Neumann padrão em \mathcal{H}_φ , donde temos definido o correspondente operador de Tomita $(S_{\varphi, \mathcal{O}}, \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{O}))$: $S_{\varphi, \mathcal{O}}$ é o (único) operador fechado de \mathcal{H}_φ tendo $\mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O})\Omega_\varphi$ como core e ação*

$$S_{\varphi, \mathcal{O}}A\Omega_\varphi = A^*\Omega_\varphi, \forall A \in \mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O})$$

Nesse caso, $\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{O}) := \text{Dom}(S_{\varphi, \mathcal{O}})$ é um subespaço vetorial denso em \mathcal{H}_φ (fechado na topologia do gráfico de $S_{\varphi, \mathcal{O}}$).

A conjugação modular $J_{\varphi, \mathcal{O}}$ e o operador modular $(\Delta_{\varphi, \mathcal{O}}, \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{O}))$ são definidos (univocamente) pela decomposição polar [113, Section VIII.3] de $S_{\varphi, \mathcal{O}}$

$$S_{\varphi, \mathcal{O}} = J_{\varphi, \mathcal{O}}\Delta_{\varphi, \mathcal{O}}^{1/2} \begin{cases} J_{\varphi, \mathcal{O}} \text{ é uma involução anti-unitária} \\ \Delta_{\varphi, \mathcal{O}} \text{ é um operador auto-adjunto positivo} \end{cases}$$

Também temos definidos a involução modular e o grupo modular agindo em \mathfrak{A} , via representação π_φ :

$$j_{\varphi, \mathcal{O}} := \pi_\varphi^{-1} \circ \text{ad} J_{\varphi, \mathcal{O}} \circ \pi_\varphi, \quad \sigma_{\varphi, \mathcal{O}}^t := \pi_\varphi^{-1} \circ \text{ad} \Delta_{\varphi, \mathcal{O}}^t \circ \pi_\varphi \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(Estes endomorfismos estão bem definidos sobre \mathfrak{A} porque π_φ é localmente fiel e $\mathfrak{A}_{\text{loc}}$ é denso em \mathfrak{A} !)

Definição 38 (Estrutura Modular) A estrutura modular da rede quântica local \mathcal{A} gerada pelo estado localmente padrão $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ é definida pela correspondência

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}) := \{\xi \in \text{Dom}(S_{\varphi, \mathcal{O}}); S_{\varphi, \mathcal{O}}\xi = \xi\}$$

Nesse caso, chamamos o domínio $\mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O})$ de subespaço modular de $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$.

De acordo com o Apêndice B.2, definimos o complemento simplético de um subconjunto $K \subset \mathcal{H}_\varphi$ por

$$K' := \{\zeta \in \mathcal{H}_\varphi / \mathfrak{S}(\zeta, \eta) = 0, \forall \eta \in K\}$$

Esta definição nos permite traduzir para o espaço de Hilbert a estrutura local da álgebra de observáveis, no sentido seguinte¹

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}, \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Rightarrow \mathcal{R}_{sa}(\mathcal{O}_1)\Omega \subset (\mathcal{R}_{sa}(\mathcal{O}_2)\Omega)'$$

Proposição 39 Seja $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ um estado localmente padrão da rede \mathcal{A} .

Temos que a estrutura modular gerada por φ é um lattice simplicemente local de operadores de $\mathcal{H}_{\varphi, R}$, i.e. satisfaz:

i) **Isotonia**

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_2)$$

ii) **Localidade simplética**

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_2)'$$

Além disso, se φ é invariante sob ação do grupo de Poincaré,

$$\varphi \circ \alpha(g) = \varphi, \quad \forall g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$$

e $U : \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\varphi, R})$ é a implementação unitária de α , então vale:

iii) **Covariância**

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K}, g \in \mathcal{P}_+^\uparrow \Rightarrow U(g)\mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}) = \mathcal{H}_{\varphi, R}(g\mathcal{O})$$

¹Então, o sinal (') significa respectivamente o complemento causal, o comutante, ou o complemento simplético quando aplicado a uma região do espaço-tempo, a uma álgebra, ou a um subconjunto de vetores no espaço de Hilbert, respectivamente.

Prova. Estas propriedades seguem-se trivialmente das propriedades correspondentes da rede quântica local. O único caso menos óbvio é a localidade simplética, portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Rightarrow \mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}_2)' \\ \Rightarrow \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}_2)'\Omega \end{aligned}$$

Mas $[\mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}_2)']_{s\alpha}\Omega = \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_2)'$, donde $S_{\varphi, \mathcal{O}_1} \subset S_{\varphi, \mathcal{O}_2}^*$ (pelo teorema de Tomita-Takesaki e propriedades elementares dos operadores modulares)². ■

4.1 Estrutura Modular da Representação de Vácuo

Nesta seção, consideramos a estrutura modular da representação de vácuo $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H}, \Omega)$ da rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$.

Mesmo no contexto mais geral das teorias quânticas locais, temos o seguinte teorema

Teorema 40 (Relações de Comutação de Borchers - RCB [18]) *Para qualquer região cunha $W \in \mathcal{W}$, os operadores modulares e as translações satisfazem as seguintes relações de comutação:*

$$\begin{cases} i) J_W U(a) = U(r_W a) J_W \\ ii) \Delta_W^{it} U(a) = U(\Lambda_W(-t)a) \Delta_W^{it} \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^4$$

onde r_W é a reflexão no eixo do cunha W e Λ_W é o W -boost (def. 19).

²Para clareza, apresentamos aqui uma demonstração da localidade-simplética do lattice de subespaços modulares diretamente a partir do teorema de Tomita-Takesaki. Com efeito, dados

$$A, B \in \mathcal{R}_\varphi(\mathcal{O}_1)_{s\alpha}, \quad \xi = A\Omega \in \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_1), \quad \eta = J_{\varphi, \mathcal{O}_1} B\Omega \in \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_2)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \psi) &= \mathfrak{S}(A\Omega, J_{\mathcal{O}_1} B\Omega) \\ &= \mathfrak{S}(A\Omega, \Delta_{\mathcal{O}_1}^{1/2} \Delta_{\mathcal{O}_1}^{-1/2} J_{\mathcal{O}_1} B\Omega) \\ &= \mathfrak{S}(\Delta_{\mathcal{O}_1}^{1/2} A\Omega, \Delta_{\mathcal{O}_1}^{-1/2} J_{\mathcal{O}_1} B\Omega) \\ &= \mathfrak{S}(J_{\mathcal{O}_1} J_{\mathcal{O}_1} \Delta_{\mathcal{O}_1}^{1/2} A\Omega, J_{\mathcal{O}_1} \Delta_{\mathcal{O}_1}^{1/2} B\Omega) \\ &= \mathfrak{S}(J_{\mathcal{O}_1} S_{\mathcal{O}_1} A\Omega, S_{\mathcal{O}_1} B\Omega) \\ &= \mathfrak{S}(J_{\mathcal{O}_1} A\Omega, B\Omega) \\ &= -\mathfrak{S}(A\Omega, J_{\mathcal{O}_1} B\Omega) \\ &= -\mathfrak{S}(\xi, \eta) \\ &\Rightarrow \mathfrak{S}(\xi, \eta) = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{H}_{\varphi, R}(\mathcal{O}_1)'$$

Para uma prova simplificada, vide [70].

A primeira consequência das RCB é a *invariância modular da massa*, ou seja:

Corolário 41 *Os operadores modulares das regiões cunha comutam com o operador de massa $M = \sqrt{P^2}$,*

$$[S_W, M] = [J_W, M] = [\Delta_W, M] = 0, \quad \forall W \in \mathcal{W} \quad (4.1)$$

Prova. Defina os operadores (geradores infinitesimais das translações tipo-luz)

$$P_{\pm}^k := \left(\frac{1}{\sqrt{3}} P^0 \pm P^k \right), \quad k = 1, 2, 3$$

Pela condição espectral, vale

$$P_{\pm}^k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3$$

Pela comutatividade das componentes do operador energia-momentum, vale

$$M^2 = P_{\mu} P^{\mu} = \sum_{k=1}^3 P_{+}^k P_{-}^k$$

Pela covariância de Poincaré (já que os operadores P_{\pm}^k são geradores das translações tipo-luz), vale

$$e^{iP_{\pm}^k s} \Omega = \Omega \\ \text{ade}^{\pm i s P_{\pm}^k} |_{\mathcal{R}(W)} \in \text{End}(\mathcal{R}(W)), \quad \forall s \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, 3$$

Portanto, pelas relações de comutação de Borchers (lembramos que $J_W^2 = 1$),

$$\begin{aligned} [M^2, J_W] &= \sum_{k=1}^3 (P_{+}^k P_{-}^k J_W - J_W P_{+}^k P_{-}^k) \\ &= J_W \sum_{k=1}^3 ((J_W P_{+}^k J_W) (J_W P_{-}^k J_W) - P_{+}^k P_{-}^k) \\ &= J_W \sum_{k=1}^3 ((-P_{+}^k) (-P_{-}^k) - P_{+}^k P_{-}^k) = 0 \end{aligned}$$

e, considerando o fato de que P_{-}^k e P_{+}^k satisfazem as RCB com sinais opostos

(lembramos que $(\Delta_W^{it})^* \Delta_W^{it} = 1$),

$$\begin{aligned}
 [M^2, \Delta_W^{it}] &= \sum_{k=1}^3 (P_+^k P_-^k \Delta_W^{it} - \Delta_W^{it} P_+^k P_-^k) \\
 &= \Delta_W^{it} \sum_{k=1}^3 ((\Delta_W^{-it} P_+^k \Delta_W^{it}) (\Delta_W^{-it} P_-^k \Delta_W^{it}) - P_+^k P_-^k) \\
 &= \Delta_W^{it} \sum_{k=1}^3 ((e^{2\pi t} P_+^k) (e^{-2\pi t} P_-^k) - P_+^k P_-^k) = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$[M^2, S_W] = 0$$

■

As relações de comutação de Borchers são exatamente aquelas que deveriam ser satisfeitas se os operadores modulares J_W and Δ_W^{it} atuassem geometricamente como a W -reflexão r_W e o W -boost $\Lambda_W(-2\pi t)$, respectivamente.

Notamos que Borchers em [?] apresenta duas propriedades (*dualidade-cunha* e *condição de realidade*) equivalentes à ação geométrica dos operadores modulares dos cunhas; e que Brunetti-Guido-Longo em [27] provaram ser as relações de comutação de Borchers características de representações covariantes do grupo de Poincaré com energia positiva.

Covariância Modular

A *covariância modular* estabelece uma relação intrínseca entre a estrutura modular e a simetria espaço-temporal, sendo uma propriedade característica do setor de vácuo das teorias quânticas locais. Em termos gerais, a *covariância modular significa que os operadores modulares das regiões cunha agem geometricamente como transformações de Poincaré*. Os teoremas de Bisognano-Wichmann e de Mund (abaixo) mostram a generalidade dessa propriedade das teorias quânticas locais, sendo (em algum sentido) patológicos os casos conhecidos em que os operadores modulares das regiões cunha não agem geometricamente, tais como nos exemplos de Oksak-Todorov em [108] (com campos tendo infinitas componentes) ou de Yngvason em [150] (com campos não covariantes sob ação do grupo de Lorentz).

Exceto nas teorias com simetria conforme (visto que as transformações conformes transformam cunhas em cones-de-luz e em regiões diamantes) não é possível que os operadores modulares atuem geometricamente para outras regiões que não sejam cunhas, conforme mostra o seguinte argumento:

A ação não-geométrica dos operadores modulares de regiões diferentes de cunhas

Seja $(\mathcal{R}, \mathcal{H}, U, \Omega)$ o setor de vácuo de uma teoria quântica local. Para simplificar o argumento, assumimos dualidade causal e nos restringimos a regiões do tipo diamante.

Seja $\mathcal{O} \in \mathcal{D}$ uma região diamante. O teorema de Tomita-Takesaki implica

$$J_{\mathcal{O}} \mathcal{R}(\mathcal{O}) J_{\mathcal{O}} = \mathcal{R}(\mathcal{O}') \quad , \quad \Delta_{\mathcal{O}}^{it} \mathcal{R}(\mathcal{O}) \Delta_{\mathcal{O}}^{-it} = \mathcal{R}(\mathcal{O})$$

Como \mathcal{O} é uma região limitada e (portanto) \mathcal{O}' é uma região ilimitada, não existe nenhuma transformação de Poincaré que aplique uma na outra, donde concluímos que $J_{\mathcal{O}}$ não pode agir geometricamente como uma transformação de Poincaré.

Como as únicas transformações de Poincaré aplicando a região \mathcal{O} em si mesma são as rotações espaciais modificadas por certa transformação de Poincaré (aquela que conecta \mathcal{O} com um diamante padrão centrado na origem), o grupo modular (que tem um gerador não limitado) não pode corresponder a um subgrupo desse grupo (compacto) de rotações modificadas.

Também não é possível que os operadores modulares das regiões cunha atuem geometricamente senão pelos correspondentes cunha-boosts, conforme [100],[101].

Definição 42 (Covariância Modular) *Dizemos que a representação de vácuo satisfaz a propriedade de covariância modular quando para todo cunha $W \in \mathcal{W}$ vale*

$$ad\Delta_W^{it} = adU(\Lambda_W(-2\pi t)) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

A propriedade de covariância modular implica automaticamente na ação geométrica da conjugação modular de cunhas:

Teorema 43 (Conjugação Modular e CPT) *Se a representação de vácuo satisfaz a propriedade de covariância modular, então a teoria possui simetria CPT Θ e para toda região cunha $W \in \mathcal{W}$ vale*

$$J_W = U(r'_W) \Theta$$

onde r'_W é a rotação definida pela equação 19.

Para uma prova vide [80].

O teorema de Bisognano-Wichmann marcou o início da “revolução modular” na física quântica local:

Teorema 44 (Bisognano-Wichmann [13]) *Se a teoria quântica local é afiliada a uma teoria de Wightman (vide [132], [3, Section 4.8]), então ela satisfaz a propriedade de covariância modular.*

Esboço da prova. para o caso de um campo escalar $\Phi(x)$ [85, Section V.4.1].

1) Pela covariância de Poincaré, a prova se reduz ao caso dos operadores modulares do cunha W_1 ;

2) O teorema Reeh-Schlieder implica que o conjunto de vetores localizados em W_1

$$D_1 := \left\{ \begin{array}{l} \Phi(f_1) \Phi(f_2) \dots \Phi(f_n) \Omega, f_1, \dots, f_n \in S(W_1) \\ \text{supp}(f_k) - \text{supp}(f_{k-1}) \subset W_1 \quad \forall k = 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

é denso no espaço de Hilbert.

3) A condição espectral implica que a ação dos boosts $U(\Lambda_1(t))$ tem uma extensão analítica na faixa $st(0, \pi)$, definida sobre D_1 ;

4) Então, podemos definir o seguinte operador sobre D_1

$$S_{W_1} = \Theta U(r'_1(\pi)) U(\Lambda_1(i\pi))$$

cuja ação é dada por (r é o número de índices spinoriais não-pontuados do campo Φ)

$$\begin{aligned} S_{W_1} \Phi(f_1) \Phi(f_2) \dots \Phi(f_n) \Omega &= (-1)^{2nr} \Phi(f_1)^* \Phi(f_2)^* \dots \Phi(f_n)^* \Omega \\ &= (-1)^{2nr} (\Phi(f_1) \Phi(f_2) \dots \Phi(f_n))^* \Omega \end{aligned}$$

sendo que a segunda igualdade segue-se da comutação dos campos espalhados devido ao fato do suporte das funções teste serem mutuamente causalmente disjuntos (localidade).

A conjugação modular e o operador modular são dados respectivamente por

$$J_{W_1} = \Theta U(r'_1), \quad \Delta_{W_1} = e^{-2\pi K_{W_1}}$$

onde K_{W_1} é o gerador dos boosts $U(\Lambda_1(t))$. ■

A covariância modular vale para teorias estritamente massivas satisfazendo completude assintótica (condições para a aplicação da teoria de espalhamento de Haag-Ruelle):

Teorema 45 (Mund [106]) *Se a teoria quântica local satisfaz completude assintótica e o espectro do operador momentum possui 'gap' de massa, então ela satisfaz a propriedade de covariância modular.*

Esboço da prova. Notamos os seguintes fatos:

1) Pelas hipóteses e relações de comutação de Borchers, cada subrepresentação irredutível (do recobrimento universal) do grupo de Poincaré ocorre com sua representação conjugada, de modo que podem ser unidas para formar uma representação própria (da extensão unitária do recobrimento universal) do grupo de Poincaré próprio.

2) Vale covariância modular espacial para representações próprias do grupo de Poincaré (Parte III) e também para teorias livres (por "verificação direta");

3) Como a teoria satisfaz completude assintótica e possui apenas partículas massivas, a representação de vácuo pode ser realizada no espaço de Fock definido pelos subespaços de uma-partícula, de acordo com a teoria do espalhamento [3, Chapter 5];

4) A teoria do espalhamento estabelece que a interação não modifica a ação da parte conexa do grupo de Poincaré próprio, mas apenas a ação da parte não-conexa e justamente pela multiplicação do operador espalhamento, que é Poincaré-invariante. Portanto, a covariância modular da teoria segue-se da covariância modular das teorias livres (vide Capítulo 13). ■

Nós reconhecemos que as dificuldades para estender o teorema de Mund a teorias com espectro de partículas mais gerais devem-se à complexidade da teoria de espalhamento para partículas de massa zero. Entretanto, teorias quânticas locais conformes também satisfazem a propriedade de covariância modular [81].

Chapter 5

Teoria dos Campos Quantizados

A teoria geral dos campos quantizados baseia-se nos mesmos princípios físicos que a teoria quântica local. Entretanto, a física quântica local se mostra mais adequada do que a teoria quântica de campos quantizados para descrever partículas elementares e fenômenos relacionados em física de altas energias, pelos seguintes motivos:

- 1) Por sua simplicidade conceitual e rigor matemático, como extensão da mecânica quântica incorporando o princípio de localidade;
- 2) Por ser intrínseca, em contraste com a multiplicidade de sistemas de campos quantizados relacionados com a mesma matriz de espalhamento;
- 3) Por não apresentar divergências ultravioletas. (Lembramos que as divergências infravermelhas são características da física quântica local tanto quanto da teoria dos campos quantizados, correspondendo ao fenômeno de *polarização do vácuo*.)

Embora não sejam formulações equivalentes, um sistema de campos quantizados satisfazendo certas condições gerais define naturalmente uma rede quântica local. Isso nos motiva a dizer que os campos quantizados desempenham na física quântica local um papel análogo ao dos sistemas de coordenadas em geometria diferencial: servem para “parametrizar” as álgebras locais.

Axioma 46 (Sistema de Campos Quantizados) *Um sistema de campos quantizados é uma família $\{\Phi_k\}_{k=1}^n$ de distribuições em $S(\mathcal{M})$ tomando valores em operadores agindo num espaço de Hilbert \mathcal{H} e satisfazendo as seguintes propriedades:*

0) Campos Espalhados. Para cada $f \in S(\mathcal{M})$, $\Phi_k(f)$ é um operador fechado (possivelmente não-limitado) agindo sobre \mathcal{H} , para todo $k = 1, \dots, n$.

Existe um subespaço linear denso $D \subset \mathcal{H}$ que é um domínio invariante e comum para todos os campos espalhados e seus conjugados:

$$\begin{cases} D \subset \text{Dom}(\Phi_k(f)) \cap \text{Dom}(\Phi_k^*(f)) \\ \Phi_k(f) D \subset D, \Phi_k^*(f) D \subset D \end{cases}, \forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$$

Para todo $\varphi, \psi \in D$, a correspondência

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}) \ni f \rightarrow (\varphi, \Phi_k(f)\psi)$$

é uma distribuição linear contínua sobre \mathbb{C} .

1) *Localidade.* Valem as relações normais de comutação:¹

$$\begin{aligned} [\Phi_k^{(*)}(f), \Phi_l^{(*)}(g)](\varphi) = 0 \text{ ou } \{\Phi_k^{(*)}(f), \Phi_l^{(*)}(g)\}(\varphi) = 0 \\ \forall \varphi \in D, \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), \text{supp}(f) \times \text{supp}(g), k, l = 1, \dots, n \end{aligned}$$

2) *Covariância.* Existe uma representação unitária $U : \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, induzida por uma representação espinorial $V : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} U(a, \bar{\Lambda}) D = D, \forall (a, \bar{\Lambda}) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \\ U(a, \bar{\Lambda}) \Phi_k(f) = \sum_{j=1}^n V(\bar{\Lambda}^{-1})_{kj} \Phi_j(f_{(a, \bar{\Lambda})}) \end{aligned}$$

onde

$$f_{(a, \bar{\Lambda})}(x) = f(\bar{\Lambda}^{-1}(x - a)), \forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$$

O operador energia momentum P^μ é identificado com o gerador infinitesimal das translações espaço-temporais:

$$U(a) = e^{iP \cdot a}, \forall a \in \mathcal{M}$$

3) *Condição Espectral.* Identificamos o operador (vetorial) energia-momentum P com o gerador das translações espaço-temporais:

$$U(a) = e^{ia \cdot P}$$

A condição espectral é uma propriedade da representação U suficiente para garantir a estabilidade do sistema quântico:

$$\text{Spect}(P) \subset \{0\} \cup \overline{V_m}$$

¹Os colchetes $[\]$ denotam a operação de comutação e as chaves $\{\ \}$ denotam a operação de anti-comutação entre pares de campos.

Também temos usado a notação $\Phi_k^{(*)}$ para denotar simultaneamente o campo Φ_k e seu conjugado Φ_k^* .

onde

$$m > 0, \quad \overline{V}_m := \{p \in \mathcal{M} / p^2 \geq m^2, p^0 > 0\}$$

4) **Estado de Vácuo.** Existe um vetor $\Omega \in \mathcal{H}$ satisfazendo as seguintes condições

$$\text{Invariância sob Poincaré: } U(a, \bar{\Lambda}) \Omega = \Omega$$

$$\text{Ciclicidade} \quad : \quad \overline{*}\text{-álgebra}\{\Phi(f); f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})\} \Omega = \mathcal{H}$$

este vetor corresponde ao auto-valor 'zero' (não-degenerado) do operador energia-momentum.

Para cada par de estados $\varphi, \psi \in D$, temos definida a seguinte família de distribuições multilineares:

$$N \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{S}(\mathcal{M}) \ni f_1, \dots, f_N \rightarrow \langle \varphi, \Phi_{k_1}(f_1) \dots \Phi_{k_N}(f_N) \psi \rangle$$

Definição 47 (Funções de Wightman) Chamamos de 'funções de Wightman' ou de 'valores esperados no vácuo' as distribuições

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}) \ni f_1, \dots, f_N \rightarrow \langle \Omega, \Phi_{k_1}(f_1) \dots \Phi_{k_N}(f_N) \Omega \rangle$$

O conjunto das funções de Wightman é suficiente para caracterizar uma teoria de campos quantizados:²

Teorema 48 (Teorema de Reconstrução de Wightman [145]) Uma teoria de campos quantizados é univocamente caracterizada por sua família de funções de Wightman. Além disso, o conhecimento de uma tal família é suficiente para se reconstruir toda a teoria.

Para uma prova, vide o artigo original [145] ou [132, Section 3-4],[14, Theorem 8.6].

A teoria quântica local e a teoria dos campos quantizados estão baseadas nos mesmos princípios e também possuem propriedades análogas, tais como a *propriedade Reeh-Schlieder (teorema 18)* [114],[132, Theorem 4-2],[14]; o *Teorema PCT (teoremas 44,45)* [110],[132, Theorem 4-7],[14]; a *conexão spin-estatística (teorema 33)* [109],[132, Theorem 4-10],[14]. Portanto, é natural que busquemos relacionar explicitamente as estruturas matemáticas de ambas as teorias. No que segue, veremos como uma teoria de campos quantizados pode definir uma teoria quântica local e indicaremos as razões que obstruem realização do caminho inverso.

²O teorema de reconstrução de Wightman é o análogo na teoria dos campos quantizados da construção GNS da representação de vácuo na teoria quântica local.

A álgebra polinomial universal e as álgebras polinomiais locais da teoria são definidas pelas *-álgebras geradas pelos campos espalhados:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &:= \text{*}-\text{álgebra} \{ \Phi_k(f); f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}); k = 1, \dots, N \} \\ \mathcal{O} \in \mathcal{K} &\rightsquigarrow \mathfrak{F}(\mathcal{O}) := \text{*}-\text{álgebra} \{ \Phi_k(f); f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), \text{supp}(f) \subset \mathcal{O}; k = 1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Essas são álgebras de operadores não-limitados, mas podemos obter operadores limitados *afiliados*, caracterizado pela definição de *comutante fraco*:

Definição 49 Dizemos que um operador limitado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ‘*comuta fracamente*’ com outro operador (possivelmente não-limitado) $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ quando

$$(F\varphi, A\psi) = (A^*\varphi, F^*\psi) \quad , \quad \forall \varphi, \psi \in \text{Dom}(F)$$

Se $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{F}$ é uma álgebra de operadores com domínio comum, denotamos por \mathfrak{K}^w o conjunto de todos os operadores limitados que comutam fracamente com os elementos de \mathfrak{K} :

$$\mathfrak{K}^w := \{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid A \text{ comuta fracamente com todo } F \in \mathfrak{K} \}$$

Dizemos que um operador fechado $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é *afiliado* a uma ‘álgebra de von Neumann’ $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ quando o unitário e as projeções espectrais de sua decomposição polar pertencem à \mathcal{R} .

Se $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{F}$ é uma *-subálgebra, então é quase trivial verificar que \mathfrak{K}^w é um subespaço linear de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ fechado sob a operação de conjugação; mas não temos garantido que este constitui-se numa álgebra de operadores limitados. Por isso, em geral não somos capazes de definir teorias quânticas locais a partir de teorias de campos quantizados; entretanto, nas condições naturais isso pode ser feito:

Teorema 50 (Campos&Álgebras) Se o sistema de campos quantizados consiste de campos estritamente massivos, ou de um campo escalar, e as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \text{CA.i)} \quad \mathfrak{F}(\mathcal{O})^w &\text{ é uma álgebra, } \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \\ \text{CA.2)} \quad \overline{\cup_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathfrak{F}(\mathcal{O})^w} \Omega &= \mathcal{H} \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (5.2)$$

então, a aplicação

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O}) := (\mathfrak{F}(\mathcal{O})^w)' = \text{proj} \mathfrak{F}(\mathcal{O})'' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (5.3)$$

é uma rede quântica local com respeito à ação covariante do grupo de Poincaré adU . Aqui denotamos por $\text{proj} \mathfrak{F}(\mathcal{O})$ o conjunto dos unitários e das projeções espectrais da decomposição polar das extensões fechadas dos elementos de $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$. Em particular, os operadores em $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$ são afiliados à $\mathcal{R}(\mathcal{O})$.

Para uma prova vide [31], e para outras considerações do problema vide [34].
A identidade

$$(\mathfrak{F}(\mathcal{O})^w)' = \text{proj} \mathfrak{F}(\mathcal{O})''$$

pode ser deduzida a partir do *teorema espectral* [113, Section VIII.3] e do *teorema bicomutante* de von Neumann.³

Observação 51 *Não existe uma proposição converso deste teorema, mas na presença de simetria conforme existem alguns resultados parciais alcançados, de fato: a partir de teorias quirais locais é possível definir teorias de campos quantizados [96, e referências citadas].⁴*

A condição de localidade relativa é suficiente para que dois sistemas de campos quantizados definam a mesma rede quântica local:

³É equivalente mostrar que para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$, vale

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O})^w = \text{proj} \mathfrak{F}(\mathcal{O})'$$

É trivial a inclusão

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O})^w \supset \text{proj} \mathfrak{F}(\mathcal{O})'$$

Para mostrar a inclusão inversa, podemos reduzir nossas considerações ao caso dos operadores auto-adjuntos, já que qualquer $*$ -álgebra é gerada linearmente por seus elementos auto-adjuntos.

Assim, sejam $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{O})^w$ auto-adjunto, $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{O})$ também auto-adjunto e $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a correspondente medida-espectral. Portanto, para todos $\varphi \in D$ temos

$$(A\varphi, F\varphi) = (F\varphi, A\varphi) = \overline{(A\varphi, F\varphi)}$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda) (A\varphi, P_\lambda \varphi) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) (P_\lambda \varphi, A\varphi) d\lambda, \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R})$$

donde (simbolicamente)

$$(A\varphi, P_\lambda \varphi) = (P_\lambda \varphi, A\varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Como $\varphi \in D$ é arbitrário e D é denso em \mathcal{H} , pela *identidade de polarização* concluímos que A comuta com as projeções espectrais de F ; e como $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{O})$ também é arbitrário, concluímos que $A \in \text{proj} \mathfrak{F}(\mathcal{O})'$.

⁴A situação nas teorias quirais conforme descrita por [96] pode ser sumarizada pelas seguintes observações:

- Para qualquer teoria quiral local, pode ser construído um sistema de campos locais que geram as álgebras de observáveis locais no sentido do teorema acima. Entretanto, não se sabe se este sistema de campos locais satisfaz os axiomas que caracterizam a teoria dos campos quantizados (pela falta de determinação de um domínio comum a todos os campos espalhados);
- Para qualquer teoria quiral local, é possível definir um sistema de funções de Wightman satisfazendo as condições necessárias para gerar uma teoria de campos quantizados (via teorema de reconstrução de Wightman). Entretanto, não se sabe se esta teoria reconstruída gera as álgebras de observáveis locais original - em particular, não se sabe se essas duas construções acima geram o mesmo sistema de campos quânticos locais.

Teorema 52 *Sejam $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ e $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\hat{N}}$ dois sistemas de campos quantizados bosônicos sobre o mesmo espaço de Hilbert \mathcal{H} , covariantes com respeito à mesma representação do grupo de Poincaré U e, portanto, tendo o mesmo estado de vácuo $\Omega \in \mathcal{H}$.*

Suponha que os sistemas de campos quantizados sejam relativamente locais, i.e. têm o mesmo domínio invariante $D \subset \mathcal{H}$ e satisfazem:

$$[\Phi_k(f), \Psi_{\hat{k}}(g)](\varphi) = 0, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), \text{supp}(f) \times \text{supp}(g)$$

$$\forall \varphi \in D \text{ e } \forall k = 1, \dots, N, \forall \hat{k} = 1, \dots, \hat{N}.$$

Nesse caso, quando os comutantes fracos das álgebras polinomiais locais satisfazem as condições (5.2) do teorema anterior, as respectivas redes quânticas locais afiliadas (5.3) são relativamente locais

$$\begin{cases} \mathcal{R}_\Phi(\mathcal{O}) \subset \mathcal{R}_\Psi(\mathcal{O}')' \\ \mathcal{R}_\Psi(\mathcal{O}) \subset \mathcal{R}_\Phi(\mathcal{O}')' \end{cases}, \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

Em particular, se vale dualidade causal para as redes então elas são idênticas.

Prova. Com efeito, a localidade relativa implica

$$\text{proj}\mathfrak{F}(\mathcal{O}) \subset \text{proj}\mathfrak{F}(\mathcal{O}')', \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

Portanto, trivialmente obtemos

$$\mathcal{R}_\Phi(\mathcal{O}) = \text{proj}\mathfrak{F}(\mathcal{O})'' \subset \text{proj}\mathfrak{F}(\mathcal{O}')''' = \mathcal{R}_\Psi(\mathcal{O}')', \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

Analogamente para mostrar a outra inclusão. ■

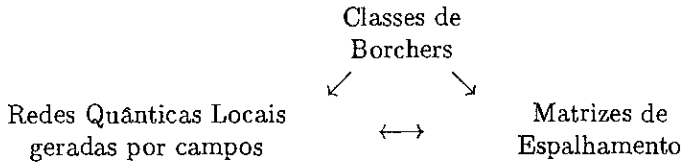
Aqui identificamos uma dificuldade intrínseca para uma teoria quântica local definir uma teoria de campos quantizados: a multiplicidade de sistemas de campos quantizados que definem uma mesma teoria quântica local torna necessário estabelecer critérios de escolha; mas a *princípio* (e até agora) não existe nenhum critério natural (e efetivo). Talvez isso não seja uma mera questão metodológica: pode ser que o problema inverso da teoria do espalhamento na teoria dos campos quantizados seja trivial (só estão definidos sistemas de campos locais livres), ainda que na teoria quântica local tenha soluções não-triviais (i.e. definindo matrizes de espalhamento diferentes da identidade).

Classes de Borchers

A *comutatividade relativa* é uma *relação de equivalência* (i.e. uma relação reflexiva, simétrica e transitiva) na classe dos sistemas de campos quantizados. *Classes de Borchers* são classes de equivalência de campos quantizados com respeito à relação de localidade relativa [132].

Acima, mostramos que sistemas de campos quantizados relativamente locais definem a mesma rede quântica local. Analogamente Borchers mostrou em [15], na situação em que a teoria do espalhamento de Haag-Ruelle pode ser aplicada,

que sistemas de campos quantizados relativamente locais definem a mesma matriz de espalhamento. Completando o quadro, Schroer mostrou em [121] que cada rede quântica local é caracterizada por sua matriz de espalhamento. Simbolicamente temos⁵



A correspondência unívoca entre redes quânticas locais e matrizes de espalhamento em contraste com a não-unicidade dos sistemas de campos quantizados que determinam uma mesma matriz de espalhamento nos justifica dizer que *a teoria quântica local fornece uma descrição intrínseca da física de partículas elementares, mas não a teoria dos campos quantizados.*

5.1 Campos Quantizados Livres

A construção de campos quantizados livres está em estreita relação com a construção modular de teorias quânticas locais livres; de fato, considerando o *teorema 50* podemos dizer que aquela é uma realização explícita desta. Ambas fazem uso essencial das representações de Wigner, construídas a partir das representações irredutíveis do grupo de Poincaré pelo método das representações induzidas.

A construção de campos quantizados livres é apresentada em diversos livros de teoria quântica de campos, tais como [141, Chapter 5]. Aqui nos limitamos a apontar os principais ingredientes e passos dessa construção.

Considere uma representação spinorial irredutível do recobrimento universal grupo de Poincaré com spin $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$

$$\mathfrak{d}_s : \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h}_s)$$

e seja a representação unitária induzida de massa $m \geq 0$ (dada pela teoria de Wigner)

$$u_{(m,s)} : \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}_{(m,s)})$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathfrak{h}_{(m,s)} = L^2(\Gamma_m^+) \otimes \mathfrak{h}_s \\
 \left[u_{(m,s)}(a, \tilde{\Lambda}) \psi \right](p) = e^{ia \cdot p} \mathfrak{d}_s \left(\tilde{R}(\tilde{\Lambda}, p) \right) \psi(\Lambda^{-1}p) \quad , \quad \forall \psi \in \mathfrak{h}_{(m,s)}, \quad \forall p \in \Gamma_m^+
 \end{array} \right.$$

⁵Esse quadro tem sentido se assumimos que podemos caracterizar independentemente as matrizes de espalhamento que aparecem na teoria quântica local e na teoria dos campos quantizados; por exemplo, axiomáticamente como na teoria da matriz-S.

onde Γ_m^+ é o hiperbolóide de massa m com energia positiva e $\tilde{R}(\tilde{\Lambda}, p)$ é a chamada *rotação de Wigner* da representação induzida $u_{(m,s)}$ (para maiores detalhes, vide o Apêndice A).

Os campos quantizados não transformam-se covariantemente sob ação das representações de Wigner, mas sob ação de representações que chamamos de (*explicitamente*) *covariantes*. As representações covariantes são definidas a partir das representações de Wigner por intermédio de *intertwiners*, i.é famílias de transformações lineares⁶

$$u : \Gamma_m^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{h}_{(m,s)}; \mathfrak{h}_{(m,s)}) \quad , \quad u(p) : \mathfrak{h}_{(m,s)} \rightarrow \mathfrak{h}_{(m,s)}$$

satisfazendo

$$u(p) \mathfrak{d}_{(m,s)} \left(\tilde{R}(\tilde{\Lambda}, p) \right) = u(\tilde{\Lambda}) u(\tilde{\Lambda}^{-1}p) \quad , \quad \forall \tilde{\Lambda} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger, \quad \forall p \in \Gamma_m^+ \quad (5.4)$$

Tais intertwiners sempre existem quando

$$\left| \frac{j}{2} - \frac{k}{2} \right| \leq s \leq \frac{j}{2} + \frac{k}{2} \quad (5.5)$$

conforme pode ser obtido explicitamente pelos métodos de Clebsch-Gordon, sendo $j/2$ e $k/2$ o número de índices pontuados e não-pontuados que caracterizam a representação irredutível \mathfrak{d}_s , respectivamente.

A representação unitária covariante agindo no espaço de Fock $\mathcal{H}_{(m,s)}$ definido sobre $\mathfrak{h}_{(m,s)}$ é dada explicitamente por

$$U : \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \rightarrow \mathcal{H} \quad , \quad \left(U(a, \tilde{\Lambda}) \Psi \right) (p) = e^{ia \cdot p} D_s(\tilde{\Lambda}) \Psi(\tilde{\Lambda}^{-1}p) \quad (5.6)$$

onde

$$D_s : \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_{(m,s)})$$

é a representação induzida no espaço de Fock por \mathfrak{d}_s , e age apenas nos índices das funções-de-onda.

A partir desses objetos, temos definido o campo quântico livre de massa $m \geq 0$ e spin/helicidade $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ agindo no espaço de Fock $\mathcal{H}_{(m,s)}$ e transformando-se covariantemente sob ação de U :

$$\Phi(x) := \int_{\Gamma_m^+} \frac{d\mu(p)}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ e^{-ip \cdot x} \sum_{s_3=-s}^s u(p, s_3) a(p, s_3) + e^{ip \cdot x} \sum_{s_3=-s}^s v(p, s_3) b^*(p, s_3) \right\} \quad (5.7)$$

onde v é o intertwiner correspondente à representação conjugada a D_s e a^* e b^* são os operadores de criação de partículas e anti-partículas, respectivamente.

⁶Obviamente, essas transformações lineares são unitárias com respeito ao produto interno induzido por elas no espaço alvo.

Observação 53 *Portanto, a necessidade dos intertwiners está no fato dos campos quantizados serem escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação, os quais se transformam sob ação das representações de Wigner e não sob ação de uma representação explicitamente covariante do grupo de Poincaré.*

Observação 54 (A Classe de Borchers de um Campo Livre) *A classe de Borchers de um campo livre coincide com a classe dos polinômios-de-Wick do campo e suas derivadas, sendo a matriz de espalhamento associada igual à identidade [64].*

Part II

Simetrias Modulares

Chapter 6

Estrutura Modular e Simetrias

Simetrias na Física

Na física quântica definimos *simetria* por transformações dos observáveis e dos estados que deixam invariantes os valores esperados das quantidades físicas. Na física quântica local, esta exigência de invariância pode ser especializada no setor de vácuo pelo requerimento de que as simetrias sejam definidas por endomorfismos da álgebra de observáveis que deixam o estado de vácuo invariante.

A invariância das cargas contraposta à permutação das espécies de partículas é a razão básica para a grande importância do conceito de simetria em física e para o fato dos campos quânticos estarem associados a cargas ao invés de associados à espécie partículas [85, Section I.5.2], [36, Section 3]. As simetrias podem ser classificadas de acordo com o modo como agem nas álgebras de observáveis e campos locais, podendo ser *simetrias internas* (dadas por um grupo de gauge global), *simetrias espaço-temporais* (dadas por subgrupos do grupo de Poincaré) e também *supersimetrias* (definidas pela ação de uma álgebra de Lie graduada) [32]. Notamos que os teoremas clássicos sobre simetrias em teoria de campos, os quais são o teorema de Nöther¹ e o teorema de Goldstone², têm seus análogos na teoria quântica local [32], [33].

Aqui, argumentamos no sentido de extrair da estrutura modular as simetrias de uma teoria quântica local. De fato, isso já foi alcançado no caso das simetrias espaço-temporais em teorias quânticas locais em geral e, na medida

¹O teorema clássico de Nöther e seu análogo na teoria quântica de campos [94, Sections 1-2-3] diz que toda simetria contínua do Lagrangeano de uma teoria de campos está associada a uma corrente local que se conserva. Na física quântica local, para cada simetria (de qualquer tipo) são construídos geradores locais, estabelecendo nesse contexto uma forma fraca do teorema de Nöther.

²O teorema de Goldstone [136] e [131] diz que toda quebra espontânea de simetria gera uma partícula de massa zero. Na física quântica local, o teorema análogo considera apenas observáveis e não requer a existência de corrente locais; além disso, há situações (fora das condições do teorema) em que pode haver quebra espontânea de simetria mesmo na presença de um 'gap de massa'.

em que a estrutura dos setores de superseleção e as simetrias internas estão relacionados, também no caso particular das simetrias internas em teorias quirais completamente racionais.

As Teorias Quirais

As teorias quirais são teorias quânticas locais conformes sobre S^1 que têm atraído a atenção dos físicos por três razões, pelo menos: 1) elas aparecem como “fatores” na decomposição de teorias quânticas conformes bidimensionais [11], as quais esperamos poder aplicar em física da matéria condensada - por exemplo, na descrição de fenômenos críticos, supercondutividade e efeito Hall quântico; 2) como blocos para construção de teorias quânticas locais em dimensão superior [115]; 3) como “laboratório teórico”, no sentido de ser uma situação simples em que os conceitos da física quântica local podem ser empregados (ou adaptados) e os objetos relevantes podem ser exibidos explicitamente. Aqui, somos basicamente motivados pelo último e penúltimo itens: queremos verificar algumas conjecturas gerais sobre a relação entre as simetrias ou a estrutura de setores de superseleção e a estrutura modular das teorias quânticas locais.

A estrutura modular dos pré-cofeixes quirais fornece uma completa classificação destes, como acontece também no caso de teorias quânticas locais em dimensões superiores [99], pelas propriedades características das inclusões de certas álgebras locais (via \pm hsm-inclusão em [143] ou \pm hsm-fatorização em [82] - no segundo caso, mas não no primeiro, apenas os grupos modulares são usados). Entretanto, somente nas teorias quirais tem-se provado que a estrutura modular determina os setores de superseleção [98], [144].³ Então, no capítulo 9 desta tese temos provado que nas teorias quirais bosônicas em sobre S^1 a ação covariante do grupo geométrico $Diff(S^1)$ tem origem modular, e na seção 10.1 nós exibimos as conjugações modulares associadas aos intervalos-duplos, a partir dos quais se pode obter os setores de superseleção pela abordagem de Kawai-gashi-Longo-Müger.

6.1 Covariância Modular e Simetria Espaço-Temporal

A covariância modular permite reconstruir a ação covariante do grupo de Poincaré na representação de vácuo, caracterizando esse setor. Para o bem da completeza, apresentamos em linhas gerais como essa reconstrução pode ser realizada.

Teorema 55 (Construção de Guido-Longo [79]) *Seja $(A, \alpha, \mathfrak{A})$ uma rede quântica local, φ um estado fiel e $(\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ a representação GNS associada (definição 16).*

³Recorrendo à idéia de holografia, tem sido especulado que certas propriedades em teorias de baixa dimensão podem se refletir nas teorias em dimensões superiores. Por exemplo, a origem modular da ação covariante de $Diff(S^1)$ nas teorias quirais implicaria que certas teorias em dimensão superior teriam outras simetrias (diferentes das simetrias internas ou da simetria espaço-temporal) tendo origem modular, embora nesses casos tais simetrias devam atuar de modo “difuso” (ou seja, que não pode ser dado por transformações geométricas - razão pela qual não podem ser reconhecidas na formulação de Wightman ou na formulação Lagrangeana) - vide nosso artigo [67].

Se a representação satisfaz a propriedade de covariância modular, existe uma representação unitária fortemente contínua $\tilde{U} : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ do recobrimento universal do grupo de Poincaré próprio mantendo Ω_φ invariante, agindo covariante na rede \mathcal{R}_φ e implementando a ação do grupo modular das regiões cunha como boosts:

$$\Delta_W^{it} = \tilde{U}(\tilde{\Lambda}_W(t)) , t \in \mathbb{R}, \forall W \in \mathcal{W}$$

onde $\tilde{\Lambda}_W$ é o levantamento do grupo um-parâmetro Λ_W para $\tilde{\mathcal{P}}_+$ com base na identidade, $\tilde{\Lambda}_W(0) = I$.

Esboço da prova. 1) Reconhecemos que o grupo de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow é algebricamente gerado pelo conjunto de boosts

$$\mathcal{P}_+^\uparrow = \text{algebra} \{ \Lambda_W(t); t \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W} \}$$

2) Definimos (motivados pela covariância modular) a álgebra gerada pelo grupo de unitários modulares das regiões tipo cunha

$$G = \text{algebra} \{ \Delta_W^{it}; t \in \mathbb{R}, W \in \mathcal{W} \}$$

3) Verificamos que G define uma extensão central algébrica de \mathcal{P}_+^\uparrow , a saber (aqui, a covariância modular é necessária para garantir que π é um homeomorfismo bem-definido)

$$\pi : G \rightarrow \mathcal{P}_+^\uparrow , \pi(\Delta_W^{it}) := \Lambda_W(t)$$

4) Uma análise conveniente mostra que G é uma extensão de Lie fraca de \mathcal{P}_+^\uparrow , o que implica na existência de uma representação unitária fortemente contínua $\tilde{U} : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \tilde{U} : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}_+^\uparrow$ é a aplicação de recobrimento (este último passo depende de certas propriedades topológicas particulares do grupo de Poincaré).

5) Finalmente (depois de alguns raciocínios) verificamos que $\tilde{U}(\tilde{\Lambda}_W(t)) = \Delta_W^{it}$. A positividade da energia de \tilde{U} segue-se de um teorema converso do teorema RCB em [27]. ■

Na situação do teorema, nós concluímos que φ é um estado de vácuo de $(\mathcal{A}, \alpha_U, \mathfrak{A})$, onde α_U é a ação do grupo de Poincaré sobre \mathcal{A} induzida por U .

Observação 56 Este teorema é completado em [80] para gerar uma representação do grupo de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow ao invés de uma representação de seu recobrimento universal.

Na construção seguinte, a representação covariante do grupo de Poincaré é construída diretamente, a partir das inclusões modulares:

Teorema 57 (Construção de Borchers-Wiesbrock, [20]) *Seja $(A, \alpha, \mathfrak{A})$ uma rede quântica local, φ um estado satisfazendo a propriedade de covariância modular e $(\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ a representação cíclica associada (definição 16) (não exigimos que o estado seja invariante sob ação do grupo de Poincaré e nem do grupo das translações espaço-temporais).*

Então existe uma representação unitária fortemente contínua com energia positiva $U : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ agindo covariantemente na rede \mathcal{R}_φ , mantendo Ω_φ invariante e implementando a ação dos operadores modulares das regiões cunha como boosts:

$$\Delta_W^{it} = U(\Lambda_W(t)) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall W \in \mathcal{W}$$

Esboço da prova. 1) Reconhecemos que o grupo de Poincaré $\mathcal{P}_\perp^\uparrow$ é gerado pelas translações e boosts. Portanto, para construir uma representação covariante do grupo de Poincaré basta definirmos a ação desses subgrupos, conquanto satisfaçam as relações de comutação corretas.

2) Identificamos a representação dos boosts com a ação definida pela covariância modular.

3) Se consideramos uma cunha e uma de suas translações na direção perpendicular a seu eixo, a covariância modular garante que as álgebras locais associadas definem uma inclusão modular semi-lateral-positiva. Isso permite definir as translações espaço-temporais.

4) Se consideramos um par de cunhas distintas com um vetor tipo-luz em comum e a região definida pela interseção desses, a covariância modular garante que as álgebras locais associadas definem um par de inclusões modulares semi-laterais-negativas. Isso nos permite construir a representação da parte translacional do subgrupo estabilizador do vetor tipo-luz invariante comum (i.e., do grupo das transformações de Poincaré que mantêm tal vetor invariante), que por sua vez conecta os grupos modulares das cunhas originais. ■

A ação covariante do grupo de Poincaré também pode ser construída a partir das conjugações modulares dos cunhas sob a hipótese de que elas agem geometricamente como as reflexões associadas (de acordo com o fato de que estas geram o grupo de Poincaré). Mas a hipótese de que as conjugações modulares agem geometricamente é menos forte do que a propriedade de covariância modular e não é suficiente para garantir a validade da condição espectral da representação construída, sendo necessário supor condições adicionais para que esta possa ser obtida, vide [34].

Observação 58 *A relação entre a covariância modular e a simetria relativística é uma característica não-trivial das teorias quânticas locais (algo invisível para o formalismo Lagrangeano), e nos leva a conjecturar se a estrutura modular gera outras simetrias da teoria, de natureza não necessariamente geométrica, tais como simetrias de gauge. A resposta é positiva, conforme a discussão da próxima subseção.*

Observação 59 *Podemos esperar que numa rede quântica local $(A, \alpha, \mathfrak{A})$ existam regiões $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ e estados φ fiéis sobre $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, tais que o grupo modular*

$\sigma_{\varphi, \mathcal{O}}^t$ do par $(A(\mathcal{O}), \varphi)$ atue geometricamente, i.e. que na representação GNS $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ tenha-se um grupo um-parâmetro de difeomorfismos $\beta_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, satisfazendo certas propriedades necessárias, dentre elas $\beta_t \mathcal{O} = \mathcal{O}$, e uma representação unitária $u_{\varphi, \mathcal{O}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$ tais que

$$\sigma_{\varphi, \mathcal{O}}^t = \text{ad}_{u_{\varphi, \mathcal{O}}(t)} \quad \text{e} \quad \sigma_{\varphi, \mathcal{O}}^t(A(Q)) = A(\beta_t Q) \quad \forall Q \in \mathcal{K}$$

Esse fato ocorre nas teorias conformes, para o estado de vácuo e todas as regiões causalmente completas, visto que o grupo conforme age transitivamente sobre \mathcal{K} . No capítulo 9, exibimos explicitamente para certas teorias quírais sobre \mathbb{S}^1 , um estado ω_2 diferente do vácuo e um intervalo $I_2 \subset \mathbb{S}^1$ tais que o grupo modular σ_{ω_2, I_2}^t age geometricamente em $\mathcal{R}(I_2)$.

6.2 Estrutura Modular e Simetria de Gauge Global

Na medida em que a estrutura de superseleção determina a simetria de gauge⁴, o problema de como obter o grupo de simetrias de gauge global a partir da estrutura modular parece que pode ser resolvido através de dois caminhos diferentes, cada um destes aplicável ao caso de certas classes de teorias conformes sobre \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 : um deles foi proposto por Wiesbrock em [144] e outro foi proposto por Kawaiigashi-Longo-Müger em [98].

6.2.1 A Abordagem de Wiesbrock

A abordagem de Wiesbrock baseia-se na idéia de que estados carregados podem ser obtidos pela ação de *transportadores de carga* (no sentido de [59, Section III]) e que estes podem ser realizados como *cociclos modulares localizados* (definidos abaixo). Especificamente, na representação de vácuo de uma teoria quântica local satisfazendo a propriedade de covariância modular, os unitários do cociclo-de-Connes de uma álgebra de observáveis localizada numa região cunha com respeito ao estado de vácuo e um estado-DHR localizado numa subregião limitada daquela cunha, agem como transportadores de carga:

Teorema 60 *Seja $(\mathcal{R}, \mathcal{H}, U, \Omega)$ a representação de vácuo de uma rede quântica local e seja ρ um endomorfismo localizado numa região limitada $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$; seja $W \subset \mathcal{M}$ uma cunha contendo \mathcal{O} , σ_W^t o grupo modular do par padrão $(\mathcal{R}(W), \Omega)$ e $u_t(\rho)$ o cociclo-de-Connes do par de estados $(\omega \circ \rho^{-1}, \omega)$.*

Então, o endomorfismo de \mathfrak{A}

$$\rho_W^t := \sigma_W^t \circ \rho \circ \sigma_W^{-t}$$

é unitariamente equivalente a ρ e, se vale a propriedade de covariância modular, ele é localizado na região $\mathcal{O}_W^t := \Lambda_W(-2\pi t)\mathcal{O}$.

⁴Isso é completamente válido quando o grupo de simetria de gauge global é compacto, correspondendo aos setores do tipo DHR [62].

Além disso,

$$\rho(A) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{adu}_t(\rho) A, \quad \forall A \in \mathfrak{A}_{loc} \quad (6.1)$$

Prova. A eq. (B.1) da seção B.1.1 implica

$$\sigma_W^t \circ \rho \circ \sigma_W^{-t}(A) = u_t^*(\rho) \rho(A) u_t(\rho), \quad \forall A \in \mathcal{R}(W)$$

Portanto ρ_W^t é unitariamente equivalente a ρ .

Se vale a propriedade de covariância modular, i.é $\sigma_W^t = \text{ad}U(\Lambda_W(-2\pi t))$, temos

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{R}(\Lambda_W(-2\pi t)\mathcal{O}') &\Rightarrow \sigma_W^{-t}(A) \in \mathcal{R}(\mathcal{O}') \\ &\Rightarrow \rho_W^t(A) = \sigma_W^t \circ \rho \circ \sigma_W^{-t}(A) = \sigma_W^t \sigma_W^{-t}(A) = A \end{aligned}$$

Ou seja, ρ_W^t é localizado em $\Lambda_W(-2\pi t)\mathcal{O}$.

Dado $A \in \mathfrak{A}_{loc}$, seja $\widehat{\mathcal{O}} \in \mathcal{D}$ tal que $A \in \mathcal{R}(\widehat{\mathcal{O}})$. Para $|t|$ suficientemente grande, temos que o suporte \mathcal{O}_W^t de ρ_W^t está causalmente disjunto de $\widehat{\mathcal{O}}$, donde $\rho_W^t(A) = u_t^*(\rho) \rho(A) u_t(\rho) = A$ e $\rho(A) = \text{adu}_t^*(\rho) A$. ■

O teorema nos mostra que podemos recuperar o endomorfismo localizado ρ a partir do seu cociclo-de-Connes $u_t(\rho)$. Então, a pergunta natural que formulamos é: *podemos caracterizar tais cociclos por requerimentos genéricos, sem referência prévia aos endomorfismos localizados?* Isso nos leva à definição de cociclo modular localizado (generalizado):

Definição 61 (Cociclo Modular Localizado) Seja $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H}, \Omega)$ a representação de vácuo de uma teoria quântica local.

Um cociclo modular localizado em $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ (com respeito ao estado de vácuo) é um caminho fortemente contínuo de unitários agindo em \mathcal{H}

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}), \quad u(t) = u_t$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) $u_{t+s} = u_t \sigma_{\mathcal{O}}^t(u_s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$
- ii) $\exists \varepsilon_{\mathcal{O}} > 0 / |t| < \varepsilon_{\mathcal{O}} \Rightarrow u_t \in \mathcal{R}(\mathcal{O})$
- iii) $\exists K_{\mathcal{O}} > 0 / |t| > K_{\mathcal{O}} \Rightarrow u_t u_{-t}^* \in \mathcal{R}(\mathcal{O})'$

onde $\sigma_{\mathcal{O}}^t$ é o grupo modular do par padrão $(\mathcal{R}(\mathcal{O}), \Omega)$.

A condição (i) é simplesmente uma das propriedades características dos cociclos-de-Connes; a condição (ii) define o significado do cociclo ser localizado; e a condição (iii) inspira-se na equação (6.1) do teorema anterior.

Conforme discutimos na seção 10.2.1, Wiesbrock em [144] prova que em teorias quirais fortemente aditivas sobre \mathbb{S}^1 , os cociclos modulares localizados definem endomorfismos localizados pela equação (6.1); mas pouco sabemos sobre o que pode ocorrer em situações mais gerais. Por isso, terminamos essa seção propondo um problema para pesquisas futuras:

Problema 62 *Estabelecer as condições adicionais sob as quais um cociclo modular localizado u_t define um endomorfismo localizado da álgebra de observáveis \mathfrak{A} pela fórmula*

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} adu_t$$

6.2.2 A Abordagem de Kawahigashi-Longo-Müger

Sabemos que as álgebras localizadas em regiões causalmente conexas não incorporam individualmente nenhuma informação sobre os setores de superseleção da teoria - sob certas circunstâncias, todas são isomorfas ao único fator hiperfinito do tipo III_1 . Então, apenas para sugerir a idéia de que as álgebras de observáveis localizados em regiões causalmente desconexas do espaço-tempo incorporam alguma informação sobre os setores de superseleção da teoria, damos o seguinte argumento intuitivo (sem pretender que seja verdadeiro nalgum sentido positivo): *dado um par partícula-antipartícula cujas regiões de localização são causalmente disjuntas, das medidas realizadas na região de localização da partícula não se pode inferir a existência da anti-partícula ou, pelo menos, que ambas estão descritas por algum estado global; portanto, o resultado das medidas localizadas realizadas sobre uma das partículas do par caracteriza seu setor de superseleção.*⁵

A abordagem de Kawahigashi-Longo-Müger (KLM) analisa certas propriedades das álgebras localizadas em regiões causalmente desconexas para delas obter os setores de superseleção da teoria.

Proposição 63 *Seja $(\mathcal{R}, \mathcal{H}, U, \Omega)$ a representação de vácuo de uma rede quântica local, satisfazendo dualidade causal.*

Se $\mathcal{O}, \mathcal{Q} \in \mathcal{K}$ são duas regiões causalmente disjuntas, então os transportadores de carga localizados entre endomorfismos localizados em \mathcal{O} e \mathcal{Q} pertencem à álgebra dual $\mathcal{R}^d(\mathcal{O} \cup \mathcal{Q})$ (vide a definição 2.6).

Prova. *Sejam $\rho, \hat{\rho} \in \text{End}(\mathfrak{A})$ endomorfismos transportáveis localizados nas regiões $\mathcal{O}, \mathcal{Q} \in \mathcal{K}$, respectivamente, satisfazendo $\hat{\rho} = adu \circ \rho$ para algum unitário $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (transportador de carga). Então*

$$B \in \mathcal{R}(\mathcal{O}') \cap \mathcal{R}(\mathcal{Q}') \Rightarrow uB = u\rho(B) = \hat{\rho}(B)u = Bu$$

donde

$$u \in (\mathcal{R}(\mathcal{O}') \cap \mathcal{R}(\mathcal{Q}'))' \subset \mathcal{R}(\mathcal{O}' \cap \mathcal{Q}')' = \mathcal{R}^d(\mathcal{O} \cup \mathcal{Q})$$

⁵Esta é uma adaptação do conhecido argumento “da partícula atrás da lua”, [3, section 1.7, p.16].

ou seja: a álgebra $\mathcal{R}^d(\mathcal{O} \cup \mathcal{Q})$ contém os transportadores de carga com suporte em $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$. ■

Portanto, quando as regiões \mathcal{O} e \mathcal{Q} são causalmente disjuntas, esperamos que a inclusão

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{R}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{R}^d(\mathcal{O} \cup \mathcal{Q})$$

forneça informações sobre a estrutura de superseleção da teoria, possivelmente suficiente para determinar completamente essa estrutura. Talvez isso possa ser conseguido pela análise das propriedades do endomorfismo canônico

$$\gamma_{\mathcal{O}, \mathcal{Q}} : \mathcal{R}^d(\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{R}(\mathcal{Q})$$

cuja restrição

$$\lambda_{\mathcal{O}, \mathcal{Q}} : \mathcal{R}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{R}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{R}(\mathcal{Q})$$

é um endomorfismo de $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \vee \mathcal{R}(\mathcal{Q})$. O fato do endomorfismo canônico ser um objeto modular evidencia a importância da estrutura modular nessa análise.

A análise de Kawaiigashi-Longo-Müger da estrutura de superseleção de certas teorias quânticas locais sobre \mathbb{R} parte dessas idéias. Esta análise particularizada para o caso de pré-cofeixes quirais sobre \mathbb{S}^1 é apresentada na seção 10.1.1.

Observação 64 *É significativo que a teoria quântica local possa determinar localmente os setores de superseleção, primordialmente definidos em termos globais. Isso corrobora a idéia de basearmos a teoria em conceitos com interpretação física mais direta.*

Chapter 7

Teorias Quirais Locais

Introdução

As teorias quirais locais constituem o análogo da teoria quântica local com o “espaço-tempo” correspondendo ao raio-de-luz compactificado $\mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^1$ e o “grupo de simetria espaço-temporal” sendo dado pelo grupo de Möbius $Mob = SU(1, 1)$ ou por sua parte conexa $PSU(1; 1) = SU(1, 1)/\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$.

Antes de entrar no tema propriamente dito deste capítulo, é válido apresentarmos uma pequena digressão sobre a definição do grupo conforme.

Grupo Conforme e Compactificação Conforme do Espaço-Tempo

Ingenuamente, o grupo das transformações conformes poderia ser definido como o grupo das transformações do espaço de Minkowski \mathcal{M} que preservam a métrica exceto por um fator multiplicativo; entretanto, se $\dim(\mathcal{M}) \geq 3$ as chamadas *transformações conformes especiais* não são globalmente definidas e não formam um grupo. Portanto, a definição do grupo conforme torna-se um pouco mais delicada, e nós a descrevemos em dois passos: primeiramente, definimos a chamada *compactificação conforme* do espaço de Minkowski $\overline{\mathcal{M}}$ como sendo uma variedade compacta contendo uma imersão isométrica densa de \mathcal{M} sobre a qual todas as transformações conformes de \mathcal{M} possuem uma extensão a difeomorfismos (globais) - a existência de $\overline{\mathcal{M}}$ é garantida por um teorema; depois, nós definimos o grupo conforme de \mathcal{M} como sendo o grupo das transformações conformes de sua compactificação conforme $\overline{\mathcal{M}}$ [126, Definition 2.1], [26]. Simbolicamente,

$$\mathcal{M} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}, \quad Conf(\mathcal{M}) := Conf(\overline{\mathcal{M}})$$

No caso de teorias bidimensionais, a definição de grupo conforme é feita por analogia aos casos em dimensões superiores, embora todas

as transformações conformes em $\mathcal{M}^{1,1}$ estejam globalmente definidas [126, Section 2.4]. A razão para isso está no fato de que a classe das transformações conformes que preservam a orientação de $\mathcal{M}^{1,1}$ é dada por [126, Theorem 2.10]

$$Conf(\mathcal{M}^{1,1}) \simeq (Diff(\mathbb{R})_+ \times Diff(\mathbb{R})_+) \cup (Diff(\mathbb{R})_- \times Diff(\mathbb{R})_-) \quad (7.1)$$

que vem a ser um grupo “muito grande”, no sentido de que as redes quânticas locais com um setor de vácuo invariante sob ação de tal grupo são algo triviais. Assim, considerando que a compactificação conforme de $\mathcal{M}^{1,1}$ é $\mathbb{S}^1 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, temos simbolicamente

$$\mathcal{M}^{1,1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{1,1}, \quad Conf(\mathcal{M}^{1,1}) := Conf(\mathbb{S}^{1,1})$$

Lembramos que analogamente a 7.1, temos [126, comments after Theorem 2.10]

$$Diff(\mathbb{S}^{1,1})_+ \simeq (Diff(\mathbb{S}^1)_+ \times Diff(\mathbb{S}^1)_+) \cup (Diff(\mathbb{S}^1)_- \times Diff(\mathbb{S}^1)_-) \quad (7.2)$$

Este é a razão básica para a decomposição de uma teoria conforme bidimensional em duas teorias quirais sobre raios-de-luz compactificados [11].

Lembramos que o grupo conforme de \mathbb{S}^1 (incluindo inversões) é o que chamamos de *grupo de Möbius*.

7.1 O Grupo $Diff(\mathbb{S}^1)$ o Grupo de Möbius e a Álgebra de Virasoro

Denotamos por \mathbb{S}^1 o conjunto dos números complexos de norma unitária

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

\mathbb{S}^1 é uma subvariedade de \mathbb{C} com um grupo de difeomorfismos

$$Diff(\mathbb{S}^1) := \{\text{difeomorfismos de } \mathbb{S}^1 \text{ em } \mathbb{S}^1\}$$

Denominamos por *álgebra de Witt* a álgebra Lie do grupo $Diff(\mathbb{S}^1)$

$$Witt := Lie(Diff(\mathbb{S}^1)) \quad (7.3)$$

$Vect(\mathbb{S}^1)$ é o espaço vetorial subjacente à álgebra de Witt¹, donde obtemos o seguinte conjunto de geradores da álgebra de Witt:

$$\check{L}_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (7.4)$$

¹ $Diff(\mathbb{S}^1)$ é um grupo de Lie com dimensão infinita agindo sobre o espaço $Vect(\mathbb{S}^1)$ dos campos vetoriais diferenciáveis sobre \mathbb{S}^1 .

7.1. O GRUPO $\text{DIFF}(S^1)$ O GRUPO DE MÖBIUS E A ÁLGEBRA DE VIRASORO 69

Estes geradores satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\check{L}_n, \check{L}_m] = (n - m) \check{L}_{n+m} \quad , \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (7.5)$$

e as relações de conjugação

$$\check{L}_n^* = \check{L}_{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (7.6)$$

A álgebra de Witt possui uma única extensão central [77] [126, Theorem 5.1], denominada *álgebra de Virasoro*

$$\text{Vir} := \text{Witt} \oplus \mathbb{C}Z \quad (7.7)$$

Naturalmente, o operador Z é o gerador do centro da álgebra de Virasoro (portanto, necessariamente comuta com os geradores da subálgebra de Witt). A álgebra de Virasoro possui o seguinte conjunto de geradores

$$\{L_n; n \in \mathbb{Z}\} \cup \{Z\} \quad (7.8)$$

que satisfazem as relações de comutação

$$\begin{cases} [L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \delta_{n+m,0} \frac{n}{12} (n^2 - 1) Z \\ [L_n, Z] = 0 \end{cases} \quad , \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (7.9)$$

e as relações de conjugação

$$\begin{cases} L_n^* = L_{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ Z^* = Z \end{cases}$$

Notamos que a álgebra de Virasoro é gerada pelo conjunto $\{L_{-2}, L_{-1}, L_1, L_2\} \cup \{Z\}$ de acordo com a seguinte fórmula de recorrência

$$[L_{\pm n}, L_{\pm 1}] = \pm (n - 1) L_{\pm(n+1)} \quad , \quad n \geq 2 \quad (7.10)$$

Como $\{L_0, L_1 + L_{-1}, L_2 + L_{-2}\}$ gera o conjunto $\{L_{-2}, L_{-1}, L_1, L_2\}$ a partir das relações

$$[L_1 + L_{-1}, L_0] = (L_1 - L_{-1}) \quad \text{e} \quad [L_2 + L_{-2}, L_0] = 2(L_2 - L_{-2})$$

concluimos que a álgebra de Virasoro possui um conjunto de geradores auto-adjuntos:

$$\text{Vir} = \text{álgebra de Lie gerada por } \{L_0, L_1 + L_{-1}, L_2 + L_{-2}\} \cup \{Z\} \quad (7.11)$$

Analogamente, a subálgebra de Witt também é gerada por operadores auto-adjuntos

$$\text{Witt} = \text{álgebra de Lie gerada por } \{\check{L}_0, \check{L}_1 + \check{L}_{-1}, \check{L}_2 + \check{L}_{-2}\} \quad (7.12)$$

Observação 65 Na literatura sobre teoria conforme Euclídeana bidimensional e unidimensional (como por exemplo [11], [78]), as considerações sobre invariância conforme se referem à invariância conforme infinitesimal, i.e. com respeito à ação da álgebra de Virasoro, e não propriamente com respeito ao grupo conforme propriamente dito. Entretanto, nossas considerações versam sobre as teorias quânticas locais sobre o espaço de Minkowski com simetria conforme; elas são de caráter totalmente geral e devem servir para qualquer tratamento rigoroso do assunto. Não consideramos em nenhum momento as teorias Euclídeanas, apesar de existirem certas relações entre o grupo conforme do espaço de Minkowski e o grupo conforme do espaço Euclídeano [126, Section 2.4, 5.2].

O grupo de Möbius é dado pelo conjunto das transformações conformes globais do espaço dos números complexos preservando a orientação, munido da operação de composição. Esse grupo deixa o círculo \mathbb{S}^1 invariante e é dado explicitamente por²

$$Mob \simeq PSU(1, 1) = \frac{SU(1, 1)}{\{\pm 1\}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| - |\beta| = 1 \right\} \quad (7.13)$$

com a ação definida por³

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1, 1), \quad \mathbb{C} \ni z \rightarrow gz = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \in \mathbb{C}$$

O grupo de Möbius é gerado por $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$

$$Mob_1 = \text{grupo de Lie gerado por } \{L_{-1}, L_0, L_1\}$$

Mais geralmente, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o conjunto $\{L_{-n}, L_0, L_n\}$ gera o

²Realmente, o centro de $SU(1, 1)$ é dado por

$$\mathbb{Z}_2 \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

a partir do qual temos o quociente

$$PSU(1; 1) = SU(1; 1)/\mathbb{Z}_2$$

³Realmente, esta ação deixa \mathbb{S}^1 invariante:

$$\left| g e^{i\theta} \right| = \left| \frac{\alpha e^{i\theta} + \beta}{\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}} \right| = \left| e^{i\theta} \frac{\alpha + \beta e^{-i\theta}}{\bar{\beta} e^{i\theta} + \bar{\alpha}} \right| = \left| e^{i\theta} \right| \cdot \left| \frac{\alpha + \beta e^{-i\theta}}{\alpha + \beta e^{-i\theta}} \right| = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

subgrupo $Mob_n \subset Diff(\mathbb{S}^1)$ definido por⁴

$$\begin{aligned} Mob_n &:= \text{grupo de Lie gerado por } \{L_{-n}, L_0, L_n\} \\ &= \left\{ u_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, u_n(z) = \sqrt[n]{u(z^n)}; u \in Mob \right\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Verificamos que Mob_n é isomorfo ao grupo de Möbius Mob_1 pela seguinte correspondência entre os geradores

$$\begin{cases} L_0 \rightarrow \bar{L}_0 := \frac{1}{n}L_0 + \frac{(n^2-1)}{24n}Z \\ L_{\pm n} \rightarrow \bar{L}_{\pm 1} := \frac{1}{n}L_{\pm n} \end{cases}$$

Os operadores L_0 , $L_{-1} + L_1$ e $L_{-2} + L_2$ são Hermitianos (*equação ??*) e correspondem aos geradores infinitesimais das seguintes difeomorfismos de \mathbb{S}^1 :

$$L_0 \rightsquigarrow R(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \quad (7.15)$$

$$L_{-1} + L_1 \rightsquigarrow D(\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L_{-2} + L_2 \rightsquigarrow D_2(\lambda) = \sqrt{D(\lambda)(\cdot)^2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Nas teorias quirais locais, L_0 é chamado de “Hamiltoniano conforme” e corresponde ao operador energia-momentum das teorias quânticas locais em dimensões superiores.

7.2 Axiomas das Teorias Quirais

Os axiomas caracterizando as teorias quirais em \mathbb{S}^1 são análogos aos axiomas da teoria quântica local, sendo a estrutura local em \mathbb{S}^1 definida pela relação de “disjunção de conjuntos”:⁵

$$I_1, I_2 \subset \mathbb{S}^1, I_1 \times I_2 \iff I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

⁴Que seja bem entendida a radiciação na definição de Mob_n pela divisão de \mathbb{S}^1 em n partes sobre as quais temos os ramos da raiz $\sqrt[n]{\cdot}$:

$$I_k := \left\{ e^{i\theta}; \theta \in \left(k \frac{2\pi}{n}, (k+1) \frac{2\pi}{n} \right) \right\}, k = 0, \dots, n-1$$

Assim,

$$u \in Diff(\mathbb{S}^1), z \in I_k \rightsquigarrow \sqrt[n]{u(z)^n} \in I_k$$

⁵Lembramos que o sinal ‘ \times ’ significa “...é causalmente disjunto de...”

Nesse caso, o *complemento causal* é a relação definida por:

$$I \subset \mathbb{S}^1, I' := \mathbb{S}^1 \setminus \bar{I}$$

Definimos a classe dos intervalos de \mathbb{S}^1 por

$$\mathcal{I} := \{I \subset \mathbb{S}^1 / I \text{ e } \mathbb{S}^1 \setminus \bar{I} \text{ são abertos conexos não-vazios}\}$$

No que segue, considere \mathcal{H} sendo um espaço de Hilbert e $W^*(\mathcal{H})$ a classe de subálgebras de von Neumann em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Axioma 66 (Pré-Cofeixe Quiral em \mathbb{S}^1) ⁶ *Uma terna $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H})$ dada por um correspondência*

$$\mathcal{R} : \mathcal{I} \rightarrow W^*(\mathcal{H})$$

e uma representação unitária do grupo de Möbius

$$U : Mob \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

é um pré-cofeixe quiral sobre \mathbb{S}^1 quando ele satisfaz as seguintes propriedades:

i) *Isotonia*

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subset I_2 \Rightarrow \mathcal{R}(I_1) \subset \mathcal{R}(I_2)$$

ii) *Localidade*

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subset I_2' \Rightarrow \mathcal{R}(I_1) \subset \mathcal{R}(I_2)'$$

iii) *Covariância*

$$I \in \mathcal{I} \Rightarrow adU(g) \mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(gI), \forall g \in Mob$$

iv) *Condição Espectral*: O gerador do subgrupo das rotações $U \circ R$ é positivo, i.e.⁷

$$Spect(L_0) \subset [0, \infty) \quad (7.16)$$

v) *Estado de Vácuo*: Existe um único vetor unitário $\Omega \in \mathcal{H}$ invariante sob ação do grupo de Möbius

$$U(g)\Omega = \Omega, \forall g \in Mob$$

e cíclico para a álgebra quase-local $\mathfrak{A}_{loc} := \bigvee_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{R}(I)$.

Com este vetor temos definido o estado de vácuo:

$$\omega = (\Omega, \cdot \Omega)$$

⁶O conjunto-índice \mathcal{I} com a ordem definida pela inclusão de conjuntos não constitui um conjunto dirigido, portanto, em concordância com a terminologia matemática corrente, nós usamos ao invés do termo *rede* o termo *pre-cofeixe* (traduzindo do inglês *precosheaf*).

⁷O subgrupo das rotações $\{R(\theta); \theta \in \mathbb{R}\}$ (definição 7.15) realiza na teoria quiral local o mesmo papel que o subgrupo das translações espaço-temporais realiza na teoria quiral local. Por isso, esse grupo é também chamado de grupo das translações temporais e, analogamente, seu gerador L_0 é também chamado de Hamiltoniano conforme.

Definimos a álgebra universal do pré-cofeixe $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H})$ por

$$\mathfrak{A} := \overline{\mathfrak{A}_{loc}} \quad (\text{fecho na topologia da norma})$$

Pode-se provar que uma teoria quiral local satisfaz as seguintes propriedades adicionais:

vi) Dualidade causal [39]

$$\mathcal{R}(I)' = \mathcal{R}(I') \quad , \quad \forall I \in \mathcal{I}$$

vii) Aditividade Forte ⁸ [26]

$$I \in \mathcal{I}, z \in I \Rightarrow \mathcal{R}(I \setminus \{z\}) = \mathcal{R}(I) \quad (7.17)$$

viii) Covariância Modular [26], [69]

O operador modular $\Delta_{\mathcal{R}(\mathbb{S}_+^1), \omega}$ associado ao par $(\mathcal{R}(\mathbb{S}_+^1), \omega)$ satisfaz

$$\Delta_{\mathcal{R}(\mathbb{S}_+^1), \omega}^{it} = U(D(-2\pi t)) \quad (7.18)$$

onde

$$\mathbb{S}_+^1 := \{z \in \mathbb{S}^1 / \Im(z) > 0\}$$

ix) Propriedade de Cisão [53, Theorem 3.2]

A propriedade de cisão é provada para teorias quirais satisfazendo a chamada *condição da classe tracial*:

$$\text{Tr}(e^{-i\beta L_0}) < \infty \quad , \quad \forall \beta > 0$$

onde L_0 é o *Hamiltoniano conforme* (equação 7.16). A condição de classe tracial é realmente necessária, desde que existem modelos quirais que violam a propriedade de cisão, embora satisfaçam a (mais fraca) *condição de classe tracial com temperatura máxima*, a saber, para algum $T_{max} > 0$

$$\text{Tr}(e^{-i\beta L_0}) < \infty, \quad \forall \beta^{-1} > T_{max}$$

$$\text{Tr}(e^{-i\beta L_0}) = \infty, \quad \forall \beta^{-1} \leq T_{max}$$

conforme exemplos apresentados em [53, Section 3.1].

Observação 67 (Aplicação de Cayley) *A Aplicação de Cayley é um isomorfismo topológico entre \mathbb{S}^1 e \mathbb{R} (a compactificação de \mathbb{R} pela adjunção de um ponto no infinito):*

$$C : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad C(z) := -i \frac{z-1}{z+1} \quad (7.19)$$

$$C^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad , \quad C^{-1}(x) := \frac{1+ix}{1-ix}$$

⁸ A aditividade forte implica que o pre-cofeixe quiral é isomorfo a uma rede quântica local sobre $\mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ (via transformação de Cayley, por exemplo) satisfazendo dualidade de Haag.

Claramente

$$C(1) = 0, \quad C(-1) = \infty, \quad C(\pm i) = \pm 1$$

e

$$C(0, 1) = \{z \in \mathbb{S}^1; 0 < \Im(z) < \pi/2\} =: I_1$$

$$C(0, \infty) = \{z \in \mathbb{S}^1; 0 < \Im(z) < \pi\} =: M_+$$

Usando a aplicação de Cayley, nós relacionamos duas apresentações das teorias quirais: a apresentação compacta, na qual o grupo de Möbius e os campos quirais são definidos sobre \mathbb{S}^1 , e a apresentação não-compacta, na qual o grupo de Möbius e os campos quirais são definidos sobre \mathbb{R} . No que segue usaremos ambas apresentações, de acordo com nossa conveniência, sem alterarmos a simbologia.

Chapter 8

Pré-cofeixe CW

Por modelo de correntes abelianas entendemos uma teoria quirial dada pelo pré-cofeixe de álgebras de Weyl gerado por correntes abelianas sobre \mathbb{S}^1 ; é ocasionalmente também chamado de modelo- $\widehat{U}(1)$, mas aqui usaremos o nome *pré-cofeixe CW*. Sua simplicidade matemática permite que sejam conhecidos explicitamente diversos objetos de interesse físico, tais como os campos carregados e os operadores modulares - esse fato é, na verdade, o principal atrativo dessa classe de modelos. Este capítulo apresenta as definições básicas e os tópicos que usaremos nos capítulos seguintes; ele foi elaborado a partir dos seguintes trabalhos, os quais sugerimos para as provas e detalhes omitidos aqui: em [38] há uma exposição detalhada do modelo das correntes abelianas de *dimensão um* (essa dimensão é definida abaixo); em [144] a estrutura de superseleção desse modelo é analisada com o auxílio dos cociclos-de-Connes, que relacionam os grupos modulares correspondentes a diferentes estados padrão sobre a mesma álgebra de von Neumann (*capítulo 10.2*); em [130] é tratado o caso multidimensional, e nele há também uma discussão de aspectos algébricos e modulares dessas teorias baseado nos dois trabalhos anteriores. Para uma discussão das teorias conformes e teorias quirais com especial consideração do problema dos campos se transformarem de acordo com o recobrimento universal do grupo conforme, sugerimos [123]; vide também [133].

Para o que segue, introduzimos as definições e convenções abaixo.

Notação 68 Denotamos por V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com dimensão finita N e produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sua complexificação $(V_{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}})$ é definida canonicamente:

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes V = \{v + iw ; v, w \in V\}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} := \langle \Re(\cdot), \Re(\cdot) \rangle + \langle \Im(\cdot), \Im(\cdot) \rangle + i(\langle \Re(\cdot), \Im(\cdot) \rangle - \langle \Im(\cdot), \Re(\cdot) \rangle)$$

onde

$$\Re(v + iw) = v, \quad \Im(v + iw) = w, \quad \forall v, w \in V$$

Notação 69 Definimos o espaço das funções teste tomando valores em V por

$$LV := C^\infty(\mathbb{S}^1, V) = \{f : \mathbb{S}^1 \rightarrow V \text{ de classe } C^\infty\}$$

munido da semi-norma

$$\|\cdot\| : LV \rightarrow (0, \infty] , \|f\| := \sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 , |f_n|^2 := \langle f_n, f_n \rangle_{\mathbb{C}}$$

dada em termos dos coeficientes da expansão em série de Fourier

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n} , \bar{f}_n = f_{-n} \in V_{\mathbb{C}} , \forall n \in \mathbb{N}$$

Diferenciamos e integramos essas funções com respeito ao parâmetro $z \in \mathbb{S}^1$ de acordo com

$$z = e^{i\theta} \rightsquigarrow iz \frac{d}{dz} = \frac{d}{d\theta} , \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Notação 70 Identificando V com o subespaço das funções constantes de LV

$$V \hookrightarrow LV$$

podemos tomar o quociente

$$(LV)_0 := \frac{LV}{V} = \{f + c; c \in V, f \in LV\}$$

Sobre $(LV)_0$ definimos o produto interno

$$(\cdot, \cdot) : (LV)_0 \times (LV)_0 \rightarrow \mathbb{C} , (f, h) := \sum_{n=1}^{\infty} n \langle f_n, h_n \rangle_{\mathbb{C}}$$

(Não usaremos símbolos diferentes para os elementos de LV e $(LV)_0$, esperando que o contexto indique qual é o caso quando isso não for mencionado explicitamente.)

$(LV)_0$ também possui uma estrutura complexa

$$i : (LV)_0 \rightarrow (LV)_0 , (if)_n = \begin{cases} if_n , & n > 0 \\ f_0 , & n = 0 \\ -if_n , & n < 0 \end{cases}$$

Com tal estrutura complexa, $((LV)_0, (\cdot, \cdot))$ é um pré-espaço de Hilbert. Denotamos por \mathfrak{h} o completamento de $(LV)_0$ com respeito à norma definida pelo produto interno (\cdot, \cdot) :

$$\mathfrak{h} := \overline{(LV)_0} \tag{8.1}$$

e denotamos por $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$ o espaço de Fock totalmente simétrico definido por $(\mathfrak{h}, \langle, \rangle)$

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^{\otimes n}$$

$$\mathfrak{h}^0 := \mathbb{C} \text{ , } \mathfrak{h}^{\otimes n} := \text{expansão linear } \left\{ \underbrace{f \otimes \dots \otimes f}_n ; f \in \mathfrak{h} \right\} \text{ , } n \geq 1 \quad (8.2)$$

$$\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ , } \langle e^f, e^g \rangle = e^{\langle f, g \rangle} \text{ , } \forall f, g \in \mathfrak{h}$$

$$e^f := \left(1, f, \frac{1}{2}(f \otimes f), \dots, \frac{1}{n!} \left(\underbrace{f \otimes \dots \otimes f}_n \right), \dots \right) \text{ , } \forall f \in \mathfrak{h}$$

Notação 71 Sobre LV definimos a forma bilinear

$$A : LV \times LV \rightarrow \mathbb{R} \text{ , } A(f, h) = \int_{S^1} \frac{dz}{2\pi i} \langle f'(z), h(z) \rangle \quad (8.3)$$

Essa forma satisfaz as seguintes propriedades:

$$A1) A(f, h) = -A(h, f) \text{ , } \forall f, h \in LV \quad (8.4)$$

$$A2) f \in LV, A(f, h) = 0 \forall h \in LV \iff f = \text{constante}$$

Portanto, A é uma forma simplética sobre LV e fiel sobre $(LV)_0!$

Definimos a *álgebra de Weyl das correntes* \mathfrak{A} como sendo a álgebra- \mathbb{C}^* gerada pelos operadores de Weyl caracterizados pelas seguintes relações

$$\begin{cases} W(f)W(h) = e^{-\frac{1}{2}A(f,h)}W(f+h) \\ W(f)^* = W(-f) \end{cases} \text{ , } \forall f, h \in LV \quad (8.5)$$

$$\mathfrak{A} := \overline{*}\text{-algebra}\{W(f); f \in LV\} \quad (8.6)$$

Enfim, definimos o *pré-cofeixe CW* $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$:

$$\mathcal{I} \ni I \rightarrow \mathcal{R}(I) := \{W(f); f \in LV, \text{supp}(f) \subset I\}'' \quad (8.7)$$

$$\alpha : Mob \rightarrow Aut(\mathfrak{A}) \text{ , } \alpha_g(W(f)) := W(f_g) \text{ , } f_g(z) := f(g^{-1}z)$$

Facilmente, verificamos que o pré-cofeixe CW satisfaz as seguintes propriedades:

i) **Isotonia**

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subset I_2 \Rightarrow \mathcal{R}(I_1) \subset \mathcal{R}(I_2)$$

ii) **Localidade**

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subset I_2' \Rightarrow \mathcal{R}(I_1) \subset \mathcal{R}(I_2)'$$

iii) **Covariância**

$$I \in \mathcal{I} \Rightarrow \alpha_g \mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(gI)$$

iv) **Estado de Vácuo.** O estado de vácuo ω é definido por

$$LV \ni f \rightarrow \omega(W(f)) = e^{-\frac{\|f\|^2}{2}} \quad (8.8)$$

A representação de vácuo $(\mathcal{H}, \pi, U, \Omega)$ é realizada canonicamente no espaço de Fock \mathcal{H} :¹

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \ni W(f) &\rightarrow \pi(W(f)) := e^f \in \mathcal{H} \\ Mob \ni g &\rightarrow U(g) := e^{\alpha(g)} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \end{aligned} \quad (8.9)$$

A representação de vácuo também as seguintes propriedades adicionais:

v) **Dualidade causal e Aditividade Forte**

Por cálculo direto, a dualidade causal (eq. 2.7) e a aditividade forte (eq. ??) da representação de vácuo seguem-se da propriedade:

$$I \in \mathcal{I}, f \in LV, A(f, h) = 0 \forall h \in \mathfrak{h}(I) \Rightarrow f|_I = \text{constante}$$

vi) **Propriedade de cisão**

¹Facilmente verificamos que esta representação satisfaz as propriedades da definição

$$\pi \circ \alpha(g) = adU(g) \circ \pi, \forall g \in Mob$$

$$U_\theta(R(\theta)) = e^{i\theta L_0}, \forall \theta \in \mathbb{R}, Spect(L_0) \subset [0, \infty)$$

onde L_0 é o operador de Virasoro que gera as rotações.

Para ilustrar, damos aqui a prova de que ω é invariante sob ação do grupo das rotações $R(\theta)$ (definição 7.15) - uma condição necessária para que este seja o estado de vácuo. Como ω é fracamente contínuo (!), basta verificar a invariância de sua ação sobre os operadores de Weyl. Com efeito, dados $f \in LV$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos que os coeficientes de Fourier de $f_{R(\theta)}$ e f satisfazem

$$(f_{R(\theta)})_n = e^{-in\theta} f_n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\|f_{R(\theta)}\| = \|f\|, \forall \theta \in \mathbb{R}$$

e conseqüentemente

$$\omega(\alpha_{R(\theta)} W(f)) = e^{-\frac{\|f_{R(\theta)}\|^2}{2}} = e^{-\frac{\|f\|^2}{2}} = \omega(W(f))$$

Para cada $I \in \mathcal{I}$ temos os subespaços

$$\mathfrak{h}(I) := \{f \in LV / \text{supp}(f) \subset \bar{I}\} \subset \mathfrak{h}$$

$$e^{\mathfrak{h}(I)} := \text{expansão linear de } \{e^\varphi ; \varphi \in \mathfrak{h}(I)\} \subset \mathcal{H}$$

a partir dos quais definimos o fator tipo I

$$\mathcal{N}_I := B(e^{\mathfrak{h}(I)}) \subset B(\mathcal{H})$$

que satisfaz

$$\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{N}_I \subset \mathcal{R}(I')$$

Isso implica na propriedade cisão (20), pois a representação de vácuo é localmente fiel!

vii) Covariância Modular

Não é trivial provar diretamente que o pré-cofeixe CW satisfaz a propriedade de covariância modular (equação 7.18), mas isso segue-se dos teoremas sobre teorias quânticas locais conformes, mencionado na seção 7.2. Para uma prova direta nesse caso particular, vide [130, Proposition 5.1.2].

O Centro de \mathfrak{A} e o Operador de Carga Q

Pela propriedade (8.4), temos que o centro da álgebra \mathfrak{A} é dado por

$$Z(\mathfrak{A}) = \overline{*}\text{-álgebra}\{W(c) ; c \in V\}$$

Em cada representação (fortemente contínua) (π, \mathcal{H}) de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ definimos o operador de carga Q_π por

$$Q_\pi := -i \nabla_x \pi(W(x))|_{x=0}$$

donde

$$\pi(W(c)) = e^{i(Q_\pi, c)} , \forall c \in V$$

O espectro do operador de carga distingue as representações de \mathfrak{A} , razão de sua importância na teoria dos setores de superseleção.

A ação covariante de $Diff(\mathbb{S}^1)$

Usando o mesmo símbolo α , definimos a ação do grupo dos automorfismos diferenciáveis de \mathbb{S}^1 na álgebra \mathfrak{A} por analogia à ação do grupo de Möbius

$$\alpha : Diff(\mathbb{S}^1) \rightarrow Aut(\mathfrak{A}) , \alpha_g W(f) := W(f_g) , f_g(z) = f(g^{-1}(z))$$

Claramente, essa ação é covariante

$$\alpha_g \mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(gI) , \forall g \in Diff(\mathbb{S}^1) , \forall I \in \mathcal{I}$$

Observação 72 (Corrente Abeliana Multidimensional) *Definimos a corrente abeliana de dimensão N como sendo uma distribuição $J(z) = (J^1(z), \dots, J^N(z))$ sobre LV cujas componentes satisfazem as seguintes relações de comutação*

$$[J^i(z_1), J^j(z_2)] = -\delta'(z_1 - z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$$

Mais precisamente, a corrente J é uma aplicação linear

$$LV \ni f = (f^1, \dots, f^N) \rightarrow J(f) := (J^1(f^1), \dots, J^N(f^N)) \in V$$

tal que

$$[J(f), J(h)] = - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \langle f'(z), h(z) \rangle =: -A(f, h)$$

Portanto, os operadores de Weyl que definem o pré-cofeixe CW podem ser escritos como exponenciais da corrente J :

$$W(f) = e^{iJ(f)}$$

Entretanto, todas as propriedades da teoria seguem-se da forma simplética $A(\cdot, \cdot)$, definida a partir do produto interno em V , sem necessidade de mencionar as correntes abelianas, embora seja dessas que tiramos o adjetivo “abeliano” para o modelo².

8.1 Teoria dos Setores de Superseleção

Como ocorre em geral na teoria quântica local, os *setores de superseleção* são definidos pelas classes de equivalência unitária das *representações de energia positiva* da álgebra de observáveis universal; e aqui, como ocorre em geral nas teorias conformes, a teoria dos setores de superseleção reduz-se à análise DHR, porque as representações de energia positiva podem ser localizadas em regiões compactas, estando em correspondência com endomorfismos localizados e transportáveis da álgebra universal. Esse fato simplifica consideravelmente a análise da estrutura de superseleção da teoria, cujas propriedades serão coletadas na definição de *representações de energia positiva gerada por campos*.

Em geral, qualquer representação pode ser dada pela soma direta de suas subrepresentações irredutíveis; em nosso caso, temos a seguinte proposição:

²O adjetivo “abeliano” refere-se à álgebra de Lie dada pelas relações de comutação dos campos. Em geral, poderíamos considerar relações do tipo

$$[J^i(z_1), J^j(z_2)] = if_k^{ij} J^k(z_1) \delta(z_1 - z_2) - ik g^{ij} \delta'(z_1 - z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$$

onde f_k^{ij} são constantes de estrutura de uma álgebra de Lie e g^{ij} é uma métrica de Cartan. (No nosso caso, temos que $f_k^{ij} = 0$ e que g^{ij} é dada pela métrica do espaço vetorial V .)

Outra razão para o nome abeliano vem das relações de comutação entre os campos portadores de carga: definem uma representação abeliada do grupo de tranças, pois em nosso caso estas são dadas por fases multiplicativas (conforme equações abaixo).

Proposição 73 *Toda representação de energia positiva (π, \mathcal{H}, U) de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ pode ser decomposta numa soma direta de representações fundamentais. Mais precisamente, existe uma família χ de vetores unitários $\Omega_i \in \mathcal{H}$ ($i \in \chi$) tal que os subespaços $\mathcal{H}_i = \pi(\mathfrak{A})\Omega_i \subset \mathcal{H}$ são mutuamente ortogonais e $\mathcal{H} = \sum_{i \in \chi} \mathcal{H}_i$; além disso, se H é o hamiltoniano (gerador das translações espaço-temporais), temos $H\Omega_i = 0$ para todo $i \in \chi$.*

Além do estado de vácuo, conhecemos explicitamente todos os estados fundamentais do pré-cofeixe CW:

Proposição 74 *Os estados fundamentais de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ são exatamente os seguintes*

$$q \in LV, \omega_q(W(f)) = e^{i(q, f_0) - \frac{1}{2}\|f\|} , f_0 = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z}$$

E as representações fundamentais de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ são dadas pela construção GNS $(\pi_q, \mathcal{H}_q, \Omega_q)$ para o par (\mathfrak{A}, ω_q) , para cada $q \in LV$.

Para analisarmos a estrutura de superseleção da teoria, definimos os chamados automorfismos carregados:

Definição 75 *O automorfismo de \mathfrak{A} transportando uma carga global $q \in LV$ é definido por³*

$$\gamma_q : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}, \quad \gamma_q(W(f)) := e^{i(q, f_0)} W(f) \quad (8.10)$$

onde

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{S}^1) \rightsquigarrow f_0 = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z}$$

Portanto, temos que os estados fundamentais de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ e as representações fundamentais são determinados a partir do estado de vácuo pelos automorfismos γ_q , de acordo com

$$\omega_q = \omega \circ \gamma_q \quad (8.11)$$

$$\mathcal{H}_q = \mathcal{H}, \quad \pi_q = \pi \circ \gamma_q$$

³É fácil checar que essas aplicações lineares são realmente automorfismos de \mathfrak{A} , i.e. que satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \gamma_q(1) = 1 \\ \gamma_q(W^*) = \gamma_q(W)^* \\ \gamma_q(\zeta W_1 + W_2) = \zeta \gamma_q(W_1) + \gamma_q(W_2) \end{cases}, \quad \forall W, W_1, W_2 \in \mathfrak{A}, \forall \zeta \in \mathbb{C}$$

Como resultado das proposições acima, o pré-cofeixe CW possui um número inumerável (contínuo) de setores de superseleção, pois o operador de carga Q_q possui na representação (π_q, \mathcal{H}_q) espectro

$$\text{Spect}(Q_q) = \{q\}$$

Modelos quirais com apenas um número discreto (ou finito) de setores de superseleção são dados pelas *extensões locais do pré-cofeixe CW*, definidos na próxima seção. Antes, definimos a chamada representação universal do pré-cofeixe CW, que coleta todas as representações fundamentais de energia positiva do mesmo.

8.1.1 Representação Universal

A *representação universal* $(\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}}, \hat{U})$ do pré-cofeixe CW $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ é dada pela soma direta (com multiplicidade unitária) de todas as representações fundamentais de energia positiva de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$:

Definição 76 (Representação Universal)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \bigoplus_{q \in LV} \mathcal{H}_q = \{\phi = (\phi_q)_{q \in LV}, \phi_q \in \mathcal{H}, \phi_q \neq 0\} \\ \langle \cdot, \cdot \rangle : \hat{\mathcal{H}} \times \hat{\mathcal{H}} &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \phi, \psi \rangle = \sum_{q \in LV} \langle \phi_q, \psi_q \rangle_0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\hat{\pi} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}), \quad \hat{\pi}(\bigoplus_{q \in LV} \phi_q) = \bigoplus_{q \in LV} \pi_q(\phi_q)$$

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \hat{U}(t) : \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}, \quad (\hat{U}(t)\phi)_q = U_0(t)\phi_q \quad (8.13)$$

$(\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}}, \hat{U})$ é uma representação fiel(!) e o operador de carga dessa representação é dado por

$$\hat{Q} = -i \nabla_{\lambda} \hat{\pi}(W(\lambda))|_{\lambda=0} = \bigoplus_{q \in LV} Q_{\pi_q}$$

Representação de Energia Positiva Localmente Gerada por Campos

Uma representação de energia positiva (π, \mathcal{H}, U) de (\mathfrak{A}, α) é dita ser *localmente gerada por campos* quando existe uma família irredutível de álgebras de von Neumann

$$\mathcal{I} \ni I \rightarrow \mathcal{F}(I) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

tal que:

i) A família $\{\mathcal{F}(I); I \in \mathcal{I}\}$ é local

$$\mathcal{F}(I) \subset \pi(\mathfrak{A}(I'))' , \forall I \in \mathcal{I}$$

ii) Cada $\mathcal{F}(I)$ contém os observáveis localizados em I , i.e

$$\pi(\mathfrak{A}(I)) \subset \mathcal{F}(I)$$

iii) Existe uma ação unitária fortemente contínua do grupo das rotações (*definição 7.15*)

$$U \circ R : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

gerada por um operador positivo H afiliado à álgebra de observáveis e tendo o zero como auto-valor simples (cujo auto-vetor correspondente Ω é o estado de vácuo)

$$U(R(\theta)) = e^{i\theta H} , \forall \theta \in \mathbb{R}$$

que implementa a ação covariante das rotações

$$\pi(\alpha_t(A)) = e^{iHt} \pi(A) e^{-iHt} , \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathfrak{A}$$

Além disso, vale a seguinte condição de continuidade:

$$\sqrt{I_1} \subset I_2 \exists \varepsilon > 0 / e^{iHt} \mathcal{F}(I_1) e^{-iHt} \subset \mathcal{F}(I_2) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

iv) O vetor de vácuo Ω é cíclico e separante para as álgebras de campo locais.

v) O operador de carga Q_π tem espectro discreto.

Teorema 77 *Qualquer representação de energia positiva (π, \mathcal{H}, U) de $(\mathcal{R}, \alpha, \mathfrak{A})$ localmente gerada por campos com espectro de cargas $S_Q \subset LV$ é unitariamente equivalente à uma subrepresentação de $(\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}}, \hat{U})$, a saber: $\hat{\pi}|_{\oplus_{q \in S_Q} \mathcal{H}_q}$.*

8.2 Extensões Locais do Pré-cofeixe CW

É possível aumentar de certa forma as álgebras locais do pré-cofeixe CW mantendo a localidade. Um tal procedimento nos proporciona uma classe de modelos possuindo um número de setores de superseleção finito, em distinção ao caso do pré-cofeixe CW que tem um número não enumerável de setores de superseleção.

Definição 78 (Extensão Local) *Uma extensão local do pré-cofeixe CW é uma teoria quiral local $(\mathcal{R}_L, \alpha_L, \mathfrak{A}_L)$ satisfazendo:*

i) *Extensão das Álgebras Locais.*

$$\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}_L(I) , \forall I \in \mathcal{I}$$

ii) *Extensão das Translações Temporais*

$$\alpha_L(g)|_{\mathfrak{A}} = \alpha(g) \quad , \quad \forall g \in Mob$$

iii) *Redução do Centro*

$$\#Z(\mathfrak{A}_L) < \infty$$

A extensão $(\mathcal{R}_L, \alpha_L, \mathfrak{A}_L)$ é dita *maximal* quando para qualquer outra extensão local $\{\mathcal{R}_{\tilde{L}}, \alpha_{\tilde{L}}, \mathfrak{A}_{\tilde{L}}\}$ do pré-cofeixe CW temos

$$\tilde{\mathcal{R}}_L(I) \supset \mathcal{R}_L(I) \Rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_L(I) = \mathcal{R}_L(I) \quad , \quad \forall I \in \mathcal{I}$$

Necessariamente, as extensões maximais devem satisfazer a dualidade causal, pois no caso contrário sua rede dual (equação 2.6) seria uma extensão local não-trivial.

As extensões locais do pré-cofeixe CW serão construídas pela incorporação de *campos locais* à álgebra de observáveis. Entretanto, os campos locais estão definidos no recobrimento universal de S^1 ,⁴ portanto, para definir tais extensões locais, a família de campos que deverá ser incorporada à álgebra de observáveis deve ser escolhida adequadamente para que esta possa ser definida diretamente sobre S^1 e também ser local. Na construção destas extensões locais, recorreremos à *representação universal*.

O primeiro passo para a construção das extensões locais é dado pela definição dos operadores carregados que implementam os automorfismos carregados de \mathfrak{A} :

Definição 79 (Operadores Carregados) *Definimos o operador carregado com carga $q_1 \in LV$ por*

$$\Gamma_{q_1} : \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} \quad , \quad (\Gamma_{q_1} \phi)_q = \phi_{q-q_1} \quad , \quad \forall q \in V \quad (8.14)$$

Facilmente verificamos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \gamma_{q_1} &= ad\Gamma_{q_1}^{-1} \\ \Gamma_{q_1} \Gamma_{q_2} &= \Gamma_{q_1+q_2} \quad , \quad \forall q_1, q_2 \in V, \forall t \in \mathbb{R} \\ adU(t) \Gamma_{q_1} &= \Gamma_{q_1} \end{aligned} \quad (8.15)$$

O segundo passo para a construção de campos locais é dado pela definição de distribuição de cargas:

⁴Em teorias quânticas locais, os campos carregados locais estão definidos sobre o recobrimento universal do espaço-tempo e se transformam sob ação do recobrimento universal do grupo de isometrias deste espaço-tempo. Para teorias sobre o espaço de Minkowski quadridimensional a situação é simples porque este espaço é simplesmente conexo e o recobrimento de grupo de Poincaré tem grau-2 (o que distingue campos bosônicos e fermiônicos, conforme se transformem trivialmente ou não sob ação do centro deste recobrimento). No caso de teorias conformes a situação é mais complicada, porque a compactificação do espaço-tempo não é simplesmente conexa e seu recobrimento universal tem grau infinito [123, sections III and IV].

Definição 80 (Distribuição de Cargas) *Uma distribuição de cargas em \mathbb{S}^1 é uma função de classe- C^∞*

$$\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

tal que

$$z\rho(z) \in V, \forall z \in \mathbb{S}^1$$

Nesse caso, definimos o funcional

$$\rho[\cdot] : LV \rightarrow \mathbb{R}, \rho[f] := \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} (\rho(z), f(z)) \quad (8.16)$$

Naturalmente, $Diff(\mathbb{S}^1)$ age no espaço das distribuições de cargas pela ação dual de α :

$$\rho \rightarrow (\bar{\alpha}(g)\rho)(z) := \frac{dg^{-1}(z)}{dz} \rho(g^{-1}z), \forall g \in Diff(\mathbb{S}^1) \quad (8.17)$$

donde

$$(\bar{\alpha}(g)\rho)[f] = \rho[\alpha(g^{-1})f], \forall f \in LV, \forall g \in Diff(\mathbb{S}^1)$$

Correspondente à uma distribuição de cargas, definimos os automorfismos locais:

Definição 81 (Automorfismo Local) *O automorfismo local definido pela distribuição de cargas ρ é o automorfismo contínuo de \mathfrak{A}*

$$\gamma_\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$$

(unicamente) definido por

$$\gamma_\rho(W(f)) := e^{i\rho[f]}W(f), \forall f \in LV$$

Facilmente, vemos que os automorfismos locais satisfazem a propriedade de composição⁵

$$\gamma_{\rho_1}\gamma_{\rho_2} = \gamma_{\rho_1+\rho_2}$$

e são locais no sentido de que

$$f \in LV, \text{supp}(f) \cap \text{supp}(\rho) = \emptyset \Rightarrow \gamma_\rho(W(f)) = W(f)$$

Os campos carregados locais serão operadores que implementam os automorfismos carregados γ_ρ , precisamente:

⁵Pelo fato de que vale

$$\rho[f_1 + f_2] = \rho[f_1] + \rho[f_2], \forall f_1, f_2 \in LV$$

Definição 82 (Campo Local) Um campo transportador de carga $q \in LV$ localizado em $I \in \mathcal{I}$ é um operador $\psi : \widehat{\mathcal{H}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \psi\Omega &\in \mathcal{H}_q \\ [\psi, J(f)] &= 0, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{S}^1), \quad \text{supp}(f) \subset I' \\ \text{ad}\psi_\rho^* &= \gamma_\rho \end{aligned} \tag{8.18}$$

Tais campos locais podem ser construídos canonicamente.

Proposição 83 (Construção de Campos Locais) Seja ρ uma distribuição de cargas em \mathbb{S}^1 e $q = \rho_0 = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \rho(z)$.

Seja $\hat{\rho} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\frac{d}{dz} \hat{\rho}(z) = i \left[\rho(z) - \frac{q}{z} \right]$$

Se definimos

$$\psi_\rho := W(\hat{\rho}) \Gamma_q \tag{8.19}$$

Então, temos que ψ_ρ é um campo com carga q localizado em $\text{supp}(\hat{\rho})$, conforme equação (8.18).

Observamos que uma função real $\hat{\rho}$ realmente existe e de fato é dada por

$$\hat{\rho}(z) := i \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \rho_{-n} \frac{z^n}{n} + l(\rho) \tag{8.20}$$

onde $l(\rho)$ é uma constante e

$$\rho(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho_{-n} z^{n-1}, \quad \rho_0 = q$$

é a expansão em série de Taylor da distribuição de cargas ρ .

Notamos também que para $f \in LV$ vale⁶

$$\psi_{-if'} = W(f) \tag{8.21}$$

⁶Com efeito, $-if' : \mathbb{S}^1 \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ é de classe- C^∞ e satisfaz

$$-izf'(z) \in V, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1$$

Além disso,

$$(-if')[1] = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} (-if'(z)) = 0$$

e

$$\frac{d}{dz} f(z) = i \left[-if'(z) - \frac{q}{z} \right]$$

ou seja, podemos considerar $f = \widehat{(-if')}$, na notação da definição (8.20).

Há certa arbitrariedade no campo local definido pela proposição acima dada pela constante de integração $l(\rho)$, além daquela oriunda da multiplicação por fases. Esta arbitrariedade nos permite ajustar as relações de comutação entre os campos locais de modo a obtermos famílias de campos mutuamente locais, ou seja, que também comutem entre si quando localizados em regiões disjuntas.

Facilmente calculamos as relações de comutação entre dois campos locais ψ_{ρ_1} e ψ_{ρ_2} , obtendo

$$\psi_{\rho_1} \psi_{\rho_2} = Z(\rho_1, \rho_2) \psi_{\rho_1 + \rho_2}$$

onde (a segunda igualdade abaixo segue-se de um cálculo direto)

$$\begin{aligned} Z(\rho_1, \rho_2) &= W(\hat{\rho}_1) \gamma_{-q_1} W(\hat{\rho}_2) W(\rho_1 + \rho_2)^{-1} \\ &= e^{i[l(\rho_1) + l(\rho_2) - l(\rho_1 + \rho_2)]} \exp\left(-\frac{1}{2} A(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) - i q_1 l(\rho_2)\right) \end{aligned}$$

Como vemos, tais relações de comutação dependem crucialmente das constantes $l(\rho_1)$ e $l(\rho_2)$ e também das cargas q_1 e q_2 . Então nos perguntamos sobre como escolher tais constantes e cargas de modo a obter campos relativamente locais, ou seja, que tenhamos

$$Z(\rho_1, \rho_2) Z(\rho_2, \rho_1)^* = \exp(-A(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) - i[q_1 l(\rho_2) - q_2 l(\rho_1)]) = 1$$

sempre que $\text{supp}(\rho_1) \cap \text{supp}(\rho_2) = \emptyset$

Tal escolha pode ser feita da maneira seguinte, considerando que as relações de comutação não são modificadas pela multiplicação de elementos centrais da álgebra: fixe $\zeta \in \mathbb{S}^1$ e defina, para cada distribuição de cargas ρ com carga total $q \in LV$,

$$\begin{aligned} l_\zeta(\rho) &:= -\int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi} \rho(z) \ln_\zeta z \\ \eta_\zeta(\rho) &:= \exp\left(\frac{i}{2} q \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi} \rho(z) \ln_\zeta z\right) \\ \hat{\rho}_\zeta(z) &:= i \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \rho_{-n} \frac{z^n}{n} + l_\zeta(\rho) \end{aligned} \quad (8.22)$$

e

$$\psi_\rho^\zeta := \eta_\zeta(\rho) W(\hat{\rho}) \Gamma_q \quad (8.23)$$

Nesse caso, temos

$$\psi_{\rho_1}^\zeta \psi_{\rho_2}^\zeta = e^{\frac{1}{2} \mathcal{T}(\rho_1, \rho_2)} \psi_{\rho_1 + \rho_2}^\zeta \quad (8.24)$$

onde

$$\mathcal{T}(\rho_1, \rho_2) = -A(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi} [\langle q_1, \rho_2(z) \rangle - \langle q_2, \rho_1(z) \rangle] \ln_\zeta z \quad (8.25)$$

Em particular, temos

$$\mathcal{T}(\rho, \rho) = 0$$

donde

$$(\psi_\rho^\zeta)^* = \psi_{-\rho}^\zeta \quad (8.26)$$

\mathcal{T} é um invariante topológico no sentido de que quando os suportes de ρ_1 e ρ_2 são disjuntos e não contêm ζ , então o módulo de \mathcal{T} depende apenas das cargas globais q_1 e q_2 e seu sinal depende apenas das posições dos suportes de ρ_1 e ρ_2 em relação a ζ , precisamente⁷:

$$\left. \begin{array}{l} \text{supp}(\rho_1) \cap \text{supp}(\rho_2) = \emptyset \\ \zeta \notin \text{supp}(\rho_1) \cup \text{supp}(\rho_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{T}(\rho_1, \rho_2) = \pm i\pi \langle q_1, q_2 \rangle \quad (8.27)$$

Nesse caso, temos de (8.24)

$$\psi_{\rho_1}^\zeta \psi_{\rho_2}^\zeta = e^{\pm i\pi \langle q_1, q_2 \rangle} \psi_{\rho_2}^\zeta \psi_{\rho_1}^\zeta \quad (8.28)$$

Podemos também determinar a dependência dos campos locais ψ_ρ^ζ em relação ao ponto $\zeta \in \mathbb{S}^1$. De fato, para cada distribuição de carga ρ (com carga total $q \in LV$) e para cada par de pontos $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{S}^1 \setminus \text{supp}(\rho)$ temos

$$\psi_\rho^{\zeta_2} (\psi_\rho^{\zeta_1})^* = e^{-\sigma i\pi \langle q, q \rangle} e^{2\pi i \langle Q, q \rangle} \quad (8.29)$$

onde $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ depende das posições de ζ_1 e ζ_2 em relação a $\text{supp}(\rho)$.⁸

As equações 8.24 e 8.27 bem como 8.29 determinam os valores das cargas globais e os subespaços de $\widehat{\mathcal{H}}$ restritos aos quais os campos ψ_ρ^ζ independem do ponto $\zeta \in \mathbb{S}^1$, de modo que formem uma família de campos locais. Para enunciar o resultados desses raciocínios na forma de um teorema, damos primeiro a definição de *lattice* (definida convenientemente para nossos fins):

Definição 84 (Lattice em V) *Seja $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \subset V$ uma base de V satisfazendo*

$$(q_i, q_i) \in 2\mathbb{N} \quad , \quad \langle q_i, q_j \rangle \in \mathbb{Z} \quad , \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

O lattice em V definido por \mathbf{q} é o subconjunto

$$L(\mathbf{q}) := \left\{ \sum_{n=1}^N a_n q_n ; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

⁷Em dimensões superiores, \mathcal{T} corresponde à alternativa Bose-Fermi ($\mathcal{T} = 0$ ou $i\pi$) para campos. Em nosso caso, a rica estrutura de \mathcal{T} deve-se ao fato do grupo de cohomologia do espaço \mathbb{S}^1 ser não-trivial.

⁸De passagem, notamos que os campos ψ_ρ^ζ podem ser interpretados como seções locais de um "fibrado de campos" sobre \mathbb{S}^1 .

A base do lattice dual e o próprio lattice dual são definidos respectivamente por

$$\mathfrak{q}^* := \{q_1^*, \dots, q_n^*\} \quad \text{onde} \quad \langle q_j, q_k^* \rangle = \delta_{jk} \quad , \quad \forall j, k = 1, \dots, N$$

$$L(\mathfrak{q})^* := L(\mathfrak{q}^*)$$

Todo lattice $L(\mathfrak{q})$ é um subgrupo aditivo de seu dual: $L(\mathfrak{q}) \subset L(\mathfrak{q})^*$; portanto, está bem definido o grupo quociente $L(\mathfrak{q})^*/L(\mathfrak{q})$. Também definimos os vetores

$$\mu_1 := 0 \quad , \quad \mu_i := \sum_{k=1}^{i-1} \langle q_i, q_k \rangle q_k^* \quad , \quad \forall i = 2, \dots, N$$

e a seguinte aplicação

$$\mu_L : L(\mathfrak{q}) \rightarrow V \quad , \quad q = \sum_{i=1}^N n_i q_i \rightarrow \mu_L(q) := \sum_{i=1}^N n_i \mu_i \quad (8.30)$$

Teorema 85 (Extensões locais do pre-cosheaf CW) *Todas as extensões locais do pré-cofeixe CW são dadas por lattices em V : se $L = L(\mathfrak{q}) \subset V$ é um lattice, a extensão local associada é definida por*

$$\mathcal{I} \ni I \rightarrow \mathcal{R}_L(I) := \text{*algebra} \left\{ \phi_\rho := e^{i\pi \langle Q, \mu_L(q) \rangle} \psi_\rho^\zeta \Big|_{\mathcal{H}_{L(\mathfrak{q})}^*} \right\} \quad (8.31)$$

$$\text{onde: } \text{supp}(\rho) \subset I \quad , \quad \zeta \in I' \quad , \quad q = \int_{S^1} \frac{dz}{2\pi i} \rho(z) \in L$$

$$\alpha_L(g) = \text{ad}U_L(g) \quad , \quad U_L(g) \phi_\rho := \phi_{\rho^g} \quad , \quad \rho^g(z) := (g^{-1})'(z) \rho(g^{-1}z)$$

A álgebra universal correspondente é dada por

$$\mathfrak{A}_L = \text{*algebra} \{W(f) \Gamma_q / \text{supp}(f) \subset I, q \in L(\mathfrak{q})^*\}$$

O estado de vácuo é dado por (equação 8.21)

$$\omega_L(\phi_\rho) = \begin{cases} \omega_0(W(\hat{\rho})) & , \text{ se } \int_{S^1} \frac{dz}{2\pi i} \rho(z) = 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Nesse caso, o centro da álgebra \mathfrak{A}_L

$$Z(\mathfrak{A}_L) = \{W(q_k^*) ; k = 1, \dots, N\} \simeq L^*/L$$

Portanto, \mathfrak{A}_L tem tantos setores de superseleção quanto L^*/L tem de elementos; estes setores são gerados por campos locais ϕ_{ρ_k} definidos por distribuições de carga satisfazendo $\rho_k(q_j) = \delta_{kj}$, $\forall k, j = 1, \dots, N$.

Chapter 9

A Origem Modular do Grupo de Simetria $Diff(S^1)$

¹Nos restringiremos a teorias quirais geradas por um campo quiral primário $\phi(z)$ agindo no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{S}(S^1)$ das funções infinitamente diferenciáveis sobre S^1 e covariante sob a representação unitária natural de $Diff(S^1)$ que estende a ação do grupo de Möbius,

$$U : Diff(S^1) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad , \quad U(g)f(z) =: f_g(z) = f(g^{-1}(z)) \quad (9.1)$$

A propriedade “primária” de $\phi(z)$ significa que este se transforma covariantemente sob a ação do grupo conforme [11]

$$U(g)\phi(z)U(g)^* = \left(\frac{dg}{dz}\right)^h \phi(g(z)) \quad (9.2)$$

onde $h \geq 0$ é a *dimensão de escala* do campo $\phi(z)$.

Nós assumimos que as álgebras locais do pré-cofeixe quiral são dadas por

$$\mathcal{R}(I) = \{\phi(g); g \in \mathcal{S}(I)\}' = \{\phi(f); f \in \mathcal{S}(I)\}'' \quad , \quad \forall I \in \mathcal{I} \quad (9.3)$$

A definição significa que as álgebras locais são geradas pelas projeções espectrais dos polinômios de campos espalhados por funções teste. Situações concretas em que essas hipóteses são válidas são dadas pelo pré-cofeixe CW e suas extensões locais, mas acreditamos que nossas deduções são válidas em contextos mais gerais - de acordo com o *teorema (50)*.

¹Este capítulo é baseado em nosso artigo [?].

Essa seção consiste em apresentar e provar nas condições acima definidas, o seguinte teorema:

Teorema 86 *O grupo de simetria $Diff(S^1)$ tem origem modular, i.e*

$$U(Diff(S^1)) \subset \text{grupo gerado por } \bigcup_{\substack{I \in \mathcal{I} \\ \varphi \in \mathcal{R}_{\cdot+}}} \{ \Delta_{(\mathcal{R}(I), \varphi)}^{it}; t \in \mathbb{R} \} \quad (9.4)$$

Nos casos satisfazendo nossas hipóteses, este teorema generaliza o fato de que nas teorias quirais a ação do grupo de Möbius tem origem modular - o análogo em teorias quirais do fato em teorias quânticas locais satisfazendo covariância modular de que a ação covariante do grupo de Poincaré tem origem modular, no sentido dos *teoremas* (55) e (57). Precisamente:

Proposição 87 (Origem Modular da Simetria Quiral) *Seja (\mathcal{R}, U) uma teoria quiral com estado de vácuo ω .*

Então, a ação covariante de Mob possui origem modular,

$$U(Mob) \hookrightarrow \text{grupo } \{ \Delta_{\mathcal{R}(I), \omega}^{it}; I \in \mathcal{I}, t \in \mathbb{R} \} \quad (9.5)$$

Em particular, os geradores do grupo de Möbius L_0, L_{-1}, L_{+1} têm origem modular.

Há provas desse teorema semelhantes àquelas dadas para o caso de simetria de Poincaré em teorias quânticas locais (*teorema* 55) [82, Lemma 1.1, Theorem 1.2].

Como $Diff(S^1)$ é gerado pela álgebra de Witt (*equação* 7.3) cuja extensão central é a álgebra de Virasoro (*equação* 7.7), que por sua vez é gerada algebricamente por $\{L_0, L_1 + L_{-1}, L_2 + L_{-2}\}$ (*relações* 7.11), teremos provado o teorema se provarmos que estes operadores de Virasoro têm origem modular. Como pelo *teorema* (9.5) temos que L_0 e $L_{-1} + L_1$ têm origem modular, basta provarmos que $L_{-2} + L_2$ também tem origem modular.

A Origem Modular de $L_2 + L_{-2}$

Para provar que $L_2 + L_{-2}$ tem origem modular, vamos construir um estado ω_2 sobre a álgebra universal \mathfrak{A} localmente normal e considerar um intervalo $I_2 \in \mathcal{I}$ tais que o gerador infinitesimal do grupo modular de uma álgebra padrão $(\mathcal{R}(I_2), \omega_2)$ coincide com $L_2 + L_{-2}$. Nossa estratégia será reduzir o problema à propriedade de covariância modular do setor de vácuo. Para tal, utilizaremos a descrição não-compacta da teoria quiral (7.19): o pré-cofeixe de álgebras de observáveis locais sobre \mathbb{R} é dado por

$$\mathcal{R}(a, b) = \mathcal{R}(C^{-1}(a, b)) \quad , \quad \forall a < b$$

e a ação covariante de $Diff(S^1)$ em \mathbb{R} é dada por

$$g(x) = CgC^{-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall g \in Diff(S^1)$$

Definição da Dilatação D_2

Considere o difeomorfismo²

$$\xi : (0, 1) \rightarrow (0, \infty), \quad \xi(x) := \frac{2x}{1-x^2}$$

cuja função inversa é dada por

$$\xi^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, 1), \quad \xi^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = -\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Agora, para cada $\lambda > 0$ definimos a dilatação $D_2(\lambda)$

$$D_2(\lambda) : (0, 1) \rightarrow (0, 1), \quad D_2(\lambda) := \xi^{-1} \circ D(\lambda) \circ \xi$$

Pela fórmula (7.15) para a dilatação D , temos a seguinte fórmula para D_2

$$(0, 1) \ni x \rightarrow D_2(\lambda)x = -\frac{1}{\lambda\xi(x)} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\lambda\xi(x)}\right)^2} \quad (9.6)$$

Claramente, D_2 é um difeomorfismo do intervalo $(0, 1)$.

Construção do estado

O estado de vácuo pode ser expresso em termos de funções de correlação

$$\omega(\phi(x_1)\dots\phi(x_m)) = (\phi(x_1)\dots\phi(x_m)) \quad (9.7)$$

cuja invariância sob ação do grupo de Möbius é equivalente à seguinte equação³

$$(\phi(x_1)\dots\phi(x_m)) = [g'(x_1)\dots g'(x_m)]^h (\phi(g(x_1))\dots\phi(g(x_m))), \quad g \in Mob \quad (9.8)$$

²Na descrição compacta

$$\xi : \{z \in \mathbb{S}^1; 0 < \Im(z) < \pi/2\} \rightarrow \{z \in \mathbb{S}^1; 0 < \Im(z) < \pi\}$$

$$z \rightarrow z^2$$

³Utilizamos o sinal $\langle ' \rangle$ para indicar a derivada de uma função com respeito à variável $x \in \mathbb{R}$, i.e.

$$g'(x_0) = \left. \frac{d}{dx} g \right|_{x=x_0}, \quad \forall g \in Diff(\mathbb{R})$$

Usando a não invariância do estado de vácuo sob ação de $D_2(\lambda)$ (já que esta não pertence ao grupo de Möbius), nós definimos a seguinte sequência λ -dependente de funções de correlação (que definem uma sequência de estados normais sobre \mathcal{R})⁴

$$\varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) := [D_2(\lambda)'(x_1)]^h \dots [D_2(\lambda)'(x_m)]^h \langle \phi(D_2(\lambda)(x_1)) \dots \phi(D_2(\lambda)(x_m)) \rangle$$

A seguintes fórmulas para for $D_2(\lambda)$ e $D_2(\lambda)'$ são convenientes para tomarmos o limite $\lambda \rightarrow \infty$:

$$D_2(\lambda)x = 1 - \frac{1/\xi(x)}{\lambda} + \eta(\lambda, x) \quad , \quad D_2(\lambda)'x = \frac{\xi'(x)/\xi^2(x)}{\lambda} + \eta'(\lambda, x)\xi'(x) \forall x \in (0, 1) \quad (9.9)$$

onde o desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 1$ da raiz quadrada na *definição* (9.6) de $D_2(\lambda)$ nos dá

$$\eta(\lambda, x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2 \xi(x)^2} + O(\lambda^{-4}) \quad , \quad \eta'(\lambda, x) = -\frac{\xi'(x)}{\lambda^2 \xi(x)^3} + O(\lambda^{-4}) \quad , \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in (0, 1) \quad (9.10)$$

Temos que $\eta(\lambda, x)$ e $\eta'(\lambda, x)$ são funções suaves em x para λ fixado e de ordem λ^{-2} para x fixado; em particular, satisfazem

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \eta(\lambda, x) = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \eta'(\lambda, x) = 0 \quad , \quad \forall x \in (0, 1) \quad (9.11)$$

Agora, podemos re-escrever φ_λ :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) &= \left[\frac{\xi'(x_1)/\xi^2(x_1)}{\lambda} + \eta'(\lambda, x_1)\xi'(x_1) \right]^h \dots \times \\ &\quad \times \left\langle \phi \left(1 - \frac{1/\xi(x_1)}{\lambda} + \eta(\lambda, x_1) \right) \dots \right\rangle \end{aligned}$$

Usando invariância translacional do estado de vácuo, temos

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) &= \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{mh} \left[\xi'(x_1)/\xi^2(x_1) + \lambda \eta'(\lambda, x_1)\xi'(x_1) \right]^h \dots \times \\ &\quad \times \left\langle \phi \left(\frac{1}{\lambda} [-1/\xi(x_1) + \lambda \eta(\lambda, x_1)] \right) \dots \right\rangle \end{aligned}$$

Usando invariância de escala do vácuo, temos

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) &= \left[\xi'(x_1)/\xi^2(x_1) + \lambda \eta'(\lambda, x_1)\xi'(x_1) \right]^h \dots \times \\ &\quad \times \left\langle \phi [-1/\xi(x_1) + \lambda \eta(\lambda, x_1)] \dots \right\rangle \end{aligned}$$

⁴Lembramos que

$$D_2(\lambda)'x_0 = \left. \frac{d}{dx} D_2(\lambda) \right|_{x=x_0}$$

Tomando o limite $\lambda \rightarrow \infty$, considerando as equações (9.11), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) &= [\xi'(x_1)/\xi^2(x_1)]^h \dots [\xi'(x_m)/\xi^2(x_m)]^h \times \\ &\quad \times \langle \phi[(-1/\xi(x_1)) \dots \phi(-1/\xi(x_m))] \rangle \\ &= \left[\left(\frac{-1}{\xi} \right)' \Big|_{(x_1)} \dots \left(\frac{-1}{\xi} \right)' \Big|_{(x_m)} \right]^h \times \\ &\quad \times \langle \phi(-1/\xi(x_1)) \dots \phi(-1/\xi(x_m)) \rangle \end{aligned}$$

Finalmente, a invariância de Möbius do estado de vácuo implica (lembramos que $x \rightarrow -1/x$ pertence ao grupo de Möbius⁵)

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) &= \left[(-1/\xi)' \Big|_{(x_1)} \dots (-1/\xi)' \Big|_{(x_m)} \right]^h \xi^{2h}(x_1) \dots \xi^{2h}(x_m) \times \\ &\quad \times \langle \phi(\xi(x_1)) \dots \phi(\xi(x_m)) \rangle \end{aligned}$$

Simplificando, nós chegamos a uma expressão análoga à equação (9.8), que define uma nova família de funções de correlação

$$\langle \phi(\xi(x_1)) \dots \phi(\xi(x_m)) \rangle_2 := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m) = [\xi'(x_1) \dots \xi'(x_m)]^h \langle \phi(\xi(x_1)) \dots \phi(\xi(x_m)) \rangle \quad (9.12)$$

Definição 88 Nós chamamos de ω_2 o funcional linear sobre $\mathcal{R}(0, 1)$ definido pelas funções de correlação acima.

Os valores espelhados $\langle \cdot \rangle_2$ dos campos no estado ω_2 espalhados por funções teste com suporte em $(0, 1)$ podem ser escritos em termos dos valores esperados $\langle \cdot \rangle$ dos campos em no estado de vácuo. De fato, para funções $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}((0, 1))$ temos

⁵A transformação em $\bar{\mathbb{R}}$

$$x \rightarrow -1/x$$

corresponde à rotação $R(\pi)$ em \mathbb{S}^1

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow R(\pi)z = \frac{iz}{-i} = -z$$

via transformação de Cayley, que satisfaz

$$C(-z) = -\frac{1}{C(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1$$

conforme pode ser visto diretamente das definições (7.15) e (7.19).

$$\begin{aligned} \langle \phi((f_1)) \dots \phi((f_m)) \rangle_2 &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f_1(x_1) \dots f_m(x_m) \langle \phi((x_1)) \dots \phi((x_m)) \rangle_2 dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f_1(x_1) \dots f_m(x_m) [\xi'(x_1) \dots \xi'(x_m)]^h \langle \phi(\xi(x_1)) \dots \phi(\xi(x_m)) \rangle dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f_1(x_1) \xi'(x_1)^h \dots f_m(x_m) \xi'(x_m)^h \langle \phi(\xi(x_1)) \dots \phi(\xi(x_m)) \rangle dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f_1(\xi^{-1}(x_1)) \xi'(\xi^{-1}(x_1))^{h-1} \dots f_m(\xi^{-1}(x_m)) \xi'(\xi^{-1}(x_m))^{h-1} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \rangle dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

Onde para conseguir a última igualdade nós realizamos a mudança de variáveis $x \rightarrow \xi^{-1}(x)$ e a identidade

$$\xi'(\xi^{-1}(x)) (\xi^{-1})'(x) = (\xi \circ \xi^{-1})'(x) = 1$$

Se definimos as funções

$$f^\xi(x) := f(\xi^{-1}(x)) \xi'(\xi^{-1}(x))^{h-1} \quad (9.13)$$

obtemos a fórmula simples

$$\langle \phi((f_1)) \dots \phi((f_m)) \rangle_2 = \langle \phi(f_1^\xi) \dots \phi(f_m^\xi) \rangle \quad (9.14)$$

que faz sentido devido ao lema seguinte:

Lema 89 *A função*

$$S_0(0, 1) \ni f(x) \rightarrow f^\xi(y) = f(\xi^{-1}(y)) \xi'(\xi^{-1}(y))^{h-1} \in S_0(0, \infty)$$

é um homeomorfismo com respeito à topologia uniforme, sendo $S_0(0, 1)$ e $S_0(0, \infty)$ os espaços de Schwarz das funções teste com suporte compacto no intervalo $(0, 1)$ e $(0, \infty)$, respectivamente

A correspondente função inversa é dada por

$$S_0(0, \infty) \ni g(y) \rightarrow g_\xi(x) = \frac{g(\xi(x))}{\xi'(x)^{h-1}} \in S_0(0, 1)$$

Prova. *Como $\xi : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ cuja derivada é dada por*

$$\xi'(x) = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}, \quad \forall x \in (0, 1)$$

Por indução, temos que as derivadas de ξ são da forma

$$\xi^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \text{ onde } p_n(x) \text{ e } q_n(x) \text{ são polinômios}$$

Portanto, para toda função $f \in S_0(0, 1)$ temos que f^ξ é de classe C^∞ e tem suporte compacto em $(0, \infty)$, donde $f^\xi \in S_0(0, \infty)$. ■

Usando a fórmula (9.14), nós somos capazes de provar propriedades do estado ω_2 a partir de propriedades do estado de vácuo ω .

Proposição 90 ω_2 é um estado fiel e positivo sobre $\mathcal{R}(0, 1)$ que é invariante sob ação de $D_2(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. A normalidade local segue-se diretamente da construção das funções de correlação de ω_2 como limites das funções de correlação de estados normais. A positividade de ω_2 é equivalente à seguinte proposição [132, Theorem 3-3]: para qualquer seqüência de funções teste $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de funções teste $f_j(x_1, \dots, x_j)$ definidas em $x_1, \dots, x_j \in (0, 1)$ tendo apenas um número finito de funções não identicamente nulas, vale as desigualdades

$$0 \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \bar{f}_j(x_1, \dots, x_j) f_k(y_1, \dots, y_k) \langle \phi(x_j) \dots \phi(x_1) \phi(y_1) \dots \phi(y_k) \rangle_2$$

Então, nós definimos para cada função $f \in \mathcal{S}(0, 1)$ uma função (em analogia com o lema anterior)

$$f^\xi(x_1, \dots, x_n) := \hat{f}_j(x_1, \dots, x_j) := \xi'(\xi^{-1}(x_1))^{h-1} \dots \xi'(\xi^{-1}(x_n))^{h-1} f(\xi^{-1}(x_1), \dots, \xi^{-1}(x_j))$$

Donde podemos rescrever a soma acima por

$$\begin{aligned} & \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \bar{f}_j(x_1, \dots, x_j) f_k(y_1, \dots, y_k) \times \\ & \times \langle \phi(x_j) \dots \phi(x_1) \phi(y_1) \dots \phi(y_k) \rangle_2 \\ & = \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \bar{f}_j(x_1, \dots, x_j) f_k(y_1, \dots, y_k) \times \\ & \times [\xi'(x_1) \dots \xi'(y_k)]^h \langle \phi(\xi(x_j)) \dots \phi(\xi(x_1)) \phi(\xi(y_1)) \dots \phi(\xi(y_k)) \rangle \\ & = \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k (\xi^{-1})'(x_1) \dots (\xi^{-1})'(x_j) (\xi^{-1})'(y_1) \dots (\xi^{-1})'(y_k) \times \\ & \times \bar{f}_j(\xi^{-1}(x_1), \dots) f_k(\xi^{-1}(y_1), \dots) [\xi'(\xi^{-1}(x_1)) \dots \xi'(\xi^{-1}(y_k))]^h \langle \phi(x_j) \dots \phi(x_1) \phi(y_1) \dots \phi(y_k) \rangle \\ & = \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \bar{f}_j(\xi^{-1}(x_1), \dots) f_k(\xi^{-1}(y_1), \dots) \times \\ & \times [\xi'(\xi^{-1}(x_1)) \dots \xi'(\xi^{-1}(y_k))]^{h-1} \langle \phi(x_j) \dots \phi(x_1) \phi(y_1) \dots \phi(y_k) \rangle \\ & = \sum_{k,j=0}^{\infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \bar{f}_j^\xi(x_1, \dots, x_j) f_k^\xi(y_1, \dots, y_k) \langle \phi(x_j) \dots \phi(x_1) \phi(y_1) \dots \phi(y_k) \rangle \end{aligned}$$

Portanto, a positividade do estado de vácuo implica na positividade e ω_2 .

Também pela fórmula acima, a fidelidade de ω_2 em $\mathcal{R}(0, 1)$ segue-se da fidelidade do estado de vácuo em $\mathcal{R}(0, \infty)$.

Para checar a invariância de ω_2 sob ação de $D_2(\lambda)$, notamos que

$$\xi(D_2(\lambda)x) = \lambda\xi(x)$$

e

$$\xi'(D_2(\lambda)x) = \frac{\lambda\xi'(x)}{D_2(\lambda)'(x)}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \phi(D_2(\lambda)x_1) \dots \phi(D_2(\lambda)x_n) \rangle_2 &= [\xi'(D_2(\lambda)x_1) \dots \xi'(D_2(\lambda)x_n)]^h \langle \phi(\lambda\xi(x_1)) \dots \phi(\lambda\xi(x_n)) \rangle \\ &= \left[\frac{\lambda\xi'(x_1)}{D_2(\lambda)'(x_1)} \dots \frac{\lambda\xi'(x_n)}{D_2(\lambda)'(x_n)} \right]^h \lambda^{-nh} \langle \phi(\xi(x_1)) \dots \phi(\xi(x_n)) \rangle \\ &= [D_2(\lambda)'(x_1) \dots D_2(\lambda)'(x_n)]^{-h} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_2 \end{aligned}$$

Isso implica na invariância de ω_2 sob ação de $D_2(\lambda)$. ■

Dos cálculos da prova, vemos que as funções de correlação $\langle \dots \rangle_2$ são transformadas pelas dilatações $D_2(\lambda)$ em analogia com (9.8)

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_2 = [D_2(\lambda)'(x) \dots D_2(\lambda)'(x)]^h \langle \phi(D_2(\lambda)(x_1)) \dots \phi(D_2(\lambda)(x_n)) \rangle_2 \quad (9.15)$$

Como ω_2 é um estado normal, existe um único vetor Ω_2 no cone natural \mathcal{P}_Ω da álgebra de von Neumann padrão $(\mathcal{R}(0,1), \Omega)$ representando ω_2 :

$$\omega_2(A) = \langle \Omega_2 | A | \Omega_2 \rangle, \quad \forall A \in \mathcal{R}(0,1) \quad (9.16)$$

Como ω_2 é fiel em $\mathcal{R}(0,1)$, temos que Ω_2 é cíclico e separante para esta álgebra. Com este vetor, pela fórmula acima, podemos estender ω_2 a um estado localmente normal da álgebra universal $\mathfrak{A} = \mathcal{R}(\dot{\mathbb{R}}) = \mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$.

O grupo modular de $(\mathcal{R}(0,1), \omega_2)$

Como ω_2 é fiel em $\mathcal{R}(0,1)$ e invariante sob $\text{ad}U(D_2(\lambda))$, para provar que o grupo modular de $(\mathcal{R}(0,1), \omega_2)$ é $\Delta_2^{it} = D_2(t)$ basta verificar a condição KMS para $\beta = 1$, ou seja: $\forall A, B \in \mathcal{R}(0,1)$, a ação

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \omega_2(\text{ad}U(D_2(t))(A)B) \in \mathbb{R}$$

tem continuação analítica em $st(0,1)$ e satisfaz a condição de bordo

$$\omega_2(\text{ad}U(D_2(t+i))(A)B) = \omega_2(\text{Bad}U(D_2(t))(A)) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (9.17)$$

Naturalmente, a condição KMS para $adU(D_2(t))$ com respeito a $(\mathcal{R}(0,1), \omega_2)$ segue-se da condição KMS para $adU(D(t))$ com respeito a $(\mathcal{R}(0,\infty), \omega)$, como nós iremos mostrar no que se segue.⁶

Sejam $f, f_1 \in \mathcal{S}(0,1)$ um funções teste; da identidade (9.14), temos o valor esperado

$$\langle adU(D_2(t))(\phi(f)) \cdot \phi(f_1) \rangle_2 = \langle \phi(f_{D_2(t)}) \phi(f_1) \rangle_2 = \left\langle \phi\left(\left(f_{D_2(t)}\right)^\xi\right) \phi\left(f_1^\xi\right) \right\rangle$$

Definindo a função modificada

$$(0,1) \ni x \rightarrow f_\mu(x) := f(x) \left(\frac{\xi'(D_2(t)x)}{\xi'(x)} \right)^{h-1}$$

nós temos

$$\begin{aligned} f_\mu^\xi(y) &= f_\mu(\xi^{-1}(y)) \xi'(\xi^{-1}(y))^{h-1} \\ &= f(\xi^{-1}(y)) \left(\frac{\xi'(D_2(t) \circ \xi^{-1}(y))}{\xi'(\xi^{-1}(y))} \right)^{h-1} \xi'(\xi^{-1}(y))^{h-1} \\ &= f^\xi(y) \left(\frac{\xi'(\xi^{-1}(D(t)y))}{\xi'(\xi^{-1}(y))} \right)^{h-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (f_\mu^\xi)_{D(t)}(y) &= f^\xi(D(t)^{-1}y) \left(\frac{\xi'(\xi^{-1}(y))}{\xi'(\xi^{-1}(D(t)^{-1}y))} \right)^{h-1} \\ &= f(\xi^{-1}(D(t)^{-1}y)) \xi'(\xi^{-1}(y))^{h-1} \\ &= f(D_2(t)^{-1}\xi^{-1}(y)) \xi'(\xi^{-1}(y))^{h-1} \\ &= (f_{D_2(t)})^\xi(y) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle adU(D_2(t))(\phi(f)) \cdot \phi(f_1) \rangle_2 &= \left\langle \phi\left(\left(f_\mu^\xi\right)_{D(t)}\right) \phi\left(f_1^\xi\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha(D(t))(\phi(f_\mu^\xi)) \cdot \phi\left(f_1^\xi\right) \right\rangle \end{aligned}$$

Da condição KMS para $adU(D_2(t))$ com respeito a $(\mathcal{R}(0,\infty), \omega)$ nós reconhecemos que a função acima tem uma continuação analítica para $st(0,1)$ satisfazendo a seguinte condição de bordo

$$\begin{aligned} \langle adU(D_2(t+i))(\phi(f)) \cdot \phi(f_1) \rangle_2 &= \left\langle adU(D(t+i))(\phi(f_\mu^\xi)) \cdot \phi\left(f_1^\xi\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi\left(f_1^\xi\right) \cdot adU(D(t))(\phi(f_\mu^\xi)) \right\rangle \\ &= \langle \phi(f_1) \cdot adU(D_2(t))(\phi(f)) \rangle_2 \end{aligned}$$

⁶Note que os cálculos que se seguem devem ser entendidos como concernindo a funções limitadas dos campos espalhados.

Portanto, vale a condição KMS para $\text{ad}U(D_2(t))$ com respeito a $(\mathcal{R}(0,1), \omega_2)$ para $\beta = 1$. Como dito acima, disso concluímos que $\text{ad}U(D_2(t))$ é o grupo modular para $(\mathcal{R}(0,1), \omega_2)$, *q.e.d.*

Nota Sobre Extensões Fieis de ω_2 para Álgebras de Regiões Desconexas de \mathbb{S}^1

A extensão de ω_2 dada pela equação (9.16) não é necessariamente fiel sobre álgebras locais diferentes de $\mathcal{R}(0,1)$, mas se recorremos à propriedade cisão (definição 20) isso pode ser conseguido para álgebras localizadas em regiões desconexas em $\overline{\mathbb{R}}$, do tipo $(0,1) \cup (a,b)$ com $1 < a < b < 0$ (i.e., $(0,1)$ e (a,b) são intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$ cujos fechos são disjuntos). Nesse caso, assumindo que a teoria satisfaz a propriedade cisão (como ocorre no caso do pré-cofeixe CW e suas extensões locais (??)), temos

$$\mathcal{R}((0,1) \cup (a,b)) := \mathcal{R}(0,1) \vee \mathcal{R}(a,b) \simeq \mathcal{R}(0,1) \otimes \mathcal{R}(a,b)$$

e, portanto, todo estado fiel φ sobre $\mathcal{R}(a,b)$ define um estado fiel ω_2^φ sobre $\mathcal{R}((0,1) \cup (a,b))_*$ que estende ω_2 para essa álgebra:

$$\omega_2^\varphi(AB) = \omega_2(A)\varphi(B) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{R}(0,1), \quad \forall B \in \mathcal{R}(a,b)$$

Assumindo que φ é um estado normal, podemos usar o vetor, chamemos de Ω_2^φ , representante de ω_2^φ no cone natural \mathcal{P}_Ω da álgebra de von Neumann padrão $(\mathcal{R}((0,1) \cup (a,b)), \Omega)$ para estender esse estado sobre a álgebra universal \mathfrak{A} :

$$\omega_2^\varphi(A) := \langle \Omega_2^\varphi | A | \Omega_2^\varphi \rangle \quad , \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

conseguindo que ω_2 tenha uma extensão localmente normal para \mathfrak{A} e fiel sobre $\mathcal{R}((0,1) \cup (a,b))$.

Observação 91 *A tese de que o grupo de simetria $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ tem origem modular foi originalmente proposta por Schroer-Wiesbrock em [125]. Eles imaginavam que para provar essa tese era necessário recorrer à estrutura modular de álgebras de observáveis localizadas em regiões desconexas de \mathbb{S}^1 com respeito a estados diferentes do vácuo. Como vimos acima, embora nos tenha sido necessário recorrer a estados diferentes do vácuo, não é necessário considerar álgebras localizadas em regiões desconexas de \mathbb{S}^1 para provar a que o grupo de simetria $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ tem origem modular.*

De qualquer modo, o procedimento acima (viabilizado pela propriedade de cisão) mostra que também é possível considerar a estrutura modular de álgebras localizadas em regiões desconexas de \mathbb{S}^1 com respeito a estados diferentes do vácuo (o que exige fidelidade). Fard em [66] também utiliza esse procedimento para corrigir a suposição de Schroer-Wiesbrock em [125] de que certa extensão do estado ω_2 era fiel sobre certa álgebra de observáveis multi-localizada, e para exibir explicitamente o grupo modular dessas situações.

Chapter 10

Setores de Superseleção em Teorias Quirais

Agora consideraremos a determinação dos setores de superseleção das teorias quirais, do pré-cofeixe CW e de suas extensões locais de acordo com as abordagens de Kawaigashi-Longo-Muger e Wiesbrock, conforme explicadas na *seção 6.2*. Aqui são utilizados conceitos básicos da teoria das inclusões de álgebras de von Neumann, conforme apresentado em [103] e nas referências citadas.

10.1 Álgebras de Multi-Intervalos em Teorias Quirais

Conforme mencionamos anteriormente, Kawaigashi-Longo-Müger em [98] estudam a estrutura de superseleção de uma classe de teorias quânticas locais sobre \mathbb{R} satisfazendo certas exigências adicionais (por eles chamadas de *redes completamente racionais*), mostrando que todos os setores de superseleção podem ser obtidos a partir de dados locais. Para aplicar tal análise ao caso de uma teoria quiral local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ sobre \mathbb{S}^1 , basta exigir que esta satisfaça as seguintes propriedades¹:

r1) Aditividade Forte

$$\mathcal{A}(I \setminus \{p\}) = \mathcal{A}(I) \quad , \quad \forall p \in I, \forall I \in \mathcal{I}$$

r2) Propriedade de Cisão

$$\forall I_1, I_2 \in \mathcal{I}, \exists (\text{fator tipo } I) \mathcal{N} / \mathcal{A}(I_1) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{A}(I_2')$$

¹Outras duas exigências colocadas por KLM são a *dualidade de Haag* e a propriedade de que os operadores modulares para semi-intervalos atuam como uma simetria PCT ; ambos válidos automaticamente no caso de teorias quirais devido à propriedade de covariância modular.

r3) Finitude do índice

$$\left[\widehat{\mathcal{A}}(E) : \mathcal{A}(E) \right] < \infty, \forall E \in \mathcal{I}_2$$

Nesse caso, o algoritmo de Kawaiashi-Longo-Müger para determinar os setores de superseleção a partir de uma inclusão $\mathcal{A}(E) \subset \widehat{\mathcal{A}}(E)$, $E \in \mathcal{I}_2$ pode ser resumido como segue.

Algoritmo 92 (KLM) *Fixe $E = I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_2$.*

Seja $\gamma_E : \widehat{\mathcal{A}}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E)$ o endomorfismo canônico² e defina $\lambda_E := \gamma_E|_{\mathcal{A}(E)} \in \text{Aut}(\mathcal{A}(E))$.

Prova-se que λ_E pode ser estendido a um endomorfismo $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{A})$ localizado em E e transportável satisfazendo

$$\lambda|_{\mathcal{A}(I)} = \text{id}, \forall I \in \mathcal{I}, I \subset E'$$

$$d(\lambda) = d(\lambda_E) = \left[\widehat{\mathcal{A}}(E) : \mathcal{A}(E) \right]$$

Então, para cada par de endomorfismos $\rho_1, \rho_2 \in \text{End}(\mathfrak{A})$ localizados respectivamente nos intervalos I_1 e I_2 , vale

$$\rho_1 \rho_2|_{\mathcal{A}(E)} \prec \lambda_E \Leftrightarrow \rho_2 = \overline{\rho_1}$$

e, além disso, pela propriedade cisão, o produto $\rho_1 \rho_2|_{\mathcal{A}(E)}$ pode ser identificado com o produto tensorial $\rho_1 \otimes \rho_2$ que age sobre $\mathcal{A}(I_1) \otimes \mathcal{A}(I_2)$.

A partir disso, obtêm-se uma identificação da inclusão $\mathcal{A}(E) \subset \widehat{\mathcal{A}}(E)$ com uma inclusão Longo-Rehren, e também do pré-cofeize de álgebras locais com uma rede Longo-Rehren. Enfim, tem-se o teorema que determina os setores de superseleção da teoria:

Teorema 93 *Seja $\{[\rho_i]\}_i$ o sistema de todos os setores de \mathfrak{A} com dimensão finita, dado por representantes $\rho_i \in \text{Ent}(\mathfrak{A})$ tais que ρ_i é localizado em I_1 e seu conjugado $\bar{\rho}_i$ é localizado em I_2 . Então*

$$\lambda_E = \bigoplus_i \rho_i \bar{\rho}_i|_{\mathcal{A}(E)} \quad (10.1)$$

Além disso, qualquer setor de superseleção é dado por uma soma direta de setores com dimensão finita.

2

Dada uma inclusão de álgebras de von Neumann $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ agindo num espaço de Hilbert \mathcal{H} e tendo um mesmo vetor cíclico e separante $\Omega \in \mathcal{H}$, o endomorfismo canônico associado é o endomorfismo definido por

$$\gamma = \text{ad}J_1 \text{ad}J_2 : \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1$$

onde J_1 e J_2 são as conjugações modulares de (\mathcal{R}_1, Ω) e (\mathcal{R}_2, Ω) , respectivamente.

O algoritmo de Kawahigashi-Longo-Müger mostra que, nas teorias completamente racionais, os setores de superseleção têm origem modular, visto que o próprio endomorfismo canônico para uma inclusão de álgebras de von Neumann padrão é um objeto modular.

10.1.1 O Caso do Pré-cofeixe CW e suas Extensões Locais

Nesta seção especializamos as considerações acima para o caso do pré-cofeixe CW.

Conforme comentamos na seção 6.2.2, as inclusões de álgebras $\mathcal{R}(E) \subset \mathcal{R}(E)$ para regiões causalmente desconexas E contêm informações sobre a estrutura de superseleção da teoria. Para analisarmos tais inclusões, é conveniente utilizarmos a seguinte terminologia

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathcal{E}_n := \left\{ E = \bigcup_{k=1}^n I_k ; I_k \in \mathcal{I}, \overline{I_j} \cap \overline{I_k} = \emptyset \forall j \neq k = 1, \dots, n \right\}$$

$$E \in \mathcal{E}_n \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{S}_0(E) := \{f \in (LV)_0 / \text{supp}(f) \subset E\} \\ \mathcal{S}(E) := \{f \in (LV)_0 / \text{supp}(f') \subset E\} \end{cases}$$

Trivialmente

$$\mathcal{S}_0(E) \subset \mathcal{S}(E) \quad , \quad \forall E \in \mathcal{E}_n$$

e pela localidade do pré-cofeixe

$$\mathcal{S}_0(I) = \mathcal{S}(I) \quad , \quad \forall I \in \mathcal{I}$$

Teorema 94 ([130, Theorem 4.4.1]) *Seja $E = I_1 \cup I_2 \in \mathcal{E}_2$. Vale*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(E) = \{W(f) ; f \in \mathcal{S}_0(E)\}'' \\ \mathcal{R}^d(E) = \{W(f) ; f \in \mathcal{S}(E)\}'' \end{cases} \quad , \quad \forall E \in \mathcal{E}_n$$

Além disso,

$$\mathcal{R}(E)' = \mathcal{R}^d(E') \quad , \quad \mathcal{R}(E') = \mathcal{R}^d(E)'$$

Para o caso das extensões locais do pré-cofeixe CW, definimos para cada lattice $L \subset V$ e cada $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_2$,

$$\mathcal{S}_L(I_1 \cup I_2) := \{f \in \mathcal{S}(I_1 \cup I_2) / f(z_2) - f(z_4) \in 2\pi L\}$$

Corolário 95 ([130, Korollar 4.5.1]) *Seja $L \subset V$ um lattice. Vale*

$$\mathcal{R}_L(I_1 \cup I_2)' = \mathcal{R}_{L'}(I_3 \cup I_4) \quad , \quad \forall I_1 \cup I_2, I_3 \cup I_4 := (I_1 \cup I_2)' \in \mathcal{I}_2$$

O endomorfismo canônico da inclusão $\mathcal{R}_L(I_1 \cup I_2) \subset \mathcal{R}_L^d(I_1 \cup I_2)$

Tendo em vista a abordagem KLM, temos interesse em conhecer o endomorfismo canônico $\gamma_{I_1, I_2} : \mathcal{R}^d(I_1 \cup I_2) \rightarrow \mathcal{R}(I_1 \cup I_2)$, que pode ser dado pela fórmula

$$\gamma_{I_1, I_2} = J_{L, (I_1 \cup I_2)} J_{L^*, (I_1 \cup I_2)}$$

onde $J_{L, (I_1 \cup I_2)}$ e $J_{L^*, (I_1 \cup I_2)}$ são as conjugações modulares de $(\mathcal{R}_L(I_1 \cup I_2), \omega_L)$ e $(\mathcal{R}_{L^*}(I_1 \cup I_2), \omega_{L^*})$, respectivamente.

Para o caso em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \{e^{i\theta}; \theta \in (0, \pi/2)\} \\ I_2 &= \{e^{i\theta}; \theta \in (\pi, 3\pi/2)\} \\ I_3 &= \{e^{i\theta}; \theta \in (\pi/2, \pi)\} \\ I_4 &= \{e^{i\theta}; \theta \in (3\pi/2, 2\pi)\} \end{aligned}$$

nossa proposta para a conjugação modular de $(\mathcal{R}_L(I_1 \cup I_2), \omega_L)$ é a seguinte³

$$J_{L, I_1 \cup I_2} : \mathcal{R}_L(I_1 \cup I_2) \rightarrow \mathcal{R}_{L^*}(I_3 \cup I_4)$$

$$\phi_\rho = e^{i\pi\langle Q, \mu_L(q) \rangle} \psi_\rho \Big|_{\mathcal{H}_{L(q)}} \rightarrow J_{L, I_1 \cup I_2}(\phi_\rho) := e^{i\pi\langle Q, \mu_{L^*} \circ \mu_L(q) \rangle} \psi_{\rho \circ r} \Big|_{\mathcal{H}_{L^*(q)^{**}}}$$

onde

$$r : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad r(z) = \bar{z}$$

A partir daí, o algoritmo KLM pode ser desenvolvido explicitamente, e deveremos reobter os resultados da teoria dos setores de superseleção apresentada anteriormente. Nos satisfazemos em apenas indicar esse programa sem contudo desenvolvê-lo, pois isso já corrobora nossa tese da origem modular dos setores de superseleção.

10.2 Cociclos Localizados em Teorias Quirais

Como discutido na seção 6.2.1, os cociclos-de-Connes associados a endomorfismos localizados agem como transportadores de carga. A análise de Wiesbrock para determinar os setores de superseleção das teorias quirais mostra que o conhecimento de tais cociclos é suficiente para se recuperar os endomorfismos localizados.

³Lembramos que a definição dos campos ϕ_ρ em 8.31 não dependem do ponto $\zeta \in \mathbb{S}^1 \setminus (I_1 \cup I_2)$ escolhido!

Nesta seção, $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H}, \Omega)$ é a representação de vácuo de um pré-cofeixe quiral local fortemente aditivo, i.e.

$$\mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(I \setminus \{p\}) \quad , \quad \forall p \in \mathbb{S}^1, \forall I \in \mathcal{I}$$

sendo $\omega = (\Omega, \cdot \Omega)$ o estado de vácuo. Definimos a C^* -subálgebra quase-local em I pelo limite-indutivo- C^* das suas subálgebras:

$$\mathcal{R}(I)_{loc} := \overline{\bigcup_{J \in \mathcal{I}, J \subset I} \mathcal{R}(J)}$$

Para todo $I \in \mathcal{I}$ e todo estado fiel $\varphi \in \mathcal{R}(I)_*$ danotamos por $\sigma_{\varphi, \mathcal{R}(I)}$ o grupo modular do par padrão $(\mathcal{R}(I), \varphi)$.

Construção do Endomorfismo Localizado

Proposição 96 ([144, Theorem 2 Corollary 3]) *Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ um cociclo modular localizado em $I \in \mathcal{I}$ com respeito ao estado de vácuo. Então, os seguintes limite são bem definidos em $End(\mathcal{R}(I)_{loc})$*

$$\rho_u^0 := \lim_{t \rightarrow \infty} ad_{u_t}|_{\mathcal{R}(I)_{loc}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} ad_{u_t}|_{\mathcal{R}(I)_{loc}} \quad (\text{convergência uniforme})$$

Além disso, ρ_u^0 é um endomorfismo de $\mathcal{R}(I)|_{loc}$ que se transforma covariante-mente sob ação do grupo modular σ_I

$$\rho_u^0(\sigma_I^t(A)) = ad_{u_t} \Delta_I^{it} \rho_u^0(A) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{R}(I)_{loc}$$

A estratégia para estender ρ_u^0 em \mathfrak{A} é usar covariância

$$\mathcal{R}(J) \ni A \rightarrow \rho_u(A) := adU(g)^* \circ \rho_u^0 \circ adU(g)(A) \quad , \quad \text{onde: } g \in Mob / gJ \subset I$$

Para mostrar que ρ_u é um endomorfismo localizado de \mathfrak{A} bem definido pela fórmula acima, basta mostrar que ele se transforma covariante-mente sob ação de certos grupos modulares tais que pela covariância modular geram a ação covariante do grupo de Möbius. Por esse caminho e recorrendo às técnicas algébricas de [79], Wiesbrock prova os seguintes teoremas:

Teorema 97 ([144, Theorem 19]) *Se u_t tem estatística finita, então ρ_u^0 pode ser continuado covariante-mente sobre a rede \mathcal{R} , definindo um endomorfismo localizado ρ_u de \mathfrak{A} .*

Teorema 98 ([144, theorem 23]) *Se \mathcal{R} é fortemente aditiva e u_t é irredutível e tem dimensão estatística finita, então ρ_u^0 pode ser continuado covariante-mente sobre a rede \mathcal{R} , definindo um endomorfismo localizado ρ_u de \mathfrak{A} .*

Problema 99 *Usando as definições do capítulo 9, calcular o cociclo-de-Connes do par de estados ω_2 e ω com respeito à álgebra local $\mathcal{R}(0, 1)$ e determinar o endomorfismo localizado que induz o estado ω_2 a partir do estado de vácuo ω . O problema deve ser resolvido explicitamente pois são conhecidos explicitamente os grupos modulares de $(\mathcal{R}(0, 1), \omega)$ e $(\mathcal{R}(0, 1), \omega_2)$.*

10.2.1 O Caso do pré-cofeixe CW e suas Extensões Locais

A demonstração dos teoremas de Wiesbrock no caso dos pre-cosheaves é consideravelmente mais simples, sendo as condições definindo um cociclo modular localizado suficientes para determinar os mesmos por uma fórmula explícita, de acordo com certo *anzats* que caracteriza univocamente os cociclos modulares localizados associados a automorfismos localizados da álgebra universal.

No caso do pré-cofeixe CW, os cociclos modulares localizados na forma $u_t = \zeta_t W(f_t)$ onde $\zeta_t \in \mathbb{S}^1$ e $f_t \in (LV)_0$ são dados por [119], [130, Section 5.2]:

$$u_t = u_t(\rho) = e^{i\frac{1}{2}\rho[\widehat{\delta_t\rho}]} W(\delta_t\rho) \quad (10.2)$$

onde ρ é um automorfismo de \mathfrak{A} localizado e

$$\delta_t\rho := \bar{\alpha}(D(t))\rho - \rho, \quad \frac{d}{dz}\widehat{\delta_t\rho}(z) = i\delta_t\rho(z)$$

Além disso, $u_t(\rho)$ é o cociclo-de-Connes do par $(\omega_0, \omega_0 \circ \rho)$, i.e.

$$u_t(\rho) = [D\omega_0 \circ \rho : D\omega_0]_t$$

No caso de uma extensão local do pré-cofeixe CW dada por um lattice L , temos que o grupo modular correspondente ao par padrão $(\omega_L, \mathcal{R}_L(\mathbb{S}_+^1))$ é dado por (lembrando que basta exibirmos a ação do grupo modular nos geradores da álgebra local) [130, Section 5.3]:

$$\sigma^t(\phi_\rho) = \phi_{\bar{\alpha}(D(t))\rho} = \phi_\rho u_t(\rho), \quad \forall \rho / \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \rho(z) \in L, \quad \text{supp}(\rho) \subset \mathbb{S}_+^1$$

Os cociclos modulares localizados em \mathbb{S}_+^1 na forma $u_t = \zeta_t W(f_t)$ são definidos por distribuições de carga de acordo com a expressão 10.2, sob a condição de que se $u_t = u_t(\rho)$ então a distribuição de cargas ρ deve satisfazer

$$\rho_0 = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{dz}{2\pi i} \rho(z) \in L^*$$

Part III

Localização Modular

Chapter 11

Localização Modular na Teoria Quântica Local

A Noção de Partícula

A descrição de uma partícula relativística foi definida originalmente por Wigner no artigo [148]: *uma partícula relativística corresponde a uma representação irredutível do (recobrimento universal do) grupo de Poincaré*. Esta definição é suficiente para descrever partículas isoladas, nesse caso caracterizadas por dois parâmetros apenas: *massa e spin* (ou *helicidade* no caso da massa ser zero) - os valores dos casimires da álgebra de Poincaré na representação irredutível. Então, a descrição de qualquer coleção de partículas livres é canonicamente obtida via produto tensorial e soma direta de representações irredutíveis do grupo de Poincaré, sendo o formalismo do espaço de Fock adequado para o caso de um sistema com número indefinido de partículas.

O fenômeno de criação e aniquilação de pares de partículas mostra que estas não são indestrutíveis nem elementares; antes, indica que as partículas podem ser consideradas como estados ligados de outras. O que permanece invariante nos processos físicos não são as espécies de partículas, mas quantidades mensuráveis chamadas *cargas*, as quais relacionamos às simetrias de nosso modelo do sistema físico [92, section 1].¹

Os físicos têm proposto várias teorias para descrever os fenômenos observados no reino das partículas elementares, todas baseadas na teoria quântica e na teoria da relatividade (especial); a física quântica local é uma dessas propostas.

A Noção de Localização

¹Se a idéia de *partícula elementar* evanesceu por não podermos admiti-las indestrutíveis, pode ser útil considerar a idéia de um '*conjunto elementar de partículas*', definido por duas propriedades:

- i) minimalidade: nenhuma partícula do conjunto é estado ligado de outras partículas do conjunto;
- ii) completude: todas as partículas que não sejam elementos do conjunto são estados ligados de partículas do conjunto.

Certamente a *localização* é uma das propriedades características das partículas, significando (contrafatualmente) que *as partículas podem ocorrer em estados que especificam a região do espaço-tempo em que podem ser detectadas*. As propriedades dessa localização observadas nos experimentos de colisão de partículas são as seguintes:

Critério 100 1) *isotonia*: se $O, \tilde{O} \subset M$ são duas regiões do espaço tempo tais que $O \subset \tilde{O}$ então, as partículas localizadas em O também estão localizadas em \tilde{O} ;

2) *covariância*: se dois sistemas inerciais estão conectados por uma transformação de Poincaré, então as regiões de localização das partículas relativamente a cada observador estão relacionadas pela mesma transformação de Poincaré;

3) *fatorialidade*: uma partícula não pode estar localizada causalmente disjuntas em regiões do espaço-tempo.

Tanto na teoria quântica local quanto na teoria de Wigner (que descreve partículas por representações do grupo de Poincaré) a *localização modular* é uma definição que satisfaz as três propriedades listadas acima. Essencialmente, a localização modular é dada por um *lattice de subespaços reais no espaço de Hilbert de uma representação unitária de energia positiva do grupo de Poincaré, definido pela estrutura modular intrínseca da teoria*. Podemos dizer que no caso da teoria de Wigner esta definição de localização não é tão simples quanto são intuitivas as propriedades que ela possui, mas é a definição correta! A razão disso está na sua origem quântica local: *quando a teoria de Wigner está inserida numa teoria quântica local, os estados de Wigner modular-localizados são as (correspondentes) componentes de 1-partícula das excitações locais do vácuo*.

A importância teórica da localização modular está no fato de que com ela podemos construir os modelos livres da teoria quântica local diretamente a partir da teoria de Wigner, sem a necessidade de recorrer a campos covariantes. Isso indica que ela deve ser parte de uma caracterização algébrica das teorias quânticas locais com interação e que deve também fazer parte de qualquer método de construção de tais teorias.

Notamos que a localização modular se aplica igualmente a partículas massivas e não-massivas com spin/helicidade finito ou infinito (“torres de spin”). Provavelmente, a definição que damos aqui pode ser adaptada para situações mais gerais tanto da noção de partículas (como em [111]) quanto da própria teoria quântica local (como em [56] e [25]).

Observação 101 *A definição de localização de Newton-Wigner [107] não satisfaz o requerimento de covariância do critério 100 acima; mas é suficiente para especificar (aproximadamente) a região de localização de partículas massivas e para descrever o espalhamento de partículas massivas, se a precisão requerida nas medidas de localização for inferior ao comprimento de onda de Compton das partículas.*

Localização Modular e Teorias Quânticas Locais Livres

Na seção 5.1 apresentamos a construção de campos quantizados livres a partir das representações unitárias do grupo de Poincaré; nesse caso, a localização dos campos espalhados é dada pelo suporte das funções-teste, conforme *definição 5.1*. Aqui, veremos que também é possível construir teorias quânticas locais a partir das representações unitárias do grupo de Poincaré, utilizando a localização modular. Essas duas construções se correspondem intimamente pois, para cada representação unitária do grupo de Poincaré, o sistema de campos quantizados e a teoria quântica local construídos são afiliados, no sentido do *teorema 50*.

A Definição de Localização Modular na Física Quântica Local

Considere $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H}, \Omega)$ como sendo a representação de vácuo de uma rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$, satisfazendo as propriedades Reeh-Schlieder e covariância modular. Definimos de modo natural a localização de estados (já introduzindo a nomenclatura conveniente que será justificada logo após):

Definição 102 (Localização Modular de Estados) *O espaço $\mathcal{H}_R(\mathcal{O}) \subset \mathcal{H}$ dos estados modular-localizados em $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ é dado pelo conjunto das excitações do vácuo localizadas em \mathcal{O} , i.e.²*

$$\mathcal{H}_R(\mathcal{O}) := \{\text{excitações do vácuo localizados em } \mathcal{O} \in \mathcal{K}\} = \overline{\mathcal{R}_{sa}(\mathcal{O})\Omega}$$

A estrutura modular $\{(S_{\mathcal{O}}, \mathcal{H}(\mathcal{O})) ; \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ está diretamente relacionada com essa definição de modular-localização de estados:

$$\mathcal{H}_R(\mathcal{O}) := \{\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{O}) / S_{\mathcal{O}}\varphi = \varphi\} \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}$$

Portanto, a família de subespaços de modular-localização $\{\mathcal{H}_R(\mathcal{O})\Omega ; \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ tem a estrutura de um *lattice simplesmente local e covariante sob a ação de U* (no sentido da *proposição 39*) e satisfaz os *critérios 100* que definem uma localização.

O significado operacional dessa definição de localização modular é esclarecido pelo seguinte teorema:

Teorema 103 *Existe uma correspondência biunívoca entre estados modular-localizados numa região $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ e estados majorados pelo vácuo no seu complemento causal \mathcal{O}' , i.e.:*

$$\varphi \in \mathcal{H}_R(\mathcal{O}) \iff \exists c > 0 / (\varphi - \omega)^2 \Big|_{\mathcal{R}(\mathcal{O}')} \leq c \left(\omega \circ (\cdot)^2 - (\omega(\cdot))^2 \right) \Big|_{\mathcal{R}(\mathcal{O}')}$$

Para uma prova vide [24] (vide também [23, Theorem 2.3.19]).

Este teorema caracteriza os estados localizados numa região $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ como sendo aqueles estados da álgebra de observáveis \mathfrak{A} cuja restrição a $\mathcal{R}(\mathcal{O}')$ correspondem a ‘subansambles’ do estado de vácuo. Em particular, este teorema mostra que os estados DHR ou BF são casos particulares de estados modular-localizados [35].

²Lembramos que $\mathcal{R}_{sa}(\mathcal{O}) = \{A \in \mathcal{R}(\mathcal{O}) / A^* = A\}$. Aqui é realmente necessário usarmos observáveis no sentido de serem operadores auto-adjuntos.

Observação 104 *É importante notar que a covariância modular implica que a estrutura modular da representação de vácuo pode ser “projetada” no subespaço de representação dos estados de 1-partícula, devido ao corolário 41 das relações de comutação de Borchers 40. É precisamente este fato que nos leva à definição da estrutura modular na teoria de Wigner! Notamos também que devido a isso, todas as propriedades da estrutura modular da teoria de Wigner podem ser obtidas pela relação com a estrutura modular do setor de vácuo das teorias quânticas locais, livres ou com interação.*

É a estrutura modular que torna possível definirmos uma localização de estados na teoria de Wigner.

Chapter 12

Estrutura Modular da Teoria de Wigner

A teoria de Wigner considera as representações unitárias irredutíveis de energia positiva do recobrimento universal do grupo Poincaré $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, mas é sempre possível estender essas representações para o grupo de Poincaré próprio $\tilde{\mathcal{P}}_+ = \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \dot{\cup} \tilde{\mathcal{P}}_+^\downarrow$ pela definição de uma representação da reflexão total¹ $\tilde{\theta}$ (ou de qualquer outro elemento de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\downarrow$) preservando as relações de grupo. Entretanto, para manter a positividade da energia é preciso que as transformações invertendo o sentido do tempo sejam representadas por operadores anti-lineares. Para tanto, introduzimos a definição de *representação própria do grupo de Poincaré próprio*:

Definição 105 (Representação Própria) *Uma representação $u : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ própria é uma representação (anti-)unitária de energia positiva irredutível, i.é:*

$$u(\tilde{g}) \text{ é unitária se } \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \text{ e anti-unitária se } \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\downarrow$$

Observação 106 *Considerando a teoria de Wigner para o grupo de Poincaré próprio $\tilde{\mathcal{P}}_+$, tratamos os casos de partículas de spin inteiro ou semi-inteiro-ímpar e auto-duais ou não-auto-duais, simultaneamente.*

Neste capítulo, adotamos a seguinte notação para a composição da aplicação de recobrimento universal de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ sobre \mathcal{P}_+^\uparrow com a aplicação que projeta $\tilde{\mathcal{P}}_+$ sobre $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$:

$$\gamma : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \mathcal{P}_+^\uparrow$$

Também utilizamos o acento $\tilde{}$ para denotar os elementos do grupo de Poincaré próprio, e retiramos o acento para denotar sua imagem no grupo de Poincaré sob ação de γ :

$$\tilde{\mathcal{P}}_+ \ni \tilde{g} \rightarrow \gamma(\tilde{g}) = g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$$

¹Por reflexão total em $\tilde{\mathcal{P}}_+$ queremos dizer que a transformação $\tilde{\theta}$ é projetada sobre -1 pela aplicação de recobrimento.

Observação 107 *A estrutura modular da teoria de Wigner é definida nos termos da teoria de Rieffel-van Daele (Apêndice B.2) a partir dos operadores modulares espaciais das regiões tipo-cunha, as quais por sua vez são definidos pela propriedade de covariância modular adaptada para a teoria de Wigner.*

Motivações da física quântica local para a definição de localização modular na teoria de Wigner

Seja $(\mathcal{R}, U, \mathcal{H}, \Omega)$ uma representação de vácuo de uma rede quântica local satisfazendo covariância modular e sejam $\mathfrak{h} \subset \mathcal{H}$ um subespaço irredutível sob a ação U do grupo de Poincaré próprio \mathcal{P}_+ e $E_{\mathfrak{h}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{h}$ a projeção ortogonal sobre esse subespaço.

Para cada região $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, nós definimos o *subespaço real dos estados localizados* em \mathcal{O} por

$$\mathfrak{h}(\mathcal{O})_0 := E_{\mathfrak{h}} \overline{\mathcal{R}(\mathcal{O})_{sa} \Omega}$$

Esta definição é bastante intuitiva, mas não pode ser transportada diretamente para a teoria de Wigner! Para tanto, nós devemos prosseguir um pouco mais.

Considere \mathcal{O} como sendo uma região aberta do espaço-tempo com complemento causal tendo interior não vazio. Nesse caso temos definido o operador modular $(S_{\mathcal{O}}, \mathcal{H}(\mathcal{O}))$ com core $\mathcal{R}(\mathcal{O}) \Omega \subset \mathcal{H}(\mathcal{O})$, donde verificamos facilmente

$$\mathfrak{h}(\mathcal{O})_0 \subset E_{\mathfrak{h}} \mathcal{H}_R(\mathcal{O}) \quad , \quad \mathcal{H}_R(\mathcal{O}) := \{\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{O}) \mid S_{\mathcal{O}}\varphi = \varphi\}$$

Então, reobtemos o subespaço real dos estados de 1-partícula localizados em \mathcal{O} a partir da estrutura modular

$$\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) := E_{\mathfrak{h}} \mathcal{H}_R(\mathcal{O})$$

Se definimos o operador $(s_{\mathcal{O}}, \mathfrak{h}(\mathcal{O}))$ por

$$s_{\mathcal{O}} = E_{\mathfrak{h}} S_{\mathcal{O}} E_{\mathfrak{h}} \quad , \quad \mathfrak{h}(\mathcal{O}) := E_{\mathfrak{h}} \mathcal{H}(\mathcal{O})$$

verificamos que

$$\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) = \{\varphi \in \mathfrak{h}(\mathcal{O}) \mid s_{\mathcal{O}}\varphi = \varphi\}$$

Portanto, $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ pode ser definido intrinsecamente na teoria de Wigner se (e somente se) o operador $s_{\mathcal{O}}$ puder também ser definido intrinsecamente nesta teoria. Devido à *covariância modular* do setor de vácuo, isso é conseguido para regiões tipo-cunha $W \in \mathcal{W}$:

$$s_W = U(r_W r'_W) |_{\mathfrak{h}}$$

onde r_W e r'_W são transformações de Poincaré próprias definidas canonicamente para cada $W \in \mathcal{W}$ (definições 15 e 16).

Para obtermos localização em regiões arbitrárias do espaço-tempo, nós intersectamos os subespaços de localização nos cunhas:

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}, \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) := \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W)$$

Adiante, faremos uso do seguinte lema:

Lema 108 *As transformações $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+$ cuja imagem $g = \gamma(\tilde{g})$ deixam a cunha W_1 globalmente invariante comutam com as transformações $\tilde{r}_1, \tilde{r}'_1, \tilde{\Lambda}_1 \in \tilde{\mathcal{P}}_+$ cujas imagens são definidas por 15, 16 e 17, respectivamente:*

$$\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+, gW_1 = W_1 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{g}\tilde{r}_1 = \tilde{r}_1\tilde{g} \\ \tilde{g}\tilde{r}'_1 = \tilde{r}'_1\tilde{g} \\ \tilde{g}\tilde{\Lambda}_1(t) = \tilde{\Lambda}_1(t)\tilde{g} \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Prova. Por verificação direta, vemos que as seguintes transformações de Poincaré deixam a cunha W_1 globalmente invariante e comutam com r_1 e Λ_1 :

- 1) translações espaciais paralelas ao eixo de W_1 ;
- 2) rotações ao redor do eixo- x_1 ;
- 3) W_1 -boosts reparametrizados.

Então, o teorema fica provado se mostramos que todas as transformações de Poincaré deixando W_1 invariante são composições das transformações acima; como as únicas translações espaço-temporais mantendo a cunha W_1 invariante são aquelas paralelas ao eixo de W_1 , o problema se reduz a considerar as transformações do grupo de Lorentz; entretanto, vale o seguinte resultado [139, Theorem 10.3]: para toda transformação de Lorentz Λ , existe um par de rotações espaciais R_a e R_b e $\xi \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Lambda = R_a \Lambda_1(\xi) R_b^{-1}$$

Novamente por verificação direta, temos que Λ mantém W_1 invariante se e somente se as rotações R_a e R_b têm eixo de rotação igual ao eixo- x_1 , no caso em que $\xi \neq 0$.

Para o caso do recobrimento universal do grupo de Poincaré ou de sua extensão central, basta lembrar que estes são localmente isomorfos ao grupo de Poincaré e então usar a parte anterior. ■

Considere de agora em diante $u : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ sendo uma representação própria do grupo de Poincaré próprio, conforme definida acima. Vamos definir localização modular dessa em duas etapas: primeiro definimos a estrutura modular das regiões tipo-cunha via covariância modular, e depois definimos a estrutura modular das demais regiões do espaço de Minkowski a partir da estrutura modular das regiões tipo-cunha.

Transformações de Poincaré Associadas às Regiões Cunha

Já temos fixado (equação 18) uma família de transformações de Poincaré $\{L_W; W \in \mathcal{W}\} \subset \mathcal{P}_+^\dagger$ tal que

$$L_W W_1 = W, \quad \forall W \in \mathcal{W}$$

e também

$$r_W := L_W r_1 L_W^{-1}, \quad r'_W := L_W r'_1 L_W^{-1}, \quad \Lambda_W(t) = L_W \Lambda_1(t) L_W^{-1}$$

Agora, fixamos também para cada cunha $W \in \mathcal{W}$ um elemento $\tilde{L}_W \in \tilde{\mathcal{P}}_+$ tal que

$$\gamma(\tilde{L}_W) = L_W$$

Fixamos também $\tilde{r}_1, \tilde{r}'_1 \in \mathcal{P}_+$ tais que

$$r_1 = \gamma(\tilde{r}'_1), \quad r'_1 = \gamma(\tilde{r}_1)$$

Além desses, existe um único grupo um-parâmetro contínuo $\{\tilde{\Lambda}_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \tilde{\mathcal{P}}_+$ (dado pelo levantamento de $\{\Lambda_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ para $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \subset \tilde{\mathcal{P}}_+$) tal que

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}_1(0) = 1 \\ \gamma(\tilde{\Lambda}_1(t)) = \Lambda_1(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Finalmente, definimos para cada cunha $W \in \mathcal{W}$ as transformações em \mathcal{P}_+

$$\tilde{r}_W := \tilde{L}_W r_1 \tilde{L}_W^{-1}, \quad \tilde{r}'_W := \tilde{L}_W r'_1 \tilde{L}_W^{-1}, \quad \tilde{\Lambda}_W(t) := \tilde{L}_W \Lambda_1(t) \tilde{L}_W^{-1}$$

Estrutura Modular dos Cunhas

Pelo *teorema de Stone*, para cada $W \in \mathcal{W}$ definimos o gerador infinitesimal $(K_W, \mathfrak{h}(W))$ do grupo um-parâmetro $u \circ \tilde{\Lambda}_W$,

$$u(\tilde{\Lambda}_W(t)) = e^{itK_W} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \mathfrak{h}(W) := \text{Dom}(K_W)$$

e recorrendo a um pouco de análise funcional, definimos os operadores modulares de W por²

$$\delta_W^{1/2} := e^{-\pi K_W} = u(\tilde{\Lambda}_W(\pi i)) \tag{12.1}$$

$$j_W := \mathfrak{J}u(\tilde{r}_W)$$

$$s_W := j_W \delta_W^{1/2}$$

$$\text{Dom}(s_W) = \mathfrak{h}(W)$$

$$\delta_W^{it} := u(\tilde{\Lambda}_W(-2\pi t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

²A definição de δ_1 envolve a continuação analítica do grupo um-parâmetro $u(\tilde{\Lambda}_1(t))$ para a faixa $st(-1/2, 0) = \{z \in \mathbb{C} / -1/2 < \Im(z) < 0\}$. O teorema ?? garante a existência de um subespaço denso de \mathfrak{h} sobre o qual isso pode ser feito; pelo que o operador δ_1 está bem definido. De qualquer modo, realizamos explicitamente tal continuação numa das subseções que se segue.

onde \mathfrak{z} é uma fase indeterminada que iremos fixar posteriormente.³

Por conveniência, denotamos os operadores modulares do cunha W_1 simplesmente por s_1 , j_1 e δ_1 .

Proposição 109 (Propriedades Elementares do Operadores Modulares)
Vale:

i) j_W é um operador anti-linear involutivo

$$j_W^2 = 1$$

ii) δ_W é um operador linear densamente definido auto-adjunto e positivo

$$\delta_W > 0$$

satisfazendo a relação

$$j_W \delta_W j_W = \delta_W^{-1}$$

iii) s_W é um operador anti-linear densamente definido e involutivo

$$s_W^2 \subset 1$$

cuja decomposição polar [113, Section VIII.9] é exatamente

$$s_W = j_W \delta_W^{1/2}$$

Prova. i) $j_W = u(\bar{r}_W)$ é anti-linear porque \bar{r}_W pertence à parte desconexa de $\bar{\mathcal{P}}_+$, e é involutivo porque $\bar{r}_W \circ \bar{r}_W = 1$ e $\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} = 1$.

ii) $\delta_W = e^{K_W}$ é operador linear densamente definido e auto-adjunto porque o operador K_W possui essas mesmas propriedades; em particular $\text{Dom}(\delta_W) = \mathfrak{h}(W)$. O teorema espectral [113, Section VIII.3] garante que δ_W é estritamente positivo, qualquer que seja o espectro de K_W . Com efeito, se $dE(k)$ é a medida espectral de K_W , então as resoluções espectrais de K_W e δ_W são dadas respectivamente por

$$K = \int_{\text{Spect}(K)} k dE(k) \quad , \quad \delta_W = \int_{\text{spect}(K)} e^{-2\pi k} dE(k)$$

donde segue-se

$$\text{Spect}(\delta_W) = \{e^{-2\pi k}; k \in \text{Spect}(K)\} \subset (0, \infty]$$

Das definições 15, 16, 17 temos a seguintes relações de comutação

$$\bar{r}_W \bar{\Lambda}_W(t) = \bar{\Lambda}_W(t) \bar{r}_W \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

³Embora a fase \mathfrak{z} não interfira nas propriedades dos operadores modulares s_W , ela interfere na relação entre a estrutura simplética do espaço de Hilbert \mathfrak{h} e a estrutura de localização-modular que iremos definir.

Portanto,

$$j_W \delta_W^{it} = j u(\bar{r}_W) u(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t)) = u(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t)) j u(\bar{r}_W) = \delta_W^{it} j_W \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Como j_1 é anti-linear, isso implica

$$j_W \delta_W = \delta_W^{-1} j_W$$

iii) As propriedades de s_W seguem-se diretamente da unicidade da decomposição polar [113, Theorem VIII.32] e das propriedades de j_W e δ_W dadas acima. ■

Como $s_W^2 \subset 1$, temos $\text{Spect}(s_W) \subset \{-1, +1\}$. Então, denotamos os autoespaços de s_W por

$$\mathfrak{h}_R(W) := \{\varphi \in \mathfrak{h}(W) ; s_W \varphi = \varphi\} \quad (12.2)$$

Como s_W é anti-linear, vale a relação

$$i\mathfrak{h}_R(W) = \{\varphi \in \mathfrak{h}(W) ; s_W \varphi = -\varphi\} \quad (12.3)$$

Proposição 110 (Propriedade Padrão de $\mathfrak{h}_R(W)$) $\mathfrak{h}_R(W)$ é um subespaço real padrão de \mathfrak{h} , i.é: fechado, cíclico e separante

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{h}_R(W)} &= \mathfrak{h}_R(W) \\ \overline{\mathfrak{h}_R(W) + i\mathfrak{h}_R(W)} &= \mathfrak{h} \\ \mathfrak{h}_R(W) \cap i\mathfrak{h}_R(W) &= \{0\} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Além disso, vale

$$s_W(\varphi + i\psi) = \varphi - i\psi, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{h}_R(W) \quad (12.5)$$

Prova. Como s_W é fechado, seu gráfico

$$\text{Gr}(s_W) := \{(\varphi, s_W \varphi) ; \varphi \in \text{Dom}(s_W)\}$$

é um subespaço fechado de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, com respeito à topologia-produto. Também a diagonal de $\text{Gr}(s_W)$

$$\text{Diag}(s_W) := \text{Gr}(s_W) \cap \text{Diag}(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})$$

é um subespaço real fechado de $\text{Gr}(s_W)$, pois é a interseção de dois subespaços reais fechados.

Pela definição de $\mathfrak{h}_R(W)$, temos

$$\text{Diag}(s_W) = \{(\varphi, \varphi) ; \varphi \in \mathfrak{h}_R(W)\}$$

Então, usando a projeção ortogonal na primeira entrada

$$\pi_1 : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} , \pi_1 (\varphi, \psi) = \varphi$$

temos

$$\mathfrak{h}_R(W) = \pi_1 (\text{Diag} (s_W))$$

Disso concluímos que $\mathfrak{h}_R(W)$ é subespaço real fechado, porque é a projeção de um subespaço real fechado (projeções são aplicações abertas!).

Pela definição de $\mathfrak{h}_R(W)$ temos

$$\varphi \in \text{Dom} (s_W) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\varphi + s_W \varphi}{2} + i \frac{\varphi - s_W \varphi}{2i} \text{ e} \\ \frac{\varphi + s_W \varphi}{2}, \frac{\varphi - s_W \varphi}{2i} \in \mathfrak{h}_R(W) \end{cases}$$

Portanto

$$\text{Dom} (s_W) = \mathfrak{h}_R(W) + i\mathfrak{h}_R(W)$$

Como $\text{Dom} (s_W)$ é denso em \mathfrak{h} , segue-se a ciclicidade:

$$\overline{\mathfrak{h}_R(W) + i\mathfrak{h}_R(W)} = \mathfrak{h}$$

Novamente, pela definição de $\mathfrak{h}_R(W)$ temos

$$\varphi \in \mathfrak{h}_R(W) \cap i\mathfrak{h}_R(W) \Rightarrow \varphi = s_W(\varphi) = -\varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

donde obtemos a separabilidade:

$$\mathfrak{h}_R(W) \cap i\mathfrak{h}_R(W) = \{0\}$$

Finalmente, pela anti-linearidade de s_W e definição de $\mathfrak{h}_R(W)$ vale a fórmula

$$s_W(\varphi + i\psi) = \varphi - i\psi , \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{h}_R(W)$$

■

Esta proposição significa que o conhecimento do operador s_W é equivalente ao conhecimento do subespaço real $\mathfrak{h}_R(W)$. Realmente, Rieffel and Van Daele em [116] desenvolvem sua análise da teoria modular espacial a partir de subespaços reais satisfazendo as propriedades especificadas pelo teorema (permitindo desenvolver a teoria modular evitando a manipulação de operadores não-limitados).

Estrutura Modular das Regiões Causalmente Completas

Definição 111 Seja $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ uma região causalmente completa. O subespaço dos estados modular-localizados em \mathcal{O} é definido por⁴

$$\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) := \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \quad (12.6)$$

Definimos o seguinte operador (bem-definido, de acordo com a proposição que se segue)

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(\mathcal{O}) &:= \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) + i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \\ \mathfrak{s}_{\mathcal{O}} : \mathfrak{h}(\mathcal{O}) &\rightarrow \mathfrak{h}(\mathcal{O}), \quad \mathfrak{s}_{\mathcal{O}}(\varphi + i\psi) = \varphi - i\psi, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \end{aligned} \quad (12.7)$$

Proposição 112 Seja $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ uma região causalmente completa.

Então, $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ é um subespaço real fechado de \mathfrak{H} e também separante

$$\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cap i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) = \{0\}$$

Prova. $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ é um subespaço real fechado de \mathfrak{h} porque é a interseção de subespaços reais fechados de \mathfrak{h} . A propriedade de $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ ser separante também decorre da mesma propriedade para os espaços modulares dos cunhas

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cap i\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) &= \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} \cap \left\{ i \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} \\ &\subset \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \left\{ \mathfrak{h}_R(W) \cap i\mathfrak{h}_R(W) \right\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

■

A priori não sabemos se os domínios $\mathfrak{h}(\mathcal{O})$ são densos, para uma região arbitrária $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$; em princípio, isso depende da representação u , visto que a definição dos subespaços reais $\mathfrak{h}_R(W)$ para cunhas $W \in \mathcal{W}$ depende implicitamente da extensão analítica do grupo modular $\sigma_W(t) = u(\Lambda_W(t))$ na faixa $st(-1/2, 0)$.

Se para uma dada região $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ o subespaço real $\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})$ é padrão (basta requerer ciclicidade), então o operador $\mathfrak{s}_{\mathcal{O}}$ é o operador de Tomita-espacial, nos termos da teoria de Rieffel-van Daele (vide *Apêndice B.2*). Nesse caso, temos que $\mathfrak{s}_{\mathcal{O}}$ é uma involução anti-linear fechada e possui uma decomposição polar

$$\mathfrak{s}_{\mathcal{O}} =: j_{\mathcal{O}} \delta_{\mathcal{O}}^{1/2}, \quad j_{\mathcal{O}}^2 = 1, \quad \delta_{\mathcal{O}} > 0 \quad (12.8)$$

⁴Trivialmente, existe $W \in \mathcal{W}$ com $W \supset \mathcal{O}$!

Proposição 115 (Inclusão Modular de Cunhas) *Sejam $W, \tilde{W} \in \mathcal{W}$. Então:*

$$W \supset \tilde{W} \Rightarrow (s_W, \mathfrak{h}(W)) \supset (s_{\tilde{W}}, \mathfrak{h}(\tilde{W}))$$

i.e.,

$$\mathfrak{h}(W) \supset \mathfrak{h}(\tilde{W}), \quad s_W|_{\mathfrak{h}(\tilde{W})} = s_{\tilde{W}}$$

Prova. Pela covariância da subfamília $\{\mathfrak{h}_R(W) ; W \in \mathcal{W}\}$ (proposição 114), a isotonia para o caso geral segue-se do caso particular $W_1 \supset W \in \mathcal{W}$. Mas $W_1 \supset W$ se e somente se $W = W_a = W + a$ onde $a \in \overline{W}$; nesse caso, podemos assumir que a é ortogonal ao eixo de W_1 , portanto é a combinação linear de dois vetores tipo-luz pertencentes aos planos característicos de W_1 : $a = a_1 + a_2$, $a_1 \in \overline{W_1} \cap \partial V^+$ and $a_2 \in \overline{W_1} \cap \partial V^-$. Portanto, novamente pela covariância (proposição 114), o caso $W_1 \supset W$ segue-se dos casos especiais $W_1 \supset W_{a_1}$ e $W_1 \supset W_{a_2}$.

$$\mathfrak{h}(W_1) \supset \mathfrak{h}(W_{a_1}) \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}(W_1) \supset \mathfrak{h}(W_{a_2})$$

\Rightarrow

$$\mathfrak{h}(W_1) \supset \mathfrak{h}(W_{a_1}) = u(a_1) \mathfrak{h}(W_1) u(a_1)^* \supset u(a_1) \mathfrak{h}(W_{a_2}) u(a_1)^* = \mathfrak{h}(W_{a_1+a_2})$$

Agora, temos para $W_1 \supset W_a$, $a \in \overline{W_1} \cap \partial V^+$

$$\begin{aligned} \delta_a^{it} &= u(a) \delta_1^{it} u(a)^* \\ &= u(a) u(\tilde{\Lambda}_1(-t)) u(a)^* \\ &= u(a - \tilde{\Lambda}_1(-t)a, \tilde{\Lambda}_1(-t)) \\ &= e^{-iP \cdot \Lambda_1(-t)a} e^{iP \cdot a} \delta_1^{it} \end{aligned}$$

e

$$e^{iP \cdot \Lambda_1(-t)a} e^{iP \cdot a} \delta_a^{it} = \delta_1^{it} \tag{12.11}$$

Como o espectro do operador momentum P tem energia positiva e $a = (\pm l, l, 0, 0)$ (com $l > 0$) é um vetor tipo-luz, temos para $p \in \text{Spect}(P)$ e $z = u - iv \in \text{st}[-1/2, 0]$ (com $u, v > 0$) vale

$$\begin{aligned} \Re(ip \cdot \Lambda_1(-z)a) &= -\Im(p \cdot \Lambda_1(-u + iv)a) \\ &= \mp v(\pm p^0 + p^1) \sin(2\pi l) \\ &\leq 0 \quad \left(= 0 \text{ sse } z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in -\frac{i}{2}\mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

Portanto, o grupo um-parâmetro de unitários $\mathbb{R} \ni t \rightarrow e^{-iP \cdot \Lambda_1(-t)a}$ tem uma extensão analítica na faixa $\text{st}(-1/2, 0)$ que é limitada e contínua em $\text{st}[-1/2, 0]$. Então a equação (12.11) implica

$$\mathfrak{h}(W_a) = \text{Dom}(\delta_a^{1/2}) \subset \text{Dom}(\delta_1^{1/2}) = \mathfrak{h}(W_1)$$

Para provar a parte final da proposição, basta observar que os operadores de Tomita são definidos biunivocamente pela equação (12.7), donde a inclusão dos domínios implica na inclusão dos operadores de Tomita:

$$s_{\bar{W}} = s_W|_{\mathfrak{h}(\bar{W})}$$

■

Observação 116 Esta é uma propriedade não-trivial dos operadores de Tomita das regiões tipo-cunha. Realmente (pelo menos para o caso bosônico), apenas em representações de energia positiva a inclusão de cunhas implica na inclusão dos operadores de Tomita correspondentes, de acordo com [28].

Agora forneceremos um critério conveniente para fixar a fase indeterminada \mathfrak{J} que entra na definição dos operadores modulares das regiões tipo-cunhas:

Proposição 117 (Localidade e Relação Spin-Estatística) Seja $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ o spin/helicidade da representação (u, \mathfrak{h}) . Vale

$$\mathfrak{h}(W') = \mathfrak{h}(W)' \quad \forall W \in \mathcal{W} \iff \mathfrak{J} = \pm i^{2s}$$

Nesse caso, os operadores modulares das regiões tipo-cunha satisfazem

$$\begin{aligned} \delta_{W'}^{1/2} &= \delta_W^{-1/2} \\ \mathfrak{J}_{W'} &= \mathfrak{J}_W \\ s_{W'} &= s_W^* \\ \mathfrak{h}(W)' &= \mathfrak{h}(W') \\ \delta_{W'}^{it} &:= u\left(\tilde{\Lambda}_W(2\pi t)\right), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Prova. Pela covariância dos espaços de localização modular nas regiões tipo-cunha (proposição 114), o teorema segue-se do caso especial $W = W_1$.

Notamos que a rotação $r'_1 \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ (definição 15) aplica W_1 em W'_1

$$r'_1 W_1 = W'_1$$

Portanto, novamente pela proposição 114 temos

$$\delta_{W'_1}^{1/2} = \text{adu}(\tilde{r}'_1) \delta_1^{1/2}, \quad \mathfrak{J}_{W'_1} = \text{adu}(\tilde{r}'_1) \mathfrak{J}_1, \quad s_{W'_1} = \text{adu}(\tilde{r}'_1) s_1$$

Diretamente pela definição 12.10, temos (lembramos que \mathfrak{J}_1 é anti-linear!)

$$\text{adu}(\tilde{r}'_1) \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} u(\tilde{r}'_1) u(\tilde{r}_1) u(\tilde{r}'_1)^* = u(r'_1)^2 \mathfrak{J} u(\tilde{r}_1) = u(r'_1)^2 \mathfrak{J}_1$$

e

$$\text{adu}(\tilde{r}'_1) \delta_1^{it} = \text{adu}(\tilde{r}'_1) u(\Lambda_1(-2\pi t)) = u(\Lambda_1(2\pi t)) = \delta_1^{-it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

donde

$$j_{W_1'} = u(\bar{r}_1')^2 j_1, \quad \delta_{W_1'}^{1/2} = \delta_1^{-1/2}, \quad s_{W_1'} = u(\bar{r}_1')^2 s_1^*$$

Por outro lado, o teorema de Tomita-Takesaki espacial nos dá $j_1 \mathfrak{h}(W_1) = \mathfrak{h}(W_1)'$ e, portanto (considerando o cálculo acima)

$$s_1^* = \text{adj}_1 s_1 = \mathfrak{z}^2 \text{adu}(\bar{r}_1') s_1 = \bar{\mathfrak{z}}^2 s_{W_1'}$$

Assim

$$u(\bar{r}_1')^2 s_1^* = \mathfrak{z}^2 s_1^*$$

donde concluimos

$$\mathfrak{z}^2 = u(\bar{r}_1')^2$$

Como \bar{r}_1' é uma rotação de ângulo π em torno do eixo- x_3 , temos $u(\bar{r}_1')^2 = (-1)^{2s}$ e $\mathfrak{z} = \pm i^{2s}$.

Como todos os passos acima são reversíveis, temos provado a proposição. ■

Agora, iremos provar que a correspondência $\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{h}$ é um *lattice local de subespaços reais fechados*, com a localidade entendida em termos da estrutura simplética de $(\mathfrak{h}, (\cdot, \cdot))$, definida no Apêndice B.2.1.

Teorema 118 (Lattice Modular) *Considerando a relação spin-estatística $\mathfrak{z} = (i)^{2s}$, temos que a correspondência*

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{h}$$

é um lattice simpléticamente local covariante de subespaços reais, i.e. satisfaz:

i) Isotonia

$$\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}})$$

ii) Localidade Simplética

$$\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{O} \times \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}}) = \{0\}$$

iii) Covariância

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K}, \quad \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+ \Rightarrow u(\tilde{g}) \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) = \mathfrak{h}_R(\tilde{g}\mathcal{O})$$

Além disso, esse lattice também satisfaz:

iv) Dualidade

$$\mathcal{O} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}') = \mathfrak{h}_R(\mathcal{O})'$$

v) *Fatorialidade*

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}_1) \cap \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}_2) = \{0\}$$

vi) *Ortocomplementaridade*

$$\left(\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \vee \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}})' \right) \wedge \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}}) = \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}), \quad \forall \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}, \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$$

Prova. i) Isotonia. A isotonia para inclusões de regiões tipo-cunha é provada na proposição 115. Já o caso de inclusões de diamantes ou cones-tipo-espaço em regiões causalmente completas segue-se diretamente da definição: se $\mathcal{O} \in \mathcal{DUC}$, $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$, temos

$$\{W \in \mathcal{W} / \mathcal{O} \subset W\} \supset \{W \in \mathcal{W} / \tilde{\mathcal{O}} \subset W\}$$

donde

$$\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) = \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} \subset \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \tilde{\mathcal{O}}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} = \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}})$$

ii) Localidade. A localidade é uma particularidade da propriedade de dualidade (iv), provada abaixo.

iii) Covariância. A covariância segue-se quase trivialmente da covariância da subfamília dos cunhas, com respeito à ação do grupo de Poincaré 114 e à ação das W -reflexões 117, pois estes geram o grupo de Poincaré próprio:

$$\begin{aligned} u(\tilde{g}) \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) &= u(\tilde{g}) \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} = \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} u(\tilde{g}) \mathfrak{h}_R(W) \right\} \\ &= \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(gW) \right\} = \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset g\mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} \\ &= \mathfrak{h}_R(g\mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}, \forall g \in \tilde{\mathcal{P}}_+ \end{aligned}$$

iv) Dualidade. A dualidade para regiões tipo-cunha segue-se do teorema de Tomita-Takesaki espacial 113 e da relação entre estrutura modular de cunhas opostos 117.

A dualidade para regiões causalmente completas segue-se quase trivialmente

da dualidade para regiões tipo-cunha:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_R(\mathcal{O})' &= \left\{ \bigcap_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W) \right\}' = \left\{ \bigvee_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W)' \right\} \\ &= \left\{ \bigvee_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}}} \mathfrak{h}_R(W') \right\} = \left\{ \bigvee_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ W \supset \mathcal{O}'}} \mathfrak{h}_R(W) \right\} \\ &= \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}') \quad , \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

onde temos usado as identidades 12.6 e B.7.

v) Fatorialidade

Como para todo par $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}$ tais que $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ existe uma cunha $W \in \mathcal{W}$ tal que $\mathcal{O}_1 \subset W$ e $\mathcal{O}_2 \subset W'$, a fatorialidade segue-se da isotonia e da fatorialidade para regiões tipo-cunha:

$$\mathfrak{h}_R(W) \cap \mathfrak{h}_R(W') = \{0\} \quad , \forall W \in \mathcal{W}$$

Então, seja $W \in \mathcal{W}$ e $\varphi \in \mathfrak{h}_R(W) \cap \mathfrak{h}_R(W')$.

Como $\delta_{W'} = \delta_W^{-1}$, temos

$z \rightarrow \delta_W^{iz} \varphi$ é analítica na faixa $st(-1/2, +1/2)$
e satisfaz as condições de bordo

$$\begin{cases} \delta_W^{t-i/2} \varphi = u(\Lambda_W(-\pi t)) \varphi \\ \delta_W^{t+i/2} \varphi = \delta_{W'}^{-t-i/2} \varphi = u(\Lambda_W(-\pi t)) \varphi \end{cases} \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Pelo princípio de reflexão de Schwartz, concluímos que $\delta_W^{iz} \varphi$ é uma função analítica inteira e periódica na direção imaginária. Portanto, pelo teorema de Liouville, esta será uma função constante se seu crescimento na direção real for polinomialmente limitado, o que é o caso já que as funções $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \delta_W^{t+is} \varphi$ ($s \in \mathbb{R}$) são limitadas (pois pertencem a \mathfrak{h} !).

vi) Orthocomplementaridade

Diretamente da fatorialidade e isotonia, temos:

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \vee \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}})' \right) \wedge \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}}) &= \left\langle \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cup \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}})' \right\rangle \cap \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}}) \\ &\stackrel{(isotonia)}{=} \left\langle \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cup \left(\mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}})' \cap \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}}) \right) \right\rangle \\ &\stackrel{(fatorialidade)}{=} \left\langle \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{h}_R(\tilde{\mathcal{O}}) \right\rangle \\ &\stackrel{(isotonia)}{=} \mathfrak{h}_R(\mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}, \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

■

O teorema mostra que a família de espaços modulares $\{\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}}$ define uma localização de acordo com os critérios 100, a qual chamamos de *localização modular*.

Observação 119 (Localização Modular e Simetria de Poincaré) *Trivialmente, vale a isotonia para subespaços de localização modular correspondentes a inclusões de regiões do tipo diamante e do tipo cone-tipo-espaço em regiões causalmente fechadas; mas a isotonia para inclusões de subespaços de localização modular correspondentes a regiões tipo-cunha requer positividade do espectro do operador energia-momentum. Nesse sentido, podemos dizer que a isotonia da família de subespaços de localização modular segue-se da positividade da energia!*

Prova-se que existe uma correspondência biunívoca entre representações de energia positiva do grupo de Poincaré e lattices locais de subespaços reais padrão [28], mostrando que no caso de partículas, a localização é equivalente à covariância de Poincaré com energia positiva.

12.1 Domínio e Ação dos Operadores de Tomita

Para definirmos explicitamente o operador de Tomita $s_{\mathcal{O}}$ de uma região $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ é necessário exibirmos sua ação nos elementos de um *núcleo* desse operador, o qual é caracterizado como um subconjunto denso do domínio que ainda determina o operador pelo fecho de sua restrição a esse subconjunto. Pela definição do operador de Tomita, isso requer a extensão analítica da ação do grupo modular correspondente $\delta_{\mathcal{O}}^{it}$ para a faixa $it \in [-1/2, 0]$. A propriedade de *covariância modular* nos permite realizar essa extensão explicitamente para o caso das regiões tipo-cunha $W \in \mathcal{W}$; mas para obtermos um core do operador de Tomita de um região arbitrária do espaço-tempo é necessário tomar as interseções dos cores dos operadores de Tomita de regiões tipo-cunha contendo essa região. Nossa estratégia para definirmos um core para os operadores de Tomita consiste em considerar a relação entre funções-teste e funções-de-onda; precisamente: a restrição da transformada de Fourier de uma função-teste ao hiperbolóide de massa é uma função-de-onda, que pertence ao domínio do operador de Tomita de qualquer região do espaço-tempo que contenha o suporte da função-teste.

12.1.1 Funções-de-Onda e Funções Teste

Considere a transformada de Fourier das *funções-teste* definidas no espaço de Minkowski,

$$\hat{f} : \mathcal{S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{M}) \quad , \quad \hat{f}(p) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{M}} e^{ip \cdot x} f(x) dx$$

Definição 120 *Seja $\Gamma_m^+ \subset \mathcal{M}$ o hiperbolóide de massa $m \geq 0$ com energia positiva. Definimos a seguinte aplicação- Γ_m^+*

$$\begin{aligned} \varphi_{\Gamma_m^+} : \mathcal{S}(\mathcal{M}) &\rightarrow L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m) \\ f &\mapsto \varphi_{\Gamma_m^+}[f] = \varphi_f := \sqrt{2\pi} \hat{f}|_{\Gamma_m^+} \end{aligned} \quad (12.12)$$

Realmente, a aplicação- Γ_m^+ toma valores em funções-de-onda sobre o hiperbolóide-de-massa Γ_m^+ : para toda função $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_m^+} \overline{\varphi_f(p)} \varphi_f(p) d\mu_m(p) &= \int_{\Gamma_m^+} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \frac{\sqrt{2\pi}d^4x}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{2\pi}d^4y}{(2\pi)^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \overline{f(x)} f(y) d\mu_m(p) \\ &= i \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} d^4x d^4y D_m^+(x-y) \overline{f(x)} f(y) < \infty \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} D_m^\pm(x) &:= \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int_{\Gamma_m^+} e^{-ip \cdot x} d\mu_m(p) \\ &= \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-ip(x-y)} \theta(\pm p^0) \delta(p^2 - m^2) d^4p \\ &= \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})} \frac{d^3\vec{x}}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \end{aligned}$$

é a distribuição de Pauli-Jordan sobre o hiperbolóide de massa Γ_m^+ ([14, Appendix F]).

Proposição 121 $\varphi_{\Gamma_m^+}$ é um homomorfismo \mathbb{C} -linear cuja imagem é densa em $L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$

$$\overline{\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{O}))} = L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m), \quad \forall (\text{aberto}) \mathcal{O} \subset \mathcal{M} \quad (12.13)$$

Prova. A \mathbb{C} -linearidade de $\varphi_{\Gamma_m^+}$ é imediata de sua definição. Provaremos a densidade da imagem de $\varphi_{\Gamma_m^+}$ nos espaços $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ aberto, em dois passos.

$$i) \overline{\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{M}))} = L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$$

Para a densidade de $\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{M}))$ em $L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$ basta mostrar que a imagem de $\varphi_{\Gamma_m^+}$ contém um subconjunto de funções-de-onda denso, que pode ser um dos seguintes: se $m > 0$, consideramos o conjunto das funções-de-onda de classe C^∞ com suporte compacto; se $m = 0$, consideramos o conjunto de funções-de-onda de classe C^∞ com suporte compacto que se anulam juntamente com todas as suas derivadas na origem $p = 0$ (o qual é um ponto singular do cone-de-luz).

Então, seja $\varphi \in L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$ de classe C^∞ com suporte compacto $D \subset \Gamma_m^+$ (no caso de massa zero, também se anulando juntamente com todas as suas derivadas na origem). Por análise básica, conseguimos uma função teste de Schwartz $\tilde{f}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $\tilde{f}|_{\Gamma_m^+} = \varphi$, tal como⁵

$$\mathcal{M} \ni p \rightarrow \tilde{f}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(|p^2| - m^2)} \varphi\left(\pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p}\right)$$

⁵Facilmente reconhecemos que esta função \tilde{f} é realmente uma função-teste de Schwartz, sendo no caso de massa zero realmente necessário o requerimento $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_k}} \varphi(p) = 0$.

Nós definimos $f := \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ e conseguimos $\varphi_f = \varphi$.

$$ii) \overline{\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{O}))} = L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$$

Seja $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto e não vazio. A densidade de $\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{O}))$ em $L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$ significa que seu complemento ortogonal é igual a $\{0\}$,

$$\psi \in L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m) / \forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{O}), (\psi, \varphi_f) = 0 \Rightarrow \psi = 0$$

Provaremos essa afirmação.

Sejam $\psi \in L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$ e $f \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ arbitrárias. Então, definimos a seguinte função

$$\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}, \Psi(a) := (\psi, \varphi_f^a) = \int_{\Gamma_m^+} \psi(p)^* \varphi_f(p) e^{ip \cdot a} d\mu_m(p)$$

onde

$$\varphi_f^a = \varphi_{f_a}, f_a(x) = f(x - a), \forall x \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}^4$$

Como integramos sobre Γ_m^+ , Ψ possui uma extensão analítica na região aberta $\mathbb{R}^4 + iV^+$ de \mathbb{C}^4 , com parte real do bordo sendo \mathbb{R}^4

$$\Psi(a + ib) := (\psi, \varphi_f^a) = \int_{\Gamma_m^+} \psi(p)^* \varphi_f(p) e^{ip \cdot a} e^{-p \cdot b} d\mu_m(p), \forall (a, b) \in \mathbb{R}^4 \times \overline{V^+}$$

Portanto, se ψ é ortogonal a $\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{O}))$, temos que Ψ é identicamente nula, pois que se anula num subconjunto aberto da parte real do seu bordo \mathcal{O} . Em particular, temos que ψ é ortogonal a $\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(\mathcal{O} + a))$ para todo $a \in \mathbb{R}^4$, já que é um isomorfismo a transformação

$$\mathcal{S}(\mathcal{O}) \ni f \rightarrow f_a \in \mathcal{S}(\mathcal{O} + a)$$

Tomemos agora uma partição da unidade $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}^4 com $\text{supp}(I_k) \subset \mathcal{O} + a_k$ ($a_k \in \mathbb{R}^4$) para todo $k \in \mathbb{N}$

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} I_k, I_k|_{\mathbb{R} \setminus (\mathcal{O} + a_k)} \equiv 0$$

Então, para toda função $h \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$, temos

$$I_k h \in \mathcal{S}(\mathcal{O} + a_k), \forall k \in \mathbb{N}$$

donde

$$(\psi, \varphi_h) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\psi, \varphi_{I_k h}) = 0, \forall h \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$$

o que implica $\psi = 0$, pela primeira parte. ■

12.1.2 Ciclicidade dos Subespaços Modulares: Caso Escalar

Lema 122 (Extensão Analítica I) *Seja $q \in \overline{V^+}$ e $y \in W_1$. Então, a seguinte função*

$$\overline{V^+} \times W_1 \times \mathbb{C} \ni (q, y, z) \rightarrow \eta_{q,y}(z) := \Lambda_1(z) q \cdot y = q \cdot \Lambda_1(-z) y$$

é contínua e linear com respeito a $q \in \overline{V^+}$ e $y \in W_1$ e é inteira analítica com respeito a $z \in \mathbb{C}$. Além disso, ela satisfaz

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Im(\eta_{q,y}(z)) &\geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \in st[-1/2, 0] \\ \text{ii)} \quad \eta_{q,y}(t) &= \Lambda_W(t) q \cdot y \\ \eta_{q,y}(t - i/2) &= \Lambda_1(t) r_1 q \cdot y \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{12.14}$$

onde $r_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é a reflexão no eixo do cunha W_1 :

$$r_1 : (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$$

Prova. *Explicitamente,*

$$\eta_{q,y}(z) = (\cosh(2\pi z) q^0 + \sinh(2\pi z) q^1) y^0 - (\sinh(2\pi z) q^0 + \cosh(2\pi z) q^1) y^1 - q^2 y^2 - q^3 y^3$$

Uma manipulação algébrica simples mostra a igualdade $\Lambda_1(z) q \cdot y = q \cdot \Lambda_1(-z) x$. Também é óbvio a linearidade e continuidade de $\eta_{q,y}(z)$ com respeito a $q \in \overline{V^+}$ and $y \in W_1$ e anaiticidade com respeito a $z \in \mathbb{C}$.

Sejam $q \in \overline{V^+}$, $y \in W_1$ e $z = (t + i\tau) \in \mathbb{C}$ com $t, \tau \in \mathbb{R}$. Então⁶

$$\begin{aligned} \eta_{q,y}(z) &= [\cosh(2\pi t) \cos(2\pi\tau) + i \sinh(2\pi t) \sin(2\pi\tau)] q^0 y^0 + \\ &+ [\sinh(2\pi t) \cos(2\pi\tau) + i \cosh(2\pi t) \sin(2\pi\tau)] q^1 y^0 + \\ &- [\sinh(2\pi t) \cos(2\pi\tau) + i \cosh(2\pi t) \sin(2\pi\tau)] q^0 y^1 + \\ &- [\cosh(2\pi t) \cos(2\pi\tau) + i \sinh(2\pi t) \sin(2\pi\tau)] q^1 y^1 + \\ &- q^2 y^2 - q^3 y^3 \\ &= i \sin(2\pi\tau) (\sinh(2\pi t) [q^0 y^0 - q^1 y^1] + \cosh(2\pi t) [q^1 y^0 - q^0 y^1]) + \\ &+ \cos(2\pi\tau) (\cosh(2\pi t) [q^0 y^0 - q^1 y^1] + \sinh(2\pi t) [q^1 y^0 - q^0 y^1]) + \\ &- q^2 y^2 - q^3 y^3 \end{aligned}$$

Como $q \in \overline{V^+}$ and $y \in W_1$ (em particular, $q^0 \geq |q^1|$ e $y^1 > |y^0|$), vale

$$(q^0 y^1 - q^1 y^0) \pm (q^0 y^0 - q^1 y^1) = (q^0 \mp q^1) (y^1 \pm y^0) \geq 0$$

e

$$\sinh(2\pi t) (q^0 y^0 - q^1 y^1) + \cosh(2\pi t) (q^1 y^0 - q^0 y^1) \leq 0 \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

⁶Usando as identidades $\begin{cases} \cosh(a + ib) = \cosh(a) \cos(b) + i \sinh(a) \sin(b) \\ \sinh(a + ib) = \sinh(a) \cos(b) + i \cosh(a) \sin(b) \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

Portanto, $\forall z = (t + i\tau) \in st[-1/2, 0]$

$$\Im(\eta_{q,y}(z)) = \sin(2\pi\tau) (\sinh(2\pi t) [q^0 y^0 - q^1 y^1] + \cosh(2\pi t) [q^1 y^0 - q^0 y^1]) \geq 0$$

Por verificação direta, obtemos as identidades (ii):

$$\begin{aligned} \eta_{q,y}(t - i/2) &= -(\cosh(2\pi t) [q^0 y^0 - q^1 y^1] + \sinh(2\pi t) [q^1 y^0 - q^0 y^1]) \\ &\quad - q^2 y^2 - q^3 y^3 \\ &= [\cosh(2\pi t) (-q^0) + \sinh(2\pi t) (-q^1)] y^0 + \\ &\quad - [\sinh(2\pi t) (-q^0) + \cosh(2\pi t) (-q^1)] y^1 \\ &\quad - q^2 y^2 - q^3 y^3 \\ &= \Lambda_1(t) r_1 q \cdot y \end{aligned}$$

■

Lema 123 (Extensão Analítica II) *Seja $f \in \mathcal{S}(W_1)$ uma função-teste de Schwartz sobre \mathcal{M} com $\text{supp}(f) \subset W_1$. A função*

$$F_f : \overline{V^+} \times st[-1/2, 0] \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_f(p, z) := \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} e^{i\eta_{p,z}(z)} f(x) dx$$

é bem-definida, contínua e satisfaz:

i) *Vale a estimativa (em particular, $F_f(\cdot, z)$ é uniformemente limitada para $z \in st[-1/2, 0]$)*

$$|F_f(p, z)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} |f(x)| dx < \infty, \quad \forall p \in \overline{V^+} \times st[-1/2, 0] \quad (12.15)$$

ii) *Para $p \in \overline{V^+}$ fixo, $F_f(p, \cdot)|_{st(-1/2, 0)} : st(-1/2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica.*

iii) *Para $z \in st[-1/2, 0]$ fixo, $F_f(\cdot, z)|_{\Gamma_m^+} : \Gamma_m^+ \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função- C^∞ quadrado-integrável com respeito à medida Lorentz-invariante $d\mu_m(p)$.*

Prova. *Prova de (i).* O lema 12.14 implica

$$\begin{aligned} \Im(\eta_{p,y}(\pi z)) &\geq 0 \\ e &\quad \forall z \in st[-1/2, 0], p \in \overline{V^+}, x \in W_1 \\ |e^{+i\eta_{p,z}(z)} f(x)| &= e^{-2\Im(\eta_{p,z}(z))} |f(x)| \leq |f(x)| \end{aligned}$$

Portanto, $F(p, z)$ é bem-definida e contínua em $\overline{V^+} \times st[-1/2, 0]$.

A estimativa (i) segue-se trivialmente.⁷

$$|F(p, z)| = \left| \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} e^{i\eta_{p,z}(z)} f(x) dx \right| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} |f(x)| dx < \infty \quad (12.16)$$

⁷A finitude deve-se à inclusão $\mathcal{S}(W_1) \subset L^1(\mathcal{M})!$

Prova de (ii). Para $p \in \overline{V^+}$ fixo, temos que $\frac{d}{dz}\eta_{p,x}(z)$ é um polinômio de grau unitário com respeito a $x \in W_1$, donde

$$\frac{d}{dz}e^{i\eta_{p,x}(z)}f(x) = e^{i\eta_{p,x}(z)}\left(i\frac{d}{dz}\eta_{p,x}(z)\right)f(x) \in \mathcal{S}(\mathcal{M}) \quad (12.17)$$

Em particular, temos que $\frac{d}{dz}\eta_{p,x}(z)f \in \mathcal{S}(W_1)$ é absolutamente quadrado-integrável com respeito a $x \in W_1$,

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} \left| e^{i\eta_{p,x}(z)} \left(i \frac{d}{dz} \eta_{p,x}(z) \right) f(x) \right| dx < \infty$$

Portanto (comutando as operações de derivação e integração)

$$\frac{\partial}{\partial z}F(p,z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} e^{i\eta_{p,x}(z)} \left(i \frac{d}{dz} \eta_{p,x}(z) \right) f(x) dx \quad (12.18)$$

Em particular, para $z = t + i\tau$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(p,z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} e^{i\eta_{p,x}(z)} \left(i \frac{d}{dt} \eta_{p,x}(z) \right) f(x) dx$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tau}F(p,z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_{W_1} e^{i\eta_{p,x}(z)} \left(i \frac{d}{d\tau} \eta_{p,x}(z) \right) f(x) dx$$

Como $\eta_{p,x}(z)$ é analítica com respeito a $z \in st(-1/2, 0)$, ela satisfaz as equações de Cauchy-Riemann neste domínio; então, as equações acima implicam que $F(p,z)$ também satisfaz as equações de Cauchy-Riemann com respeito a $z \in st(-1/2, 0)$, donde segue a analiticidade desta função neste domínio.

Prova de (iii)

Para $z \in st[-1/2, 0]$ fixo, o lemma 12.14 implica

$$\Re \left[-i\overline{\eta_{p,x}(z)} + i\eta_{p,y}(z) \right] = -\Im(\eta_{p,x+y}(z)) \leq 0, \quad \forall p \in \overline{V^+}, x, y \in W_1$$

Portanto, o núcleo

$$e^{-i\overline{\eta_{p,x}(z)} + i\eta_{p,y}(z)} = e^{-\Im[p\Lambda_1(-z/2)(x+y)]} e^{-i\Re[p\Lambda_1(-z)(x-y)]}$$

é dominado pelo núcleo da distribuição de Pauli-Jordan $e^{-ip\Re[\Lambda_1(-z)(x-y)]}$, i.é

$$\left| e^{-\Im[p\Lambda_1(-z/2)(x+y)]} e^{-i\Re[p\Lambda_1(-z)(x-y)]} \right| = \left| e^{-\Im[p\Lambda_1(-z/2)(x+y)]} \overline{f(x)} f(y) \right| \leq \left| \overline{f(x)} f(y) \right|$$

Isso implica que podemos integrar $|F(p,z)|^2$ em $p \in \Gamma_m^+$ com respeito à medida $d\mu_m(p)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_m^+} |F(p,z)|^2 d\mu_m(p) &= \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \right)^2 \int_{\Gamma_m^+} \int_{W_1} \int_{W_1} e^{-i\overline{\eta_{p,x}(z)} + i\eta_{p,y}(z)} \overline{f(x)} f(y) dx dy d\mu_m(p) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \right)^2 \int_{W_1} \int_{W_1} \int_{\Gamma_m^+} e^{-ip\Re[\Lambda_1(-z)(x-y)]} e^{-p\Im[\Lambda_1(-z)(x+y)]} \overline{f(x)} f(y) d\mu_m(p) dx dy \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

■

A Representação Própria Escalar

Seja a representação escalar própria de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ é dada por

$$\mathfrak{h}_0 := L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m) \quad , \quad u_0 : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}_0) \quad , \quad (u_0(a, \bar{\Lambda})\varphi)(p) := e^{ia \cdot p} \varphi(\Lambda^{-1}p)$$

Para essa representação própria escalar, as proposições acima nos permitem exibir explicitamente os operadores modulares $s_{0\mathcal{O}}$, $j_{0\mathcal{O}}$ e $\delta_{0\mathcal{O}}$ de regiões causalmente fechadas arbitrárias $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$:

Proposição 124 *Seja $W \in \mathcal{W}$ uma região cunha.*

Então $\varphi_{\Gamma_m^\pm}(S(W))$ é um core de $\delta_{0W}^{1/2}$, i.e.

i) *$\varphi_{\Gamma_m^\pm}(S(W))$ é denso em $Dom(\delta_{0W}^{1/2})$*

$$\overline{\varphi_{\Gamma_m^\pm}(S(W))} \subset Dom(\delta_{0W}^{1/2})$$

ii) *O fecho do operador $\delta_{0W}^{1/2}|_{S(W)}$ coincide com $\delta_{0W}^{1/2}$*

$$\overline{\delta_{0W}^{1/2}|_{S(W)}} = \delta_{0W}^{1/2}$$

Além disso, se $f \in S(W)$ então φ_f possui continuação analítica numa sub-variedade do hiperbolóide de massa complexo contendo Γ_m^+ e Γ_m^- como bordo

$$\varphi_f : M_W \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad M_W = \{\Lambda_W(z)p ; p \in \Gamma_m^+, z \in st[-1/2, 0]\} \quad (12.19)$$

bem definida por

$$\varphi_f(q) := F_{W,f}(p, z) \quad , \quad q = \Lambda(z)p \quad , \quad p \in \Gamma_m^+ \quad , \quad z \in st[-1/2, 0]$$

onde

$$F_{W,f} : \Gamma_m^+ \times st[-1/2, 0] \rightarrow \mathbb{C} \quad (12.20)$$

$$F_{W,f}(p, z) := \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_W e^{i\Lambda_W(z)p \cdot x} f(x) d^4x$$

é uma função contínua satisfazendo:

iii) *Para $p \in \Gamma_m^+$ fixo, $F_{W,f}(p, \cdot)$ é analítica em $z \in st(-1/2, 0)$;*

iv) *Para $z \in st[-1/2, 0]$ fixo, $F_{W,f}(\cdot, z)$ é função quadrado integrável em $p \in \Gamma_m^+$ relativamente à medida $d\mu_m(p)$.*

Em particular, a ação de $\delta_{0W}^{1/2}$ sobre φ_f é dada por

$$\left(\delta_{0W}^{1/2}\varphi_f\right)(p) = F_{W,f}(p, -i/2) = \varphi_f(r_W p) \quad , \quad \forall p \in \Gamma_m^+ \quad (12.21)$$

Prova. *Nessa prova, omitimos sufixo $\langle 0 \rangle$ para simplificar a notação.*

Primeiramente, consideramos as propriedades de $F_{W,f}$.

Seja $L_W \in \mathcal{P}_+^\dagger$ tal que $L_W W_1 = W$. Então

$$F_{W,f}(p, z) = F_{f \circ L_W}(L_W^{-1}p, z) \quad , \quad \forall (p, z) \in \Gamma_m^+ \times st[-1/2, 0]$$

Realmente

$$\begin{aligned} F_{W,f}(p, z) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_W e^{i\Lambda_W(z)p \cdot x} f(x) d^4x \\ (\text{covariância}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_W e^{iL_W^{-1}\Lambda_W(z)L_W L_W^{-1}p \cdot L_W^{-1}x} f(x) d^4x \\ (\det L_W=1) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi)^2} \int_W e^{i\Lambda_1(z)L_W^{-1}p \cdot x} f(L_W x) d^4x \\ &= F_{f \circ L_W}(L_W^{-1}p, z) \end{aligned}$$

Portanto, como a ação covariante de \mathcal{P}_+^\dagger é unitária relativamente à medida $d\mu_m(p)$, vemos que as propriedades (iii) e (iv) de $F_{W,f}$ seguem-se das propriedades de F_f , dadas na proposição anterior.

A continuação analítica de φ_f é bem definida pela equação (12.19) pelo fato simples de que pela definição 12.20 de $F_{W,f}$ temos

$$\begin{aligned} (p, z), (p', z') \in \Gamma_m^+ \times st[-1/2, 0] / \Lambda_W(z')p' = \Lambda_W(z)p \\ \implies \\ F_{W,f}(p', z') = F_{W,f}(p, z) \end{aligned}$$

Pelo teorema [113, Theorem VIII.11], para provarmos que $\varphi_{\Gamma_m^+}(\mathcal{S}(W))$ é um core para $\delta_W^{1/2}$ é suficiente provarmos que $\varphi_{\Gamma_m^+}\mathcal{S}(W)$ é um subespaço denso de $\text{Dom}(\delta_W^{1/2})$ invariante sob ação de δ_W^{it} . Realmente, pela proposição 12.13 temos que $\varphi_{\Gamma_m^+}\mathcal{S}(W)$ é denso em \mathfrak{h} e por (iii) provado acima temos $\varphi_{\Gamma_m^+}\mathcal{S}(W) \subset \text{Dom}(\delta_W^{1/2})$, donde segue-se $\overline{\varphi_{\Gamma_m^+}\mathcal{S}(W)} = \text{Dom}(\delta_W^{1/2})$.

Finalmente, para toda função-teste $f \in \mathcal{S}(W)$ temos

$$(\delta_W^{it}\varphi_f)(p) = (u(\Lambda_W(t))\varphi_f)(p) = \varphi_f(\Lambda_W^{-1}(t)p) = \varphi_{f \circ \Lambda_W^{-1}(t)}(p) \quad , \quad \forall p \in \Gamma_m^+$$

donde (porque Λ_W é uma transformação linear)

$$\delta_W^{it}\varphi_f = \varphi_{f \circ \Lambda_W^{-1}} \in \varphi_{\Gamma_m^+}\mathcal{S}(W)$$

■

12.1.3 Ciclicidade dos Subespaços Modulares: Casos padrão

Seja (u, \mathfrak{h}) uma representação própria de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ de massa $m \geq 0$ e spin $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, induzida por uma representação espinorial irreduzível $(\mathfrak{d}_s, \mathfrak{h}_s)$ de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ de acordo

com a teoria de Wigner⁸:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_s \otimes L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$$

e

$$\begin{aligned} u : \tilde{\mathcal{P}}_+ &\rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \\ \left(u \left(a, \bar{\Lambda} \right) \psi \right) (p) &= e^{ia \cdot p} \tilde{\mathfrak{d}}_s \left(\tilde{R} \left(\bar{\Lambda}, p \right) \right) \psi \left(\Lambda^{-1} p \right) \quad , \forall \left(a, \bar{\Lambda} \right) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \\ \left(u \left(\tilde{\theta} \right) \psi \right) (p) &= \tilde{\mathfrak{d}}_s(i\sigma_2) \overline{\psi(p)} \end{aligned}$$

donde

$$\left(u \left(\tilde{r}_1 \right) \psi \right) (p) = \tilde{\mathfrak{d}}_s(i\sigma_3) \tilde{\mathfrak{d}}_s(i\sigma_2) \overline{\psi(-jp)} = \tilde{\mathfrak{d}}_s(i\sigma_1) \overline{\psi(-r_1 p)}$$

onde $\tilde{R}(\bar{\Lambda}, p)$ é a rotação de Wigner

$$\tilde{R}(\bar{\Lambda}, p) = L(p)^{-1} \bar{\Lambda} L(\Lambda^{-1} p)$$

sendo

$$\begin{aligned} m > 0 &\rightsquigarrow L(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + p_3)}} \begin{pmatrix} p_0 + p_3 + m & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p^0 - p^3 + m \end{pmatrix} \\ m = 0 &\rightsquigarrow L(p) = \frac{1}{\sqrt{p_0 + p_3}} \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aqui, $\psi(p)$ é um spinor com $2s + 1$ componentes, e $\mathfrak{d}_s(\bar{g})$ é uma matriz de rank $(2s + 1) \times (2s + 1)$, para todo $\bar{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+$.

Assim, a ação dos W -boosts é dada por

$$\left(u \left(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t) \right) \psi \right) (p) = \tilde{\mathfrak{d}}_s \left(\tilde{R} \left(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t), p \right) \right) \psi \left(\Lambda_W^{-1}(-2\pi t) p \right)$$

Portanto, para que a função $t \rightarrow u \left(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t) \right) \psi$ seja analítica na faixa $st(-1/2, 0)$ é suficiente que a matriz $\mathfrak{d}_s \left(\tilde{R} \left(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t), p \right) \right)$ e a função-de-onda $\psi \left(\Lambda_W^{-1}(-2\pi t) p \right)$ sejam analíticas nesta faixa, separadamente. Tendo em vista o caso escalar, temos tal analiticidade para as funções-de-onda $\psi_f(p)$ cujas componentes são da forma $\psi_k(p) = \varphi_{f_k}(p)$ com $\text{supp}(f_k) \subset W$, $k = -2s, \dots, 2s!$ Resta-nos provar que as matrizes $\mathfrak{d}_s \left(\tilde{R} \left(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t), p \right) \right)$ também possuem a analiticidade requerida. Entratanto, $\mathfrak{d}_s \left(\tilde{R} \left(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t), p \right) \right)$ é um objeto muito complicado cuja continuação analítica na faixa $st(-1/2, 0)$ não é trivialmente

⁸Aqui, Γ_m^+ é o hiperbolóide de massa m e $d\mu_m$ é a correspondente medida Lorentz-invariante.

Note que $\tilde{\theta}$ é um elemento de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ satisfazendo $\gamma(\tilde{\theta}) = -1 \in \mathcal{P}_+^\dagger$.

conseguida. Nossa estratégia consiste em considerar o problema no caso de funções-de-onda do tipo $\check{\psi}_f(p) = \partial_s(L(p))\psi_f(p)$ pois nesse caso, tendo em vista que

$$\tilde{R}(\bar{\Lambda}, p) L(\Lambda^{-1}p) = L(p)^{-1} \bar{\Lambda}, \quad \forall \bar{\Lambda} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$$

a ação de $u(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t))$ toma a forma

$$\begin{aligned} (u(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t))\check{\psi})(p) &= \tilde{\partial}_s(\tilde{R}(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t), p)) \tilde{\partial}_s(L(\Lambda_W^{-1}(-2\pi t)p)) \psi_f(\Lambda_W(-2\pi t)p) \\ &= \tilde{\partial}_s(L(p)^{-1}) \tilde{\partial}_s(\bar{\Lambda}_W(-2\pi t)) \psi_f(\Lambda_W^{-1}(-2\pi t)p) \end{aligned}$$

que pode ser analiticamente estendida para a faixa $st(-1/2, 0)$!

Para concluir, notamos que a aplicação

$$u \ni \psi \rightarrow \check{\psi}(p) = \tilde{\partial}_s(L(p))\psi(p)$$

é linear e possui inversa

$$\mathfrak{h} \ni \psi \rightarrow \hat{\psi}(p) = \tilde{\partial}_s(L^{-1}(p))\psi(p)$$

Portanto, ela aplica subespaços densos de \mathfrak{h} em subespaços densos de \mathfrak{h} .

12.1.4 Não Ciclicidade dos Subespaços Modulares nos Casos não-padrão?

Os casos não-padrão em quatro dimensões correspondem às representações próprias de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ induzidas por representações fiéis do recobrimento universal do grupo Euclidiano $E(2)$

$$E(2) = \left\{ \Lambda_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & z \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

Com este grupo não é compacto, suas representações fiéis possuem dimensão infinita. Estas são completamente classificadas: $(\partial_{\Xi,\alpha}, \mathfrak{h}_0)$ para $(\Xi, \alpha) \in (0, \infty) \times \{0, 1/2\}$,

$$\mathfrak{h}_0 := L^2(S^1, \mathbb{C}), \quad \partial_{\Xi,\alpha} : E_2 \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}_0)$$

$$\partial_{\Xi,\alpha}(\Lambda_{z,\varphi})f(\theta) := e^{\Xi|z|\cos(\arg ze^{i\varphi/2} - \theta) + \alpha\varphi} f(\theta - \varphi)$$

A representação unitária de \mathcal{P}_+^\dagger induzida pela representação acima é dada por

$$\mathfrak{h} := L^2(\Gamma_0^+) \otimes L^2(\mathfrak{h}_0) = \int^\oplus \mathfrak{h}_0 d\mu_m(p), \quad u : \mathcal{P}_+^\dagger \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$$

$$(u(a, \Lambda)\psi)(p) := e^{ip \cdot a} \partial_{\Xi,\alpha}(R(\Lambda, p))\psi(\Lambda^{-1}p)$$

O argumento usado para mostrar a ciclicidade dos subespaços modulares nos casos padrão não se aplicam aqui pois não possuímos um intertwiner tipo $\mathfrak{d}_{\Xi, \alpha}(L(p))!$ Para proceder como no caso padrão, evitando uma continuação analítica explícita da ação dos W -boosts, teríamos que recorrer a outras realizações destas representações de modo que permitissem definir tais intertwiners.

Em [28], é provado (por métodos puramente algébricos) que mesmo para as representações de massa zero e spin infinito, são cíclicos os subespaços de localização modular em regiões cone-tipo-espaço. Entretanto, a expectativa é de que os subespaços de localização modular em regiões diamante não sejam cíclicos, ou sejam até mesmo triviais. Um tal resultado pode ser entendido em relação com o fato de que não existem teorias de campos quantizados (como definidas no capítulo 5) para partículas de massa zero e helicidade-infinita [149], [95].

Part IV

Métodos Construtivos
Modulares

Chapter 13

Construção Modular de Teorias Livres

A construção modular de teorias quânticas locais livres consiste numa correspondência functorial entre subespaços modulares de uma teoria de Wigner (com spin/helicidade finito) e redes de álgebras de operadores. O ponto novo dessa formulação está no uso da localização modular para definir a localidade na álgebra de observáveis, evitando completamente o uso de campos quantizados.

Álgebras de Weyl e Clifford

Teorema 125 *Seja \mathfrak{h} um espaço de Hilbert com produto interno (\cdot, \cdot) .*

*Álgebra de Weyl.*¹ *Existe uma única álgebra- C^* (módulo $*$ -isomorfismos) Weyl (\mathfrak{h}) gerada por um conjunto de elementos*

$$\{W(\varphi) ; \varphi \in \mathfrak{h}\}$$

satisfazendo as relações canônicas de comutação (CCR)

$$\begin{cases} W(\varphi)^* = W(-\varphi) \\ W(\varphi)W(\psi) - W(\psi)W(\varphi) = 2e^{-\frac{i}{2}\Im(\varphi, \psi)}W(\varphi + \psi) \end{cases}, \varphi, \psi \in \mathfrak{h}$$

*Álgebra de Clifford.*² *Existe uma única álgebra- C^* (módulo $*$ -isomorfismos) Cliff (\mathfrak{h}) gerada por um conjunto de elementos*

$$\{R(\varphi) ; \varphi \in \mathfrak{h}\}$$

¹Não é necessário que \mathfrak{h} seja um espaço de Hilbert, mas apenas que seja um espaço vetorial real com uma forma simplética.

²Não é necessário que \mathfrak{h} seja um espaço de Hilbert, mas apenas um espaço vetorial real com produto interno.

satisfazendo as relações canônicas de anti-comutação (CAR)

$$\begin{cases} R(\varphi)R(\varphi) = \Re(\varphi, \varphi)R\mathbb{I} \\ R(\varphi)R(\psi) + R(\psi)R(\varphi) = 2\Re(\varphi, \psi)\mathbb{I} \end{cases}, \varphi, \psi \in \mathfrak{h}$$

As álgebras de Weyl e Clifford podem ser realizadas concretamente por operadores agindo (respectivamente) no espaço de Fock simétrico ou anti-simétrico construído sobre o espaço de Hilbert que as define, vide [23, Chapter 5].

Redes Covariantes de Álgebras-C*

Seja (u, \mathfrak{h}) uma representação própria do grupo de Poincaré próprio $\tilde{\mathcal{P}}_+$ (definição 105) e $\{\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}); \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ o lattice de subespaços modulares associado (teorema 118).

Para o caso das álgebras de Weyl, definimos

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}_{Weyl}(\mathcal{O}) := \text{Weyl}(\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})) \subset \text{Weyl}(\mathfrak{h})$$

$$\alpha_{Weyl} : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \text{End}(\text{Weyl}(\mathfrak{h})) \quad , \quad \alpha_{Weyl}(\tilde{g})W(\varphi) := W(u(\tilde{g})\varphi)$$

Para o caso das álgebras de Clifford (definidas por operadores satisfazendo relações de anti-comutação) é preciso introduzir mais um ingrediente para conseguirmos uma rede de álgebras satisfazendo localidade. Para isso, tome $\tilde{\tau} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ uma rotação espacial por ângulo 2π ao redor de um eixo fixo no espaço e defina $\Upsilon := U \circ u(\tilde{\tau})$; com isso definimos

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}_{Cliff}(\mathcal{O}) := \{R \in \text{Cliff}(\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})) \mid \Upsilon R = R\} \subset \text{Cliff}(\mathfrak{h})$$

$$\alpha_{Cliff} : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \text{End}(\text{Cliff}(\mathfrak{h})) \quad , \quad \alpha_{Cliff}(\tilde{g})W(\varphi) := W(u(\tilde{g})\varphi)$$

Teorema 126 *Seja (u, \mathfrak{h}) uma representação própria do grupo de Poincaré $\tilde{\mathcal{P}}_+$ e $\{\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}); \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ o lattice de subespaços modulares associados. Vale:*

i) $(\mathcal{R}_{Weyl}, \alpha_{Weyl})$ é uma rede quântica local se e somente se o spin da representação é inteiro;

ii) $(\mathcal{R}_{Cliff}, \alpha_{Cliff})$ é uma rede quântica local se e somente se o spin da representação é semi-inteiro ímpar.

Functor de Weyl/Clifford

O functor de Weyl/Clifford expressa as construções acima numa linguagem categorial:

$$\left\{ \text{representações próprias de } \tilde{\mathcal{P}}_+ \right\} \rightarrow \left\{ \text{redes quânticas locais} \right\}$$

Além disso, esse functor relaciona também a estrutura simplética e modular das representações próprias de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ e a estrutura simplética e modular da representação de vácuo das redes quânticas locais correspondentes, de acordo com o *teorema 129*:

$$s_{\mathcal{O}} \rightarrow S_{\mathcal{O}} = e^{s_{\mathcal{O}}}$$

Podemos reconhecer que estas teorias são livres pela inspeção da teoria do espalhamento (verificando que a matriz- S é igual à identidade) ou exibindo geradores livres de polarização de vácuo localizados em regiões limitadas do espaço-tempo - exatamente os campos livres construídos em termos de operadores de criação e aniquilação (vide o *capítulo 14.2*).

Chapter 14

Estrutura Modular e Interação

Sabemos que cada teoria quântica local é univocamente determinada pelo seus dados de espalhamento, i.é seu *espectro de partículas* (a ação covariante do grupo de Poincaré) junto com a *interação dessas partículas* (a matriz de espalhamento): *para cada conjunto de dados de espalhamento, existe no máximo uma única teoria quântica local associada, módulo isomorfismos da rede* [121].¹ Embora não saibamos como construir redes quânticas locais com interação, sua estrutura modular é determinada explicitamente pelos dados de espalhamento, conforme mostramos na *seção 14.1*.

Mesmo na ausência de métodos construtivos, um importante progresso para a física quântica local seria a formulação de uma caracterização algébrica das interações, ou seja, uma maneira de determinar a partir de algumas propriedades gerais da rede de álgebras de observáveis locais as possíveis matrizes de espalhamento que podem ocorrer na teoria. Embora ainda longe desse ideal, certo progresso já foi alcançado pelo estabelecimento das propriedades básicas dos chamados *geradores livres de polarização do vácuo (PFG's)*: *se uma teoria quântica local em espaço-tempo de dimensão maior do que dois possui um PFG temperado, então a teoria é livre!* Esse fato é tão geral e fundamental que fornece uma extensão da definição do que é uma *teoria livre* para situações em que a teoria do espalhamento (de Haag-Ruelle) não se aplica [120] - tais como os casos das teorias conformes (que não têm 'gap' de massa) e das possíveis teorias quânticas locais descrevendo *anions* [105]. Para o bem da completeza da tese e da conveniência do leitor, acrescentamos na *seção 14.2* uma compilação dos resultados originais sobre as propriedades básicas dos geradores livres de polarização do vácuo apresentados no artigo original [21].

¹Essa extrema rigidez justifica a busca de simetrias nas teorias quânticas locais, pois restrições adicionais nas teorias podem servir tanto para caracterizá-las quanto para nos orientar na construção das mesmas. (Nessa perspectiva, a análise desenvolvida na *Parte II* sobre a relação entre estrutura modular e simetrias pode ser vista como parte de um amplo programa de construção de teorias quânticas locais.

14.1 Operadores Modulares e Matriz-S

Nesta seção, pretendemos elucidar as relações entre a *estrutura modular* e os *dados de espalhamento* de uma teoria quântica local. Entretanto, todas as partículas ocorrendo no setor de vácuo são bosônicas (i.e. têm spin inteiro) e neutras (i.e. são idênticas à suas anti-partículas) exatamente porque são definidas por uma representação irredutível do grupo de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow . Portanto, para descrever partículas fermiônicas e carregadas (necessariamente ocorrendo em setores de superseleção diferentes do setor de vácuo) temos que lidar com um sistema de campos locais (*definição 34*). No que segue, apresentaremos sucintamente a teoria do espalhamento de Haag-Ruelle no setor de vácuo da álgebra de observáveis. Contudo, quando o sistema de campos locais é covariante sob ação do recobrimento universal do grupo de Poincaré $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, existe uma adaptação da teoria de espalhamento e está definida sua estrutura modular - de fato, nesse caso são equivalentes a propriedade de covariância modular da rede de observáveis locais e propriedade de covariância modular do sistema de campos locais [80].² Para um tratamento completo da teoria do espalhamento de Haag-Ruelle dentro do formalismo da física quântica local vide [3, Chapter 5], [60], [62]; no contexto da teoria dos campos quantizados vide [14, Chapter 12], [97, Chapter VI] ou os artigos originais [83], [117]. Para uma demonstração da invariância-CPT da matriz de espalhamento vide [65].

Teoria do Espalhamento no Setor de Vácuo e Estrutura Modular

Considere $(\mathcal{R}, \mathcal{H}, U, \Omega)$ como sendo a representação de vácuo de uma rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$.

Condição 127 ('Gap' de Massa) *O espectro do operador de massa $M = \sqrt{P^2}$ satisfaz*

$$\text{Spect}(M) = \bigcup_{k=1}^n \{m_k\} \cup [\mu, \infty), \quad \text{com } m_k < \mu, \quad \forall k = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$$

Para cada $k = 1, \dots, n$ denotamos a projeção espectral de M correspondente a m_k por

$$E_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{h}_k$$

e assumimos que a restrição $u_k := U|_{\mathfrak{h}_k}$ seja irredutível. Então, definimos o espectro de partículas da teoria pelo conjunto dessas representações irredutíveis

$$\text{Espectro de Partículas} := \{(u_k, \mathfrak{h}_k) ; k = 1, \dots, n\} \quad (14.1)$$

²Na verdade, para desenvolver a teoria de espalhamento para campos carregados não é necessário construir um rede de álgebras de campos (twisted-)locais, mas apenas uma estrutura mais primitiva chamada de *fibrado dos campos* ('field bundle'), semelhante à construção apresentada no capítulo 8.2.

De acordo com a teoria de Wigner, as representações irredutíveis do grupo de Poincaré são caracterizadas pela *massa* e *spin*, donde temos

$$(u_k, \mathfrak{h}_k) \simeq (u_{(m_k, s_k)}, \mathfrak{h}_{(m_k, s_k)}) \text{ para algum } s_k \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n \quad (14.2)$$

onde ‘ \simeq ’ significa equivalência unitária. *Como estamos tratando de representações massivas de \mathcal{P}_+^\uparrow , aparecem apenas spins inteiros!*

Definimos o subespaço dos estados de uma partícula por

$$\mathcal{H}_{(1)} := \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{h}_k \simeq \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{h}_{(m_k, s_k)} \quad (14.3)$$

e a representação correspondente

$$U_{(1)} := U|_{\bigcup_{k=1}^n \mathfrak{h}_k} \simeq \bigoplus_{k=1}^n u_{(m_k, s_k)} \quad (14.4)$$

Construímos canonicamente o espaço de Fock associado à representação $(U_{(1)}, \mathcal{H}_{(1)})$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^{\otimes n} \\ \mathfrak{h}^0 &:= \mathbb{C}, \quad \mathfrak{h}^{\otimes n} := \text{expansão linear} \left\{ \underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n; f \in \mathcal{H}_{(1)} \right\}, n \geq 1 \end{aligned} \quad (14.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle e^\varphi, e^\psi \rangle = e^{\langle \varphi, \psi \rangle}, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_{(1)} \\ e^\varphi &:= \left(1, \varphi, \frac{1}{2!} (\varphi \otimes \varphi), \dots, \frac{1}{n!} \left(\underbrace{\varphi \otimes \dots \otimes \varphi}_n \right), \dots \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_{(1)} \end{aligned}$$

e a teoria livre associada

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}_0(\mathcal{O}) := \text{Weyl}(\mathfrak{h}_R(\mathcal{O})) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$$

onde $\{\mathfrak{h}_R(\mathcal{O}); \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ é o lattice de subespaços modulares em $(U_{(1)}, \mathcal{H}_{(1)})$, definido no capítulo (12).

A teoria do espalhamento mostra que (U_0, \mathcal{H}_0) é unitariamente equivalente a duas subrepresentações $(\mathcal{H}^{in/out}, U^{in/out})$ de (U, \mathcal{H}) , simbolicamente³

$$\mathcal{H}_0 \simeq \mathcal{H}^{in/out} \hookrightarrow \mathcal{H}, \quad U_0 \simeq U^{in/out} \hookrightarrow U$$

³Esse fato é o núcleo da teoria do espalhamento de Haag-Ruelle, e é obtido diretamente pela construção de *estados assintóticos* como limites em norma de certas famílias de estados indexados pela coordenada temporal. A hipótese de existência de ‘gap’ de massa assegura tanto a existência dessas famílias de estados quanto a convergência das mesmas quando o tempo tende ao infinito passado ou infinito futuro.

onde os sinais 'in' e 'out' simbolizam os dois *limites assintóticos* (no infinito passado ou infinito futuro) que definem tais subrepresentações.

A matriz de espalhamento é o operador unitário que implementa a equivalência unitária entre as subrepresentações $(\mathcal{H}^{in/out}, U^{in/out})$

$$S_{sc} : \mathcal{H}^{out} \rightarrow \mathcal{H}^{in} , \quad U^{in} = S_{sc} U^{out} S_{sc}^*$$

Condição 128 (Compleitude Assintótica) *A representação covariante do grupo de Poincaré no setor de vácuo é unitariamente equivalente à representação de Fock associada à subrepresentação dos estados de 1-partículas, i.e.*

$$(U, \mathcal{H}) \simeq (U_0, \mathcal{H}_0)$$

Nesse caso, temos que a matriz de espalhamento é um operador unitário do espaço de Hilbert da representação de vácuo

$$S_{sc} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

Assim, podemos considerar que as representações de vácuo (\mathcal{R}, U) (original) e (\mathcal{R}_0, U_0) (livre) agem no mesmo espaço de Hilbert \mathcal{H} e então estabelecer a correspondência entre suas estruturas modulares:

Teorema 129 (Operadores Modulares de Cunhas e Matriz-S) *Se a teoria original satisfaz covariância modular e tem uma matriz de espalhamento S_{sc} , então para toda cunha $W \in \mathcal{W}$ vale*

$$S_W = S_{sc} S_{0W} , \quad J_W = S_{sc} J_{0W} , \quad \Delta_W = \Delta_{0W}$$

Prova. *Pela covariância modular, temos*

$$\Delta_W = U(\Lambda_W(-\pi i)) = U_0(\Lambda_W(-\pi i)) = \Delta_{0W}$$

e pelo teorema (43) também temos

$$J_W = \Theta U(r'_W) = S_{sc} \Theta_0 U_0(r'_W) = S_{sc} J_{0W}$$

onde Θ e Θ_0 são respectivamente os operadores CPT das teorias original e livre, e satisfazem (também pela teoria do espalhamento)

$$\Theta = S_{sc} \Theta_0$$

Portanto,

$$S_W = J_W \Delta_W^{1/2} = S_{sc} J_{0W} \Delta_{0W} = S_{sc} S_{0W}$$

■

14.2 Geradores Livres de Polarização do Vácuo

Lembrando a notação do capítulo 2, considere $(\mathcal{R}, \mathcal{H}, U, \Omega)$ como sendo a representação de vácuo de uma teoria quântica local e $M = \sqrt{P^2}$ o operador de massa. Denotamos por \mathfrak{h}_m o auto-espaço de M associado a $m \in \text{Spect}(M)$ e por $E_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{h}_m$ a projeção ortogonal de \mathcal{H} sobre \mathfrak{h}_m . Para cada cunha $W \in \mathcal{W}$, denotamos por $(S_W, \mathcal{H}(W))$ o operador de Tomita do par $(\mathcal{R}(W), \Omega)$.

Definição 130 (Gerador Livre de Polarização do Vácuo - PFG) Dizemos que um operador fechado G em \mathcal{H} é um gerador livre de polarização do vácuo (PFG) para massa $m \in \text{Spect}(M)$ localizado na região cunha $W \subset \mathcal{W}$ quando ele satisfaz as seguintes condições:

- i) G é afiliado a $\mathcal{R}(W)$;
- ii) $\Omega \in \text{dom}(G)$ e $\Omega \in \text{dom}(G^*)$;
- iii) $G\Omega, G^*\Omega \in \mathfrak{h}_m$

Teorema 131 (Existência de PFG) Para todo $m \in \text{Spect}(M)$, toda cunha $W \in \mathcal{W}$ e todo estado $\phi \in E_m(\mathcal{H}(W))$, existe um PFG para massa m localizado em W , chamemos de G , tal que

$$G\Omega = \phi, \quad G^*\Omega = S_W\phi$$

Definição 132 (PFG Temperado) Um gerador livre de polarização G é dito ser temperado se os domínios de G e G^* possuem um subespaço denso D invariante sob ação das translações e tal que para todo vetor $\Psi \in D$ as funções $x \rightarrow GU(x)\Psi$ e $x \rightarrow G^*U(x)\Psi$ são fortemente contínuas e polinomialmente limitadas em norma.

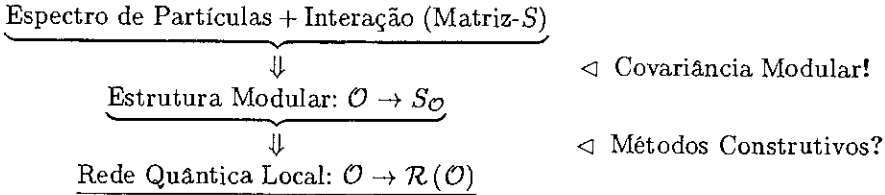
Um PFG temperado admite o uso de técnicas da teoria espectral e também a definição de sua transformada de Fourier, o que torna esses operadores semelhantes a campos quantizados livres. As consequências dessas semelhanças são mais importantes do que a ocorrência de meras analogias:

Teorema 133 (Borchers-Buchholz-Schroer, [21]) Se numa teoria quântica local em espaço-tempo de dimensão $d > 2$ descrevendo uma partícula escalar massiva existe um gerador livre de polarização do vácuo temperado, então a teoria é livre.

Se numa teoria quântica local em espaço-tempo de dimensão $d = 2$ existe um gerador livre de polarização temperado, então não há produção de partículas nos processos de espalhamento.

14.3 Métodos Construtivos

A essência dos métodos modulares de construção de modelos de teoria quântica local consiste em (tentar) definir a rede quântica local a partir de sua estrutura modular, que por sua vez está completamente definida pelos dados de espalhamento. Esquemáticamente:



Imaginamos três abordagens bastante distintas para conseguir tais métodos construtivos, chamados de *Método Modular Espacial*, *Método Modular Holográfico* e o *Método PFG*.

14.3.1 O Método Modular Espacial

Connes em [49] estabeleceu condições para relacionar a teoria modular espacial com a teoria modular de Tomita-Takesaki, mostrando quando aquela se origina de uma álgebra de von Neumann padrão. Ainda são meramente preliminares as pesquisas sobre a aplicação dos resultados de Connes no desenvolvimento de um método de construção de modelos de teoria quântica local, pois seus critérios são de difícil verificação e têm carecido de interpretação física na teoria quântica local.

14.3.2 O Método Modular Holográfico

Considere uma rede quântica local $(\mathcal{A}, \alpha, \mathfrak{A})$ sobre o espaço de Minkowski bidimensional. Podemos definir uma rede quântica local sobre \mathbb{R} da seguinte maneira, chamada “projeção holográfica”:

1) Fixamos uma cunha $W = W(l_+, l_-) \in \mathcal{W}$ cujo eixo contém a origem ($l_+ \in W \cap \partial V^+$ e $l_- \in W \cap \partial V^-$ são vetores tipo-luz no bordo da cunha, *definição 10*) e definimos:

$$R^+ := W \cap \partial V^+, \quad R^- := -R^+, \quad R := R^+ \cup \{0\} \cup R^-$$

2) Verificamos que R é trivialmente (topologicamente) isomorfo à \mathbb{R}

$$\mathbb{R} \ni a \leftrightarrow al_+ \in R$$

donde a classe dos ‘intervalos’ \mathcal{I}_R de R está em correspondência binívoca com a classe dos intervalos \mathcal{I} de \mathbb{R}

$$\mathbb{R} \ni (a, b) \leftrightarrow I_{(a,b)} := \{sl_+ ; s \in (a, b)\} \in \mathcal{I}$$

3) Definimos a rede de álgebras locais sobre \mathbb{R}

$$\mathcal{I} \ni (a, b) \rightarrow \mathcal{A}_{Hol}(a, b) := \mathcal{A}(W + al_+) \cap \mathcal{A}(W + bl_+)'$$

e a álgebra universal pelo limite C^* -indutivo das álgebras locais

$$\mathfrak{A}_{Hol} := \overline{\bigcup_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_{Hol}(I)} \subset \mathfrak{A}$$

(trivialmente verificamos validade das propriedades de isotonia e localidade).

4) Definimos o grupo de transformações que preservam R :

$$G_{Hol} := \left\{ g \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger ; gR \subset R \right\}$$

Verificamos que este grupo contém os subgrupos dos W -boosts e das translações tipo-luz ao longo de R :

$$G_{Hol} \supset \{ \Lambda_W(s) ; s \in \mathbb{R} \} \cup \{ T(al_+) ; a \in \mathbb{R} \}$$

onde temos denotado o subgrupo das translações espaço-temporais por $\{ T(x) ; x \in \mathcal{M}^{1,1} \}$.

5) Definimos a ação de G_{Hol} sobre a rede \mathcal{A}_{Hol} pela restrição da ação α :

$$G_{Hol} \ni g \rightarrow \alpha_{Hol}(g) := \alpha(g)|_{\mathfrak{A}_{Hol}}$$

6) Verificamos que $(\mathcal{A}_{Hol}, \alpha_{Hol}, \mathfrak{A}_{Hol})$ é uma rede quântica local com grupo de simetria “espaço-temporal” $G_{Hol} \subset \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$, contendo dois subgrupos 1-parâmetro abelianos. Esperamos que sob condições apropriadas, essa projeção holográfica defina uma *rede quiral local sobre \mathbb{R}* .

A idéia essencial da *construção modular holográfica* consiste em realizar o caminho inverso desta *projeção holográfica*. Ainda estamos na expectativa de desenvolvimentos significativos no assunto, mas vários resultados positivos já foram alcançados.

14.3.3 Método PFG

O *teorema 133* restringe às teorias integráveis massivas bidimensionais o uso das técnicas de análise de Fourier na construção de modelos de teoria quântica local com interação por analogia ao caso livre. Nesse caso, a abordagem construtiva modular pode ser entendida como uma formulação algébrica do “programa bootstrap” para construir teorias quânticas de campos de Wightman (apresentado abaixo). Exatamente por recorrer a propriedades exclusivas dos

modelos integráveis bidimensionais, o programa bootstrap está restrito ao contexto particular desses modelos; sendo que mesmo ocorre com a abordagem algébrico-modular, na medida em que esta se baseia no uso de PFG's temperados. Contudo, acreditamos que descobertas feitas aqui podem ser extendidas para situações mais gerais se as mesmas puderem ser expressas em termos puramente algébricos; nesse caso, mais do que um mero passatempo de teóricos, nossa análise cumpriria, pelo menos, o papel didático de oferecer indicações para a solução do problema geral de desenvolver métodos construtivos de teoria quântica local.

Teorias Integráveis Massivas Bidimensionais

Modelos massivos integráveis no espaço-tempo bidimensional são caracterizados por apresentar as seguintes propriedades⁴:

Integrabilidade.1) Ausência de produção de partículas nos processos de colisão;

Integrabilidade.2) Preservação do conjunto dos momenta inicial e final nos processos de colisão;

Integrabilidade.3) Fatorizabilidade, ou seja, a matriz de espalhamento se fatoriza no produto de amplitudes de espalhamento de duas partículas.

Estas condições são extremamente restritivas, de modo que *em princípio* permitem determinar a matriz de espalhamento, sob a hipótese de *analiticidade máxima*, a partir do conhecimento do *espectro de partículas*, das *equações de Yang-Baxter* e das propriedades características das matrizes de espalhamento, as quais são a *invariância de Lorentz*, a *unitariedade* e a *simetria de cruzamento*.

Denotamos a amplitude de espalhamento para n partículas iniciais com números quânticos a_1, \dots, a_n e momenta $p_1^{in}, \dots, p_n^{in}$ e \tilde{n} partículas finais com números quânticos $b_1, \dots, b_{\tilde{n}}$ e momenta $p_1^{out}, \dots, p_{\tilde{n}}^{out}$ por

$$S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_{\tilde{n}}} (p_1^{in}, \dots, p_n^{in}; p_1^{out}, \dots, p_{\tilde{n}}^{out}) \quad (14.6)$$

Para o caso em temos $n = \tilde{n}$, $p_k^{in} = p_k^{out} = p_k$ ($k = 1, \dots, n$) escrevemos

$$S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (p_1, \dots, p_n) := S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (p_1, \dots, p_n; p_1, \dots, p_n) \quad (14.7)$$

e se além disso, temos $a_k = b_k$ ($k = 1, \dots, n$) escrevemos

$$S_{a_1 \dots a_n} (p_1, \dots, p_n) := S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (p_1, \dots, p_n) \quad (14.8)$$

⁴Para uma dedução dessas propriedades em teorias bidimensionais puramente massivas a partir da hipótese de existência de uma infinidade de quantidades conservadas, vide [1, Section 2.2.3].

Assim, as condições de integrabilidade podem ser escritas da maneira seguinte - ficando implícito o fato dos pares de partículas a_k e b_k ($k = 1, \dots, n$) pertencerem ao mesmo multipletto de massa:

$$S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (p_1^{in}, \dots, p_n^{in}; p_1^{out}, \dots, p_n^{out}) \propto \delta_{nm} \prod_{i=1}^n \delta(p_{a_i} - p_{b_i}) \quad (14.9)$$

$$S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (p_{a_1}, \dots, p_{a_n}) = \prod_{i < j, l < k} S_{a_i a_j}^{b_k b_l} (p_i, p_j)$$

No caso em que não há degenerescência de massa, i.e. cada multipletto de massa contém apenas um único tipo de partícula, então a conservação dos momenta individuais implica que a matriz de espalhamento é diagonal:

$$S_{a_i a_j}^{b_k b_l} (p_i, p_j) = \delta_{ik} \delta_{jl} S_{i,j} (p_i, p_j) \quad (14.10)$$

No caso das teorias integráveis bidimensionais é conveniente parametrizar os momenta por *coordenadas de rapididade*:

$$p \in \mathcal{M}^2, p^2 = m^2 \Rightarrow p = p(\theta) = m(\cosh \theta, \sinh \theta), \theta \in \mathbb{R}$$

Assim, a matriz- S de n -partículas pode ser escrita em função das rapididades dos momenta:

$$S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (p_1, \dots, p_n) = S_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n} (\theta_1, \dots, \theta_n), p_i = p(\theta_i), i = 1, \dots, n$$

e a matriz- S de duas partículas pode ser escrita em função da *diferença de rapididades*

$$S_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} (p_1, p_2) = S_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} (\theta_1 - \theta_2), p_i = p(\theta_i) i = 1, 2$$

em vista das identidades

$$(p_1 \pm p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 \pm 2m_1 m_2 \cosh(\theta_1 - \theta_2)$$

As Equações de Yang-Baxter

Em geral, as matrizes de espalhamento de 2-partículas não comutam entre si, donde a necessidade do ordenamento correto na fatorização dada pela equação (14.9). Entretanto, as simetrias características dos modelos integráveis bidimensionais implicam que a matriz de espalhamento permanece invariante sob certas permutações de tais fatores, gerando as chamadas *equações de Yang-Baxter*. Para o caso da matriz de espalhamento de 3-partículas temos uma única equação de Yang-Baxter, a saber

$$S_{123} = S_{12} S_{13} S_{23} = S_{23} S_{13} S_{12}$$

A Hipótese de Analiticidade Máxima

A hipótese de analiticidade máxima consiste na seguinte afirmação sobre as extensões analíticas das matrizes de espalhamento de 2-partículas:

‘Para cada dois pares de partículas (a_1, b_1) e (a_2, b_2) no mesmo multipletto de massa (no caso de não haver degenerescência de massa, temos necessariamente $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$) a função

$$\theta_{1,2} := |\theta_1 - \theta_2| \rightarrow S_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}(\theta_{1,2})$$

é meromorfa na *faixa física*

$$st[0, \pi] := \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \Im(z) \leq \pi\}$$

com seus polos simples correspondendo a estados ligados das partículas primárias.’

O Programa Bootstrap

O programa bootstrap para construir teorias quânticas de campos de Wightman consta de três partes [6]:

1) Determinar a *matrix-S* a partir de suas propriedades gerais (unitariedade, simetria de cruzamento, invariância de Poincaré), das condições de integrabilidade (fatorizabilidade e equações de Yang-Baxter) e do espectro de partículas (dado pela representação covariante do grupo de Poincaré), sob a hipótese de analiticidade máxima.

2) Calcular a partir da *matrix-S* os *fatores de forma generalizados*, que são elementos de matriz de operadores locais ψ entre estados assintóticos

$${}^{out} \langle p'_n, \dots, p'_1 | \psi(x) | p_1, \dots, p_n \rangle^{in}$$

Isso significa resolver certo conjunto de equações dadas pelo formalismo LSZ sob a hipótese de analiticidade máxima.

3) Calcular as *funções de Wightman* a partir dos fatores de forma generalizados. Em princípio, estas funções determinariam uma única teoria de Wightman (*teorema 48*).

Fatores de Forma Generalizados

Os fatores de forma generalizados de um campo local $\psi(x)$ são definidos por

$$\psi_{\underline{a}}(\underline{\theta}) = \psi_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) := \begin{cases} \langle 0 | \psi(0) | p_1, \dots, p_n \rangle_{a_1 \dots a_n}^{in} & \text{se } \theta_1 > \dots > \theta_n \\ \text{via continuação analítica para outras rapididades} \end{cases}$$

onde $|0\rangle$ denota o estado de vácuo da teoria.

O formalismo LSZ e a hipótese de analiticidade máxima implicam no seguinte conjunto de equações para os fatores de forma [129], [5]:

ii) Invariância de Lorentz

$$\psi_{a_1 \dots a_n}(\theta_1 + \theta, \dots, \theta_n + \theta) = e^{s\theta} \psi_{a_1 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) \quad \text{onde } s \text{ é o spin de } \psi$$

iii) Simetria de Cruzamento

$$\psi_{a_1 a_2 \dots a_n}(\theta_1 + i\pi, \theta_2, \dots, \theta_n) = \psi_{a_2 \dots a_n a_1}(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 - i\pi)$$

iv) Equações de Watson

$$\psi_{\dots i j \dots}(\dots, \theta_i, \theta_j, \dots) = \psi_{\dots j i \dots}(\dots, \theta_j, \theta_i, \dots) S_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$

v) Relações de Recorrência

$$Res_{\theta_{12}=i\pi} \psi_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = 2i C_{12} \psi_{a_3 \dots a_n}(\theta_3, \dots, \theta_n) (1 - S_{a_2 a_n} \dots S_{a_2 a_3})$$

onde C_{12} é a matriz de conjugação de carga

vi) Equações dos Estados Ligados

$$Res_{\theta_{12}=i\alpha} \psi_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \psi_{a_{(12)} a_3 \dots a_n}(\theta_{12}, \theta'_3, \dots, \theta'_n) \sqrt{2} \Gamma_{a_1 a_2}^{\alpha(12)}$$

onde α é o ângulo de fusão

O chamado *Ansatz de Bethe "off shell"* fornece um método que permite resolver essas equações em geral. Esse ansatz é dado por

$$\psi_{\underline{a}}(\underline{\theta}) = \int_{C_{\underline{z}}} dz_1 \dots \int_{C_{\underline{z}}} dz_k h(\underline{\theta}, \underline{z}) p^\psi(\underline{\theta}, \underline{z}) \Psi_{\underline{a}}(\underline{\theta}, \underline{z})$$

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n), \quad \underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n), \quad \underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$$

onde $k = (n - q)/2$ depende do número n de partículas e da carga q do operador $\psi_{\underline{a}}$; $h(\underline{\theta}, \underline{z})$ é uma função completamente determinada pela matriz- S ; $\Psi_{\underline{a}}$ é chamado de *covetor de estado do Ansatz de Bethe "off shell"*, também completamente determinado para cada teoria; e $p_n^\psi(\underline{\theta}, \underline{z})$ são funções escalares satisfazendo um conjunto de equações equivalentes às equações (i)-(vi) acima.

De fato, o programa bootstrap tem obtido sucesso no cálculo dos fatores de forma de uma série de modelos, tais como o modelo de *sine-Gordon Homogêneos* [2].

Construção Modular

Agora, definiremos um algoritmo para construir a teoria quântica local para o sistema de partículas do tipo escalar massiva auto-conjugada no espaço-tempo bidimensional (com interação não-trivial), por analogia ao caso livre, inspirado no programa bootstrap dos fatores de forma. Iniciamos com algumas considerações gerais.

Traçando Paralelos com a Teoria Livre

Considere Φ como sendo um campo quantizado definido sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} , covariante com respeito à uma representação U do grupo de Poincaré. Como vimos no capítulo 5, sob certas condições naturais, esta teoria quântica

de campos define a representação de vácuo \mathcal{R} de uma rede quântica local da maneira seguinte:

$$\mathcal{K} \ni \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O}) := \{\Phi(f) ; f \in \mathcal{S}(\mathcal{M}), \text{supp}(f) \subset \mathcal{O}\}'' \quad (14.11)$$

onde $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ é o espaço de Schwartz das funções teste.

A expressão geral para um campo livre Φ_0 de spin $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ é dada por

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_3=-s}^s \int_{\Gamma_m^+} d\mu(p) \{u(x, p, s_3) e^{-ip \cdot x} a(p) + v(x, p, s_3) e^{ip \cdot x} a^*(p)\}$$

onde Γ_m^+ é o hiperbolóide de massa e $d\mu(p)$ a correspondente medida Lorentz-invariante

$$d\mu(p) = \frac{dp^1}{\sqrt{2p^0}}, \quad p^0 = \sqrt{m^2 + (p^1)^2}$$

$u(x, p, s_3)$ e $v(x, p, s_3)$ são os chamados "intertwiners" (que implementam a covariância do campo) e $a^*(p)$ e $a(p)$ são respectivamente os operadores de criação e aniquilação de partícula, caracterizados pelas relações canônicas de comutação

$$\begin{cases} a(p_1) a(p_2) = a(p_2) a(p_1) \\ a^*(p_1) a^*(p_2) = a^*(p_2) a^*(p_1) \\ a(p_1) a^*(p_2) = a^*(p_2) a(p_1) + \delta(p_1 - p_2) \end{cases}$$

Além disso, o espaço de Hilbert dos estados é expandido pela base

$$a^*(p_1) \dots a^*(p_n) \Omega, \quad p_k \in \Gamma_m^+, \quad n \in \mathbb{N}$$

e vale

$$a(p) \Omega = 0, \quad p \in \Gamma_m^+$$

As relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação dizem que criar e aniquilar partículas livres são operações que não comutam por um fator escalar. Se consideramos que a propriedade característica das teorias livres são tais relações de comutação, podemos imaginar que numa teoria com interação as operações de criar e aniquilar partículas apresentem relações de comutação mais complicadas. Assim, esperando generalizar as relações canônicas de comutação, consideramos que $Z^*(p)$ e $Z(p)$ são os operadores de criação e aniquilação de uma partícula com momentum p num modelo de teoria quântica de campos com interação, e escrevemos suas relações de comutação da seguinte forma:

$$\begin{cases} Z(p_1) Z(p_2) = S_{(-)}(p_1, p_2) Z(p_2) Z(p_1) \\ Z^*(p_1) Z^*(p_2) = S_{(+)}(p_1, p_2) Z^*(p_2) Z^*(p_1) \\ Z(p_1) Z^*(p_2) = S_{(\mp)}(p_1, p_2) Z^*(p_2) Z(p_1) + \delta(p_1 - p_2) \end{cases}$$

onde $S_{(-)}$, $S_{(+)}$ e $S_{(\pm)}$ são funções tomando valores em operadores que dependem de pares de momenta (p_1, p_2) , e devem ser características de cada modelo em particular. Analogamente ao caso livre, o espaço de Hilbert dos estados deve ser expandido pelo conjunto de estados do tipo

$$Z^*(p_1) \dots Z^*(p_n) \Omega, \quad p_k \in \Gamma_m^+, \quad n \in \mathbb{N}$$

valendo também que

$$Z(p) \Omega = 0, \quad p \in \Gamma_m^+$$

Além de introduzir algumas simplificações, somos forçados a particularizar nossa análise para o caso dos modelos integráveis massivos bidimensionais, já que o *teorema 133* mostra que não há possibilidade dessas idéias serem justificadas fora desse contexto.

O Modelo Escalar Auto-dual e a Álgebra de Zamolodchikov-Fadeev

Agora, assumimos que as relações de comutação acima dependem apenas das diferenças de momenta e que os operadores característicos $S_{(\pm)}$ são fases satisfazendo as relações

$$S = S_{(-)} = S_{(+)} = S_{(\mp)}^{-1}$$

Nesse caso, expressando os momenta em termos das *coordenadas rapididade*

$$p = p(\theta) = m (\cosh(\theta), \sinh(\theta)), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

obtemos a chamada álgebra de Zamolodchikov-Fadeev

$$\begin{aligned} Z(\theta_1) Z(\theta_2) &= S(\theta_1 - \theta_2) Z(p_2) Z(p_1) \\ Z^*(\theta_1) Z^*(\theta_2) &= S(\theta_1 - \theta_2) Z^*(\theta_2) Z^*(\theta_1) \\ Z(\theta_1) Z^*(\theta_2) &= S(\theta_1 - \theta_2)^{-1} Z^*(\theta_2) Z(\theta_1) + m^2 \delta(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (14.12)$$

Na álgebra-C* gerada pelos operadores de Zamolodchikov-Fadeev, definimos formalmente o campo covariante

$$\mathcal{M} \ni x \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} d\theta \left\{ Z(\theta) e^{-ip(\theta) \cdot x} + Z^*(\theta) e^{ip(\theta) \cdot x} \right\} =: \frac{1}{\sqrt{2}} \int_C d\theta Z(\theta) e^{-ip(\theta)} \quad (14.13)$$

onde temos introduzido as seguintes convenções

$$C := \mathbb{R} \cup -i\mathbb{R}, \quad Z(\theta - i\pi) := Z^*(\theta), \quad p(\theta - i\pi) := -p(\theta) \quad (14.14)$$

Esperamos que os campos $\Phi(f)$ espalhados por funções teste $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ sejam PFG's temperados, localizados em regiões cunha, conforme o *teorema*

131. Nessa expectativa, definimos as álgebras de observáveis localizadas em regiões cunha como no caso livre:

$$\mathcal{R}(W) := \{\Phi(f); S(\mathcal{M}), \text{supp}(f) \subset W\}'' \quad (14.15)$$

Mas definimos as álgebras de observáveis localizadas em regiões limitadas pela interseção de álgebras de observáveis localizadas em regiões cunha

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) := \bigcap_{\mathcal{O} \subset W \in \mathcal{W}} \mathcal{R}(W) \quad , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \quad (14.16)$$

Finalmente, definimos o que podemos chamar de *programa bootstrap algébrico (PBA)* pelas seguintes tarefas:

PBA.1) Deduzir as propriedades necessárias da função $S(\theta)$ para que 14.12 defina uma *-álgebra, e 14.15-14.16 definam uma rede quântica local.

PBA.2) Provar que as propriedades de $S(\theta)$ encontradas em **PBA.1** são suficientes para que a correspondência $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{O})$ seja de fato uma rede quântica local.

PBA.3.) Verificar a expectativa de que $S(\theta)$ é a matriz de espalhamento de duas partículas do modelo construído.

Até agora, apenas a tarefa **PBA.1** foi desenvolvida, conforme passamos a descrever sucintamente.

Primeiramente, obtemos uma realização concreta dos operadores de Zamolodchikov-Faddeev no espaço de Fock \mathcal{H} do campo escalar auto-dual livre Φ_0 :

$$Z^*(\theta)a^*(\theta_1)\dots a^*(\theta_n)\Omega := \begin{cases} a^*(\theta)a^*(\theta_1)\dots a^*(\theta_n)\Omega \quad , \quad \theta > \theta_1 > \dots > \theta_n \\ \text{via relações 14.12 para outras situações} \end{cases}$$

$$Z(\theta) := \text{conjugado hermitiano de } Z(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Naturalmente, consideramos a representação covariante U do grupo de Poincaré da teoria livre agindo sobre a rede formal \mathcal{R} , definida no espaço de Fock. Disso obtemos que o vetor $\Omega \in \mathcal{H}$ que define o estado de vácuo da teoria livre também define o estado de vácuo da rede formal \mathcal{R} . Nesse caso, assumindo que a propriedade de covariância modular é satisfeita, temos pelo *teorema 129*:

$$J_W = S_{sc} J_{0W} \quad , \quad \Delta_W^{it} = \Delta_{0W}^{it} = U(\Lambda_W(-2\pi t))$$

onde S_{sc} deve ser a matriz de espalhamento da rede formal \mathcal{R} .

Da exigência de que a teoria seja local e satisfaça a condição KMS, obtemos a relação formal

$$J_W \mathcal{R}(W) J_W \subset \mathcal{R}(W)' \quad (14.17)$$

Da caracterização do grupo modular pela propriedade KMS também temos:

$$adU(\Lambda_W(-2\pi t)) \text{ satisfaz a KMS w.r.t. } (\mathcal{R}(W), \Omega) \quad (14.18)$$

Proposição 134 *A condição (14.18) implica que a função $S(\theta)$ deve satisfazer a simetria de cruzamento*

$$S(\theta) = S(i\pi - \theta) \quad , \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

A partir daqui, escrevemos os operadores localizados em regiões limitadas do espaço-tempo em termos de uma série formal infinita de produtos de Wick de operadores de Zamolodchikov-Faddeev espalhados por funções meromorfas na faixa $st(-i\pi, 0)$ (utilizamos as convenções (14.14))

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \int_C \dots \int_C a_n(\theta_n, \dots, \theta_1) : Z(\theta_1) \dots Z(\theta_n) : d\theta_1 \dots d\theta_n$$

Esperamos que os coeficientes $a_n(\theta_n, \dots, \theta_1)$ sejam os fatores de forma da teoria, satisfazendo as propriedades assumidas pelo programa bootstrap; em particular, eles devem satisfazer as seguintes condições de contorno

$$a_{n+2}(\theta + i\pi + i\varepsilon, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n) \simeq \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \prod_{i=1}^n S_{sc}(\theta - \theta_i) \right] a_n(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

Aqui terminamos dizendo que os resultados parciais concordam com nossas expectativas, mas que as conclusões definitivas dessas idéias aguardam pesquisas futuras.

Appendix A

$SL(2, \mathbb{C})$ e Representações

O grupo de Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow é o subgrupo conexo das isometrias lineares do espaço de Minkowski

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{ \Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \text{ linear} / g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\alpha} \Lambda^{\nu\beta} g_{\alpha\beta}, \det \Lambda = 1, \Lambda^{00} > 0 \} \quad (\text{A.1})$$

O grupo de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow é a parte conexa do grupo das isometrias do espaço de Minkowski, sendo portanto dado pelo produto semi-direto do grupo das translações \mathbb{R}^4 pelo grupo de Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow

$$\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \otimes \mathcal{L}_+^\uparrow, (a_1, \Lambda_1) \cdot (a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \quad (\text{A.2})$$

O grupo de Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow é conexo mas não simplesmente conexo; seu recobrimento universal é

$$SL(2, \mathbb{C}) := \{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) ; \det A = 1 \} \quad (\text{A.3})$$

com a aplicação de recobrimento dada por

$$\gamma : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow \text{ definido pela regra: } \widehat{\gamma(A)} x := A \hat{x} A^* \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{A.4})$$

onde¹

$$\widehat{\cdot} : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \hat{x} := \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

Como o grupo das translações espaço-temporais é simplesmente conexo, temos que o recobrimento universal do grupo de Poincaré é dado por

$$\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \otimes SL(2, \mathbb{C}) \quad (\text{A.5})$$

¹Que γ é de fato a aplicação de recobrimento, segue-se da identidade

$$\det(\hat{x}\hat{y}) = x \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{R}^4$$

com aplicação de recobrimento (usando o mesmo símbolo γ)

$$\gamma : \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \rightarrow \mathcal{P}_+^\dagger, \quad \gamma(a, A) = (a, \gamma(A)) \quad (\text{A.6})$$

Notamos que o recobrimento universal do grupo de Poincaré tem grau dois,

$$\gamma^{-1}(\Lambda) = \{ \tilde{\Lambda}, -\tilde{\Lambda} \}, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{P}_+^\dagger$$

Notação 135 Os elementos de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ são sinalizados com um acento ‘ \sim ’, indicando sua imagem em \mathcal{P}_+^\dagger pela aplicação de recobrimento

$$\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger \ni \tilde{g} \rightarrow \gamma(\tilde{g}) = g \in \mathcal{P}_+^\dagger$$

Para todo $g \in \mathcal{P}_+^\dagger$, um $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ está determinado a menos de um sinal.

O grupo de Poincaré próprio \mathcal{P}_+ é o subgrupo das isometrias do espaço de Minkowski que preserva a orientação; é dado por

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_+^\dagger \dot{\cup} r \mathcal{P}_+^\dagger = \mathcal{P}_+^\dagger \dot{\cup} r_1 \mathcal{P}_+^\dagger$$

onde²

$$r : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad r(x) = -x$$

$$r_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad r_1(x) = (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$$

Para o caso do recobrimento do grupo de Poincaré, definimos $\tilde{\mathcal{P}}_+$ como sendo uma extensão central de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$ com respeito ao grupo $\mathbb{Z}_2 \simeq \{1, r\} \simeq \{1, r_1\}$, realizado por endomorfismos de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$:

$$r \rightsquigarrow \theta, \quad \theta(a, \tilde{\Lambda}) := (-a,)$$

$$r_1 \rightsquigarrow j, \quad j(a, \tilde{\Lambda}) := (r_1 a, \sigma_1 \tilde{\Lambda} \sigma_1)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_+ := \mathbb{Z}_2 \otimes \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger, \quad \epsilon : \tilde{\mathcal{P}}_+ \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_+^\dagger$$

A.1 Representações e Spinores

Em geral, *espinores* “são quantidades que se transformam de acordo com representações irredutíveis de $SL(2, \mathbb{C})$ ”. As representações de $SL(2, \mathbb{C})$ são classificadas em dois grupos, conforme seu centro $\{-I, I\}$ seja representado trivialmente ou não: uma representação u de $SL(2, \mathbb{C})$ é chamada *representação bosônica* se o centro $\{I, -I\}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ é trivialmente representado, e é chamada

²A reflexão na origem só preserva a orientação em espaço-tempo de dimensão par.

representação fermiônica no caso contrário. Essa distinção deve-se ao fato de que o recobrimento universal do grupo de Lorentz ter grau dois. Portanto, definimos

representação bosônica (“one valued”): $u(I) = u(-I)$
 representação fermiônica (“two valued”): $u(I) \neq u(-I)$

Proposição 136 *Qualquer representação $u_0 : \mathcal{L}_+^\dagger \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ do grupo de Lorentz possuiu induz uma representações de $SL(2, \mathbb{C})$ via aplicação de recobrimento, i.e.*

$$u := u_0 \circ \gamma : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$$

Inversamente, uma representação $u : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ induz uma representação do grupo de Lorentz via aplicação de recobrimento $u := u \circ \gamma$ se e somente se $u(-I) = u(I)$.

Prova. A primeira afirmação é trivial, e a segunda afirmação segue-se do isomorfismo

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{I, -I\}} \simeq_\gamma \mathcal{L}_+^\dagger$$

■

No que segue, apresentamos todas as representações espinoriais de $SL(2, \mathbb{C})$ com dimensão finita.

A.1.1 Representações Irredutíveis de $SL(2, \mathbb{C})$

Para cada $j, k \in \mathbb{N}$ nós definimos o espaço de Hilbert

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{(j/2, k/2)} &:= \text{simétrico} \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_j \oplus \text{simétrico} \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_k \quad (\text{A.7}) \\ &= \text{expansão linear} \left\{ \underbrace{\eta \otimes \dots \otimes \eta}_j \oplus \underbrace{\dot{\eta} \otimes \dots \otimes \dot{\eta}}_k; \eta, \dot{\eta} \in \mathbb{C}^2 \right\} \\ &= \left\{ \xi_{(\alpha)(\dot{\beta})} = \left(\xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_j \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_k} \in \mathbb{C}; \alpha_{j_i}, \dot{\beta}_{k_i} = 1, 2 \right) \right. \\ &\quad \left. \text{totalmente simétrico nos } \alpha\text{'s e nos } \beta\text{'s} \right\} \end{aligned}$$

$$(\cdot, \cdot) : \mathfrak{h}_{(j/2, k/2)} \times \mathfrak{h}_{(j/2, k/2)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \left(\xi_{(\alpha)(\dot{\beta})}, \xi'_{(\alpha)(\dot{\beta})} \right) := \sum_{(\alpha)(\dot{\beta})} \bar{\xi}_{\alpha_1 \dots \alpha_j} \xi_{\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)} : SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h}_{(j/2, k/2)}) \\ \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}(A) (\eta \otimes \dots \otimes \eta \oplus \dot{\eta} \otimes \dots \otimes \dot{\eta}) &:= (A\eta \otimes \dots \otimes A\eta \oplus \bar{A}\dot{\eta} \otimes \dots \otimes \bar{A}\dot{\eta}) \\ \text{or} \\ \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}(A) \xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_j; \beta_1, \dots, \beta_k} &:= \sum_{(\mu)(\nu)} A_{\alpha_1 \mu_1} \dots A_{\alpha_j \mu_j} \bar{A}_{\beta_1 \nu_1} \bar{A}_{\beta_k \nu_k} \xi_{\mu_1, \dots, \mu_j; \nu_1, \dots, \nu_k} \end{aligned}$$

??

Teorema 137 *Toda representação irredutível de $SL(2, \mathbb{C})$ é unitariamente equivalente a $(\mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}, \mathfrak{h}_{(j/2, k/2)})$ para algum $j, k \in \mathbb{N}$.*

Observação 138 *Note que $\mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}(-I) = (-1)^{j+k} \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}(I)$. Portanto, a representação $\mathfrak{d}_{(j, k)}$ é bosônica ou fermiônica se $(j+k)$ é par ou ímpar, respectivamente.*

Para $j, k \in \mathbb{N}$, dizemos que as representações $(\mathfrak{h}_{(k/2, j/2)}, \mathfrak{d}_{(k/2, j/2)})$ e $(\mathfrak{h}_{(j/2, k/2)}, \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)})$ são conjugadas (complexas), desde que

$$\mathfrak{d}_{(k/2, j/2)}(A) \simeq \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}(\bar{A}), \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{C})$$

Portanto, nós escrevemos

$$\mathfrak{h}_{(k/2, j/2)} = \bar{\mathfrak{h}}_{(j/2, k/2)}, \quad \mathfrak{d}_{(k/2, j/2)} = \bar{\mathfrak{d}}_{(j/2, k/2)}$$

Observação 139 *Uma representação \mathfrak{d} e sua conjugada $\bar{\mathfrak{d}}$ são em geral inequivalentes, embora estejam relacionadas conforme acima.*

Mencionamos que, as representações (chamadas contragredientes)

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) \ni A &\rightarrow \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}(A^T)^{-1} \\ SL(2, \mathbb{C}) \ni A &\rightarrow \bar{\mathfrak{d}}_{(j/2, k/2)}(A^T)^{-1} \end{aligned}$$

são equivalentes às representações $\mathfrak{d}_{(j/2, k/2)}$ e $\bar{\mathfrak{d}}_{(j/2, k/2)}$, respectivamente, com a equivalência dada pela matriz

$$\zeta = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Isso decorre da identidade

$$(A^T)^{-1} = \zeta A \zeta^{-1}, \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{C})$$

Representações conjugadas podem ser compostas, no que podemos chamar de representações-dobradas

$$\mathfrak{H}_{(j, k)} := \mathfrak{h}_{(j/2, k/2)} \otimes \bar{\mathfrak{h}}_{(j/2, k/2)} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix}; \xi_{(\alpha)(\beta)} \in \mathfrak{h}, \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \in \bar{\mathfrak{h}} \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$(\cdot) : \mathfrak{H}_{(j/2, k/2)} \times \mathfrak{H}_{(j/2, k/2)} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{A.10})$$

$$\left(\begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi'_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta'_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} \right) := \left(\xi_{(\alpha)(\beta)}, \xi'_{(\alpha)(\beta)} \right) + \left(\eta_{(\beta)(\dot{\alpha})}, \eta'_{(\beta)(\dot{\alpha})} \right)$$

$$\mathcal{D}_{(j/2, k/2)} := \mathfrak{d}_{(j/2, k/2)} \otimes \bar{\mathfrak{d}}_{(j/2, k/2)} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{D}(A) \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathfrak{d}(A) \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \bar{\mathfrak{d}}(A) \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix}$$

Em representações-dobradas $(\mathfrak{H}, \mathcal{D})$, as operações de *paridade* \mathbf{P} e *reflexão-temporal* \mathbf{T} podem ser linearmente representadas por operadores $\mathcal{D}(\mathbf{P})$ e $\mathcal{D}(\mathbf{T})$ satisfazendo as relações de comutação do grupo de Poncaré completo \mathcal{P} ; também um *operador de conjugação de carga* $\mathcal{D}(\mathbf{C})$ pode ser definido de modo que comute com todas as transformações de $SL(2, \mathbb{C})$. Essas representações são únicas módulo fase. Pondo

$$\zeta_{(j, k)} := \underbrace{\zeta \otimes \dots \otimes \zeta}_j \oplus \underbrace{\zeta \otimes \dots \otimes \zeta}_k \quad \text{onde } \zeta := i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

nós definimos³

$$\mathcal{D}(\mathbf{P}) : \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} \rightarrow i^{(j+k) \bmod 2} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^j \zeta_{(j, k)} \\ (-1)^k \zeta_{(j, k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{T}) : \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_{(j, k)} & 0 \\ 0 & \zeta_{(j, k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{(\alpha)(\beta)} \\ \bar{\eta}_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{C}) : \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{(\alpha)(\beta)} \\ \bar{\eta}_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix}$$

Nesse caso,

$$\mathcal{D}(\mathbf{PCT}) \begin{pmatrix} \xi_{(\alpha)(\beta)} \\ \eta_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} = \mathfrak{z} \begin{pmatrix} (-1)^j & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{(\alpha)(\beta)} \\ \bar{\eta}_{(\beta)(\dot{\alpha})} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

onde temos definido a *fase*

$$\mathfrak{z} = \begin{cases} 1 & \text{se } j+k \text{ é par (caso bosônico)} \\ -i & \text{se } j+k \text{ é ímpar (caso fermiônico)} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

3

$$i^{(j+k) \bmod 2} = \begin{pmatrix} 1 & \text{se } j+k \text{ é par} \\ i & \text{se } j+k \text{ é ímpar} \end{pmatrix}$$

Exemplo 140 (Rotações e Boosts) *Os levantamentos dos boosts e das rotações em torno de uma direção espacial \hat{n} são dados por*

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\hat{n}}(t) &= e^{t \frac{1}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cosh(t/2) I + \sinh(t/2) \hat{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad t \in \mathbb{R} \\ \tilde{R}_{\hat{n}}(\theta) &= e^{\theta \frac{i}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos(\theta/2) I + \sin(\theta/2) \hat{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad \theta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

onde temos as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observação 141 (Spin) *Definimos o spin da representação $\mathfrak{D}_{(j/2, k/2)}$ pelo número $s = \frac{j+k}{2}$. Pela identidade acima, temos*

$$\mathfrak{D}_{(j/2, k/2)}(\tilde{R}_{\hat{n}}(2\pi)) = (\cos(\pi))^{j+k} I = (-1)^{2s} I$$

A.1.2 Representações Unitárias Irredutíveis Padrão de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$

As representações unitárias do recobrimento do grupo de Poincaré são totalmente classificadas e estão divididas em dois grupos: padrão e não-padrão.

As representações padrão do recobrimento do grupo de Poincaré correspondem às representações espinoriais de $SL(2, \mathbb{C})$; são caracterizadas por dois parâmetros (m, s) onde $m \geq 0$ é a massa da representação e $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ é o spin da representação. Explicitamente: $(u_{(m,s)}, \mathfrak{h}_{(m,s)})$.

Caso Massivo: $m > 0$

$$\mathfrak{h}_{(m,s)} := \mathfrak{h}_{(j/2, k/2)} \otimes L^2(\Gamma_m^+, d\mu_m)$$

onde temos o hiperbolóide de massa m e correspondente medida Lorentz-invariante

$$\Gamma_m^+ = \{p \in \mathcal{M} / p^2 = m, p^0 \geq 0\}, \quad d\mu_m(p) = \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{2p^0}}, \quad p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

e

$$u_{(m,s)} : \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}_{(m,s)}), \quad (u_{(m,s)}(a, \bar{\Lambda})\psi)(p) := e^{ia \cdot p} \mathfrak{D}_{(j/2, k/2)}(\tilde{R}(\bar{\Lambda}, p)) \psi(\Lambda^{-1}p)$$

onde temos a rotação de Wigner em $SL(2, \mathbb{C})$ (sendo $\sigma = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ as matrizes de Pauli)

$$\tilde{R}(\bar{\Lambda}, p) := \tilde{L}(p) \bar{\Lambda} \tilde{L}^{-1}(\Lambda^{-1}p), \quad \tilde{L}(p) = \sqrt{\frac{p \cdot \sigma}{m}}$$

Caso Massa Zero: $m = 0$

$$\mathfrak{h}_{(0,s)} := L^2(\Gamma_0^+, d\mu_0)$$

onde temos o hiperbolóide de massa $m = 0$ e correspondente medida Lorentz-invariante

$$\Gamma_0^+ = \{p \in \mathcal{M} / p^2 = 0, p^0 \geq 0\} \quad , \quad d\mu_0(p)$$

e (o índice '11' indica o correspondente elemento de matriz)

$$u_{(0,s)} : \mathcal{P}_+^\uparrow \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}_{(0,s)}) \quad , \quad \left(u_{(s,0)}(a, \bar{\Lambda})\psi\right)(p) := e^{ia \cdot p} \left(\mathfrak{D}_{(s,0)}\left(\bar{R}(\bar{\Lambda}, p)\right)\right)_{11} \psi(\Lambda^{-1}p)$$

onde temos a rotação de Wigner em $SL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \bar{R}(\bar{\Lambda}, p) &:= \bar{L}_0(p) \bar{\Lambda} \bar{L}_0^{-1}(\Lambda^{-1}p) \\ \bar{L}_0(p) &= \frac{1}{\sqrt{p_0 + p_3}} \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A.1.3 Representações Unitárias Irredutíveis Padrão de $\tilde{\mathcal{P}}_+$

Para obtermos representações unitárias

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{(m,s)}(\theta)\psi)(p) &= \mathfrak{D}_{(j/2, k/2)}(i\sigma_2) \overline{\psi(-\theta p)} \\ (u(\bar{j})\psi)(p) &= D^{(s)}(i\sigma_3) D^{(s)}(i\sigma_2) \overline{\psi(-jp)} = D^{(s)}(i\sigma_1) \overline{\psi(-jp)} \end{aligned} \tag{A.15}$$

Definição 142 (Representação Própria de $\tilde{\mathcal{P}}_+$) *Sejam $m \geq 0$ e $j, k \in \mathbb{N}$. A representação $(m, j/2, k/2)$ -espinorial própria de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ é a representação irredutível unitária fortemente contínua de energia positiva de $\tilde{\mathcal{P}}_+$ de massa m e spin $(j/2, k/2)$.*

Observação 143 *A razão para a importância das representações unitárias em física quântica deve-se ao fato da noção de grupo de simetria ser definida por representações projetivas, as quais correspondem a representações lineares da extensão central do grupo sobre o próprio espaço de Hilbert dos estados. Precisamente, temos os seguintes teoremas [147],[?]:*

Teorema 144 *Qualquer transformação projetiva num espaço de Hilbert é definida por um operador unitário ou anti-unitário, o qual é único módulo fase.*

E também [?]:

Teorema 145 *Toda representação projetiva do grupo de Lorentz induz uma representação unitária do seu recobrimento universal $SL(2, \mathbb{C})$.*

Appendix B

Teoria Modular

B.1 Teoria Modular de Tomita-Takesaki

Referências para provas e detalhes: [137], [22], [23], [135].

Definição 146 (Álgebra de von Neumann Padrão) *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert, \mathcal{R} uma álgebra de von Neumann em \mathcal{H} e $\Omega \in \mathcal{H}$ um vetor.*

Dizemos que Ω é cíclico para \mathcal{R} quando

$$\overline{\mathcal{R}\Omega} = \mathcal{H}$$

Dizemos que Ω é separante para \mathcal{R} quando

$$A, B \in \mathcal{R}, A\Omega = B\Omega \Rightarrow A = B$$

Dizemos que o par (\mathcal{R}, Ω) constitui uma álgebra de von Neumann padrão quando vetor Ω é cíclico e separante para \mathcal{R} .

Proposição 147 *Um vetor $\Omega \in \mathcal{H}$ é cíclico para \mathcal{R} se e somente se ele é separante para o comutante \mathcal{R}' .*

No que segue, considere (\mathcal{R}, Ω) sendo uma álgebra de von Neumann padrão no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Definição 148 (Operadores de Modulares) *Sendo Ω cíclico e separante para \mathcal{R} e \mathcal{R}' , estão bem definidos em \mathcal{H} os seguintes operadores anti-lineares*

$$\begin{aligned} S_0 : \mathcal{R}\Omega &\rightarrow \mathcal{R}\Omega, & S_0 A\Omega &:= A^*\Omega \\ F_0 : \mathcal{R}'\Omega &\rightarrow \mathcal{R}'\Omega, & F_0 A'\Omega &:= A'^*\Omega \end{aligned}$$

Vale que $S_0 \supset F_0^$ e $F_0 \supset S_0^*$; portanto, S_0 e F_0 são operadores fecháveis, donde podemos definir*

$$S := \overline{S_0} \quad \text{e} \quad F := \overline{F_0}$$

cujos domínios têm cores $\mathcal{R}\Omega \subset \text{Dom}(S)$ e $\mathcal{R}'\Omega \subset \text{Dom}(F)$.

Pela decomposição polar de S [113, Section VIII.3], definimos a involução modular J e o operador modular Δ

$$S = J\Delta^{1/2}, \quad \begin{cases} J \text{ é um operador anti-linear involutivo} \\ \Delta \text{ é um operador linear auto-adjunto positivo} \end{cases}$$

Chamamos S de operador de Tomita, J de involução modular e Δ de operador modular da álgebra de von Neumann padrão (\mathcal{R}, Ω) .

Vale

$$\begin{aligned} S^* &= F = J\Delta^{-1/2}, & F^* &= S = J\Delta^{1/2} \\ \Delta^* &= \Delta, & J^* &= J^{-1}, & J\Delta J &= \Delta^{-1} \end{aligned}$$

O teorema fundamental da teoria modular:

Teorema 149 (Tomita-Takesaki [137]) *Vale*

$$adJ(\mathcal{R}) = \mathcal{R}', \quad ad\Delta^{it}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Chamamos de grupo modular o grupo um-parâmetro $\sigma^t := ad\Delta^{it}$ de endomorfismos em \mathcal{H} .

Para um estado $\omega \in \mathcal{R}_*$, podemos tomar um vetor unitário $\Omega \in \mathcal{H}$ tal que $\omega = (\Omega, \cdot \Omega)$. Se definimos $\mathcal{H}_{(\mathcal{R}, \Omega)} := \overline{\mathcal{R}\Omega}$, temos, temos:

$$\Omega \text{ é cíclico para } \mathcal{R} \text{ em } \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$$

e

$$\begin{aligned} \Omega \text{ é separante para } \mathcal{R} \text{ se e somente se } \omega \text{ é fiel,} \\ \text{i.e.: } A \in \mathcal{R}, \omega(A) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

Portanto, dada uma álgebra de von Neumann \mathcal{R} no espaço de Hilbert \mathcal{H} um estado fiel $\omega \in \mathcal{R}_*$, podemos definir a teoria modular para (\mathcal{R}, Ω) num subespaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ adequado. No que segue, utilizaremos esses conceitos.

B.1.1 Grupos Modulares e Cociclo-de-Connes

No que segue, considere \mathcal{R} sendo uma álgebra de von Neumann agindo no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Teorema 150 (Connes [48]) *Sejam ω e φ dois estados fiéis sobre \mathcal{R} , e σ_ω e σ_φ os grupos modulares correspondentes.*

Existe uma aplicação¹ fortemente contínua $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{R})$ satisfazendo:

$$i) \ u_{t+s} = u_t \sigma_\omega^t(u_s) \ , \ \forall t, s \in \mathbb{R}$$

$$ii) \ \sigma_\varphi^t(A) = u_t \sigma_\omega^t(A) u_t^* \ , \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathcal{R}$$

$$iii) \ \forall A \in \mathcal{R}, \ \exists F : st(0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \text{ analítica, tal que} \\ F(t) = \varphi(u_t A) \text{ e } F(t+i) = \omega(Au_t) \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Portanto, os grupos modulares de uma álgebra de von Neumann com respeito a diferentes estados fiéis diferem por cociclos que generalizam a condição KMS.

Teorema 151 (Guido-Longo [79]) *Seja \mathcal{R} uma álgebra de von Neumann, ω um estado fiel e γ um automorfismo de \mathcal{A} .*

Seja $u_t(\gamma) := [D\omega \circ \gamma^{-1} : D\omega]_t$ o Cociclo-de-Connes do par de estados $\omega, \omega \circ \gamma^{-1}$. Vale

$$u_{t+s}(\gamma) = u_t(\gamma) \sigma_\omega^t(u_s(\gamma)) \\ \gamma(\sigma_\omega^t(A)) = u_t \sigma_\omega^t(\gamma(A)) u_t^*(\gamma) \ , \ \forall A \in \mathcal{A} \tag{B.1}$$

B.2 Teoria Modular Espacial de Rieffel-van Daele

Para provas e detalhes vide [116], [102].

B.2.1 Estrutura Simplética

Seja $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números complexos.

Definição 152 (Estrutura Simplética de \mathcal{H}) *A estrutura simplética de $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ é a terna (\cdot, \vee, \wedge) de operações definidas na classe dos subconjuntos \mathcal{H} : o complemento simplético*

$$\mathcal{H} \supset M \rightarrow M^c := \{\psi \in \mathcal{H} / \Im(\varphi, \psi) = 0 \ \forall \varphi \in M\} \tag{B.2}$$

a interseção simplética

$$\mathcal{H} \supset M \rightarrow (M \wedge N) := M \cap N \tag{B.3}$$

a união simplética

$$\mathcal{H} \supset M, N \rightarrow (M \vee N) := (M \cup N)'' \tag{B.4}$$

Definimos também, o fecho simplético de um subconjunto de \mathcal{H}

$$\mathcal{H} \supset M \rightarrow M^c := M'' \tag{B.5}$$

¹Dada um álgebra-C* \mathcal{A} , $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ significa o grupo dos elementos unitários de \mathcal{A} .

Proposição 153 *Seja $M \in \mathcal{H}$ um subconjunto não-vazio. Então:*

i) M' é o complemento ortogonal de M com respeito ao produto interno real $\Re(\cdot, \cdot)$ multiplicado pelo fator 'i':

$$M' = iM^{r\perp}$$

ii) M'' é o fecho (topológico) da expansão \mathbb{R} -linear de M :

$$M' = \langle M \rangle$$

Em particular

$$M'' \supset M, \quad M''' = M' \tag{B.6}$$

iii) Se $\{M_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ é uma família de subconjuntos de \mathfrak{h} , então

$$\left(\bigvee_{j \in \mathcal{J}} M_j \right)' = \bigwedge_{j \in \mathcal{J}} M_j' \quad e \quad \left(\bigwedge_{j \in \mathcal{J}} M_j \right)' = \bigvee_{j \in \mathcal{J}} M_j' \tag{B.7}$$

Prova. Denotamos por M^\perp o complemento ortogonal de M com respeito ao produto interno (complexo) (\cdot, \cdot) e por $M^{r\perp}$ o complemento ortogonal de M com respeito ao produto interno real $\Re(\cdot, \cdot)$.

Trivialmente,

$$\Re(\varphi, i\psi) = -\Im(\varphi, \psi) \quad e \quad \Im(\varphi, i\psi) = \Re(\varphi, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Portanto

$$M' = \{\psi \in \mathcal{H} / \Re(\varphi, i\psi) = 0 \quad \forall \varphi \in M\} = iM^{r\perp}$$

$$M'' = \{\eta \in \mathcal{H} / \Re(\psi, i\eta) = 0 \quad \forall \psi \in iM^{r\perp}\} = M^{r\perp r\perp} = \langle M \rangle$$

e

$$M''' = i\langle M \rangle^{r\perp} = iM^{r\perp} = M'$$

Agora

$$\left(\bigvee_{j \in \mathcal{J}} M_j \right)' = i \left\langle \bigcup_{j \in \mathcal{J}} M_j \right\rangle^{r\perp} = \bigcap_{j \in \mathcal{J}} i \langle M_j \rangle^{r\perp} = \bigwedge_{j \in \mathcal{J}} M_j'$$

e

$$\left(\bigwedge_{j \in \mathcal{J}} M_j \right)' = i \left(\bigcap_{j \in \mathcal{J}} M_j \right)^{r\perp} = i \left\langle \bigcup_{j \in \mathcal{J}} M_j^{r\perp} \right\rangle = \left\langle \bigcup_{j \in \mathcal{J}} i M_j^{r\perp} \right\rangle = \bigvee_{j \in \mathcal{J}} M_j'$$

■

B.2.2 Teoria Modular Espacial

Definição 154 (Subespaços Padrão) *Sejam $K, L < \mathcal{H}$ um par de subespaços fechados em \mathcal{H} .*

Dizemos que o par (K, L) é padrão em \mathcal{H} quando

$$K \cap L = \{0\} \text{ e } \overline{K + L} = \mathcal{H}$$

Se K é um subespaço real fechado de \mathcal{H} , dizemos que K é padrão em \mathcal{H} quando (K, iK) é um par padrão em \mathcal{H} .

No que segue, consideramos $K, L < \mathcal{H}$ formando um par padrão em \mathcal{H} e denotamos as respectivas projeções ortogonais por

$$P : \mathcal{H} \rightarrow K, \quad Q : \mathcal{H} \rightarrow L$$

A partir destes, definimos os seguintes operadores

$$R := P + Q, \quad \tilde{R} := P - Q$$

Mostra-se que o operador R é injetivo e satisfaz $0 \leq R \leq 2$, donde conclui-se (pela teoria espectral) que estão bem definidos os grupos

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni t &\rightarrow R^{it} \\ \mathbb{R} \ni t &\rightarrow (2 - R)^{it} \end{aligned}$$

Enfim, por decomposição polar definimos a *conjugação modular espacial* j :

$$\tilde{R} =: jT, \quad \begin{cases} j \text{ é uma isometria parcial} \\ T \text{ é um operador positivo} \end{cases}$$

Também definimos o *operador modular espacial*

$$\delta := (2 - R)R^{-1}$$

e o *operador de Tomita espacial*

$$s = j\delta^{1/2}$$

Vale:

$$s : (K + L) \rightarrow (K + L), \quad s(u + iv) := u - iv, \quad \forall u \in K, \forall v \in L$$

O grupo modular espacial (de unitários) é definido por:

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \delta^{it} := (2 - R)^{it} R^{-it}$$

Proposição 155 *Vale*

$$j\delta^{it}j = \delta^{it}, \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$\langle j\xi, \xi \rangle \geq 0, \forall \xi \in K, \quad \langle j\eta, \eta \rangle \leq 0, \forall \eta \in L$$

Teorema 156 (Tomita-Takesaki Espacial) *Vale*

$$jK = iL^\perp, \quad jL = K^\perp$$

$$\delta^{it}K = K, \quad \delta^{it}L = L$$

A situação da teoria de Tomita-Takesaki é obtida a partir da teoria de Rieffel-van Daele pela especialização $L = iK$:

A relação entre o operador de Tomita S e o operador de Tomita espacial s definidos respectivamente na teoria modular de Tomita-Takesaki e na teoria modular de Rieffel-van Daele, pode ser facilmente estabelecida:

Proposição 157 *Seja (\mathcal{R}, Ω) uma álgebra de von Neumann padrão em \mathcal{H} .*

Seja $\mathcal{R}_{sa} := \{A \in \mathcal{R} / A^ = A\} < \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $K := \overline{\mathcal{R}_{sa}\Omega} < \mathcal{H}$.*

Então, K é um subespaço real padrão de \mathcal{H} e o operador de Tomita espacial s associado a (K, iK) coincide com o operador de Tomita S associado a (\mathcal{R}, Ω) .

Os operadores modulares espaciais podem ser caracterizados por certas propriedades. Vejamos primeiro o caso de j e depois de δ .

Proposição 158 (Caracterização de j) *Seja $K < \mathcal{H}$ um subespaço real padrão de \mathcal{H} e $s = j\delta^{1/2}$ o correspondente operador de Tomita espacial.*

Então, j é o único operador ortogonal auto-adjunto satisfazendo as seguintes condições

$$jK = K^\perp$$

$$\langle ju, u \rangle \geq 0, \forall u \in K$$

$$\langle jv, v \rangle \geq 0, \forall v \in K^\perp$$

Definição 159 (Condição KMS) *Seja $U = \{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo um-parâmetro de unitários fortemente contínuo em \mathcal{H} .*

Seja $M < \mathcal{H}$ um subespaço real.

Dizemos que U satisfaz a condição KMS com respeito a M quando para todo $u, v \in M$, existe uma função $f : st[-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, limitada e contínua, analítica em $st(-1, 0)$ tal que

$$f(t) = (U(t)u, v) \text{ and } f(t-i) = \overline{(U(t)u, v)}, \forall t \in \mathbb{R}$$

(Para cada $u, v \in M$, se existe uma função-KMS correspondente então ela é única, pelo princípio de reflexão de Schwartz.)

Proposição 160 (Caracterização de δ) *Seja $K < \mathcal{H}$ um subespaço real padrão em \mathcal{H} e seja $\{\delta^{it}\}_{t \in \mathbb{R}}$ o grupo modular correspondente.*

Então δ^{it} é o único grupo um-parâmetro fortemente contínuo de unitários em \mathcal{H} tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^{it}K = K, \forall t \in \mathbb{R} \\ \delta^{it} \text{ satisfaz a condição KMS com respeito a } K \end{array} \right.$$

Um fato interessante é que a condição KMS mais certa condição de minimalidade implicam na propriedade padrão:

Teorema 161 *Seja $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo um-parâmetro fortemente contínuo de unitários em \mathcal{H} .*

Seja K um subespaço real de \mathcal{H} com respeito ao qual $U(t)$ satisfaz a condição KMS.

Seja K_0 o menor subespaço real de K invariante sob ação de $U(t)$.

Então, $U(t)$ satisfaz a condição KMS com respeito a K_0 .

Além disso, $K_0 \cap iK_0 = \{0\}$.

Seja $\mathcal{H}_0 := \overline{K_0} + i\overline{K_0} < \mathcal{H}$.

Então K_0 é um subespaço real padrão de \mathcal{H}_0 com grupo modular espacial $\delta^{it} = U(t)|_{\mathcal{H}_0}$.

Bibliografia

Bibliography

- [1] O.A.C. Alvaredo, *Bootstrap Methods in 1+1-Dimensional Quantum Field Theories: The Homogeneous Sine-Gordon Models*, Ph.D thesis, Universidade de Santiago de Compostela, Xuño do 2001.
- [2] O.A.C. Alvaredo, A. Fring, C. Korff, *Form-factors of the Homogeneous sine-Gordon models*, Phys. Lett. **B484** (2000) 167.
- [3] H. Araki, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford Science Publications, 1999.
- [4] H. Araki, R. Haag, *Collision Cross Sections in Terms of Local Observables*, Commun. Math. Phys. **4** (1976) 77-91.
- [5] H. Babujian, A. Fring, M. Karowski, A. Zapletal, *Exact form factors in integrable quantum field theories: the sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B538** (1999) 535-586.
- [6] H. Babujian, M. Karowski, *The "Bootstrap Program" for Integrable Quantum Field Theories in 1+1 Dim*, in: V.G. Gurzadyan, A.G. Sedrakian eds., World Scientific Publications.
- [7] V. Bargmann, *Irreducible Unitary Representations of the Lorentz Group*, Annals of Mathematics **48** (1947) 568-640.
- [8] V. Bargmann, *On Unitary Ray Representations of Continuous Groups*, Ann. Math. **59** (1954) 1-46.
- [9] V. Bargmann, *Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations*, J. Math. Phys. **5** (1964) 862-868
- [10] H. Baumgärtel, *Operatoralgebraic Methods in Quantum Field Theory*, Akademie Verlag, 1995.
- [11] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333-380.

- [12] P. Bertozzini, R. Conti, R. Longo, *Covariant Sectors with Infinite Dimension and Positivity of the Energy*, Commun.Math.Phys. **141** (1998) 471-492.
- [13] J.J. Bisognano, E.H. Wichmann, *On the duality condition for a hermitian scalar field*, J. Math. Phys. **16** (1975) 985-1007.
- [14] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak, I.T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer Academic Press, 1990.
- [15] H.-J. Borchers, *Über die Mannigfaltigkeit der interpolierenden Felder zu einer kausalen S-Matrix*, Nuovo Cimento **15** (1960) 784-794.
- [16] H.-J. Borchers, *On the structure of algebras of field operators*, Nuovo Cimento **24** (1962) 214.
- [17] H.-J. Borchers, *Energy and Momentum as Observables in Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **2** (1966) 49.
- [18] H.-J. Borchers, *The CPT-Theorem in Two-dimensional Theories of Local Observables*, Commun. Math. Phys. **143** (1992) 315-332.
- [19] H.-J. Borchers, *Translation Group and Particle Representations in Quantum Field Theory*, Springer, 1996.
- [20] H.-J. Borchers, *On Poincaré Transformations and the Modular Group of the Algebra Associated with a Wedge*, Lett. Math. Phys. **46** (1998) 295-301.
- [21] H.-J. Borchers, D. Buchholz, B. Schroer, *Polarization-Free Generators and the S-Matrix*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 125-140.
- [22] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer-Verlag, 1981.
- [23] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer-Verlag, 1981.
- [24] J. Bros, D. Buchholz, *Towards a Relativistic KMS Condition*, Nucl. Phys. B **429** (1994) 291-318.
- [25] R. Brunetti, K. Fredenhagen, R. Verch, *The generally covariant locality principle – A new paradigm for local quantum physics*, arXiv: math-ph/0112041.
- [26] R. Brunetti, D. Guido, R. Longo, *Modular Structure and Duality in Conformal Quantum-Field theory*, Commun. Math. Phys. **156** (1993) 201-219.
- [27] R. Brunetti, D. Guido, R. Longo, *Group Cohomology, Modular Theory and Space-Time Symmetries*, Reviews in Mathematical Physics, **1** (1995) 57-71.

- [28] R. Brunetti, D. Guido, R. Longo, *Modular Localization and Wigner Particles*, arXiv: math-ph/0203021.
- [29] D. Buchholz, *The Physical Space of Quantum Electrodynamics*, Commun. Math. Phys. **85** (1982) 49.
- [30] D. Buchholz, *Particles, infraparticles and the problem of asymptotic completeness*, Poc. IAMP Conf. Marseille, World Scientific, 1987.
- [31] D. Buchholz, *On Quantum Fields that Generate Local Algebras*, J. Math. Phys. **31** (1990) 1839-1846.
- [32] D. Buchholz, S. Doplicher, R. Longo, *On Noether's Theorem in Quantum Field Theory*, Annals of Physics **170** (1986) 1-17.
- [33] D. Buchholz, S. Doplicher, R. Longo, J.E. Roberts, *A New Look at Godstone's Theorem*, Rev. in Math. Phys. **Special Issue** (1992) 49-83.
- [34] D. Buchholz, O. Dreyer, M. Florig, S. J. Summers, *Geometric Modular Action and Spacetime Symmetry Groups*, Rev. in Math. Phys. **12** (2000) 475-560.
- [35] D. Buchholz, K. Fredenhagen, *Locality and the Structure of Particle States*, Commun. Math. Phys. **84** (1982) 1-54.
- [36] D. Buchholz, R. Haag, *The Quest for Understanding in Relativistic Quantum Physics*, J. Math. Phys. **41** (2000) 3674-3697.
- [37] D. Buchholz, P. Junglas, *On the existence of equilibrium states in local quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 255.
- [38] D. Buchholz, G. Mack, I. Todorov, *The Current Algebra on the Circle as a Germ of Local Fields Theories*, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **5B** (1988) 20-56.
- [39] D. Buchholz, H. Schulz-Mirbach, *Haag Duality in Conformal Quantum Field Theory*, Rev. Math. Phys. **2** (1990) 105-125.
- [40] D. Buchholz, M. Porrmann, U. Stein, *Dirac versus Wigner: Towards a universal particle concept in local quantum field theory*, Phys. Lett. **267 B** (1991) 377-381.
- [41] D. Buchholz, J. Yngvason, *There is no Causality Problems for Fermi 2-Atom System*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 613-616.
- [42] P. Bush, P.J. Lahti, P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement*, Lecture Notes on Physics m2 (1996), Springer.
- [43] R. Clifton, H. Halvorson, *Are Rindler quanta real? Inequivalent particle concepts in quantum field theory*, Brit. J. Philos. Sci **52** (2001) 417-470.

- [44] F. Coester, *Scattering Theory for Relativistic Particles*, *Helv. Phys. Acta.* **38** (1965) 7.
- [45] F. Coester, *Forms of Relativistic Quantum Dynamics (Particles vs Fields)*, *Lect. Notes Phys.* **162** (1982) 50-65.
- [46] *Relativistic-Particle Quantum-Mechanics (Applications and Approximations)*, *Lect. Notes Phys.* **162** (1982) 66-74.
- [47] F. Coester, W.N. Polyzou, *Relativistic Quantum-Mechanics of Particles with Direct Interactions*, *Phys. Rev. D* **26** (1982) 1348-1367.
- [48] A. Connes, *Une Classification des Facteurs de Type III*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4ème. Sér.* **6**, No. 2 (1973) 133-252.
- [49] A. Connes, *Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **24**(4) (1974) 121.
- [50] A. Connes, *On the Spatial Theory of von Neumann Algebras*, *J. Func. Analysis* **35** (1980) 153-164.
- [51] F. Constatinescu, *Distributions and Their Applications in Physics - (International series in natural philosophy, vol. 100)*, Pergamon Press (1980).
- [52] C. D'Antoni, *Technical Properties of the Quasi-Local Algebra*, in: D. Kastler (ed.), *The Algebraic Theory of Superselection Sectors, Introduction and Recent Results*, World Scientific, 1990.
- [53] C. D'Antoni, R. Longo, F. Radulescu, *Conformal nets, maximal temperature and models from free probability*, *J. Operat. Theor.* **45** (2001) 195-208.
- [54] P.A.M Dirac, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **114** (1927) 243.
- [55] S. Doplicher, *Quantum spacetime*, *Ann. Inst. H. Poincaré-Phy* **64** (1996) 543-553.
- [56] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts, *The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields*, *Commun. Math. Phys.* **172** (1995) 187-220.
- [57] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Fields, Observables and Gauge Transformations I*, *Commun. Math. Phys.* **13** (1969) 1-23.
- [58] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Fields, Observables and Gauge Transformations II*, *Commun. Math. Phys.* **15** (1969) 173-200.
- [59] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Local Observables and Particle Statistics I*, *Commun. Math. Phys.* **23** (1971) 199-230.
- [60] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Local Observables and Particle Statistics II*, *Commun. Math. Phys.* **35** (1974) 49-85.

- [61] S. Doplicher, R. Longo, *Standard and Split Inclusions of vonneumann Algebras*, *Invent. Math.* **73** (1984) 493-536.
- [62] S. Doplicher, J.E. Roberts, *Why There is a Field Algebra with Compact Gauge Group Describing the Superselection Structure in Particle Physics*, *Commun. Math. Phys.* **131** (1990) 51-107.
- [63] W. Driessler, S.J. Summers, E. Wichmann, *On the Connection Between Quantum Fielts and von Neumann Algebras of Local Operators*, *Commun. Math. Phys.* **105** (1986) 49-84.
- [64] H. Epstein, *On the Borchers Class of a Free Field*, *Nuovo Cimento* **27** (1963) 886.
- [65] H. Epstein, *CPT invariance of the S-matrix in a theory of local observables*, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 750-767.
- [66] K. Ebrahimi-Fard, *Comment on Modular Theory and Geometry*, preprint arXiv: math-ph/0011049.
- [67] L. Fassarella, B. Schroer, *Modular Origin of Chiral Diffeomorphisms and the Fuzzy Analogs in Higher Dimensional Quantum Field Theory*, *Physics Letters B*, (preprint arXiv: hep-th/0106064).
- [68] L. Fassarella, B. Schroer, *Wigner Particle Theory and Local Quantum Physics*, *Jornal of Physics A* (preprint arXiv: hep-th/0112168)
- [69] J. Fröhlich, F. Gabbiani, *Operator Algebras and Conformal Field Theory*, *Commun. Math. Phys.* **155** (1993) 569.
- [70] M. Florig, *On Borchers' Theorem*, *Lett. Math. Phys.* **46** (1998) 289-293.
- [71] K. Fredenhagen, *On the Existence of Antiparticles*, *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 141-151.
- [72] K. Fredenhagen, *Generalization of the Theory of Superselection Sectors*, in: D. Kastler (ed.), *The Algebraic Theory of Superselection Sectors, Introduction and Recent Results*, World Scientific, 1990.
- [73] K. Fredenhagen and M. Joerss, *Conformal Haag-Kastler nets, pointlike localized fields and the existence of operator product expansions*, *Comm. Math. Phys.* **176** (1996) 541-554.
- [74] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, B. Schroer, *Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exchange Algebras I: General Theory*, *Commun. Math. Phys.* **125** (1989) 201-226.
- [75] J. Gaier, J. Yngvason, *Geometric Modular Action, Wedge Duality and Lorentz Covariance are Equivalent for Generalized Free Fields*, preprint.

- [76] L. Gårding, A.S. Wightman, *Fields as Operator-Valued Distributions in Relativistic Quantum Theory*, Ark. Fys. **28** (1965) 129.
- [77] I.M. Gelfand, D.B. Fuks, *Cohomology of the Lie Algebra of Vector Fields of a Circle*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968) 342-343.
- [78] P. Goddard, D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quatum Physics*, Int. Journ. Mod. Phys. A, **1** (1986) 303-414.
- [79] D. Guido, R. Longo, *Relativistic Invariance and Charge Conjugation in Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **148** (1992) 521-551.
- [80] D. Guido, R. Longo, *The Algebraic Spin and Statistics Theorem*, Commun. Math. Phys. **172** (1995) 517-533.
- [81] D. Guido, R. Longo, *The Conformal Spin and Statistics Theorem*, Commun. Math. Phys. **181** (1996) 11-35.
- [82] D. Guido, R. Longo, H.-W. Wiesbrock, *Extensions of Conformal Nets and Superselection Structures*, Commun.Math.Phys. **192** (1998) 217-244.
- [83] R. Haag, *Quantum Field Theories with Composite Particles and asymptotic Conitions*, Phys. Rev. **112** (1958) 669.
- [84] R. Haag, *Fundamental Irreversibility and the Concept of Events*, Commun. Math. Phys. **132** (1990) 245-251.
- [85] R. Haag, *Local Quantum Physics*, Springer-Verlag, 1993.
- [86] R. Haag, *An Evolutionary Picture for Quantum Physics*, Commun. Math. Phys. **180** (1996) 733-743.
- [87] R. Haag, *Questions in Quantum Physics: a personal view*, arXiv: hep-th/0001006 (2000).
- [88] R. Haag, *What I Would Like to Understand*, in: R. Longo ed., *Mathematical Physics in Mathematics and Physics, Quantum and Operator Algebraic Aspects*, American Mathematical Society, 2001.
- [89] R. Haag, D. Kastler, *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*, J. Math. Phys. **5** (1964) 848-861.
- [90] H. Halvorson, *Reeh-Schlieder Defeats Newton-Wigner: On Alternative Localization Schemes in Relativistic Quantum Field Theory*, Philos. Sci. **68** (2001) 111-133.
- [91] G.C. Hegerfeldt, *Causality Problems for Fermi 2-Atom Systems*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 596-599.
- [92] W. Heisenberg, *Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles*, Interscience publishers, 1966.

- [93] W. Heisenberg, *Teoria, Crítica e uma Filosofia*, conferência realizada em 1968 e reproduzida em: *A Unificação das Forças Fundamentais, o grande desafio da física contemporânea*, Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1993.
- [94] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
- [95] G.J. Iverson, G. Mack, *Quantum Fields and Interaction of Massless Particles: the Continuous Spin Case*, *Ann. of Phys.* **64** (1971) 211-253.
- [96] M. Joerss, *From Conformal Haag-kastler Nets to Wightman Functions*, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996) 257.
- [97] R. Jost, *The General Theory of Quantized Fields*, American Mathematical Society, 1965.
- [98] Y. Kawahigashi, R. Longo, M. Müger, *Multi-Interval Subfactors and Modularity of Representations in Conformal Theory*, *Commun. Math. Phys.* **219** (2001) 631-669.
- [99] R. Kahler, H.-W. Wiesbrock, *Modular theory and the reconstruction of four-dimensional quantum field theories*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 74-86.
- [100] B. Kuckert, *Borchers' Commutation Relations and Modular Symmetries in Quantum Field Theory*, *Lett. Math. Phys.* **41** (1997) 307-320.
- [101] B. Kuckert, *Localization Region of Local Observables*, *Commun. Math. Phys.* **215** (2000) 197-216.
- [102] P. Leyland, J. Roberts, D. Testard, *Duality for Quantum Free Fields*, preprint, Centre de Physique Théorique, CNRS Marseille, 1977.
- [103] R. Longo, K.-H. Rehren, *Net of Subfactors*, *Rev. Math. Phys.* **7** (1995) 567-597.
- [104] G.W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, 1968.
- [105] J. Mund J, *No-go theorem for 'free' relativistic anyons in $d=2+1$* , *Lett. Math. Phys.* **43** (1998) 319-328.
- [106] J. Mund, *The Bisognano-Wichmann theorem for massive theories*, *Ann. H. Poincaré* **2** (2001) 907-926.
- [107] T.D. Newton, E.P. Wigner, *Localized States for Elementary Systems*, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 400.
- [108] A.I. Oksak, I.T. Todorov, *Invalidity of the TCP-theorem for infinite component fields*, *Commun. Math. Phys.* **11** (1968) 125.
- [109] W. Pauli, *On the Connection Between Spin and Statistics*, *Phys. Rev.* **58** (1940) 716.

- [110] W. Pauli, *Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflexion of Space-Time and Charge*, em: *Niels Bohr and the Development of Physics*, W. Pauli (ed.), Pergamon Press, 1955, p.30.
- [111] M. Porrmann, *The Concept of Particle Weights in Local Quantum Field Theory*, PhD thesis, Göttingen, 1999.
- [112] P. Ramacher, *Modular Localization of Elementary Systems in the Theory of Wigner*, J. Math. Phys. **41** (2000) 6079-6089.
- [113] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I (Functional Analysis)*, Academic Press, 1973.
- [114] H. Reeh, S. Schlieder, *Bemerkungen zur Unitäräquivalenz von Lorentzinvarianten Feldern*, Nuovo Cimento **22** (1961) 1051.
- [115] K.H. Rehren, H.R. Tuneke, *Fusion rules for the continuum sectors of the Virasoro algebra with $c=1$* , Lett. Math. Phys. **53** (2000) 305-312.
- [116] M.A. Rieffel, A. van Daele, *A Bounded Operator Approach to Tomita-Takesaki Theory*, Pac. J. Math. **69** (1977) 187-221.
- [117] D. Ruelle, *On the Asymptotic Condition in quantum Field Theory*, Helv. Phys. Acta. **35** (1962) 147.
- [118] C. Rubbia, *The Quest for the Infinitesimally Small*, Il Nuovo Cimento **107** (1994) 1001-1044.
- [119] B. Schroer, *Recent Developments of Algebraic Methods in Quantum Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. **6** (1992) 2041.
- [120] B. Schroer, *Particle versus field structure in conformal quantum field theories*, Phys. Lett. B **494** (2000) 124-129.
- [121] B. Schroer, *Uniqueness of Inverse Scattering Problem in Local Quantum Physics*, arXiv: hep-th/0106066
- [122] B. Schroer, *The paradigm of the area law and the structure of transversal-longitudinal lightfront degrees of freedom*, arXiv: hep-th/0202085.
- [123] B. Schroer, J.A. Swieca, *Conformal Transformations for Quantized Fields*, Phys. Rev. D **10** (1974) 480-485.
- [124] B. Schroer, H.-W. Wiesbrock, *Modular Constructions of Quantum Field Theories with Interactions*, Rev. Math. Phys. **12** (1998) 301-326.
- [125] B. Schroer, H.-W. Wiesbrock, *Modular Theory and Geometry*, Rev. Math. Phys. **12** (2000) 139-158.
- [126] M. Schottenloher, *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Lecture Notes in Physics m43, Springer, 1997.

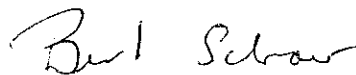
- [127] J. Schwinger (Ed.), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, 1958.
- [128] I. E. Segal, *A Mathematical Approach to Elementary Particle and Fields*, Notes on Mathematics 371 A, Department of Mathematics University of Chicago.
- [129] F.A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, *Adv. Series in Math. Phys.* **14**, World Scientific, 1992.
- [130] C. P. Staszkievicz, *Die lokale Struktur abelscher Stromalgebren auf dem Kreis*, Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde eingereicht am Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin, März 1995
- [131] R.F. Streater, *Generalized Goldstone Theorem*, *P. Rev. Lett.* **15** (1965) 475.
- [132] R.F. Streater, A.S. Wightman, *PCT, Spin&Statistics and all that*, W.A. Benjamin, 1964.
- [133] R.F. Streater, I.F. Wilde, *Fermion State of a Boson Field*, *Nucl. Phys.* **B24** (1970) 561.
- [134] F. Strocchi, A.S. Wightman, *Proof of Charge Superselection Rule in Local Relativistic Quantum Field-Theory*, *J. Math. Phys.* **15** (1974) 2198-2224.
- [135] V.S. Sunder, *An Invitation to von Neumann Algebras*, Springer-Verlag, 1987.
- [136] J.A. Swieca, *Goldstone's Theorem and Related topics*, Cargèse Lectures in Physics **4** (1970) 215.
- [137] M. Takesaki, *Tomita's theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*, *Lectures Notes in Mathematics* **128**, Springer-Verlag 1970.
- [138] M. Tomita, *Quasi-standard von Neumann algebras*, unpublished mimeographed note, 1967; *Standard forms of von Neumann algebras*, unpublished note of the Vth functional analysis symposium of the Math. Soc. of Japan, Sendai, 1967.
- [139] W.-T. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985
- [140] R.M. Wald, *Gravitation, Thermodynamics, and Quantum Theory*, preprint arXiv: gr-qc/9901033.
- [141] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I, Foundations*, Cambridge University Press, 1995.
- [142] G.G. Wick, E.P. Wigner, S.S. Wightman, *The intrinsic parity of elementary particles*, *Phys. Rev.* **88** (1952) 101-105.

- [143] H.-W. Wiesbrock, *Symmetries and Half-Sided Modular Inclusions of von Neumann Algebras*, Lett. Math. Phys. **29** (1993) 107.
- [144] H.-W. Wiesbrock, *Superselection Structure and Localized Connes Cocycles*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 133-160.
- [145] A.S. Wightman, *Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Spectation Values*, Phys. Rev. **101** (1956) 860-866.
- [146] A.S. Wightmann, *What is the point of the so-called "axiomatic field theory"*, Physics Today, september 1969, p.53.
- [147] E.P. Wigner, *Gruppentheorie*, Vieweg, 1931.
- [148] E.P. Wigner, *On Unitary Representations of Inhomogeneous Lorentz Group*, Ann. Math. **40** (1939) 149.
- [149] J. Yngvason, *Zero Mass Representations of the Poincaré Group and Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **18** (1970) 195-203.
- [150] J. Yngvason, *A Note on Essential Duality*, Lett. Math. Phys. **31** (1994) 127-143.

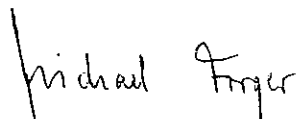
“SIMETRIAS MODULARES E LOCALIZAÇÃO MODULAR EM FÍSICA QUÂNTICA LOCAL”

Lucio Souza Fassarella

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Bert Schroer – Presidente



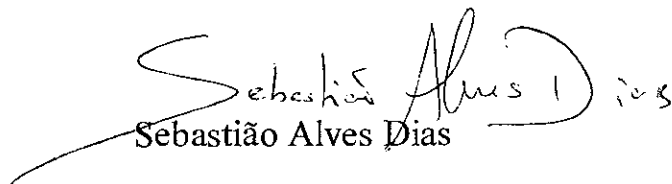
Frank Michael Forger



Walter Felipe Wreszinski



Francesco Toppan



Sebastião Alves Dias

Rio de Janeiro, 27 de maio de 2002