

TESE DE DOUTORADO

**Influência de paredes magneticamente permeáveis
em alguns efeitos do vácuo quântico**

Danilo Teixeira Alves

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro/Julho de 2002

Sumário

Introdução geral	8
1 Emissão Espontânea	18
1.1 Introdução	19
1.2 Coeficientes de Einstein e a emissão espontânea.	23
1.3 Teoria não-relativística de átomos no vácuo	27
1.4 Uma placa perfeitamente permeável	35
1.5 Duas placas perfeitamente permeáveis	40
1.6 Uma placa condutora e outra permeável	46
1.7 Comentários	51
2 Deslocamento Lamb	53
2.1 Introdução	54
2.2 Influência de duas placas permeáveis	61
2.2.1 Contribuição dos estados degenerados	65
2.2.2 Contribuição dos estados não degenerados	69
2.3 Análise numérica	71
2.4 Caso de uma placa permeável	75
2.5 Comentários	75
3 Efeito Casimir Dinâmico	77
3.1 Introdução	78

3.2	Efeito Casimir estático	80
3.3	O efeito Casimir dinâmico em $1 + 1$ dimensões	88
3.3.1	Uma fronteira móvel com condição de Dirichlet	88
3.3.2	Uma fronteira móvel com condição de Neumann	95
3.3.3	Duas fronteiras tipo Dirichlet: uma móvel e outra fixa	100
3.3.4	Duas fronteiras tipo Neumann: uma móvel e outra fixa	109
3.3.5	Duas fronteiras: condições mistas	111
3.3.6	2 fronteiras Dirichlet-Dirichlet via operador número	117
3.4	Efeito Casimir dinâmico à temperatura finita	121
3.4.1	Uma fronteira de Dirichlet	123
3.4.2	Uma fronteira de Neumann	125
3.5	Efeito Casimir dinâmico eletromagnético	128
3.6	Comentários	134
Comentários finais e perspectivas		136
A Demonstração da fórmula (2.48)		143
B Cálculo de funções de correlação		145
B.1	Demonstração da fórmula (3.61)	145
B.2	Demonstração das fórmulas (3.92) e (3.93)	146
B.3	Demonstração da fórmula (3.190)	147
B.4	Demonstração das fórmulas (3.204) e (3.205)	148
C Uso de funções de Green na solução de equações homogêneas		150

Resumo

No presente trabalho abordamos três efeitos diretamente relacionados com o conceito de vácuo, tomado no contexto da física quântica: emissão espontânea, deslocamento Lamb e efeito Casimir dinâmico.

Apresentamos um estudo da influência de placas perfeitamente permeáveis tanto na taxa de emissão espontânea, quanto no deslocamento Lamb. Precisamente, calculamos a variação na taxa de emissão espontânea quando o átomo é colocado próximo a uma placa perfeitamente permeável, ou entre uma cavidade formada por placas permeáveis paralelas, ou ainda, em uma cavidade onde uma das placas é condutora e a outra, permeável. Calculamos também como os deslocamentos nos níveis de energia atômicos são afetados pela presença de duas placas paralelas e perfeitamente permeáveis.

Usando um modelo de campo escalar em $1 + 1$ dimensões, verificamos a influência de condições de contorno tipo Neumann no efeito Casimir dinâmico. Obtemos a força dinâmica de Casimir para os casos de uma fronteira oscilante com condição de Neumann, da cavidade oscilante com duas fronteiras de Neumann e da cavidade oscilante com uma das fronteiras de Neumann e a outra de Dirichlet. Calculamos também correções térmicas à força dinâmica de Casimir.

Abstract

In this work we study three effects related to the concept of quantum vacuum: spontaneous emission, Lamb shift and dynamical Casimir effect.

We compute the influence on the spontaneous emission rate for a two-level atom when it is located (i) near a infinitely permeable plate, (ii) between two parallel infinitely permeable plates and (iii) between two plates of a different nature, namely, a perfectly conducting plate and an infinitely permeable one. Using second order perturbation theory, we study the influence of two parallel infinitely permeable plates on the atomic energy levels of a Hydrogen-like atom.

We calculate the dissipative force on a non-relativistic moving wall due to the vacuum fluctuations of a massless scalar field in 1+1 dimensions for the following cases: (i) one moving boundary where the field satisfies the Neumann condition, (ii) a vibrating cavity with two Neumann boundary conditions and (iii) a vibrating cavity where one of the boundary conditions is a Neumann boundary condition, and the other is a Dirichlet condition. We also compute the contribution of a thermal bath at temperature T to the dissipative force.

Agradecimentos

Às pessoas a quem dedico este modesto trabalho, a minha família, são as primeiras a quem deixo um enorme agradecimento pelo total apoio em todas as situações da vida.

A Carlos Farina, orientador desta tese, não há palavras para expressar meu sentimento de gratidão e o prazer em ter compartilhado de sua companhia ao longo desses anos, nem tampouco para dizer o quanto foi construtivo o processo de aprendizagem que levou à elaboração desta tese. A você, “grande cumpadi”, dedico a minha amizade.

A Alexandre Tort que, além do apoio fundamental em várias etapas deste trabalho, foi quem me apresentou esta linha de pesquisa, tampouco tenho palavras para expressar meu agradecimento. A você Alex, dedico também a minha amizade.

A Edgardo S. Cheb-Terrab, Cassio Monteiro, João Felipe de Medeiros Neto, José Helayel Neto, Sebastião Alves Dias, Filadelfo Santos, José Soares Barbosa, Marcus Venicius Cougo Pinto, Murari Som, Myriam Simões, pelo apoio fundamental em incontáveis momentos. A Fabrício Barone e Paulo Américo Maia Neto pelas discussões e apoio geral aos trabalhos relacionados com esta tese, assim como a todos os meus colegas do CCP-CBPF, do Grupo de Efeito Casimir-IF/UFRJ e do Departamento de Física da UFFA.

Outro agradecimento especial e muito carinhoso deixo a Êneo Medeiros, Iracema Medeiros e Iracema Gonçalves Vieira, que se tornaram parte da minha família durante minha estada no Rio de Janeiro, assim como a outras pessoas amigas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e, muito além disso, para tornar a vida mais prazerosa. Agradeço, portanto, a Alan Daniel, Benedito Ferreira, Carmen Monteiro, Cláudia Mesquita, Cláudia Tinoco, Cláudio Mauro Vieira Serra, Glória Souza, Humberto Belich, Javier Salinas, Joel P. dos Santos, Manoel Messias, Marcelo Lima, Marcus Vinicius, Maria Correia, Mizael Rabanal, Paulo Eduardo de Freitas, Paulo Ernesto Ribeiro, Sebastião Oliveira, Sheila Cristina e William Toledo. Agradeço ainda a Ricardo Papini e Katya Fragoso pela enorme hospitalidade com a qual fui recebido por cada um nos dias que antecederam à defesa desta tese. Finalmente, registro que este trabalho teve apoio da CAPES.

“A Tales, Elielma, Armando, Sandra, Cleodomira, Mélanie e Beatriz”.

Introdução geral

*“Embora o efeito seja pequeno,
uma confirmação experimental não parece infactível
e pode ser de algum interesse”.*

H.B.G. Casimir, em 1948, sobre a atração entre placas
devido à pressão de ponto zero das ondas eletromagnéticas.

Os tópicos a serem apresentados nesta tese estão diretamente relacionados com o moderno conceito de vácuo, tomado no contexto da física quântica. Nesta introdução tecemos breves comentários sobre a evolução do conceito de vácuo ao longo da história, desde a Grécia antiga, até os dias de hoje, momento em que a física de partículas é descrita pela teoria quântica de campos. Comentamos sobre o efeito Casimir (estático e dinâmico) e sua relevância nas mais diversas áreas da Física e da tecnologia, assim como a importância de outros efeitos relacionados com as flutuações quânticas do vácuo, ou mais precisamente, com a interação de sistemas atômicos com o campo de radiação, tais como a emissão espontânea e o deslocamento Lamb. Dentro desse contexto, justificamos e descrevemos os objetivos deste trabalho.

Desde a época de Aristóteles, ou mesmo desde tempos ainda mais remotos, até os dias de hoje, onde a física de partículas elementares está caracterizada pelo advento da teoria quântica de campos (TQC), as dificuldades conceituais envolvidas nos conceitos fundamentais de espaço, tempo, matéria, movimento e em particular na noção de vácuo têm intrigado e chamado a atenção de filósofos e cientistas.

O modo como físicos e filósofos tentaram, no passado, compreender o conceito de vácuo

oscilou basicamente entre duas idéias, a saber: (i) um espaço vazio (completa ausência de matéria); (ii) um espaço preenchido com alguma matéria muito sutil (como por exemplo o éter luminífero) e portanto com algum tipo de estrutura. Demócrito (460a.C. - 370a.C.), filósofo atomista para quem o vácuo manifestava-se como “intervalos que separam um átomo de outro e um corpo de outro, atribuindo-lhes suas naturezas discretas e permitindo o movimento”, é um exemplo do primeiro ponto de vista. Platão (428a.C.-347a.C.) e Epicuro (321-270a.C.), para quem “a Natureza, no modo como existe, está baseada em duas coisas: existem os corpos e existe o espaço vazio no qual tais corpos estão situados e através do qual eles se movem”, também defendem esse primeiro ponto de vista. Por outro lado, Aristóteles (384a.C.-322a.C.) defendia o segundo ponto de vista. Não aceitava o conceito de espaço vazio e recusava-se a aceitar a noção de vácuo como a completa ausência de matéria.

A doutrina aristotélica da inexistência do vácuo, considerado como ausência total de matéria, começou a ser refutada experimentalmente no século XVII quando, em 1644, Evangelista Torricelli (1608-1647) inventou o barômetro de mercúrio. Torricelli mergulhou a extremidade aberta de um tubo de vidro contendo mercúrio num recipiente que também continha mercúrio, observando que a coluna de mercúrio ao descer deixava um espaço entre a superfície do líquido e a extremidade fechada do tubo. Torricelli sugeriu que nesse espaço um vácuo havia sido criado. Em 1657, Otto von Guericke (1602-1686) mostrou que parselhas de cavalos não eram capazes de separar dois hemisférios ocos de cobre pelo simples motivo de que a ausência de ar no interior dos hemisférios, atingida por meio de uma bomba de ar, permitia que a pressão atmosférica externa mantivesse os hemisférios fortemente unidos. Para Guericke, a região do espaço entre as esferas era ausente de matéria. Aceitava-se então a existência do vácuo como ausência de matéria, mais tarde generalizada para ausência de matéria e radiação.

No século XIX, todas as experiências envolvendo o movimento ondulatório indicavam que era necessário um meio para a propagação de ondas. As equações de Maxwell, publicadas em 1862, conduziam, para o espaço livre, a equações de onda para os campos elétrico e magnético, com velocidade de propagação $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Era natural, portanto,

supor que algum tipo de meio se espalhasse por todo o espaço, incluindo o vácuo de Epicuro, permitindo a produção e propagação de ondas eletromagnéticas. O próprio Maxwell sentiu a necessidade desse meio e denominou-o “éter”. Porém a existência do éter introduz a noção de um sistema preferencial, absoluto, onde o éter está em repouso e no qual a luz propaga-se com velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Em 1888, A. Michelson e E. Morley, usando um interferômetro óptico de fantástica precisão, tentaram medir a velocidade da Terra em relação a tal sistema absoluto, comparando as velocidades da luz medidas em diferentes direções. Entretanto, eles descobriram que a velocidade da luz é exatamente a mesma em todas as direções, o que indica que ou não há um sistema preferencial, ou a Terra está sempre no sistema de referência preferencial. Esta experiência parecia negar a hipótese do sistema absoluto do éter, uma vez que a Terra está variando continuamente sua velocidade em seu movimento em torno do Sol. Contudo, seria possível que a Terra permanecesse no sistema preferencial se arrastasse consigo o éter em seu movimento. Entretanto, fenômenos como a aberração da luz (pequeno desvio na posição aparente de estrelas distantes em direção ao movimento orbital da Terra) não são compatíveis com a hipótese de um “arrastamento do éter”. A existência do éter tornava-se, desse modo, bastante artificial. Em 1905, Einstein, desconsiderando a hipótese do éter, postulou que “a velocidade da luz no espaço vazio é a mesma em todos os sistemas de referência e é independente do corpo emissor”, como um dos dois postulados básicos a partir dos quais a teoria da relatividade especial deriva.

Com o desenvolvimento da física moderna, ou seja, da relatividade e da física quântica, surgiram muitas idéias e conceitos que não tinham lugar na física clássica, como por exemplo a criação e aniquilação de partículas, o princípio da incerteza de Heisenberg e o conceito de energia de ponto zero, entre outros. O estado de vácuo, considerado como o de mais baixa energia do sistema em questão, passa a ser bastante complexo. Nesse estado, partículas podem estar sendo continuamente criadas e aniquiladas, desde que tais processos não violem o princípio da incerteza. Em suas efêmeras existências, tais partículas podem sofrer a influência de agentes externos, como por exemplo, campos eletromagnéticos, campos gravitacionais ou cavidades, de modo que o vácuo quântico

comporta-se como um meio material, capaz de se polarizar, magnetizar ou mesmo se desestabilizar, emitindo partículas reais. Em outras palavras, podemos dizer que no momento o vácuo quântico está longe de ser simplesmente o espaço vazio. Pelo contrário, é interpretado como se fosse um meio bastante complexo com suas próprias propriedades macroscópicas (permeabilidade magnética, permissividade elétrica, etc.), dando origem a várias não linearidades nas teorias físicas. De uma certa forma, é como se Aristóteles estivesse correto e a Natureza realmente abominasse o vazio absoluto.

Usando a eletrodinâmica quântica (EDQ) como um protótipo de uma teoria quântica de campos muito bem sucedida, podemos atribuir ao vácuo da EDQ a existência de vários fenômenos físicos importantes, como por exemplo: o deslocamento Lamb, as forças de van der Waals dispersivas, o efeito Casimir, a emissão espontânea dos átomos, o momento magnético anômalo do elétron, dentre outros (a referência [1] fornece uma discussão bastante acessível de todos esses tópicos).

A EDQ usual trata de processos que ocorrem no espaço livre (ou de sistemas atômicos no espaço livre). Entretanto, isto é apenas uma aproximação para a situação real, onde o sistema está em geral circundado por superfícies metálicas, dielétricas, ou mesmo de outras naturezas. É de fundamental importância estudar a influência da vizinhança de um sistema atômico em suas propriedades radiativas, não apenas a fim de obter medidas mais precisas de quantidades atômicas (como por exemplo o fator $g - 2$ do elétron, ou a constante de Rydberg), mas também controlar ou modificar as propriedades radiativas do sistema atômico em questão (como por exemplo, taxas de emissão espontânea podem ser aumentadas ou suprimidas devido à presença de espelhos a distâncias finitas). Esse ramo da EDQ é conhecido com o nome de eletrodinâmica quântica de cavidades (EDQC) e nos últimos anos tem atraído muito a atenção tanto de físicos teóricos como experimentais, principalmente devido ao enorme avanço tecnológico que permite a realização de experimentos com um alto grau de precisão (veja por exemplo as referências [2, 3] e referências aí mencionadas para uma revisão desse tema).

A EDQC também tem proporcionado o cenário apropriado para o estudo e a realização de experiências recentes envolvendo os conceitos mais fundamentais da mecânica

quântica [4], tais como a decoerência quântica e o emaranhamento quântico, entre outros. Experimentos tipo gato de Schrödinger envolvendo um ou dois átomos e estados do campo de radiação com poucos fótons em cavidades têm sido propostos. Por fim, vale mencionar ainda que a EDQC tem sido uma ferramenta afiada e muito utilizada nos estudos recentes de computação quântica [5, 6]. No entanto, por se tratar de um tema tão vasto, decidimos nos dedicar apenas a alguns tópicos da EDQC, que serão especificados no decorrer desta introdução.

Muito embora o primeiro trabalho relacionado com efeitos de cavidades em EDQ tenha sido escrito por Purcell [7] e publicado em 1946, mostrando que a emissão espontânea associada com as transições do momento magnético nuclear poderia ser amplificada se o sistema fosse acoplado a um circuito elétrico externo ressonante, podemos dizer que os primeiros estudos detalhados sobre efeitos de paredes ou cavidades em EDQ surgiram com os trabalhos de Casimir e Polder [8] e o trabalho original sobre o chamado efeito Casimir [9], ambos publicados em 1948.

No primeiro deles, Casimir e Polder não só confirmaram a conjectura feita por Verwey e Overbeek de que os efeitos de retardamento nas forças de van der Waals entre dois átomos polarizáveis fazia com que estas caíssem mais rapidamente com a distância entre os átomos quando eles estivessem afastados do que quando estivessem próximos (caso em que os efeitos do retardamento são desprezíveis), mas também calcularam a força no regime retardado entre átomos polarizáveis e paredes perfeitamente condutoras. É comum nos referirmos à força entre um átomo (ou molécula) polarizável e uma superfície material em sua vizinhança como força de Casimir e Polder. A verificação experimental do efeito do retardamento nas forças de van der Waals dispersivas só foi possível vinte anos após o trabalho de Casimir e Polder [10], enquanto a comprovação experimental das forças entre átomos e paredes só foi possível recentemente [11].

No trabalho que deu origem ao chamado efeito Casimir, o físico holandês H.B.G. Casimir previu teoricamente a atração entre duas placas paralelas, neutras, perfeitamente condutoras e situadas no vácuo. Trata-se de uma força macroscópica de origem genuinamente quântica, cuja origem está na alteração da energia de ponto zero do campo eletro-

magnético (quantizado) causada pela presença das próprias placas. Tal efeito, denominado efeito Casimir, foi observado pela primeira vez por Sparnaay em 1958 [12], mas com uma precisão tão baixa que o autor foi capaz apenas concluir que os resultados experimentais eram compatíveis com as previsões teóricas. Experimentos diretamente com metais só foram realizados novamente quarenta anos mais tarde, quando Lamoreaux [13], utilizando uma balança de torção e uma disposição geométrica diferente da utilizada por Sparnaay, obteve um notável acordo entre experimento e teoria. Mais recentemente, a utilização de microscópios de força atômica permitiram que vários outros experimentos de Casimir fossem realizados com precisões cada vez melhores [14, 15, 16, 17, 18]

De acordo com a teoria quântica para os campos eletromagnéticos no vácuo, um estado de Fock do campo $|n_1, n_2, \dots\rangle$ é caracterizado pelo número n_1 de fótons que possuem momento \vec{k}_1 e polarização λ_1 , pelo número n_2 de fótons que possuem momento \vec{k}_2 e polarização λ_2 e assim por diante. O estado de vácuo é, por definição, aquele para o qual $n_1 = 0, n_2 = 0, \dots$, ou seja, não há fótons em nenhum dos modos do campo. No entanto, mesmo nesse caso, o valor esperado do hamiltoniano do campo de radiação é diferente de zero. Para cada modo do campo, mesmo sem que haja fótons, haverá ainda uma energia de ponto zero igual a $(1/2)\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, onde $\omega_{\mathbf{k}}$ é a frequência do modo em questão. Como há infinitos modos, a energia do vácuo do campo de radiação é igual à soma dessas energias de ponto zero de cada modo e, portanto, infinita. Embora não tenhamos acesso a essa energia infinita, podemos medir alterações dessa quantidade. Em outras palavras, quaisquer objetos quando colocados no vácuo irão impor condições de contorno ao campo, alterando desse modo as frequências possíveis para os modos do campo. Justamente a diferença entre a energia (infinita) do vácuo com as condições de contorno e a energia (infinita) do vácuo sem as condições de contorno é que será interpretada como a energia de Casimir, a qual teremos acesso e poderemos medir. Obviamente, para dar sentido a essa diferença, um procedimento de regularização deverá ser feito. Para o caso de duas placas perfeitamente condutoras, por exemplo, a densidade de energia de Casimir que se obtém é tal que tais placas se atraem com uma força por unidade de área dada por $F = -\pi^2\hbar c/(240L^4)$, onde c é a velocidade da luz, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck e L é a separação entre

as placas. Quando a separação entre as placas diminui, a pressão de Casimir aumenta rapidamente, atingindo cerca de uma atmosfera quando $L \sim 10nm$. Portanto, quando a separação entre as superfícies é pequena, como no caso de micromáquinas, a força de Casimir tem que ser levada em consideração. A distâncias de poucos nanômetros, a força de Casimir domina sobre outras forças [19], assumindo, dessa forma, um importante papel na tecnologia envolvida no desenvolvimento de sistemas micro e nanoeletromecânicos [18].

Vale mencionar que o caráter atrativo ou repulsivo das forças de Casimir depende de vários fatores: do campo considerado, da dimensão do espaço-tempo e das condições de contorno em questão. Por exemplo, numa esfera condutora de raio a , a força de Casimir eletromagnética é repulsiva, sendo a energia de Casimir dada por $E = 0.92\hbar c/2a$. Para o vácuo do campo de Dirac, confinado no interior de uma esfera de raio a , a energia de Casimir é dada por [20] $E = 0.02\hbar c/a$. É surpreendente que mais de meio século após o surgimento do trabalho original de Casimir, o efeito que leva seu nome ainda guarde algum mistério: ainda não se sabe como antecipar o sinal da força de Casimir numa situação genérica a partir de argumentos qualitativos.

Há várias outras motivações para se estudar o efeito Casimir, uma vez que desempenha um papel relevante em uma variedade de áreas da física, como por exemplo: teoria quântica de campos, física da matéria condensada, física atômica e molecular, gravitação e cosmologia.

Em Cromodinâmica Quântica, no modelo MIT [21], os hadrons são considerados como sacolas que contêm quarks que se movem livremente. Imaginando um hadron de raio a contendo três quarks, a energia de Casimir associada com o campo dos quarks confinados é três vezes a energia de Casimir do campo de Dirac dentro da esfera: $E_{quark} = 0.06\hbar c/a$. Já para a energia de Casimir associada com o campo dos oito gluons, temos, visto que o campo do gluon é matematicamente análogo ao campo do fóton, que a energia de Casimir é oito vezes a energia de Casimir eletromagnética na esfera: $E_{gluon} = 8 \times 0.92\hbar c/2a$. Conseqüentemente a energia de Casimir na sacola é: $E_{casimir} = E_{quark} + E_{gluon} = 0.43\hbar c/a$. Para $a = 1$ fm, essa energia vale cerca de 85 MeV, ou seja, 9% da massa do proton [22]

Nas teorias de Kaluza-Klein, a energia de Casimir oferece um dos mais efetivos meca-

nismos de compatificação espontânea de dimensões espaciais extras. Além dessas motivações, os valores encontrados nos experimentos de Casimir servem para impor vínculos mais fortes do que os já existentes aos parâmetros das interações de longo alcance e partículas elementares leves previstas pelas teorias de calibre unificadas, supersimetria, supergravidade e teoria de cordas [19].

Na Física da Matéria Condensada, o efeito Casimir conduz a forças atrativas e repulsivas entre materiais próximos, relacionado-se com algumas propriedades de filmes finos, tensão superficial, calor latente e fenômenos críticos [19].

Em Gravitação, Astrofísica e Cosmologia, o efeito Casimir surge em espaços-tempo com topologia não trivial, estando relacionado com o processo de inflação.

O efeito Casimir também pode ser entendido como um efeito de campo externo aplicado ao vácuo. É bem conhecido o fato de que o vácuo se polariza na presença de campos externos, de modo que fronteiras podem ser consideradas como um campo externo concentrado [19]. Dessa forma podemos dizer que fronteiras materiais polarizam o vácuo de um campo quantizado, e que a força agindo sobre as fronteiras é um resultado dessa polarização.

Além do efeito Casimir estático, outros efeitos de teoria quântica de campos estão relacionados com a existência das oscilações de ponto-zero. Por exemplo, a criação de partículas do vácuo sujeito a campos externos. Tais campos transferem energia às partículas virtuais (oscilações do vácuo), transformando-as em partículas reais [19]. Tal efeito, que não ocorre no caso de fronteiras estáticas, pode ocorrer se as condições de fronteira dependerem do tempo, podendo haver criação de partículas reais em adição a uma força atuando sobre a fronteira. Esse efeito é chamado efeito Casimir dinâmico. Mudanças nas condições de fronteira podem alterar o efeito Casimir estático e o dinâmico.

Existem várias motivações para o estudo do efeito Casimir dinâmico. Por exemplo, as possíveis conexões com o efeito Unruh-Davies [23, 24], com a física dos buracos negros e com a sonoluminescência ¹ [28], assim como também a sua relevância na questão da

¹A sonoluminescência consiste basicamente do fenômeno da emissão de luz devido à cavitação de bolhas induzida por ondas de ultrassom. O nome “efeito Casimir dinâmico” foi cunhado por Schwinger

decoerência quântica [29]. Físicos experimentais acenam, também, com a possibilidade de, num futuro próximo, serem realizadas medições do efeito Casimir dinâmico.

Em Física Atômica, a interação dos elétrons em um átomo com o campo de radiação, mesmo no estado de vácuo, tanto pode ocasionar emissão de fótons pelo átomo excitado, como também deslocamentos nos níveis de energia desses átomos. O primeiro efeito, denominado emissão espontânea, foi previsto teoricamente por Einstein [30]. O segundo é denominado deslocamento Lamb. Ambos esses efeitos podem ser alterados pela presença de cavidades, uma vez que estas impõem condições de contorno sobre o campo de radiação (no caso no estado de vácuo) que por sua vez interage com o átomo.

No presente trabalho abordamos três assuntos: emissão espontânea, deslocamento Lamb e efeito Casimir dinâmico. Basicamente verificaremos qual a influência que placas infinitamente permeáveis têm nesses efeitos. O primeiro a utilizar placas infinitamente permeáveis no contexto da EDQ de cavidades foi Boyer, que calculou o força *repulsiva* de Casimir entre uma placa perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável [31]. Note que tal mudança nas condições de contorno proposta por Boyer, provoca uma mudança drástica na força de Casimir: ela deixa de ser atrativa, como no caso calculado por Casimir [9], e passa a ser repulsiva. Inspirados nesse fato, alguns trabalhos foram feitos de modo a verificar qual o papel de placas permeáveis em vários outros efeitos relacionados com as flutuações do vácuo [32, 33, 34], em particular, no efeito Scharnhorst [35] (modificação da velocidade de propagação da luz no vácuo devido à presença de placas materiais).

Portanto, a inspiração do presente trabalho consiste na idéia de que a presença de placas permeáveis pode trazer alterações significativas em outros efeitos ligados com a presença de oscilações de ponto zero dos campos, como a emissão espontânea, o deslocamento, em seus últimos trabalhos [25], tentou explicar corretamente a sonoluminescência no contexto da teoria quântica de campos com fronteiras em movimento. Hoje em dia já se sabe que não é a EDQ que fornece a explicação correta para esse fenômeno [26]. No entanto, a tentativa de atribuir às flutuações quânticas do campo eletromagnético a origem da sonoluminescência foi muito frutífera gerando uma boa discussão na literatura [27].

mento Lamb e o efeito Casimir dinâmico.

Já há na literatura um conjunto de trabalhos dedicados ao estudo da influência de paredes perfeitamente condutoras tanto na taxa de emissão espontânea [36, 37, 39, 40, 41, 42], quanto no deslocamento Lamb [39, 43]. A influência de paredes dielétricas neste último efeito também foi estudada [44, 45, 46]. Placas perfeitamente condutoras são comuns no estudo do efeito Casimir dinâmico [47, 48, 49, 50]. Entretanto, havia até o início deste trabalho, uma lacuna quanto ao estudo da influência de placas perfeitamente permeáveis e mistas nesses três efeitos.

Assim sendo, este trabalho é dedicado ao preenchimento parcial dessa lacuna, por meio do estudo da influência de placas perfeitamente permeáveis tanto na taxa de emissão espontânea (capítulo 1), quanto no deslocamento Lamb (capítulo 2). Precisamente, calculamos como a taxa de emissão espontânea varia, quando o átomo é colocado próximo a uma placa perfeitamente permeável, ou entre uma cavidade formada por placas permeáveis paralelas, ou ainda, em uma cavidade onde uma das placas é condutora e a outra, permeável. Calculamos também como os deslocamentos nos níveis de energia atômicos são afetados pela presença de duas placas paralelas e perfeitamente permeáveis.

No capítulo 3, usando um modelo de campo escalar em $1 + 1$ dimensões, simulamos as placas permeáveis com condições de contorno tipo Neumann, a fim de verificar a influência desse tipo de condição no efeito Casimir dinâmico. Obtemos a força dinâmica de Casimir para os casos de uma fronteira oscilante com condição de Neumann, da cavidade oscilante com duas fronteiras de Neumann e da cavidade oscilante com uma das fronteiras de Neumann e a outra de Dirichlet. Calculamos também correções térmicas à força dinâmica de Casimir, motivados pelo fato de que, à temperatura finita, o efeito pode ser aumentado em várias ordens de magnitude [51, 52, 53], tornando sua medição mais próxima de ser realizada.

Neste trabalho, cada capítulo é composto de: (i) um breve resumo dos objetivos do capítulo; (ii) uma introdução específica ao assunto em questão; (iii) os cálculos desenvolvidos e (iv) comentários. Ao final, encontram-se os comentários finais e as perspectivas de novos trabalhos, assim como apêndices contendo deduções de algumas fórmulas usadas.

Capítulo 1

Emissão Espontânea

Neste capítulo calculamos a taxa de emissão espontânea para um átomo de dois níveis em diversas situações, desde o caso em que o átomo está no espaço livre, até os casos onde ele encontra-se próximo a placas materiais. Em particular, calculamos essa taxa nas seguintes situações: *(i)* quando o átomo está próximo a uma placa infinitamente permeável ($\mu \rightarrow \infty$); *(ii)* quando o átomo encontra-se entre duas placas paralelas, uma infinitamente condutora ($\epsilon \rightarrow \infty$) e a outra infinitamente permeável e *(iii)* quando o átomo encontra-se entre duas placas infinitamente permeáveis. O capítulo está organizado como segue. Na seção 1.1 fazemos uma breve introdução ao tema tecendo alguns comentários sobre a influência de placas materiais na vizinhança de um átomo em sua taxa de emissão espontânea. Na seção 1.2 obtemos essa taxa para um átomo no espaço livre, baseando-nos em argumentos termodinâmicos utilizados por Einstein. Na seção 1.3 fazemos um resumo da formulação não-relativística da eletrodinâmica quântica da interação átomo-campo e deduzimos uma fórmula para a taxa de emissão espontânea de um átomo numa situação genérica, válida inclusive na presença de cavidades. Nas seções 1.4, 1.5 e 1.6, calculamos então as alterações na taxa de emissão espontânea nas três situações mencionadas acima. Sempre que possível, comparamos nossos resultados com aqueles encontrados na literatura para o caso de uma ou duas placas perfeitamente condutoras.

1.1 Introdução

Embora possa parecer estranho a primeira vista, um átomo em um estado excitado, como por exemplo o átomo de Hidrogênio em um de seus estados estacionários excitados frequentemente estudados em mecânica quântica não relativística, decai inexoravelmente para o estado fundamental após algum tempo, ainda que não esteja interagindo com campos eletromagnéticos externos, isto é, ainda que esteja no vácuo. Por esse motivo, tal processo denomina-se emissão espontânea de um átomo. No início do século passado, Einstein [30] utilizou argumentos termodinâmicos a sistemas atômicos em equilíbrio térmico com a radiação eletromagnética para obter uma relação entre a taxa de decaimento espontâneo de um átomo e sua taxa de decaimento estimulado por um campo externo. Essa importante relação entre os chamados coeficientes A e B de Einstein nos permitirá mais adiante obter a taxa de decaimento espontâneo de um átomo a partir de sua taxa de decaimento induzido pela radiação térmica.

Antes, porém, de apresentarmos esses cálculos explicitamente, é instrutivo refletir um pouco mais sobre esse fenômeno e tentar entendê-lo conceitualmente um pouco melhor. Surge naturalmente uma questão: como pode um átomo num estado estacionário decair, já que o estado é estacionário? O ponto é que a teoria quântica de campos (no caso a eletrodinâmica quântica) prevê que, mesmo quando o campo encontra-se em seu estado de mais baixa energia, isto é, o estado de vácuo, o campo eletromagnético (quantizado) possui flutuações, de modo que mesmo nessa situação há interação entre o átomo e o campo de radiação. Em outras palavras, um átomo nunca está isolado completamente e poderíamos nos referir ao sistema como sistema “átomo-vácuo” [54]. Nesse sentido, os estados estacionários excitados de um átomo de Hidrogênio, por exemplo, não são verdadeiramente estados estacionários do sistema “átomo-vácuo”, ou melhor dizendo, do sistema átomo-campo de radiação, mesmo que esse último esteja no estado de vácuo.

A descrição adequada do processo de emissão espontânea deve ser feita dentro do contexto da eletrodinâmica quântica, já que sem ela não haveria termo de interação que justificasse o decaimento atômico. Além disso, a quantização do campo eletromagnético leva

naturalmente a uma descrição desse campo em termos de fótons e com isso, não apenas trata em pé de igualdade os processos de absorção e emissão (estimulado ou espontânea), como também justifica a interpretação dos processos de absorção (desaparecimento de um fóton do estado do campo) e emissão (aparecimento de um fóton do estado do campo).

Portanto, no contexto da EDQ, pode-se dizer que a razão para a emissão espontânea de átomos excitados é a interação do átomo com o campo eletromagnético quantizado do estado de vácuo. Uma consequência imediata desse fato é que qualquer modificação nos modos do campo eletromagnético quantizado, ainda que no estado de vácuo, (causada, por exemplo, pela presença de placas materiais ou corpos macroscópicos em geral na vizinhança do átomo), pode alterar, em princípio, as propriedades radiativas dos sistemas atômicos. Dizemos então que a presença de paredes na vizinhança de sistemas atômicos renormaliza suas frequências de transição e também a largura de suas linhas espectrais. O primeiro efeito corresponde à influência de condições de contorno (CC) no espectro de energias atômico¹, enquanto o último, à mudança na taxa de emissão espontânea de átomos excitados. Como já havíamos mencionado na introdução, o ramo da Física que trata da influência que a vizinhança de um sistema atômico exerce em suas propriedades radiativas é chamado genericamente de eletrodinâmica quântica de cavidades (EDQC), sendo que os exemplos mencionados acima são apenas dois entre muitos outros (para uma revisão do tema sugerimos as refs. [2, 3]).

Podemos dizer que a EDQC nasceu com as observações de Purcell [7], há aproximadamente meio século, de que o processo de emissão espontânea associado com o momento nuclear magnético em radio-frequências poderia ser aumentado se o sistema fosse acoplado a um circuito elétrico externo ressonante colocado na vizinhança do sistema. Entretanto, podemos considerar que os primeiros artigos detalhados sobre o assunto foram escritos por Casimir e Polder [8], onde, entre outras coisas, foram calculadas as forças entre átomos polarizáveis e paredes metálicas, e por Casimir [9], onde foi calculada a força atrativa entre duas placas perfeitamente condutoras, neutras e paralelas, devido à alteração causada

¹No átomo de Hidrogênio isso corresponderia à influência de condições de contorno impostas por placas materiais no deslocamento Lamb.

por estas placas nas flutuações do vácuo quântico do campo eletromagnético. Desde então a EDQC tem atraído a atenção de muitos físicos, tanto teóricos quanto experimentais. Particularmente os efeitos da proximidade de paredes planas em sistemas atômicos têm sido investigados. Citamos, por exemplo, o trabalho de Morawitz [36], onde são discutidos, classicamente e quanticamente, a influência de espelhos planos na taxa de emissão espontânea de um átomo de dois níveis. Poucos anos mais tarde, Drexhage [37] observou experimentalmente o comportamento oscilatório do tempo-de-vida atômico em relação à distância do espelho. Em 1983 Goy, Raimond, Gross e Haroche publicaram artigo relatando a primeira observação de aumento na taxa de emissão espontânea de átomos de Rydberg em cavidades (não apenas com uma parede como observado por Drexhage) [38]. Hulet, Hilfer e Kleppner, observaram supressão de emissão espontânea de átomo de Rydberg entre placas paralelas [55]. Gabrielse e Dehmelt fizeram a primeira observação de inibição de decaimento espontâneo não de um átomo, mas de um elétron em movimento sob ação de um campo magnético dentro de uma cavidade de microondas [56]. A primeira observação de efeitos de cavidades em emissão espontânea na região ótica foi feita por De Martini, Innocenti, Jacobovitz e Mataloni [57]. A EDQ de partículas carregadas entre dois espelhos paralelos foi discutida extensivamente por Barton [39, 40], que foi o primeiro a calcular explicitamente a influência de duas placas paralelas e perfeitamente condutoras na taxa de emissão espontânea para uma transição atômica entre estados com simetria esférica [39]. O resultado de Barton foi reobtido por Philpott [41] com um método similar e por Milonni e Knight [42] no contexto do método das imagens.

Uma característica interessante em relação à taxa de emissão espontânea modificada entre dois espelhos condutores é o fato de que, para o caso de um momento de dipolo da transição paralelo às placas, há uma forte supressão para $2L/\lambda_0 < 1$, onde L é a distância entre as placas e λ_0 , o comprimento de onda da transição (veja, por exemplo, a ref. [1]). Essa inibição na emissão espontânea foi observada experimentalmente por Hulet, Hilfer e Kleppner [55]. Muitos outros experimentos interessantes têm sido feitos e nós sugerimos ao leitor interessado os trabalhos de Haroche e Kleppner [54] e Hinds [58], assim como as referências citadas nesses trabalhos.

Embora a influência de placas condutoras na taxa de emissão espontânea tenha sido muito explorada na literatura, o mesmo não pode ser dito com relação a placas permeáveis, mesmo no caso particular de placas infinitamente permeáveis ($\mu \rightarrow \infty$). Em particular, um arranjo interessante de se estudar é o sistema formado por um átomo entre duas placas paralelas, mas de naturezas diferentes, como por exemplo: uma placa infinitamente condutora e outra infinitamente permeável. Tal arranjo não usual de placas foi considerado pela primeira vez por Boyer [31], no contexto da eletrodinâmica estocástica ², para calcular o efeito Casimir em tal situação. Esse arranjo de placas, que daqui para a frente designaremos por arranjo de Boyer, provê o exemplo mais simples onde podemos encontrar forças de Casimir repulsivas. Recentemente, os resultados de Boyer e suas correções térmicas foram reobtidos no contexto da teoria quântica de campos [61, 62]. Condições de contorno de Boyer foram ainda empregadas por Hushwater [63] como um contra-exemplo que mostra que a interpretação ingênua da força de atração de Casimir como devido à diferença entre o número de modos do campo no estado de vácuo na região entre as placas e na região fora das placas não é correta. O arranjo de placas de Boyer foi também empregado em conexão com o efeito Scharnhorst [35], fornecendo mais um exemplo explícito da influência de cavidades na velocidade da luz em seu interior [64, 65].

Neste capítulo, como já foi mencionado, uma das situações a ser estudada é quando o átomo encontra-se no interior de um arranjo de placas de Boyer. Tanto nesse caso, quanto no caso em que as duas placas são infinitamente permeáveis, mostraremos que também ocorre o fenômeno da supressão do decaimento espontâneo. Entretanto, é curioso que essa supressão ocorra quando o momento de dipólo da transição é perpendicular às placas, em contraste com o caso onde as duas placas são perfeitamente condutoras, onde a supressão ocorre quando o momento de dipólo da transição é paralelo às placas. Finalizamos esta seção mencionando que, mesmo fora do contexto da EDQ, há modelos fisicamente aceitáveis, embora não realistas, que podem ser úteis como laboratórios na

²Na eletrodinâmica estocástica as chamadas flutuações de ponto zero do campo eletromagnético, assim como a energia de ponto zero surgem sem que haja necessidade de quantização do campo. Para uma revisão sobre o assunto, sugerimos as referências [59, 60].

compreensão das principais características da influência de condições de contorno nas propriedades radiativas de sistemas atômicos [66].

1.2 Coeficientes de Einstein e a emissão espontânea.

Como já mencionamos na introdução, usando argumentos termodinâmicos e supondo que o equilíbrio térmico entre matéria e radiação é sempre alcançado (o que é verificado experimentalmente), Einstein [30] demonstrou que, além da emissão estimulada, átomos excitados têm que decair espontaneamente. Como já vimos, mesmo um átomo excitado “isolado” no vácuo decai inevitavelmente para o estado fundamental, de modo que um estado estacionário de um átomo não é verdadeiramente estacionário e pode-se dizer que a emissão espontânea não é uma propriedade de um átomo isolado, mas sim de um sistema átomo-vácuo [54]. Nesta seção, calcularemos a taxa de emissão espontânea sem recorrer à EDQ, mas lançando mão de um raciocínio devido a Einstein e da expressão para a taxa de absorção de um átomo na presença da radiação térmica. Seguiremos aqui um procedimento análogo ao apresentado na Ref.[67].

Suponha que um conjunto de átomos de dois níveis³ esteja dentro de uma cavidade perfeitamente refletora contendo radiação eletromagnética. Sejam E_1 e $E_2 > E_1$, as respectivas energias desses níveis. É fato experimental que se o sistema estiver isolado ele atingirá o equilíbrio térmico e nessa situação, teremos átomos dentro da cavidade em equilíbrio térmico com a radiação de corpo negro a uma dada temperatura T . Da distribuição de Planck, sabemos que a intensidade da radiação térmica é dada por:

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1}, \quad (1.1)$$

onde K na última expressão é a constante de Boltzmann. Como os átomos estão em equilíbrio térmico, as populações de átomos nos níveis 1 e 2 devem permanecer as mesmas

³Átomos onde uma transição é dominante podem ser considerados para muitos propósitos como átomos de dois níveis.

com o passar do tempo, de modo que podemos escrever:

$$\mathcal{P}_{1\rightarrow 2} = \mathcal{P}_{2\rightarrow 1} , \quad (1.2)$$

onde $\mathcal{P}_{1\rightarrow 2}$ é a probabilidade total por unidade de tempo da transição do nível 1 para o nível 2 (absorção) e $\mathcal{P}_{2\rightarrow 1}$ é a probabilidade total por unidade de tempo da transição do nível 2 para o nível 1 (emissão).

Seja p_1 a probabilidade de encontrar um átomo no nível 1 e $W_{1\rightarrow 2}$, a probabilidade de transição, por unidade de tempo, do nível 1 para o nível 2, mas com a hipótese de que o átomo já esteja no nível 1 (definições análogas valem para p_2 e $W_{2\rightarrow 1}$). Podemos escrever então que:

$$\mathcal{P}_{1\rightarrow 2} = p_1 W_{1\rightarrow 2} = p_1 I(\omega_{21}) B_{12} , \quad (1.3)$$

onde, por conveniência futura, explicitamos na expressão de W_{12} a intensidade da radiação na frequência de transição, definindo o coeficiente B_{12} de tal modo que $W_{12} =: I(\omega_{21}) B_{12}$.

Por outro lado, na expressão de $\mathcal{P}_{2\rightarrow 1}$ haverá duas contribuições. Uma delas está associada à emissão induzida pela radiação presente e é dada por uma expressão totalmente análoga a que está escrita acima para a probabilidade de absorção. A segunda contribuição está associada ao decaimento espontâneo dos átomos e portanto trata-se de um termo que não é proporcional à intensidade da radiação. Denotando por A_{21} a probabilidade de decaimento espontâneo por unidade de tempo de cada átomo do sistema, escrevemos que:

$$\mathcal{P}_{2\rightarrow 1} = p_2 (W_{2\rightarrow 1} + A_{21}) = p_2 [I(\omega_{21}) B_{21} + A_{21}] . \quad (1.4)$$

Substituindo as equações (1.3) e (1.4) em (1.2) e utilizando a chamada reversibilidade microscópica dos processos de transição induzidos pela radiação (absorção e emissão estimulada) entre os mesmos níveis de energia, o que nos permite escrever que $B_{21} = B_{12}$, temos que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{I(\omega_{21}) B_{12}}{I(\omega_{21}) B_{12} + A_{21}} . \quad (1.5)$$

Por outro lado, sabe-se que no equilíbrio térmico a probabilidade de encontrar o átomo

num estado de energia E_n obedece à distribuição de Boltzmann, de modo que:

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{(E_2-E_1)}{kT}} = e^{-\frac{\hbar \omega_{21}}{kT}} . \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) em (1.5) e resolvendo para A_{21}/B_{12} , obtemos, após utilizar a expressão para a intensidade da radiação térmica dada por (1.1), que:

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^2} , \quad (1.7)$$

resultado obtido por Einstein no início do século passado. Note então que, se conseguirmos calcular a taxa de absorção $W_{1 \rightarrow 2}$ entre os níveis 1 e 2 para um átomo interagindo com uma radiação térmica (lembre-se que $B_{12} = W_{1 \rightarrow 2}/I(\omega_{21})$), teremos automaticamente a expressão desejada para a taxa de decaimento espontâneo de um átomo de dois níveis, isto é, a expressão para A_{21} .

Na aproximação de dipolo, onde as dimensões atômicas são desprezíveis em comparação com os comprimentos de onda dos modos do campo relevantes ao problema, a taxa de transição $W_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon})$ para a absorção de radiação incoerente, linearmente polarizada com vetor de polarização $\hat{\varepsilon}$ e que se propaga na direção \hat{k} ($\hat{k} \cdot \hat{\varepsilon} = 0$), é dada por [67]:

$$W_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}) = \frac{4\pi^2}{c\hbar^2} I(\omega_{21}) |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{d}_{21}|^2 , \quad (1.8)$$

onde \vec{d}_{21} é o momento de dipolo elétrico da transição. Da definição de B_{12} , temos então que $B_{12} = (4\pi^2/c\hbar^2) |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{d}_{21}|^2$. Com o intuito de utilizar esse resultado para obter a taxa de emissão espontânea a partir da Eq.(1.7), note inicialmente que o argumento de equilíbrio termodinâmico entre radiação e matéria empregado por Einstein pode ser aplicado à radiação térmica que se propaga dentro de um ângulo sólido infinitesimal $d\Omega$ em torno de uma certa direção \hat{k} e com uma dada polarização $\hat{\varepsilon}$ desde que se multiplique a intensidade da radiação pela fração correspondente. Devemos então multiplicar a intensidade da radiação térmica pelos fatores $d\Omega/4\pi$ e $1/2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Omega/4\pi \quad - \quad \text{fração que se propaga dentro de } d\Omega \\ 1/2 \quad \quad - \quad \text{fração que se propaga com polarização } \hat{\varepsilon} \end{array} \right. ,$$

pois a radiação térmica é isotrópica e não-polarizada (as duas polarizações ortogonais para cada direção de propagação têm a mesma intensidade). Desse modo, a Eq.(1.7) é substituída por:

$$\frac{\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}) d\Omega}{\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon})/I(\omega_{21})} = \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^2} \times \frac{d\Omega}{4\pi} \times \frac{1}{2}, \quad (1.9)$$

onde $\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}) d\Omega$ é a taxa de emissão espontânea entre os estados de energias E_2 e E_1 , dentro de $d\Omega$ em torno de \hat{k} e com polarização linear dada por $\hat{\varepsilon}$. Utilizando a Eq.(1.8) na equação anterior, temos então que ⁴ :

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}) d\Omega = \frac{\omega_{21}^3}{2\pi \hbar c^3} |\hat{\varepsilon} \cdot \vec{d}_{21}|^2 d\Omega. \quad (1.10)$$

Para uma dada direção, temos que:

$$|\vec{d}_{21}|^2 = |\vec{d}_{21} \cdot \hat{\varepsilon}_1|^2 + |\vec{d}_{21} \cdot \hat{\varepsilon}_2|^2 + |\vec{d}_{21} \cdot \hat{k}|^2,$$

onde $\hat{\varepsilon}_1$ e $\hat{\varepsilon}_2$ são perpendiculares entre si e correspondem a dois modos polarização. Portanto, somando sobre as duas polarizações, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,2} \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}_n) d\Omega &= \frac{\omega_{21}^2}{2\pi \hbar c^3} \left(|\vec{d}_{21}|^2 - |\hat{k} \cdot \vec{d}_{21}|^2 \right) \\ &= \frac{\omega_{21}^2}{2\pi \hbar c^3} |\vec{d}_{21}|^2 \sin^2 \theta d\Omega, \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde designamos por θ o ângulo entre \vec{d}_{21} (supondo que \vec{d}_{21} seja real) e o vetor de propagação \hat{k} . Esse último resultado nos fornece a distribuição angular da radiação emitida (note a presença do termo $\sin^2 \theta$, típica da distribuição angular de radiação de dipolo).

Para encontrarmos a taxa total de emissão espontânea do átomo, basta integrar em todas as direções possíveis. Usando que $\oint \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$, obtemos finalmente:

$$A_{21} = \oint d\Omega \sum_{n=1,2} \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}_n) = \frac{4}{3} \frac{\omega_{21}^3}{\hbar c^3} |\vec{d}_{21}|^2, \quad (1.12)$$

que corresponde precisamente à taxa de emissão espontânea de um átomo de dois níveis no espaço livre. A existência da emissão espontânea faz com que as linhas espectrais não

⁴A intensidade de radiação correspondente é obtida multiplicando-se $\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2}(\hat{k}, \hat{\varepsilon}) d\Omega$ pela energia $\hbar \omega_{21}$ do fóton emitido no processo de decaimento.

sejam exatamente linhas, mas bandas com larguras naturais, ainda que muito pequenas em alguns casos. Finalizamos esta seção lembrando que muitas vezes, devido a regras de seleção, o momento de dipolo de uma transição é nulo, fazendo com que o lado direito da Eq.(1.12) seja nulo. No entanto, isso não significa que não haja emissão espontânea, mas simplesmente que a emissão nesse caso não é via emissão de um único fóton, mas pode ser devido à emissão de dois fótons, por exemplo. Quando isso ocorre, o tempo de vida do estado excitado torna-se bem longo. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

1.3 Teoria não-relativística de átomos no vácuo

Consideremos a Hamiltoniana para o sistema constituído por uma partícula carregada e pelo campo eletromagnético:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (1.13)$$

De acordo com o teorema de Helmholtz, qualquer campo vetorial \vec{E} pode ser dividido em uma parte transversa (\vec{E}^\perp) e outra longitudinal (\vec{E}^\parallel): $\vec{E} = \vec{E}^\perp + \vec{E}^\parallel$, onde $\nabla \cdot \vec{E}^\perp = 0$ e $\nabla \times \vec{E}^\parallel = \vec{0}$. No calibre de Coulomb essa divisão é obviamente dada por: $\vec{E}^\perp = -(1/c)\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{E}^\parallel = -\nabla\phi$, uma vez que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Usando o teorema da divergência e considerando que o campo ϕ (potencial escalar) vá a zero no infinito, ou seja, que a distribuição de cargas ocupe uma região finita do espaço, é imediato verificar que:

$$\int d^3r \vec{E}^2 = \int d^3r \vec{E}^{\perp 2} + 4\pi \int d^3r \rho \phi. \quad (1.14)$$

Suponhamos que um elétron esteja ligado a um núcleo atômico e localizado numa dada posição \vec{r}_0 , aproximadamente fixa. Considerando $\rho = q_N \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$, onde q_N é a carga do núcleo, a função potencial escalar, no calibre de Coulomb, é dada por $\phi = q_N / (|\vec{r} - \vec{r}_0|)$. A Hamiltoniana que descreve a dinâmica do sistema é aproximadamente:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^{\perp 2} + \vec{B}^2), \quad (1.15)$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron e \vec{A} é tomado na posição \vec{r} em que se encontra o elétron. Suponhamos agora que as distâncias sobre as quais o

elétron ligado pode se mover sob o potencial ϕ sejam pequenas se comparadas com o comprimento de onda de qualquer modo do campo com o qual o elétron possua uma interação significativa. Desse modo, é conveniente o uso da *aproximação de dipólo*, na qual $\vec{A}(t, \vec{r}) \approx \vec{A}(t, \vec{r}_0)$.

A passagem para a teoria quântica se dá mapeando \vec{p} , \vec{r} , \vec{A} , \vec{E}^\perp e \vec{B} em operadores que atuam nos espaços de Hilbert correspondentes. A Hamiltoniana do sistema é aproximadamente:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{mc} \vec{A}(t, \vec{r}_0) \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2(t, \vec{r}_0) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^{\perp 2} + \vec{B}^2). \quad (1.16)$$

O potencial vetor transverso é:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \sum_{\alpha} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\alpha}^{\dagger}(t) \vec{A}_{\alpha}^*(\vec{r}) + a_{\alpha}(t) \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) \right), \quad (1.17)$$

onde $\sum_{\alpha} = \sum_{\vec{k}\lambda}$ representa soma nas polarizações e integrações e/ou somatórios em \vec{k} , dependendo dos modos serem caracterizados por índices discretos ou contínuos. Os modos do campo $\vec{A}_{\alpha}(\vec{r})$ obedecem à equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_{\alpha}^2) \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (1.18)$$

onde $k_{\alpha}^2 = \omega_{\alpha}^2/c^2$ e à condição de transversalidade

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) = 0 \quad (1.19)$$

e são escolhidos de maneira a formarem um conjunto ortonormal: $\int d^3r \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\beta}^*(\vec{r}) = \delta_{\alpha\beta}$. Note-se ainda que os modos do campo $\vec{A}_{\alpha}(\vec{r})$ estão *sujeitos a condições de contorno*, e é justamente a imposição de condições de contorno diversas nesses modos e suas consequências para a emissão espontânea e deslocamento Lamb um dos pontos chaves deste trabalho. Usando (1.17) em (1.16), obtemos [1]:

$$H = H_{\text{atomo}} + H_{\text{campo}} + H_{\text{int}}, \quad (1.20)$$

onde

$$H_{\text{atomo}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\phi, \quad (1.21)$$

$$H_{campo} = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} \left[a_{\alpha}^{\dagger}(t)a_{\alpha}(t) + \frac{1}{2} \right] \quad (1.22)$$

e

$$\begin{aligned} H_{int} &= -\frac{e}{mc} \sum_{\alpha} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ a_{\alpha}^{\dagger}(t)\vec{A}_{\alpha}^*(\vec{r}) + a_{\alpha}(t)\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) \right\} \cdot \vec{p} \\ &+ \frac{e^2}{2mc^2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\sqrt{\omega_{\alpha}\omega_{\beta}}} \right) \left(a_{\alpha}^{\dagger}(t)\vec{A}_{\alpha}^*(\vec{r}) + a_{\alpha}(t)\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) \right) \cdot \left(a_{\beta}^{\dagger}(t)\vec{A}_{\beta}^*(\vec{r}) + a_{\beta}(t)\vec{A}_{\beta}(\vec{r}) \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Escreveremos agora a hamiltoniana (1.21) da seguinte forma:

$$H_{atomo} = \left(\sum_i |i\rangle\langle i| \right) H_{atomo} \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i \sigma_{ii}, \quad (1.24)$$

onde $|i\rangle$ denota um autoestado de H_{atomo} , e o conjunto $\{|i\rangle\}$ é completo, de forma que: $\sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{1}$. De maneira semelhante temos que:

$$\vec{p} = \sum_{i,j} \vec{p}_{ij} \sigma_{ij}. \quad (1.25)$$

Usando as definições (1.24) e (1.25), a hamiltoniana (1.20) toma a forma:

$$\begin{aligned} H &= \sum_i E_i \sigma_{ii} + \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} \left(a_{\alpha}^{\dagger}(t)a_{\alpha}(t) + \frac{1}{2} \right) - \hbar \sum_{i,j} \sum_{\alpha} \left[C_{\alpha ij} a_{\alpha}(t) + C_{\alpha ij}^* a_{\alpha}^{\dagger}(t) \right] \sigma_{ij} \\ &+ \frac{e^2}{2mc^2} \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \left(2\pi\hbar c^2 \right) \left(\frac{1}{\omega_{\alpha}\omega_{\alpha'}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(a_{\alpha}^{\dagger}(t)\vec{A}_{\alpha}^*(\vec{r}_0) + a_{\alpha}(t)\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \right) \cdot \left(a_{\alpha'}^{\dagger}(t)\vec{A}_{\alpha'}^*(\vec{r}_0) + a_{\alpha'}(t)\vec{A}_{\alpha'}(\vec{r}_0) \right), \end{aligned} \quad (1.26)$$

onde definimos

$$C_{\alpha ij} = \frac{e}{m} \left(\frac{2\pi}{\hbar\omega_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \cdot \vec{p}_{ij} = ie \left(\frac{2\pi}{\hbar\omega_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_{ij} \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \cdot \vec{r}_{ij}, \quad (1.27)$$

sendo $\omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$. Por simplicidade nos restringiremos a um modelo de dois níveis de energia. Neste modelo o espaço de Hilbert para o átomo é artificialmente truncado

de modo a haver apenas dois estados: $|1\rangle$ e $|2\rangle$, com auto-valores de energia não perturbados E_1 e E_2 , com $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21} = \hbar\omega_0 > 0$.

$$\sum_i E_i \sigma_{ii} = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z + \frac{1}{2} (E_1 + E_2), \quad (1.28)$$

onde

$$\sigma_z = \sigma_{22} - \sigma_{11}. \quad (1.29)$$

Supomos aqui que $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21}$, o que pode ser obtido por meio de uma escolha apropriada das fases das funções de onda atômicas $\langle \vec{r}|1\rangle$ e $\langle \vec{r}|2\rangle$. Conseqüentemente, explorando a anti-simetria de $C_{\alpha ij}$ em relação aos índices i e j , podemos escrever:

$$\sum_{i,j} C_{\alpha ij} \sigma_{ij} = -C_\alpha \sigma_y, \quad (1.30)$$

onde:

$$\sigma_y = i(\sigma_{12} - \sigma_{21}) \quad (1.31)$$

e

$$C_\alpha = -iC_{\alpha 21}. \quad (1.32)$$

Além de σ_z , σ_y , podemos definir também $\sigma_x = \sigma_{12} + \sigma_{21}$. Com isso, é direto verificar que esses três operadores satisfazem à álgebra de spin 1/2 de Pauli:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z; \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x; \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$$

e

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_z.$$

Em termos dos operadores σ ,

$$H = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z + \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha a_\alpha^\dagger(t) a_\alpha(t) + \hbar \sum_\alpha \left(C_\alpha a_\alpha(t) + C_\alpha^* a_\alpha^\dagger(t) \right) \sigma_y + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2, \quad (1.33)$$

onde as constantes aditivas $\sum_\alpha \hbar\omega_\alpha/2$ e $(1/2)(E_1 + E_2)$ foram descartadas. Os operadores σ_{12} e σ_{21} têm as seguintes propriedades:

$$\sigma_{12}|1\rangle = 0, \quad \sigma_{12}|2\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_{21}|1\rangle = |2\rangle, \quad \sigma_{21}|2\rangle = 0, \quad (1.34)$$

que nos permitem interpretá-los como operadores de elevação e abaixamento, motivo pelo qual passaremos a denominá-los: $\sigma = \sigma_{12}$ e $\sigma^\dagger = \sigma_{21}$. É direto verificar que:

$$[\sigma, \sigma^\dagger] = -\sigma_z, \quad [\sigma, \sigma_z] = 2\sigma. \quad (1.35)$$

As equações dinâmicas na representação de Heisenberg são:

$$i\hbar\dot{\sigma}_{ij} = [\sigma_{ij}, H], \quad i\hbar\dot{a}_\alpha = [a_\alpha, H], \quad (1.36)$$

as quais, através do uso das relações de comutação:

$$[\sigma_{ij}, \sigma_{kl}] = \delta_{jk}\sigma_{il} - \delta_{li}\sigma_{kj}; \quad [a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}; \quad [a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0; \quad [\sigma_{ij}(t), a_\alpha(t)] = 0,$$

são escritas como:

$$\dot{\sigma} = -i\omega_0\sigma + \sum_\alpha \left(C_\alpha a_\alpha(t) + C_\alpha^* a_\alpha^\dagger(t) \right) \sigma_z, \quad (1.37)$$

$$\dot{\sigma}_z = -2 \sum_\alpha \left(C_\alpha a_\alpha(t) + C_\alpha^* a_\alpha^\dagger(t) \right) (\sigma + \sigma^\dagger), \quad (1.38)$$

$$\dot{a}_\alpha = -i\omega_\alpha a_\alpha + C_\alpha^* (\sigma - \sigma^\dagger). \quad (1.39)$$

Em (1.39) nós ignoramos o efeito do termo A^2 [1]. Visto que os operadores atômicos e de campo, tomados em tempos iguais, comutam, nós podemos escrever as equações de Heisenberg (1.37) e (1.38) de maneiras diferentes, mas equivalentes. Usaremos aqui os operadores a_α à direita e os operadores a_α^\dagger à esquerda dos operadores atômicos:

$$\dot{\sigma} = -i\omega_0\sigma + \sum_\alpha \left(C_\alpha \sigma_z a_\alpha(t) + C_\alpha^* a_\alpha^\dagger(t) \sigma_z \right), \quad (1.40)$$

$$\dot{\sigma}_z = -2 \sum_\alpha \left[C_\alpha (\sigma + \sigma^\dagger) a_\alpha(t) + C_\alpha^* a_\alpha^\dagger(t) (\sigma + \sigma^\dagger) \right], \quad (1.41)$$

ordenamento de operadores conhecido como *ordenamento normal*. A solução formal da equação (1.39) é:

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) &= a_\alpha(0)e^{-i\omega_\alpha t} + C_\alpha^* \int_0^t du \left(\sigma(u) - \sigma^\dagger(u) \right) e^{i\omega_\alpha(u-t)} \\ &= a_\alpha(0)e^{-i\omega_\alpha t} + a_{\alpha,f}(t), \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde $a_{\alpha,f}(t)$ é a contribuição a $a_{\alpha}(t)$ relacionada com a presença de uma fonte, que, no presente modelo, é o átomo de dois níveis. Agora, se usamos (1.42) em (1.40) e tomamos o valor esperado sobre os estados iniciais do campo e do átomo $|vac\rangle |\psi[A]\rangle$, onde $|\psi[A]\rangle$ é um estado arbitrário do átomo de dois níveis, obtemos:

$$\langle \dot{\sigma}(t) \rangle = -i\omega_0 \langle \sigma(t) \rangle + \sum_{\alpha} \left[\langle \sigma_z(t) C_{\alpha} a_{\alpha,f}(t) \rangle + \langle C_{\alpha}^* a_{\alpha,f}^{\dagger}(t) \sigma_z(t) \rangle \right]. \quad (1.43)$$

Agora vamos calcular o termo :

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} a_{\alpha,f}(t) = \sum_{\alpha} |C_{\alpha}|^2 \int_0^t dt' \left(\sigma(t') - \sigma^{\dagger}(t') \right) e^{i\omega_{\alpha}(t'-t)}. \quad (1.44)$$

Vamos supor que o acoplamento átomo-campo seja suficientemente fraco, de modo que possamos fazer a substituição

$$\sigma(t) \approx \sigma(t') e^{-i\omega_0(t-t')}. \quad (1.45)$$

em (1.44) e desse modo obter:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} C_{\alpha} a_{\alpha,f}(t) &\approx \sum_{\alpha} |C_{\alpha}|^2 \sigma(t) \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\alpha}-\omega_0)(t'-t)} \\ &\quad - \sum_{\alpha} |C_{\alpha}|^2 \sigma(t)^{\dagger} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\alpha}+\omega_0)(t'-t)}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade anterior pode ser escrito como:

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{2\pi e^2 \omega_0^2}{\hbar \omega_{\alpha}} \right) |\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \cdot \vec{r}_{21}|^2 \sigma(t) \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\alpha}-\omega_0)(t'-t)} \quad (1.47)$$

Se, por exemplo, o átomo em questão estiver no espaço livre, ou entre 2 placas paralelas ao plano \mathcal{OXY} , \sum_{α} terá, respectivamente, as seguintes formas:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} &\rightarrow \sum_{\lambda} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k, \\ \sum_{\alpha} &\rightarrow \sum_{\lambda} \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Se, conforme os casos ilustrados acima, entendemos a integral no tempo “ t' ” em (1.47):

$$\int_0^t dt' e^{i(\omega_{\alpha}-\omega_0)(t'-t)} = -i \left[\frac{1 - \cos[(\omega_{\alpha} - \omega_0)t]}{\omega_{\alpha} - \omega_0} \right] + \frac{\text{sen}[(\omega_{\alpha} - \omega_0)t]}{\omega_{\alpha} - \omega_0}, \quad (1.49)$$

como aparecendo dentro de outra integral em “ k ”, podemos tratá-la como segue. Primeiramente observamos que o termo entre chaves na expressão (1.49) é tal que:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left\{ \frac{1 - \cos[(\omega - \omega_0)t]}{\omega - \omega_0} \right\} = 0. \quad (1.50)$$

Em seguida, consideramos $\omega_0 t \gg 1$. Nessa situação o termo $\cos(\omega_\alpha - \omega_0)t$ oscila muito rapidamente, sobrevivendo, efetivamente, apenas a contribuição de $(\omega_\alpha - \omega_0)^{-1}$:

$$-i \left\{ \frac{1 - \cos[(\omega - \omega_0)t]}{\omega - \omega_0} \right\} \rightarrow -iP \left(\frac{1}{\omega_\alpha - \omega_0} \right), \quad (1.51)$$

onde P denota a parte principal de Cauchy. Analogamente, o segundo termo em (1.49) efetivamente pode ser considerado nulo, a menos que $\omega_\alpha = \omega_0$, quando vale t :

$$\frac{\text{sen}[(\omega_\alpha - \omega_0)t]}{\omega_\alpha - \omega_0} \rightarrow \pi \delta(\omega_\alpha - \omega_0). \quad (1.52)$$

De um modo similar:

$$\int_0^t dt' e^{i(\omega_\alpha + \omega_0)(t'-t)} \rightarrow -i \left(\frac{1}{\omega_\alpha + \omega_0} \right). \quad (1.53)$$

Usando as equações (1.51), (1.52) e (1.53) em (1.47), obtemos:

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha,f}(t) \approx (\beta - i\Delta_2)\sigma(t) + i\Delta_1\sigma^\dagger(t), \quad (1.54)$$

onde definimos:

$$\beta = \frac{2\pi^2\omega_0^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \frac{|\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \cdot \vec{d}_{12}|^2}{\omega_{\alpha}} \delta(\omega_{\alpha} - \omega_0), \quad (1.55)$$

$$\Delta_2 = \frac{-i2\pi\omega_0^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \frac{|\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \cdot \vec{d}_{12}|^2}{\omega_{\alpha}} P \left(\frac{1}{\omega_{\alpha} - \omega_0} \right), \quad (1.56)$$

$$\Delta_1 = \frac{i2\pi\omega_0^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \frac{|\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_0) \cdot \vec{d}_{12}|^2}{\omega_{\alpha}} \left(\frac{1}{\omega_{\alpha} + \omega_0} \right), \quad (1.57)$$

e $\vec{d}_{12} = e\vec{r}_{12}$ é o momento de dipolo da transição. Substituindo (1.54) em (1.40), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}(t) \rangle &\approx -i\omega_0 \langle \sigma(t) \rangle + (\beta - i\Delta_2) \langle \sigma_z(t)\sigma(t) \rangle + i\Delta_1 \langle \sigma_z(t)\sigma^\dagger(t) \rangle \\ &\quad + (\beta + i\Delta_2) \langle \sigma^\dagger(t)\sigma_z(t) \rangle - i\Delta_1 \langle \sigma(t)\sigma_z(t) \rangle \\ &= -i\omega_0 \langle \sigma(t) \rangle - [\beta - i(\Delta_2 - \Delta_1)] \langle \sigma(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [\beta + i(\Delta_2 - \Delta_1) \langle \sigma^\dagger(t) \rangle] \\
= & -i[\omega_0 - (\Delta_2 - \Delta_1)] \langle \sigma(t) \rangle - \beta \langle \sigma(t) \rangle \\
& - [\beta + i(\Delta_2 - \Delta_1)] \langle \sigma^\dagger(t) \rangle,
\end{aligned} \tag{1.58}$$

onde foram empregadas as identidades $\sigma_z(t)\sigma = -\sigma$, $\sigma(t)\sigma_z = \sigma$, assim como seus hermitianos conjugados. De acordo com (1.45), a evolução temporal de $\langle \sigma(t) \rangle$ é, em primeira aproximação, uma oscilação proporcional a $e^{-i\omega_0 t}$ e a evolução temporal de $\sigma^\dagger(t)$, proporcional a $e^{i\omega_0 t}$. Pode-se mostrar que o efeito de $\langle \sigma^\dagger(t) \rangle$ em $\langle \sigma(t) \rangle$ na equação (1.58) pode ser desprezado [1], o que nos leva a:

$$\langle \dot{\sigma}(t) \rangle \approx -i[\omega_0 - (\Delta_2 - \Delta_1)] \langle \sigma(t) \rangle - \beta \langle \sigma(t) \rangle. \tag{1.59}$$

É possível mostrar que 2β é a taxa de emissão espontânea $A_{21}(\vec{r})$ para a transição $2 \rightarrow 1$ em um átomo na posição \vec{r} [1]:

$$A_{21}(\vec{r}) = \frac{4\pi^2\omega_0^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \frac{1}{\omega_{\alpha}} |\vec{A}_{\alpha}(\vec{r}) \cdot \vec{d}_{12}|^2 \delta(\omega_{\alpha} - \omega_0), \tag{1.60}$$

onde ω_0 corresponde à frequência de transição, \vec{d}_{12} é o momento de dipólo da transição e cada modo do campo de radiação $\vec{A}_{\alpha}(\vec{r})$ no vácuo é caracterizado pelo vetor de onda \vec{k} e uma dada polarização. É possível mostrar também que $-(\Delta_2 - \Delta_1)$ representa o deslocamento na frequência de transição ω_0 [1].

Essa fórmula é bastante conveniente, já que vale tanto para um átomo no espaço livre, quanto próximo a uma placa material ou mesmo dentro de uma cavidade. Para ganharmos confiança nesse resultado, vamos reobter a taxa de emissão espontânea para o caso em que o átomo está no espaço livre (sem fronteiras). Nesse caso, o potencial vetor é:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left[a_{\vec{k}\lambda}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}, \tag{1.61}$$

cujos modos são dados por:

$$\vec{A}_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}) = V^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{1.62}$$

onde $\lambda = 1, 2$ e os vetores unitários reais $\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}$ especificam a polarização de cada modo do campo, sendo $\vec{k} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda} = 0$, o que provém da condição de transversalidade $\nabla \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) = 0$.

Também $\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}$ são escolhidos de modo que $\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda_1} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda_2} = \delta_{\lambda_1\lambda_2}$. Substituindo (1.62) em (1.60) obtemos:

$$A_{21}(\vec{r}) = \frac{\omega_0^2}{2\hbar\pi c^2} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{k} |\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{d}_{12}|^2 \delta(\vec{k} - \vec{k}_0), \quad (1.63)$$

onde, como de costume, $\sum_{\vec{k}\lambda} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$. Utilizando-nos do fato de que \vec{k} , $\hat{\epsilon}_{\vec{k}1}$ e $\hat{\epsilon}_{\vec{k}2}$ são perpendiculares entre si, formando uma base em três dimensões, podemos escrever que:

$$\vec{d}_{12} = (\vec{d}_{12} \cdot \hat{k})\hat{k} + \sum_{\lambda=1,2} (\vec{d}_{12} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda})\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}, \quad (1.64)$$

de onde deduzimos que:

$$\sum_{\lambda=1,2} |(\vec{d}_{12} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda})|^2 = |\vec{d}_{12}|^2 - |\vec{d}_{12} \cdot \hat{k}|^2. \quad (1.65)$$

Usando (1.65) em (1.63), obtemos:

$$\begin{aligned} A_{21}(\vec{r}) &= \frac{\omega_0^2}{\hbar c^2} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^\infty dk k \delta(k - k_0) \\ &= \frac{4\omega_0^3 |\vec{d}_{12}|^2}{3\hbar c^3}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

expressão conhecida como taxa de emissão espontânea de Einstein, que aqui simbolizaremos por A_{21}^0 . Portanto:

$$A_{21}^0 = \frac{4\omega_0^3 |\vec{d}_{12}|^2}{3\hbar c^3}. \quad (1.67)$$

Na próxima seção tomaremos como ponto de partida para a taxa de emissão espontânea a fórmula dada por (1.60) e, considerando diferentes condições de contorno para $\vec{A}_\alpha(\vec{r})$, verificaremos a influência dessas condições na taxa de emissão espontânea.

1.4 Uma placa perfeitamente permeável

Consideremos como nosso primeiro exemplo, uma placa plana, de área infinita e perfeitamente permeável ($\mu \rightarrow \infty$) no vácuo. Escolhemos os eixos cartesianos de tal forma que o eixo \mathcal{OZ} seja perpendicular à placa e que esta esteja localizada em $z = 0$. O campo eletromagnético deve satisfazer a seguinte condição de contorno: as componentes tangenciais

B_x e B_y do campo magnético se anulam sobre a placa permeável em $z = 0$. É conveniente trabalhar com o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ no calibre de Coulomb, no qual $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$, $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\partial\vec{A}(\vec{r}, t)/\partial t$ e $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$. É conveniente traduzir as condições de contorno nos campos para condições de contorno sobre o potencial vetor. Com a nossa escolha de calibre, pode-se mostrar que:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial A_y}{\partial z}(t, x, y, 0) = A_z(t, x, y, 0) = 0 \quad (1.68)$$

Os modos do campo \vec{A} , que satisfazem essas condições, são dados por:

$$\vec{A}_{\vec{k}_1}(\vec{r}) = \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} (\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cos(k_3 z) e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \quad (1.69)$$

e

$$\vec{A}_{\vec{k}_2}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \left\{ k_{\parallel} \hat{z} \sin(k_3 z) + i(k_3) \hat{k}_{\parallel} \cos(k_3 z) \right\}, \quad (1.70)$$

onde definimos $\vec{k}_{\parallel} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$. Para calcularmos a taxa de emissão espontânea dada por (1.60), calculamos inicialmente, a partir das equações (1.69) e (1.70), as expressões:

$$|\vec{A}_{\vec{k}_1} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 = \frac{2}{V} \cos^2(k_3 z) |(\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2, \quad (1.71)$$

e

$$\begin{aligned} |\vec{A}_{\vec{k}_2} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 &= \left(\frac{2}{Vk^2}\right) |\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 \sin^2(k_3 z) |\vec{k}_{\parallel}|^2 + \left(\frac{2}{Vk^2}\right) |\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 \cos^2(k_3 z) k_3^2 \\ &+ \left(\frac{i}{Vk^2}\right) \sin(2k_3 z) (k_3) |\vec{k}_{\parallel}| \left[(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel*}) (\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}) - (\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}) (\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel*}) \right]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Substituindo (1.71) e (1.72) em (1.60), obtemos:

$$A_{21}(z) = A_{21}^{\perp}(z) + A_{21}^{\parallel}(z), \quad (1.73)$$

onde

$$A_{21}^{\perp}(z) := \frac{\omega_0^2 |\vec{d}_{12}^{\perp}|^2}{c^2 \pi \hbar} \int dk_3 \sin^2(k_3 z) \int d^2 k_{\parallel} \frac{k_{\parallel}^2 \delta(k - k_0)}{k^3} \quad (1.74)$$

e

$$A_{21}^{\parallel}(z) := \frac{\omega_0^2}{\pi \hbar} \int dk_3 \cos^2(k_3 z) \int d^2 k_{\parallel} \left[|(\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 + k_3^2 \frac{|\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2}{k^2} \right] \frac{\delta(\omega_k - \omega_0)}{\omega_k} \quad (1.75)$$

são as contribuições para a taxa de emissão espontânea associadas com a componente perpendicular à placa do momento de dipolo da transição, \vec{d}_{12}^{\perp} , e com a componente paralela à placa do momento de dipolo da transição, \vec{d}_{12}^{\parallel} , respectivamente. Essa divisão, isto é, escrever $A_{21}(z)$ como a soma de uma parte que só depende de \vec{d}_{12}^{\perp} e outra que só depende de \vec{d}_{12}^{\parallel} , ocorre porque os termos “cruzados” em (1.72), que contêm $(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp})(\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel})$, não contribuem para a taxa de emissão visto que:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2 \omega_0^2}{\hbar} \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{i}{V k^2} \right) \sin(2k_3 z) k_3 |\vec{k}_{\parallel}| \left[(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp*}) (\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}) - (\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp}) (\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel*}) \right] \\ &= \frac{i\omega_0^2}{c^2 L \hbar} \int dk_3 k_3 \sin(2k_3 z) \int dk_1 \int dk_2 \frac{(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)}{(k_1^2 + k_2^2 + (k_3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} \delta\left(\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + (k_3)^{\frac{1}{2}}} - k_0\right) \\ &= \frac{i\omega_0^2}{c^2 L \hbar} \int dk_3 k_3 \sin(2k_3 z) \int dk_{\parallel} \frac{k_{\parallel}^2}{(k_{\parallel}^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}} \delta\left(\sqrt{k_{\parallel}^2 + (k_3)^{\frac{1}{2}}} - k_0\right) \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta [\alpha_1 \cos(\theta) + \alpha_2 \sin(\theta)] \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (1.76)$$

O resultado nulo deve-se à integração sobre a variável θ . Na equação (1.76) usamos que

$$\vec{d}_{12} = d_{12}^{(1)} \hat{x} + d_{12}^{(2)} \hat{y} + d_{12}^{(3)} \hat{z}; \quad \alpha_1 = d_{12}^{(3)*} d_{12}^{(1)} - d_{12}^{(3)} d_{12}^{(1)*}; \quad \alpha_2 = d_{12}^{(3)*} d_{12}^{(2)} - d_{12}^{(3)} d_{12}^{(2)*}$$

e fizemos a mudança nas variáveis de integração:

$$\int dk_1 \int dk_2 \rightarrow \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\theta .$$

A fim de resolver a integrais em (1.74) e (1.75) usamos primeiramente a função $\delta(k - k_0)$ para substituir $1/k^3$ por $1/k_0^3$ e, em seguida, fazemos uso da seguinte propriedade da função

delta de Dirac:

$$\delta\left(\sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi z}{L}\right)^2} - k_0\right) = \frac{\delta(k_3 - \sqrt{\xi}) k_0}{\sqrt{\xi}} + \frac{\delta(k_3 + \sqrt{\xi}) k_0}{\sqrt{\xi}}, \quad (1.77)$$

onde $\xi = -k_{\parallel}^2 + k_0^2$. Além disso, faremos a mudança nas variáveis de integração: $\int dk_1 \int dk_2 \rightarrow \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\theta$. Com isso, obtemos para $A_{21}^{\perp}(z)$:

$$\begin{aligned} A_{21}^{\perp}(z) &= \frac{2\bar{d}_{12}^{\perp 2}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sin^2(k_3 z) \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel}^3 \left[\frac{\delta(k_3 - \sqrt{\xi}) + \delta(k_3 + \sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \right] \\ &= \frac{4\bar{d}_{12}^{\perp 2}}{\hbar} \int_0^{k_0} dk_{\parallel} k_{\parallel}^3 \frac{\sin^2(\sqrt{\xi} z)}{\sqrt{\xi}} \\ &= A_{21}^{0\perp} \left[1 + \frac{3 \cos(2k_0 z)}{4k_0^2 z^2} - \frac{3 \sin(2k_0 z)}{8k_0^3 z^3} \right], \end{aligned} \quad (1.78)$$

onde $A_{21}^{0\perp} = \frac{4|\bar{d}_{12}^{\perp}|^2 \omega_0^3}{3\hbar c^3}$ é a contribuição para a taxa de emissão espontânea no espaço sem fronteiras, associada com \bar{d}_{12}^{\perp} .

Já para $A_{21}^{\parallel}(z)$ temos que:

$$\begin{aligned} A_{21}^{\parallel}(z) &= \left(\frac{k_0^2}{\pi \hbar} \right) \int d^3 k \frac{\cos^2(k_3 z)}{k_{\parallel} \sqrt{\xi}} \left\{ k_1^2 |d_{12}^{(2)}|^2 + k_2^2 |d_{12}^{(1)}|^2 - k_1 k_2 \left(d_{12}^{(1)*} d_{12}^{(2)} + d_{12}^{(2)*} d_{12}^{(1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_3^2}{k_0^2} \left[k_1^2 |d_{12}^{(1)}|^2 + k_2^2 |d_{12}^{(2)}|^2 + k_1 k_2 \left(d_{12}^{(1)*} d_{12}^{(2)} + d_{12}^{(2)*} d_{12}^{(1)} \right) \right] \left[\delta(k_3 - \sqrt{\xi}) + \delta(k_3 + \sqrt{\xi}) \right] \right\} \\ &= \left(\frac{k_0^2}{\pi \hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_0^{k_0} dk_{\parallel} k_{\parallel}^2 \frac{\cos^2(k_3 z)}{k_{\parallel} \sqrt{\xi}} \left[\delta(k_3 - \sqrt{\xi}) + \delta(k_3 + \sqrt{\xi}) \right] \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \cos^2(\theta) |d_{12}^{(2)}|^2 + \sin^2(\theta) |d_{12}^{(1)}|^2 - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(d_{12}^{(1)*} d_{12}^{(2)} + d_{12}^{(2)*} d_{12}^{(1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_3^2}{k_0^2} \left[\cos^2(\theta) |d_{12}^{(1)}|^2 + \sin^2(\theta) |d_{12}^{(2)}|^2 + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(d_{12}^{(1)*} d_{12}^{(2)} + d_{12}^{(2)*} d_{12}^{(1)} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{-2|\bar{d}_{12}^{\parallel}|^2}{\hbar} \int_0^{k_0} dk_{\parallel} \frac{\cos^2(\sqrt{\xi} z)}{\sqrt{\xi}} k_{\parallel} (k_{\parallel}^2 - 2k_0^2) \\ &= A_{21}^{0\parallel} \left(1 + \frac{3 \sin(2k_0 z)}{4k_0 z} + \frac{3 \cos(2k_0 z)}{8k_0^2 z^2} - \frac{3 \sin(2k_0 z)}{16k_0^3 z^3} \right), \end{aligned} \quad (1.79)$$

onde $A_{21}^{0\parallel} = \frac{4|\bar{d}_{12}^{\parallel}|^2 \omega_0^3}{3\hbar c^3}$ é a contribuição para a taxa de emissão espontânea no espaço sem fronteiras, associada com \bar{d}_{12}^{\parallel} . Note que $A_{21}^0 = A_{21}^{0\parallel} + A_{21}^{0\perp} = \frac{4|\bar{d}_{12}|^2 \omega_0^3}{3\hbar c^3}$ e, considerando que

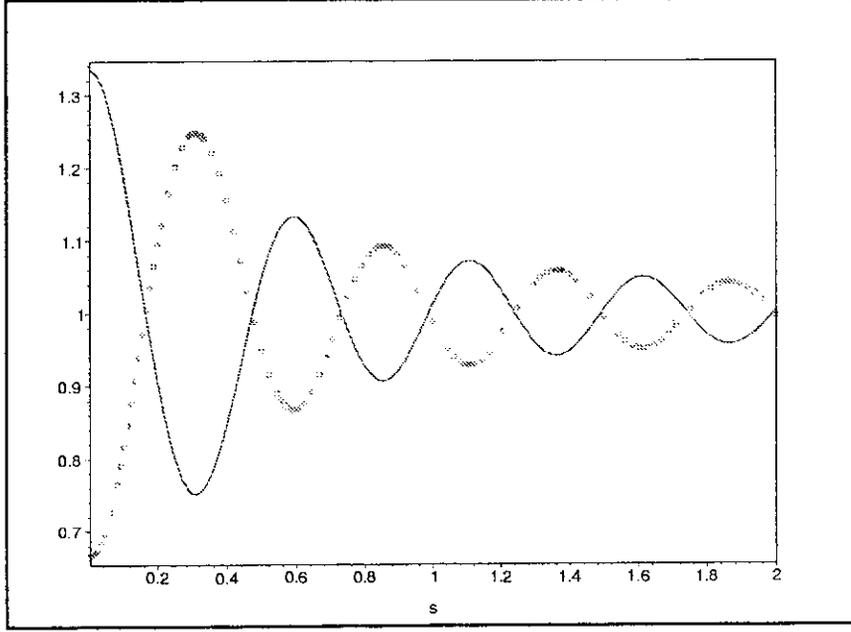


Figura 1.1: A razão A_{21}/A_{21}^0 como função da variável adimensional $s = z/\lambda_0$ para o caso de uma placa infinitamente permeável (linha sólida), uma placa perfeitamente condutora (tracejada).

$|\vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 = (2/3)|\vec{d}_{12}^{\perp}|^2$ e $|\vec{d}_{12}^{\perp}|^2 = (1/3)|\vec{d}_{12}^{\parallel}|^2$, temos que:

$$\begin{cases} A_{21}^{0\perp} = \frac{1}{3}A_{21}^0 \\ A_{21}^{0\parallel} = \frac{2}{3}A_{21}^0 \end{cases} \quad (1.80)$$

Usando (1.80) em (1.78) e (1.79), e estas últimas em (1.73), obtemos:

$$A_{21}(z) = A_{21}^0 \left[1 + \frac{\sin(2k_0z)}{2k_0z} + \frac{\cos(2k_0z)}{2k_0^2z^2} - \frac{\cos(2k_0z)}{4k_0^3z^3} \right]. \quad (1.81)$$

A fim de compararmos a expressão para a taxa de emissão espontânea na presença de uma parede infinitamente permeável, dada em (1.81), com a taxa $A_{21}^{conduct}$, obtida na presença de uma parede perfeitamente condutora, escreveremos a expressão para esta última a seguir:

$$A_{21}^{conduct}(z) = A_{21}^0 \left[1 - \frac{\sin(2k_0z)}{2k_0z} - \frac{\cos(2k_0z)}{2k_0^2z^2} + \frac{\sin(2k_0z)}{4k_0^3z^3} \right]. \quad (1.82)$$

A figura (1.1) mostra a razão entre A_{21} e A_{21}^0 como função de $s = z/\lambda_0$ para o caso de uma placa condutora (linha tracejada) e o caso de uma placa permeável (linha sólida). Ambas as curvas apresentam oscilações na taxa de emissão espontânea com a distância do átomo em relação à placa. Entretanto, há uma notável diferença entre essas duas curvas: se há

aumento na taxa de emissão espontânea na primeira, há diminuição na taxa da segunda e vice-versa. Particularmente seu comportamento próximo às placas é muito diferente.

1.5 Duas placas perfeitamente permeáveis

A segunda configuração que nós iremos considerar consiste de duas superfícies infinitas e paralelas (as placas), ambas consideradas perfeitamente permeáveis ($\mu \rightarrow \infty$). Também aqui iremos escolher eixos cartesianos de tal forma que o eixo \mathcal{OZ} seja perpendicular a ambas as superfícies. A origem dos eixos é escolhida de modo que as placas estejam localizadas em $z = 0$ e em $z = L$. O campo eletromagnético tem que satisfazer as seguintes condições de contorno: as componentes tangenciais B_x e B_y do campo magnético se anulam sobre ambas as placas permeáveis em $z = 0$ e $z = L$. Novamente é conveniente trabalhar com o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ no calibre de Coulomb, sendo que as condições de contorno acima, escritas como condições impostas nas componentes do potencial vetor, são:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial A_y}{\partial z}(t, x, y, 0) = A_z(t, x, y, 0) = 0 \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}(t, x, y, L) = \frac{\partial A_y}{\partial z}(t, x, y, L) = A_z(t, x, y, L) = 0 \quad (1.84)$$

Os modos do campo \vec{A} , que satisfazem essas condições de contorno, são dados por:

$$\vec{A}_{\vec{k}_1}(\vec{r}) = \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} (\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cos\left(n\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \quad (1.85)$$

e

$$\vec{A}_{\vec{k}_2}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \left\{ k_{\parallel} \hat{z} \sin\left(n\frac{\pi z}{L}\right) + i\left(\frac{n\pi}{L}\right) \hat{k}_{\parallel} \cos\left(n\frac{\pi z}{L}\right) \right\}. \quad (1.86)$$

A fim de calcularmos a taxa de emissão espontânea dada por (1.60), calculamos inicialmente, a partir dos modos (1.85) e (1.86), as expressões:

$$|\vec{A}_{\vec{k}_1} \cdot \vec{a}_{12}|^2 = \frac{2}{V} \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) |(\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cdot \vec{a}_{12}^{\parallel}|^2, \quad (1.87)$$

e

$$\begin{aligned}
|\vec{A}_{\vec{k}_2} \cdot \vec{d}_{12}|^2 &= \left(\frac{2}{V k^2} \right) |\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^\perp|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) |\vec{k}_\parallel|^2 \\
&+ \left(\frac{2}{V k^2} \right) |\hat{k}_\parallel \cdot \vec{d}_{12}^\parallel|^2 \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{i}{V k^2} \right) \sin\left(\frac{2n\pi z}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right) |\vec{k}_\parallel| \left[\left(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp*} \right) \left(\hat{k}_\parallel \cdot \vec{d}_{12}^\parallel \right) - \left(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^\perp \right) \left(\hat{k}_\parallel \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel*} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Substituindo (1.87) e (1.88) em (1.60), obtemos:

$$A_{21}(z) = A_{21}^\perp(z) + A_{21}^\parallel(z), \tag{1.89}$$

onde

$$A_{21}^\perp(z) = \frac{2\omega_0^2 |\vec{d}_{12}^\perp|^2}{\hbar L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \int d^2 k_\parallel \frac{k_\parallel^2 \delta(\omega_k - \omega_0)}{\omega_k k^2} \tag{1.90}$$

e

$$A_{21}^\parallel(z) = \frac{2\omega_0^2}{\hbar L} \sum_{n=0}^{\infty} \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \int d^2 k_\parallel \left[|(\hat{k}_\parallel \times \hat{z}) \cdot \vec{d}_{12}^\parallel|^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{|\hat{k}_\parallel \cdot \vec{d}_{12}^\parallel|^2}{k^2} \right] \frac{\delta(\omega_k - \omega_0)}{\omega_k} \tag{1.91}$$

são as contribuições para a taxa de emissão espontânea associadas com \vec{d}_{12}^\perp e \vec{d}_{12}^\parallel respectivamente. Essa divisão é também possível aqui pois, como no caso anterior, os termos “cruzados” em (1.88), que contêm $(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^\perp)(\hat{k}_\parallel \cdot \vec{d}_{12}^\parallel)$, não contribuem para a taxa de emissão. A demonstração é análoga à feita em (1.76) e por esse motivo será omitida de nossa discussão.

A fim de resolver a integral em (1.90), novamente mudamos as variáveis de integração para coordenadas polares e fazemos uso da seguinte propriedade da função delta de Dirac:

$$\delta\left(\sqrt{k_\parallel^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} - k_0\right) = \frac{\delta(k_\parallel - \sqrt{\xi}) k_0}{\sqrt{\xi}} + \frac{\delta(k_\parallel + \sqrt{\xi}) k_0}{\sqrt{\xi}}, \tag{1.92}$$

onde $\xi = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_0^2$. Com isso, obtemos:

$$A_{21}^\perp(z) = 3\pi A_{21}^{0\perp} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \int_0^\infty dk_\parallel k_\parallel^3 \left[\frac{\delta(k_\parallel - \sqrt{\xi}) + \delta(k_\parallel + \sqrt{\xi})}{\left(k_\parallel^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\xi}} \right]. \tag{1.93}$$

Notemos que $\sqrt{\xi} \geq 0 \implies N^2 \leq \frac{L^2 k_0^2}{\pi^2}$, o que impõe um limite superior ao somatório em (1.93). Integrando com o uso das deltas, é direto verificar que:

$$A_{21}^\perp(z) = \frac{3c\pi A_{21}^{0\perp}}{L\omega_0} \sum_{n=1}^N \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega_0 L}\right)^2\right], \quad (1.94)$$

onde N é o maior inteiro contido em $k_0 L/\pi$.

A integral em (1.91) é calculada de maneira semelhante. Portanto as contribuições para a taxa de emissão espontânea associadas com \bar{d}_{12}^\perp e \bar{d}_{12}^\parallel são dadas, respectivamente, por:

$$A_{21}^\perp(z) = \frac{3\pi}{k_0 L} A_{21}^{0\perp} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{k_0^2 L^2}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (1.95)$$

e

$$A_{21}^\parallel(z) = \frac{3\pi}{2k_0 L} A_{21}^{0\parallel} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{k_0^2 L^2}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right\}. \quad (1.96)$$

Assim sendo, a expressão para a taxa de emissão espontânea total em (1.89) é dada por:

$$A_{21}(z) = A_{21}^0 \left\{ \frac{\pi}{2k_0 L} + \frac{\pi}{k_0 L} \sum_{n=1}^N \left\{ 1 + \left(\frac{n\pi}{k_0 L}\right)^2 \left[2 \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) - 1\right] \right\} \right\}. \quad (1.97)$$

A fim de compararmos as expressões escritas acima para as taxas de emissão espontânea A_{21}^\perp , A_{21}^\parallel e A_{21} , na presença de duas placas infinitamente permeáveis, dadas respectivamente por (1.95), (1.96) e (1.97), com as taxas $A_{21}^\perp \text{ cond}$, $A_{21}^\parallel \text{ cond}$ e $A_{21} \text{ cond}$, obtidas na presença de duas paredes perfeitamente condutoras, escrevemos as expressões para essas últimas a seguir [1]:

$$A_{21}^\perp \text{ cond}(z) = \frac{3\pi}{k_0 L} A_{21}^{0\perp} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{k_0^2 L^2}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right], \quad (1.98)$$

$$A_{21}^\parallel \text{ cond}(z) = \frac{3\pi}{2k_0 L} A_{21}^{0\parallel} \left\{ \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{k_0^2 L^2}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right\} \quad (1.99)$$

e

$$A_{21} \text{ cond}(z) = A_{21}^0 \left\{ \frac{\pi}{2k_0 L} + \frac{\pi}{k_0 L} \sum_{n=1}^N \left\{ 1 + \left(\frac{n\pi}{k_0 L}\right)^2 \left[-2 \cos^2\left(\frac{n\pi z}{L}\right) + 1\right] \right\} \right\}. \quad (1.100)$$

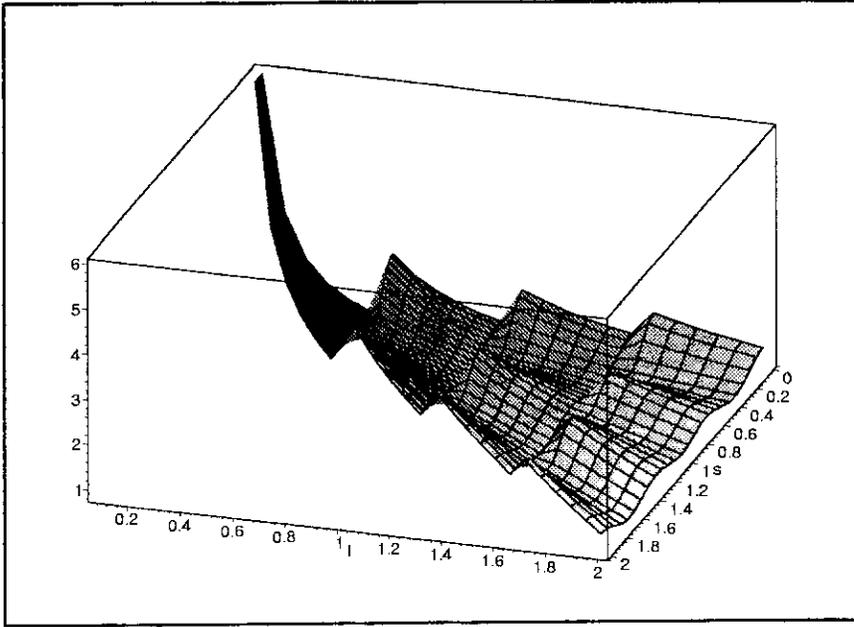


Figura 1.2: A razão A_{21}/A_{21}^0 (eixo vertical) como função das variáveis $s = z/\lambda_0$ e $l = L/\lambda_0$, para o caso de duas placas perfeitamente permeáveis.

A figura (1.2) mostra o gráfico da razão A_{21}/A_{21}^0 (eixo vertical) como uma função das variáveis $s = z/\lambda_0$ e $l = L/\lambda_0$. Vemos que os valores máximos da taxa de emissão espontânea entre as placas tendem a crescer, à medida que a distância entre as placas diminui. Se escolhermos um valor de l específico, $l = 2$, por exemplo, podemos fazer um gráfico bidimensional.

A figura (1.3), exposta na próxima página, mostra a razão entre A_{21} e A_{21}^0 como função de s para o caso de duas placas condutoras (linha tracejada) e o caso de duas placas permeáveis (linha sólida). A curva para este último caso também apresenta oscilações na taxa de emissão espontânea com a distância do átomo em relação a cada placa e é também simétrica com respeito ao ponto equidistante das placas. Entretanto existe uma notável diferença entre essas duas curvas: se há aumento na taxa de emissão espontânea na primeira, há diminuição na taxa da segunda e vice-versa. Particularmente seu comportamento próximo às placas é muito diferente.

Na figura (1.4), também exposta na próxima página, vê-se que, entre placas infinitamente permeáveis, ocorre supressão na parte da taxa de emissão espontânea que está

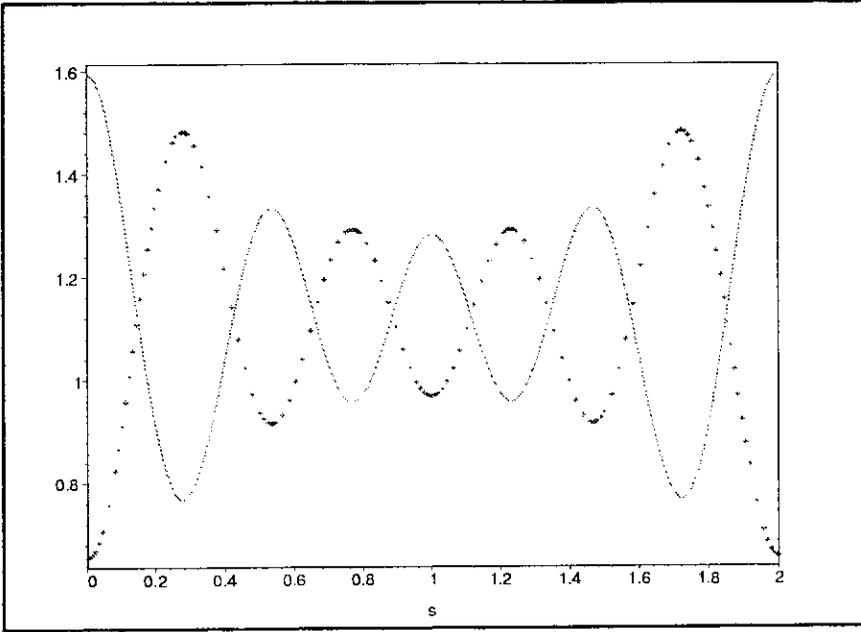


Figura 1.3: A razão A_{21}/A_{21}^0 como função da variável adimensional $s = z/\lambda_0$ para o caso de duas placas perfeitamente condutoras (linha tracejada) e o caso de duas placas infinitamente permeáveis (linha sólida). A distância entre as placas é típica dos experimentos.

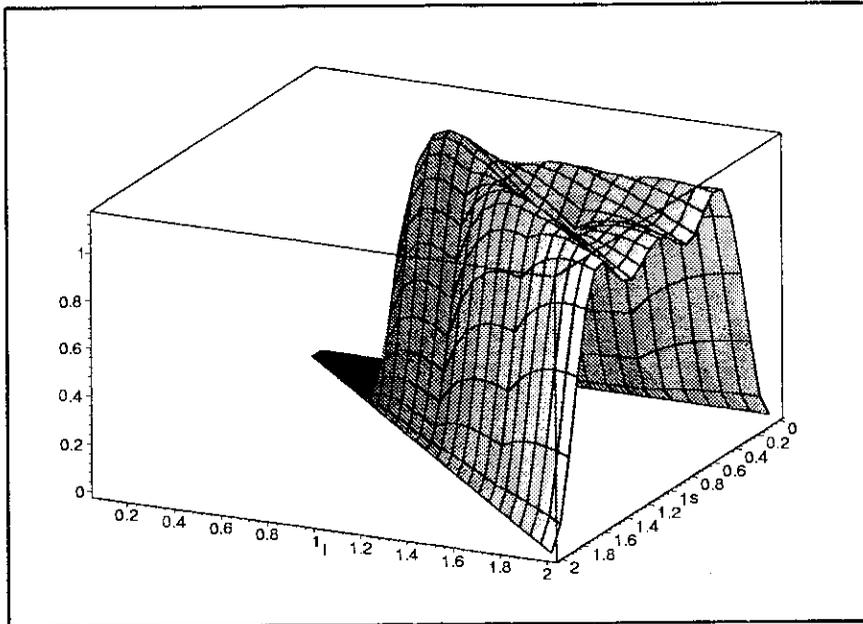


Figura 1.4: A razão $A_{21}^\perp/A_{21}^{0\perp}$ (eixo vertical) como função das variáveis dimensionais $s = z/\lambda_0$ e $l = L/\lambda_0$ para o caso de duas placas perfeitamente permeáveis.

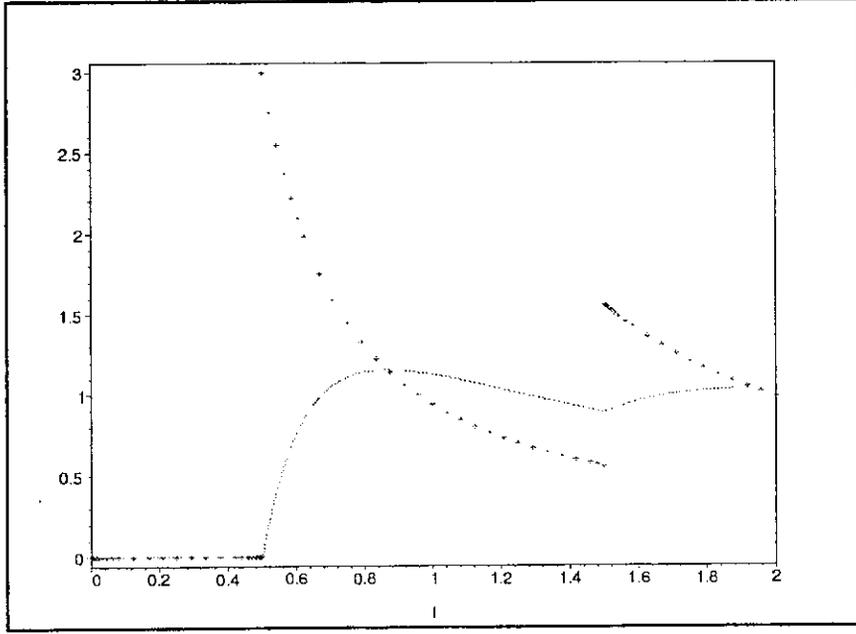


Figura 1.5: A razão $A_{21}^{\perp}/A_{21}^{0\perp}$ para o caso de duas placas infinitamente permeáveis (linha sólida), e a razão $A_{21}^{\parallel}/A_{21}^{0\parallel}$ para o caso de duas placas perfeitamente condutoras (linha tracejada), como funções da variável adimensional $l = L/\lambda_0$. Consideramos o átomo num ponto equidistante das duas placas em ambas configurações. Supressão ocorre em $\lambda_0 = 2L$.

relacionada com \vec{d}_{12}^{\perp} . Já no caso de duas placas condutoras a supressão ocorre para A_{21}^{\parallel} . Por simplicidade fixemos um átomo em um ponto equidistante das duas placas em ambas configurações: condutora-condutora e permeável-permeável. Agora variamos a distância L entre as placas. Por conveniência vamos desenhar os gráficos das razões $A_{21}^{\parallel}/A_{21}^{0\parallel}$ e $A_{21}^{\perp}/A_{21}^{0\perp}$ como funções do parâmetro adimensional $l := L/\lambda_0$.

A figura (1.5) mostra a supressão de A_{21}^{\perp} para o caso de duas placas permeáveis (linha sólida) e a supressão de A_{21}^{\parallel} para o caso de duas placas perfeitamente condutoras (linha tracejada). Observamos que ambas ocorrem para o mesmo valor da distância entre as placas. Embora isso não seja um resultado óbvio, ele é bastante razoável, visto que, para o caso de duas placas perfeitamente permeáveis os modos do campo de vácuo também são simétricos com respeito a $s = l/2$.

Calcularemos agora o limite da expressão (1.97), para a taxa de emissão espontânea entre duas placas infinitamente permeáveis, quando $L \rightarrow \infty$. Definindo $u = \frac{n\pi}{L}$ e $\Delta u = \frac{\pi}{L}$

temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{L \rightarrow \infty} A_{21}(z, L) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Delta u}{k_0} \sum_{n=1}^{\left[\frac{k_0}{\Delta u} \right]} \left[1 + \left(\frac{u}{k_0} \right)^2 \cos(2uz) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{k_0} \int_0^{k_0} du \left[1 + \left(\frac{u}{k_0} \right)^2 \cos(2uz) \right] \\
&= 1 + \frac{\sin(2k_0 z)}{2k_0 z} + \frac{\cos(2k_0 z)}{2k_0^2 z^2} - \frac{\sin(2k_0 z)}{4k_0^3 z^3}, \quad (1.101)
\end{aligned}$$

onde $\left[\frac{k_0}{\Delta u} \right]$ no limite superior do somatório é o maior inteiro contido em $k_0/\Delta u$, de tal maneira que $\lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{k_0 L}{\pi} \right] \frac{\pi}{L} = k_0$. A expressão final em (1.101) é simplesmente a taxa de emissão espontânea para o caso de uma placa perfeitamente permeável dada em (1.81), como era de se esperar. Desse modo, verificamos a consistência entre os dois resultados.

1.6 Uma placa condutora e outra permeável

Consideremos agora duas placas paralelas e infinitas, uma perfeitamente condutora ($\epsilon \rightarrow \infty$) e a outra infinitamente permeável ($\mu \rightarrow \infty$)[31]. Novamente consideramos eixos cartesianos de tal forma que o eixo \mathcal{OZ} seja perpendicular a ambas superfícies. A placa perfeitamente condutora está localizada em $z = 0$ e a permeável, em $z = L$. Os campos elétricos e magnéticos têm que satisfazer às seguintes condições de contorno: (a) as componentes tangenciais E_x e E_y do campo elétrico, bem como a componente normal do campo magnético B_z têm que se anular sobre a placa metálica em $z = 0$. (b) As componentes tangenciais B_x e B_y do campo magnético têm que se anular sobre a placa permeável em $z = L$. Novamente escolhemos trabalhar com o vetor potencial $\vec{A}(t, \vec{r})$ no calibre de Coulomb, no qual $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) = 0$, definindo $\vec{E}(t, \vec{r}) = -\partial \vec{A}(t, \vec{r}) / \partial t$ e $\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{r})$. Com esta escolha de calibre, as condições de contorno, escritas em termos do potencial vetor são:

$$A_x(t, x, y, 0) = A_y(t, x, y, 0) = \frac{\partial A_z}{\partial z}(t, x, y, 0) = 0 \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}(t, x, y, L) = \frac{\partial A_y}{\partial z}(t, x, y, L) = A_z(t, x, y, L) = 0 \quad (1.103)$$

Os modos do campo para este caso são [65]:

$$\vec{A}_{\vec{k}_1}(\vec{r}) = \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} (\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z L \right] e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \quad (1.104)$$

e

$$\vec{A}_{\vec{k}_2}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \left\{ \hat{k}_{\parallel} \hat{z} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z L \right] - i\pi L \left(n + \frac{1}{2}\right) \hat{k}_{\parallel} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z L \right] \right\}. \quad (1.105)$$

A fim de obtermos a taxa de emissão espontânea dada por (1.60), novamente calculamos, a partir dos modos (1.104) e (1.105), as expressões:

$$|\vec{A}_{\vec{k}_1} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp}|^2 = \frac{2}{V} \sin^2 \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z}{L} \right] |(\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2, \quad (1.106)$$

e

$$\begin{aligned} |\vec{A}_{\vec{k}_2} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp}|^2 &= \left(\frac{2}{V k^2}\right) |\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp}|^2 \cos^2 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right] |\vec{k}_{\parallel}|^2 \\ &+ \left(\frac{2}{V k^2}\right) |\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 \sin^2 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right] \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \right]^2 \\ &- \left(\frac{i2}{V k^2}\right) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right] \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right] \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \right] \\ &\times |\vec{k}_{\parallel}| \left[(\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp*}) (\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}) - (\hat{z} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}) (\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\perp*}) \right]. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Substituindo (1.106) e (1.107) em (1.60), obtemos:

$$A_{21}(z) = A_{21}^{\perp}(z) + A_{21}^{\parallel}(z), \quad (1.108)$$

onde

$$A_{21}^{\perp}(z) = \frac{2\omega_0^2 |\vec{d}_{12}^{\perp}|^2}{\hbar L} \sum_{n=0}^{\infty} \cos^2 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right] \int d^2 k_{\parallel} \frac{k_{\parallel}^2 \delta(\omega_k - \omega_0)}{\omega_k k^2} \quad (1.109)$$

e

$$\begin{aligned}
A_{21}^{\parallel}(z) &= \frac{2\omega_0^2}{\hbar L} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right) \\
&\times \int d^2 k_{\parallel} \left[|(\hat{k}_{\parallel} \times \hat{z}) \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2 + \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{|\hat{k}_{\parallel} \cdot \vec{d}_{12}^{\parallel}|^2}{k^2} \right] \frac{\delta(\omega_k - \omega_0)}{\omega_k}
\end{aligned} \tag{1.110}$$

são as contribuições para a taxa de emissão espontânea associadas com a componente perpendicular à placa do momento de dipolo da transição, \vec{d}_{12}^{\perp} , e com a componente paralela à placa do momento de dipolo da transição, \vec{d}_{12}^{\parallel} , respectivamente. Novamente a divisão em uma parte que só depende de \vec{d}_{12}^{\perp} e outra que só depende de \vec{d}_{12}^{\parallel} ocorre porque os termos “cruzados” em (1.107) não contribuem para a taxa de emissão, por argumentos análogos aos apresentados em (1.76).

As integrais em (1.109) e (1.110) têm basicamente a mesma forma que as encontradas em (1.90) e (1.91), as quais já foram calculadas. Portanto, usando um procedimento análogo ao que já foi feito anteriormente, pode-se mostrar que as contribuições para a taxa de emissão espontânea associadas com \vec{d}_{12}^{\perp} e \vec{d}_{12}^{\parallel} são dadas respectivamente por:

$$A_{21}^{\perp}(z) = \frac{3\pi}{k_0 L} A_{21}^{0\perp} \sum_{n=0}^N \left[1 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{k_0^2 L^2} \pi^2 \right] \cos^2 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right] \tag{1.111}$$

e

$$A_{21}^{\parallel}(z) = \frac{3\pi}{2k_0 L} A_{21}^{0\parallel} \sum_{n=0}^N \left[1 + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{k_0^2 L^2} \pi^2 \right] \sin^2 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L} \right], \tag{1.112}$$

onde N , para este caso, é o maior inteiro contido em $k_0 L / \pi - 1/2$. Assim sendo, a expressão para a taxa de emissão espontânea total em (1.108) é dada por:

$$\begin{aligned}
A_{21}(z) &= -\frac{A_{21}^0 \pi}{4k_0^3 L^3} \sum_{n=0}^{[k_0 L / \pi - 1/2]} \left\{ \cos^2 \left(\frac{(n + \frac{1}{2}) \pi z}{L} \right) (8\pi^2 (n^2 + n) + 2\pi^2) \right. \\
&\quad \left. - 4\pi^2 (n^2 + n) - 4k_0^2 L^2 - \pi^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.113}$$

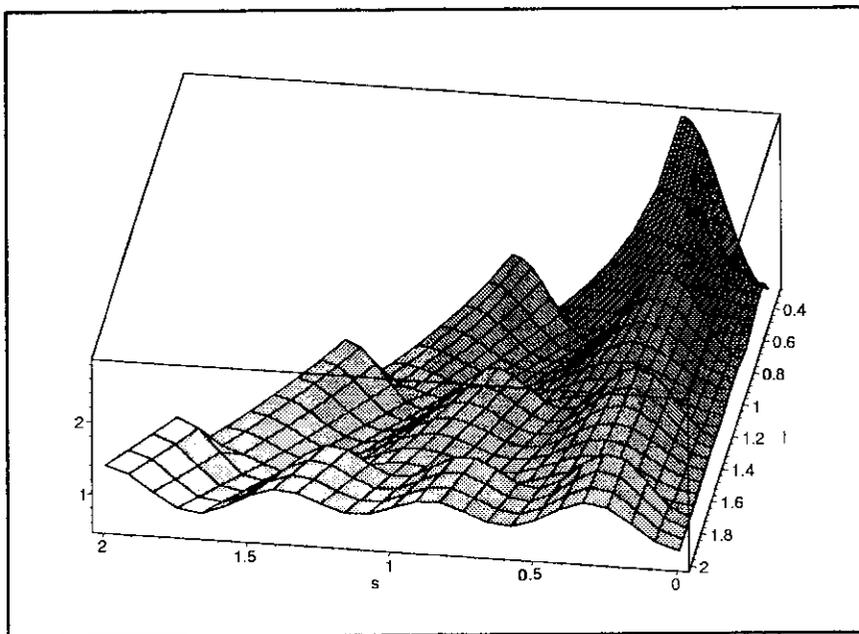


Figura 1.6: A razão A_{21}/A_{21}^0 (eixo vertical) como função das variáveis adimensionais $s = z/\lambda_0$ e $l = L/\lambda_0$ para o caso de de uma placa perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável.

A figura (1.6) mostra o gráfico da razão A_{21}/A_{21}^0 (eixo vertical) como uma função das variáveis $s = z/\lambda_0$ e $l = L/\lambda_0$ para o caso de uma placa condutora e outra permeável. Fixando $l = 2$, podemos fazer o gráfico bi-dimensional (veja a figura 1.7), no qual vemos a razão entre A_{21} e A_{21}^0 como função da variável adimensional $s = z/\lambda_0$ para o caso de duas placas condutoras (linha tracejada) e o caso de uma placa condutora e outra permeável (linha sólida). Embora as duas curvas sejam análogas, no sentido de que ambas apresentam oscilações com s , elas são diferentes uma vez que os modos do campo de radiação no estado de vácuo em cada caso não são os mesmos. É interessante enfatizar a ausência de simetria da última curva em torno de pontos equidistantes das placas. Isso era esperado porque neste caso as duas placas correspondem a meios eletromagnéticos distintos, com propriedades diferentes.

A figura (1.8), apresentada na próxima página, mostra a supressão que ocorre para $A_{21}^\perp/A_{21}^{0\perp}$ quando temos uma placa condutora e outra permeável. Note que a supressão ocorre, nesse caso, para $\lambda_0 = 4L$. Para esse caso de condições de contorno mistas, é

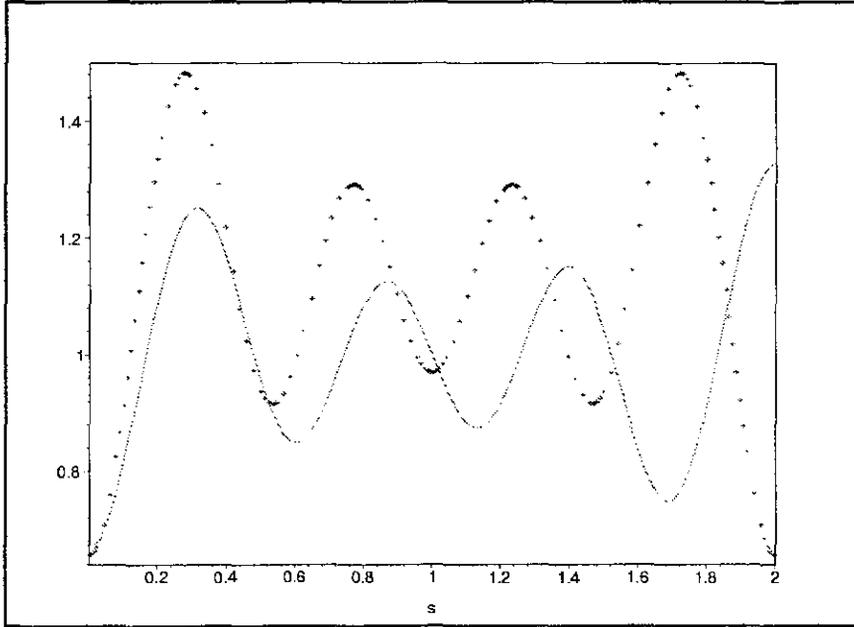


Figura 1.7: A razão A_{21}/A_{21}^0 (eixo vertical) como função da variável adimensional $s = z/\lambda_0$ para o caso de de uma placa perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável (linha sólida), e para o caso de duas placas perfeitamente condutoras (linha tracejada).

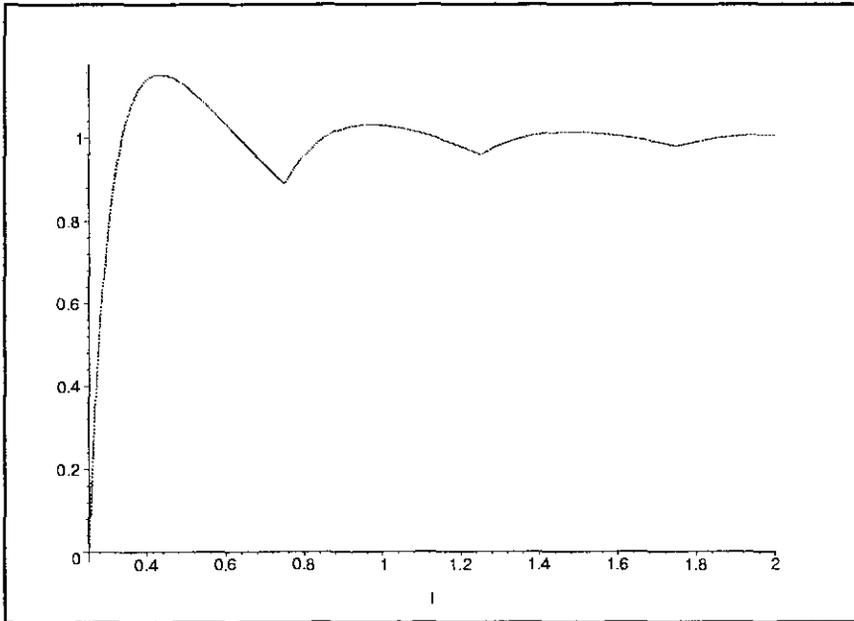


Figura 1.8: A razão $A_{21}^\perp/A_{21}^{0\perp}$ (eixo vertical) para o caso de uma placa infinitamente permeável e outra perfeitamente condutora. Supressão ocorre em $\lambda_0 = 4L$.

natural esperar que a supressão ocorra num valor diferente de l em relação aos outros casos tratados aqui, no caso menor (veja a figura (1.5)). Ainda em relação às figuras (1.5) e (1.8), observamos que na figura (1.5) a distância entre dois picos sucessivos para $A_{21}^{\parallel}/A_{21}^{0\parallel}$ (linha tracejada), ou descontinuidades na derivada de $A_{21}^{\perp}/A_{21}^{0\perp}$ (curva sólida), é de $\Delta l = \lambda_0$, em contraste com o valor $\Delta l = \lambda_0/2$ observado para a descontinuidade na derivada de $A_{21}^{\perp}/A_{21}^{0\perp}$ na figura (1.8). Isso deve-se ao fato de que, para a situação descrita pela figura(1.8), não existem nós para os modos do vácuo no ponto médio entre as placas.

1.7 Comentários

Embora os resultados que obtivemos para a taxa de emissão espontânea na presença de uma ou duas placas infinitamente permeáveis, ou duas placas paralelas com pelo menos uma infinitamente permeável, sejam análogos aos existentes na literatura, mas com placas condutoras, há diferenças fundamentais (por exemplo, onde ocorre um aumento na taxa de emissão para um arranjo com duas placas condutoras, pode haver diminuição nessa taxa para o caso de duas placas permeáveis e vice versa). Isto era de se esperar, uma vez que ao alterarmos as condições de contorno impostas sobre o campo de radiação, os modos desse campo irão se alterar, acarretando uma mudança na interação do átomo com o campo de radiação, mesmo que esse campo esteja no estado de vácuo.

É interessante notar que o mesmo já não ocorre com o efeito Casimir: a densidade da energia de Casimir para o caso de duas placas paralelas perfeitamente condutoras é exatamente a mesma que a energia de Casimir para o caso de duas placas paralelas infinitamente permeáveis, pelo menos se desprezarmos qualquer correção radiativa a esse efeito, ou seja, se calcularmos o efeito Casimir apenas na aproximação de um laço. Em outras palavras, embora o efeito Casimir seja “cego” à mudança de duas placas perfeitamente condutoras por duas placas perfeitamente permeáveis, o átomo não é. A razão para isso é que no cálculo da energia de Casimir a um laço, somente as frequências possíveis dos modos do campo são necessárias ⁵, enquanto que o átomo interage diretamente com

⁵Uma discussão muito instrutiva sobre quando a energia de Casimir pode ser expressa por uma soma

cada modo do campo de radiação. Nesse sentido, podemos dizer que o átomo funciona como uma sonda do campo, sensível a todas as suas variações. Na verdade, cálculos a um laço parecem confirmar que mesmo se levarmos em consideração as primeiras correções radiativas ao efeito Casimir, os resultados permanecem iguais. Embora sugestivo, este resultado não implica que sejam iguais em qualquer ordem.

Embora altamente idealizadas, as situações examinadas aqui podem ser consideradas como um primeiro passo no sentido da construção de situações mais realistas, nas quais a influência de uma permeabilidade magnética finita sobre a taxa de emissão espontânea seja levada em consideração. Parte dos resultados originais expostos nesta seção encontram-se em [69].

de frequências pode ser encontrada na ref. [68].

Capítulo 2

Deslocamento Lamb

Neste capítulo investigamos de que forma a presença de cavidades simples, como por exemplo uma “cavidade” formada por duas placas paralelas, modifica a interação entre um elétron de um átomo de Hidrogênio e o campo de radiação quando esse campo encontra-se no estado de vácuo, isto é, quando nenhum fóton está presente. Uma vez que essa interação com o campo de radiação dá origem a deslocamentos nos níveis atômicos de energia, usualmente designados por deslocamentos ou desvios Lamb [70], o que fazemos neste capítulo é essencialmente estudar qual a influência da presença de duas placas paralelas no deslocamento Lamb. Calculamos explicitamente os desvios nos níveis de energia de um átomo de Hidrogênio quando este encontra-se entre duas placas paralelas infinitamente permeáveis ($\mu \rightarrow \infty$) [71]. Muito embora já houvesse cálculos desse tipo na literatura com placas perfeitamente condutoras e até mesmo dielétricas, não existiam até o momento cálculos envolvendo placas infinitamente permeáveis. O caso de uma placa permeável é estudado como um caso limite, quando a distância entre as duas placas permeáveis vai a infinito. Antes, porém, de apresentarmos nossos resultados, faremos na próxima seção um breve resumo do resultado de Bethe [72], não apenas por ter sido o primeiro a dar uma explicação teórica bem fundamentada, mas também por ter sido esse trabalho um marco na história da eletrodinâmica quântica.

2.1 Introdução

A solução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio implica em que os níveis de energia dependam somente do número quântico principal n :

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \right), \quad (2.1)$$

onde m_e e m_p são, respectivamente, as massas do elétron e do próton e $n = 1, 2, \dots$. Em princípio, devido à simetria esférica presente em qualquer problema com potencial central, esperávamos encontrar somente $2\ell + 1$ estados degenerados para cada nível, onde ℓ é o número quântico associado ao momento angular. No entanto, ocorre uma degenerescência adicional, inesperada e existem

$$\sum_{\ell=0}^n (2\ell + 1) = n^2$$

estados degenerados para cada nível de energia. Esse é um resultado peculiar exibido pelo potencial coulombiano (um resultado análogo ocorre também com o potencial de um oscilador harmônico em três dimensões). Essa degenerescência adicional é muitas vezes designada na literatura por degenerescência acidental e certamente está relacionada com a conservação do chamado vetor de Runge-Lenz, uma vez que o operador de Runge-Lenz e o momento angular, juntos, fornecem um método algébrico envolvendo o grupo de simetria $O(4)$ para o cálculo dos níveis de energia do átomo de Hidrogênio [73]. Vale mencionar que essa degenerescência adicional também se manifesta classicamente, já que a energia de uma órbita elíptica no problema de Kepler dependem apenas do semi-eixo maior a da elipse e não de a e do momento angular ℓ , como esperado.

Quando passamos para um estudo mais rigoroso do átomo de Hidrogênio e consideramos não apenas a relatividade, mas também o spin do elétron, somos levados à solucionar a equação de Dirac com o potencial de Coulomb. Nesse caso, pode-se mostrar que [1]:

$$E_{n,j} = mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ (constante de estrutura fina), $n=1, 2, 3, \dots, \infty$ e $j + \frac{1}{2} \leq n$. Observe então que, embora a degenerescência seja quebrada e os níveis dependam de n

e j , os estados que possuírem os mesmos n e j ainda serão degenerados. É justamente isso que ocorre para os estados com $n = 2; j = 0 + 1/2$ e $n = 2; j = 1 - 1/2$, ou seja, para os estados $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$.

Entretanto, experimentos realizados a partir de 1930 [74, 75] indicavam que as energias desses níveis deveriam diferir. Em 1947, Lamb e Retherford [70], utilizando os avanços da tecnologia de microondas, desenvolvidos durante a Segunda Guerra Mundial, realizaram experimentos mostrando convincentemente que o nível $2s_{1/2}$ está cerca de 1000 MHz acima do nível $2p_{1/2}$. Essa pequena diferença de energia é conhecida com o nome de deslocamento Lamb. Note que, de acordo com a Eq.(2.2), a diferença entre o nível $2p_{3/2}$ e os níveis $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ é aproximadamente igual a $\alpha^4 mc^2/32$, ou seja, da ordem de 11.000 MHz, ou seja, praticamente dez vezes superior ao desvio Lamb.

O experimento de Lamb e Retherford baseia-se fortemente no fato de que o estado $2s_{1/2}$ é um estado meta-estável, uma vez que a emissão espontânea para o estado fundamental $1s_{1/2}$ pela emissão de um único fóton está proibida, pois $\Delta\ell = 0$ nessa transição¹. O tempo de vida desse estado é enorme, aproximadamente 1/7 segundos. Inicialmente um feixe de átomos de Hidrogênio são produzidos por dissociação térmica de H_2 num forno. O feixe atômico é então bombardeado por elétrons, fazendo com que, após as colisões, alguns dos átomos de Hidrogênio do feixe vão para o estado excitado meta-estável $2s_{1/2}$. Por sua vez, átomos de Hidrogênio nesse estado ($2s_{1/2}$) emitem elétrons quando lançados sobre alvos metálicos, produzindo assim uma corrente elétrica. Isso não ocorre com átomos no estado fundamental. Portanto, medindo correntes elétricas, pode-se detectar os átomos no nível $2s_{1/2}$. Aplica-se então um campo com a frequência da transição $2s_{1/2} - 2p_{3/2}$. Esse campo irá induzir transições para o estado $2p_{3/2}$ que decai rapidamente por emissão espontânea para o estado fundamental (por emissão de um fóton). Ora, diminuindo-se a população de átomos no nível meta-estável $2s_{1/2}$, diminui-se a corrente elétrica no detetor de átomos excitados. Com isso, Lamb e Retherford foram capazes de medir com precisão

¹ Isso não significa que não haja emissão espontânea quando o Hidrogênio estiver nesse estado. O que ocorre é que a emissão espontânea, nesse caso, se dá pela emissão de dois fótons, fazendo com que o tempo de vida seja bem maior.

a diferença de energia entre os níveis $2s_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ e, conseqüentemente, entre os níveis $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$.

Em 1952, fazendo medições mais refinadas, Lamb e Retherford[76] apresentaram para o desvio Lamb o valor de 1058.27 ± 1.0 MHz, sendo que, para o Hidrogênio, o valor aceito atualmente para o deslocamento nos níveis $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ é de 1057.845 Mhz ± 0.13 % [77].

A razão pela qual a teoria de Dirac, que conduz a eq.(2.2), falha em não acusar o deslocamento Lamb, está no fato de que ela ignora o *acoplamento do elétron atômico com o campo de radiação*, mesmo com esse campo no estado de vácuo.

O deslocamento Lamb é um efeito predominantemente não-relativístico e pode ser entendido, em parte, pela modificação da teoria de Schrödinger para o átomo de Hidrogênio a fim de incluir o acoplamento com o campo de radiação. Consideremos, então, a Hamiltoniana da teoria não relativística de átomos acoplados ao campo de radiação, dada em (1.13), associada à aproximação de dipolo discutida na seção 1.3. Usando a teoria de perturbação de segunda ordem, chega-se à seguinte expressão para o deslocamento na energia do nível atômico n , devido à interação $-(e/mc)\vec{A} \cdot \vec{p}$ [1]:

$$\Delta E_n = \sum_m \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{|\langle m, 1_{\vec{k}\lambda} | h_{\vec{k}\lambda} | n, \text{vac} \rangle|^2}{E_n - E_m - \hbar\omega_k}, \quad (2.3)$$

onde

$$h_{\vec{k}\lambda} = -\frac{e}{mc} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger (\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{p}), \quad (2.4)$$

onde seguimos a notação usada no capítulo 1.3 para o campo no espaço livre. Quanto à contribuição que provém do termo $(e^2/2mc^2)\vec{A}^2$, visto que esse termo não envolve operadores atômicos, ele contribui com o mesmo valor para a energia a todos os estados $|n, \text{vac}\rangle$ e, conseqüentemente não afeta os deslocamento de frequências observáveis, sendo, portanto, ignorado. Escrevendo o termo do numerador em (2.3) como:

$$|\langle m, 1_{\vec{k}\lambda} | a_{\vec{k}\lambda}^\dagger (\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{p}) | n, \text{vac} \rangle|^2 = \langle n, \text{vac} | a_{\vec{k}\lambda} (\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{p}) | m, 1_{\vec{k}\lambda} \rangle \times \langle m, 1_{\vec{k}\lambda} | a_{\vec{k}\lambda}^\dagger (\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{p}) | n, \text{vac} \rangle, \quad (2.5)$$

podemos interpretar ΔE_n em termos de um processo de emissão $n \rightarrow m + \gamma$, seguido de um processo de absorção $m + \gamma \rightarrow n$, onde γ denota o fóton (o átomo, que encontrava-se

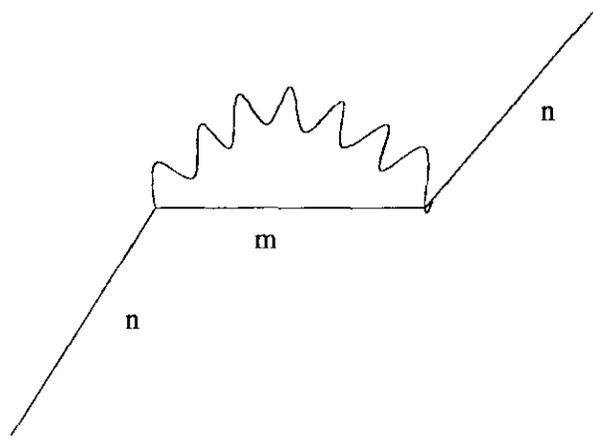


Figura 2.1: Representação diagramática de (2.5).

no nível n , emite um fóton virtual, mudando para o nível m e em seguida absorve o fóton virtual voltando ao estado n). Este processo de emissão e absorção de fótons virtuais é indicado na figura 2.1. Note-se que somente estados intermediários de um fóton aparecem, visto que \vec{A} somente pode conectar o estado de vácuo a estados de um fóton.

Escrevendo:

$$\langle m, 1_{\vec{k}\lambda} | h_{\vec{k}\lambda} | n, \text{vac} \rangle = -\frac{e}{mc} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \vec{p}_{mn} \cdot \vec{e}_{\vec{k}\lambda}, \quad (2.6)$$

e usando que:

$$\sum_{\vec{k}\lambda} \rightarrow \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\lambda} \int \int \int d^3k, \quad (2.7)$$

é possível, após manipulações simples, verificar que:

$$\Delta E_n = \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 \int_0^\infty \frac{dE E}{E_n - E_m - E} \quad (2.8)$$

A expressão acima mostra que ΔE_n é divergente. Entretanto, dos dados experimentais, esperava-se para o deslocamento Lamb um valor finito e pequeno! Esse era um problema para a comunidade científica até 1947, quando Bethe propôs um método que não só era

capaz de extrair um valor finito para o desvio de energia, como também proporcionava uma interpretação física em termos de uma renormalização na massa do elétron [72].

É possível mostrar (vide, por exemplo, [1]) que uma partícula carregada tem uma “massa eletromagnética” δm , devida ao seu próprio campo de reação de radiação, dada por:

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty dE. \quad (2.9)$$

Entretanto, podemos observar que a expressão δm em (2.9) diverge. Bethe relata [78] que, em 1947, as pessoas já lutavam com esse problema havia longo tempo. Seguindo a sugestão de Kramer, Bethe passou a considerar a massa renormalizada $m = m_0 + \delta m$ (embora o valor de δm não fosse determinado), como a massa observável ($m \cong 9.1 \times 10^{-28} g$), sendo m_0 a “massa nua”, ou seja, não associada com a reação de radiação. Seguindo o raciocínio exposto em [1], embora (2.9) seja infinita, uma teoria mais refinada deveria resultar em δm finito. Supondo então que, nesse caso, $\delta m/m$ seja realmente pequeno, temos, para a energia cinética do elétron:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \cong \frac{\vec{p}^2}{2m_0} - \frac{\delta m}{2m^2} \vec{p}^2. \quad (2.10)$$

A idéia básica da renormalização da massa, aplicada por Bethe ao problema do deslocamento Lamb, é que no termo $\vec{p}^2/2m$, utilizado na equação de Schrödinger, a massa m já inclui δm . Quando ligamos o acoplamento do elétron com o campo de vácuo, a reação de radiação sobre o elétron adiciona δm à sua massa. Dessa forma temos que subtrair a contribuição adicional $-(\delta m/2m^2)\vec{p}^2$, acrescentada após acoplar o elétron com o campo de radiação. Ou seja, temos que subtrair a auto-energia:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta m}{2m^2} \langle n | \vec{p}^2 | n \rangle &= -\frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 \int_0^\infty dE \\ &= \lim_{\omega_{nm} \rightarrow 0} \Delta E_n \\ &=: \Delta E_n^{livre}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde, a primeira linha de (2.11) foi obtida usando a eq. (2.9), enquanto a segunda pode ser verificada usando a eq. (2.8). Portanto, o que Bethe [72] fez, precisamente, foi definir

o deslocamento observável ΔE_n^{obs} , como:

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{obs} &:= \Delta E_n - \Delta E_n^{livre} \\ &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_n - E_m) \int_0^\infty \frac{dE}{E_n - E_m - E}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Esta expressão ainda apresenta divergência logarítmica. Intuitivamente [78], Bethe considerou um corte superior na integração. Uma vez que seu cálculo era não relativístico, escolheu como limite superior da integração o valor mc^2 e escreveu:

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{obs} &\rightarrow \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_n - E_m) \int_0^{mc^2} \frac{dE}{E_n - E_m - E} \\ &\cong \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_n - E_m) \ln \left(\frac{mc^2}{|E_n - E_m|} \right),\end{aligned}\quad (2.13)$$

para $mc^2 \gg |E_n - E_m|$. Definindo:

$$(\ln |E_m - E_n|)_{media} := \frac{\sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_m - E_n) \ln |E_m - E_n|}{\sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_m - E_n)},\quad (2.14)$$

onde $(\ln |E_m - E_n|)_{media}$ só depende do índice n , podemos reescrever (2.13) como:

$$\Delta E_n^{obs} \cong \frac{2\alpha}{3\pi m^2 c^2} \left(\ln(mc^2) - (\ln |E_m - E_n|)_{media} \right) \sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_n - E_m). \quad (2.15)$$

Usando as relações de comutação entre \vec{p} e \vec{r} , é direto verificar que:

$$\begin{aligned}\sum_m |\vec{p}_{mn}|^2 (E_n - E_m) &= \sum_m \langle n | [\vec{p}, H_A] | m \rangle \cdot \langle m | \vec{p} | n \rangle \\ &= -i\hbar \langle n | \vec{\nabla} V \cdot \vec{p} | n \rangle \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar \langle n | [\vec{\nabla} V, \vec{p}] | n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 \langle n | \vec{\nabla}^2 V | n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 \int d^3 r |\psi_n(\vec{r})|^2 \nabla^2 V(\vec{r}),\end{aligned}\quad (2.16)$$

onde $V = -Ze^2/r$. Usando que $\nabla^2 V = 4\pi Ze^2 \delta^3(\vec{r})$ em (2.16) e substituindo em (2.15), obtemos:

$$\Delta E_n^{obs} \cong \frac{4\alpha Ze^2 \hbar^2}{3m^2 c^2} \left(\ln(mc^2) - (\ln |E_m - E_n|)_{media} \right) |\psi_n(0)|^2. \quad (2.17)$$

Esta expressão exhibe um importante resultado: O deslocamento Lamb deve ser maior para os estados s , para os quais $|\psi_n(0)|^2 \neq 0$. Esse resultado não é geral, ocorre para o potencial coulombiano. Para o potencial do oscilador harmônico em três dimensões, um cálculo análogo ao de Bethe leva a um resultado idêntico para todos os níveis, exigindo que outras contribuições sejam utilizadas para que haja a separação dos níveis degenerados [79].

Para um estado s com número quântico principal n , $|\psi_n(0)|^2 = (Z/na_0)^3/\pi$, onde a_0 é o raio de Bohr. Usando este resultado em (2.17), obtemos:

$$\Delta E_{ns}^{obs} \cong \frac{8\alpha^3 Z^4 R_\infty}{3\pi n^3} \left(\ln(mc^2) - (\ln |E_m - E_n|)_{media} \right), \quad (2.18)$$

onde $R_\infty := e^2/2a_0 \cong 13.6eV$, para a massa nuclear considerada infinita. Em seu trabalho, Bethe usou a estimativa numérica [72]:

$$(\ln |E_m - E_n|)_{media} \approx 17.8R_\infty, \quad (2.19)$$

e obteve para o estado $2s$ do átomo de Hidrogênio o deslocamento

$$\Delta E_{2s}^{obs} \cong 1040MHz, \quad (2.20)$$

o que estava em excelente concordância com a experiência. Este é um resultado surpreendente e mais uma vez, peculiar ao potencial coulombiano. Não é óbvio que a aproximação de dipolo gere sempre bons resultados para os deslocamentos de energia. De fato, para outros potenciais não é tão boa assim e para o oscilador harmônico é bastante ruim [79]. Independentemente das coincidências fortuitas, o resultado de Bethe abriu as portas para um desenvolvimento mais sistemático do programa de renormalização em teoria quântica de campos. Não foi a toa que Dirac, físico de poucas palavras, comentou [80]:

“Nenhum progresso fora feito nos últimos 20 anos. Então um desenvolvimento surgiu, iniciado pelo descobrimento de Lamb e explicação do deslocamento Lamb, que mudou profundamente o caráter da física teórica. Esse desenvolvimento envolvia o estabelecimento de regras para descartar ... infinitos...”

O resultado de Bethe causou um impacto tão profundo, que foi considerado por Feynman anos mais tarde, por ocasião do seminário proferido pelo recebimento do prêmio

Nobel [81], como a mais importante descoberta da história da eletrodinâmica quântica. Para uma revisão sobre o assunto, sugerimos a ref.[82].

Finalizamos esta seção comentando que há várias outras interpretações para a contribuição principal apresentada anteriormente para o deslocamento Lamb, a saber: a interpretação de Welton [83]; a interpretação de Feynman [84] e a interpretação do desvio Lamb como um efeito Stark [1]. Na primeira delas, Welton mostrou que as flutuações do campo eletromagnético geram um desvio quadrático médio na posição do elétron, acarretando uma variação em sua energia. Por sua vez, Feynman sugeriu que o desvio Lamb poderia ser obtido a partir da mudança na energia de ponto zero devido às mudanças nas frequências dos modos do campo causadas pela variação no índice de refração induzida pela presença dos átomos. A equivalência entre esses dois procedimentos e o resultado do Bethe por ser encontrado na ref.[85].

2.2 Influência de duas placas permeáveis

Já havíamos mencionado na introdução desta tese que dois átomos (polarizáveis) situados no vácuo, atraem-se mutuamente. Como consequência direta desse fato, concluímos que também existirá uma força entre dois corpos macroscópicos situados no vácuo ². A grande novidade do trabalho de Casimir [9] não foi prever a atração entre dois corpos neutros localizados no vácuo, no caso duas placas perfeitamente condutoras, uma vez que London [86] já havia explicado dentro do contexto da mecânica quântica usual a força entre átomos polarizáveis, mas, como veremos no próximo capítulo, a técnica utilizada por ele. Casimir mostrou que tal força entre dois corpos macroscópicos pode ser calculada a partir das variações causadas na energia de ponto zero devido às condições de contorno impostas sobre o campo de radiação por tais corpos.

A presença de corpos não altera apenas a energia do vácuo, mas também modifica

²Para corpos rarefeitos essa força poderá ser obtida integrando-se as forças de van der Waals entre os pares de átomos (moléculas) que formam o corpo. No entanto, para meios não rarefeitos, a não aditividade das forças de van der Waals deverá ser levada em consideração.

a interação entre o campo de radiação e qualquer sistema atômico na vizinhança desses corpos. Em outras palavras, a presença material de placas, ou corpos em geral, impõe certas condições de contorno sobre o campo de radiação, restringindo assim os possíveis modos desse campo, o que acarreta mudanças na interação do campo de radiação com o elétron atômico [87]. Por esse motivo, espera-se que a presença de placas ou cavidades em geral na vizinhança de átomos altere as propriedades radiativas desses sistemas atômicos. No capítulo anterior, estudamos a influência de placas paralelas na emissão espontânea dos átomos. Neste capítulo, veremos como placas paralelas deslocam os níveis atômicos de energia também para um átomo de Hidrogênio.

No caso de uma única placa perfeitamente condutora, este problema foi primeiramente discutido por Barton [39] e posteriormente por Power e Thirunamachandran [88] e também por Lütken e Ravndal [89]. Generalizações para o caso de duas placas condutoras foram feitas pelo próprio Barton [40], por Lütken e Ravndal [90], por Cheon [91], e por Jhe [44, 45]. O caso de duas superfícies dielétricas e paralelas foi tratado por Jhe e Nha [46]. Entretanto, a influência de placas permeáveis nos níveis atômicos de energia estava ausente na literatura. A proposta desse capítulo é preencher parte dessa lacuna, por meio do estudo da influência de duas placas paralelas, infinitamente permeáveis, nos níveis de energia do átomo de Hidrogênio. Para calcular os deslocamentos nos níveis de energia, usaremos teoria de perturbação de segunda ordem. Quanto à regularização a ser empregada no cálculo das funções de correlação, adotamos o método da separação de pontos de Schwinger. No entanto, para os nossos propósitos, será suficiente apenas fazer a separação (imaginária) apenas na variável temporal. Como ficará claro nos cálculos, essa prescrição de regularização é equivalente a introduzir um corte ultravioleta na teoria. Nossos resultados serão comparados com aqueles obtidos para o caso usual em que as placas são condutores perfeitos.

Consideremos, então, duas placas planas, perfeitamente permeáveis, ambas com a jazitura do plano OXY e situadas em $z = 0$ e $z = L$, respectivamente. Como vimos no capítulo anterior, as condições de contorno impostas pela presença das placas ao potencial

vetor, considerando o calibre de Coulomb são dadas por:

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial A_y}{\partial z}(t, x, y, 0) = A_z(t, x, y, 0) = 0 \quad (2.21)$$

e

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}(t, x, y, L) = \frac{\partial A_y}{\partial z}(t, x, y, L) = A_z(t, x, y, L) = 0. \quad (2.22)$$

Os modos transverso-elétrico (TE) e transverso-magnético (TM) do campo de radiação, na região entre duas placas perfeitamente permeáveis são descritos, respectivamente, pelos potenciais:

$$\vec{A}_n^E(\vec{k}_{||}, \vec{r}) = iN \left[k_y \hat{x} - k_x \hat{y} \right] \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}} \quad (2.23)$$

e

$$\vec{A}_n^M(\vec{k}_{||}, \vec{r}) = \left[\frac{N n \pi}{\omega L} \vec{k}_{||} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) + \frac{N}{i\omega} \vec{k}_{||}^2 \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \hat{z} \right] e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}}, \quad (2.24)$$

onde N é uma constante de normalização e definimos

$$\vec{k}_{||} := k_x \hat{x} + k_y \hat{y}; \quad \vec{r}_{||} := x \hat{x} + y \hat{y} \quad \text{e} \quad \omega = \omega(\vec{k}_{||}, n) = \left[\vec{k}_{||}^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

A constante de normalização N é escolhida de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^L dz \vec{A}_n^\lambda(\vec{k}_{||}, \vec{r}) \cdot \vec{A}_{n'}^{\lambda'}(\vec{k}'_{||}, \vec{r}) = 4\pi^2 \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}'_{||}), \quad (2.26)$$

o que nos leva a:

$$N = \frac{1}{k_{||}} \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } n = 0 \quad (2.27)$$

e

$$N = \frac{1}{k_{||}} \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } n \neq 0. \quad (2.28)$$

Na expressão (2.26), $\lambda = E$ e $\lambda = M$ representam, respectivamente, os modos *TE* e *TM*. O operador de campo $\vec{A}(t, \vec{r})$, ou seja, o campo de radiação, é dado então pela substituição de (2.23) e (2.24) na expressão:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \sum_{\lambda=E,M} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a_n^\lambda(k_{||}) \vec{A}_n^\lambda(k_{||}, \vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \right]. \quad (2.29)$$

onde os operadores de criação e aniquilação de fótons satisfazem as relações de comutação escritas abaixo:

$$\left[a_n^{\lambda'}(k'_{||}), a_n^{\lambda\dagger}(k_{||}) \right] = 4\pi^2 \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}'_{||}), \quad (2.30)$$

$$\left[a_n^{\lambda'}(k'_{||}), a_n^{\lambda}(k_{||}) \right] = 0 \quad ; \quad \left[a_n^{\lambda\dagger}(k'_{||}), a_n^{\lambda\dagger}(k_{||}) \right] = 0. \quad (2.31)$$

Nosso objetivo aqui é estudar a interação do elétron ligado do átomo de Hidrogênio com o campo de radiação que está sujeito às condições impostas por duas placas paralelas infinitamente permeáveis. Utilizaremos a aproximação de dipolo e levaremos em consideração somente a influência do campo elétrico. Pode-se mostrar que a contribuição magnética é desprezível. As flutuações do campo magnético \vec{B} causam uma perturbação dos auto-estados de energia proporcional a eB/m , onde m é a massa do elétron, enquanto as flutuações no campo elétrico causam um perturbação $e\vec{r} \cdot \vec{E}$. Visto que o raio atômico r é da ordem de $(\alpha m)^{-1}$, onde $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ é a constante de estrutura fina, podemos ignorar a perturbação magnética nos cálculos que faremos a seguir. Utilizaremos um procedimento e uma notação análogos aos apresentados na ref.[90].

Uma vez que os valores esperados no vácuo dos operadores de campo se anulam, não haverá qualquer deslocamento nos níveis de energia em primeira ordem de teoria de perturbação. Em segunda ordem, a interação com o campo de radiação nos fornece para o deslocamento de energia do átomo a expressão:

$$\Delta\epsilon_n = e^2 \sum_{m,k} \frac{|\langle n, 0 | \vec{r}_{(e)} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) | m, k \rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_m - \omega_k}, \quad (2.32)$$

onde ω_k é a energia do fóton no k -ésimo modo do campo de radiação, $\vec{r}_{(e)}$ é a posição do elétron em relação ao núcleo atômico e \vec{r} é a posição do núcleo atômico relativo ao referencial inercial em uso, com origem numa das placas. Na expressão anterior, $|m, \vec{k}, \lambda\rangle$ representa o estado do sistema átomo-campo de radiação, dado pelo produto direto de um estado atômico $|m\rangle$ com um estado de Fock $|\vec{k}, \lambda\rangle$ do campo com apenas um fóton de momento linear \vec{k} e polarização λ .

Na soma sobre os estados atômicos $|m\rangle$, é conveniente separar a contribuição proveniente dos estados degenerados com o estado $|n\rangle$, que passaremos a designar por $|n'\rangle$.

Podemos escrever então que:

$$\Delta\epsilon_n = \Delta\epsilon_n^{(1)} + \Delta\epsilon_n^{(2)}, \quad (2.33)$$

com

$$\Delta\epsilon_n^{(1)} = -e^2 \sum_{n',k} \frac{|\langle n, 0 | \vec{r}_{(e)} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) | n', k \rangle|^2}{\omega_k}, \quad (2.34)$$

e

$$\Delta\epsilon_n^{(2)} = e^2 \sum_{m \neq n', k} \frac{|\langle n | \vec{r}_{(e)} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) | m, k \rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_m - \omega_k}. \quad (2.35)$$

2.2.1 Contribuição dos estados degenerados

Calculemos inicialmente a contribuição para o deslocamento dos níveis atômicos proveniente dos estados degenerados, dados pela soma em (2.34). Note que esta soma pode ser separada em um produto onde um dos fatores envolve apenas elementos de matriz de operadores atômicos e o outro, apenas o campo de radiação, ou seja, elementos de matriz de operadores de campo entre estados de Fock do campo do fóton:

$$\Delta\epsilon_n^{(1)} = -e^2 \sum_i \sum_{n'} |\langle n | x_{(e)_i} | n' \rangle|^2 \sum_k \frac{|\langle 0 | E_i(t, \vec{r}) | k \rangle|^2}{\omega_k}, \quad (2.36)$$

onde a primeira soma é sobre as três direções espaciais. Por simplicidade, daqui em diante utilizaremos a seguinte notação:

$$\langle E_i^2 / \omega \rangle = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{|\langle 0 | E_i(t, \vec{r}) | \vec{k}, \lambda \rangle|^2}{\omega_k}. \quad (2.37)$$

Se tentarmos calcular o elemento de matriz escrito acima utilizando a expressão para o operador campo elétrico $\vec{E} = \partial_t \vec{A}$ obtida a partir das equações (2.23), (2.24) e (2.29), encontraremos resultados divergentes, devido às divergências ultravioletas presentes nas integrações e na soma sobre todos os momentos possíveis dos estados de um fóton. Para nos livrarmos desse problema de uma forma consistente, devemos adotar algum procedimento de regularização confiável a fim de obtermos valores finitos para tais elementos de matriz. Em seguida, deveremos renormalizar os resultados, isto é, subtrair os termos

espúrios, desprovidos de qualquer significado físico para o problema em questão, de modo que ao retirarmos o parâmetro regularizador ³ tenhamos resultados finitos.

Como veremos, efetuar a renormalização aqui consistirá simplesmente em subtrair do resultado regularizado, aquele obtido com a mesma regularização, mas sem que as placas estejam presentes. A regularização que adotaremos aqui é a chamada de separação de pontos, introduzida por Schwinger. No problema em estudo, não será necessário separar todas as componentes dos pontos coincidentes dos operadores de campo, mas apenas fazer uma separação imaginária nas variáveis temporais. Ficará óbvio que este procedimento é análogo a introduzir um corte nas altas frequências.

Usando as equações (2.23) e (2.24) em (2.29), assim como também a definição de \vec{E} , escrevemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}} \sum_{i=1}^2 |\langle 0|E_i(t, \vec{r})|k \rangle|^2 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{\vec{k}} \sum_{i=1}^2 \left(\langle 0|E_i(t, \vec{r})|k \rangle \langle 0|E_i(t' = t + i\tau, \vec{r})|k \rangle^* \right) \\ &= \frac{1}{L} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left(\omega_{\vec{k}} + \frac{k^2}{\omega_{\vec{k}}} \right) \cos^2(kz) e^{-\omega \tau} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2L} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} k_{\parallel} e^{-k_{\parallel} \tau} \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde τ é um real positivo e $k = n\pi/L$. Um breve comentário é bastante pertinente nesse momento. Na expressão anterior, enquanto tivermos um valor finito, ainda que muito pequeno, para τ , a expressão estará regularizada, isto é, terá um valor finito. No entanto, se tomarmos o limite em que τ vai a zero, estaremos retirando a regularização e, conseqüentemente, a expressão voltará a ser divergente. A questão é que o limite acima não deve ser tomado até que os termos espúrios sejam subtraídos desta expressão. Entendido isso, omitiremos das próximas equações o símbolo de limite e estará subentendido que τ é bem pequeno, mas diferente de zero. Mais adiante, após a renormalização, tomaremos então o limite $\tau \rightarrow 0$.

³Todo procedimento de regularização introduz um parâmetro que controla, num certo sentido, a subtração ou o corte que está sendo feito e de tal modo que num certo limite desse parâmetro, chamado de parâmetro regularizador, a regularização é retirada.

Definindo

$$\langle \vec{E}_{\parallel}^2 / \omega \rangle := \langle \vec{E}_x^2 / \omega \rangle + \langle \vec{E}_y^2 / \omega \rangle \quad (2.39)$$

e usando a Eq.(2.38), temos que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{\parallel}^2 / \omega \rangle &= \sum_{i=1}^2 \sum_k \frac{|\langle 0 | E_i(t, \vec{r}) | k \rangle|^2}{\omega_k} \\ &= \frac{1}{4\pi L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[1 + \cos(2k_n z) \right] \int_{k_n}^{\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{k_n} + \frac{k_n}{\omega} \right) + \int_0^{\infty} d\omega \omega \right] e^{-\omega \tau}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde $k_n := n\pi/L$. Usando que:

$$\int_{k_n}^{\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{k_n} \pm \frac{k_n}{\omega} \right) e^{-\omega \tau} = -\frac{1}{k_n} \left[\partial_{\tau} \frac{1}{\tau} \right] e^{-k_n \tau} \pm k_n \int_{\tau}^{\infty} d\omega \frac{e^{-\omega k_n}}{\omega} \quad (2.41)$$

e em seguida que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \left[1 \pm \cos(2kz) \right] e^{-\frac{n\pi\tau}{L}} = \Sigma_{\pm}(\epsilon, \theta), \quad (2.42)$$

onde definimos

$$\Sigma_{\pm}(\epsilon, \theta) = \frac{1}{e^{\epsilon} - 1} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\epsilon + 2i\theta} - 1} + c.c. \right), \quad (2.43)$$

$$\lambda = \pi/L, \epsilon = \lambda\tau, \theta = \lambda z,$$

obtemos:

$$\langle \vec{E}_{\parallel}^2 / \omega \rangle = \frac{1}{4\pi L} \left\{ - \left[\partial_{\tau} \frac{1}{\tau} \right] \Sigma_{+}(\epsilon, \theta) + \int_{\tau}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \frac{d^2}{d\omega^2} \Sigma_{+}(\lambda\omega, \theta) \right\} + \frac{L}{4\pi} \frac{1}{\tau^2}. \quad (2.44)$$

Substituindo

$$\int_{\tau}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \frac{d^2}{d\omega^2} \Sigma_{+}(\lambda\omega, \theta) = -\frac{\pi^2}{L^2 \epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Sigma_{+}(\epsilon, \theta) - \frac{\pi^2}{L^2 \epsilon^2} \Sigma_{+}(\epsilon, \theta) + \frac{2\pi^2}{L^2} \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\Sigma_{+}(x, \theta)}{x^3}, \quad (2.45)$$

em (2.44), temos que:

$$\langle \vec{E}_{\parallel}^2 / \omega \rangle = \frac{\pi}{2L^3} \left[\frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \partial_{\epsilon} \Sigma_{+}(\epsilon, \theta) + \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\Sigma_{+}(x, \theta)}{x^3} \right]. \quad (2.46)$$

De modo totalmente análogo obtemos, após longos cálculos, que:

$$\begin{aligned}\langle E_z^2/\omega \rangle &= \frac{1}{4\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} k \left[1 - \cos(2kz) \right] \int_k^{\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) e^{-\omega\tau} \\ &= \frac{\pi}{2L^3} \left[\frac{1}{\epsilon^2} \Sigma_{-}(\epsilon, \theta) - \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\Sigma_{-}(x, \theta)}{x^3} \right]\end{aligned}\quad (2.47)$$

As integrações em (2.46) e (2.47) estão calculadas explicitamente no Apêndice A. Os resultados são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\Sigma_{\pm}(x, \theta)}{x^3} &= \frac{1}{3\epsilon^3} - \frac{1}{4\epsilon^2} (1 \pm 1) + \frac{1}{4\epsilon} S_{\pm} + O(\epsilon) \\ &- \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \zeta_R(3) \pm \frac{1}{2} \left[\zeta_H(3, z/L) + \zeta_H(3, -z/L) + (L/z)^3 \right] \right\},\end{aligned}\quad (2.48)$$

onde definimos

$$S_{\pm} = \frac{1}{3} \mp \frac{1}{\sin^2(\theta)},\quad (2.49)$$

e identificamos as funções zeta de Riemann ζ_R e zeta de Hurwitz ζ_H , definidas, por:

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\quad (2.50)$$

e

$$\zeta_H(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.\quad (2.51)$$

Substituindo as expressões acima em (2.46) e (2.47), obtemos:

$$\frac{\langle \vec{E}_{\parallel}^2/\omega \rangle}{2} = \langle E_x^2/\omega \rangle = \langle \vec{E}_y^2/\omega \rangle = \frac{1}{3\pi^2\tau^3} - \frac{1}{64\pi L^3} F_+(z)\quad (2.52)$$

e

$$\langle E_z^2/\omega \rangle = \frac{1}{3\pi^2\tau^3} - \frac{1}{32\pi L^3} F_-(z),\quad (2.53)$$

onde definimos as funções:

$$F_{\pm}(z) := \left(\frac{L}{z} \right)^3 + \zeta_H \left(3, \frac{z}{L} \right) + \zeta_H \left(3, -\frac{z}{L} \right) \pm 2\zeta_R(3)\quad (2.54)$$

e os termos de ordem $O(\tau)$ já foram descartados pois, ao final dos cálculos, quando $\tau \rightarrow 0$, esses termos desaparecerão. Renormalizaremos agora as expressões escritas acima

subtraindo delas as expressões correspondentes mas sem que as condições de contorno impostas pelas placas sejam levadas em consideração ⁴ e aí então tomando-se o limite $\tau \rightarrow 0$:

$$\langle E_i^2/\omega \rangle^{ren} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \langle E_i^2/\omega \rangle_{\text{com placas}} - \langle E_i^2/\omega \rangle_{\text{sem placas}} \right\}. \quad (2.55)$$

Ou seja, descartamos o termo $1/(3\pi^2\tau^3)$, divergente quando $\tau \rightarrow 0$, mas independente de L , obtendo dessa forma:

$$\frac{\langle \vec{E}_{\parallel}^2/\omega \rangle}{2} = \langle E_x^2/\omega \rangle = \langle E_y^2/\omega \rangle = -\frac{1}{64\pi L^3} F_+(z) \quad (2.56)$$

e

$$\langle E_z^2/\omega \rangle = -\frac{1}{32\pi L^3} F_-(z), \quad (2.57)$$

nas quais, por simplicidade, não mais utilizamos a notação *ren* para significar que trata-se da quantidade já renormalizada. Embora tais resultados sejam análogos aos correlatores obtidos em [90] para o caso de duas placas condutoras (trocando-se $F_+ \leftrightarrow -F_-$ em (2.56) e (2.57), temos os correlatores os obtidos em [90]), as diferenças entre os correlatores em ambos os modelos resultam em diferenças tanto no sinal, quanto no módulo dos deslocamentos nos níveis de energia, conforme exposto a seguir.

Substituindo (2.56) e (2.57) em (2.36), obtemos, portanto, a contribuição relacionada com os estados degenerados:

$$\Delta\epsilon_n^{(1)} = \frac{e^2}{64\pi L^3} \sum_{n'} \left[|\langle n|x^{(e)}|n' \rangle|^2 F_+ + |\langle n|y^{(e)}|n' \rangle|^2 F_+ + 2|\langle n|z^{(e)}|n' \rangle|^2 F_- \right]. \quad (2.58)$$

2.2.2 Contribuição dos estados não degenerados

Voltemos a nossa atenção para a contribuição provinda dos níveis não degenerados. Para esse caso iremos considerar em separado os seguintes regimes: quando o átomo estiver próximo a uma das placas e quando estiver muito afastado das mesmas.

No caso em que o átomo está próximo a uma das placas, é possível mostrar que a contribuição dominante vêm de $\omega_{\vec{k}} \gg \epsilon_n - \epsilon_\ell$ [90]. Conseqüentemente, desprezando $\epsilon_n - \epsilon_\ell$

⁴Tais expressões podem ser obtidas tomando-se o limite $L \rightarrow \infty$ e, em seguida, o limite $z \rightarrow \infty$ nas fórmulas 2.52 e 2.53.

as contribuições $\Delta\varepsilon_n^{(1)}$ e $\Delta\varepsilon_n^{(2)}$, nessas regiões, assumem a mesma forma. Usando a completeza dos estados atômicos, argumentos baseados nas regras de seleção para transições atômicas com potenciais esféricamente simétricos, assim como propriedades do campo de radiação, pode-se mostrar que [90]:

$$\Delta\varepsilon_n = \Delta\varepsilon_n^{(1)} + \Delta\varepsilon_n^{(2)} = \frac{e^2}{64\pi L^3} \left[\langle n|(x^2 + y^2)|n\rangle F_+(z) + 2\langle n|z^2|n\rangle F_-(z) \right]. \quad (2.59)$$

Longe das placas (regime retardado), pode-se mostrar que a contribuição dominante vem de $\omega_{\vec{k}} \ll \varepsilon_n - \varepsilon_\ell$ [90]. Desprezando agora $\omega_{\vec{k}}$, a contribuição $\Delta\varepsilon_n^{(2)}$ torna-se:

$$\Delta\varepsilon_n^{(2)} = e^2 \sum_i \sum_\ell \frac{|\langle n|x_i^{(e)}|\ell\rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_\ell} \sum_{\vec{k}} |\langle 0|\vec{E}_i|\vec{k}\rangle|^2. \quad (2.60)$$

Usando a expressão para o operador de campo elétrico e a completeza dos estados de Fock, pode-se mostrar que:

$$\sum_{\vec{k}} |\langle 0|\vec{E}_i|\vec{k}\rangle|^2 = \langle 0|E_i E_i|0\rangle. \quad (2.61)$$

Assim sendo, temos que:

$$\begin{aligned} \langle 0|\vec{E}_{||}^2(z, t)|0\rangle &:= \lim_{\tau \rightarrow 0} \langle 0|\vec{E}_{||}(z, t) \cdot \vec{E}_{||}(z, t + i\tau)|0\rangle \\ &= \frac{1}{L} \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \left(\omega_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{\omega_{\vec{k}}} \right) \cos^2(kz) e^{-\omega \tau} + \frac{1}{2L} \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} k_{||} e^{-k_{||} \tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi^2 \tau^4} \right) - \frac{2\pi^2}{48L^4} \left[F\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{1}{15} \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde utilizamos novamente a regularização via separação imaginária nas variáveis temporais, definimos a função:

$$F(\theta) = \frac{3}{\sin^4 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta} \quad (2.63)$$

e, de acordo com o que já mencionamos anteriormente, está subentendido que só devemos tomar $\tau \rightarrow 0$ depois que as subtrações dos termos espúrios forem feitas.

Utilizando um procedimento em tudo análogo ao adotado para o cálculo de $\langle 0|\vec{E}_{||}^2(z)|0\rangle$, obtemos para o valor esperado no vácuo do operador E_z^2 que:

$$\langle 0|E_z^2(t, z)|0\rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \langle 0|E_z(t, z) E_z(t + i\tau, z)|0\rangle$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi^2 \tau^4} \right) + \frac{\pi^2}{48L^4} \left[-F \left(\frac{\pi z}{L} \right) + \frac{1}{15} \right]. \quad (2.64)$$

Usando a definição para a polarizabilidade elétrica estática do nível n [92]:

$$\alpha_i \equiv 2e^2 \sum_{\ell} \frac{|\langle n | x_i | \ell \rangle|^2}{\varepsilon_{\ell} - \varepsilon_n}, \quad (2.65)$$

assim como as equações (2.62) e (2.64), renormalizados de acordo com a subtração escrita em (2.55), obtemos, na base diagonal dos estados atômicos:

$$\Delta \varepsilon_n^{(2)} = -\frac{\pi^2}{96L^4} \left\{ (\alpha_x + \alpha_y) \left[-F \left(\frac{\pi z}{L} \right) - \frac{1}{15} \right] + \alpha_z \left[\frac{1}{15} - F \left(\frac{\pi z}{L} \right) \right] \right\}. \quad (2.66)$$

Trocando-se $F \left(\frac{\pi z}{L} \right) \rightarrow -F \left(\frac{\pi z}{L} \right)$ em (2.66), tem-se o resultado correspondente obtido por Lütken e Ravndal [90], para o caso de placas perfeitamente condutoras.

2.3 Análise numérica

A fim de fazer uma análise numérica de nosso resultado, calcularemos os deslocamentos nos menores níveis de energia do átomo de Hidrogênio. Seguindo os procedimentos adotados em [90], definiremos, por conveniência, o operador:

$$W := \sum_{n'} \left\{ \left(x_+ |n'\rangle \langle n'| x_- + x_- |n'\rangle \langle n'| x_+ \right) F_-(z) + 2z |n'\rangle \langle n'| z F_+(z) \right\}, \quad (2.67)$$

onde $x_{\pm} := (x \pm iy)/\sqrt{2}$. Assim podemos reescrever (2.58) como:

$$\Delta \varepsilon_n^{(1)} = \frac{e^2}{64\pi L^3} \langle n | W | n \rangle, \quad (2.68)$$

em uma base onde W é diagonal. Utilizando coordenadas esféricas, pode-se mostrar que os elementos diagonais da matriz W são dados por [90]:

$$\langle n, l, m | W | n, l, m \rangle = \frac{9}{4} a^2 n^2 \left\{ \frac{n^2 - l^2}{(2l - 1)(2l + 1)} \left[(l^2 - l + m^2) F_- + 2(l^2 - m^2) F_+ \right] \right\}$$

$$+ \frac{n^2 - (l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} \left[(l^2 + 3l + m^2 + 2)F_- + 2(l^2 + 2l - m^2 + 1)F_+ \right] \Big\}, \quad (2.69)$$

enquanto os elementos não diagonais são dados por:

$$\begin{aligned} & \langle n, l-2, m | W | n, l, m \rangle \\ &= \frac{9}{4} a^2 n^2 \left[\frac{n^2 - l^2}{(2l-1)(2l+1)} \frac{n^2 - (l-1)^2}{(2l-3)(2l-1)} (l^2 - m^2)(l-1)^2 - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} (2F_+ - F_-). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Para o estado fundamental, substituindo $n = 1$, $l = 0$ e $m = 0$ em (2.70), obtemos:

$$\Delta\epsilon_{100}^{(1)} = 0, \quad (2.71)$$

ou seja, o termo relacionado com os estados degenerados não contribui para o deslocamento da energia do estado fundamental. Toda a contribuição, portanto, vem do termo (2.58). Usando os resultados de Leutwyler e Voloshin [93, 94] para a soma das polarizabilidades do átomo de Hidrogênio:

$$\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 16\pi a^3 n^6 A_{nl}, \quad (2.72)$$

onde $a := (\alpha m)^{-1}$ é o raio de Bohr e os números adimensionais A_{nl} são da ordem de 1, fazemos $n = 1$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{100} &= \Delta\epsilon_{100}^{(2)} \\ &= -\frac{9\pi^3 a^3}{16 L^4} \left[-F\left(\frac{\pi z}{L}\right) - \frac{1}{45} \right] = -(6.5 \times 10^4 eV) \left(\frac{a}{L}\right)^4 \left[-F\left(\frac{\pi z}{L}\right) - \frac{1}{45} \right]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Para $n = 2$ e $n = 3$, pode-se mostrar [90] que as contribuições dominantes aos deslocamentos nos níveis de energia vêm dos estados não degenerados, dadas em (2.58). Assim sendo:

$$\Delta\epsilon_{200}^{(1)} = 18a^2 A \left(F_+(z) + F_-(z) \right),$$

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_{210}^{(1)} &= 18a^2AF_-(z), \\ \Delta\epsilon_{211}^{(1)} &= 9a^2AF_+(z),\end{aligned}\tag{2.74}$$

onde

$$A = \frac{e^2}{64\pi L^3} = \frac{\alpha}{16L^3}.\tag{2.75}$$

Para $n = 3$, temos que os estados $|300\rangle$ e $|320\rangle$ irão misturar-se, sendo a matriz secular dada por:

$$\frac{81}{4}a^2A \begin{pmatrix} \frac{16}{3}(F_+(z) + F_-(z)) & \frac{4}{3}\sqrt{2}(2F_-(z) - F_+(z)) \\ \frac{4}{3}\sqrt{2}(2F_-(z) - F_+(z)) & \frac{2}{3}(4F_-(z) + F_+(z)) \end{pmatrix},\tag{2.76}$$

com autovalores:

$$\Delta\epsilon_{3\pm}^{(1)} = -\frac{81}{4}a^2A \left[-4F_-(z) - 3F_+(z) \pm \left(16F_-^2(z) - 8F_+(z)F_-(z) + 9F_+^2(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right],\tag{2.77}$$

onde denotamos os correspondentes autoestados por $|3_+\rangle$ e $|3_-\rangle$. Os outros níveis com $n = 3$ não se misturam e têm como descolamentos:

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_{310}^{(1)} &= \frac{81}{2}a^2A(4F_-(z) + F_+(z)), \\ \Delta\epsilon_{311}^{(1)} &= \frac{27}{4}a^2A(6F_-(z) + 15F_+(z)), \\ \Delta\epsilon_{321}^{(1)} &= \frac{81}{4}a^2A(2F_-(z) + F_+(z)), \\ \Delta\epsilon_{322}^{(1)} &= \frac{81}{2}a^2AF_+(z).\end{aligned}\tag{2.78}$$

Tomando como exemplo $z = L/2$, temos:

$$F_{\pm} \left(z = \frac{L}{2} \right) = 2(7 \pm 1)\zeta_R(3),\tag{2.79}$$

onde $\zeta_R(3) = 1.202\dots$. Calculando os deslocamentos para este caso de duas placas infinitamente permeáveis e comparando com os resultados obtidos em [90] para o caso de

placas perfeitamente condutoras, obtemos, em unidades de $\zeta_R(3)Aa^2$:

Deslocamentos	Permeáveis	Condutoras
$\Delta\epsilon_{200}^{(1)}$	504	-504
$\Delta\epsilon_{210}^{(1)}$	216	-288
$\Delta\epsilon_{211}^{(1)}$	144	-108
$\Delta\epsilon_{3+}^{(1)}$	≈ 821.631	≈ -3282.458
$\Delta\epsilon_{3-}^{(1)}$	≈ 3066.369	≈ -767.542
$\Delta\epsilon_{310}^{(1)}$	2592	-3078
$\Delta\epsilon_{311}^{(1)}$	2106	-1863
$\Delta\epsilon_{321}^{(1)}$	810	-891
$\Delta\epsilon_{322}^{(1)}$	648	-486

(2.80)

Os sinais de tais deslocamentos são determinados a partir dos sinais das funções F_{\pm} [90], funções estas que são estritamente positivas. Por esse motivo, os deslocamentos nos níveis de energia causado por placas de Casimir resultam negativos, enquanto os deslocamentos causados por duas placas infinitamente permeáveis, positivos.

A magnitude dos deslocamentos dados em (2.80) é dada pela quantidade:

$$a^2 A = 1.70 eV \left(\frac{a}{L}\right)^3, \quad (2.81)$$

que é bastante pequena. Em termos do deslocamento Lamb usual, da ordem de:

$$\Delta\epsilon_{Lamb} \simeq \frac{\alpha^4}{a}, \quad (2.82)$$

as magnitudes dos deslocamentos calculados acima são dadas por:

$$\Delta\epsilon_n^{(1)} \simeq n^4 \left(\frac{a}{\alpha L}\right)^3 \Delta\epsilon_{Lamb} \quad (2.83)$$

e

$$\Delta\epsilon_2^{(2)} \simeq 64 \left(\frac{a}{\alpha L}\right)^3 \Delta\epsilon_{Lamb}. \quad (2.84)$$

2.4 Caso de uma placa permeável

Os resultados relacionados com a influência de uma placa permeável no deslocamento Lamb podem ser obtidos tomando-se o limite $L \rightarrow \infty$ nos resultados obtidos para duas placas permeáveis. Tomando-se o limite dos correlatores (2.56) e (2.57), temos:

$$\frac{\langle \vec{E}_{\parallel}^2 / \omega \rangle_{1 \text{ placa}}}{2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{64\pi L^3} F_+(z) \right) = -\frac{1}{64\pi z^3} \quad (2.85)$$

e

$$\langle E_z^2 / \omega \rangle_{1 \text{ placa}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{32\pi L^3} F_-(z) \right) = -\frac{1}{32\pi z^3}. \quad (2.86)$$

A contribuição dos estados degenerados aos deslocamentos nos níveis de energia (fórmula (2.58), para o caso de 2 placas) é, para o caso de uma placa, dada por:

$$\Delta \epsilon_n^{(1)} \text{ placa} = \frac{e^2}{64\pi z^3} \sum_{n'} \left[|\langle n | x^{(e)} | n' \rangle|^2 + |\langle n | y^{(e)} | n' \rangle|^2 + 2|\langle n | z^{(e)} | n' \rangle|^2 \right]. \quad (2.87)$$

Já a contribuição dos estados não-degenerados no regime não-retardado, ou seja, quando o átomo encontra-se próximo à placa (fórmula (2.59), para o caso de 2 placas), é:

$$\Delta \epsilon_n \text{ placa} = \frac{e^2}{64\pi z^3} \left[\langle n | (x^2 + y^2) | n \rangle + 2\langle n | z^2 | n \rangle \right]. \quad (2.88)$$

Finalmente a contribuição dos estados não-degenerados no regime retardado (fórmula (2.66), para o caso de 2 placas), é, para o caso de uma placa, dada por:

$$\Delta \epsilon_n^{(2)} \text{ placa} = \frac{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z}{32\pi^2 z^4}. \quad (2.89)$$

2.5 Comentários

Mesmo sendo os deslocamentos calculados aqui muito pequenos, o desenvolvimento de tecnologias que detectam deslocamentos muito menores que o deslocamento Lamb já permitem que tais efeitos de cavidades sejam verificados.

A influência de placas mistas, ou seja, uma infinitamente condutora e outra perfeitamente permeável, no deslocamento Lamb também foi feito em detalhes e encontra-se na referência [71].

Uma extensão natural, que pode ser de interesse, é a inclusão de efeitos térmicos. Dessa forma o cálculo dos correlatores a uma temperatura finita estaria levando em conta a presença de uma radiação de corpo negro.

Capítulo 3

Efeito Casimir Dinâmico

Neste capítulo, discutimos o efeito Casimir dinâmico em 1+1 dimensões. Calculamos a força que um campo escalar não massivo exerce sobre uma fronteira em movimento não relativístico, quando este campo encontra-se em diferentes estados, a saber: seu estado de vácuo ou um estado térmico. Os cálculos são feitos para uma única fronteira em movimento e também para o caso de cavidades unidimensionais. Nesses cálculos, diferentes condições de contorno são consideradas.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 3.1 fazemos uma breve introdução ao tema. Na seção 3.2, por razões históricas e para introduzir algumas idéias básicas, apresentamos explicitamente alguns cálculos relativos ao efeito Casimir estático. A partir da seção 3.3 passamos então a considerar o movimento das fronteiras. Nas subseções 3.3.1 e 3.3.2 calculamos a força sobre uma única fronteira com o método do tensor energia-momento, enquanto nas subseções 3.3.3, 3.3.4 e 3.3.5, ainda com esse método, consideramos o caso de cavidades unidimensionais. Em cada subseção utilizamos uma dada configuração de condições de contorno. Na subseção 3.3.6, apresentamos um método alternativo para abordar o problema, que nos fornece diretamente a expressão para o número de *quanta* do campo, gerados pelo movimento da cavidade. Na seção 3.4, considerando uma única fronteira em movimento, generalizamos alguns dos resultados anteriores para o caso em que o campo encontra-se num estado térmico.

3.1 Introdução

Em seu famoso trabalho publicado em 1948 [9], H. B. G. Casimir calculou a força atrativa entre duas placas fixas, perfeitamente condutoras, neutras e paralelas, decorrente das flutuações quânticas do campo eletromagnético em seu estado de vácuo. Casimir mostrou que a mudança na energia de ponto zero do campo eletromagnético quantizado, induzida pela presença das placas metálicas, dá origem a uma força macroscópica entre as placas. Desde então, a denominação “forças de Casimir” tem sido empregada para descrever, de um modo genérico, as forças entre corpos macroscópicos, provocadas pelas distorções nos modos do campo causadas pela presença desses corpos, quando esse campo encontra-se no estado de vácuo.

As forças dinâmicas de Casimir são aquelas exercidas pelas flutuações do vácuo do campo considerado, sobre corpos macroscópicos em movimento. Um dos efeitos relacionados com essa força é a possível dissipação da energia desses corpos, levando à criação de *quanta* reais do campo em questão. Tal criação de partículas reais pode ser entendida em termos do princípio da conservação da energia: forças dissipativas de Casimir retiram energia dos corpos em movimento, sendo esta convertida em *quanta* reais do campo (fótons no caso do campo eletromagnético).

Uma diferença básica entre as forças de Casimir estáticas e dinâmicas é que as últimas aparecem mesmo no caso onde existe somente um corpo em movimento (uma placa metálica, por exemplo), como foi mostrado pela primeira vez por Moore [95] e Fulling-Davies [96], estes últimos tendo empregado um método baseado em transformações conformes. Entretanto, a força dinâmica de Casimir, no caso de uma única placa, aparece somente se ela tiver uma aceleração variável, como foi mostrado explicitamente no trabalho de Ford-Vilenkin [97]. Esses autores desenvolveram um método perturbativo no qual a modificação na solução do campo, induzida por um movimento não relativístico das fronteiras, é considerado como uma pequena perturbação com respeito à solução do problema correspondente com fronteiras estáticas. Esse método, embora aproximativo, pode ser diretamente aplicado em dimensões mais altas. De fato, esses autores o utilizaram também para o caso

de um campo escalar sem massa, em $3 + 1$ dimensões, na presença de uma fronteira plana em movimento. Esse mesmo método também foi aplicado com sucesso no caso do campo eletromagnético [47] e, mais recentemente, ao cálculo do número de fótons criados pelo movimento de uma única placa metálica e por uma cavidade formada por duas placas metálicas paralelas [50].

Neste capítulo estudamos o efeito Casimir dinâmico relacionado com o campo escalar não massivo em $1 + 1$ dimensões, sendo que as fronteiras consideradas impõem ao campo condições de Dirichlet ou Neumann. O modelo aqui considerado, assim como as condições de fronteira adotadas, contém todos os ingredientes básicos encontrados, por exemplo, no cálculo do número de fótons gerados por espelhos movendo-se no vácuo [49, 50]. Além disso, o campo escalar real não massivo simula, em certas situações, o próprio campo eletromagnético. Por exemplo, em $3 + 1$ dimensões, considerando duas placas fixas perfeitamente condutoras, a energia de Casimir associada ao campo eletromagnético é duas vezes a energia de Casimir associada ao campo escalar real não massivo entre duas placas com condições de Dirichlet (o fator 2 deve-se aos estados de polarização do fóton).

No modelo a ser estudado neste capítulo, o movimento das fronteiras é considerado não relativístico e com pequenas amplitudes de oscilação. Essas hipóteses permitem o uso do método de Ford e Vilenkin [97], o qual, conforme já comentado, consiste em considerar a solução do campo, obedecendo condições de contorno sobre fronteiras em movimento, como a soma de uma pequena perturbação à solução para o caso em que as mesmas fronteiras estão fixas.

Uma vez obtida a solução do campo com o método de Ford-Vilenkin, ela pode ser usada de duas maneiras diferentes para a obtenção das forças de Casimir dinâmicas. A primeira consiste em calcular a força sobre uma superfície por meio da diferença entre as componentes T^{11} do tensor energia *momentum*, tomadas em ambos os lados da mesma; a segunda consiste em, considerando o movimento da fronteira finito no tempo e adotando a representação de Heisenberg, escrever os operadores *out* em termos dos operadores *in* e calcular o número de *quanta* $N_{out} = \langle 0_{in} | a_{out}^\dagger a_{out} | 0_{in} \rangle$ produzido após cessado o movimento da fronteira. Conhecido tal número, argumentos de conservação de energia nos

permitem obter a expressão para a parte dissipativa da força que atua sobre a fronteira.

Também estudamos, neste capítulo, os efeitos térmicos sobre a força de Casimir dinâmica. Se, por um lado, a termodinâmica do efeito Casimir estático tem sido estudada há bastante tempo, sendo muito bem conhecida nos dias de hoje [98] (veja também referências citadas nesse trabalho), o mesmo não pode ser dito em relação ao efeito Casimir dinâmico. Existem somente uns poucos trabalhos em relação a esse tema na literatura [99, 100, 101, 51, 52]. Particularmente, efeitos térmicos na força dissipativa sobre uma fronteira têm sido raramente considerados, mesmo em $1 + 1$ dimensões. Os primeiros autores que calcularam a força dissipativa à temperatura finita, para um campo escalar não massivo, em $1 + 1$, dimensões foram Reynaud et al [99], que consideraram um espelho mais realístico e obtiveram o resultado para um espelho perfeito como um caso limite. É interessante mencionar que, para esse caso limite, o resultado pode também ser encontrado na ref. [52]. Uma boa motivação para esse tipo de estudo é que os efeitos térmicos podem amplificar o efeito Casimir dinâmico em muitas ordens de magnitude, conforme visto nas ref(s). [99, 51]

3.2 Efeito Casimir estático

O objetivo desta seção é estabelecer uma notação básica e introduzir algumas idéias a serem utilizadas em seções subsequentes. Começamos com um breve comentário sobre o trabalho de Casimir de 1948 [9], no qual ele calculou a força atrativa entre duas placas fixas, perfeitamente condutoras, neutras e paralelas. A grande novidade desse trabalho não foi o fato de haver atração entre dois corpos neutros, uma vez que London em 1930 já explicara corretamente as forças de van der Waals dispersivas entre dois átomos (ou moléculas) neutros e polarizáveis [86]. A novidade do trabalho de Casimir está no método empregado para o cálculo da força, baseado na energia de ponto zero do campo eletromagnético. Embora não seja o nosso objetivo aqui reproduzir o método de Casimir, indicaremos a seguir os seus passos principais, calculando, no caso de uma teoria formulada num espaço unidimensional, a força entre duas placas metálicas, neutras e paralelas.

Consideremos então um campo escalar real e sem massa ϕ_0 , num espaço-tempo bidimensional, que esteja sujeito às condições de contorno $\phi_0(t, 0) = 0 = \phi_0(t, L)$. O campo ϕ_0 estaria simulando o campo eletromagnético em 1+1 dimensões e as condições anteriores estariam simulando aquelas impostas pelas placas perfeitamente condutoras localizadas em $x = 0$ e $x = L$ (no caso de um espaço unidimensional, as placas (fronteiras) seriam pontos no eixo real \mathcal{OX}). O método de Casimir consiste em calcular a diferença entre a energia de ponto zero em todo o eixo (dentro e fora das fronteiras) considerando as condições de contorno impostas pela presença dessas fronteiras e a energia de ponto zero, também em todo o eixo, mas na ausência das fronteiras. No entanto, uma vez que as frequências do campo não são alteradas nos intervalos fora das placas, basta calcular tal diferença considerando apenas o intervalo entre as fronteiras. Como o campo entre as fronteiras é dado por [102]

$$\phi_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_n L}} \text{sen}(k_n x) [a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{i\omega_n t}], \quad (3.1)$$

onde $\omega_n = k_n c = n\pi c/L$ e, na ausência das placas, todas as frequências são possíveis, o método de Casimir nos leva formalmente à seguinte expressão para a energia do sistema (ainda não regularizada):

$$\mathcal{E}_c(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar c \frac{n\pi}{L} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar c |k_x| \frac{L}{2\pi} dk_x. \quad (3.2)$$

Para dar um sentido físico a essa diferença, deve-se utilizar alguma prescrição de regularização. Por exemplo, introduzindo um corte exponencial para altas frequências (o que poderia ser justificado fisicamente pelo fato de que, para altas frequências, as fronteiras são transparentes, fazendo com que essas frequências não contribuam para o efeito), a energia de Casimir é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(L) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} e^{-sn\pi/L} - \frac{L\hbar c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k_x| e^{-s|k_x|} dk_x \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-s\pi/L})^n - \frac{\hbar c L}{2\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \int_0^{\infty} e^{-s\kappa} d\kappa \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar c}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi/L}{4 \sinh^2(s\pi/2L)} - \frac{L}{\pi s^2} \right\} \\
&= \frac{\hbar c}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{L}{\pi s^2} - \frac{\pi}{12L} + \mathcal{O}(s^2) \right] - \frac{L}{\pi s^2} \right\} \\
&= -\frac{\pi \hbar c}{24L}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A força entre as placas é dada então por:

$$F_c(L) = -\frac{\partial}{\partial L} \mathcal{E}_c(L) = -\frac{\pi \hbar c}{24L^2}. \tag{3.4}$$

O sinal negativo no resultado anterior indica que há uma força atrativa entre as fronteiras. Esse resultado pode ser reobtido por meio de um outro procedimento conceitualmente bastante diferente, que passamos a descrever.

Vamos calcular diretamente a força resultante sobre uma das placas, digamos a que está localizada em $x = 0$, somando as forças exercidas pelos modos do campo no estado de vácuo sobre cada face da placa. Isso pode ser feito com o auxílio do tensor energia-momento do campo escalar. Tal método foi utilizado pela primeira vez no cálculo do efeito Casimir em 1969, por Brown and Maclay [103] e é bastante conveniente no cálculo do efeito Casimir dinâmico. A idéia é simples: a partir da interpretação dos elementos do tensor energia-momento podemos expressar a força sobre a placa localizada em $x = 0$ como sendo:

$$F_0(t) = \langle 0 | T^{11}(t, 0^+) - T^{11}(t, 0^-) | 0 \rangle, \tag{3.5}$$

onde, 0^+ significa que o limite $x \rightarrow 0$ deve ser tomado por valores maiores do que zero, enquanto 0^- significa que o limite $x \rightarrow 0$ deve ser tomado por valores menores do que zero. No caso de um campo escalar sem massa em 1+1 dimensões, temos que:

$$T^{11}(t, x) = -\frac{1}{2} \left\{ (\partial_x \phi_0)^2(t, x) + (\partial_t \phi_0)^2(t, x) \right\}. \tag{3.6}$$

Usando a expressão para ϕ_0 dada em (3.1), é direta a verificação de que $(\partial_t \phi_0)(t, 0^+) = (\partial_t \phi_0)(t, 0^-) = 0$, o que nos leva a concluir que somente o termo $(\partial_x \phi_0)^2$ contribui efetivamente no cálculo da força, de modo que podemos escrever:

$$F_0(t) = -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi_0)^2(t, 0^+) - (\partial_x \phi_0)^2(t, 0^-) \right\} | 0 \rangle. \tag{3.7}$$

Utilizando a expressão para ϕ_0 entre as placas, dada pela Eq.(3.1) , temos que:

$$\begin{aligned} (\partial_x \phi_0)^2(t, 0^+) &= \frac{\hbar}{L} \sum_{n,n'=1}^{\infty} \sqrt{\omega_n \omega_{n'}} e^{i(\omega_{n'} - \omega_n)t} \langle 0 | a_n a_{n'}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{\hbar \pi c}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde usamos que $\langle 0 | a_n a_{n'}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{nn'}$. Analogamente, utilizando a expressão para o campo à esquerda da placa, obtemos:

$$\begin{aligned} (\partial_x \phi_0)^2(t, 0^-) &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \sqrt{\omega \omega'} e^{i(\omega' - \omega)t} \langle 0 | a(\omega) a^\dagger(\omega') | 0 \rangle \\ &= \frac{\hbar \pi c}{L^2} \int_0^\infty u du, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde usamos que $\langle 0 | a(\omega) a^\dagger(\omega') | 0 \rangle = \delta(\omega - \omega')$ e fizemos a transformação de variáveis $\omega = u\pi c/L$. Substituindo as Eq(s). (3.8) e (3.9) em (3.7), temos que:

$$F_0(t) = -\frac{\hbar \pi c}{2L^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n - \int_0^\infty du u \right) \quad (3.10)$$

A força dada pela Eq.(3.10) não está bem definida. Nesse momento é instrutivo observar a semelhança matemática entre a última equação e a Eq.(3.2). Poderíamos, inclusive, seguir a partir deste ponto a mesma técnica de regularização adotada anteriormente (introduzir um corte exponencial, etc.). No entanto, vamos adotar um procedimento um pouco mais geral, onde também introduziremos uma função de corte, mas, em vez de especificar totalmente essa função, apenas exigiremos que a mesma possua certas propriedades convenientes. Desse modo, introduziremos, tanto na integral quanto no somatório, uma função de corte suave f_a , tal que $\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(u) = 1$ e $\lim_{u \rightarrow \infty} f_a(u) = 0$. Conseqüentemente, reescrevemos a força F_0 como:

$$F_0(t) = -\frac{\hbar \pi c}{2L^2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_a(n) - \int_0^\infty du u f_a(u) \right) \quad (3.11)$$

O lado direito da equação anterior pode ser calculado com o auxílio da chamada fórmula de Euler-MacLaurin [104]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty F(u) du = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2!}B_2 F'(0) - \frac{1}{4!}B_4 F'''(0) + \dots, \quad (3.12)$$

onde os números de Bernoulli B_ν são definidos pela expansão:

$$\frac{y}{e^y - 1} =: \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}. \quad (3.13)$$

Fazendo a identificação $u f_a(u) = F_a(u)$, não é difícil verificar que:

$$F_a(0) = 0 \quad \text{e} \quad F_a^{(m)}(0) = m f_a^{(m-1)}(0), \quad (3.14)$$

onde $F^{(m)}$ representa a m -ésima derivada e $m \geq 1$. Para $m > 1$, temos que:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F_a^{(m)}(0) = m \lim_{a \rightarrow \infty} f_a^{(m-1)}(0) = 0, \quad (3.15)$$

enquanto que para $m = 1$, obtemos:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F_a^{(1)}(0) = \lim_{a \rightarrow \infty} f_a(0) = 1. \quad (3.16)$$

Assim sendo, temos que:

$$\begin{cases} \lim_{a \rightarrow \infty} F_a(0) = 0 \\ \lim_{a \rightarrow \infty} F_a'(0) = 1 \\ \lim_{a \rightarrow \infty} F_a''(0) = 0 \\ \lim_{a \rightarrow \infty} F_a'''(0) = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}, \quad (3.17)$$

o que implica em

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_a(n) - \int_0^{\infty} du u f_a(u) \right) = -\frac{1}{2!} B_2 \lim_{a \rightarrow \infty} F_a'(0) = -\frac{1}{12}, \quad (3.18)$$

onde usamos que $B_2 = 1/6$. Conseqüentemente, a força de Casimir sobre a placa localizada em $x = 0$ é dada por:

$$F_0(t) = \frac{\hbar \pi c}{24L^2}. \quad (3.19)$$

Observe que o valor encontrado para a força sobre a placa localizada em $x = 0$ é positivo, ou seja, essa força aponta no sentido da outra placa e, portanto, trata-se de uma força atrativa. Caso tivéssemos calculado a força resultante sobre a placa localizada em $x = L$, teríamos encontrado $-\hbar \pi c / 24L^2$, o que significa as duas placas (no caso em questão, os dois pontos) atraem-se mutuamente. A consideração de outras condições de contorno

pode levar a outros resultados, inclusive a forças repulsivas, como ocorre se numa placa impusermos a condição de Dirichlet e na outra, a condição de Neumann.

Para finalizar, indicaremos como o método que acabamos de apresentar pode ser aplicado ao efeito Casimir padrão, isto é, para o campo eletromagnético em 3+1 dimensões com duas placas paralelas e perfeitamente condutoras. É pertinente mencionar que o cálculo do efeito Casimir eletromagnético utilizando o tensor energia-momento foi feito pela primeira vez por Brown e Maclay em 1969 [103]. Tais autores construíram o tensor a partir de funções de Green apropriadas e calcularam ainda as correções térmicas para a força. O procedimento que adotamos nesta seção, embora também esteja baseado no tensor energia-momento, segue um caminho ligeiramente diferente daquele utilizado na referência [103], uma vez que usa diretamente a componente relevante do tensor, sem passar pelo cálculo de funções de Green.

Supondo que as placas estejam localizadas em $z = 0$ e $z = L$, a componente relevante do tensor energia-momento do campo eletromagnético é dada por:

$$T_{zz} = \frac{1}{2} \left(E_z^2 - \vec{E}_{\parallel}^2 + B_z^2 - \vec{B}_{\parallel}^2 \right), \quad (3.20)$$

onde adotamos que $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$. A força por unidade de área sobre a placa em $z = 0$ é dada então por:

$$\frac{F_0}{\mathcal{A}} = \langle 0 | T_{zz}(t, x, y, 0^+) - T_{zz}(t, x, y, 0^-) | 0 \rangle. \quad (3.21)$$

Trabalhando no calibre de Coulomb e lembrando que não há cargas ou correntes, podemos escrever que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e $\varphi = 0$, de modo que

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(t, \vec{r}) ; \quad \vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{r}). \quad (3.22)$$

Utilizando as condições de contorno para condutores perfeitos, a saber:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) \times \vec{n} |_{placas} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \vec{n} |_{placas} = 0, \quad (3.23)$$

os modos transverso-elétrico (TE) e transverso-magnético (TM) do campo de radiação, na região entre duas placas perfeitamente condutoras são descritos, respectivamente, pelos potenciais:

$$\vec{A}_n^E(\vec{k}_{\parallel}, \vec{r}) = iN \left[k_y \hat{x} - k_x \hat{y} \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} \quad (3.24)$$

e

$$\vec{A}_n^M(\vec{k}_{||}, \vec{r}) = \left[-\frac{N}{\omega} \frac{n\pi}{L} \vec{k}_{||} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) + \frac{N}{i\omega} \vec{k}_{||}^2 \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \hat{z} \right] e^{i\vec{k}_{||} \cdot \vec{r}_{||}}, \quad (3.25)$$

onde

$$N = \frac{1}{k_{||}} \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } n = 0 \quad (3.26)$$

e

$$N = \frac{1}{k_{||}} \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } n \neq 0. \quad (3.27)$$

O potencial vetor, portanto, é escrito como:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \sum_{\lambda=E,M} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2 k_{||}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a_n^\lambda(k_{||}) \vec{A}_n^\lambda(k_{||}, \vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \right], \quad (3.28)$$

onde $\lambda = E$ e $\lambda = M$ representam, respectivamente, os modos TE e TM e a frequência associada a um modo é dada por $\omega = \omega(k_{||}, n) = \sqrt{(k_{||}^2 + n^2\pi^2/L^2)}$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Calculando-se \vec{E} e \vec{B} a partir das Eq(s).(3.22), (3.24) e (3.25) e substituindo o resultado na Eq.(3.20), pode-se mostrar, após muitas manipulações matemáticas e a utilização do procedimento de regularização de separação de pontos de Schwinger, já empregado no capítulo anterior, que [43]:

$$\langle 0 | \vec{E}_{||}^2(t, z^+) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\pi^2 \tau^4} + \frac{2\pi^2}{48L^4} \left[F\left(\frac{\pi z}{L}\right) - \frac{1}{15} \right] \right\}, \quad (3.29)$$

onde

$$F(\theta) = \frac{3}{\sin^4 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta}. \quad (3.30)$$

Entretanto, de acordo com o que já mencionamos anteriormente, só devemos tomar o limite em que $\tau \rightarrow 0$ depois que as subtrações dos termos espúrios forem feitas.

Utilizando um procedimento análogo ao adotado para o cálculo de $\langle 0 | \vec{E}_{||}^2(z) | 0 \rangle$, o valor esperado no vácuo dos operador E_z^2 , $B_{||}^2$ e B_z^2 são dados, respectivamente, por:

$$\langle 0 | E_z^2(t, z^+) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2 \tau^4} + \frac{\pi^2}{48L^4} \left[F\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{1}{15} \right], \quad (3.31)$$

$$\langle 0 | \vec{B}_{||}^2(t, z^+) | 0 \rangle = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\pi^2 \tau^4} - \frac{2\pi^2}{48L^4} \left[F\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{1}{15} \right], \quad (3.32)$$

$$\langle 0|B_z^2(t, z^+)|0\rangle = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2 \tau^4} - \frac{\pi^2}{48L^4} \left[F\left(\frac{\pi z}{L}\right) - \frac{1}{15} \right], \quad (3.33)$$

Para calcularmos a contribuição à esquerda da placa, necessitamos da expressão para o operador $\vec{A}(t, \vec{r})$ nessa região, isto é, numa região fora das placas, onde não há nenhuma restrição sobre os vetores de onda dos modos do campo $\vec{A}(t, \vec{r})$. No entanto, podemos aproveitar as expressões (3.29), (3.31), (3.32) e (3.33) e tomar o limite $L \rightarrow \infty$, obtendo:

$$\langle 0|\vec{E}_{||}^2(t, z^-)|0\rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\pi^2 \tau^4} \quad (3.34)$$

$$\langle 0|E_z^2(t, z^-)|0\rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2 \tau^4} \quad (3.35)$$

$$\langle 0|\vec{B}_{||}^2(t, z^-)|0\rangle = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\pi^2 \tau^4}, \quad (3.36)$$

$$\langle 0|B_z^2(t, z^-)|0\rangle = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2 \tau^4}. \quad (3.37)$$

Utilizando os resultados anteriores e a Eq.(3.20), temos que:

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{zz}(t, x, y, 0^+)|0\rangle &:= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\langle 0|\frac{1}{2} \left(E_z^2(t, 0^+) - \vec{E}_{||}(t, 0^+)^2 + B_z^2(t, 0^+) - \vec{B}_{||}^2(t, 0^+) \right) |0\rangle \right] \\ &= \frac{\pi^2}{240L^4}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{zz}(t, x, y, 0^-)|0\rangle &:= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\langle 0|\frac{1}{2} \left(E_z^2(t, 0^-) - \vec{E}_{||}(t, 0^-)^2 + B_z^2(t, 0^-) - \vec{B}_{||}^2(t, 0^-) \right) |0\rangle \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo (3.38) e (3.39) em (3.21), tem-se finalmente que:

$$\frac{F_0}{\mathcal{A}} = \frac{\pi^2}{240L^4}, \quad (3.40)$$

que é justamente a pressão atrativa entre as placas, calculada por Casimir [9].

3.3 O efeito Casimir dinâmico em 1 + 1 dimensões

Nesta seção consideramos o caso de um campo escalar não massivo em um espaço unidimensional, obedecendo a condições de Dirichlet ou Neumann sobre a fronteira. A força dinâmica de Casimir para o campo escalar real não massivo em 1 + 1 dimensões foi primeiramente calculada por Moore [95] e por Fulling e Davies [96], a partir da solução exata para o campo, obtida via transformações conformes. Embora essa técnica resolva exatamente o problema em 1 + 1, inclusive para movimentos relativísticos, ela não é generalizável para dimensões mais altas. Já o método desenvolvido por Ford e Vilenkin [97] é perturbativo e, nesse aspecto, está em desvantagem em relação ao método de Fulling-Davies para problemas unidimensionais. No entanto, ele pode ser diretamente generalizado a problemas envolvendo fronteiras que se movem em espaços com dimensões mais altas. Como um de nossos objetivos é desenvolver um formalismo que também seja capaz de abordar o efeito Casimir dinâmico para o campo eletromagnético em 3 + 1, usaremos o método de Ford-Vilenkin no estudo de um campo escalar não massivo em 1 + 1.

3.3.1 Uma fronteira móvel com condição de Dirichlet

Consideremos uma fronteira oscilando ao redor da posição $x = 0$, de acordo com um movimento prescrito, de modo que no instante t ela esteja na posição $\delta q(t)$ ¹. Por hipótese, o movimento é não-relativístico ($|\delta \dot{q}(t)| \ll c$) e tem pequena amplitude ($|\delta q(t)| \ll \lambda$), onde λ é o comprimento de onda mínimo dos *quanta* emitidos. Pode-se mostrar que no caso não relativístico as frequências dos *quanta* emitidos não ultrapassam a frequência mecânica do movimento da placa, de modo que os comprimentos de onda correspondentes são sempre superiores a um valor mínimo, estabelecendo assim uma escala de distância para podermos falar em amplitudes pequenas.

O campo em questão obedece à equação de onda $\square \phi(t, x) = 0$ e vamos supor nesta subseção que o campo satisfaça a seguinte condição de contorno na fronteira em movi-

¹Para enfatizar que o movimento considerado tem pequena amplitude em torno do ponto $x = 0$, a posição da fronteira é denotada por δq , em vez de q .

mento (condição de Dirichlet):

$$\phi'(t', x')|_{placa} = 0 \quad (3.41)$$

onde t' , x' e ϕ' são as coordenadas e o campo medidos num referencial inercial que se move com a mesma velocidade da fronteira em um dado instante t (co-móvel). A passagem para o referencial inercial do laboratório é imediata, uma vez que para o campo escalar temos que $\phi'(t', x') = \phi(t, x)$. A condição (3.41), escrita em termos das quantidades medidas no referencial do laboratório, toma a forma:

$$\phi(t, \delta q(t)) = 0. \quad (3.42)$$

O método de Ford e Vilenkin consiste em considerar o campo ϕ como sendo a solução do problema estático correspondente ligeiramente modificado, ou seja, consiste em escrever que

$$\phi(t, x) = \phi_0(t, x) + \delta\phi(t, x), \quad (3.43)$$

onde ϕ_0 é a solução da equação de onda $\square\phi_0(t, x) = 0$ que obedece à condição sobre uma fronteira fixa em $x = 0$, isto é $\phi_0(t, 0) = 0$. O campo ϕ_0 é dado por (estamos fazendo $c = 1$):

$$\phi_0(t, x) = i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar}{\omega\pi}} \sin(\omega x) [a(\omega) e^{-i\omega t} - a_n^\dagger(\omega) e^{i\omega t}], \quad (3.44)$$

e $\delta\phi$ é uma perturbação, de ordem igual a δq , que surge devido ao movimento não-relativístico da fronteira em torno da origem.

Uma vez que são conhecidas as equações satisfeitas por ϕ e ϕ_0 , assim como suas respectivas condições de contorno, podemos escrever que:

$$\square\delta\phi(t, x) = 0, \quad (3.45)$$

onde a condição de contorno para o campo ϕ pode ser traduzida para uma condição de contorno para a perturbação $\delta\phi$, a saber:

$$\delta\phi(t, 0) = -(\partial_x\phi_0)(t, 0)\delta q(t) + \mathcal{O}(\delta q^2). \quad (3.46)$$

Generalizando o procedimento utilizado no cálculo da força de Casimir sobre fronteiras fixas para o caso de fronteiras móveis, podemos escrever que a força sobre a fronteira em

movimento, quando esta encontra-se na posição $\delta q(t)$, é dada por:

$$F = \langle 0 | \left\{ T^{11}(t, \delta q^+(t)) - T^{11}(t, \delta q^-(t)) \right\} | 0 \rangle, \quad (3.47)$$

onde

$$T^{11}(t, x) = -\frac{1}{2} \left\{ (\partial_x \phi)^2(t, x) + (\partial_t \phi)^2(t, x) \right\}. \quad (3.48)$$

Com a condição de contorno considerada, não é difícil mostrar que:

$$(\partial_t \phi)^2(t, \delta q(t)) = \mathcal{O}(\delta q^2(t)), \quad (3.49)$$

de modo que, em primeira ordem em δq , somente o termo $(\partial_x \phi)^2$ irá contribuir efetivamente para a força. Podemos então escrever que:

$$F = -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi)^2(t, \delta q^+(t)) - (\partial_x \phi)^2(t, \delta q^-(t)) \right\} | 0 \rangle \quad (3.50)$$

Por outro lado, utilizando a Eq.(3.43), temos que:

$$\begin{aligned} (\partial_x \phi)^2(t, \delta q(t)) &= \left(\partial_x \phi_0(t, \delta q(t)) + \partial_x \delta \phi(t, \delta q(t)) \right)^2 \\ &= \left\{ (\partial_x \phi_0)(t, \delta q(t)), (\partial_x \delta \phi)(t, \delta q(t)) \right\} + (\partial_x \phi_0)^2(t, \delta q(t)) + \mathcal{O}(\delta q^2), \end{aligned}$$

onde o anticomutador surgiu naturalmente devido ao fato de estarmos trabalhando com operadores de campo. Uma expressão análoga vale para $(\partial_x \phi)^2(t, \delta q^-(t))$. Substituindo esses resultados em (3.50), fazendo uma expansão de Taylor em torno de $\delta q = 0$ e mantendo somente termos lineares em δq , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta F &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi_0)(t, \delta q^+(t)), (\partial_x \delta \phi)(t, \delta q^+(t)) \right\} | 0 \rangle \\ &\quad -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi_0)(t, \delta q^-(t)), (\partial_x \delta \phi)(t, \delta q^-(t)) \right\} | 0 \rangle + \mathcal{O}(\delta q^2) | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi_0)(t, 0^+), (\partial_x \delta \phi)(t, 0^+) \right\} | 0 \rangle \\ &\quad -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi_0)(t, 0^-), (\partial_x \delta \phi)(t, 0^-) \right\} | 0 \rangle + \mathcal{O}(\delta q^2), \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde trocamos a notação de F para δF a fim de enfatizar que a força é da ordem de δq . Observamos que contribuições dos termos que envolviam somente o campo ϕ_0 desapareceram do resultado, pois se cancelam exatamente. Como ficará evidente mais adiante, as contribuições para a força de ambos os lados da fronteira são iguais, de forma que a força resultante, em primeira ordem, pode ser escrita como:

$$\delta F = -\langle 0 | \left\{ (\partial_x \phi_0)(t, 0^+), (\partial_x \delta \phi)(t, 0^+) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.52)$$

É conveniente nesse momento introduzir as transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \delta \Phi(\omega, x) &= \int dt e^{i\omega t} \delta \phi(t, x), \\ \delta Q(\omega, x) &= \int dt e^{i\omega t} \delta q(t, x), \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Desse modo, as expressões (3.45) e (3.46) são escritas como:

$$(\partial_x^2 + \omega^2) \delta \Phi(\omega, x) = 0 \quad (3.54)$$

e

$$\delta \Phi(\omega, 0) = - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \delta Q(\omega - \omega') (\partial_x \Phi_0)(\omega', 0), \quad (3.55)$$

onde Φ_0 é a transformada de Fourier de ϕ_0 . Uma vez que $\delta \Phi(\omega, x)$ está associado à contribuição para o campo devido ao movimento da placa, vamos impor que a expressão

$$\delta \phi(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \delta \Phi(\omega, x) \quad (3.56)$$

só contenha termos que expressem a perturbação afastando-se da fronteira, tanto à sua direita, quanto à sua esquerda. Com isto a solução para $\delta \Phi(\omega, x)$ toma a forma:

$$\delta \Phi(\omega, x) = \delta \Phi(\omega, 0) e^{i\omega|x|}. \quad (3.57)$$

Utilizando a Eq.(3.52), a transformada de Fourier da força é dada pela convolução:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}(\omega) &= \int dt e^{i\omega t} \delta F(t) \\ &= - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \langle 0 | \left\{ (\partial_x \Phi_0)(\omega - \omega', 0^+), (\partial_x \delta \Phi)(\omega', 0^+) \right\} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Usando (3.57) e (3.55) na última expressão obtemos:

$$\delta\mathcal{F}(\omega) = i \int \frac{d\omega'}{2\pi} \omega' \int \frac{d\omega''}{2\pi} \delta Q(\omega' - \omega'') C_1(\omega - \omega', \omega''), \quad (3.59)$$

onde definimos a função de correlação C_1 como:

$$C_1(\omega_1, \omega_2) = \langle 0 | \{ (\partial_x \Phi_0)(\omega_1, 0^+), (\partial_x \Phi_0)(\omega_2, 0^+) \} | 0 \rangle. \quad (3.60)$$

O método perturbativo de Ford-Vilenkin nos permitiu, portanto, expressar a força em termos de uma função de correlação que envolve apenas o operador de campo Φ_0 associado ao problema com a fronteira fixa localizada em $x = 0$. O cálculo detalhado desta função de correlação está no apêndice B.1 e o resultado é dado por:

$$C_1(\omega_1, \omega_2) = 4\pi\hbar|\omega_1| \delta(\omega_1 + \omega_2). \quad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.59), podemos escrever que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(\omega) &= i \frac{\hbar}{\pi} \int d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \int d\omega'' \delta Q(\omega' - \omega'') \delta(\omega - \omega' + \omega'') \\ &= \left\{ i \frac{\hbar}{\pi} \int d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \right\} \delta Q(\omega). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Definindo a susceptibilidade χ do sistema fronteira-vácuo como:

$$\delta\mathcal{F}(\omega) =: \chi(\omega) \delta Q(\omega), \quad (3.63)$$

identificamos imediatamente para o problema em questão que:

$$\chi(\omega) = i \frac{\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'|. \quad (3.64)$$

A expressão escrita acima para a susceptibilidade não está bem definida. Se desenharmos um gráfico do integrando, para um dado valor de ω , conforme mostrado na figura 3.1, apresentada na próxima página, podemos ver que essa função possui uma simetria tal que nos permite adotar um procedimento de regularização bastante natural. Assim, se consideramos, por exemplo, $\omega \geq 0$, reescrevemos convenientemente a integral do seguinte modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| := \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int_{-L}^0 + \int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{\omega+L} \right) d\omega' \omega' |\omega - \omega'|. \quad (3.65)$$

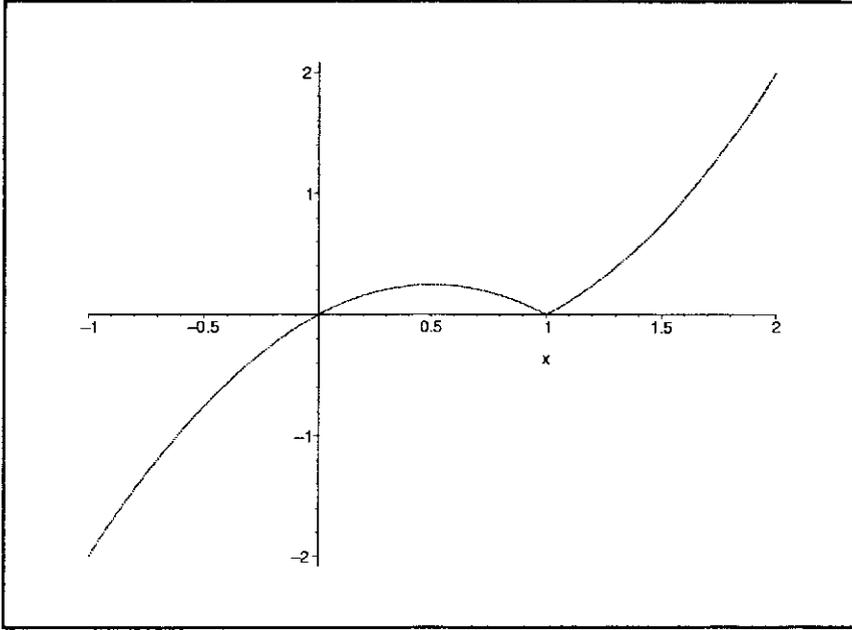


Figura 3.1: Gráfico para a função $|1 - x|x$ (eixo vertical).

Não é difícil mostrar então que a primeira e a terceira integrais do lado direito de (3.65) se cancelam: fazendo a transformação de variáveis $\omega'' = \omega' - \omega$ na terceira integral e a transformação $\omega'' = -\omega'$ na primeira, temos que:

$$\int_{\omega}^{\omega+L} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| = \int_0^L (\omega + \omega'') \omega'' d\omega'' \quad (3.66)$$

$$\int_{-L}^0 d\omega' \omega' |\omega - \omega'| = -\int_0^L (\omega + \omega'') \omega'' d\omega''.$$

Com um raciocínio análogo pode-se mostrar que também para $\omega < 0$ há um cancelamento entre as partes divergentes e de sinais contrários dessa integral. Seguindo com a hipótese de $\omega \geq 0$, temos então que:

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= i \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\omega} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \\ &= i \frac{\hbar \omega^3}{6\pi}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Vale a pena enfatizar que este mesmo resultado vale também para $\omega < 0$. Inserindo esta expressão para a susceptibilidade na Eq.(3.63) e usando a definição da transformada de

Fourier, obtemos finalmente a força sobre a fronteira:

$$\begin{aligned}
 \delta F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} i \frac{\hbar\omega^3}{6\pi} \delta Q(\omega) \\
 &= \frac{\hbar}{6\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^3 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \delta Q(\omega) \right\} \\
 &= \frac{\hbar \delta(\partial_t^3 q)(t)}{6\pi}.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Outra técnica de regularização para a integral em (3.64) consiste da introdução de uma função corte exponencial:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \right\}^{reg} := \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| e^{-s|\omega' - \frac{\omega}{2}|} = \frac{\omega^3}{6}, \tag{3.69}$$

onde $s > 0$. As técnicas de regularização mostradas em (3.65) e (3.69) são equivalentes neste caso de uma fronteira. Entretanto essa última é aplicada também aos casos de duas fronteiras, como veremos a seguir. Quanto ao resultado em (3.68), observemos que a força depende da terceira derivada temporal da posição da fronteira, ou seja, se esta mover-se com uma aceleração constante o vácuo não oferecerá resistência alguma e, conseqüentemente, não poderá haver criação de partículas reais. A dependência com a terceira derivada já mostra que não há uma relação direta deste efeito com o efeito Unruh-Davies. Além disso, a ordem da derivada que aparece na expressão final da força depende da dimensão do espaço-tempo. Por exemplo, pode-se mostrar que em 3+1 dimensões a força sobre uma única placa em movimento é proporcional à quinta derivada da posição da placa. Observe ainda que a susceptibilidade no problema que acabamos de tratar é um número imaginário puro e de tal forma que $\text{Im}\chi(\omega) > 0$ para qualquer valor positivo de ω . Como veremos a seguir isso faz com que o trabalho total realizado pelo vácuo sobre a placa seja negativo, ou seja, há uma dissipação de energia da placa, o que influenciaria o movimento da placa caso não houvesse um agente externo fornecendo a energia necessária para manter o movimento prescrito da placa. É justamente essa quantidade de energia dissipada pelo vácuo que é convertida na criação dos *quanta* do campo em questão. Vejamos então como demonstrar que somente a parte imaginária da susceptibil-

idade contribui efetivamente para o trabalho total realizado pelo vácuo sobre a fronteira em movimento.

Como $F(t)$ e $\delta q(t)$ são quantidades reais, é imediato mostrar que:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}^*(-\omega) \quad \text{e} \quad \delta Q(\omega) = \delta Q^*(-\omega). \quad (3.70)$$

Conseqüentemente, a partir da definição de $\chi(\omega)$, temos também que:

$$\chi(\omega) = \chi^*(-\omega), \quad (3.71)$$

o que nos permite escrever que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \chi(-\omega) &= \operatorname{Re} \chi(\omega) \\ \operatorname{Im} \chi(-\omega) &= -\operatorname{Im} \chi(\omega). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Calculando então o trabalho total realizado pelo vácuo sobre a placa, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \delta \dot{q}(t) dt &= -\frac{i}{2\pi} \int d\omega \int d\omega' \omega' \chi(\omega) \delta Q(\omega) \delta Q(\omega') \int \frac{dt}{2\pi} e^{-i(\omega+\omega')t} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \chi(\omega) \delta Q(\omega) \delta Q(-\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \left(i \operatorname{Re} \chi(\omega) - \operatorname{Im} \chi(\omega) \right) |\delta Q(\omega)|^2 \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} \chi(\omega) |\delta Q(\omega)|^2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde usamos as propriedades escritas em (3.72). Concluimos, portanto, que somente a parte imaginária da susceptibilidade contribui efetivamente para o trabalho total do vácuo sobre a placa em movimento. Note ainda que se $\operatorname{Im} \chi(\omega) \geq 0$, para qualquer ω , esse trabalho será necessariamente negativo, ou seja, dissipativo (desde que $\chi(\omega)$ não seja identicamente nula).

3.3.2 Uma fronteira móvel com condição de Neumann

Consideremos novamente apenas uma fronteira, cujo movimento caracteriza-se conforme descrito na seção anterior. No entanto, calcularemos a força sobre essa fronteira móvel

utilizando uma outra condição de contorno, na qual não mais o campo se anula na fronteira móvel, mas sim a sua derivada espacial. Portanto, na fronteira, o campo obedece à condição de Neumann:

$$\partial_{x'}\phi'(t', x')|_{placa} = 0, \quad (3.74)$$

onde t' , x' e ϕ' são as coordenadas e o campo medidos num referencial inercial que se move com a mesma velocidade da fronteira em um dado instante. A fim de escrever tal condição de contorno em termos das quantidades medidas no referencial inercial do laboratório, utilizaremos as transformações de Lorentz ($c = 1$)

$$\begin{cases} x = \gamma(\delta\dot{q}(t))(x' + \delta\dot{q}(t)t') \\ t = \gamma(\delta\dot{q}(t))(t' + \delta\dot{q}(t)x') \end{cases}, \quad (3.75)$$

onde $\gamma(\delta\dot{q}(t)) = 1/\sqrt{1 - \delta\dot{q}^2(t)}$ e consideramos que em $t = t' = 0$ as origens dos dois referenciais coincidem. Desprezando termos quadráticos em $\delta\dot{q}$, a condição de contorno sobre o campo ϕ pode ser escrita como:

$$\left\{ \partial_x + \delta\dot{q}(t) \partial_t \right\} \phi(t, x)|_{x=\delta q(t)} = 0 \quad (3.76)$$

Utilizando o método de Ford-Vilenkin, escrevemos a solução perturbativa para o campo ϕ novamente conforme a Eq.(3.43), mas tendo em mente que a expressão para o campo ϕ_0 sujeito à condição $\partial_x\phi_0(0, t) = 0$ é dada neste caso por:

$$\phi_0(t, x) = \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar}{\pi\omega}} \cos(\omega x) \left[a(\omega) e^{-i\omega t} + a^\dagger(\omega) e^{i\omega t} \right]. \quad (3.77)$$

O operador de campo $\delta\phi$ satisfaz a equação de onda $\square\delta\phi = 0$ e está sujeito a uma condição de contorno mais complicada, que pode ser obtida pela substituição da expressão (3.43) em (3.76), mantendo-se apenas os termos de primeira ordem, a saber:

$$(\partial_x\delta\phi)(t, 0) = -\delta q(t)\partial_x^2\phi_0(t, 0) - \delta\dot{q}(t)\partial_t\phi_0(t, 0). \quad (3.78)$$

As flutuações do campo em seu estado de vácuo dão origem, novamente, a uma força sobre a placa, cuja expressão é dada por (3.47), onde T_{11} é dado pela equação (3.48). No entanto, devido à mudança na condição de contorno sobre o campo na fronteira, o termo

que irá contribuir em primeira ordem para a força é $(\partial_t \phi)^2$ e não $(\partial_x \phi)^2$ como no caso anterior, uma vez que:

$$(\partial_x \phi)^2(t, \delta q(t)) = \delta q^2(t) (\partial_t \phi)^2(t, \delta q(t)) \sim \mathcal{O}(\delta q^2(t)). \quad (3.79)$$

A força sobre a placa é dada então por:

$$F = -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ (\partial_t \phi)^2(t, \delta q^+(t)) - (\partial_t \phi)^2(t, \delta q^-(t)) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.80)$$

Por outro lado, utilizando a Eq.(3.43), temos que:

$$(\partial_t \phi)^2(t, \delta q^+(t)) = (\partial_t \phi_0)^2(t, \delta q^+(t)) + \left\{ (\partial_t \phi_0)(t, \delta q^+(t)), (\partial_t \delta \phi)(t, \delta q^+(t)) \right\} + \mathcal{O}(\delta q^2), \quad (3.81)$$

assim como também uma expressão análoga para $(\partial_t \phi)^2(t, \delta q^-(t))$. Substituindo esses resultados em (3.80), fazendo uma expansão de Taylor em torno de $\delta q = 0$ e mantendo somente termos lineares em δq , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta F(t) &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_t \phi_0(t, \delta q^+(t)), \partial_t \delta \phi(t, \delta q^+(t)) \right\} | 0 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_t \phi_0(t, \delta q^-(t)), \partial_t \delta \phi(t, \delta q^-(t)) \right\} | 0 \rangle + \mathcal{O}(\delta q^2) \\ &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_t \phi_0(t, 0^+), \partial_t \delta \phi(t, 0^+) \right\} | 0 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_t \phi_0(t, 0^-), \partial_t \delta \phi(t, 0^-) \right\} | 0 \rangle + \mathcal{O}(\delta q^2), \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde novamente trocamos a notação F por δF para enfatizar que a força é da ordem de δq . Como no caso anterior, as contribuições dos termos envolvendo somente o campo ϕ_0 se cancelam. Como ficará evidente mais adiante, as contribuições para a força de ambos os lados da fronteira são iguais, de forma que a força resultante, em primeira ordem, pode ser escrita como:

$$\delta F(t) = -\langle 0 | \left\{ \partial_t \phi_0(t, 0^+), \partial_t \delta \phi(t, 0^+) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.83)$$

A transformada de Fourier da força é dada pela convolução:

$$\delta\mathcal{F}(\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} (\omega - \omega') \omega' \langle 0 | \left\{ \Phi_0(\omega - \omega', 0^+), \delta\Phi(\omega', 0^+) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.84)$$

É conveniente expressar $\delta\Phi(\omega', 0^+)$ em termos de $\partial_x \delta\Phi(\omega', 0^+)$, pois é justamente esta última quantidade que é dada pela condição de contorno do problema (na verdade para obtê-la teremos ainda que fazer uma transformada de Fourier na Eq.(3.78)). Com esse objetivo, resolvemos a equação $(\partial_x^2 + \omega^2)\delta\Phi(\omega, x) = 0$, usando a expressão para $(\partial_x \delta\Phi)(\omega, 0)$ e impondo que a solução seja tal que na expressão para $\delta\phi(t, x)$ haja apenas perturbações que se afastem da placa. É imediato mostrar que a solução é dada por:

$$\delta\Phi(\omega, x) = \text{Sinal}(x) \partial_x \delta\Phi(\omega, 0) \frac{e^{i\omega|x|}}{i\omega}, \quad (3.85)$$

de modo que

$$\delta\Phi(\omega, 0^\pm) = \pm \frac{(\partial_x \delta\Phi)(\omega, 0)}{i\omega}. \quad (3.86)$$

Utilizando esse último resultado na expressão (3.84), obtemos:

$$\delta\mathcal{F}(\omega) = -i\hbar \int \frac{d\omega'}{2\pi} (\omega - \omega') \langle 0 | \left\{ \Phi_0(\omega - \omega', 0^+), (\partial_x \delta\Phi)(\omega', 0^+) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.87)$$

Por outro lado, tomando a transformada de Fourier da Eq.(3.78), obtemos:

$$(\partial_x \delta\Phi)(\omega, 0) = - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ (\partial_x^2 \Phi_0)(\omega', 0) - (\omega - \omega') \omega' \Phi_0(\omega', 0) \right\} \delta Q(\omega - \omega'). \quad (3.88)$$

Substituindo (3.88) em (3.87), temos que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(\omega) &= i\hbar \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} (\omega - \omega') \delta Q(\omega' - \omega'') C_2(\omega - \omega', \omega'') \\ &- i\hbar \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} (\omega - \omega') (\omega' - \omega'') \omega'' \delta Q(\omega' - \omega'') C_3(\omega - \omega', \omega''), \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde definimos as funções de correlação:

$$C_2(\omega_1, \omega_2) = \langle 0 | \left\{ \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x^2 \Phi_0(\omega_2, 0^+) \right\} | 0 \rangle \quad (3.90)$$

$$C_3(\omega_1, \omega_2) = \langle 0 | \left\{ \Phi_0(\omega_1, 0^+), \Phi_0(\omega_2, 0^+) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.91)$$

O cálculo detalhado de tais funções de correlação pode ser encontrado no apêndice B.2 e os resultados são dados respectivamente por:

$$C_2(\omega_1, \omega_2) = -4\pi\hbar|\omega_2|\delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (3.92)$$

$$C_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{4\pi\hbar}{|\omega_1|} \delta(\omega_1 + \omega_2) . \quad (3.93)$$

Inserindo os últimos resultados na expressão da força dada em (3.89) e integrando em ω'' , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(\omega) &= -2\hbar i \left\{ \int \frac{d\omega'}{2\pi} (\omega - \omega') |\omega - \omega'| - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{(\omega - \omega')^2 \omega}{|\omega - \omega'|} \right\} \delta Q(\omega) \\ &= i \frac{\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' |\omega - \omega'| \omega' \delta Q(\omega) , \end{aligned} \quad (3.94)$$

resultado que nos permite identificar a susceptibilidade como:

$$\chi(\omega) = i \frac{\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' |\omega - \omega'| \omega' \quad (3.95)$$

Essa expressão para $\chi(\omega)$ é igual à expressão (3.64) obtida para o caso de uma fronteira com condição de Dirichlet. Procedendo como na seção 3.3.1, obtemos

$$\chi(\omega) = i \frac{\hbar \omega^3}{6\pi} , \quad (3.96)$$

sendo a força sobre a fronteira de Neumann dada por:

$$\delta F(t) = \frac{\hbar}{6\pi} \frac{d^3}{dt^3} \delta q(t) , \quad (3.97)$$

idêntica, portanto, à força sobre uma fronteira de Dirichlet dada em (3.68). Em outras palavras, a força de reação de radiação sobre uma fronteira em 1+1 dimensões é a mesma, não importando se impomos a condição de Dirichlet ou a de Neumann sobre a fronteira. Embora as condições de contorno e as funções de correlação relevantes sejam distintas em ambos os casos, as flutuações do vácuo oferecem a mesma resistência ao movimento a ambos os tipos de fronteira.

3.3.3 Duas fronteiras tipo Dirichlet: uma móvel e outra fixa

Nesta seção vamos considerar o efeito das flutuações de um campo escalar sem massa, em seu estado de vácuo, nas paredes móveis de uma cavidade unidimensional. Por simplicidade, vamos supor que apenas uma das paredes da cavidade esteja em movimento (não relativístico e de pequenas amplitudes) e vamos supor que o campo satisfaça as seguintes condições de contorno (Dirichlet):

$$\begin{cases} \phi(t, \delta q(t)) = 0 \\ \phi(t, L) = 0 \end{cases} \quad (3.98)$$

Conseqüentemente, uma fronteira oscila em torno do ponto $x = 0$, enquanto a outra está fixa em $x = L$. Seguiremos um procedimento análogo ao adotado para os casos de uma única fronteira, ou seja, escreveremos como solução aproximada que $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, onde neste caso ϕ_0 é o operador de campo que satisfaz as condições de Dirichlet com ambas as placas fixas em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, e $\delta\phi$ é a perturbação devido ao movimento de uma das paredes da cavidade. Pode-se mostrar que o campo ϕ_0 , dentro da cavidade, é dado por:

$$\phi_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_n}} \text{sen}(\omega_n x) \left(a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{i\omega_n t} \right), \quad (3.99)$$

onde $\omega_n = n\pi/L$ ($n = 1, 2, \dots$). Quanto à perturbação $\delta\phi$, ela obedece à equação de onda $\square\delta\phi(t, x) = 0$ e está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \delta\phi(t, 0) = -\partial_x \phi_0(t, 0) \delta q(t) \\ \delta\phi(t, L) = 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

É conveniente trabalhar com a transformada de Fourier $\delta\Phi(\omega, x) = \int dt e^{i\omega t} \delta\phi(t, x)$, que satisfaz a equação $(\partial_x^2 + \omega^2)\delta\Phi(\omega, x) = 0$ e está sujeita às condições de contorno:

$$\begin{cases} \delta\Phi(\omega, 0) = -\int \frac{d\omega'}{2\pi} \delta Q(\omega - \omega') \partial_x \Phi_0(\omega', 0) \\ \delta\Phi(\omega, L) = 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

A solução para $\delta\Phi(\omega, x)$ pode então ser escrita na forma:

$$\delta\Phi(\omega, x) = \delta\Phi(\omega, 0) \frac{\text{sen}[(\omega + i\epsilon)(L - x)]}{\text{sen}[(\omega + i\epsilon)L]}, \quad (3.102)$$

Por conveniência futura, escrevemos abaixo a transformada de Fourier de ϕ_0 dentro da cavidade:

$$\Phi_0(\omega, x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_n L}} \sin(\omega_n x) \left[a_n \delta(\omega - \omega_n) + a_n^\dagger \delta(\omega + \omega_n) \right]. \quad (3.103)$$

OBS: Se tomarmos o limite $L \rightarrow \infty$ no lado direito de (3.102), reobteremos a solução para $x > 0$ correspondente a uma única fronteira de Dirichlet em movimento em torno de $x = 0$, dada por (3.57).

A força total sobre a fronteira em movimento é dada por:

$$F(t) = \frac{\hbar\pi}{24L^2} + \delta F(t), \quad (3.104)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação anterior corresponde à força de Casimir estática entre duas fronteiras de Dirichlet distantes L uma da outra, conforme mostrado em (3.19), e o segundo termo é dado por:

$$\begin{aligned} \delta F(t) &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_x \phi_0(t, 0^+), \partial_x \delta \phi(t, 0^+) \right\} | 0 \rangle - \frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_x \phi_0(t, 0^-), \partial_x \delta \phi(t, 0^-) \right\} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Observe que em (3.105) estão envolvidas tanto as soluções de ϕ_0 e $\delta\phi$ para o campo fora, quanto para o campo dentro da cavidade. A transformada de Fourier dessa expressão é dada por:

$$\delta \mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \partial_x \Phi_0(\omega - \omega', 0^+), \partial_x \delta \Phi(\omega', 0^+) \right\} | 0 \rangle + \frac{i\hbar\omega^3}{12\pi} \delta Q(\omega) \quad (3.106)$$

O segundo termo do lado direito de (3.106) é a transformada de Fourier do segundo termo do lado direito de (3.105). Usando a expressão para $\Phi_0(\omega, x)$ e $\delta\Phi(\omega, x)$ dentro da cavidade, a expressão para $\mathcal{F}(\omega)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta \mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{2} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \omega' \cot(\omega' L) \int \frac{d\omega''}{2\pi} \delta Q(\omega' - \omega'') \Gamma(\omega - \omega', \omega'') + \frac{i\hbar\omega^3}{12\pi} \delta Q(\omega), \quad (3.107)$$

onde definimos a função de correlação:

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \langle 0 | \left\{ \partial_x \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x \Phi_0(\omega_2, 0^+) \right\} | 0 \rangle. \quad (3.108)$$

Um cálculo direto, em tudo análogo ao mostrado no apêndice B.1 para os casos onde há apenas uma fronteira, leva ao seguinte resultado:

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \frac{4\pi^2 \hbar}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[\delta(\omega_1 - \omega_n) \delta(\omega_2 + \omega_n) + \delta(\omega_2 - \omega_n) \delta(\omega_1 + \omega_n) \right]. \quad (3.109)$$

Trabalharemos, no momento, com a susceptibilidade $\chi^{(i)}$, relacionada apenas com o campo no interior da cavidade. Sua expressão pode ser obtida diretamente inserindo a Eq.(3.109) em (3.107):

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' \cot(\omega' L) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n [\delta(\omega - \omega' - \omega_n) + \delta(\omega - \omega' + \omega_n)] \right\}, \quad (3.110)$$

onde está subentendido que $\omega' \rightarrow \omega' + i\epsilon$ em $\cot(\omega' L)$.

Para adquirirmos maior confiança na expressão anterior, é instrutivo verificar o limite dessa expressão quando $L \rightarrow \infty$. Lembrando que $\lim_{L \rightarrow \infty} \cot[(\omega + i\epsilon)L] = -i$, observando que nesse limite $\omega_n = n\pi/L$ torna-se uma variável contínua, digamos ω'' , de modo que é correto fazer a substituição

$$\frac{1}{L} \sum_n f(\omega_n) \longrightarrow \frac{1}{\pi} \int d\omega'' f(\omega''),$$

temos então que:

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \chi^{(i)}(\omega) &= i \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' \left\{ \int_0^{\infty} d\omega'' \omega'' [\delta(\omega - \omega' - \omega'') + \delta(\omega - \omega' + \omega'')] \right\} \\ &= i \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'|. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Esse resultado exatamente a metade da expressão obtida no caso de uma fronteira de Dirichlet dada por (3.64) (o fator 1/2 deve-se ao fato de que a expressão (3.110) refere-se apenas a um dos lados da fronteira).

Retornando à Eq.(3.110), podemos reescrevê-la numa forma conveniente adotando a seguinte prescrição:

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{2L} \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int_{-a}^a d\omega' \omega' \cot(\omega' L) \left[\delta(\omega - \omega' - \omega_n) + \delta(\omega - \omega' + \omega_n) \right], \quad (3.112)$$

onde consideramos $a > |\omega|$. Integrando em ω' , obtemos:

$$\begin{aligned} \chi^{(i)}(\omega) &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\theta(a - \omega + \omega_n) \theta(\omega - \omega_n + a) \omega_n (\omega - \omega_n) \right. \\ &\quad \left. + \Theta(a - \omega - \omega_n) \Theta(\omega + \omega_n + a) \omega_n (\omega + \omega_n) \right] \\ &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{\mathcal{G}'((a+\omega)L/\pi)} \omega_n (\omega - \omega_n) + \sum_{n=1}^{\mathcal{G}'((a-\omega)L/\pi)} \omega_n (\omega + \omega_n) \right], \end{aligned} \quad (3.113)$$

onde $\mathcal{G}'(x) = \mathcal{G}(x)$, se x não é um número natural, $\mathcal{G}'(x) = \mathcal{G}(x) - 1$, se x é um número natural, sendo $\mathcal{G}(x)$ o inteiro mais próximo de x , mas tal que $|\mathcal{G}(x)| < |x|$ (ou seja, $\mathcal{G}(x)$ é o interior mais próximo de x no sentido do zero). Fazendo $n \rightarrow -n$ no segundo somatório em (3.113), temos que:

$$\begin{aligned} \chi^{(i)}(\omega) &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=-\mathcal{G}'((a-\omega)L/\pi)}^{\mathcal{G}'((a+\omega)L/\pi)} |\omega_n| (\omega - \omega_n) \\ &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\omega_n| (\omega - \omega_n) \\ &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\omega_n - \omega| \omega_n. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Note que tomando o limite $L \rightarrow \infty$ em (3.114) reobtemos, a menos de um fator 1/2, a expressão de χ (não regularizada) para o caso de uma fronteira de Dirichlet dada por (3.64). Analogamente ao que ocorre para o caso de uma única fronteira, a expressão de $\chi^{(i)}$ dada por (3.114) não está bem definida. Utilizaremos aqui a mesma prescrição de

regularização adotada em (3.69):

$$\chi^{(i)}(\omega) := -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\omega_n - \omega| \omega_n e^{-s|\omega_n - \omega/2|}, \quad (3.115)$$

onde $s > 0$ é um parâmetro com a mesma dimensão de L . Note que tomando o limite $L \rightarrow \infty$ em (3.115) reobtemos:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \chi^{(i)}(\omega) = \frac{i\hbar}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| e^{-s|\omega' - \frac{\omega}{2}|} = \frac{i\hbar\omega^3}{12\pi}, \quad (3.116)$$

justamente a metade do valor de $\chi(\omega)$ (já regularizado), para o caso de uma fronteira de Dirichlet, conforme mostra a Eq.(3.67). Para calcular o lado direito da Eq.(3.115), optaremos por uma redefinição do parâmetro s . Fazendo $s \rightarrow sL/\pi$, temos que:

$$e^{-s|\omega' - \omega/2|} \longrightarrow e^{-s|\omega' L/\pi - \omega L/2\pi|}, \quad (3.117)$$

Desse modo, o parâmetro s torna-se agora um parâmetro adimensional. Com essa prescrição de regularização, a Eq.(3.114) toma a forma:

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \Sigma_1(\omega), \quad (3.118)$$

onde definimos

$$\Sigma_1(\omega) := \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\omega_n - \omega| \omega_n e^{-s|\frac{\omega_n L}{\pi} - \frac{\omega L}{2\pi}|} \quad (3.119)$$

Para $\omega \geq \frac{\pi}{L}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi})} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{n=\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi})+1}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi})} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(n - \frac{\omega L}{2\pi})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi})+1}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n - \frac{\omega L}{2\pi})} \right\} \\ &= \frac{\pi}{L} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ e^{-s\frac{\omega L}{2\pi}} \left[\omega \partial_s - \frac{\pi}{L} \partial_s^2 \right] \sum_{n=-\infty}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi})} e^{s n} + e^{s\frac{\omega L}{2\pi}} \left[-\omega \partial_s - \frac{\pi}{L} \partial_s^2 \right] \sum_{n=\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi})+1}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi})} e^{-s n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{s\frac{\omega L}{2\pi}} \left[\omega \partial_s + \frac{\pi}{L} \partial_s^2 \right] \sum_{n=\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi})+1}^{\infty} e^{-s n} \Big\} \\
& = -\frac{L}{6\pi} \omega^3 + \frac{\pi}{6L} \omega - \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) - \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^3 \\
& \quad + \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) + \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Para $\omega \leq \frac{-\pi}{L}$, procedendo de forma análoga ao exposto em (3.120), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\omega) & = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi})-1} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n+\frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{n=\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi})}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi})-1} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(-n+\frac{\omega L}{2\pi})} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi})+1}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n-\frac{\omega L}{2\pi})} \right\} \\
& = -\frac{L}{6\pi} \omega^3 + \frac{\pi}{6L} \omega + \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) - \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^3 \\
& \quad - \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) + \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Observe que as duas últimas expressões são idênticas, exceto por trocas de sinal em alguns de seus termos (compare o terceiro e o sexto termo de cada expressão). Assim sendo, para $|\omega| \geq \frac{\pi}{L}$ podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\omega) & = -\frac{L}{6\pi} \omega^3 + \frac{\pi}{6L} \omega - \text{sinal}(\omega) \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) \\
& \quad - \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^3 + \text{sinal}(\omega) \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) + \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

A fim de testar a consistência desse resultado, note que, por definição, Σ_1 é uma função ímpar. De fato, o lado direito de (3.122) é também uma função ímpar de ω . Voltando à expressão de $\chi^{(i)}$, podemos então escrever que:

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \left[-\frac{L}{6\pi} \omega^3 + \frac{\pi}{6L} \omega - \text{sinal}(\omega) \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) \right]$$

$$- \frac{2\pi^2}{3L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^3 + \text{sinal}(\omega) \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) + \frac{\pi}{L} \omega \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right)^2], \text{ se } |\omega| \geq \frac{\pi}{L}. \quad (3.123)$$

Como um outro teste de consistência para o resultado escrito acima, se usarmos que $(\cot[(\omega + i\epsilon)L])^* = -\cot[(-\omega + i\epsilon)L]$, podemos verificar que a expressão para $\chi^{(i)}(\omega)$ dada por (3.123) é tal que $(\chi^{(i)}(\omega))^* = \chi^{(i)}(-\omega)$, propriedade que está de acordo com o fato de que $F(t)$ e $\delta q(t)$ são reais. Um outro teste de consistência para a Eq.(3.123) pode ainda ser feito verificando-se o limite dessa expressão quando $L \rightarrow \infty$. Isso pode ser feito lembrando que:

$$\mathcal{G}(x) = x - \text{sinal}(x) \delta, \text{ para } x \in R, \text{ com } 0 \leq \delta < 1. \quad (3.124)$$

Usando (3.124) em (3.123) obtemos diretamente que:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \chi^{(i)}(\omega) = \frac{i\omega^3}{12\pi}, \quad (3.125)$$

resultado que corresponde à metade da susceptibilidade para o caso de uma única fronteira, conforme esperado.

Ainda, para $|\omega|$ suficientemente grande, podemos dizer que $\mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi}\right) \approx \frac{\omega L}{\pi}$. Com tal aproximação, a expressão de χ dada por (3.123) reduz-se a:

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{12L} \cot(\omega L) \left(\frac{\omega^3 L}{\pi} - \frac{\omega \pi}{L} \right), \quad (3.126)$$

que está de acordo com os resultados encontrados por outros métodos, para o caso de duas placas de Dirichlet [105].

Para $|\omega| < \frac{\pi}{L}$ o limite do somatório em (3.119) pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n - \frac{\omega L}{2\pi})} \right] \\ &= -\frac{\omega^3 L}{6\pi} + \frac{\omega \pi}{6L}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Novamente, observamos que o lado direito de (3.127) é uma função ímpar de ω , como deveria ser. Usando (3.127) em (3.119), obtemos:

$$\chi^{(i)}(\omega) = \frac{\hbar}{12L} \cot(\omega L) \left(\frac{\omega^3 L}{\pi} - \frac{\omega \pi}{L} \right). \quad (3.128)$$

Esse tem mesma estrutura que o resultado (3.126), entretanto tem sinal contrário. Se verificamos o limite de (3.128) quando $L \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \chi^{(i)}(\omega) = -\frac{i\omega^3}{12\pi}. \quad (3.129)$$

À primeira vista, esta expressão não está de acordo com o caso de uma fronteira, pois tem o sinal contrário. No entanto, o processo de limite que conduziu à expressão (3.129) foi feito de forma ingênua, sem levar em consideração que a expressão (3.128) vale desde que $|\omega| < \frac{\pi}{L}$. Se fixamos ω e fazemos $L \rightarrow \infty$, em algum momento a condição $|\omega| < \frac{\pi}{L}$ é violada. A partir desse instante a expressão de χ não é mais dada pela expressão (3.128), mas sim pela expressão (3.123). Executando tal troca e prosseguindo com $L \rightarrow \infty$, novamente chegamos na expressão para uma fronteira correta dada em (3.125). Portanto a expressão (3.128) passa no teste de consistência do limite $L \rightarrow \infty$. Ela também satisfaz a propriedade $(\chi^{(i)}(\omega))^* = \chi^{(i)}(-\omega)$.

Nosso interesse está em extrair a parte imaginária de χ , pois, conforme visto na seção 3.3.1, é justamente ela que está relacionada com o trabalho total da força exercida pelo vácuo sobre a fronteira em movimento. Uma vez que $\chi^{(i)}(\omega)$ aparece dentro de uma integral em ω , consideremos a seguinte integral $\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega$, onde f é uma função analítica para todo ω real. Usando a Eq.(3.118), a identidade $\cot\theta = i(1 + e^{2i\theta})/(1 - e^{2i\theta})$ e lembrando ainda que $\Sigma_1(\omega)$ é dada por (3.122), caso $|\omega| \geq \pi/L$ e por (3.127), caso $|\omega| < \pi/L$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega &= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) \\ &+ \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{-\infty}^{-2} + \sum_2^{\infty} \right) \oint -\frac{1}{4} \left(\oint_{n=-1} + \oint_{n=1} \right) \right] dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_1^{(a)}(z)}{1 - e^{2izL}} \\ &+ \left[-\frac{1}{4} \left(\oint_{n=-1} + \oint_{n=1} \right) - \frac{1}{2} \oint_{n=0} \right] dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_1^{(b)}(z)}{1 - e^{2izL}}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

onde \mathcal{P} é a parte principal da integral, as integrais \oint são feitas no sentido anti-horário e em torno dos pólos localizados em $\omega_n = n\pi/L$. A função $\Sigma_1^{(a)}$ é dada pelo lado direito da

(3.122), e vale quando $|\omega| \geq \pi/L$, enquanto $\Sigma_1^{(b)}$ é dada pelo lado direito da Eq.(3.127) e vale quando $|\omega| < \pi/L$. As integrações em torno dos polos são dadas por:

$$\oint dz \frac{f(z)\Sigma_1(z)}{1 - e^{2izL}} = \oint dz \frac{f(z)\Sigma_1(z)}{2iL(z - \omega_n)} = \frac{\pi}{L} f(\omega_n) \Sigma_1(\omega_n). \quad (3.131)$$

Das expressões em (3.122) e (3.127) podemos verificar que:

$$\Sigma_1^{(a)}(\pm \frac{\pi}{L}) = \Sigma_1^{(a)}(0) = \Sigma_1^{(b)}(\pm \frac{\pi}{L}) = \Sigma_1^{(b)}(0) = 0. \quad (3.132)$$

Usando (3.131) e (3.132), podemos reescrever (3.130) como:

$$\begin{aligned} \int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega &= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_1^{(a)}(z)}{1 - e^{2izL}} \\ &= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) + \frac{i\hbar\pi}{2L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) \Sigma_1^{(a)}(\omega_n) \\ &= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) + \frac{i\hbar\pi^3}{12L^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) (n^3 - n). \end{aligned} \quad (3.133)$$

Portanto, podemos escrever formalmente que:

$$\chi^{(i)}(\omega) = \mathcal{P}(\chi^{(i)}) + \frac{i\hbar\pi^3}{12L^4} \sum_{-\infty}^{\infty} (n^3 - n) \delta(\omega - \frac{n\pi}{L}). \quad (3.134)$$

Como $\mathcal{P}(\chi^{(i)})$ é real, obtemos:

$$\mathcal{I}m(\chi^{(i)}(\omega)) = \frac{\hbar\pi^3}{12L^4} \sum_{-\infty}^{\infty} (n^3 - n) \delta(\omega - \frac{n\pi}{L}), \quad \forall \omega. \quad (3.135)$$

Se incluirmos a contribuição para a força sobre a fronteira móvel devido às flutuações do campo fora da cavidade, adicionando à expressão dada por (3.135) metade do valor encontrado para a susceptibilidade para o caso de uma única fronteira, dado por (3.67), obtemos a expressão para $\mathcal{I}m(\chi(\omega))$ total:

$$\mathcal{I}m(\chi(\omega)) = \frac{\hbar}{12\pi} \left[\omega^3 + \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n^2 - 1) \delta(\omega - \frac{n\pi}{L}) \right]. \quad (3.136)$$

Para obtermos a força dissipativa total sobre a fronteira móvel da cavidade como função do tempo, isto é, $\delta F_d(t)$, basta tomar a transformada de Fourier de $i\mathcal{I}m\chi(\omega) \delta Q(\omega)$:

$$\begin{aligned}
\delta F_d(t) &= i \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{I}m\chi(\omega) \delta Q(\omega) e^{-i\omega t} \\
&= \frac{\hbar}{12\pi} \left\{ \frac{d^3}{dt^3} + \left(\frac{\pi}{L} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{\pi^3}{L^3} \frac{d}{dt} \right) \right\} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta Q(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega t}.
\end{aligned}$$

Usando a relação

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) = \frac{L}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in2L\omega}, \quad (3.137)$$

que pode ser demonstrada facilmente com o auxílio da fórmula de Poisson, a força dissipativa total sobre a fronteira móvel da cavidade é dada por:

$$\delta F_d(t) = \frac{\hbar}{12\pi} \frac{d^3}{dt^3} \delta q(t) + \frac{\hbar}{12\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^3}{dt^3} \delta q(t + 2nL) + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{d}{dt} \delta q(t + 2nL) \right]. \quad (3.138)$$

Conforme já comentado, o aparecimento dessa força dissipativa é uma indicação de criação de partículas reais (no caso do campo eletromagnético isto significa criação de fótons). Isso já era esperado por argumentos de conservação de energia. Esse resultado também pode ser obtido por meio de outras abordagens. Por exemplo, é possível calcular diretamente o número total de fótons emitidos e, a partir disso, extrair a expressão para a força dissipativa [49, 50].

3.3.4 Duas fronteiras tipo Neumann: uma móvel e outra fixa

Nesta subseção iremos considerar uma situação em tudo idêntica à considerada na subseção anterior, exceto pelas condições de contorno satisfeitas pelo campo ϕ nas placas, que, em lugar de serem de Dirichlet, serão dadas pelas condições de Neumann. Ressaltamos que, no caso de uma fronteira em movimento, a condição de Neumann é estabelecida num referencial inercial que se move com a mesma velocidade da fronteira em um dado instante t (vide seção 3.3.2). Seguindo o procedimento perturbativo devido a Ford e Vilenkin adotado na subseção anterior, escrevemos que $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, onde $\delta\phi$ satisfaz a equação de

onda e as condições de contorno:

$$\begin{cases} \partial_x \delta\phi(t, 0) = -\partial_x^2 \phi_0(t, 0) \delta q(t) - \delta \dot{q}(t) \partial_t \phi_0(t, 0) \\ \partial_x \delta\phi(t, L) = 0 \end{cases} \quad (3.139)$$

Novamente aqui é conveniente trabalhar com a transformada de Fourier de $\delta\phi(t, x)$, ou seja, com $\delta\Phi(\omega, x) = \int d\omega \delta\phi(t, x) e^{i\omega t}$. Esse operador obedece à equação diferencial $(\partial_x^2 + \omega^2)\delta\Phi(\omega, x) = 0$ e às condições de contorno:

$$\begin{cases} \partial_x \delta\Phi(\omega, 0) = -\int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ (\partial_x^2 \Phi_0)(\omega', 0) - (\omega - \omega') \omega' \Phi_0(\omega', 0) \right\} \delta Q(\omega - \omega') \\ \delta\Phi(\omega, L) = 0 \end{cases} \quad (3.140)$$

Não é difícil mostrar que:

$$\delta\Phi(\omega, x) = \frac{\partial_x \delta\Phi(\omega, 0) \cos[(\omega + i\epsilon)(L - x)]}{\omega + i\epsilon \operatorname{sen}[(\omega + i\epsilon)L]} \quad (3.141)$$

No caso em questão, a transformada de Fourier do campo $\phi_0(t, x)$ (solução do problema estático correspondente, isto é, com as duas placas fixas em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente) é dada por:

$$\Phi_0(\omega, x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_n L}} \cos(\omega_n x) \left[a_n \delta(\omega - \omega_n) + a_n^\dagger \delta(\omega + \omega_n) \right] \quad (3.142)$$

onde $\omega_n = n\pi/L$ ($n = 0, 1, \dots$). Seguindo um procedimento de cálculo análogo ao da subseção (3.3.3), obtemos, após um longo cálculo, a seguinte expressão para a transformada de Fourier da força dinâmica de Casimir:

$$\delta\mathcal{F}^{(i)}(\omega) = \chi^{(i)}(\omega) \delta Q(\omega), \quad (3.143)$$

onde

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' \cot(\omega' L) \left[\delta(\omega - \omega' - \omega_n) + \delta(\omega - \omega' + \omega_n) \right]. \quad (3.144)$$

Gostaríamos de enfatizar que, embora esse resultado seja idêntico ao obtido para a cavidade com paredes satisfazendo condições de Dirichlet, dada pela Eq.(3.110), na sua

obtenção intervêm funções de correlação diferentes das que foram utilizadas na subsecção anterior. Dessa maneira, usando a mesma prescrição adotada em (3.112) e prosseguindo os cálculos de forma idêntica, obtemos a mesma expressão para a força atuando sobre a fronteira móvel. Em outras palavras, analogamente ao que constatamos para o caso de uma única fronteira, se tivermos duas fronteiras em 1 + 1 dimensões, uma móvel e outra fixa, a força de reação de radiação sobre a fronteira móvel será a mesma, não importando se as condições de contorno em consideração sobre as duas fronteiras são de Dirichlet ou de Neumann. Ou seja, as flutuações do vácuo oferecem a mesma resistência em ambas as configurações.

3.3.5 Duas fronteiras: condições mistas

Nesta subsecção iremos considerar uma situação em tudo idêntica às consideradas nas subsecções anteriores, exceto que agora utilizaremos condições de contorno mistas, isto é, na placa em movimento em torno da origem, vamos supor que o campo satisfaça a condição de Dirichlet, enquanto na placa fixa em $x = L$, a condição de Neumann. Portanto, o campo $\delta\phi$ obedece às seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \delta\phi(t, 0) = -\partial_x\phi_0(t, 0)\delta q(t) \\ \partial_x\delta\phi(t, L) = 0 \end{cases}, \quad (3.145)$$

Neste caso, a transformada de Fourier $\delta\Phi(\omega, x)$ satisfaz a equação $(\partial_x^2 + \omega^2)\delta\Phi(\omega, x) = 0$, sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \delta\Phi(\omega, 0) = -\int \frac{d\omega'}{2\pi} \delta Q(\omega - \omega') \partial_x \Phi_0(\omega', 0) \\ \partial_x \delta\Phi(\omega, L) = 0 \end{cases}. \quad (3.146)$$

Pode-se mostrar então que a solução para $\delta\Phi(\omega, x)$ é dada por:

$$\delta\Phi(\omega, x) = \delta\Phi(\omega, 0) \frac{\cos[(\omega + i\epsilon)(L - x)]}{\cos[(\omega + i\epsilon)L]}. \quad (3.147)$$

Para a transformada de Fourier de $\phi_0(t, x)$ encontramos, neste caso, que:

$$\Phi_0(\omega, x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_n L}} \sin(\omega_n x) [a_n \delta(\omega - \omega_n) + a_n^\dagger \delta(\omega + \omega_n)]. \quad (3.148)$$

onde $\omega_n = (n + 1/2)\pi/L$ ($n = 0, 1, \dots$). Note a semelhança entre essa equação e a Eq.(3.103). A diferença entre elas está no fato de que as frequências dos modos do campo não são as mesmas (note ainda que o somatório dessa última expressão começa de zero).

Seguindo um procedimento totalmente análogo ao adotado na seção 3.3.3, obtemos a seguinte expressão para a transformada de Fourier da força dinâmica que atua sobre a fronteira:

$$\delta \mathcal{F}^{(i)}(\omega) = \chi^{(i)}(\omega) \delta Q(\omega), \quad (3.149)$$

onde

$$\chi^{(i)}(\omega) = \frac{\hbar}{2L} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' \tan(\omega' L) [\delta(\omega - \omega' - \omega_n) + \delta(\omega - \omega' + \omega_n)]. \quad (3.150)$$

Adotando a mesma prescrição usada no caso de duas fronteiras de Dirichlet, temos que:

$$\chi^{(i)}(\omega) = \frac{\hbar}{2L} \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int_{-a}^a d\omega' \omega' \tan(\omega' L) [\delta(\omega - \omega' - \omega_n) + \delta(\omega - \omega' + \omega_n)], \quad (3.151)$$

Integrando em ω' , obtemos:

$$\begin{aligned} \chi^{(i)}(\omega) &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \left[(\omega - \omega_n) \Theta(\omega - \omega_n + a) \Theta(a - \omega + \omega_n) \right. \\ &\quad \left. + (\omega + \omega_n) \Theta(\omega + \omega_n + a) \Theta(a - \omega - \omega_n) \right] \\ &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\mathcal{G}'((\omega+a)L/\pi)} \omega_n (\omega - \omega_n) + \sum_{n=0}^{\mathcal{G}'((a-\omega)L/\pi)} \omega_n (\omega + \omega_n) \right]. \end{aligned} \quad (3.152)$$

No segundo somatório da expressão (3.3.5) faremos a transformação de índice $n \rightarrow -n-1$, de modo que:

$$\sum_{n=0}^{\mathcal{G}'((a-\omega)L/\pi)} \omega_n (\omega + \omega_n) = \sum_{n=-1}^{-\mathcal{G}'((a-\omega)L/\pi)-1} \omega_n (\omega - \omega_n). \quad (3.153)$$

Usando (3.153) em (3.3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\chi^{(i)}(\omega) &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=-\mathcal{G}'((a-\omega)\frac{L}{\pi})-1}^{\mathcal{G}'((\omega+a)\frac{L}{\pi})} \omega_n(\omega - \omega_n) \\ &= -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n |\omega - \omega_n|.\end{aligned}\quad (3.154)$$

Note que a expressão (3.3.5) tem a mesma forma da obtida para o caso Dirichlet-Dirichlet dada por (3.114), com a diferença que, em (3.3.5), $\omega_n = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{L}$ ($n = 0, 1, \dots$). Usando a mesma prescrição de regularização adotada em (3.69) e (3.115), assim como a redefinição relacionada com o parâmetro s , conforme mostrada em (3.117), obtemos:

$$\chi^{(i)}(\omega) = -\frac{\hbar}{2L} \cot(\omega L) \Sigma_2(\omega), \quad (3.155)$$

onde definimos

$$\Sigma_2(\omega) := \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\omega_n - \omega| \omega_n e^{-s|\frac{\omega_n L}{\pi} - \frac{\omega L}{2\pi}|}. \quad (3.156)$$

Para $\omega \geq \frac{3\pi}{2L}$, temos que:

$$\begin{aligned}\Sigma_2(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{-\infty}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2})} \omega_n(\omega - \omega_n) e^{-s(-n - \frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2})+1}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2})} \omega_n(\omega - \omega_n) e^{-s(n + \frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2})+1}^{\infty} \omega_n(\omega_n - \omega) e^{-s(n + \frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{L} e^{-s\frac{\omega L}{2\pi}} \left[\omega \partial_s - \frac{\pi}{L} \partial_s^2 \right] \sum_{-\infty}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2})} e^{s(n + \frac{1}{2})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{L} e^{s\frac{\omega L}{2\pi}} \left[-\omega \partial_s - \frac{\pi}{L} \partial_s^2 \right] \sum_{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2})+1}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2})} e^{-s(n + \frac{1}{2})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{L} e^{s\frac{\omega L}{2\pi}} \left[\omega \partial_s + \frac{\pi}{L} \partial_s^2 \right] \sum_{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2})+1}^{\infty} e^{-s(n + \frac{1}{2})} \right\} \\ &= -\frac{L\omega^3}{6\pi} + \frac{2\pi\omega}{L} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi\omega}{L} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11\pi^2}{6L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \frac{2\pi^2}{3L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{2\pi^2}{L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{2L^2} + \frac{11\pi\omega}{12L}.\end{aligned}\quad (3.158)$$

Já para $\omega \leq \frac{-3\pi}{2L}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{-\infty}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}) - 1} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n - \frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} \right. \\
&+ \left. \sum_{\frac{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2})}{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2})} - 1}^{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2}) - 1} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(-n - \frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{\frac{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{2\pi} - \frac{1}{2})}{\mathcal{G}(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2})} - 1}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n + \frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right\} \\
&= -\frac{L\omega^3}{6\pi} + \frac{\pi^2}{6L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi\omega}{12L} + \frac{\pi\omega}{L} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2\pi^2}{3L^2} \mathcal{G}\left(\frac{\omega L}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^3.
\end{aligned} \tag{3.159}$$

OBS: Das expressões (3.158) e (3.159), válidas para $|\omega| \geq \frac{3\pi}{2L}$, podemos verificar que

$$\Sigma_2(\omega) = -\Sigma_2(-\omega). \tag{3.160}$$

Isso pode ser visto da seguinte forma: ao substituirmos $\omega = \frac{a\pi}{L}$, no resultado final em (3.158), e $\omega = -\frac{a\pi}{L}$ no resultado em (3.159), com $a \geq 1.5$, temos duas possibilidades:

1. se $\mathcal{G}(a - \frac{1}{2}) = \mathcal{G}(a) - 1$, então $\mathcal{G}(-a - 1/2) = -\mathcal{G}(a)$;
2. se $\mathcal{G}(a - \frac{1}{2}) = \mathcal{G}(a)$, então $\mathcal{G}(-a - 1/2) = -\mathcal{G}(a) - 1$.

Se substituirmos qualquer uma das duas opções escritas acima em (3.158) e (3.159), obteremos $\Sigma_2(\frac{a\pi}{L}) = -\Sigma_2(-\frac{a\pi}{L})$, confirmando (3.160).

Por outro lado, para o intervalo $\frac{\pi}{2L} \leq \omega < \frac{3\pi}{2L}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n - \frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n + \frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\omega\pi}{2L} - \frac{\pi^2}{4L^2} \right) \left[\Theta\left(-\frac{\omega L}{\pi} + 1\right) e^{-s(-\frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \Theta\left(\frac{\omega L}{\pi} - 1\right) e^{-s(\frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{11}{12} \frac{\pi\omega}{L} - \frac{1}{6} \frac{L\omega^3}{\pi},
\end{aligned} \tag{3.161}$$

onde: $\Theta(0) = 1/2$, $\Theta(x > 0) = 1$ e $\Theta(x < 0) = 0$. Já no caso do intervalo $-\frac{3\pi}{2L} < \omega \leq -\frac{\pi}{2L}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-2} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n - \frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n + \frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\omega\pi}{2L} + \frac{\pi^2}{4L^2} \right) \left[\Theta \left(\omega + \frac{\pi}{L} \right) e^{-s(\frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \Theta \left(-\omega - \frac{\pi}{L} \right) e^{-s(-\frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{11}{12} \frac{\pi\omega}{L} - \frac{1}{6} \frac{L\omega^3}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Ou seja, para $\frac{\pi}{2L} \leq |\omega| < \frac{3\pi}{2L}$, temos que:

$$\Sigma_2(\omega) = \text{sign}(-\omega) \left[\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{11}{12} \frac{\pi\omega}{L} - \frac{1}{6} \frac{L\omega^3}{\pi} \right]. \quad (3.163)$$

OBS: Novamente, a partir das equações anteriores, verifica-se que a relação (3.160) vale para o intervalo $\frac{\pi}{2L} \leq |\omega| < \frac{3\pi}{2L}$.

Finalmente, para o intervalo $0 \leq |\omega| < \frac{\pi}{2L}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} \omega_n (\omega - \omega_n) e^{-s(-n - \frac{1}{2} + \frac{\omega L}{2\pi})} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (\omega_n - \omega) e^{-s(n + \frac{1}{2} - \frac{\omega L}{2\pi})} \right\} \\ &= -\frac{1}{12} \frac{\pi\omega}{L} - \frac{1}{6} \frac{L\omega^3}{\pi}, \end{aligned} \quad (3.164)$$

deixando claro que também nesse último intervalo a relação (3.160) é satisfeita. Com isso podemos escrever que $\Sigma_2(\omega) = -\Sigma_2(-\omega)$, $\forall \omega$.

As expressões finais em (3.158), (3.159), (3.163) e (3.164), quando substituídas na Eq.(3.156), nos permitem escrever a susceptibilidade para qualquer valor de ω . Como um teste de consistência, usando $(\cot[(\omega + i\epsilon)L])^* = -\cot[(-\omega + i\epsilon)L]$ e o fato de que $\Sigma_2(\omega) = -\Sigma_2(-\omega)$, podemos verificar que $(\chi^{(i)}(\omega))^* = \chi^{(i)}(-\omega)$, de acordo com o fato de que $F(t)$ e $\delta q(t)$ são reais ².

²Outro teste de consistência é a verificação do limite do χ quando $L \rightarrow \infty$. Usando (3.124) obtemos, no limite, $\frac{i\omega^3}{12\pi}$, a metade do χ para o caso de uma fronteira, conforme esperado.

A fim de extrairmos a parte imaginária de χ , considerando que $\chi(\omega)$ aparece dentro de uma integral em ω , temos, de forma análoga ao que foi feito em (3.130), que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega &= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{-2} \oint dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_2^{(b)}(z)}{1 - e^{2izL}} \\
&- \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} \oint dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_2^{(a)}(z)}{1 - e^{2izL}} \\
&+ \left[-\frac{1}{2} \left(\oint_{n=-1} + \oint_{n=1} \right) \right] dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_2^{(c)}(z)}{1 - e^{2izL}} \\
&- \frac{1}{2} \oint_{n=0} dz \left(-\frac{i\hbar}{2L} \right) \frac{(1 + e^{2izL}) f(z) \Sigma_2^{(d)}(z)}{1 - e^{2izL}}, \tag{3.165}
\end{aligned}$$

onde $\Sigma_2^{(a)}$, $\Sigma_2^{(b)}$, $\Sigma_2^{(c)}$ e $\Sigma_2^{(d)}$ são dados, respectivamente, pelas expressões finais em (3.158), (3.159), (3.163) e (3.164). Podemos verificar, no entanto, que:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2^{(b)}\left(-\frac{\pi}{L}\right) &= \Sigma_2^{(c)}\left(-\frac{\pi}{L}\right) = -\frac{\pi^2}{4L^2}, \\
\Sigma_2^{(a)}\left(\frac{\pi}{L}\right) &= \Sigma_2^{(c)}\left(\frac{\pi}{L}\right) = \frac{\pi^2}{4L^2}, \\
\Sigma_2^{(a)}(0) &= \Sigma_2^{(b)}(0) = \Sigma_2^{(d)}(0) = 0. \tag{3.166}
\end{aligned}$$

Usando (3.131) e (3.166), podemos reescrever (3.165) como:

$$\begin{aligned}
\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega &= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) + \frac{i\hbar\pi}{2L^2} \sum_{n=-\infty}^{-1} f(\omega_n) \Sigma_2^{(b)}(\omega_n) \\
&+ \frac{i\hbar\pi}{2L^2} \sum_{n=0}^{\infty} f(\omega_n) \Sigma_2^{(a)}(\omega_n) \\
&= \mathcal{P} \left(\int \chi^{(i)}(\omega) f(\omega) d\omega \right) + \frac{i\hbar\pi^3}{12L^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) \left(n^3 + \frac{n}{2} \right). \tag{3.167}
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever formalmente que:

$$\chi^{(i)}(\omega) = \mathcal{P}(\chi^{(i)}) + \frac{i\hbar\pi^3}{12L^4} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(n^3 + \frac{n}{2} \right) \delta \left(\omega - \frac{n\pi}{L} \right). \tag{3.168}$$

A parte imaginária da susceptibilidade, responsável pela força dissipativa que atua sobre a fronteira em movimento, é neste caso por:

$$\text{Im}\chi = \frac{\hbar\pi^3}{12L^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n^3 + \frac{n}{2} \right) \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) + \frac{\hbar\omega^3}{12\pi}, \quad (3.169)$$

onde incluímos a contribuição das flutuações do campo fora da cavidade. A força dissipativa total sobre a fronteira em movimento é dada então por:

$$\begin{aligned} \delta F_d(t) &= i \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Im}(\chi(\omega)) \delta Q(\omega) e^{-i\omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{12\pi} \left[\frac{d^3}{dt^3} \delta q(t + 2nL) - \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{d}{dt} \delta q(t + 2nL) \right]. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Observe que a força dissipativa para este caso difere da encontrada para o caso de duas fronteiras de Dirichlet, cuja expressão é dada por (3.138). Com base nesse resultado esperamos que, no caso eletromagnético, a taxa de produção de fótons para o caso de duas placas perfeitamente condutoras, uma delas oscilante, seja diferente em relação ao caso em que temos uma placa condutora oscilante e outra infinitamente permeável fixa.

3.3.6 2 fronteiras Dirichlet-Dirichlet via operador número

Consideremos nesta seção a mesma configuração de fronteiras descritas na seção (3.3.3), acrescentando a suposição de que a fronteira executa um movimento de duração finita. Vamos, pois, considerar movimentos não relativísticos que satisfaçam a condição: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \delta q(t) = 0$. Trabalhando na representação de Heisenberg e supondo que não haja partículas reais antes que o movimento da fronteira se inicie, calculamos então o número de partículas reais (com uma dada frequência) após cessado o movimento da fronteira, isto é, calculamos $N_{out} = \langle 0_{in} | a_{out}^\dagger a_{out} | 0_{in} \rangle$ (ou seja, quando $t \rightarrow \infty$). A partir da expressão para o número de partículas criadas, é possível, via argumentos de conservação de energia, encontrar a expressão para a parte dissipativa da força dinâmica de Casimir. A técnica pode ser resumida da seguinte maneira: a partir das expressões para as transformações lineares entre os operadores de campo *out* e *in*, obtidas via funções de Green avançadas e retardadas,

é possível obter as relações lineares entre os operadores de criação e aniquilação *out* e *in*. Como veremos, haverá uma mistura, isto é, os operadores a_{out} e a_{out}^\dagger serão dados por combinações lineares de a_{in} e a_{in}^\dagger , e conseqüentemente, $a_{out}|0_{in}\rangle \neq 0$, fazendo com que o módulo da amplitude de persistência no estado de vácuo seja menor do que a unidade, devido ao movimento das fronteiras.

Conforme discutido na subseção (3.3.3), o campo no interior da cavidade (e também fora dela) sofre uma perturbação $\delta\Phi$, causada pelo movimento da fronteira, cuja transformada de Fourier $\delta\Phi(\omega, x)$, de acordo com a eq. (3.102) e com o apêndice C, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\delta\Phi(\omega, x) &= \delta\Phi(\omega, 0) \frac{\text{sen}[(\omega + i\epsilon)(L - x)]}{\text{sen}[(\omega + i\epsilon)L]} \\ &= -\delta\Phi(\omega, 0) \partial_{x'} G_R^D(\omega, x, x' = 0),\end{aligned}\quad (3.171)$$

onde

$$\delta\Phi(\omega, 0) = -\int \frac{d\omega'}{2\pi} \delta Q(\omega - \omega') (\partial_x \Phi_0)(\omega', 0) \quad (3.172)$$

e G_R^D é a função de Green retardada associada ao operador $\partial_x^2 + \omega^2$, isto é, satisfaz a equação

$$\left[\partial_x^2 + (\omega + i\epsilon)^2 \right] G_R^D(x, x') = \delta(x - x'),$$

e está sujeita às condições de contorno de Dirichlet em 0 e L . De acordo com a Eq.(C.9), temos que:

$$G_R^D(\omega, x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n\pi x'/L) \sin(n\pi x/L)}{L \left[\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]} \quad (3.173)$$

Usaremos a notação G_R para as funções de Green retardadas ($\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$), e G_A , para as avançadas ($\omega \rightarrow \omega - i\epsilon$).

Visto que a fronteira move-se durante um intervalo de tempo finito, usamos a Eq.(3.103) e escrevemos as expressões para Φ_0^{in} e Φ_0^{out} , relacionados com as soluções para o problema estático, em $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$, respectivamente:

$$\Phi_0^{(out,in)}(\omega, x) = \sum_{n>0} 2\pi \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_n L}} \sin(\omega_n x) \left[a_n^{(out,in)} \delta(\omega - \omega_n) + a_n^{\dagger(out,in)} \delta(\omega + \omega_n) \right]. \quad (3.174)$$

O campo $\Phi(\omega, x)$ tanto pode ser escrito em termos de Φ_0^{out} , por meio da função de Green avançada:

$$\Phi(\omega, x) = \Phi_0^{out}(\omega, x) - \delta\Phi(\omega, 0) \partial_{x'} G^A(\omega, x, x')|_{x'=0}, \quad (3.175)$$

quanto em termos de Φ_0^{in} , com a utilização da função de Green retardada:

$$\Phi(\omega, x) = \Phi_0^{in}(\omega, x) - \delta\Phi(\omega, 0) \partial_{x'} G^R(\omega, x, x')|_{x'=0}, \quad (3.176)$$

de modo que Φ_0^{in} e Φ_0^{out} , e, conseqüentemente, os operadores a^{out} e a^{in} , poderão ser relacionados entre si por uma combinação de funções de Green retardadas e avançadas:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{out}(\omega, x) &= \Phi_0^{in}(\omega, x) - \delta\Phi(\omega, 0) \left[\partial_{x'} G^R(\omega, x, x')|_{x'=0} - \partial_{x'} G^A(\omega, x, x')|_{x'=0} \right] \\ &= \Phi_0^{in}(\omega, x) + \delta\Phi(\omega, 0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi i}{L} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) - \delta\left(\omega + \frac{n\pi}{L}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.177)$$

De (3.174) e (3.177) podemos concluir que:

$$a_n^{out} = a_n^{in} - \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \left[a_m^{in} \delta Q\left(\left(n-m\right)\frac{\pi}{L}\right) + a_m^{in\dagger} \delta Q\left(\left(n+m\right)\frac{\pi}{L}\right) \right]. \quad (3.178)$$

O operador número, com uma dada freqüência $n\pi/L$ e para $t \rightarrow \infty$, é definido como $N_n^{out} := a_n^{out\dagger} a_n^{out}$. Usando (3.178) temos:

$$\langle 0_{in} | N_n^{out} | 0_{in} \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(\frac{s\pi}{L}\right) \left| \delta Q\left(\left(n+s\right)\frac{\pi}{L}\right) \right|^2. \quad (3.179)$$

Essa, portanto, é a expressão para o número de partículas reais, com freqüência $n\pi/L$, criadas devido à energia do movimento da fronteira que é dissipada pela força que as flutuações do campo em seu estado de vácuo exercem sobre ela. Por argumentos de conservação da energia, é possível extrair a expressão para a parte dissipativa da força que atua sobre a fronteira, a qual, para este caso é dada em (3.179). Dessa expressão podemos concluir, ainda, que as freqüências das partículas criadas são sempre menores ou

iguais à frequência mecânica da fronteira. Para ilustrar isso, consideremos como exemplo uma fronteira cujo movimento é dado por

$$\delta q(t) = \delta q_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{|t|}{\Delta t}}, \quad (3.180)$$

onde Δt é um número positivo. O número de *quanta* gerado pelo movimento dessa fronteira, de $t \rightarrow -\infty$ a $t \rightarrow +\infty$, dado por (3.179), requer a expressão para δQ , que nesse caso é dada por:

$$\delta Q(\omega) = \delta q_0 \Delta t \left[\frac{1}{(1 + (\omega - \omega_0)^2 \Delta t^2)} + \frac{1}{(1 + (\omega + \omega_0)^2 \Delta t^2)} \right]. \quad (3.181)$$

Na expressão (3.179), aparece $|\delta Q(\omega)|^2$ e, apenas para uma visualização, da forma dessa função, fazendo $\delta q_0 = \Delta t = 1$ e $\omega_0 = 100$ em (3.181), obtemos o gráfico para $|\delta Q|^2$ mostrado na figura 3.2. Em tal gráfico podemos ver que para $\omega = \pm\omega_0 = \pm 100$, $|\delta Q|^2$ tem o seu valor máximo, caindo rapidamente a zero para valores que se afastam de $\pm\omega_0$. Desse modo, observando a expressão (3.179), se $\frac{n\pi}{L} \geq \omega_0$, todos os argumentos de δQ que aparecem no somatório são necessariamente diferentes de ω_0 , visto que a variável de soma s é positiva. Assim espera-se que, para esses argumentos, os valores $|\delta Q|^2$ dêem pouca contribuição. Entretanto, se $\frac{n\pi}{L} < \omega_0$, para um dado valor da variável de soma s o argumento de δQ pode ser igual ou próximo a ω_0 , resultando que $|\delta Q((n+s)\pi/L)|^2$ dê uma contribuição significativa.

Para o caso eletromagnético, considerando as fronteiras como placas perfeitamente condutoras, paralelas entre si e perpendiculares ao eixo \mathcal{OX} , com uma delas oscilando e outra em repouso, pode-se mostrar que [50]:

$$N^{(TE)_{n,s}} = \frac{1}{L^2} \sum_{s'=1} \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{s'\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{\omega_n^s \omega_n^{s'}} |\delta Q(\omega_n^s + \omega_n^{s'})|^2, \quad (3.182)$$

onde TE indica que os fótons têm polarização transversal-elétrica e a seguinte definição foi adotada:

$$\omega_n^s := \sqrt{\left(\frac{s\pi}{L} \right)^2 + \frac{(2\pi)^2}{S} [(n_y)^2 + (n_x)^2]}, \quad (3.183)$$

onde, por sua vez, S é a área da superfície da placa e $n = (n_x, n_y)$ (vide [50]). Para a

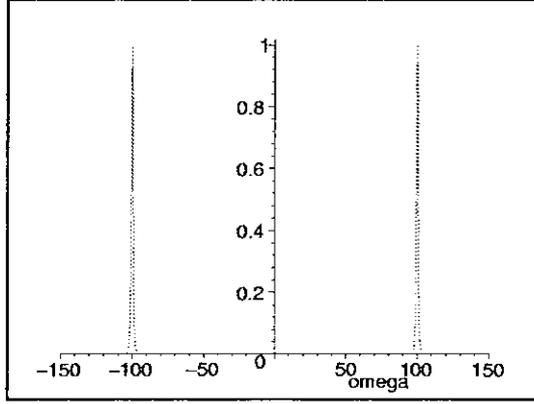


Figura 3.2: Gráfico para a função $|\delta Q(\omega)|^2 = \left[\frac{1}{(1+(\omega-100)^2)} + \frac{1}{(1+(\omega+100)^2)} \right]^2$.

polarização transversal-magnética (TM), pode-se mostrar que [50]:

$$N^{(TM)_{n,s}} = \frac{1}{L^2} \sum_{s'=0} \frac{\left[k_{\parallel}^{n2} + \omega_n^s \omega_n^{s'} \right]^2}{(1 + \delta_{s0})(1 + \delta_{s'0}) \omega_n^s \omega_n^{s'}} |\delta Q(\omega_n^s + \omega_n^{s'})|^2, \quad (3.184)$$

onde $k_{\parallel}^n = 2\pi(n_y \hat{y} + n_z \hat{z})/\sqrt{S}$. Note que, fazendo $n = 0$ em (3.182), ou seja, tomando os fótons que se propagam na direção perpendicular às placas, reobtemos a expressão (3.179) para o caso escalar.

3.4 Efeito Casimir dinâmico à temperatura finita

Nas seções 3.3.1 e 3.3.2, considerando condições de Dirichlet ou Neumann, calculamos a força dissipativa sobre uma fronteira em movimento, exercida pelas flutuações de vácuo do campo. Operacionalmente, tomamos os valores esperados no vácuo dos operadores relevantes ao problema. Nesta seção nós consideramos que a fronteira move-se em um banho térmico à temperatura T . Baseado no teorema flutuação-dissipação, esperamos que as flutuações térmicas induzam uma força dissipativa adicional sobre a fronteira em movimento. A fim de estimar a contribuição térmica a essa força, utilizaremos exatamente o mesmo procedimento usado nas seções 3.3.1 e 3.3.2, exceto que, agora, uma média térmica sobre todos os possíveis estados do campo deve ser tomada. Embora devido ao movimento da placa o campo não permaneça mais num estado de equilíbrio térmico, numa

primeira aproximação podemos calcular a força sobre a placa em movimento como se o campo permanecesse em equilíbrio, mas respeitasse as condições de contorno de fronteiras em movimento.

Uma vez que a probabilidade de encontrar o campo em qualquer estado de Fock é não nula, incluindo aí o estado de vácuo, iremos tomar a média sobre todos os valores quânticos esperados, apropriadamente ponderados com o fator de Boltzmann. Na prática, isto significa trocar o valor esperado no vácuo de um dado operador \mathcal{O} pela correspondente média térmica:

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{O} \rangle_\beta = \frac{\text{Tr}(\mathcal{O} e^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})}, \quad (3.185)$$

onde H é o operador Hamiltoniano para o sistema em consideração e $\beta = 1/K_B T$, sendo K_B a constante de Boltzmann.

Se por um lado a termodinâmica do efeito Casimir estático já foi estudada há muitos anos e está bem compreendida hoje em dia [98] (veja também as referências contidas nesse trabalho), o mesmo não pode ser dito em relação ao efeito Casimir dinâmico. Há poucos trabalhos na literatura que se dedicam ao estudo dos efeitos térmicos tanto na força dissipativa em fronteiras em movimento quanto na radiação gerada por tais fronteiras em movimento dentro do contexto da teoria quântica de campos [52, 53, 99, 100, 101]. Em particular, efeitos térmicos na força dissipativa sobre uma fronteira em movimento têm sido raramente considerados, mesmo em 1+1 dimensões. Os primeiros autores que calcularam a força dissipativa exercida sobre uma placa em movimento por um campo escalar em 1+1 dimensões a temperatura finita foram S. Reynaud e colaboradores [99]. Em lugar de um espelho perfeitamente refletor, eles consideraram um modelo mais realista para a fronteira móvel e obtiveram o resultado para um espelho ideal como um caso limite de seus resultados. Vale mencionar, que para um espelho perfeitamente condutor, o resultado final está apresentado também na Ref. [51]. Podemos dizer ainda que uma boa motivação para esse tipo de estudo reside no fato de que efeitos térmicos podem amplificar o efeito Casimir dinâmico em muitas ordens de grandeza, como pode ser visto nas refs. [51, 99].

3.4.1 Uma fronteira de Dirichlet

Nesta subseção vamos iniciar considerando um campo escalar não massivo em 1+1 dimensões e a uma temperatura finita T , na presença de uma placa em movimento, sobre a qual esse campo se anula. Desejamos calcular a contribuição para a força dissipativa sobre a placa devido ao banho térmico em torno da placa. Utilizaremos o mesmo procedimento empregado a temperatura zero, ou seja, o método perturbativo de Ford e Vilenkin.

Tomando como ponto de partida a expressão (3.59), trocamos nessa expressão o correlator C_1 por uma média ponderada que inclua as contribuições de todos os estados e não apenas a contribuição do vácuo. Designando o correlator térmico apropriado por σ_β , escrevemos que:

$$\delta\mathcal{F}(\omega) = i \int \frac{d\omega'}{2\pi} \omega' \int \frac{d\omega''}{2\pi} \delta Q(\omega' - \omega'') \sigma_\beta(\omega - \omega', \omega''), \quad (3.186)$$

onde definimos σ_β como:

$$\sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) = \langle \{ \partial_x \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x \Phi_0(\omega_2, 0^+) \} \rangle_\beta. \quad (3.187)$$

A fim de calcular essa quantidade, o ingrediente básico é a seguinte média térmica:

$$\langle a^\dagger(k) a(k') \rangle_\beta = \bar{n}(\omega_k) \delta(k - k'), \quad (3.188)$$

onde $\omega_k = |k|$ e $\bar{n}(\omega_k)$ é dado pela distribuição de Planck:

$$\bar{n}(\omega_k) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{k_B T}} - 1}. \quad (3.189)$$

O cálculo explícito de (3.187) encontra-se com detalhes no apêndice B.3, sendo o resultado dado por:

$$\sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) = 4\pi\hbar \left[\omega_1 \Theta(\omega_1) (1 + 2\bar{n}(\omega_1)) + \omega_2 \Theta(\omega_2) (1 + 2\bar{n}(\omega_2)) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2). \quad (3.190)$$

Usando (3.190) em (3.186) obtemos:

$$\mathcal{F}(\omega) = \chi(\omega) \delta Q(\omega), \quad (3.191)$$

onde

$$\chi(\omega) = \frac{i\hbar}{\pi} \int d\omega' \omega' (\omega - \omega') \left[\Theta(\omega - \omega') (1 + 2\bar{n}(\omega - \omega')) - \Theta(\omega' - \omega) (1 + 2\bar{n}(\omega' - \omega)) \right]. \quad (3.192)$$

A susceptibilidade χ pode ser dividida em duas partes. Uma delas, χ_v , relaciona-se com os correlatores envolvendo apenas o estado de vácuo. A outra, χ_β , relaciona-se com os estados excitados do campo, ou seja, com a presença do banho térmico. Desse modo, escrevemos que:

$$\chi(\omega) = \chi_v(\omega) + \chi_\beta(\omega), \quad (3.193)$$

onde:

$$\chi_v(\omega) = \frac{i\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \quad (3.194)$$

e

$$\begin{aligned} \chi_\beta(\omega) &= \frac{2i\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \frac{1}{e^{\frac{\hbar|\omega - \omega'|}{k_B T}} - 1} \\ &= \frac{2i\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega} d\omega' \omega' (\omega - \omega') \frac{1}{e^{\frac{\hbar|\omega - \omega'|}{k_B T}} - 1} + \frac{2i\hbar}{\pi} \int_{\omega}^{\infty} d\omega' \omega' (\omega' - \omega) \frac{1}{e^{\frac{\hbar|\omega - \omega'|}{k_B T}} - 1}. \end{aligned} \quad (3.195)$$

O resultado em (3.194) está de acordo com (3.64), obtido para o caso em que $T = 0$. Após o processo de regularização mostrado em (3.65), obtemos (3.67). Já para obter a contribuição térmica para a força, veremos que não será necessária regularização alguma, como usualmente ocorre em teoria quântica de campos a temperatura finita ³.

É conveniente fazer nas integrais presentes em (3.195) a seguinte transformação de variáveis:

$$\xi := \frac{\hbar|\omega - \omega'|}{K_B T}, \quad (3.196)$$

o que nos leva a:

$$\chi_\beta(\omega) = i \frac{4(K_B T)^2 \omega}{\hbar \pi} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi}{e^\xi - 1}. \quad (3.197)$$

³Pode-se mostrar que as correções térmicas não trazem novas divergências ultravioletas para a teoria em questão.

Usando que:

$$\int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} = \Gamma(2)\zeta_R(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (3.198)$$

onde ζ_R representa a função zeta de Riemann, obtemos:

$$\chi_{\beta}(\omega) = i \frac{2\pi(K_B T)^2}{3\hbar} \omega. \quad (3.199)$$

Tomando a transformada de Fourier de $\mathcal{F}_{\beta}(\omega) = \chi_{\beta}(\omega)\delta Q(\omega)$, obtemos a contribuição térmica à força dissipativa:

$$F_{\beta}(t) = -\lambda_{\beta} \frac{d}{dt} \delta q(t), \quad (3.200)$$

onde introduzimos o coeficiente de viscosidade, que para o caso em questão é dado por:

$$\lambda_{\beta} = \frac{2\pi(K_B T)^2}{3\hbar c^2}, \quad (3.201)$$

onde reintroduzimos a velocidade da luz c . É interessante notar que a contribuição térmica à força dissipativa é proporcional à velocidade, como esperado, visto que é uma força viscosa devido ao plasma térmico de partículas reais. Além disso, é proporcional a T^2 , fato que está relacionado com a lei de Stefan-Boltzmann em 1+1 dimensões. Os resultados obtidos aqui estão em acordo com os obtidos previamente nas refs. [51, 99]. Entretanto, nosso resultado é duas vezes o encontrado na ref. [51], provavelmente porque os autores desse trabalho só levaram em consideração um dos lados da fronteira.

3.4.2 Uma fronteira de Neumann

Nesta subseção consideraremos uma situação idêntica à anterior, exceto pela suposição de que, em lugar da condição de contorno adotada anteriormente (Dirichlet), é a derivada espacial do campo que se anula na placa em movimento.

Neste caso, tomamos então como ponto de partida a expressão (3.89) e nela trocamos os correlatores C_2 e C_3 , respectivamente, pelos correlatores apropriados Σ_{β} e Γ_{β} , que incluem as contribuições térmicas, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &= i \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} (\omega - \omega') \delta Q(\omega' - \omega'') \times \\ &\times \left[\Sigma_{\beta}(\omega - \omega', \omega'') - (\omega' - \omega'') \omega'' \Gamma_{\beta}(\omega - \omega', \omega'') \right], \end{aligned} \quad (3.202)$$

onde definimos:

$$\begin{aligned}\Sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) &:= \langle \{ \Phi_0(0^+, \omega_1), \partial_x^2 \Phi_0(0^+, \omega_2) \} \rangle_\beta \\ \Gamma_\beta(\omega_1, \omega_2) &:= \langle \{ \Phi_0(0^+, \omega_1), \Phi_0(0^+, \omega_2) \} \rangle_\beta.\end{aligned}\quad (3.203)$$

Cálculos explícitos desses correlatores podem ser encontrados no apêndice B.4 e os resultados são dados por:

$$\Sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) = 4\pi\hbar \left[\omega_1 \Theta(\omega_1) (1 + 2\bar{n}(\omega_1)) + \omega_2 \Theta(\omega_2) (1 + 2\bar{n}(\omega_2)) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (3.204)$$

e

$$\Gamma_\beta(\omega_1, \omega_2) = 4\pi\hbar \left[\frac{\Theta(\omega_1)}{\omega_1} (1 + 2\bar{n}(\omega_1)) + \frac{\Theta(\omega_2)}{\omega_2} (1 + 2\bar{n}(\omega_2)) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2). \quad (3.205)$$

Inserindo as Eq(s) (3.204) e (3.205) em Eq.(3.202), obtemos:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}_\Sigma(\omega) + \mathcal{F}_\Gamma(\omega), \quad (3.206)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Gamma(\omega) &= -i \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} (\omega - \omega') (\omega' - \omega'') \omega'' \delta Q(\omega' - \omega'') \times \\ &\times 4\pi\hbar \left[\frac{\Theta(\omega - \omega')}{\omega - \omega'} (1 + 2\bar{n}(\omega - \omega')) + \frac{\Theta(\omega'')}{\omega''} (1 + 2\bar{n}(\omega'')) \right] \delta(\omega - \omega' + \omega'') \\ &= \frac{\hbar\omega}{\pi} \int d\omega' (\omega - \omega') \left[\Theta(\omega - \omega') (1 + 2\bar{n}(\omega - \omega')) - \Theta(\omega' - \omega) (1 + 2\bar{n}(\omega' - \omega)) \right] \delta Q(\omega).\end{aligned}\quad (3.207)$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Sigma(\omega) &= \frac{i\hbar\delta Q(\omega)}{\pi} \int d\omega' \left[-\Theta(\omega - \omega') (\omega - \omega')^2 (1 + 2\bar{n}(\omega - \omega')) \right. \\ &\quad \left. + \Theta(\omega' - \omega) (\omega' - \omega)^2 (1 + 2\bar{n}(\omega' - \omega)) \right].\end{aligned}\quad (3.208)$$

Com o intuito de separar as contribuições do vácuo e térmicas em \mathcal{F}_Γ e \mathcal{F}_Σ , definimos:

$$\mathcal{F}_\Gamma(\omega) = \chi_\Gamma(\omega) \delta Q(\omega) = [\chi_{\Gamma,v}(\omega) + \chi_{\Gamma,\beta}(\omega)] \delta Q(\omega) \quad (3.209)$$

e

$$\mathcal{F}_\Sigma(\omega) = \chi_\Sigma(\omega) \delta Q(\omega) = [\chi_{\Sigma,v}(\omega) + \chi_{\Sigma,\beta}(\omega)] \delta Q(\omega), \quad (3.210)$$

onde $\chi_{\Gamma,v}$ e $\chi_{\Sigma,\beta}$ estão ligados, respectivamente, com as contribuições de vácuo e térmica.

Identificando $\chi_{\Gamma,v}$ a partir da expressão (3.207), temos que:

$$\chi_{\Gamma,v} = \frac{i\hbar\omega}{\pi} \int d\omega' |\omega - \omega'|. \quad (3.211)$$

Já para contribuição térmica $\chi_{\Gamma,\beta}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_{\Gamma,\beta}(\omega) &= i \frac{2\hbar\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [(\omega - \omega') \bar{n}(\omega - \omega') \Theta(\omega - \omega') - (\omega - \omega') \bar{n}(\omega' - \omega) \Theta(\omega' - \omega)] \\ &= i \frac{2\hbar\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' |\omega - \omega'| \bar{n}(|\omega - \omega'|) \\ &= i \frac{2\hbar\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega} d\omega' \frac{(\omega - \omega')}{e^{\frac{\hbar(\omega - \omega')}{K_B T}} - 1} - \int_{\omega}^{+\infty} d\omega' \frac{(\omega - \omega')}{e^{\frac{\hbar(\omega' - \omega)}{K_B T}} - 1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.212)$$

Usando nessa integral a transformação de variáveis dada por (3.196), assim como a Eq.(3.198), obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_{\Gamma,\beta}(\omega) &= i \frac{4(K_B T)^2 \omega}{\hbar\pi} \int_0^{\infty} d\xi \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} \\ &= i \frac{2\pi(K_B T)^2}{3\hbar} \omega. \end{aligned} \quad (3.213)$$

A partir da expressão (3.208), identificando imediatamente a contribuição $\chi_{\Sigma,v}$:

$$\chi_{\Sigma,v} = -\frac{i\hbar\omega}{\pi} \int d\omega' (\omega - \omega') |\omega - \omega'|. \quad (3.214)$$

Já para a contribuição $\chi_{\Sigma,\beta}$, após a sua identificação a partir da Eq.(3.208), obtemos seguindo um caminho totalmente análogo ao usado no cálculo de $\chi_{\Gamma,\beta}$ que:

$$\chi_{\Sigma,\beta} = 0. \quad (3.215)$$

Definindo:

$$\mathcal{F}(\omega) = \chi(\omega) \delta Q(\omega) = (\chi_v(\omega) + \chi_\beta(\omega)) \delta Q(\omega) , \quad (3.216)$$

onde

$$\begin{cases} \chi_v = \chi_{\Gamma,v} + \chi_{\Sigma,v} \\ \chi_\beta = \chi_{\Gamma,\beta} + \chi_{\Sigma,\beta} \end{cases} , \quad (3.217)$$

temos que:

$$\chi_v = \frac{i\hbar\omega}{\pi} \int d\omega' \omega' |\omega - \omega'| \quad (3.218)$$

e

$$\chi_\beta(\omega) = i \frac{2\pi(K_B T)^2}{3\hbar} \omega . \quad (3.219)$$

O resultado em (3.218) coincide com o encontrado em (3.95), cuja regularização leva a (3.96). Isso mostra apenas que nossos resultados são consistentes com os anteriormente obtidos a temperatura zero.

Já esse último resultado, dado por (3.219), não poderia ter sido antecipado. Tomando a transformada de Fourier de $\mathcal{F}_\beta(\omega) = \chi_\beta(\omega) \delta Q(\omega)$, obtemos a contribuição térmica à força dissipativa:

$$F_\beta(t) = -\lambda_\beta \delta \dot{q}(t) , \quad (3.220)$$

onde novamente introduzimos o coeficiente de viscosidade

$$\lambda_\beta = \frac{2\pi(K_B T)^2}{3\hbar c^2} . \quad (3.221)$$

A contribuição térmica para a força sobre uma fronteira de Neumann em movimento não relativístico também coincide com aquela sobre uma fronteira de Dirichlet dada em (3.200) e (3.201). Em outras palavras, a força total sobre uma placa em movimento em 1+1 dimensões (devido às flutuações do vácuo e ao plasma de partículas reais que inicialmente estava em equilíbrio térmico) sobre é a mesma, não importando se impomos a condição de Dirichlet ou a de Neumann sobre a fronteira.

3.5 Efeito Casimir dinâmico eletromagnético

Nesta seção comentamos sobre o efeito Casimir dinâmico eletromagnético em 3+1 dimensões. Inicialmente, mostramos que o problema de encontrar a força de Casimir estática

eletromagnética, entre placas perfeitamente condutoras, como feito na seção 3.2, contém, basicamente dois problemas de condições de contorno estáticas, independentes entre si: um de Dirichlet, para a polarização transverso-elétrica, e um de Neumann, relacionada com a polarização transverso-magnética. De modo análogo, o problema de encontrar a força dinâmica de Casimir sobre uma placa perfeitamente condutora movendo-se no vácuo em 3+1 dimensões, também contém em si dois problemas de condições de contorno, agora dinâmicas: um de Dirichlet, para a polarização transverso-elétrica, e um de Neumann, relacionada com a polarização transverso-magnética. Desse modo, fica estabelecida uma conexão entre o problema de um campo escalar sem massa sob condições de Dirichlet ou Neumann, em fronteiras em movimento, e o problema do campo eletromagnético na presença fronteiras perfeitamente condutoras, pelo menos para geometria plana (placas planas e paralelas). Esse fato serviu de justificativa e motivação para estudarmos nas seções anteriores o campo escalar sem massa em diversas situações envolvendo condições de Dirichlet ou de Neumann, particularmente, dentro de uma cavidade unidimensional formada por duas placas (pontos) com condições mistas.

Consideremos duas placas condutoras, estáticas, conforme descrito na seção 3.2. Usando a componente T_{zz} do tensor energia-momentum (Eq.(3.20)), a pressão de Casimir sobre a placa em $z = 0$ é dada pela fórmula (3.21). Trabalhando no calibre de Coulomb, temos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e $\varphi = 0$. Podemos escrever o pontencial vetor como:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \vec{A}^M(t, \vec{r}) + \vec{A}^E(t, \vec{r}), \quad (3.222)$$

onde as componentes $\vec{A}^M(t, \vec{r})$ e $\vec{A}^E(t, \vec{r})$ estão relacionadas, respectivamente, com $\vec{A}_n^M(\vec{k}_{||}, \vec{r})$ e $\vec{A}_n^E(\vec{k}_{||}, \vec{r})$, e suas expressões explícitas podem ser obtidas a partir das fórmulas (3.24), (3.25) e (3.28). A partir das relações de comutação

$$\left[a_n^{\lambda'}(k_{||}'), a_n^{\lambda\dagger}(k_{||}) \right] = 4\pi^2 \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\vec{k}_{||} - \vec{k}_{||}'), \quad (3.223)$$

$$\left[a_n^{\lambda'}(k_{||}'), a_n^{\lambda}(k_{||}) \right] = 0 \quad \text{e} \quad \left[a_n^{\lambda'\dagger}(k_{||}'), a_n^{\lambda\dagger}(k_{||}) \right] = 0, \quad (3.224)$$

com $\lambda = E, M$, é possível mostrar que:

$$\langle 0|T_{zz}(t, \vec{r})|0\rangle = \sum_{\lambda=E, M} \langle 0|T_{zz}^\lambda(t, \vec{r})|0\rangle = \langle 0|T_{zz}^E(t, \vec{r}) + T_{zz}^M(t, \vec{r})|0\rangle, \quad (3.225)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{zz}^\lambda(t, \vec{r})|0\rangle := \langle 0|\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} A_z^\lambda(t, \vec{r}) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} A_{\parallel}^\lambda(t, \vec{r}) \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}^\lambda(t, \vec{r}) \right)_z^2 - \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}^\lambda(t, \vec{r}) \right)_{\parallel}^2 \right\}|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.226)$$

Dessa forma a componente T_{zz} pode ser dividida em duas partes, uma relacionada com o modo transverso-elétrico e outra, com o modo transverso-magnético. Definindo:

$$\vec{E}^\lambda(t, \vec{r}) := -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^\lambda(t, \vec{r}) ; \quad \vec{B}^\lambda(t, \vec{r}) := \vec{\nabla} \times \vec{A}^\lambda(t, \vec{r}) , \quad (3.227)$$

podemos escrever ainda:

$$\langle 0|T_{zz}^\lambda(t, \vec{r})|0\rangle = \langle 0|\left\{ E_z^\lambda(t, \vec{r})^2 - E_{\parallel}^\lambda(t, \vec{r})^2 + B^\lambda(t, \vec{r})_z^2 - B^\lambda(t, \vec{r})_{\parallel}^2 \right\}|0\rangle. \quad (3.228)$$

Usando (3.225) em (3.21), vemos que a pressão de Casimir pode ser dividida em duas partes, uma proveniente dos modos transverso-elétricos e outra, dos modos transverso-magnéticos. Para o problema transverso-elétrico temos que:

$$\square \vec{A}_{\parallel}^E(t, \vec{r}) = 0 ; \quad \nabla \cdot \vec{A}_{\parallel}^E = 0 ; \quad A_z^E(t, \vec{r}) = 0, \quad (3.229)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\vec{A}_{\parallel}^E(t, x, y, 0) = \vec{A}_{\parallel}^E(t, x, y, L) = 0. \quad (3.230)$$

Portanto, para $\vec{A}_{\parallel}^E(t, \vec{r})$ temos um problema de condições de contorno tipo Dirichlet.

Já para $\vec{A}_{\parallel}^M(t, \vec{r})$, temos:

$$\square \vec{A}_{\parallel}^M(t, \vec{r}) = \vec{0}; \quad \square A_z^M(t, \vec{r}) = 0; \quad \nabla \cdot \vec{A}^M = 0, \quad (3.231)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\vec{A}_{\parallel}^M(t, x, y, 0) = \vec{A}_{\parallel}^M(t, x, y, L) = \vec{0} ; \quad \frac{\partial A_z^M}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial A_z^M}{\partial z}(t, x, y, L). \quad (3.232)$$

Desse modo, para os modos TM temos condições de contorno tipo Dirichlet para a componente paralela às placas e condições tipo Neumann para a componente perpendicular às mesmas, sendo ainda que \vec{A}_{\parallel}^M e \vec{A}_z^M relacionam-se através de $\nabla \cdot \vec{A}^M = 0$.

A fim de trabalharmos com condições de contorno mais simplificadas para o problema transverso-magnético (somente Dirichlet ou somente Neumann), o que vai ser particularmente útil nos cálculos relacionados com a força dinâmica de Casimir, como veremos mais adiante, é possível [47] fazer uso da invariância das equações de Maxwell no espaço livre sob a transformação de dualidade:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}; \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E} \quad (3.233)$$

e reescrever \vec{E}^M e \vec{B}^M em termos do potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}^M$, definido de modo que:

$$\vec{E}^M(t, \vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}^M(t, \vec{r}) \quad ; \quad \vec{B}^M(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}}^M(t, \vec{r}). \quad (3.234)$$

Desse modo, o termo $\langle 0|T_{zz}^M(t, \vec{r})|0\rangle$ dado em (3.228) pode ser escrito em termos do novo potencial vetor \mathcal{A}^M obedecendo a:

$$\square \vec{\mathcal{A}}_{\parallel}^M(t, \vec{r}) = \vec{0} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}_{\parallel}^M = 0 \quad ; \quad \mathcal{A}_z^M(t, \vec{r}) = 0, \quad (3.235)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial \mathcal{A}_z^M}{\partial z}(t, x, y, 0) = \frac{\partial \mathcal{A}_z^M}{\partial z}(t, x, y, L). \quad (3.236)$$

Dessa forma, a parte da pressão de Casimir relacionada com os modos TM está ligada com a solução de um problema com condições de contorno de Neumann. Vemos que \vec{A}_E e \vec{A}_M são paralelos às placas, obedecem à equação da onda e as seguintes condições de contorno:

2 placas condutoras:	$z = 0$	$z = L$	(3.237)
\vec{A}_{\parallel}^E	Dirichlet	Dirichlet	
\vec{A}_{\parallel}^M	Neumann	Neumann	

Se trocarmos placas condutoras por perfeitamente permeáveis, teremos as condições de contorno para as componentes do potencial vetor \vec{A} dadas em (2.21) e (2.22). Traduzidas

em termos de \vec{A}^E e \vec{A}^M , resultam:

2 placas permeáveis:	$z = 0$	$z = L$	(3.238)
\vec{A}_{\parallel}^E	Neumann	Neumann	
\vec{A}_{\parallel}^M	Dirichlet	Dirichlet	

Em termos práticos de cálculo, essa inversão equivale a uma renomeação $\vec{A}^E \leftrightarrow \vec{A}^B$, não alterando a componente do tensor T_{zz} dado na fórmula (3.225) e, conseqüentemente, não alterando a pressão de Casimir. De fato, cálculos explícitos mostram que a força de Casimir entre duas placas condutoras é a mesma que a encontrada para o caso de duas placas permeáveis. Aliás, esperamos que esse resultado persista mesmo quando correções radiativas forem levadas em consideração, desde que não sejam impostas condições de contorno no campo fermiônico ⁴.

Se agora consideramos duas placas, sendo uma delas perfeitamente condutora localizada em $z = 0$ e outra infinitamente permeável localizada em $z = L$, temos as mesmas equações de onda para \vec{A}^E e \vec{A}^M , só que com condições de contorno mistas:

2 placas, caso misto:	$z = 0$	$z = L$	(3.239)
\vec{A}_{\parallel}^E	Dirichlet	Neumann	
\vec{A}_{\parallel}^M	Neumann	Dirichlet	

Note que sabemos, do modelo de campo escalar em 1 + 1 dimensões, que a força estática de Casimir entre duas fronteiras de Dirichlet é igual à força entre duas fronteiras Neumann. Entretanto, em 1 + 1 dimensões a força de Casimir entre uma fronteira de Dirichlet e outra de Neumann é repulsiva. Portanto, para o caso de placas mistas, em 3 + 1, temos dois problemas de condições mistas de fronteira: uma relacionado com \vec{A}_{\parallel}^E e outro, com \vec{A}_{\parallel}^M . Nesse caso, em analogia com o caso em 1 + 1, devemos esperar uma força repulsiva entre as placas. Com efeito, isso é o que ocorre, como foi demonstrado pela primeira vez por Boyer ([31]), dentro do contexto da eletrodinâmica estocástica.

⁴Já para um campo escalar com uma auto-interação do tipo $\lambda\phi^4$, por exemplo, não é óbvio que as correções radiativas à energia de Casimir calculadas com condições de Dirichlet coincidam com as obtidas com condições de Neumann, embora já tenha sido mostrado que em ordem λ elas de fato coincidem [106].

Para o caso dinâmico, consideremos duas placas perfeitamente condutoras, paralelas ao plano \mathcal{OXY} . Suponhamos que uma delas esteja oscilando na direção z em torno da posição $z = 0$, de acordo com um movimento prescrito, de modo que no instante t ela esteja na posição $z = \delta q(t)$. Por hipótese, o movimento é não-relativístico ($|\delta \dot{q}(t)| \ll c$) e tem pequena amplitude, condições análogas às adotadas na seção 3.3.1, para o caso escalar em $1 + 1$. Por simplicidade, suponhamos que a outra encontre-se em repouso em $z = L$. As condições para os campos elétrico e magnético, sobre a placa em movimento, são dadas por:

$$\hat{z} \times \vec{E}'|_{\text{placa em movimento}} = \vec{0}; \quad \hat{z} \cdot \vec{B}'|_{\text{placa em movimento}} = 0, \quad (3.240)$$

onde $\vec{E}'(t', \vec{r}')$ e $\vec{B}'(t', \vec{r}')$ são os campos elétrico e magnético medidos instantaneamente no referencial co-móvel à placa. Sobre a placa em repouso temos:

$$\hat{z} \times \vec{E}|_{z=L} = \vec{0}; \quad \hat{z} \cdot \vec{B}|_{z=L} = 0. \quad (3.241)$$

Tais condições de contorno, traduzidas em termos dos potenciais vetores $\vec{A}_{||}^E$ e $\vec{A}_{||}^M$, escritos no referencial do laboratório, são, respectivamente [49]:

$$\vec{A}_{||}^E(t, x, y, z = \delta q(t)) = \vec{A}_{||}^E(t, x, y, z = L) = \vec{0} \quad (3.242)$$

e

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \delta \dot{q}(t) \frac{\partial}{\partial t} + O(\dot{q}(t))^2 \right) \vec{A}_{||}^M \right] (t, x, y, z = \delta q(t)) = \vec{0}; \quad (3.243)$$

$$\frac{\partial \vec{A}_{||}^M}{\partial z} (t, x, y, z = L) = \vec{0} \quad (3.244)$$

Em cálculos relacionados com o efeito Casimir dinâmico, a vantagem em trabalharmos com o potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}^M$ em vez de \vec{A}^M , está no fato de que \vec{A}^M possui componente ao longo da direção de movimento (z), resultando em condições de fronteira mais complicadas para a parte transverso-magnética do problema.

A pressão dinâmica sobre a fronteira, através do tensor T_{zz} , é dada por:

$$\frac{F_0}{\mathcal{A}} = \langle 0 | T_{zz}(t, x, y, \delta q^+(t)) - T_{zz}(t, x, y, \delta q^-(t)) | 0 \rangle, \quad (3.245)$$

e requer as soluções das equações da onda para $\vec{A}_{||}^E$ e $\vec{A}_{||}^M$, com as condições de contorno dinâmicas dadas em (3.242) e (3.244). Analogamente ao que foi feito na seção 3.3.1, o problema pode ser resolvido perturbativamente via método Ford-Vilenkin, de modo que as soluções para $\vec{A}_{||}^E$ e $\vec{A}_{||}^M$ podem ser escritas como uma perturbação às soluções estáticas $\vec{A}_{0||}^E$ e $\vec{A}_{0||}^M$, tomadas para o caso das placas em repouso em $z = 0$ e $z = L$:

$$\vec{A}_{||}^E = \vec{A}_{0||}^E + \delta\vec{A}_{||}^E; \quad (3.246)$$

$$\vec{A}_{||}^M = \vec{A}_{0||}^M + \delta\vec{A}_{||}^M. \quad (3.247)$$

O problema então passa a ser encontrar as funções $\delta\vec{A}_{||}^E$ e $\delta\vec{A}_{||}^M$, que satisfazem às seguintes equações e condições de contorno [50]:

$$\begin{aligned} \square\delta\vec{A}_{||}^E(t, \vec{r}) &= \vec{0} \\ \delta\vec{A}_{||}^E(t, x, y, 0) &= -\delta q(t)(\partial_z\vec{A}_{0||}^E)(t, x, y, 0); \quad \delta\vec{A}_{||}^E(t, x, y, z=L) = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.248)$$

$$\begin{aligned} \square\delta\vec{A}_{||}^M(t, \vec{r}) &= \vec{0} \\ (\partial_x\delta\vec{A}_{||}^M)(t, x, y, 0) &= -\left[(\delta q(t)\partial_z^2 + \delta\dot{q}(t)\partial_t)\vec{A}_{0||}^M\right](t, x, y, 0); \quad (\partial_z\delta\vec{A}_{||}^M)(t, x, y, z=L) = \vec{0}. \end{aligned} \quad (3.249)$$

Portanto, o cálculo da força dinâmica de Casimir sobre uma placa condutora em movimento, isolada ou fazendo parte de uma cavidade formada por duas placas paralelas, passa, agora, pelo cálculo de problemas com condições de contorno *estáticas*: um com condições de contorno do tipo Dirichlet para $\delta\vec{A}_{||}^E(t, \vec{r})$ e outro com condições de contorno do tipo Neumann para $\delta\vec{A}_{||}^M(t, \vec{r})$. Tal cálculo com placas condutoras pode ser encontrado em [47, 49, 50]. Possíveis extensões desses trabalhos estão comentadas no último capítulo desta tese.

3.6 Comentários

Gostaríamos de frisar inicialmente que, embora a força dinâmica de Casimir exercida por um campo escalar sem massa, em 1 + 1 dimensões e em seu estado de vácuo ($T = 0$) sobre

uma fronteira móvel dependa da derivada terceira da posição dessa fronteira em relação ao tempo, para o campo escalar sem massa em $3 + 1$ dimensões essa força já depende da derivada quinta. Portanto, forças sobre fronteiras em movimento decorrentes da emissão de radiação induzida por tais fronteiras em movimento podem variar sensivelmente com a dimensão do espaço-tempo.

Quanto à correções térmicas à força de Casimir dinâmica, os poucos resultados existentes na literatura indicam que os efeitos térmicos podem ser muitas ordens de magnitude superiores aos efeitos do vácuo (voltaremos a esse ponto no capítulo final da tese). Vale, no momento, comentar que a presença de \hbar no denominador em (3.220) pode parecer paradoxal, uma vez que no limite $\hbar \rightarrow 0$ temos um resultado divergente, em vez de um resultado nulo. Entretanto esse “limite clássico” tem que ser pensado como um limite de temperatura infinita, para o qual um resultado divergente é esperado.

A fim de estimar a razão entre a força térmica e a força de vácuo, consideremos uma fronteira com movimento prescrito $\delta q(t) = \delta q_0 \cos(\omega_0 t)$, onde δq_0 é a amplitude do movimento e ω_0 a frequência angular. Usando (3.97), (3.220) e (3.221), temos que a razão entre a contribuição térmica e a contribuição de vácuo é dada por $4\pi^2(K_B T / \hbar \omega_0)^2$. À temperatura ambiente e com uma frequência mecânica de 10^8 Hz, a razão é da ordem de 10^{11} ! Isto mostra claramente que os efeitos térmicos podem modificar drasticamente as forças dissipativas sobre fronteiras em movimento, de modo que, para se medir o efeito do vácuo separadamente, é preciso fazer o experimento a baixas temperaturas.

Além do sistema estar imerso num banho térmico, outros tipos de forças dissipativas podem ser geradas se a fronteira encontra-se, por exemplo, imersa num campo em estado comprimido ou ainda em estado coerente. Para o caso de um estado comprimido, pode-se verificar que as forças dissipativas atuando numa fronteira de Dirichlet e numa placa de Neumann não mais coincidem. Isso ocorre, provavelmente, porque no estado comprimido há uma fase de referência e o fato de a condição de contorno ser no campo (Dirichlet) ou na derivada espacial do campo (Neumann) tem ligação com a diferença de fase. Tais resultados originais e cálculos em andamento, assim como vários dos resultados expostos neste capítulo, podem ser encontrados nas referências [107].

Comentários finais e perspectivas

Finalizamos esta tese apresentando um resumo dos resultados nela obtidos, apontando, quando for o caso, as perspectivas de trabalhos futuros, ou seja, mostrando quais são as generalizações ou extensões naturais do que fizemos aqui.

Se tivéssemos que resumir em poucas palavras o conteúdo desta tese, poderíamos dizer que trata-se de um estudo da influência de cavidades formadas por duas placas planas e paralelas em algumas propriedades radiativas de sistemas atômicos (na taxa de emissão espontânea e no desvio Lamb) e também de um estudo do efeito Casimir dinâmico, para o caso de uma única placa em movimento ou uma cavidade oscilante formada por duas placas paralelas (basicamente tratamos de cavidades unidimensionais). Particularmente, fizemos cálculos utilizando condições de Neumann e condições mistas (Dirichlet e Neumann). As condições de Neumann impostas a um campo escalar sem massa simulam situações para o campo eletromagnético de maior interesse. Embora tais condições sejam comuns na literatura do efeito Casimir estático, são raros os artigos em que placas infinitamente permeáveis são utilizadas em EDQ de cavidades ou mesmo efeito Casimir dinâmico, como já comentamos anteriormente.

Calculamos a taxa de emissão espontânea na presença de uma ou duas placas infinitamente permeáveis e ainda duas placas, sendo uma delas infinitamente permeável e outra perfeitamente condutora. Comparando nossos resultados com os existentes na literatura para uma ou duas placas perfeitamente condutoras, observamos que a mudança da condição de placas perfeitamente condutoras para perfeitamente permeáveis implica em diferenças significativas no comportamento da taxa de emissão espontânea. Em todas as configurações citadas, as curvas para a taxa de emissão espontânea apresentam oscilações

com a distância do átomo em relação às placas, mas são diferentes em cada caso. Para os casos de duas placas ocorre ainda a supressão de parte da emissão, que, dependendo das condições de contorno empregadas (ou seja, dos tipos de placas), pode ocorrer para a parte da emissão espontânea associada com o momento de dipolo elétrico perpendicular (\vec{d}_{12}^{\perp}) ou paralelo às placas (\vec{d}_{12}^{\parallel}), conforme vimos no capítulo 1.

Comparando a taxa de emissão espontânea para um átomo que tem na sua vizinhança uma placa infinitamente permeável com a taxa de emissão para o caso onde a placa é infinitamente condutora (figura 1.1), verificamos que, se há um aumento na taxa de emissão espontânea no primeiro caso, haverá uma diminuição na taxa do segundo e vice-versa. Particularmente, os valores dessas respectivas taxas em regiões próximas às placas são muito diferentes: a taxa de emissão cresce próximo às placas perfeitamente permeáveis e decresce próximo às perfeitamente condutoras.

Comparando as taxas de emissão para o caso em que um átomo está entre duas placas infinitamente permeáveis com o caso onde o átomo está entre duas placas infinitamente condutoras (figura 1.3), verificamos novamente que, se há um aumento na taxa de emissão espontânea no primeiro caso, haverá uma diminuição na taxa do segundo e vice-versa. No entanto, vale enfatizar que as curvas para as respectivas taxas em função da distância a uma das placas são, em ambos os casos, simétricas com respeito ao ponto equidistante das placas. Constatamos que, entre placas infinitamente permeáveis, ocorre supressão na parte da taxa de emissão espontânea que está relacionada com \vec{d}_{12}^{\perp} (figura 1.4). Já no caso de duas placas condutoras, a supressão ocorre para a contribuição associada a \vec{d}_{12}^{\parallel} (figura 1.5). Para um átomo localizado em um ponto equidistante das duas placas em ambas configurações, verificamos que as supressões, embora relacionadas com componentes diferentes do momento de dipolo elétrico, ocorrem para a mesma distância entre as placas, a saber, $L = \lambda_0/2$, onde λ_0 é o comprimento de onda de transição dominante.

Comparando as taxas de emissão para o caso de duas placas infinitamente condutoras com o caso de placas mistas, sendo uma infinitamente condutora e outra infinitamente permeável (figura 1.6), as curvas mostradas na figura 1.7 são diferentes, uma vez que os modos do campo de radiação no estado de vácuo em cada caso não são os mesmos. A

ausência de simetria da curva para o caso de placas mistas, em torno de ponto equidistante das placas, era esperado porque neste caso as duas placas correspondem a meios eletromagnéticos distintos, com propriedades diferentes. Constatamos que, entre as placas mistas, ocorre supressão na parte da taxa de emissão espontânea que está relacionada com \bar{d}_{12}^{\perp} (figura 1.8), sendo que, para um átomo localizado em um ponto equidistante das duas placas, verificamos que a supressão ocorre para $L = \lambda_0/4$. Note que para duas placas condutoras, ou mesmo duas placas permeáveis, a supressão ocorre em $L = \lambda_0/2$.

Vários experimentos têm verificado a inibição na taxa de emissão espontânea pela presença de placas condutoras [55, 108, 57]. Nesses experimentos, um feixe de átomos excitados é preparado de tal modo que os momentos de dipolo atômicos estejam estritamente paralelos às placas. Faz-se o feixe passar entre placas condutoras paralelas (por exemplo, de alumínio) e, após a saída, identificam-se os átomos que permaneceram no estado excitado, distinguindo-os dos que sofreram decaimento. Esse processo de identificação se dá por meio da aplicação de um campo elétrico fraco, calibrado de modo a ionizar os átomos mais excitados, sem ionizar os que permaneceram no estado de menor energia, mais fortemente ligados ao núcleo. Tais experimentos comprovam que um átomo excitado localizado entre placas condutoras paralelas, cuja distância entre si é menor que a metade do comprimento de onda de transição atômica dominante, permanece excitado, desde que o dipolo elétrico atômico esteja paralelo às superfícies das placas.

Seria interessante que fosse verificada a dependência da taxa de emissão espontânea com diferentes condições de contorno, particularmente, aquelas impostas por placas permeáveis. Acreditamos que experimentos análogos usando placas permeáveis⁵ sejam factíveis. Entretanto, para o caso de duas placas permeáveis, ou de duas placas, sendo uma permeável e outra condutora, a supressão deve ser verificada desde que os átomos do feixe sejam preparados de tal modo que os seus momentos de dipolo estejam *perpendiculares* às placas. Entre duas placas permeáveis a supressão ocorreria para distâncias entre as placas

⁵Como exemplo de materiais com permeabilidade magnética alta, ditos magneticamente moles, temos a ferrita de Ni-Zn, a ferrita de Mn-Zn e a liga FeNi, cuja concentração mais interessante é a com 80% de Ni, isto é Fe₂₀Ni₈₀.

menores que a metade do comprimento de onda de transição, enquanto para o caso de placas mistas, ocorreria para distâncias menores do que a quarta parte do do comprimento de onda de transição dominante.

Uma das possíveis extensões desse estudo, e talvez de alguma relevância experimental, seria considerar, por exemplo, como ficaria alterada a taxa de emissão espontânea de um átomo que se movimentasse ao longo de um tubo cilíndrico, ou mesmo, num tubo de seção reta retangular. Nesse último caso, as contas seriam uma generalização natural das feitas nesta tese. Inclusive, tomando-se adequadamente os limites para as separações entre as paredes opostas do tubo poderíamos recuperar os resultados obtidos aqui, tendo desse modo um método para verificar a autoconsistência dos cálculos. Várias combinações de condições de contorno poderiam ser estudadas.

Quanto à influência de placas permeáveis no deslocamento Lamb de um átomo localizado entre as placas, verificamos que os deslocamentos nos níveis de energia causados por placas de Casimir resultam negativos, enquanto que os deslocamentos causados por duas placas infinitamente permeáveis resultam positivos (ver tabela em (2.80)). Mesmo os deslocamentos calculados aqui sendo muito pequenos, o desenvolvimento de tecnologias que detectam deslocamentos muito menores que o deslocamento Lamb já permitem que medições sejam feitas.

A extensão desse trabalho para placas mistas (condutora e permeável), já pode ser encontrada na referência [71]. Outra extensão natural e relevante seria incluir os efeitos térmicos, ou seja, recalculando os correlatores a uma temperatura finita. Desse modo, além da presença das placas, estaríamos levando em consideração como a radiação de corpo negro influencia os níveis de energia de um átomo ⁶.

Pode ser interessante ainda, estudar a influência de condições de contorno no deslocamento Lamb muônico, cujo interesse recente está no fato de que uma precisa determinação do raio do próton é possível por meio da medição do deslocamento Lamb (2S-2P) no Hidrogênio muônico ($\mu^- p$). A relativa contribuição das dimensões do próton ao desloca-

⁶A influência da radiação térmica nos níveis de energia do Hidrogênio, mas no espaço livre, estão discutidas por exemplo nas ref(s)[109].

mento Lamb muônico é cerca de 2%, duas ordens de magnitude maior do que no átomo de hidrogênio usual [110].

Além da influência de cavidades na emissão espontânea e no deslocamento Lamb, seria muito interessante também estudar tal influência no momento anômalo do elétron, até porque a medida mais precisa que se tem na EDQ é justamente a medida de $g-2$ (veja a referência [111] para uma revisão atualizada e referências aí contidas). Há vários trabalhos que relacionados com o momento anômalo do elétron entre duas placas paralelas condutoras [112, 113, 114, 115, 116], para citar apenas alguns. Em particular, temos a intenção de analisar a situação tratada por Kreuzer e Svozil [116] e reanalisada por Tang [117], a saber, a de um elétron praticamente livre movendo-se num campo magnético fraco entre duas placas paralelas perfeitamente condutoras, mas agora trocando uma das placas condutoras por uma infinitamente permeável e calcular $g-2$ nessa situação. Pode-se ainda calcular os efeitos de tais placas na massa do elétron, seguindo o procedimento da ref. [116].

Em relação ao efeito Casimir dinâmico, usando um modelo de campo escalar real não massivo em $1 + 1$ dimensões, simulamos as placas permeáveis através de condições de contorno tipo Neumann. Considerando fronteiras com movimento não-relativístico e com pequenas amplitudes, calculamos, utilizando método perturbativo de Ford-Vilenkin [97], a força dinâmica de Casimir em vários casos. Calculamos também a contribuição de temperatura ao efeito Casimir dinâmico.

Para o caso de uma fronteira, verificamos que a força dinâmica de Casimir é a mesma, não importando se impomos a condição de Dirichlet ou a de Neumann sobre a fronteira. Em outras palavras, as flutuações do vácuo oferecem a mesma resistência ao movimento de fronteiras móveis para ambos os tipos de fronteira (vide (3.68) e (3.97)). A contribuição térmica para a força sobre uma fronteira de Neumann também coincide com aquela sobre uma fronteira de Dirichlet dada em (3.200). Ou seja, a força total sobre uma fronteira em $1 + 1$ dimensões é a mesma (devido às flutuações do vácuo e ao plasma de partículas reais em contato com a placa em movimento), não importando se impomos a condição de Dirichlet ou a de Neumann sobre a fronteira.

Para o caso de duas froteiras de Dirichlet, ou duas de Neumann, uma móvel e outra fixa, constatamos que a força dissipativa de Casimir sobre a fronteira móvel será a mesma, dada pela fórmula (3.138). Para o caso de duas fronteiras mistas, sendo a fronteira tipo Dirichlet móvel e a tipo Neumann fixa, a força dissipativa difere da encontrada para o caso de duas fronteiras tipo Dirichlet, ou duas tipo Neumann, e é dada pela expressão (3.170).

Uma das extensões possíveis ao trabalho desta tese refere-se ao o cálculo da força dinâmica de Casimir com placas mistas: uma perfeitamente condutora oscilante e uma perfeitamente permeável fixa. Para esse modelo temos condições de contorno mistas para $\delta\vec{A}_{||}^E$ e $\delta\vec{A}_{||}^M$, dadas por:

$$\delta\vec{A}_{||}^E(t, x, y, 0) = -\delta q(t)(\partial_z\vec{A}_{0||}^E)(t, x, y, 0), \quad (3.250)$$

$$(\partial_z\delta\vec{A}_{||}^E)(t, x, y, z = L) = \vec{0}, \quad (3.251)$$

$$(\partial_z\delta\vec{A}_{||}^M)(t, x, y, 0) = -\left[(\delta q(t)\partial_z^2 + \delta\dot{q}(t)\partial_t)\vec{A}_{0||}^M\right](t, x, y, 0), \quad (3.252)$$

$$\delta\vec{A}_{||}^M(t, x, y, z = L) = \vec{0}. \quad (3.253)$$

Da seção 3.3.5, analisando o modelo em 1 + 1 dimensões com condições mistas, vimos que a força dinâmica de Casimir dissipativa obtida para esse caso difere da obtida para os casos com duas fronteiras de Dirichlet (seção 3.3.3) ou 2 fronteiras de Neumann (seção 3.3.4). A analogia com os modelos unidimensionais dados, revela indícios de que, para o caso de placas mistas, poderemos encontrar alterações na força dinâmica de Casimir, em relação ao caso de duas placas perfeitamente condutoras.

Além da força dinâmica de Casimir e da taxa de produção de fótons com a presença de placas permeáveis, podemos ainda verificar o efeito de temperatura nessas configurações, motivados pelo fato de que, à temperatura finita, o efeito pode ser aumentado em várias ordens de magnitude, tornando sua medição mais próxima de ser realizada, como sugerido em [52]

É interessante mencionar também que para um sistema constituído por duas fronteiras movendo-se com a mesma aceleração, a correção de massa obtida para a cavidade respeita

a relação de Einstein para sistemas compostos, dada por [118]:

$$\Delta E + FL = \Delta mc^2 ,$$

onde, no caso em questão, F é a força de Casimir entre as placas e L , a distância entre elas (veja, por exemplo, as referências [119, 120, 121]).

Outro de nossos objetivos relacionado com o efeito Casimir dinâmico, é o de estudar tal efeito em variedades compactas sem fronteiras, como é o caso da variedade S^1 (o círculo) com o raio variando com o tempo. O objetivo aqui é verificar se há ou não a criação de partículas reais, já que não há fronteiras. Esse problema foi discutido uma única vez na literatura e os resultados não são claros e muito menos, conclusivos [122]

Embora as situações consideradas aqui sejam altamente idealizadas, com placas perfeitamente condutoras ou perfeitamente permeáveis, estas podem ser consideradas como os primeiros passos em direção a situações mais realísticas, nas quais a influência de uma placa com permeabilidade magnética finita sobre a taxa emissão espontânea, o deslocamento Lamb, ou ainda o efeito Casimir dinâmico, possam ser levadas em consideração.

Apêndice A

Demonstração da fórmula (2.48)

A fim de calcular $\int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\Sigma_{\pm}(x, \theta)}{x^3}$, definimos as funções:

$$f_{\pm}(x) := \frac{\Sigma_{\pm}(x, \theta)}{x^3}, \quad (\text{A.1})$$

e reescrevemos a integral em questão como:

$$\int_{\epsilon}^{\infty} dx f_{\pm}(x). \quad (\text{A.2})$$

Estendendo os argumentos das funções f_{\pm} ao plano complexo e generalizando a potência do denominador para $p \in \mathbf{R}$, definimos:

$$f_{\pm}(z, p) := \frac{\Sigma_{\pm}(z, \theta)}{z^p}. \quad (\text{A.3})$$

Considerando a integral:

$$\oint dz f_{\pm}(z, p), \quad (\text{A.4})$$

ao longo do contorno mostrado na figura A.1, observamos que a integral sobre C_{ρ} anula-se para $\rho \rightarrow \infty$. Assim sendo temos:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\infty} dx f_{\pm}(x) &= \lim_{p \rightarrow 3} \int_{\epsilon}^{\infty} dx f_{\pm}(x, p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 3} (1 - e^{-2\pi p i}) \left[\int_{C_{\epsilon}} dz f_{\pm}(z, p) + 2\pi i \sum_{\text{polos}, z \neq 0} \text{Res} f_{\pm}(z, p) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

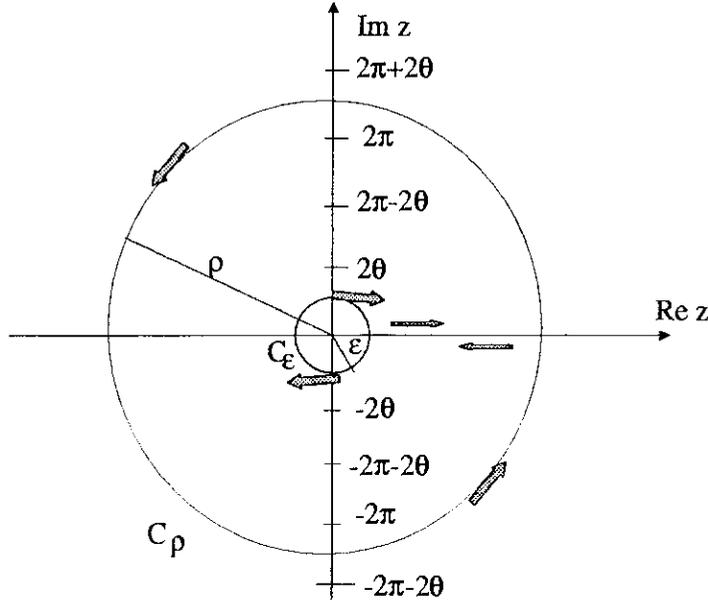


Figura A.1: Contorno escolhido para a integral em A.4.

Considerando a expansão de $\Sigma_{\pm}(\epsilon, \theta)$ em potências de ϵ , escrevemos que:

$$\Sigma_{\pm} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2}(1 \pm 1) + \frac{\epsilon}{4}S_{\pm}(\theta) - \frac{\epsilon^2}{48} \left[\frac{1}{15} \pm F(\theta) \right], \quad (\text{A.6})$$

onde as funções S e F estão dadas, respectivamente, pelas equações (2.49) e (2.63) e $\theta = \pi z/L$. Usando a Eq.(A.6), é direta a verificação de que:

$$\lim_{p \rightarrow 3} (1 - e^{-2\pi p i}) \left[\int_{C_{\epsilon}} dz f_{\pm}(z, p) \right] = \frac{1}{3\epsilon^3} - \frac{1}{4\epsilon^2}(1 \pm 1) + \frac{1}{4\epsilon}S_{\pm} + O(\epsilon). \quad (\text{A.7})$$

Também é direto verificar que:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 3} (1 - e^{-2\pi p i}) \left[2\pi i \sum_{\text{poles}, z \neq 0} \text{Res} f_{\pm}(z, p) \right] \\ = -\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \zeta_R(3) \pm \frac{1}{2} [\zeta_H(3, z/L) + \zeta_H(3, -z/L) + (L/z)^3] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde as funções zeta de Riemann ζ_R e zeta de Hurwitz ζ_H estão definidas em (2.50) e (2.51). Dessa forma, juntando as equações (A.5), (A.7) e (A.8), temos que o resultado (2.48) fica demonstrado.

Apêndice B

Cálculo de funções de correlação

B.1 Demonstração da fórmula (3.61)

Nesta seção iremos calcular a função de correlação $\langle 0 | \{ \partial_x \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x \Phi_0(\omega_2, 0^+) \} | 0 \rangle$ para o caso de uma única placa em movimento sobre a qual o campo escalar se anula, ou seja, satisfaz uma condição de Dirichlet. Nesse caso, tomando a transformada de Fourier do campo $\phi(t, x)$ dado pela Eq.(3.44) e derivando em relação a x , obtemos:

$$\partial_x \Phi_0(\omega, x) = 2i\sqrt{\hbar\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[\delta(\omega - k)a(k) - \delta(\omega + k)a^\dagger(k) \right] \cos(kx)\sqrt{k} dk \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo (B.1) em (3.60), integrando em k e usando que $a(\omega)|0\rangle = 0 = \langle 0|a^\dagger(\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \left\{ \partial_x \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x \Phi_0(\omega_2, 0^+) \right\} | 0 \rangle \\ &= -\frac{4\pi\hbar\omega_1\omega_2}{\sqrt{|\omega_1||\omega_2|}} \langle 0 | \Theta(\omega_1)\Theta(-\omega_2)a(\omega_1)a^\dagger(-\omega_2) + \Theta(-\omega_1)\Theta(\omega_2)a(\omega_2)a^\dagger(-\omega_1) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Usando a relação de comutação $[a(\omega_1), a^\dagger(-\omega_2)] = \delta(\omega_1 + \omega_2)$ obtemos finalmente que:

$$\begin{aligned} C_1(\omega_1, \omega_2) &= \langle 0 | \left\{ \partial_x \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x \Phi_0(\omega_2, 0^+) \right\} | 0 \rangle \\ &= -\frac{4\pi\hbar\omega_1\omega_2}{\sqrt{|\omega_1||\omega_2|}} \left[\Theta(\omega_1)\Theta(-\omega_2) + \Theta(-\omega_1)\Theta(\omega_2) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned}$$

$$= 4\pi\hbar|\omega_1|\delta(\omega_1 + \omega_2), \quad (\text{B.2})$$

resultado apresentado na Eq.(3.61).

B.2 Demonstração das fórmulas (3.92) e (3.93)

Nesta seção iremos calcular as funções de correlação

$$\begin{cases} C_2(\omega_1, \omega_2) := \langle 0 | \{ \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x^2 \Phi_0(\omega_2, 0^+) \} | 0 \rangle \\ C_3(\omega_1, \omega_2) := \langle 0 | \{ \Phi_0(\omega_1, 0^+), \Phi_0(\omega_2, 0^+) \} | 0 \rangle \end{cases}$$

para o caso de uma única placa em movimento sobre a qual a derivada espacial do campo escalar se anula, ou seja, satisfaz uma condição de Neumann. Com o objetivo inicial de obter a transformada de Fourier do campo $\phi(t, x)$, cuja expressão é dada por (3.77), reescrevemos essa expressão como:

$$\phi_0(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{4\hbar\pi} \cos(\omega x) \left[\frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{\omega}} a_\omega + \frac{\Theta(-\omega)}{\sqrt{|\omega|}} a_{-\omega}^\dagger \right] e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.3})$$

que nos permite identificar diretamente a transformada de Fourier $\Phi_0(\omega, x)$:

$$\Phi_0(\omega, x) = \sqrt{4\hbar\pi} \cos(\omega x) \left[\frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{\omega}} a_\omega + \frac{\Theta(-\omega)}{\sqrt{|\omega|}} a_{-\omega}^\dagger \right]. \quad (\text{B.4})$$

Conseqüentemente, temos que:

$$\partial_x^2 \Phi_0(\omega, x) = -\sqrt{4\hbar\pi} \cos(\omega x) \left\{ \omega \sqrt{\omega} \Theta(\omega) a_\omega + |\omega| \sqrt{|\omega|} \Theta(-\omega) a_{-\omega}^\dagger \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Substituindo as duas últimas equações na expressão de $C_2(\omega_1, \omega_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} C_2(\omega_1, \omega_2) &= -4\hbar\pi \langle 0 | \left\{ \Theta(\omega_1) \Theta(-\omega_2) \frac{|\omega_2| \sqrt{|\omega_2|}}{\sqrt{\omega_1}} a_{\omega_1} a_{-\omega_2}^\dagger + \Theta(\omega_2) \Theta(-\omega_1) \frac{\omega_2 \sqrt{\omega_2}}{\sqrt{|\omega_1|}} a_{\omega_2} a_{-\omega_1}^\dagger \right\} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Usando que $\langle 0 | a_\omega a_{\omega'}^\dagger | 0 \rangle = \delta(\omega - \omega')$, a última equação toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_2(\omega_1, \omega_2) &= -4\hbar\pi \delta(\omega_1 + \omega_2) [\Theta(\omega_1) \omega_1 + \Theta(\omega_2) \omega_2] \\ &= -4\hbar\pi \delta(\omega_1 + \omega_2) [-\Theta(-\omega_2) \omega_2 + \Theta(\omega_2) \omega_2] \\ &= -4\hbar\pi |\omega_2| \delta(\omega_1 + \omega_2), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

que é precisamente a expressão escrita em (3.92).

Passemos agora para o cálculo de $C_3(\omega_1, \omega_2)$. Utilizando a equação (B.4) e seguindo um procedimento análogo ao usado no cálculo de $C_2(\omega, \omega_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
C_3(\omega_1, \omega_2) &= \frac{4\hbar\pi}{\sqrt{|\omega_1|\omega_2}} \Theta(\omega_1)\Theta(-\omega_2)\langle 0|a_{\omega_1}a_{-\omega_2}^\dagger|0\rangle + \frac{4\hbar\pi}{\sqrt{|\omega_2|\omega_1}} \Theta(\omega_2)\Theta(-\omega_1)\langle 0|a_{\omega_2}a_{-\omega_1}^\dagger|0\rangle \\
&= 4\hbar\pi \delta(\omega_1 + \omega_2) \left[\frac{\Theta(\omega_1)}{\omega_1} + \frac{\Theta(\omega_2)}{\omega_2} \right] \\
&= 4\hbar\pi \delta(\omega_1 + \omega_2) \left[\frac{\Theta(\omega_1)}{\omega_1} - \frac{\Theta(-\omega_1)}{\omega_1} \right] \frac{4\hbar\pi}{|\omega_1|} \delta(\omega_1 + \omega_2),
\end{aligned} \tag{B.7}$$

que é precisamente a expressão escrita em (3.93).

B.3 Demonstração da fórmula (3.190)

Nesta seção calcularemos o correlator térmico $\sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) := \langle \{ \partial_x \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x \Phi_0(\omega_2, 0^+) \} \rangle_\beta$ para o caso em que o campo $\Phi_0(\omega, x)$ satisfaz a condição de contorno de Dirichlet na placa em $x = 0$, isto é, $\Phi_0(\omega, 0) = 0$. Usando a Eq. (B.1) para o operador de campo $\partial_x \Phi_0(\omega, x)$, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) &= \sqrt{4\hbar\pi} \left\langle \left(\sqrt{|\omega_1|} \Theta(\omega_1) a(\omega_1) - \frac{\omega_1}{\sqrt{|\omega_1|}} \Theta(-\omega_1) a^\dagger(-\omega_1) \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sqrt{|\omega_2|} \Theta(\omega_2) a(\omega_2) - \frac{\omega_2}{\sqrt{|\omega_2|}} \Theta(-\omega_2) a^\dagger(-\omega_2) \right) \right\rangle_\beta + \langle \omega_1 \longleftrightarrow \omega_2 \rangle_\beta.
\end{aligned}$$

Devido ao traço (elementos diagonais), as contribuições que contêm termos do tipo aa ou $a^\dagger a^\dagger$ são nulas, resultando:

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) &= -4\hbar\pi \left\langle \sqrt{\frac{|\omega_1|}{|\omega_2|}} \omega_2 \Theta(\omega_1) \Theta(-\omega_2) a(\omega_1) a^\dagger(-\omega_2) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}} \omega_1 \Theta(\omega_2) \Theta(-\omega_1) a^\dagger(-\omega_1) a(\omega_2) \right\rangle_\beta + \langle \omega_1 \longleftrightarrow \omega_2 \rangle_\beta.
\end{aligned}$$

Usando então que:

$$\begin{cases} \langle a(\omega_1) a^\dagger(-\omega_2) \rangle_\beta = (\bar{n}(\omega_1) + 1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\ \langle a^\dagger(-\omega_1) a(\omega_2) \rangle_\beta = \bar{n}(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \end{cases}, \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\bar{n}(\omega) := \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

e reorganizando os termos, obtemos:

$$\sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) = 4\pi\hbar \left[\omega_1 \Theta(\omega_1) (1 + 2\bar{n}(\omega_1)) + \omega_2 \Theta(\omega_2) (1 + 2\bar{n}(\omega_2)) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2), \quad (\text{B.9})$$

que é precisamente o resultado mostrado em (3.190).

B.4 Demonstração das fórmulas (3.204) e (3.205)

Nesta seção vamos calcular o correlator térmico $\Sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) := \langle \{ \Phi_0(\omega_1, 0^+), \partial_x^2 \Phi_0(\omega_2, 0^+) \} \rangle_\beta$, onde o campo Φ_0 satisfaz agora a condição de contorno de Neumann em $x = 0$, ou seja, $\partial_x \Phi_0(\omega, 0) = 0$. Usando a Eq.(B.4) para o operador de campo $\Phi_0(\omega, x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) &= 4\pi\hbar \frac{\Theta(\omega_1)\Theta(-\omega_2)\omega_2^2}{\sqrt{|\omega_1|\omega_2|}} \langle a_{\omega_1} a_{-\omega_2}^\dagger \rangle_\beta \\ &+ 4\pi\hbar \frac{\Theta(-\omega_1)\Theta(\omega_2)\omega_2\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{|\omega_1|}} \langle a_{-\omega_1}^\dagger a_{\omega_2} \rangle_\beta + \left\{ \omega_1 \longleftrightarrow \omega_2 \right\}, \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

onde usamos que $\langle a_{\omega_1} a_{\omega_2} \rangle_\beta = 0 = \langle a_{\omega_1}^\dagger a_{-\omega_2}^\dagger \rangle_\beta$. De (B.8) e reorganizando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_\beta(\omega_1, \omega_2) &= 4\pi\hbar \omega_1 \Theta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) (1 + \bar{n}(\omega_1)) + 4\pi\hbar \omega_2 \Theta(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \bar{n}(\omega_2) + \left\{ \omega_1 \longleftrightarrow \omega_2 \right\} \\ &= 4\pi\hbar \left[\omega_1 \Theta(\omega_1) (1 + 2\bar{n}(\omega_1)) + \omega_2 \Theta(\omega_2) (1 + 2\bar{n}(\omega_2)) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2), \end{aligned}$$

que é precisamente a Eq.(3.204).

Como um teste de consistência, note que no limite $T \rightarrow 0$, esse resultado se reduz ao encontrado na Eq.(B.6) para $C_2(\omega_1, \omega_2)$.

Calculemos agora o correlator térmico $\Gamma_\beta(\omega_1, \omega_2) := (\{\Phi_0(0^+, \omega_1), \Phi_0(0^+, \omega_2)\})_\beta$. Usando novamente a expressão (B.4) para o operador de campo $\Phi_0(\omega, x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta(\omega_1, \omega_2) &= 4\pi\hbar \frac{\Theta(\omega_1)\Theta(-\omega_2)}{\sqrt{|\omega_1\omega_2|}} \langle a_{\omega_1} a_{-\omega_2}^\dagger \rangle_\beta \\ &+ 4\pi\hbar \frac{\Theta(-\omega_1)\Theta(\omega_2)}{\sqrt{|\omega_1\omega_2|}} \langle a_{-\omega_1}^\dagger a_{\omega_2} \rangle_\beta + \left\{ \omega_1 \longleftrightarrow \omega_2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Usando as equações escritas em (B.8) e reorganizando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta(\omega_1, \omega_2) &= \frac{4\pi\hbar}{\omega_1} \Theta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \left(1 + \bar{n}(\omega_1)\right) \\ &+ \frac{4\pi\hbar}{\omega_2} \Theta(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \bar{n}(\omega_2) + \left\{ \omega_1 \longleftrightarrow \omega_2 \right\} \\ &= 4\pi\hbar \left[\frac{\Theta(\omega_1)}{\omega_1} \left(1 + 2\bar{n}(\omega_1)\right) + \frac{\Theta(\omega_2)}{\omega_2} \left(1 + 2\bar{n}(\omega_2)\right) \right] \delta(\omega_1 + \omega_2), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

que é precisamente a Eq.(3.205). Observe aqui também que no limite $T \rightarrow 0$, esse resultado se reduz ao dado pela Eq.(B.7) para o correlator $C_3(\omega_1, \omega_2)$.

Apêndice C

Uso de funções de Green na solução de equações homogêneas

Normalmente, as funções de Green são muito utilizadas na obtenção de soluções particulares de equações diferenciais não homogêneas. No entanto, elas podem ser úteis também na obtenção de soluções de equações diferenciais homogêneas, mas sujeitas a certas condições de contorno. Neste apêndice, ilustraremos o método num exemplo bem simples, a saber: para o caso do campo $\delta\Phi(\omega, x)$ que aparece em problemas de uma cavidade unidimensional como aqueles que foram discutidos nas seções 3.3.3 e 3.3.4. É bem verdade que nesse exemplo o uso de funções de Green não é o caminho mais curto para a solução da equação diferencial, mas esse procedimento pode ser muito conveniente no estudo do efeito Casimir Dinâmico em três dimensões (veja por exemplo a ref. [50]).

Tomemos como ponto de partida a identidade (teorema de Green em uma dimensão):

$$\int_{x_1}^{x_2} (\chi \partial_x^2 \psi - \psi \partial_x^2 \chi) dx = \left\{ \chi \partial_x \psi - \psi \partial_x \chi \right\}_{x_1}^{x_2}. \quad (\text{C.1})$$

Escolhendo $\chi = \delta\Phi(\omega, x)$, onde esse campo satisfaz a equação diferencial

$$\left(\partial_x^2 + \omega^2 \right) \delta\Phi(\omega, x) = 0 \quad (\text{C.2})$$

e tem seus valores conhecidos em $x = 0$ e $x = L$, dados respectivamente por $\delta\Phi(\omega, 0)$ e $\delta\Phi(\omega, L) = 0$ e escolhendo $\psi = G(\omega, x, x')$, onde G é a função de Green que satisfaz a

equação diferencial (deixamos para impor as condições de contorno sobre G mais adiante para que fique claro a conveniência da escolha)

$$\left(\partial_x^2 + \omega^2\right)G(\omega, x, x') = \delta(x - x'), \quad (\text{C.3})$$

temos formalmente que:

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta\Phi(\omega, x) \left[-\omega^2 G(\omega, x, x') + \delta(x - x') + \omega^2 G(\omega, x, x') \right] \\ = \left\{ \delta\Phi(\omega, x) \partial_x G(\omega, x, x') - G(\omega, x, x') \partial_x \delta\Phi(\omega, x) \right\}_0^L, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\omega, x') = \delta\Phi(\omega, L) \partial_x G(\omega, L, x') - \partial_x \delta\Phi(\omega, L) G(\omega, L, x') \\ - \delta\Phi(\omega, 0) \partial_x G(\omega, 0, x') + \partial_x \delta\Phi(\omega, 0) G(\omega, 0, x'). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Uma vez que no exemplo escolhido para ilustrar esse método $\delta\Phi(\omega, L) = 0$, o primeiro termo do lado direito da última equação é nulo. No entanto, nada foi dito ainda a respeito das condições de contorno sobre a função de Green. A escolha dessas condições de contorno dependerá do problema em questão. No caso em consideração, estamos supondo que, além de $\delta\Phi(\omega, L) = 0$, $\delta\Phi(\omega, 0)$ também seja conhecido. Analisando a equação anterior, concluímos que uma escolha conveniente é dada por:

$$G(\omega, 0, x') = 0 = G(\omega, L, x'). \quad (\text{C.5})$$

Com essa escolha, a Eq.(C.4) reduz-se a:

$$\delta\Phi(\omega, x') = -\delta\Phi(\omega, 0) \partial_x G^D(\omega, 0, x'), \quad (\text{C.6})$$

onde definimos a função de Green sob condições de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} \left(\partial_x^2 + \omega^2\right)G^D(\omega, x, x') = \delta(x - x') \\ G^D(\omega, 0, x') = 0 = G^D(\omega, L, x') \end{cases}. \quad (\text{C.7})$$

Utilizando o método das imagens, a solução para $G^D(\omega, x, x')$ pode ser escrita na forma:

$$G^D(\omega, x, x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[G^{(0)}(\omega, x - x' + 2nL) - G^{(0)}(\omega, x + x' + 2nL) \right], \quad (\text{C.8})$$

onde $G^{(0)}(x, x')$ satisfaz a equação diferencial: $(\partial_x^2 + \omega^2)G^{(0)}(\omega, x, x') = \delta(x - x')$, mas sem estar sujeita a quaisquer condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$.

OBS: A função de Green $G^D(\omega, x, x')$ pode também ser expressa por:

$$G^D(\omega, x, x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{L} \frac{\text{sen}(n\pi x'/L)\text{sen}(n\pi x/L)}{\omega^2 - (n\pi/L)^2}. \quad (\text{C.9})$$

Voltando à Eq.(C.8), não é difícil mostrar que:

$$G^{(0)}(\omega, x, x') = \mp i \frac{e^{\pm i(\omega \pm i\varepsilon)|x-x'|}}{2(\omega \pm i\varepsilon)}, \quad (\text{C.10})$$

onde a escolha de usar $+i\varepsilon$ ou $-i\varepsilon$ implica na função de Green ser, respectivamente, retardada ou avançada. Substituindo a expressão para $G^{(0)}$ retardada ($+i\varepsilon$) dada por (C.10) em (C.8) e fazendo algumas manipulações, obtemos:

$$\delta\Phi(\omega, x') = \left[\left(1 + \sum_{n>0} e^{2i(\omega+i\varepsilon)nL} \right) e^{i(\omega+i\varepsilon)x'} - \left(\sum_{n>0} e^{2i(\omega+i\varepsilon)nL} \right) e^{-i(\omega+i\varepsilon)x'} \right]. \quad (\text{C.11})$$

Levando em conta na equação anterior que:

$$\sum_{n>0} e^{2i(\omega+i\varepsilon)nL} = \frac{1}{1 - e^{2i(\omega+i\varepsilon)L}}, \quad (\text{C.12})$$

é direto verificar que:

$$\delta\Phi(\omega, x') = \delta\Phi(\omega, 0) \frac{\text{sen}[\omega(L - x')]}{\text{sen}(\omega L)}, \quad (\text{C.13})$$

resultado escrito em (3.102).

Referências Bibliográficas

- [1] P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, San Diego 1994.
- [2] S. Haroche, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches Summer School, Session LIII, edited by J. Dalibard, J.-M. Raymond, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [3] *Cavity Quantum Electrodynamics*, ed. Paul R. Berman (Academic Press, 1994).
- [4] J. M. Raymond, M. Brune e S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [5] A.M. Steane e E.M. Lucas, *Fortschr. Phys.* **48**, 839 (2000).
- [6] J.F. Poyatos, J.I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Scripta* **T86**, 72 (2000).
- [7] E. Purcell, *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946).
- [8] H. B. G. Casimir and D. Polder, *Phys. Rev.* **73**, 360 (1948).
- [9] H.B.G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793 (1948).
- [10] D. Tabor e R.H.S. Winterton, *Nature* **219** (1968), 1120.
- [11] C.I. Sukenik, M.G. Boshier, D. Cho, V. Sanglokar e E.A. Hinds, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 560.
- [12] M. J. Sparnaay, *Physica* **24**, 751 (1958).
- [13] S. K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997)

- [14] U. Mohideen e A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998); Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [15] A. Roy e U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [16] A. Roy, C.-Y. Lin, e U. Mohideen, Phys. Rev. D**60**, 111101(R) (1999).
- [17] B.W. Harris, F. Chen e U. Mohideen, Phys. Rev. A**62** (2000), 052109.
- [18] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, F. Capasso, Science **291**, 1941 (2001).
- [19] M. Bordag, U. Mohideen e V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1-205 (2001).
- [20] K.A. Milton, Ann. Phys. (N.Y.) **150** (1983), 432.
- [21] K. Johnson, Acta Phys. Polonica **B6**, 865 (1975); Sci. Am. **241**, 112 (1979);
- [22] V. M. Mostepanenko e N. N. Trunov, Sov. Phys. Usp., **31** 965 (1988).
- [23] P. C. W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975).
- [24] W. G. Unruh, Phys. Rev. D**14**, 870 (1976).
- [25] J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **91** , 6473 (1994); J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90**, 7285 (1993); J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90**, 4505 (1993); J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90**, 2105 (1993); J. Schwinger, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90**, 958 (1993);
- [26] S. Hilgenfeldt, S. Grossmann e D. Lohse, Nature **38**, 402 (1999).
- [27] C. Eberlein, Phys. Rev. Lett. **76**, 3842 (1996); C. Eberlein, Phys. Rev. A **53**, 2772 (1996); C. Eberlein, Phys. Rev. Lett. **77**, 4691 (1996);
- [28] R. Golestanian e M. Kardar, Rev. Mod. Phys. **71**, 1233 (1999);
- [29] D. A. R. Dalvit e P. A. Maia Neto, Phys.Rev.Lett. **84**, 798 (2000)

- [30] A. Einstein, *Z. Physik* **18**, 121 (1917).
- [31] T.H. Boyer, *Phys. Rev. A* **9**, 2078 (1974).
- [32] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. Tenório, *Braz. J. Phys.* **29**, 371 (1999).
- [33] F.C. Santos, A. Tenorio e A.C. Tort, *Phys. Rev. D* **60**, 105 022 (1999).
- [34] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A.C. Tort, *Phys. Lett. B* **446**, 170 (1999).
- [35] K. Scharnhorst, *Phys. Lett. B*, **236**, 354 (1990);
- [36] H. Morawitz, *Phys. Rev.* **187**, 1792 (1969).
- [37] K.H. Drexhage, *Sci. Am.* **222**, 108 (March 1970).
- [38] P. Goy, J.M. Raimond, M. Gross e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **50** 1903 (1983).
- [39] G. Barton, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A320**, 251 (1970).
- [40] G. Barton, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A410**, 141 (1987); **A410**, 175 (1987).
- [41] M.R. Philpott, *Chem. Phys. Lett.* **19**, 435 (1973).
- [42] P.W. Milonni and P.L. Knight, *Opt. Commun.* **9**, 119 (1973).
- [43] C.A. Lütken and F. Ravndal, *Phys. Rev.* **A31**, 2082-2090 (1985).
- [44] W. Jhe, *Phys. Rev.* **A43** 5795-5803 (1991).
- [45] W. Jhe, *Phys. Rev.* **A44** 5932-5937 (1991).
- [46] N. Nha and W. Jhe, *Phys. Rev.* **A54** 3505-3513 (1996).
- [47] P. A. Maia Neto, *J. Phys. A* **27**, 2167 (1994);
- [48] P. A. Maia Neto e L. A. S. Machado, *Braz. J. Phys.* **25**, 324 (1995);
- [49] P. A. Maia Neto e L. A. S. Machado, *Phys. Rev. A* **54**, 3420 (1996);

- [50] D. F. Mundarain e P. A. Maia Neto , Phys. Rev. A **57** , 1379 (1998);
- [51] G. Plunien, R. Schützhold and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **84**, 1882 (2000).
- [52] G. Plunien, R. Schützhold and G. Soff, *Quantum radiation at finite temperature*, quant-ph/0105118.
- [53] A. Lambrecht, M.-T. Jaekel e S. Reynaud, Europhys. Lett. **43**, 147 (1998).
- [54] Serge Haroche and Daniel Kleppner, Physics Today **january**, 24 (1989).
- [55] Hulet, Hilfer and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **55**, 2137 (1985).
- [56] Gerald Gabrielse e Hans Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **55** 67 (1985).
- [57] F. DeMartini, G. Innocenti, G. R. Jacobovitz, P. Mataloni, Phys. Rev. Lett. **59**, 2955 (1987).
- [58] E. A. Hinds, in *Advances in Atomic and Molecular Physics*, Vol **20**, eds. D. Bates and B. Bederson (Academic Press, New York, 1990).
- [59] T.W. Marshall, Proc. R. Soc. A **276** (1963), 475.
- [60] T.H. Boyer, Scientific American, Agosto de 1985.
- [61] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina and A. Tenório, Braz. J. Phys. **29** 371, (1999);
- [62] F.C. Santos, A. Tenório and A. C. Tort Phys. Rev. D **60**, 105022 (1999).
- [63] V. Hushwater, Am. J. Phys. **65**, 1627 (1997).
- [64] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F.C. Santos and A.C. Tort, Phys. Lett. B **446**, 170 (1999).
- [65] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, J. Phys. A **32**, 4463 (1999).
- [66] L.H. Ford, N.F. Svaiter and Marcelo L. Lyra, Phys. Rev. **A49**, 1378 (1994).

- [67] H. Moysés Nussensveig, notas de aula do curso de *Mecânica Quântica II*.
- [68] L. C. de Albuquerque e R. M. Cavalcanti, Phys. Rev. D 65, 045004 (2002).
- [69] D.T. Alves, C. Farina e A.C. Tort, Phys. Rev. A, **61**, 034102 (2000); Anais do XX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - S. Lourenço (1999);
- [70] W.E. Lamb, Jr. e R.C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [71] D.T. Alves, F. Barone, C. Farina e A.C. Tort, submetido para publicação ao Phys. Rev. A; Anais do XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - S. Lourenço (2001);
- [72] H. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
- [73] W. Pauli, Z. Physik 26 (1926), 336 (em alemão).
- [74] W.V. Houston, Phys. Rev. **51**, 446 (1937).
- [75] R.C. Williams Phys. Rev. **54**, 558 (1938).
- [76] W.E. Lamb, Jr. e R.C. Retherford, Phys. Rev. **86**, 1014 (1952).
- [77] G.L. Ni, H. B. Wang, J. Yan J e H. L. Li, High energy Physics and Nuclear Physics-Chinese Edition, Vol 24, 5, 400-407 (2000)
- [78] H. A. Behte, em From a Life of Physics, ed. A. Salam e al (World Scientific, Singapore, 1989).
- [79] G.W. Ford e W. von Waldenfels, Am. J. Phys. **66**, 975 (1998).
- [80] P. A. M. Dirac, *From a Life of Physics*, editado por A. Salam et al (World Scientific, Cingapura, 1989).
- [81] R.P. Feynman, *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics*, seminário relativo ao recebimento do prêmio Nobel de 1965, compartilhado com J. Schwinger e Tomonaga, publicado na revista *Physics Today*, Agosto de 1966.

- [82] G.W.F. Drake, *Adv. At. Mol. Phys.* **18**, 399 (1982).
- [83] T.A. Welton, *Phys. Rev.* **74**, 1157 (1948).
- [84] R.P. Feynman, *Solvay Institute Proceedings* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1961), pag. 76.
- [85] Edwin A. Power, *Am. J. Phys.* **34**, 516 (1966).
- [86] F. London, *Trans. Faraday Soc.* **63**, 245 (1930).
- [87] E. Power, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A292**, 424 (1966).
- [88] E.A. Power e T. Thirunamachandran, *Phys. Rev. A* **25**, 2473 (1982).
- [89] C.A. Lütken e F. Ravndal, *Phys. Scr.* **28**, 209 (1983).
- [90] C.A. Lütken e F. Ravndal, *Phys. Rev.* **A31**, 2082 (1985).
- [91] Il-Tong Cheon, *Phys. Rev. A* **37**, 2785 (1988).
- [92] A.S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, (1965).
- [93] H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **98 B**, 447 (1981).
- [94] M. B. Voloshin, *Nucl. Phys. B* **154**, 365 (1979).
- [95] G. T. Moore, *J. Math. Phys.* **11**, 2679 (1970).
- [96] S. A. Fulling e P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. London* **A 348**, 393 (1976).
- [97] L. H. Ford e A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **25**, 2569 (1982).
- [98] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 87 (1986).
- [99] Marc-Thierry Jaekel and Serge Reynaud, *Phys. Lett. A* **172**, 319 (1993).
- [100] V.V. Dodonov, A.B. Klimov and D.E. Nikonov, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **34**, 2742 (1993).

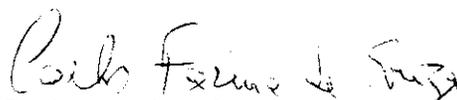
- [101] V.V. Dodonov, J. Phys. A **31**, 9835 (1998).
- [102] Patrick Hays, Annals of Physics 121 (1979), 32.
- [103] L.S. Brown e G. J. Maclay, Phys. Rev. **184**, 1272 (1969);
- [104] George B. Arfken e Hans J. Weber, "Mathematical Methods for Physicists", 4a edição, Academic Press, Nova York, 1995, pg 341.
- [105] M. T. Jaeckel e S. Reynaud, J. Phys. I (France) **2**, 149 (1992);
- [106] M. Krech e S. Dietrich, Phys. Rev. **A46**, 1886 (1992).
- [107] D.T. Alves, C. Farina, L.A. Machado, P.A. Maia Neto e A.C. Tort, em fase final de redação; D.T. Alves, C. Farina, P.A. Maia Neto e A.C. Tort, Anais do XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - S. Lourenço (2000); D.T. Alves, C. Farina, P.A. Maia Neto e A.C. Tort, Anais do XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos - S. Lourenço (2001);
- [108] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **58**, 666 (1987).
- [109] E. Yorke, Am. J. Phys. **51**, 16 (1983).
- [110] F. Kottmann e al. em *Quantum Electrodynamics and Physics of the Vacuum*, editado por G. Cantatore (American Institute of Physics) (2001).
- [111] V.W. Hughes e T. Kinoshita, Rev. Mod. Phys. **71** S133 (1999).
- [112] G. Barton e H. Grotch, J. Phys. **A10** (1977) 1201.
- [113] E. Fischbach e N. Nakagawa, Phys. Rev. **D30**
- [114] D.G. Boulware, L.S. Brown e T. Lee, Phys. Rev. **D32** (1985) 729.
- [115] M. Bordag, Phys. Lett. **B171** (1986) 133.

- [116] M. Kreuzer e K. Svozil, *Phys. Rev D* **34** (1986) 1429.
- [117] Andrew C. Tang, *Phys. Rev D* **36** (1987) 2181.
- [118] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Dover Publications, Inc. Nova York, 1981 (tradução autorizada da edição de 1958 da Pergamon Press, Ltd.)
- [119] M. Jaeckel e S. Reynaud, *J. Phys. I France* **3** 1093 (1993).
- [120] L.A. Machado e P.A. Maia Neto, *Phys. Rev. D* **65** (2002), 125005.
- [121] Tese de doutorado de L. A. Machado, Instituto de Física - UFRJ, em fase final de redação.
- [122] Y. Nagatami, *Phys. Rev. A*, **62** 022117 (2000).

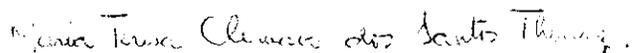
“INFLUÊNCIA DE PAREDES MAGNETICAMENTE PERMEÁVEIS EM ALGUNS EFEITOS DO VÁCUO QUÂNTICO”

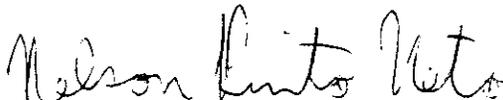
Danilo Teixeira Alves

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Carlos Farina de Souza – Presidente


Henrique Boschi Filho


Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomas


Nelson Pinto Neto


Sebastião Alves Dias


Itzhak Roditi - Suplente

Rio de Janeiro, 19 de julho de 2002