

TESE DE  
DOUTORADO

Supersimetria Estendida em Teorias de *Gauge*  
Planares: Auto-Dualidade sob Acoplamento  
Não-Mínimo

ÁLVARO LUIS MARTINS DE ALMEIDA NOGUEIRA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF.

RIO DE JANEIRO, OUTUBRO DE 2002.

*Para Renata*

# Agradecimentos

- Registro o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq/MCT, à Pós-Graduação do CBPF. e. neste contexto, agradeço por ter sido destinatário específico de financiamento, na forma de Bolsa de Doutorado, em parte do programa - setembro de 1996 a fevereiro de 2000 - que agora se conclui.
- Mais que os devidos agradecimentos, o reconhecimento ao trabalho competente e à dedicação inigualável à Pós-Graduação do CBPF. Pouco se faria sem ela, e nada deveria ser feito sem ela. Minha gratidão a Myriam Simões Coutinho.
- às caríssimas Rosângela, Elizete e Beth, pelo carinho e eficiência com que nos tratam e às nossas solicitações, quase sempre “urgentes”, mal especificadas e desesperadas. E pelo ambiente delicioso que criaram na secretaria do DCP (CCP, “modernamente”...). À D. Regina, rainha da casa, como bem a batizaram. A Rosa, Vera, Baiano, Socorro, Valéria, Emil e a todos da Biblioteca, a Denise Coutinho, ao Couto, e em especial ao Joaquim, “Betinho”, minha gratidão e reconhecimento.
- a Mario e Myriam Giambiagi, pelo afeto e constante chamamento ao debate, à informação, à opinião, à cidadania. E pelo exemplo de dignidade e coragem.
- a Marcony Cunha, pela valiosa colaboração na primeira parte do trabalho, e a Hugo Christiansen, também por isto, mas sobretudo pela amizade, pela confiança, pelo esforço em apoiar-me na minha luta, eterna, contra a auto-crítica paranóica. Gracias, Don Hugo.

- a Manoel Messias Ferreira Jr. e Humberto Belich Jr.. os ventos do norte que movem o moinho de minha consciência adormecida pela tolerância divergente, frequentemente mal regularizada, imprópria. Pela amizade de vocês, que me empresta algum valor.
- ao Departamento de Teoria de Campos e Partículas (ou Coordenação, se isto de fato for relevante). Às pessoas que definem esta Escola, este Espírito, esta Vocação, mais que meus agradecimentos, entrego minha homenagem. A Helayël e Tião, que hão de *ler*, mais à frente, justiça e gratidão, aos irmãos Leonardo de Moraes (Léozinho), Thales Soares, Wesley Spalenza, Roger Nicholas Barreto Cage Ribeiro (meu Chefe), Gustavo Barbosa, Gilmar Dias, Lucio Fassarela, Augusto (Nobre pessoa), Leonardo de Assis, Edison da Graça, Prof. Valter, Gabriel Lemos, Ricardo Scherer, Ricardo Sibanto, Valéria Batista, Cristine, Maria Beatriz Maia Porto, Renato Santiago, Marcia Moutinho, Cresus Godinho, Prof. Alexander Smith, Guillermo Cuba, Rafael Rodrigues, Marco Kneipp, Patrick Brockill (watch your back!), Prof. Gomes (estes últimos dois, também pela sugestão de método: deu certo!!) e a todos a quem eu, além de agradecer, peço perdão pela indelicadeza de não citar;  
aos DCPinos de sempre, meus compadres e guias, Winder de Moura Melo, José Luis Boldo, André Penna-Firme, Guilherme Peixoto. E a Ronaldo Rodrigues, por tantas aulas que eu ainda não pude retribuir;  
ao parceiro de todos nós, alegria e generosidade encarnadas, ao talento de Álvaro Ferreira.

- a Oswaldo Del Cima e Marco Antônio de Andrade, primeira geração da parceria que define nossa comunidade. E a Marcelo Botta Cantcheff, exemplo de amizade, de vocação e de consciência.
- à comunidade do Grupo de Física Teórica José Leite Lopes, pela sua própria identidade, pela demonstração concreta de que competência, fraternidade, solidariedade, postura crítica e generosidade não só são compatíveis como indissociáveis, filhas do mesmo ventre libertário que há de nos multiplicar. Pelo ambiente de trabalho maravilhoso, pela infra-estrutura de rede mais eficiente que já percebi, pelo carinho. Minhas reverências à Rainha Cristina, Mestre Danilo, Fred, Fábio, André. German Egas, Pipo, Débora, Marcelo, Daniel, Franklin, Thales, Letícia, Luciana, Pierre e a todos os que vivem em nossa comunhão de espírito. Aos meus mestres e companheiros de ofício, Mauro e Margarida Negrão, Luis Paulo Colatto, Antonio Scarpelli, José Luiz Acebal, German Gómez, e à nossa referência, Dr. Nelson Panza. A André Botelho, que nos contempla com sua competência e atenção, e aos irmãos Marco Antônio dos Santos, Ion Vancea e Karim Helayël.
- aos meus alunos. Obrigado pela honra de poder estender humilde tapete à passagem de vossos ideais e expectativas. Perseverar, sempre. Não há medida que vos contenha, nem juiz que vos defina. A construção é vossa.
- a Anibal O. Caride. Minha homenagem ao seu talento, ao seu trabalho, à sua singular habilidade, que a história testemunha e eu exclamo, em fazer conviver rigor, excelência e diálogo, na percepção ótima do ambiente que define uma Pós-

Graduação. E pela estranha, mas carinhosa insistência, compartilhada com Suzana Caride, em confiar na minha improvável capacidade.

- à Associação de Pós-Graduandos José Leite Lopes e ao seu patrono, Prof. José Leite Lopes. Obrigado aos colegas pós-graduandos pelo convívio e pela oportunidade de participar de uma comunidade que mantém as referências da honestidade intelectual, da afirmação de princípios e do amplo e constante debate como elementos indispensáveis à permanente construção de uma sociedade civilizada. E pela in-submissão de espírito, como resposta a um ambiente em que proliferam cinismo e conveniências. De nós, espere-se discussão, sempre, concordância, se merecida, mas rendição, nunca.
- a meu irmão Marcelo Carvalho. Distante hoje, próximo sempre.
- a meu amigo e parceiro na construção deste trabalho, a seu talento e perspicácia notáveis; minha gratidão ao meu auto-mútuo-co-orientador, Dr. Leon R. Ururahy Manssur.
- a Sebastião Alves Dias, Tião bastião da competência, dignidade e coragem. Amigo singular, exemplo de professor/pesquisador, pronto a desbravar o texto avançado e a contestar o verbo reacionário, e a nos emprestar referência de atitude científica. Tô de olho, caríssimo, quem sabe eu aprendo.
- a José Abdalla Helayël-Neto. Professor, Amigo, Pai, Irmão, Espírito, Escola. Tenho o privilégio de testemunhar e conviver com sua competência científica ímpar, sua

capacidade de trabalho absolutamente sem paralelo, sua entrega total à formação de juízo crítico, competências e autonomia intelectual, não só para novos pesquisadores, mas também para *qualquer* ser humano que dele se aproxime com fome de conhecer. José Helayël *define* o ideal de professor, de pesquisador, de homem de ciência, de cidadão, e tem reconhecimento pleno, ao qual acrescento meu entusiasmo, de *todos* os que vivenciaram seu trabalho. Humildade. grandeza e generosidade singulares, manifestando-se em mútua ressonância, simplificando-nos o caminho. Isto se verá, em breve, em todo lugar. Obrigado, José.

- a Maurício e Leda Del Giudice, irmão e segunda mãe, pela paciência com minhas inconstâncias e pela contribuição à clareza de minhas idéias, com questionamentos pertinentes e centrais. Obrigado também à Fátima e a todos da família Azevedo Lima, pelo delicioso, acolhedor e generoso convívio. Às caras Iraíldes e Terezinha, obrigado por tudo.
- a meus familiares, tios e tias, ao meu irmão Thomas e às minhas irmãs, Ticha e Tininha, acompanhando meu caminho turbulento com convicção, amor, e, eventualmente, um terço na mão, para ajudar a resistir ao “esse não tem jeito...”.
- a meus pais, Álvaro e Sonia, que se entregaram, e ainda se entregam, sem limites, à tarefa de educar e proteger este ser incorrigível. Obrigado por tudo, que é tudo mesmo.
- à minha luz, minh'alma, meu orgulho, minha alegria, minha vida. À minha amada, Renata.

# Resumo

Propõe-se e promove-se a análise de um modelo planar ( $D=(1+2)$ ), envolvendo campos de *gauge* e matéria em interação, com dinâmica definida por uma ação tipo Maxwell-Chern-Simons-Higgs em regime de acoplamento mínimo e não-mínimo, dotada de invariância, com realização *off-shell*. perante transformações de supersimetria estendida  $N=2$ . A construção do modelo efetiva-se com recurso a um *ansatz* para um funcional de ação  $N=1$ -covariante em  $D=(1+3)$ , suplementado por um processo de redução dimensional e uma identificação de campos  $N=2$ -consistente. Determina-se a projeção bosônica do modelo, com o objetivo de identificar e analisar o regime auto-dual que o sistema oferece, registrando-se a presença de vórtices topológicos auto-duais. Tendo como foco a plena caracterização do contexto algébrico subjacente, o processo de construção do modelo é refraseado em versão manifestamente *susy*-covariante, com o emprego do formalismo de superespaço/supercampos. Analisa-se, em conexão com o registro de ambiente auto-dual, a estrutura  $N=2$ -super-algébrica da teoria, com a determinação de expressões funcionais para as supercargas e a conseqüente identificação da carga central, estabelecendo-se formalmente a previsível relação desta com a carga topológica que se associa às configurações do sistema. O recurso ao ambiente algébrico demonstra-se plenamente eficaz na definição das configurações auto-duais, e empresta naturalidade às eqs. de Bogomol'nyi que prevalecem no regime saturado. Comentam-se as perspectivas de continuidade do trabalho, discutindo-se questões em aberto e o grau de generalidade da proposta teórica que se apresenta.



# Abstract

A planar ( $D=(1+2)$ ) off-shell  $N=2$ -supersymmetric model, encompassing interacting matter and gauge fields, is proposed and analysed. The dynamics emerge from a Maxwell-Chern-Simons-Higgs like action functional, in which both minimal and nonminimal couplings are considered. The model is established by means of an algorithmical procedure, defined upon the dimensional reduction of a  $N=1-D=4$  action-*ansatz*, followed by a convenient  $N=2$ -preserving set of field identifications. The bosonic projection of the  $N=2-D=3$  resulting model is determined, and the identification plus analysis of the self-dual regime is performed, leading to a self-dual topological vortex solution. Focusing on the full understanding of the underlying algebraic context, the building of the model is rephrased in a manifestly susy-covariant fashion, as the superspace/superfields formalism is applied. The  $N=2$  super-algebraic structure is derived, as one computes the field-dependent expressions for the spinorial supercharges, and the correspondent central charge realization. The result establishes the connection between extended  $N=2$ -susy and the self-dual regime, showing the topological origin of the central charge. The algebraic environment is further explored, and the Bogomol'nyi equations for the saturated field configurations happen to arise quite naturally. Open questions and perspectives are commented.

# Conteúdo

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	vi
Abstract . . . . .	vii
Índice . . . . .	viii
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelos Auto-Duais e Supersimetria Estendida</b>	<b>4</b>
1.1 Álgebra de Supersimetria e Carga Central . . . . .	10
1.2 Carga Topológica, Supersimetria Estendida e Relações de Bogomol'nyi . . . . .	13
1.3 Modelos Planares e o Acoplamento Não-Mínimo . . . . .	16
<b>2 Maxwell-Chern-Simons e Acoplamento Não-Mínimo: Modelo N=2 <i>Off-Shell</i></b>	<b>21</b>
2.1 Ação N=1-D=4 . . . . .	22
2.2 Redução Dimensional . . . . .	32

2.3	Graus de Liberdade do Setor de <i>Gauge</i> : o Método do Projetor Simplético . . . . .	38
2.4	Identificação de Campos . . . . .	46
2.5	Projeção Bosônica e Acoplamento Crítico . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Formulação Covariante: o ambiente Superespaço/Supercampos</b>	<b>60</b>
3.1	Redução Dimensional no Superespaço . . . . .	61
3.2	Identificação N=2-covariante . . . . .	74
3.3	Identificação Alternativa . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Carga Central e Procedimento Algébrico</b>	<b>86</b>
4.1	Cargas de Supersimetria: Noether no Superespaço . . . . .	87
4.2	Carga Central . . . . .	92
4.3	Variações dos Férmions e Equações de Bogomol'nyi . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>106</b>
5.1	Supercorrente, Ambiente de Supergravidade, Espinores Combinados e Simetrias Adicionais: Comentários e Ações . . . . .	108
	<b>Referências</b>	<b>112</b>

# Introdução

A análise formal de sistemas que abrigam excitações de topologia não-trivial tem merecido especial atenção em física teórica, produzindo extensa contrapartida na literatura. Modelos com *kinks*, paredes de domínio, vórtices, cordas e monopólos têm sido objeto de detalhada discussão, induzida por duas motivações principais: - a da fundamentação teórica, movida pela possibilidade de se obter respostas não-perturbativas para a dinâmica quantizada de sistemas de campos, e pelas eventuais preservações, em ambiente quântico, de valores atribuídos, em contexto clássico, a grandezas físicas que caracterizam o sistema sob estudo [1]; - e a da demanda fenomenológica, que percorre vasta região de escalas de energia, com a verificação de fenômenos de natureza topológica em física da matéria condensada - paredes de domínio em materiais ferromagnéticos, vórtices em supercondutores etc. -, que pedem formulações teóricas próprias, encontrando correspondência formal em modelos de grande-unificação (monopólos [2]), construções cosmológicas (paredes de domínio, texturas, cordas cósmicas [3, 4]) e concepções de estruturas fundamentais estendidas (cordas, membranas etc.).

Neste contexto, o trabalho que aqui se apresenta oferece resposta específica e propõe

continuidade a uma particular linha de investigação, qual seja, a da caracterização de sistemas planares ( $D = 2 + 1$ ) que apresentam regime de auto-dualidade, associado, em sua gênese, à invariância do sistema perante transformações geradas pela álgebra de supersimetria estendida  $N = 2$ . Merece registro, também, que esta classe de modelos exibe a notável virtude de prover ambiente privilegiado à verificação de eventuais excitações de topologia não-trivial: a auto-dualidade se traduz pela redução da ordem das equações diferenciais que estabelecem a dinâmica clássica. As eqs. de 1<sup>a</sup> ordem que prevalecem em certo limite representam uma primeira integração do sistema, e, mesmo na ausência de solução analítica, tendem a viabilizar a tarefa numérica. O cenário em que se atua, portanto, reúne as duas motivações comentadas, com a abordagem direcionada à fundamentação teórica, aqui enfatizada, fornecendo subsídios imediatos à contrapartida fenomenológica.

Especificamente, trabalha-se a construção de um modelo, em  $3D$ , de Maxwell-Chern-Simons acoplado mínima e não-minimamente à matéria, exibindo, no nível da ação - formulação *off-shell* - simetria perante a  $N=2-D=3$ -super-álgebra estendida. Partindo-se de um sistema-*ansatz*  $N=1-D=4$ -supersimétrico [5], promove-se redução dimensional  $D = 4 \rightarrow D = 3$ , e suplementa-se o procedimento com uma conveniente e  $N=2$ -consistente identificação de campos. O resultado responde à correspondente e explícita demanda até então presente na literatura, complementando e registrando progresso em relação ao esforço que produzira, anteriormente, um modelo com  $N=2$ -supersimetria realizando-se apenas *on-shell*, e definido com restrições severas o suficiente para proibir, por exemplo, a riqueza de excitações como vórtices topológicos [6]. O modelo que aqui se apresenta, livre

de tais restrições, recebe, em seguida, atenção especial direcionada às suas características formais, com a reobtenção do próprio modelo e a análise de suas propriedades realizando-se em ambiente  $N=2$ -covariante. O regime de auto-dualidade, previamente obtido na primeira construção do modelo, é revisitado em abordagem de natureza algébrica. As possíveis extensões deste trabalho merecem, ainda, algum comentário.

A discussão observa, então, a seguinte seqüência: no Capítulo 1, promove-se um sucinto percurso histórico referenciado pelos estudos anteriores de sistemas dotados de regime auto-dual, comentando-se sua relação com extensões supersimétricas, bem como a eventual verificação de soluções de vórtices. No Capítulo 2, apresenta-se o *ansatz*  $N=1-D=4$ , o algoritmo redução dimensional  $\oplus$  identificação de campos, e a conseqüente obtenção do modelo-alvo. Promove-se, ainda, como subsídio ao procedimento de identificação, e com recurso ao “Método do Projetor Simplético” [7], um estudo dos graus de liberdade do setor de *gauge* do modelo pré-identificação. Aborda-se, em seguida, a projeção bosônica do sistema, que define o ambiente próprio à investigação do regime auto-dual e das excitações de vórtices. No Capítulo 3, rephraseia-se todo o algoritmo de redução dimensional e identificação em formulação covariante de superespaço/supercampos. No Capítulo 4, prevalece a abordagem algébrica, exibindo-se o cálculo de correntes e cargas de supersimetria, o estabelecimento da carga central e a reobtenção do regime auto-dual a partir de argumentos algébricos gerais. Finalmente, no Capítulo 5, promove-se discussão suplementar com a indicação de perspectivas de continuidade deste estudo, e produzem-se conclusões gerais.

# Capítulo 1

## Modelos Auto-Duais e Supersimetria Estendida

A contribuição que este trabalho oferece contextualiza-se em uma linha de investigação que pode ter seu início atribuído, com alguma arbitrariedade, à constatação, por Nielsen e Olesen [8], de que um sistema de Maxwell-Higgs, definido, em  $4D$ , por um Lagrangeano na forma  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(|\phi|)$ , onde  $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$  e  $V(|\phi|) = c_2|\phi|^2 - c_4|\phi|^4$ , apresenta solução de vórtice topológico, com a configuração de campos  $(\phi, A_\mu)$  portando carga topológica quantizada, proporcional ao fluxo magnético. Nielsen e Olesen trabalharam a partir das eqs. de movimento, de segunda ordem, recorrendo a um *ansatz* com simetria axial (cilíndrica) e a aproximações. Pouco tempo depois, Bogomol'nyi [9] reorganiza o cenário de Maxwell-Higgs, e sua versão não relativística - o modelo de Ginzburg-Landau -, ao apontar a existência de um regime de auto-dualidade, traduzido pela prevalência de eqs. de 1ª ordem, associado à saturação de uma cota inferior para o

funcional de energia, o *bound* de Bogomol'nyi. A natureza topológica deste *bound* e as condições para sua existência despertam o interesse que define a linha a que pertence o trabalho que aqui se expõe. Na Ref. [10], de Vega e Schaposnik aperfeiçoam o trabalho de Nielsen e Olesen obtendo soluções de vórtice exatas para Maxwell-Higgs a partir de um *ansatz* definido sobre o tensor de energia-momentum, e considerando uma relação especial entre parâmetros da teoria, a saber,  $e^2 = 8c_4$ , ou seja, vinculando a constante de acoplamento mínimo ao parâmetro do potencial de Higgs. Tecem comentários sobre a interpretação deste valor crítico no contexto do modelo de Ginzburg-Landau, e mencionam, sem promover outro desenvolvimento, ser esta restrição uma condição necessária à *extensão supersimétrica* da teoria. A relação supersimetria x integrabilidade, neste contexto, inaugura-se, assim, na forma de um comentário adicional. O trabalho de Witten e Olive [1], contudo, estabelece definitivamente o vínculo entre a estrutura supersimétrica (estendida, N=2) e o regime de auto-dualidade. Naquela publicação, os autores retomam a análise da álgebra de supersimetria N=2, advertindo para a necessidade de se considerarem contribuições - à extensão central da super-álgebra - de origem topológica, na forma de termos de fronteira, e em geral associadas ao processo de quebra espontânea de simetria. Recorrendo à positividade dos parênteses envolvendo supercargas, demonstram que, na presença de carga central, define-se cota inferior para a massa (ou energia, no referencial de repouso), associada à grandeza de natureza topológica. Ressurge, deste modo, o *bound* de Bogomol'nyi em versão (super-)algébrica.

Dando prosseguimento ao registro de soluções de vórtice, já com foco direcionado a modelos planares, Paul e Khare [11] discutem a teoria de Maxwell-Chern-Simons-Higgs.



Valem-se do *ansatz*, padronizado, de simetria rotacional, e trabalham a partir das eqs. de movimento, sem menção a eventual regime auto-dual. Confirmam a existência dessas excitações e, em sua contribuição mais relevante, percebem que a adição de um termo de Chern-Simons atribui carga elétrica ( $U(1)$ -local) às configurações de vórtice. A introdução do termo de Chern-Simons motiva o estudo do cenário-limite de grandes distâncias/baixos momenta, em que o termo topológico  $\kappa \mathcal{E}^{\alpha\beta\mu} A_\alpha \partial_\beta A_\mu$  predomina sobre a cinemática de Maxwell <sup>1</sup>. Apresenta-se, então, uma interessante análise em que se resgata o regime de auto-dualidade como ambiente próprio à verificação de eventuais configurações de vórtice. R. Jackiw e E. Weinberg [12] obtêm, em modelo de Chern-Simons-Higgs, e de modo condicionado à presença de um potencial tipo  $\phi^6$ , *bound* (topológico, proporcional ao fluxo magnético) para o funcional de energia e eqs. de 1ª ordem de Bogomol'nyi na saturação deste *bound*. Estas eqs. recebem o *ansatz* de simetria rotacional, e confirmam-se as excitações de vórtice. Não se evidencia, contudo, preocupação com a estrutura supersimétrica de base. Quase simultaneamente, contudo, surge o trabalho *Supersymmetry and self-dual Chern-Simons systems* [13], em que C. Lee, K. Lee e o próprio E. Weinberg reafirmam a crucial contribuição de Witten e Olive, ao demonstrar que a forma *exata* do potencial escalar (tipo  $\phi^6$ , D=3-renormalizável, e com relações específicas entre parâmetros associando  $\lambda$  (potencial) a  $e$  (acoplamento mínimo) e a  $\kappa$  (massa de C.-S.)), necessária à verificação de regime auto-dual em modelo de Chern-Simons-Higgs, pode ser obtida a partir da *demanda de prevalência de supersimetria estendida N=2*. Partindo

---

<sup>1</sup>Comenta-se, mais adiante, a existência de um contexto em que se “mimetiza” Chern-Simons puro a partir do ambiente mais realista Maxwell-Chern-Simons, *sem* tomar o limite  $\kappa \rightarrow \infty$ .

de uma versão  $N=1$ -covariante (formalismo superespaço/supercampos) do modelo estudado em [12], os autores promovem a segunda supersimetria exigindo invariância da ação perante a complexificação do parâmetro (espinorial) associado às transformações de  $N=1$ -supersimetria já realizadas. Isto é suficiente para determinar o potencial adequado. *Sem nenhum recurso direto ao funcional de energia*, mas trabalhando diretamente sobre a  $N=2$ -super-álgebra, obtêm-se a carga central, sua leitura como contribuição topológica (proporcional ao fluxo magnético e percebendo o parâmetro de quebra espontânea de simetria), a existência de uma cota inferior para o elemento da *susy*-álgebra  $P_0$  (energia), definida por esta carga central e, finalmente, as *mesmas* eqs. auto-duais de 1ª ordem obtidas em [12], representando, desta vez, a saturação do *bound* encontrado na sua tradução algébrica, ou seja, na trivialização de um setor das cargas de *susy*<sup>2</sup>. Imediatamente, retoma-se a proposta mais geral para a cinemática do campo de *gauge*, abordando-se, na Ref.[14], uma generalização do modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs discutido na Ref.[11]. No trabalho anterior, Paul e Khare buscam soluções de vórtice a partir das eqs. de movimento (de 2ª ordem), sem referência a regime auto-dual. A generalização trazida por Lee, Lee e Min inclui a presença extra de um *campo escalar neutro, indispensável à realização de  $N=2$ -supersimetria*. Afirma-se, em [14], que a prevalência da *susy* estendida viabiliza o regime auto-dual, mas a discussão de dois modelos de MCSH, com simetrias  $U(1)$  e  $U(1) \times U(1)$ , realiza-se com recurso direto à projeção bosônica em cam-

---

<sup>2</sup>Esta monografia percorrerá, para o modelo proposto, as abordagens de recurso direto ao funcional de energia - já definido, por construção, sobre estrutura  $N=2$ -supersimétrica - e de análise ( $N=2$ -super)algébrica, associando a viabilidade da primeira à prevalência da segunda.

pos componentes e à manipulação dos respectivos funcionais de energia, definidos com a inclusão de potenciais pré-arbitrados ( $N=2$ -*susy*-legitimados). Encontra-se, em cada modelo, *bound* para a energia  $e$ , na sua saturação, eqs. auto-duais de 1ª ordem compatíveis com as eqs. de movimento e realizadoras de *ansatz* de configurações com simetria rotacional (os vórtices). Condições de contorno apropriadas garantem finitude de energia e regularidade tanto para fases assimétricas (definidas com quebra espontânea de simetria  $U(1)$ ), associadas a vórtices topológicos, quanto para fases simétricas, associadas a vórtices não-topológicos. De modo alternativo ao procedimento adotado em [13], portanto, a referência à estrutura  $N=2$ -supersimétrica não encontra contrapartida, em [14], na determinação do regime auto-dual por métodos  $N=2$ -algébricos. Um trabalho posterior, citado na Ref.[15], promove uma revisão da recente literatura sobre modelos auto-duais e enfatiza a estrutura  $N=2$ -supersimétrica, revisitando o modelo MCSH e seus limites, Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs. Comenta-se o contexto de extensão supersimétrica, carga topológica, *bound* para a energia, eqs. auto-duais e soluções de vórtice, mas *não* se produz dedução estritamente  $N=2$ -super-algébrica para Maxwell-Higgs e MCSH, como a realizada em [13] para Chern-Simons-Higgs. Contribui-se, contudo, com o estudo de modos fermiônicos. Para o modelo de Maxwell-Higgs, a dedução algébrica, inspirada no trabalho de Witten e Olive, e oferecendo correspondência técnica ao trabalho desenvolvido em [13], ocorre em [16]. Edelstein, Núñez e Schaposnik seguem percurso teórico semelhante ao da Ref.[13], mas partem de um modelo  $N=1$ -supersimétrico, a ser enriquecido com a extensão  $N=2$ , contendo, *de antemão*, dois elementos do ambiente  $N=2$ -auto-dual em construção: o potencial tipo  $\lambda(|\phi|^2 - v^2)^2$  (Higgs, típico, que poderia, em princípio,

surgir como *viabilizador* da extensão  $N=2$ , a exemplo de  $\phi^6$  para CSH ([13]), em vez de
 mostrar-se *compatível* com tal extensão), e, para implementá-lo de modo  $N=1$ -covariante,
 a presença extra de um (super)campo escalar neutro. A extensão  $N=2$ -supersimétrica
 não é, mesmo assim, automática, e requer a mesma relação entre parâmetros que surgira
 em [10],  $\lambda = e^2/8$ , viabilizando, naquela abordagem, integrabilidade (desacoplamento)
 de eqs. de movimento e soluções exatas. Esta exigência, inclusive, leva os autores a
 rephrasing, para sistemas que apresentam quebra espontânea de simetria, um resultado
 geral, apresentado por Z. Hlousek e D. Spector [17, 18], para a relação entre modelos
 auto-duais, carga topológica e supersimetria estendida. A abordagem algébrica de [16]
 a Maxwell-Higgs, e a abordagem correspondente, na linha Witten-Olive, ao modelo de
 Maxwell-Chern-Simons-Higgs (também com potencial de Higgs e campo escalar neutro
 pré-impostos), desenvolvida por B. Damski na Ref.[19], realizam-se em um cenário em que,
 após sucessivas verificações, caso a caso, de vínculos entre regime auto-dual e estrutura
  $N=2$ -supersimétrica subjacente, apresentou-se uma proposta de justificativa formal para
 a associação  $N=2$ -*susy*  $\Leftrightarrow$  Carga Topológica Não-Trivial  $\Leftrightarrow$  Auto-Dualidade [17, 18]. A
 abordagem modelo-independente de Hlousek e Spector merece, também, comentário, mas,
 antes, apresentam-se algumas expressões para a devida caracterização de uma álgebra de
 supersimetria estendida.

## 1.1 Álgebra de Supersimetria e Carga Central

Os geradores que definem uma álgebra de supersimetria N-estendida verificam as seguintes relações ([20], [21], [22])<sup>3</sup>:

$$\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_\beta^j\} = \delta^{ij} \gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu + i\delta_{\alpha\beta} U^{ij} + (\gamma_5)_{\alpha\beta} V^{ij} ; [Q_\alpha^i, P_\mu] = [P_\mu, P_\nu] = 0 . \quad (1.1)$$

$$[Q_\alpha^i, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^i ,$$

$$[Q_\alpha^i, T_a] = (t_a)^i_j Q_\alpha^j ,$$

$$[U^{ij}, \forall \text{ gerador}] = [V^{ij}, \forall \text{ gerador}] = 0$$

onde (1.1) carrega informação específica de supersimetria (fechando uma sub-álgebra, a super-translação), sendo as demais relações elementos de definição das tensorialidades das grandezas que surgem em (1.1):  $Q_\alpha^i$  é (componente  $\alpha$  de) espinor de SO(1,3) na representação que tem  $\sigma_{\mu\nu}$  como realização do gerador de Lorentz  $M_{\mu\nu}$ , e componente de uma n-upla que define representação (N-dimensional) de um grupo de Lie de simetria interna, com  $t_a^i$  realizando  $T_a$  para uma álgebra  $[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$ . U e V, como se define na última relação, estão no centro da álgebra. São geradores escalares (sob Lorentz e, se estritamente centrais, sob as simetrias internas), anti-simétricos e hermitianos. Outras relações complementam a álgebra, mas não apresentam novidade, definindo o momentum como vetor perante Lorentz, os  $T_a$  como escalares e, evidentemente, reiterando a própria definição dos  $M_{\mu\nu}$ , com os parênteses correspondentes a so(1,3). Estas relações, com as

---

<sup>3</sup>Tomadas, por conveniência, sobre cargas espinoriais de Majorana 4D, em representação de Majorana. A extensão a dimensões arbitrárias segue o mesmo formato, exigindo, contudo, atenção às correspondentes possibilidades de representação espinorial [23].

extensões centrais (U e V), aparecem no trabalho de Haag, Lopuzański e Sohnius [20] em que se estabelece o ambiente mais geral de simetrias da matriz-S, estendendo o ambiente de Poincarè  $\oplus$  simetrias internas (escalares) afirmado por Coleman e Mandula [24] <sup>4</sup>.

Na construção de representações para a álgebra acima, ou ainda, para a *little algebra* que permite a definição de estados de uma partícula, diferenciam-se duas situações típicas: representações massivas e não-massivas. Resulta, para a dimensionalidade das representações não-massivas, em  $4D$ ,  $2^N$  estados. Ocorre, *automaticamente*, no estabelecimento da *little algebra* para um momentum  $p_\mu = (w, 0, 0, w)$ , a *trivialização de metade dos geradores espinoriais*,  $Q_\alpha$ . Como tais geradores alteram helicidade em  $1/2$ , a extensão supersimétrica N máxima (isto é, número máximo de Q's elevando spin) admitida em  $4D$  é  $N=8$  (de modo a evitar spins  $> 2$ , que não encontram descrição consistente). Para as representações massivas, contudo, a trivialização automática de um setor dos Q's face à definição da correspondente *little algebra* (preservação de  $p_\mu = (M, 0, 0, 0)$ ) não se dá. Tem-se  $2^{2N}$  estados, com a correspondente redução da supersimetria máxima permitida. Na presença de cargas centrais, contudo, ocorre um regime especial. Os parênteses envolvendo as cargas espinoriais, tomados para uma combinação linear adequada das cargas de Majorana, e escritos numa representação espinorial conveniente, diagonalizam-se,

---

<sup>4</sup>Na presença de objetos estendidos, cordas e/ou membranas, em ambiente de supergravidade (*susy* local), a álgebra de supersimetria em D-dimensões recebe contribuições extras de cargas “centrais” tensoriais (centrais sob o conceito restrito de super-translações, não-centrais sob a idéia de super-Poincaré). A forma geral da N-sub-super-álgebra de translação é  $\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \sum_P Z_{\mu_1 \dots \mu_P}^{AB} (\gamma^{\mu_1 \dots \mu_P} C)_{\alpha\beta}$ , com  $A, B = 1, \dots, N$  [25].

merecendo, por exemplo, para o caso  $N=2-D=4$ , a relação

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \begin{pmatrix} M+r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M+r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M-r \end{pmatrix},$$

onde  $|r| = \sqrt{U^2 + V^2}$  ( $N=2-D=4$  impõe  $U^{ij} = \mathcal{E}^{ij}U$  e  $V^{ij} = \mathcal{E}^{ij}V$ ). O lado esquerdo da equação acima, avaliado em qualquer estado, define uma norma ao quadrado, caracterizando, portanto, resposta não-negativa definida. A igualdade obriga, assim, a *verificação de  $M \geq \sqrt{U^2 + V^2}$ , ou seja, impõe-se um bound para a massa (energia)*, sendo esta cota inferior definida pela *carga central*. Retomando-se Witten e Olive, percebe-se, naquele trabalho, o estabelecimento deste fato para o *caso particular em que a carga central tem origem topológica*. Observe-se, também, que a saturação deste *bound*,  $M = r$ , *trivializa um setor das cargas de supersimetria*, o que produz a redução, neste regime, da dimensionalidade da representação massiva <sup>5</sup>:  $2^N$ , exatamente como no caso das representações não-massivas. Claramente, este regime saturado devolve a supersimetria máxima aos seus limites não-massivos, cancelando “elevações” de spin do setor trivializado. Esta situação permite, ainda, compatibilizar o mecanismo de Higgs (transição não-massivo  $\rightarrow$  massivo) com as representações de *susy* [1].

A álgebra de supersimetria estendida, portanto, na presença de carga central, eventualmente, de natureza topológica, traz a informação da existência de uma cota inferior para um de seus elementos,  $P_0$ , a energia. A saturação do *bound* caracteriza-se pela trivialis-

---

<sup>5</sup>Recebem, na literatura, a designação de *short representations*.

lização de um setor das cargas, com a conseqüente eliminação de graus de liberdade. Estes fatos já se evidenciavam em [1]. Restava, fundamentalmente, estabelecer condições para a verificação de uma super-álgebra estendida com carga central, e traduzir funcionalmente a saturação do *bound*. Com o trabalho de Hlousek e Spector [17, 18], o estabelecimento de eventual equivalência entre os ambientes de  $N=2 \oplus$  carga central/topológica e de auto-dualidade ganha considerável reforço.

## 1.2 Carga Topológica, Supersimetria Estendida e Relações de Bogomol'nyi

Resumem-se, nesta seção, os argumentos de Hlousek e Spector para o vínculo entre carga topológica não-trivial, auto-dualidade e supersimetria estendida.

A afirmação central, defendida na Ref.[17], é a de que uma teoria com  $N=1$ -supersimetria manifesta e uma lei de conservação topológica (independente das eqs. de movimento) possui, de fato, ainda que não manifesta, uma segunda supersimetria, e exhibe, como carga central na álgebra  $N=2$ , a carga topológica não-trivial que precipita a extensão. Esta assertiva é “demonstrada” com a construção explícita de um supercampo, perante a  $N=1$ -*susy* previamente reconhecida, de correntes topologicamente conservadas, em  $D=(2+1)$ . A extensão a  $D=(3+1)$  é realizada, as restrições em  $D=(1+1)$  são comentadas, e o resultado para dimensões superiores, conjecturado. Os autores valem-se do caráter topológico da corrente em questão para parametrizá-la na forma  $J_{\mu}^{\text{topol.}} = \mathcal{E}_{\mu\nu\lambda} \partial^{\nu} A^{\lambda}$ . Esta parametrização traz a possibilidade de redefinição, ou “transformação de *gauge*”, para o potencial  $A_{\mu}$ ,



$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$ , deixando invariantes corrente e carga topológica, e faz-se a escolha de um potencial  $A_\mu$  tal que  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . A comparação com a álgebra de supersimetria N=2, de onde emerge o N=1-supermultiplete  $V$ ,  $Q_\alpha^2$  e  $T$ , sendo  $V$  o gerador da simetria interna que percebe as cargas  $Q^1$  e  $Q^2$  como um dubleto,  $Q^2$  a “segunda” carga, e  $T$  a carga central, satisfazendo  $[Q_\alpha^1, V] = Q_\alpha^2$  e  $\{Q_\alpha^1, Q_\beta^2\} = T\epsilon_{\alpha\beta}$ . sugere, na tentativa de demonstrar a “transmutação” da carga topológica em carga central de álgebra N=2, a construção de um N=1-D=3-supercampo em que a corrente topológica compareça na componente  $\theta^2$ , e seu potencial, na componente zero. A relação entre corrente e potencial tem sua reexpressão N=1-supersimétrica na forma  $\mathcal{J}_\alpha = D^\beta D_\alpha H_\beta$ , onde  $D_\alpha$  é derivada N=1-D=3-covariante e  $H_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\alpha B + i\theta^\beta A_{(\beta\alpha)} - \theta^2(2\lambda_\alpha - i\partial_{\alpha\beta}\chi^\beta)$ , com  $A_{\beta\alpha} = (\gamma^\mu C)_{\beta\alpha} A_\mu$ . A liberdade de *gauge* se escreve  $H_\alpha \rightarrow H_\alpha + D_\alpha \Omega$ , e sua fixação fica  $D^\alpha H_\alpha = 0$ . O supercampo  $\Sigma_\mu = D^\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} H^\beta$ , com  $D^\alpha H_\alpha = 0$ , tem como componentes  $A_\mu = \Sigma_\mu|$ ,  $S_\mu^\alpha = D^\alpha \Sigma_\mu|$  e  $J_\mu = D^2 \Sigma_\mu|$ . Mostra-se, sem recurso às eqs. de movimento (a discussão é modelo-independente), que  $\partial^\mu \Sigma_\mu = 0$ , afirma-se a conservação topológica das várias correntes e argumenta-se, finalmente, que só há três possibilidades para a corrente espinor-vetorial  $S_\mu^\alpha$ : a trivialidade, que contrariaria a hipótese de realização não-trivial da carga topológica. a identificação com a carga original da *susy* N=1 manifesta, que deveria levar à presença do tensor de energia-momentum na componente ocupada pela corrente topológica, o que não ocorre, e a identificação com carga de *susy extra*, demonstrando a assertiva N=1  $\oplus$  carga topológica = N=2  $\oplus$  carga central/topológica. Há críticas a este resultado. Em primeiro lugar, a conservação da “segunda” corrente de *susy* é topológica, contradizendo ou invalidando sua obtenção via teorema de Noether. Também, existe um regime em que,

sob parametrização adequada (discutiremos este fato ao final do Capítulo 4), parênteses da *mesma carga* resultam um múltiplo da carga central/topológica: é justamente o regime saturado, em que se manifesta a auto-dualidade. Finalmente, registre-se que os trabalhos [13], [16] e [19] adotam a abordagem algébrica para obter  $N=2$ -*susy* e relações de Bogomol'nyi em Chern-Simons-Higgs, Maxwell-Higgs e MCSH. Em todos esses casos, os autores constroem uma versão  $N=1$ -supersimétrica como ponto de partida, *na presença de carga topológica não-trivial* (o caso MH ([16]) é flagrante: a carga topológica é o fluxo magnético, discutido por Nielsen e Olesen), e a extensão  $N=2$ , ainda que realizável, **não** é automática, requerendo relações específicas entre parâmetros da teoria. As eventuais limitações do argumento de Hlousek e Spector merecem investigação própria e definem perspectiva de continuidade deste trabalho.

Analisadas as condições de verificação da supersimetria estendida  $N=2$ , com a “promoção” da carga topológica a carga central da super-álgebra, resulta imediato o estabelecimento da relação entre regime auto-dual e  $N=2$ -*susy*. As afirmações, na seção anterior, de que a carga central (eventualmente, topológica) funciona como *bound* inferior para o gerador  $P_0$  (energia), e de que o regime saturado corresponde à trivialização de um setor das cargas fecham o circuito da relação procurada. Em [18], Hlousek e Spector apontam, ainda, para o fato de que a tradução funcional da trivialização de cargas (ou seja, da saturação) fornece um super-multiplete de eqs. diferenciais de 1ª ordem (as cargas definem, no superespaço, operadores diferenciais de 1ª ordem): são as eqs. de Bogomol'nyi. Os autores tentam afirmar, ainda, a associação imediata carga topológica  $\leftrightarrow$  auto-dualidade, mesmo para sistemas não-supersimétricos. Adotam, interinamente, a su-

persimetria como instrumento para estabelecer o regime auto-dual. Baseiam-se na possibilidade de uma  $N=1$ -supersimetrização que acompanha o cenário  $N=1 \oplus$  carga topológica  $\rightarrow N=2 \rightarrow$  auto-dualidade, e de um retorno ao modelo original, com projeção de férmions nulos, fornecendo a resposta pretendida. O algoritmo parece funcionar, de modo geral, para teorias exclusivamente definidas sobre campos escalares. Os autores reconhecem a dificuldade do “retorno” ao modelo original, com o correspondente transporte de resultados, quando a extensão supersimétrica introduz novas interações, irremovíveis a férmions nulos. É o caso das teorias de *gauge*, com o papel de indutor de potenciais escalares desempenhado pelo auxiliar do supermultiplete vetorial, o *D-term*. É, portanto, o caso aqui estudado, o que corrobora as ressalvas (presentes, por exemplo, explicitamente, em [16]) à suposta generalidade dos argumentos de Hlousek e Spector.

Comentados os casos estudados e os argumentos de caráter geral que surgem no contexto da análise de regime auto-dual em sistemas planares de *gauge* e matéria interagentes, descreve-se agora, sucintamente, o ambiente de acoplamento não-mínimo, uma generalização adicional dos sistemas em  $D=(2+1)$  que motivou o modelo que este texto propõe.

### 1.3 Modelos Planares e o Acoplamento Não-Mínimo

Em 1991, dois trabalhos quase simultâneos apontam para a viabilidade e, por isto, sob argumento de generalidade, para a necessidade de se incluir, no ambiente de interações matéria x *gauge* em  $D=(1+2)$ , um acoplamento adicional, não-mínimo, entre matéria escalar e intensidade de campo eletromagnético planar. I. Kogan [26] demonstra que um tal

acoplamento, tipo Pauli, ocorre graças ao surgimento, em correção a 1-loop do tri-vértice matéria (escalar) x fóton (3D) x matéria, presente no modelo de *anyons* relativísticos, de um momento magnético anômalo para a matéria escalar. O modelo em questão é MCSH, com o potencial para a matéria escalar, na ação clássica, resumindo-se a um termo de massa. De qualquer modo, o surgimento de uma tal interação, como correção a um vértice presente nos modelos que aqui se discutem, sugere sua inclusão no Lagrangeano clássico de partida. Compartilhando o interesse de Kogan na dinâmica de *anyons*, J. Stern [27] também propõe o acoplamento não-mínimo entre matéria escalar e campo de *gauge*, observando a generalização imediata, característica de 3D, do acoplamento de Pauli fermiônico:  $g\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} = g\tilde{F}^\mu J_\mu$ , com  $F^\mu \equiv 1/2 \mathcal{E}^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha}$  e  $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . Não há restrição ao spin da matéria acoplada a  $\tilde{F}_\mu$ , bastando adotar a corrente  $J_\mu$  correspondente. No estudo que desenvolve em [27], Stern observa, ainda, que uma relação específica entre as constantes de acoplamento mínimo e não-mínimo e a massa de Chern-Simons permite produzir, no ambiente geral Maxwell-Chern-Simons, um regime de puro Chern-Simons com comportamento anyônico ideal, sem a tomada do limite  $\kappa \rightarrow \infty$  ( $\kappa$  sendo a massa de C.-S.)

<sup>6</sup>. Este acoplamento não-mínimo *crítico* recebe reincidente adesão nos modelos planares propostos a partir de então, no contexto da busca de regime auto-dual.

O primeiro trabalho é desenvolvido por M. Torres, em 1992 [29]. Torres propõe um Lagrangeano na forma  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{\kappa}{4}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha}A_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|)$ , onde  $D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu - i\frac{g}{2}\tilde{F}_\mu)\phi$ , e  $V(|\phi|)$ , em princípio, merece a expressão polinomial  $V(|\phi|) =$

---

<sup>6</sup>O limite não-relativístico do acoplamento não-mínimo também merece investigação, percebendo-se sua relação direta com os efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher [28].

$a_6|\phi|^6 + a_4|\phi|^4 + a_2|\phi|^2$ . Torres percebe, contudo, que o acoplamento crítico,  $g = -2e/\kappa$  (em sua normalização), promove a redução da equação de movimento do campo de *gauge*,  $A_\mu$ , de segunda para primeira ordem, resultando  $\tilde{F}_\mu = \frac{1}{\kappa} J_\mu$ . Esta expressão mimetiza o regime de Chern-Simons puro, com a diferença de carregar a informação do acoplamento não-mínimo na corrente:  $J_\mu = -ie/2(\phi^* D_\mu \phi - \phi(D_\mu \phi)^*)$ . Com a eq. de 1ª ordem acima e a de segunda ordem para a matéria, Torres investiga soluções de vórtice topológico. Em seguida, ainda no acoplamento crítico, e com a especificidade de empregar, desde o início, o *ansatz* de simetria rotacional, Torres obtém auto-dualidade para o sistema (*bound* e eqs. de Bogomol'nyi), trabalhando sobre o funcional de energia, mas com as restrições adicionais de  $V(|\phi|) = a_2|\phi|^2$  e  $a_2 = \kappa^2/2$ . Estuda-se, então, a solução possível, a de vórtice não-topológico. Lee e Min, em 1994, retomam o modelo de Torres, adotando as restrições que viabilizaram a auto-dualidade em [29] como ponto de partida. A contribuição está em não antecipar o *ansatz* de simetria rotacional, manipulando o funcional de energia numa abordagem geral, ressalvadas as comentadas restrições. Com as mesmas limitações, Torres discute, em 1995, um modelo “semi-local”, em que o *ansatz* de simetria rotacional carrega um dubleto de escalares. A relação entre auto-dualidade e supersimetria estendida  $\mathcal{N}=2$ , neste ambiente de acoplamento não-mínimo, permanece, contudo, negligenciada. O trabalho de Antillón, Escalona e Torres [30], em 1997, oferece ótima revisão do estudo dos modelos planares auto-duais, e aprofunda a análise de excitações de vórtice no modelo de Torres. Contudo, adotando as mesmas restrições, acoplamento crítico e potencial  $|\phi|^2$ , considerados “obrigatórios” à auto-dualidade, não há possibilidade de verificação de vórtices topológicos, mas apenas das versões correspondentes a fases simétricas, sem que-

bra espontânea, os vórtices não-topológicos <sup>7</sup>. Quanto à supersimetria, há apenas menção à existência de extensão N=2-supersimétrica. De fato, em 1996, P. Navrátil [6] adota o mesmo percurso algébrico que caracteriza as referências [13], [16] e [19]. Define uma versão N=1-supersimétrica para o modelo de Torres, admitindo potencial geral e constantes de acoplamento desvinculadas. Analisando a ação N=1, percebe acoplamentos de Yukawa inviabilizadores da simetria global que define o multiplete das N=2-supercargas, e opta por eliminá-los com a restrição do potencial à forma  $|\phi|^2$ . A alternativa, reconhecida por Navrátil, seria introduzir um (super)campo escalar neutro adicional. Como se perceberá no modelo que esta dissertação analisa, o campo escalar neutro viabiliza a extensão N=2 *off-shell* e participa de um potencial bem mais rico que o necessariamente simétrico  $|\phi|^2$ . Navrátil passa, então, a trabalhar as eqs. de movimento do sistema com potencial restrito, *mantendo* a contribuição dos campos fermiônicos. Percebe que a eq. de movimento completa (com férmions) para o campo de *gauge*  $A_\mu$  sofre redução de segunda para primeira ordem na prevalência do acoplamento crítico,  $\kappa g = e$ , em sua notação. Determina a corrente U(1)-local, presente na equação tipo Chern-Simons para o campo de *gauge*, e também uma outra corrente U(1), conservada graças ao acoplamento crítico e às eqs. de movimento, de natureza global, associada à rotação de férmions no espaço dos campos. Esta corrente define um supercampo (perante a N=1-*susy* de partida) de correntes que carrega, no termo linear em  $\theta$ , a corrente de supersimetria associada à carga extra, o que confirma a extensão N=2 (e justifica, assim, o regime auto-dual encontrado por Torres

---

<sup>7</sup>Estes autores estudam, ainda, a contrapartida representada pelo regime espacialmente homogêneo, objetivando a análise de eventual comportamento caótico no sistema [31].

et al.) . A partir daí, o recurso à  $N=2$ -super-álgebra mostra-se eficaz na obtenção da carga central, do *bound* e das eqs. de Bogomol'nyi. O preço desta bem sucedida extensão  $N=2$ , contudo, é a prevalência obrigatória do acoplamento crítico, de um potencial que não admite soluções auto-duais topológicas, e de uma ambientação  $N=2$ -supersimétrica que só se realiza *on-shell*. Mantinha-se, portanto, na literatura, a demanda por uma extensão  $N=2$  de MCSH sob acoplamento mínimo e não-mínimo que viabilizasse soluções topológicas (ou um teorema geral demonstrando a impossibilidade), e que realizasse a  $N=2$ -super-álgebra *off-shell*.

# Capítulo 2

## Maxwell-Chern-Simons e

## Acoplamento Não-Mínimo: Modelo

### $N=2$ *Off-Shell*

Em resposta à comentada demanda por um modelo com setor de *gauge* definido pela combinação Maxwell-Chern-Simons, acoplado à matéria mínima e não-minimamente, e exibindo supersimetria estendida  $N=2$  *off-shell*, propõe-se, em [5], uma ação  $N=1-D=4$ -covariante, um funcional definido no contexto do formalismo superespaço/supercampos. Implementa-se um processo de redução dimensional que, suplementado por um conveniente mapeamento - identificação de cópias de representações/multipletos de supersimetria  $N=2$  -, produz o modelo-alvo com as qualidades desejadas. A projeção bosônica do sistema, motivada pelo estudo de configurações de mínima energia (antecipa-se, pelo que já se discutiu no Cap.1, a prevalência de eqs. diferenciais de 1ª ordem neste regime



saturado), proporciona o ambiente em que, para uma relação particular entre constantes de acoplamento, prova-se a presença, no espectro da teoria, de vórtices topológicos e não-topológicos[32]. Inicia-se a discussão, portanto, apresentando-se o *ansatz*  $N=1-D=4$ .

## 2.1 Ação $N=1-D=4$

Na busca de uma ação, em  $3D$ , invariante por *susy* estendida  $N=2$ , contendo Maxwell-Chern-Simons (diagonal) e acoplamento não-mínimo à matéria, adota-se, aqui, uma abordagem totalmente diferente da que se percebe na Ref.[6]. Naquele trabalho, como já se comentou, Navrátil produz a “composição”, no mesmo multiplete para supersimetria  $N=2-D=3$ , dos graus de liberdade originalmente associados a um multiplete, perante  $N=1-D=3$ , de matéria, com os graus de liberdade inicialmente associados a um outro  $N=1-D=3$ -multiplete, representando o setor de *gauge*. Isto é realizado, contudo, às expensas de: a)- severa restrição do potencial escalar, que passa a inviabilizar excitações como vórtices topológicos; b)- relação específica entre as constantes de acoplamento; c)- emprego das eqs. de movimento, resultando uma realização  $N=2$ -*on-shell*. O que se propõe, alternativamente, em [5], é o estabelecimento de um *ansatz* de ação  $N=1-D=4$ . A redução dimensional  $D = 4 \rightarrow D = 3$ , implementada de modo conveniente, aproveita-se da diferença de dimensionalidade das representações espinoriais de  $SO(1,3)$  e  $SO(1,2)$  para “duplicar” o número de supersimetrias, mantendo-as, tanto quanto a original  $N=1-D=4$ , como *simetrias da ação*, o que resolve, em princípio, o problema associado à realização *off-shell* de  $N=2$ . Entretanto, em  $D=4$ , há dois impedimentos no que se refere ao ambi-

cionado conteúdo dinâmico do modelo descendente em  $3D$ : **não** se produz acoplamento não-mínimo entre setor de *gauge* vetorial  $(A_\mu, F_{\mu\nu})$  e matéria escalar, e **não** se define termo de Chern-Simons para  $A_\mu$ <sup>1</sup>, havendo apenas espaço formal para termos topológicos do tipo BF[34]. Assim sendo, para manter a possibilidade de se produzir a descendência almejada em  $3D$ , introduz-se, no *ansatz*  $N=1-D=4$ , um campo 2-forma potencial de *gauge*, um campo de Kalb-Ramond[35]. Isto viabiliza tanto o termo topológico, tipo BF, quanto o acoplamento não-mínimo à matéria escalar, que, neste cenário, merece interação, via constante de acoplamento independente, com a intensidade de campo associada ao potencial 2-forma, uma intensidade 3-forma, que se faz representar, neste acoplamento não-mínimo, pelo seu dual (de Hodge), uma intensidade 1-forma. O custo desta “solução” é, obviamente, a ampliação do espaço funcional sobre o qual se definiria o modelo-alvo em  $3D$ , com a inclusão da descendência associada à (4D)2-forma de Kalb-Ramond. Neste ponto, como se verá, a possibilidade de se realizar um mapeamento  $N=2$ -covariante, definido por uma identificação de campos, do modelo-filho em espaço funcional amplo para o modelo-alvo em espaço funcional suficiente (para  $N=2$ -susy) proverá o passo algorítmico final na construção do modelo desejado.

Escreve-se, então, a ação de partida em  $4D$ :

$$\mathcal{S}_{4D} = \int d^4x d^2\theta \left\{ -\frac{1}{8}W^a W_a + d^2\bar{\theta} \left[ -\frac{1}{2}\mathcal{G}^2 + \frac{1}{2}m\nu\mathcal{G} + \frac{1}{16}\bar{\Phi}e^{2h\nu}e^{4g\mathcal{G}}\Phi \right] \right\}, \quad (2.1)$$

onde  $m$  é um parâmetro de massa (introduzido topologicamente),  $h$  e  $g$  são constantes de

---

<sup>1</sup>Salvo propostas com quebra explícita de simetria de Lorentz [33].

acoplamento (mínimo e não-mínimo, respectivamente), e os supercampos  $\Phi(\bar{\Phi})$  (matéria),  $\mathcal{V}$ ,  $W_a$  (*gauge*, vetorial) e  $\mathcal{G}$  (*gauge*, tensorial) são definidos como representações/multiplétes de N=1-D=4 pelos vínculos<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{a}}\Phi &= 0 \quad , \quad D_a\bar{\Phi} = 0 \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}^{\dot{a}} \quad , \quad \bar{D}_{\dot{b}}W_a = 0 \oplus D^aW_a = \bar{D}_{\dot{a}}\bar{W}^{\dot{a}} \\ D^2\mathcal{G} &= \bar{D}^2\mathcal{G} = 0 .\end{aligned}$$

com  $D_a = \partial_a - i\sigma_{a\dot{a}}^{\hat{\mu}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_{\hat{\mu}}$ , e  $\bar{D}_{\dot{a}} = -\bar{\partial}_{\dot{a}} + i\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}$ ,  $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3$ , merecendo as soluções

$$\Phi = e^{(-i\theta\sigma^{\hat{\mu}}\bar{\theta}\partial_{\hat{\mu}})} [\varphi(x) + \theta^a\chi_a(x) + \theta^2S(x)] : \text{ supercampo quiral}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= C(x) + \theta^a b_a(x) + \bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{b}^{\dot{a}}(x) + \theta^2 H(x) + \bar{\theta}^2 H^*(x) + \theta\sigma^{\hat{\mu}}\bar{\theta}A_{\hat{\mu}}(x) + \\ &+ \theta^2\bar{\theta} \left( \bar{\lambda}(x) - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}b(x) \right) + \bar{\theta}^2\theta \left( \lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}\bar{b}(x) \right) \\ &+ \theta^2\bar{\theta}^2 \left( \Delta(x) - \frac{1}{4}\square C(x) \right) : \text{ supercampo real, ou vetorial}\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$W_a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a \mathcal{V} : \text{ super-intensidade vetorial}$$

$$e \mathcal{G} = \frac{i}{8} \left( D^a \Sigma_a - \bar{D}_{\dot{a}} \bar{\Sigma}^{\dot{a}} \right) ,$$

$$\text{com } \bar{D}_{\dot{b}}\Sigma_a = D_b\bar{\Sigma}_{\dot{a}} = 0 ,$$

$\Sigma_a$  sendo, portanto, um supercampo espinorial quiral potencial de *gauge* para a super-intensidade “tensorial” linear  $\mathcal{G}$ , valendo a expansão

$$\begin{aligned}\Sigma_a &= \psi_a(x) + \theta^b \Omega_{ba}(x) + \theta^2 \left[ \xi_a(x) + i\sigma_{a\dot{a}}^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}\bar{\psi}^{\dot{a}}(x) \right] - i\theta\sigma^{\hat{\mu}}\bar{\theta}\partial_{\hat{\mu}}\psi_a(x) \\ &\quad - i\theta\sigma^{\hat{\mu}}\bar{\theta}\theta^b\partial_{\hat{\mu}}\Omega_{ba}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\square\psi_a(x) .\end{aligned} \quad (2.3)$$

<sup>2</sup>Notações e convenções seguem as adotadas em [36], e [37].

Em (2.3), a quantidade bi-espinorial  $\Omega_{ba}(x)$  aceita a seguinte decomposição em representações irredutíveis de  $SO(1,3)$ :

$$\Omega_{ba}(x) = \epsilon_{ba}\rho(x) + (\sigma^{\hat{\mu}\hat{\nu}})_{ba}\mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x), \quad (2.4)$$

com  $\epsilon_{ba} = -\epsilon_{ab}$  sendo um setor (de Weyl) da matriz de conjugação de carga,  $(\sigma^{\hat{\mu}\hat{\nu}})_{ba} = (\sigma^{\hat{\mu}\hat{\nu}})_{ab}$  sendo gerador de Lorentz para a representação  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $\rho$  sendo um escalar complexo e  $\mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  sendo um tensor definido na representação (1.0), o que se traduz pela auto-dualidade complexa [38]

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = i\mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (2.5)$$

onde  $\tilde{\mathcal{B}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  significa  $\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}\mathcal{B}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  (dual de Hodge). Os campos  $\rho$  e  $\mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  (este último, em resposta à (2.5)) escrevem-se, portanto, como

$$\rho(x) = P(x) + iM(x) \quad (2.6)$$

$$e \mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{4} \left( B_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - i\tilde{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right). \quad (2.7)$$

O campo  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  que se lê em (2.7) é o campo de Kalb-Ramond, que tem sua presença, em nosso modelo, justificada, como já comentado, pela necessidade de se prover acoplamento não-mínimo *gauge*/matéria e de verificar termo topológico como indutor de massa no espectro da teoria. As transformações de *gauge* que definem simetrias da ação (2.1) recebem, em formalismo de supercampos, as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \Phi' = e^{ih\Lambda} \\ \bar{\Phi}' = e^{-ih\bar{\Lambda}} \end{cases} \Leftrightarrow \delta\mathcal{V} = \frac{i}{2}(\bar{\Lambda} - \Lambda), \quad e \\ \delta\Sigma_a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a L, \quad \text{com } L = L^\dagger, \quad (2.8)$$

onde  $\Lambda$  e  $\bar{\Lambda}$  são supercampos-parâmetros de tensorialidade quirial e anti-quirial, respectivamente. Note-se que, tomando-se  $\Lambda = e^{-i\theta\sigma\bar{\theta}\partial}(\ell(x) + \theta^a v_a(x) + \theta^2 \zeta(x))$ , e, ainda,  $\bar{\Lambda} = e^{+i\theta\sigma\bar{\theta}\partial}(\ell^*(x) + \bar{\theta}_{\dot{a}} \bar{v}^{\dot{a}}(x) + \bar{\theta}^2 \zeta^*(x))$ , e levando-se em conta a expansão para  $\mathcal{V}$ , eq. (2.2), obtém-se, entre resultados correspondentes para parceiros, a variação  $\delta A_{\hat{\mu}} = \partial_{\hat{\mu}} \omega(x)$ , onde  $\omega(x) \equiv -Re \ell(x)$ . Também, a partir da expansão de  $\Sigma_a$ , eq. (2.3), e da constatação de que  $L$  e  $\mathcal{V}$  comungam do mesmo vínculo, o que, evidentemente, traduz-se em nova “coincidência” entre  $W_a$  (espinorial quirial:  $W_a = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_a \mathcal{V}$ ) e  $\delta \Sigma_a$  (espinorial quirial <sup>3</sup>:  $\delta \Sigma_a = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_a L$ ), percebe-se, entre outras variações, que (2.8) leva a  $\delta B_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\mu}} \xi_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} \xi_{\hat{\mu}}$ , para  $L = \dots + \theta^a \sigma_{\dot{a}\dot{a}}^{\hat{\mu}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \xi_{\hat{\mu}} + \dots$ . Observe-se, ainda, que  $\Phi$  não tem “carga” associada a  $\Sigma_a$ , acoplando-se a este setor de modo exclusivamente não-mínimo.

O setor bosônico de (2.1), de fato, exhibe, como sub-setor, o modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) [35, 39, 40]. Observa-se, ainda, que apesar da profusão de campos associados ao setor de *gauge*, definidos pelas expansões dos super-potenciais  $\mathcal{V}$ , eq.(2.2), e  $\Sigma_a$ , eq. (2.3), participam, efetivamente, da teoria gerada por (2.1), os graus de liberdade *gauge*-invariantes de  $\Sigma_a$ <sup>4</sup>, que se apresentam na expansão da super-intensidade  $\mathcal{G}$ , e os graus de liberdade de  $\mathcal{V}$ , também invariantes de *gauge*, que sobrevivem à fixação do *gauge* de Wess-Zumino[50]. As expansões de  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{G}$  relevantes para o modelo, nesta

---

<sup>3</sup>Exige-se homogeneidade - definida pelo vínculo covariante de supersimetria - na transformação de  $\Sigma_a$ :  $\Sigma'_a = \Sigma_a + \delta \Sigma_a$  deve resultar espinorial quirial.

<sup>4</sup>Note-se que  $\Sigma_a$  já se escreve sob parametrização conveniente para indicar os graus de liberdade invariantes de *gauge* (físicos), e, de modo complementar, apontar campos compensadores (puro-*gauge*). É o caso, respectivamente, de  $\xi_a$  e  $\psi_a$ . O mesmo ocorre com a parametrização de  $\mathcal{V}$ , que seleciona  $\lambda_a$  (*gaugino*) como físico e  $b_a$  como compensador.

abordagem<sup>5</sup> são:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & -\frac{1}{2}M(x) + \frac{i}{4}\theta^a\xi_a(x) - \frac{i}{4}\bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\xi}^{\dot{a}}(x) + \frac{1}{2}\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^{\dot{\mu}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\tilde{G}_{\dot{\mu}}(x) \\ & + \frac{1}{8}\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^{\dot{\mu}}\bar{\theta}^2\partial_{\dot{\mu}}\bar{\xi}^{\dot{a}}(x) - \frac{1}{8}\theta^2\sigma_{a\dot{a}}^{\dot{\mu}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_{\dot{\mu}}\xi^a(x) - \frac{1}{8}\theta^2\bar{\theta}^2\Box M(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{V} = \theta\sigma^{\dot{\mu}}\bar{\theta}A_{\dot{\mu}}(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \theta^2\bar{\theta}^2\Delta(x), \quad (2.10)$$

onde, em (2.9), tem-se:

$$\begin{aligned} G_{\dot{\rho}\dot{\mu}\dot{\nu}} &= \partial_{\dot{\rho}}B_{\dot{\mu}\dot{\nu}} + \partial_{\dot{\mu}}B_{\dot{\nu}\dot{\rho}} + \partial_{\dot{\nu}}B_{\dot{\rho}\dot{\mu}}, \\ \tilde{G}_{\dot{\mu}} &= \frac{1}{3!}\mathcal{E}_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}\dot{\lambda}}G^{\dot{\nu}\dot{\rho}\dot{\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Perceba-se, em (2.9), que apenas  $M$  e  $\xi_a$  se fazem presentes ( $P$  e  $\psi_a$  não se mantêm). Note-se ainda, a partir destas expansões, que o primeiro termo em (2.1) promove a presença, na parametrização em campos-componentes, de  $-\frac{1}{4}F_{\dot{\mu}\dot{\nu}}F^{\dot{\mu}\dot{\nu}}$  e parceiros. O termo em  $\mathcal{G}^2$  produz  $G_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\alpha}}G^{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\alpha}}$  e parceiros,  $m\mathcal{V}\mathcal{G}$  gera o termo topológico tipo-BF  $m\mathcal{E}_{\dot{\mu}\dot{\nu}\dot{\rho}\dot{\lambda}}A^{\dot{\mu}}G^{\dot{\nu}\dot{\rho}\dot{\lambda}}$  e parceiros, e o setor não-polinomial, que traz as exponenciais  $e^{2h\mathcal{V}}e^{4g\mathcal{G}}$ , traduz a interação *gauge*/matéria, com o usual acoplamento mínimo via  $e^{2h\mathcal{V}}$  (que, no *gauge* de Wess-Zumino, torna-se polinomial em  $\mathcal{V}$ ), e a contrapartida não-mínima definida em  $e^{4g\mathcal{G}}$ . Esta última

---

<sup>5</sup>A fixação do *gauge* de Wess-Zumino não é obrigatória, mas é simplificadora de cálculos em campos-componentes e suficiente para a obtenção do modelo N=2-D=3 desejado. Nos capítulos subsequentes, em que a análise da estrutura algébrica que define o modelo merece atenção prioritária, evita-se a fixação de qualquer *gauge*, de modo a preservar a super-álgebra original (já definida sobre o superespaço) de “misturas” com o setor de simetrias internas.

exponencial **não** pode, via fixação de *gauge*, transmutar-se em polinômio, dado que a componente zero (em  $\theta, \bar{\theta}$ ) de  $\mathcal{G}$  é um campo físico, o escalar  $M$ , invariante de *gauge*. A estratégia para expandir a interação em campos-componentes será a de fatorar a exponencial em  $M$ , o que permite trabalhar, nesta situação, com uma função residual de  $\mathcal{G}$  que o caráter anti-comutante de  $\theta, \bar{\theta}$  torna polinomial.

Aproveita-se, agora, o fato, já mencionado, de que ocorre uma redução, pela metade, da dimensionalidade das representações espinoriais na viagem  $SO(1,3) \rightarrow SO(1,2)$ , associada à redução dimensional  $D = 4 \rightarrow D = 3$ . Define-se uma representação espinorial (perante  $SO(1,3)$ ) de Weyl de 4-componentes, através da escolha, como realização da álgebra de Clifford, do seguinte conjunto de matrizes- $\Gamma$ :

$$\Gamma^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{ab}^{\hat{\mu}} \\ \bar{\sigma}^{\hat{\mu}ab} & 0 \end{pmatrix}.$$

Coerentemente, definem-se espinores de Majorana de 4-componentes, tomados nesta representação de Weyl, de modo a agrupar graus de liberdade espinoriais originalmente decompostos nas duas quiralidades, como  $\lambda_a$  e  $\bar{\lambda}^{\hat{a}}$ . Tem-se, então:

$$\Xi(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi_a(x) \\ \bar{\xi}^{\hat{a}}(x) \end{pmatrix}, \quad X(x) \equiv \begin{pmatrix} \chi_a(x) \\ \bar{\chi}^{\hat{a}}(x) \end{pmatrix}, \quad \Lambda(x) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_a(x) \\ \bar{\lambda}^{\hat{a}}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Com as definições

$$\mathcal{J}_{\hat{\mu}} \equiv -\frac{i\hbar}{2} (\varphi^* \nabla_{\hat{\mu}} \varphi - \varphi (\nabla_{\hat{\mu}} \varphi)^*), \quad (2.13)$$

$$\text{onde } \nabla_{\hat{\mu}} \varphi = \left( \partial_{\hat{\mu}} + i\hbar A_{\hat{\mu}} + ig \tilde{G}_{\hat{\mu}} \right) \varphi, \quad (2.14)$$

e ainda  $\nabla_{\mu 5} X = \left( \partial_{\mu} + ihA_{\mu}\Gamma_5 + ig\tilde{G}_{\mu}\Gamma_5 \right) X$ , pode-se expressar, em campos-componentes, a ação (2.1), que assume a forma:

$$\begin{aligned}
S_{4D} = & \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{3!}G_{\mu\nu\rho}G^{\mu\nu\rho} + m\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\lambda}A_{\mu}\partial_{\nu}B_{\rho\lambda} + 2\Delta^2 + \right. \\
& + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda + \partial_{\mu}M\partial^{\mu}M + \frac{i}{4}\bar{\Xi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Xi + im\bar{\Lambda}\Gamma_5\Xi - 4mM\Delta + hw^2\Delta + \\
& + e^{-2gM} \left[ (\nabla_{\mu}\varphi)(\nabla^{\mu}\varphi)^* + \frac{i}{4}\bar{X}\Gamma^{\mu}\nabla_{\mu 5}X - \frac{g^2}{2}\partial_{\mu}M(\bar{X}\Gamma_L\Gamma^{\mu}\Xi\varphi^* + \bar{\Xi}\Gamma_L\Gamma^{\mu}X\varphi) + \right. \\
& + \frac{g}{2}[\bar{\Xi}\Gamma^{\mu}\Gamma_R X(\nabla_{\mu}\varphi) + \bar{X}\Gamma_L\Gamma^{\mu}\Xi(\nabla_{\mu}\varphi)^*] - i\frac{g^2}{4}\varphi^*\varphi\bar{\Xi}\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Xi - \frac{g^2}{4h}\bar{\Xi}\Gamma_5\Gamma^{\mu}J_{\mu}\Xi + \\
& + \varphi\varphi^*(2h\Delta + igh\bar{\Lambda}\Gamma_5\Xi - g^2\partial_{\mu}M\partial^{\mu}M) - h(\varphi\bar{\Lambda}\Gamma_R X + \varphi^*\bar{\Lambda}\Gamma_L X) + \\
& \left. + \left( S - \frac{ig}{2}\bar{X}\Gamma_L\Xi + \frac{g^2}{4}\bar{\Xi}\Gamma_L\Xi\varphi \right) \left( S^* + \frac{ig}{2}\bar{X}\Gamma_R\Xi + \frac{g^2}{4}\bar{\Xi}\Gamma_R\Xi\varphi^* \right) \right\}. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

A ação N=1-invariante acima, obtida a partir de (2.1) após integração em  $d^2\theta d^2\bar{\theta}$ , e escrita em formalismo espinorial de 4-componentes, é invariante por troca de representação espinorial, o que possibilita a migração imediata para uma representação conveniente à redução dimensional (de fato, como se verá, um produto tensorial manifesto de matrizes- $\Gamma$  de D=3). Note-se, também, a confirmação da presença, antecipada, da teoria CSKR como sub-setor do setor bosônico de (2.15). Perceba-se, ainda, que as derivadas covariantes estendidas  $\nabla_{\mu}$  e  $\nabla_{\mu 5}$  realizam o acoplamento não-mínimo *gauge*/matéria.

Antes de se efetivar a troca de representação espinorial, disparando-se o processo de redução dimensional, completa-se a definição do *ansatz* 4D, exibindo-se o conjunto de transformações de supersimetria perante o qual (2.1) e (2.15) são invariantes.

Se  $\mathcal{T}$  é um supercampo genérico, as transformações de supersimetria (módulo translações espaço-temporais rígidas), agindo sobre os campos-componentes de  $\mathcal{T}$ , lêem-se a partir da



expansão de  $\delta_{\text{susy}}\mathcal{T} = (\varepsilon^a Q_a + \bar{\varepsilon}_a \bar{Q}^a)\mathcal{T}$ , onde  $\varepsilon_a(\bar{\varepsilon}^a)$  representa o parâmetro espinorial de *susy*, e  $Q_a(\bar{Q}^a)$  é a carga, o gerador das transformações em questão. A observância desta regra de variação estabelece o caráter de representação/multiplète de supersimetria para o objeto variado, ou seja, a regra acima define a (super-)tensorialidade comum aos supercampos. Em particular, nas convenções aqui adotadas, as expressões das (super-)cargas, como operadores diferenciais no superspaço N=1-D=4, têm a leitura:

$$Q_a = \frac{\partial}{\partial \theta^a} + i\sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{a}} \partial_{\mu}$$

$$\text{e } \bar{Q}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} - i\theta^a \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \partial_{\mu}.$$

Se os supercampos em foco são os que participam de (2.1), as transformações de supersimetria são:

$$\delta\varphi = \varepsilon^a \chi_a,$$

$$\delta\chi_a = 2\varepsilon_a S - 2i\sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} D_{\mu}\varphi, \quad (2.16)$$

$$\delta S = -i\bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\dot{a}a} D_{\mu}\chi_a + 2h\bar{\lambda}_{\dot{a}} \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \varphi;$$

$$\delta M = \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\xi}^{\dot{a}} - \frac{i}{2} \varepsilon^a \xi_a,$$

$$\delta\xi_a = 2\sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \left( \partial_{\mu} M - i\tilde{G}_{\mu} \right), \quad (2.17)$$

$$\delta\tilde{G}^{\dot{\mu}} = \frac{i}{2} \varepsilon^b (\sigma^{\dot{\mu}\nu})_b{}^a \partial_{\nu} \xi_a + \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{b}} (\bar{\sigma}^{\dot{\mu}\nu})^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} \partial_{\nu} \bar{\xi}^{\dot{a}};$$

$$\delta A^{\dot{\mu}} = \varepsilon^a \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \bar{\lambda}^{\dot{a}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\dot{a}a} \lambda_a,$$

$$\delta\lambda_a = 2\varepsilon_a \Delta + \frac{i}{2} \sigma_{ab}^{\nu} \bar{\sigma}^{\dot{\mu}bb} \varepsilon_{\dot{b}} F_{\dot{\mu}\nu}, \quad (2.18)$$

$$\delta\Delta = -\frac{i}{2} \varepsilon^a \sigma_{a\dot{a}}^{\mu} \partial_{\mu} \bar{\lambda}^{\dot{a}} - \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\dot{a}aa} \partial_{\mu} \lambda_a,$$

com o primeiro conjunto associando-se a  $\Phi$  (matéria), o segundo a  $\mathcal{G}$  e o último a  $\mathcal{V}$ . Cada um dos conjuntos define uma representação/multiplète de N=1-D=4<sup>6</sup>. Dos dois conjuntos vinculados ao setor de *gauge*, a coleção referente a  $\mathcal{V}$  é a única que relaciona a transformação de *susy* de um campo não-invariante de *gauge*, a saber, o campo  $A_\mu$ . De fato,  $\mathcal{V}$  comparece em (2.1) tanto na forma direta, como (super)potencial de *gauge*, em  $m\mathcal{V}\mathcal{G}$ , quanto via a (super)intensidade  $W_a$ , enquanto  $\Sigma_a$ , que também contém campos não-invariantes, só comparece em (2.1) via a (super)intensidade  $\mathcal{G}$ . Com a extensão da notação de 4-componentes ao parâmetro  $\varepsilon_a(\bar{\varepsilon}^{\dot{a}})$ ,

$$\mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_a \\ \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \end{pmatrix},$$

as transformações acima podem ser expressas em formato invariante por troca de representação espinorial, viabilizando a adoção da mesma conveniente representação que deflagra a redução dimensional da ação (2.15). Em notação de 4-componentes vem, portanto,

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \bar{\mathcal{E}}\Gamma_L X \\ \delta X &= 2(S - i\Gamma^{\dot{\mu}}D_{\dot{\mu}}\varphi^*)\Gamma_L\mathcal{E} + 2(S^* - i\Gamma^{\dot{\mu}}D_{\dot{\mu}}\varphi)\Gamma_R\mathcal{E} \\ \delta S &= -i\bar{\mathcal{E}}\Gamma^{\dot{\mu}}\Gamma_L D_{\dot{\mu}}X + 2h\bar{\mathcal{E}}\Gamma_R\Lambda\varphi \end{aligned} \quad (2.19)$$

---

<sup>6</sup>Mas, faça-se a ressalva, N=1-D=4 “modificada” pela fixação do *gauge* de Wess-Zumino. Neste ambiente, a supersimetria se redefine de modo a abrigar, em composição sistemática, uma “transformação de *gauge* de retorno”, de modo a preservar o *gauge* escolhido, que é não-*susy* original covariante (vale a analogia com o gauge de Coulomb, na eletrodinâmica usual). Uma sinalização clara deste entrelaçamento algébrico é a presença de derivações covariantes de *gauge*,  $D_{\dot{\mu}} = \partial_{\dot{\mu}} + ihA_{\dot{\mu}}$ , nas variações de *susy* (2.16).

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{2} \bar{\mathcal{E}} \Gamma_5 \Xi \\
\delta \Xi &= 2 \Gamma^{\hat{\mu}} \left( \Gamma_5 \partial_{\hat{\mu}} M - i \tilde{G}_{\hat{\mu}} \right) \mathcal{E} \\
\delta \tilde{G}^{\hat{\mu}} &= \frac{i}{2} \bar{\mathcal{E}} \Gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \partial_{\hat{\nu}} \Xi
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\delta F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \bar{\mathcal{E}} \Gamma^{[\hat{\nu}} \Gamma_5 \partial^{\hat{\mu}]} \Lambda \\
\delta \Lambda &= 2 \Delta \mathcal{E} - \frac{i}{2} \Gamma_5 \Gamma^{\hat{\mu}} \Gamma^{\hat{\nu}} F_{\hat{\nu}\hat{\mu}} \mathcal{E} \\
\delta \Delta &= -\frac{i}{2} \bar{\mathcal{E}} \Gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \Lambda .
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Definem-se, na próxima seção, as correspondências de leitura tensorial na redução  $4D \rightarrow 3D$ , bem como a representação espinorial que implementa a dissociação de um espinor perante  $SO(1,3)$  em dois espinores independentes perante  $SO(1,2)$ .

## 2.2 Redução Dimensional

A diferença de dimensionalidade das representações espinoriais de  $SO(1,3)$  e  $SO(1,2)$  tem contrapartida manifesta na parametrização do espaço funcional, ou seja, no conjunto de campos fermiônicos, quando se emprega uma realização da álgebra de Clifford, em  $4D$ , definida como um conveniente produto tensorial de matrizes- $\Gamma$  de  $3D$ . A idéia é perceber cada espinor  $4D$ , de quatro componentes (segundo(2.12)), como um dublete de espinores  $3D$ , de duas componentes cada um, transformando-se independentemente perante  $SO(1,2)$  (por isto, *dois* espinores). Tendo sido apresentados ação, eq. (2.15), e conjunto de transformações de supersimetria, eqs. (2.21), em notação de 4-componentes, e de modo *invariante* por troca de representação, promove-se a adoção da representação

de Majorana definida pelo seguinte conjunto de matrizes:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu &= \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix}, & \Gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma_{\frac{R}{L}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.22)$$

onde adota-se o índice tensorial  $3D$ ,  $\mu = 0, 1, 2$  (sem o circunflexo  $4D$ ), explicitando-se a entrada  $\hat{\mu} = 3$ , e tomam-se as matrizes- $\gamma$   $3D$  como  $\gamma^0 = \sigma_y$ ,  $\gamma^1 = i\sigma_x$  e  $\gamma^2 = i\sigma_z$ . A primeira das matrizes listadas em (2.22) proporciona, portanto, um mapeamento entre duas representações reais de Majorana em dimensões distintas. Na representação (2.22), os espinores de 4-componentes (2.12) ,(2.19) assumem a forma

$$X(x) = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ \omega(x) \end{pmatrix}, \quad \Xi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix}, \quad \Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

ficando evidente, perante  $SO(1,2)$ , a dissociação do espinor, originalmente uno perante  $SO(1,3)$ , em dois espinores independentes em  $3D$ . Assim,  $X_{4D}$  dá origem a  $\chi_{3D}$  e  $\omega_{3D}$  etc.

<sup>7</sup> A extensão deste fato ao parâmetro de supersimetria, que sofre o *splitting*  $\mathcal{E} \rightarrow \varepsilon, \delta$ , sendo  $\varepsilon$  e  $\delta$  dois espinores reais de Majorana  $3D$ , manifesta a *promoção da supersimetria*, com a prevalência da leitura  $N=2$  em  $3D$ . Este resultado geral, consequência direta da já

---

<sup>7</sup> $\delta_{4D}X \propto [\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\nu}}] X$  o que, no setor percebido pela tensorialidade definida por  $SO(1,2)$ , se resume a  $\delta_{3D}X_{\text{doublet}} \propto [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] X_{\text{doublet}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta\chi \\ \delta\omega \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \chi \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \omega \end{pmatrix}$ , o que evidencia a independência de  $\chi$  e  $\omega$  perante  $SO(1,2)$ .

mencionada diferença (fator de 2) de dimensionalidade das representações espinoriais em  $4D$  e  $3D$ , motivou o percurso *ansatz*  $N=1-D=4 \oplus$  redução dimensional como algoritmo para a obtenção da teoria  $N=2-D=3$  desejada. O *splitting*, evidentemente, estende-se, também, à carga de supersimetria, completando o quadro  $N=2-D=3$ .

Retomando-se o conjunto (2.22), percebe-se a descrição dos projetores  $\Gamma_{R,L}$ , presentes tanto na ação (2.15), quanto nas transformações (2.21). A composição típica  $\bar{X}\Gamma_R X$  produz, por exemplo,  $\frac{1}{2}(\bar{\chi} - i\bar{\omega})(\chi - i\omega)$ . Definem-se, então, compondo parametrização espinorial conveniente em  $3D$ , os seguintes espinores de Dirac:

$$X_{\pm} \equiv \chi \pm i\omega, \quad \Xi_{\pm} \equiv \xi \pm i\zeta, \quad \Lambda_{\pm} \equiv \lambda \pm i\eta, \quad \mathcal{E}_{\pm} \equiv \varepsilon \pm i\delta. \quad (2.24)$$

Ainda de volta às matrizes (2.22), percebe-se a separação da entrada  $\hat{\mu} = 3$  do conjunto  $\mu = 0, 1, 2$ . Este procedimento indica que a redução dimensional aqui adotada se dá com a “eliminação” da coordenada  $x^3$  do espaço de parâmetros dos campos da teoria, e que, coerentemente, impõe-se, em  $3D$ , a leitura das componentes 4D-tensoriais de índice 3 como *escalares* perante  $SO(1,2)$ . Após, portanto, a devida compactação da coordenada  $x^3$ , seguida de um limite e de uma leitura efetiva da ação que se produz[41], a redução dimensional se traduz pela relação

$$\partial_3 (\forall \text{campo}) = 0, \quad (2.25)$$

e pela decomposição de vetores e tensores  $4D$  em, por exemplo,  $A^{\hat{\mu}} \rightarrow (A^{\mu}(\text{vetor } 3D); A^3(\text{escalar } 3D))$ . A relação completa das leituras tensoriais em  $3D$ , com a notação que se passa a empregar, é como segue:

$$\text{potenciais: } A^{\mu}; \quad N \equiv A^3, \quad B^{\nu} \equiv B^{3\nu}; \quad Z_{\rho} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

com  $\epsilon^{\rho\mu\nu} \equiv \epsilon^{\rho\mu\nu 3}$ , e onde usou-se a dualidade de Hodge para representar eventuais graus de liberdade descritos pelo tensor antissimétrico de *gauge*,  $B^{\mu\nu}$ , através do vetor  $Z_\mu$ . Conseqüentemente, as leituras para as intensidades de campo são:

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \quad ; \quad \tilde{G}^3 = -\partial_\mu Z^\mu . \quad (2.27)$$

Seguindo (2.26) e (2.27), os termos bosônicos não-escalares presentes em (2.15) se decompõem na forma:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}G_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}G^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &= -\frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \partial_\mu Z^\mu \partial_\nu Z^\nu , \\ -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu N \partial^\mu N , \\ m\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\lambda}}A^{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\nu}}B^{\hat{\rho}\hat{\lambda}} &= 2m\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu B^\rho + 2mN\partial_\mu Z^\mu , \\ (\nabla_{\hat{\mu}}\varphi)^*(\nabla^{\hat{\mu}}\varphi) &= (\nabla_\mu\varphi)^*(\nabla^\mu\varphi) - (hN - g\partial_\mu Z^\mu)^2|\varphi|^2 . \end{aligned}$$

As dissociações fermiônicas e as decomposições acima, frutos da redução dimensional, produzem a seguinte ação em  $3D$ , invariante por supersimetria estendida  $N=2$ :

$$\begin{aligned} S_{3D}^{N=2} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 2m\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu B_\lambda + 2\Delta^2 + (\partial_\mu Z^\mu)^2 + hv^2\Delta + \right. \\ &+ \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_-\not{\partial}\Lambda_- + \frac{i}{4}\bar{\Xi}_-\not{\partial}\Xi_- + \frac{i}{2}m(\bar{\Lambda}_+\Xi_- - \bar{\Lambda}_-\Xi_+) + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N - 4mM\Delta + \\ &+ 2mN\partial_\mu Z^\mu + \partial_\mu M\partial^\mu M + e^{-2gM} \left[ (\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* - (hN - g\partial_\mu Z^\mu)^2\varphi\varphi^* + \right. \\ &+ \frac{1}{4}(hN - g\partial_\mu Z^\mu)\bar{X}_+X_+ + \frac{i}{8}(\bar{X}_-\not{\nabla}_-X_- + \bar{X}_+\not{\nabla}_+X_+) + \\ &+ \frac{g}{4} [ (\bar{\Xi}_-\gamma^\mu X_- + \bar{X}_+\gamma^\mu \Xi_+) \nabla_\mu\varphi - i(\bar{\Xi}_-X_-\varphi + \bar{X}_-\Xi_-\varphi^*)(hN - g\partial_\mu Z^\mu) ] + \\ &\left. - \frac{g^2}{4}\partial_\mu M(\bar{X}_-\gamma^\mu \Xi_-\varphi^* + \bar{\Xi}_-\gamma^\mu X_-\varphi) - i\frac{g^2}{8}\varphi^*\varphi(\bar{\Xi}_-\not{\partial}\Xi_- + \bar{\Xi}_+\not{\partial}\Xi_+) + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2}{4h} \left( \frac{1}{2} (\bar{\Xi}_- \gamma^\mu J_\mu \Xi_- - \bar{\Xi}_+ \gamma^\mu J_\mu \Xi_+) + \bar{\Xi}_- \Xi_- h(hN - g\partial_\mu Z^\mu) \varphi \varphi^* \right) + \\
& + \varphi \varphi^* \left( 2h\Delta + \frac{igh}{2} (\bar{\Lambda}_+ \Xi_- - \bar{\Xi}_- \Lambda_+) - g^2 \partial_\mu M \partial^\mu M \right) - \frac{h}{2} (\varphi \bar{\Lambda}_+ X_- + \varphi^* \bar{X}_- \Lambda_+) + \\
& + \left[ S - \frac{ig}{4} \bar{X}_- \Xi_+ + \frac{g^2}{8} \varphi \bar{\Xi}_- \Xi_+ \right]^2 \Bigg\}, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

onde, como já comentado, a derivada covariante estendida,  $\nabla_\mu$ , e sua versão sobre espinores de Dirac,  $\nabla_\pm \equiv \gamma^\mu (\partial_\mu \pm ihA_\mu \pm ig\tilde{G}_\mu)$ , atestam a presença de acoplamento não-mínimo entre o setores de *gauge* e de matéria. Verifica-se também, em (2.28), a ocorrência de um termo de propagação longitudinal para o vetor  $Z_\mu$ . De fato, a redução dimensional da variação de *gauge* do campo de Kalb-Ramond<sup>8</sup> demonstra o caráter invariante de  $\partial_\mu Z^\mu$ , e o correspondente atributo de puro-gauge ao setor transversal de  $Z_\mu$ . Isto poderia suscitar dúvidas quanto à conveniência desta parametrização, mas faz-se a ressalva de que  $Z_\mu$  não descreve nenhum grau de liberdade *on-shell*[42], confirmando, via dualidade, o que é característico de campos antissimétricos de *gauge* de rank-2 em 3D.

Outro fato a se observar em (2.28) é a presença, na primeira linha, de um termo de “Chern-Simons *misto*”. Há registros, na literatura, de investigações realizadas a partir de teorias contendo um termo topológico deste tipo (BF-3D), sobretudo no que diz respeito à modelagem de sistemas supercondutores [43, 44]. Esses estudos são motivados, inclusive, pela possibilidade de se recorrer à geração topológica de massa sem necessidade de renúncia à preservação de simetria de paridade. Modelos contendo termo de Chern-Simons anti-diagonal que define, ou compõe com termos de Maxwell, cinemática para

---

<sup>8</sup> $\delta_{4D} B_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}} \xi_{\bar{\mu}} \rightarrow \delta_{3D} B_\nu = \underbrace{\partial^3 \xi_\nu}_{=0} - \partial_\nu \xi^3$ , e  $\delta_{3D} Z_\mu = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\mu\nu\rho} \underbrace{(\partial^\nu \xi^\rho - \partial^\rho \xi^\nu)}_{\delta B^{\nu\rho}}$ , o que leva a  $\delta \partial_\mu Z^\mu = \partial_\mu (\delta Z^\mu) = 0$ .

campos de *gauge* acoplados a campos de Higgs suscitam, também, investigação sobre a eventual presença de vórtices topológicos em seu espectro[45]. De qualquer modo, a presença deste termo misto em (2.28) nos afasta do conteúdo bosônico pretendido para a teoria  $N=2-D=3$ , que deveria exibir um termo de Chern-Simons genuíno, diagonal. Este “desvio” é consequência da ampliação do espaço funcional que se fez necessária no *ansatz*  $4D$ , de modo a prover acoplamento não-mínimo e termo topológico na dimensão de partida. Propõe-se, então, um mapeamento da teoria representada por (2.28) em outra teoria, ainda  $N=2$ -invariante, mas realizada sobre espaço funcional reduzido, de modo a produzir o modelo desejado. Esse mapeamento é definido através de uma identificação de campos  $N=2$ -consistente, que será apresentada na seção 2.4. Naquela seção, apresentam-se as transformações de supersimetria  $3D$ , perante as quais (2.28) é invariante, e percebe-se, facilmente, a identidade ( $N=2$ -super)tensorial dos dois multipletes associados ao setor de *gauge* (o setor de matéria não percebe, em sua realização como  $N=2$ -multiplete, a identificação proposta). Antes disso, contudo, resume-se a análise realizada na Ref. [42]. Naquele trabalho, utiliza-se o Método do Projetor Simplético[7] para investigar os graus de liberdade físicos associados à projeção bosônica do setor de *gauge* em (2.28). Esta análise irá subsidiar a *consistência formal* do mapeamento *algorítmico* que se produz na rota para o modelo-alvo. Ainda que restrito à projeção bosônica de um setor (o setor a ser afetado pela identificação) de (2.28), o estudo desenvolvido no espaço de fase correspondente conta com a natureza de simetria espectral da supersimetria para estender suas conclusões ao ambiente  $N=2$ . O que se verifica, de fato, é que o mapeamento proposto identifica *cópias exatas* de excitações físicas, ou ainda, que respeita a estrutura de propagadores dos campos



identificados.

## 2.3 Graus de Liberdade do Setor de *Gauge*: o Método do Projetor Simplético

Trabalha-se, nesta seção, com o Método do Projetor Simplético (MPS)[7], uma abordagem ao problema de quantização de sistemas vinculados em que se prioriza a identificação dos graus de liberdade físicos, projetando-se toda a estrutura simplética - conjunto de variáveis do espaço de fase gerado pelos campos e função Hamiltoniana - sobre a sub-variedade definida pelos vínculos. O MPS, portanto, em contraste com o método de Dirac[46] (que projeta o “produto”, os parênteses), define a dinâmica das variáveis projetadas via usuais parênteses de Poisson, que têm, contudo, atuação direta sobre objetos que, por construção, respeitam os vínculos. Um resumo do MPS pode ser encontrado na Ref. [47]. Sua aplicação a uma coleção de exemplos relevantes[48, 49] atesta sua consistência.

A contribuição central do MPS é o estabelecimento do projetor

$$\Lambda_j^i(x, y) = \delta_j^i \delta^2(x - y) - \varepsilon^{ik} \int d^2z d^2w [\delta_k(x) \Omega^m(z)] g_{mn}^{-1}(z, w) [\delta_j(y) \Omega^n(w)] , \quad (2.29)$$

onde

$$\delta_k(x) \Omega^m(z) \equiv \frac{\delta \Omega^m(z)}{\delta \xi_k(x)} , \quad (2.30)$$

sendo  $\xi_{i,j,k}(x)$  uma variável genérica do espaço de fase - campos (coordenadas) e momenta canonicamente conjugados -,  $\Omega^{m,n}$  um vínculo da teoria (primário ou secundário, mas,

certamente, de segunda classe), e  $g_{mn}^{-1}$  um elemento da inversa da matriz dos vínculos,  $g_{mn} \equiv \{\Omega(x), \Omega(y)\}$ . Note-se, ainda, a presença da matriz simplética, descrita pelos elementos  $\varepsilon^{ik}$ . Este projetor age sobre as variáveis do espaço de fase de modo a produzir suas correspondentes na sub-variedade definida pelos vínculos, onde a dinâmica física tem lugar. A regra para tal projeção é:

$$\xi^{i*}(x) = \int d^2y \Lambda_j^i(x, y) \xi^j(y) . \quad (2.31)$$

O setor do Lagrangeano de (2.28) que é posto sob análise define-se a partir da redução dimensional do modelo CSKR, escrevendo-se:

$$\mathcal{L}_{3D}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu Z^\mu)^2 + m\varepsilon^{\mu\nu\lambda}B_\mu\partial_\nu A_\lambda - m\varphi(\partial_\mu Z^\mu), \quad (2.32)$$

onde  $B_\mu \equiv B_{\mu 3} (= -B_\mu^3 = -B_\mu^{\text{original}})$  e  $\varphi \equiv A_3 \rightarrow \varphi = -N = -A^3$ . Como já se comentou, o não-ortodoxo termo de propagação para  $Z_\mu$  é, de fato, invariante de *gauge*.

As simetrias internas associadas a (2.32) lêem-se

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad (2.33)$$

$$B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu\beta, \quad (2.34)$$

$$Z'_\mu = Z_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu\beta^\lambda, \quad (2.35)$$

deixando evidente a troca, para  $Z_\mu$ , dos usuais papéis desempenhados, na relação *gauge*  $\times$  Lorentz, pelos setores transversal e longitudinal de um potencial vetorial. Percebe-se ainda, a partir de (2.33, 2.34, 2.35), que o Lagrangeano (2.32) tem simetria perante  $U(1) \times U(1) \times U(1)$ . Entretanto, uma das simetrias  $U(1)$  está associada ao campo

“heterodoxo”  $Z_\mu$ , que não propaga nenhum grau de liberdade<sup>9</sup>, limitando o conteúdo dinâmico a um setor  $U(1) \times U(1)$ . De fato, a demonstração de que  $Z_\mu$  está fora do ambiente dinâmico é um dos resultados da aplicação do MPS. Já se antecipa, entretanto, que a incomum variação (2.35) terá contrapartida no estabelecimento dos vínculos que envolvem  $Z_\mu$  e seu momentum canonicamente conjugado. Surgem, correspondentemente, para vínculos primários, secundários e de fixação de *gauge*, expressões também incomuns.

As variáveis do espaço de fase presentes no projetor (2.29) têm sua definição, no caso específico de (2.32), dada pela correspondência

$$\begin{aligned} (A^0, A^1, A^2, \varphi, B^0, B^1, B^2, Z^0, Z^1, Z^2, \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_\varphi, P_0, P_1, P_2, \pi'_0, \pi'_1, \pi'_2) &\equiv \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15}, \xi_{16}, \xi_{17}, \xi_{18}, \xi_{19}, \xi_{20}) &. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Busca-se, então, definir os momenta  $\pi_i$ ,  $\pi_N$ ,  $P_i$  e  $\pi'_i$ . Tem-se:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} + m\varepsilon^{\nu 0\mu} B_\nu \Rightarrow \begin{cases} \pi^0 = 0 \\ \pi^i = -F^{0i} + m\varepsilon^{0ik} B_k \end{cases}, \quad (2.37)$$

onde já se percebe um vínculo primário<sup>10</sup> na definição de  $\pi^0$ . Para o campo  $B_\mu$ , vem:

$$P^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 B_\mu)} = -G^{0\mu} \Rightarrow \begin{cases} P^0 = 0 \\ P^i = -G^{0i} \end{cases}, \quad (2.38)$$

---

<sup>9</sup>Acrescente-se, ainda, que no modelo mais amplo, definido em (2.28), onde há acoplamento *gauge*/matéria, nenhum campo de matéria apresenta simetria de fase local que demande a presença de  $Z_\mu$  como correspondente conexão, ou, simplesmente, não há carga para  $U(1)_{Z_\mu}$ .

<sup>10</sup> $\pi^0 = 0$  é uma forma particular da expressão que define vínculos neste formalismo,  $\Omega(q, p) = 0$ .

lendo-se outro vínculo primário, na definição de  $P^0$ <sup>11</sup>. Para o escalar  $\varphi$ , vem:

$$\pi_\varphi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi. \quad (2.39)$$

Para  $Z_\mu$ , resulta:

$$\pi'^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 Z_\mu)} = (-m\varphi + \partial^\beta Z_\beta) \eta^{\mu 0} \Rightarrow \begin{cases} \pi'^0 = (+\partial^\beta Z_\beta - m\varphi) \\ \pi'^i = 0 \end{cases}, \quad (2.40)$$

oferecendo o registro de mais dois vínculos primários, associados às definições de  $\pi'^1$  e  $\pi'^2$ .

Lista-se, então, o conjunto de vínculos primários:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \pi_0 \approx 0, \\ \Omega_2 &= P_0 \approx 0, \\ \Omega_3 &= \pi'_1 \approx 0, \\ \Omega_4 &= \pi'_2 \approx 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Percebe-se, facilmente, a contrapartida da parametrização  $Z_\mu$  no conjunto de vínculos acima, com a incomum, e coerente<sup>12</sup>anulação (fraca, válida somente na sub-variedade definida pelos vínculos, onde se dá a dinâmica, e não em todo o espaço de fase) das componentes que indicariam dinâmica transversa para o campo. A (densidade de) Hamiltoniana primária[46] é dada por

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + v_i \Omega_i, \quad (2.42)$$

---

<sup>11</sup>As relações para  $\pi^i$  e  $P^i$  envolvem velocidades,  $\partial_0 A_i$  e  $\partial_0 B_i$ , que é o que se espera no mapeamento/transformação de Legendre que define o espaço de fase a partir do espaço de configurações.

<sup>12</sup>Em relação à variação (2.35).

onde  $v_i$  são multiplicadores de Lagrange, formalizando a estrutura de vínculos como informação dinâmica, e  $\mathcal{H}_c$  é a (densidade de) Hamiltoniana canônica, dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \pi^\mu \partial_0 A_\mu + P^\mu \partial_0 B_\mu + \pi'^\mu \partial_0 Z_\mu + \pi_\varphi \partial_0 \varphi - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{1}{2} P_i^2 + \frac{1}{2} \pi_\varphi^2 + \frac{1}{2} \pi_0'^2 + A_0 (\partial_i \pi_i) + B_0 (\partial_i P_i - m \varepsilon_{0ij} \partial_i A_j) \\
&\quad + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + m \varepsilon_{0ik} \pi_i B_k + \frac{1}{2} m^2 B_k B_k + \frac{1}{4} G_{ij} G_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \pi_0' (m \varphi + \partial_i Z_i) .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

As condições de consistência<sup>13</sup> impostas sobre os vínculos (2.41) levam aos seguintes vínculos secundários:

$$\Omega_5 = \partial_i \pi_i \approx 0 \quad , \quad \Omega_6 = \partial_i P_i - m \varepsilon_{0ij} \partial_i A_j \approx 0 \quad , \quad \Omega_7 = \pi_0' - f(t) \approx 0 , \tag{2.44}$$

para alguma função arbitrária  $f(t)$ . O conjunto  $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_7)$  é todo de primeira classe, indicando a liberdade de *gauge* associada ao produto  $U(1) \times U(1) \times U(1)$  que se apontou anteriormente. Introduzem-se, então, vínculos adicionais, de modo a prover total fixação de *gauge*, e obter, coerentemente, um conjunto de vínculos de segunda classe. Implementa-se o conjunto:

$$\begin{aligned}
\Omega_8 = A_0 \approx 0 \quad , \quad \Omega_9 = B_0 \approx 0 \quad , \quad \Omega_{10} = Z_1 \approx 0 \quad , \quad \Omega_{11} = Z_2 \approx 0 \\
\Omega_{12} = \partial_i A_i \approx 0 \quad , \quad \Omega_{13} = \partial_i B_i \approx 0 \quad , \quad \Omega_{14} = Z_0 \approx 0 ,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

onde se reconhece a imposição do gauge de Coulomb sobre os campos  $A_\mu$  e  $B_\mu$ , e do seu “análogo possível”, dada a estrutura de vínculos primários e secundários, sobre  $Z_\mu$ . Esta escolha, contudo, revela que a remoção de ambigüidades de definição do espaço de fase,

---

<sup>13</sup>Exige-se que  $\partial_0 \Omega_m = 0$ , ou seja, que a dinâmica não produza alterações nos vínculos que a definem.

ou seja, a fixação do *gauge*, requer a eliminação das coordenadas  $Z_\mu$  da sub-variedade dinâmica, definida pelos vínculos. A matriz dos vínculos,  $g_{mn}(x, y) = \{\Omega_m(x), \Omega_n(y)\}$ , inversível a partir de (2.45), tem os seguintes elementos não-nulos:

$$\begin{aligned} g_{8,1} = g_{9,2} = -g_{10,3} = -g_{11,4} = g_{14,7} = \\ -g_{1,8} = -g_{2,9} = g_{3,10} = g_{4,11} = -g_{7,14} = \delta^2(x-y) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$-g_{12,5} = -g_{13,6} = g_{5,12} = g_{6,13} = \partial_i^x \partial_i^y \delta^2(x-y) , \quad (2.47)$$

proporcionando a inversa  $g^{-1}(x, y)$ , cujos elementos  $g_{mn}^{-1}(x, y)$  não-nulos são:

$$\begin{aligned} g_{8,1}^{-1} = g_{9,2}^{-1} = -g_{10,3}^{-1} = -g_{11,4}^{-1} = g_{14,7}^{-1} = \\ -g_{1,8}^{-1} = -g_{2,9}^{-1} = g_{3,10}^{-1} = g_{4,11}^{-1} = -g_{7,14}^{-1} = -\delta^2(x-y) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$g_{12,5}^{-1} = g_{13,6}^{-1} = -g_{5,12}^{-1} = -g_{6,13}^{-1} = -\nabla^{-2}(x, y) . \quad (2.49)$$

Com isto, já foram identificadas, na especificidade de (2.32), todas as quantidades que participam da definição do projetor (2.29). As variáveis generalizadas do espaço de fase,  $\xi_i$ , relacionadas à parametrização original via (2.36), recebem, assim, a atuação bem definida de (2.29) segundo (2.31). Resultam:

$$\begin{aligned} \xi^{2*}(x) = A^{1\perp}(x) , \quad \xi^{3*}(x) = A^{2\perp}(x) , \quad \xi^{4*}(x) = \varphi(x) , \quad \xi^{6*}(x) = B^{1\perp}(x) , \quad \xi^{7*}(x) = B^{2\perp}(x) , \\ \xi^{12*}(x) = \pi^{1\perp}(x) + m \int d^2y \partial_{x_2} \nabla^{-2}(x, y) (\nabla_y \cdot B(y)) = \bar{\pi}^{1\perp}(x) , \\ \xi^{13*}(x) = \pi^{2\perp}(x) - m \int d^2y \partial_{x_1} \nabla^{-2}(x, y) (\nabla_y \cdot B(y)) = \bar{\pi}^{2\perp}(x) , \\ \xi^{14*}(x) = \pi_\varphi(x) , \\ \xi^{16*}(x) = P^{1\perp}(x) + m \partial_{x_1} \int d^2y \nabla^{-2}(x, y) (\nabla_y \times \mathbf{A}(y)) , \\ \xi^{17*}(x) = P^{2\perp}(x) + m \partial_{x_2} \int d^2y \nabla^{-2}(x, y) (\nabla_y \times \mathbf{A}(y)) , \end{aligned} \quad (2.50)$$

sendo as  $\xi^{i*}$  's não listadas iguais a zero. Perceba-se a ausência de qualquer referência a  $Z_\mu$  nas relações acima. O MPS assegura, portanto, a exclusão de  $Z_\mu$  da sub-variedade dinâmica definida pelos vínculos  $\Omega_m$ .

Completa-se a transferência da estrutura simplética para o subespaço físico com a obtenção da Hamiltoniana projetada. Inicialmente, tomam-se como plenas as igualdades fracas que definem os vínculos, implementando-as na (densidade de) Hamiltoniana primária. Em seguida, reescreve-se a expressão remanescente em termos das variáveis  $\xi^i$ , via (2.36), e, finalmente, substituem-se as  $\xi^i$  pelas suas correspondentes projetadas, definidas em (2.50). A densidade de Hamiltoniana que resulta lê-se<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* = & \frac{1}{2} (\xi_{12}^{*2} + \xi_{13}^{*2}) + \frac{1}{2} (\xi_{16}^{*2} + \xi_{17}^{*2}) + \frac{1}{2} \xi_{14}^{*2} + \frac{1}{2} (\partial_1 \xi_3^*)^2 + \frac{1}{2} (\partial_2 \xi_2^*)^2 + \\ & - (\partial_1 \xi_3^*) (\partial_2 \xi_2^*) - m (\xi_{12}^* \xi_7^* - \xi_{13}^* \xi_6^*) + \frac{1}{2} m^2 (\xi_6^{*2} + \xi_7^{*2}) + \frac{1}{2} (\partial_1 \xi_7^*)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_2 \xi_6^*)^2 - (\partial_1 \xi_7^*) (\partial_2 \xi_6^*) + \frac{1}{2} (\partial_1 \xi_4^*)^2 + \frac{1}{2} (\partial_2 \xi_4^*)^2 + \frac{1}{2} m^2 \xi_4^{*2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Com o formalismo inteiramente definido na sub-variedade dinâmica, as eqs. de movimento que determinam a evolução do sistema se resumem às usuais eqs. de Hamilton, expressas em termos de parênteses de Poisson tomados sobre variáveis projetadas  $\xi_i^*(x)$

<sup>15</sup> e a Hamiltoniana  $H^* \equiv \int d^2y \mathcal{H}^*(y)$ . Para  $\xi_4^*$ , resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_4^* &= \int d^2y \{ \xi_4^*(x), \mathcal{H}^*(y) \} = \xi_{14}^*(x) \rightarrow \\ \ddot{\xi}_4^*(x) &= \dot{\xi}_{14}^* = \int d^2y \{ \xi_{14}^*(x), \mathcal{H}^*(y) \} = \\ &= -m^2 \xi_4^*(x) + \nabla^2 \xi_4^*(x) \Rightarrow (\square + m^2) \xi_4^* = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

<sup>14</sup>Detalhes na Ref. [42].

<sup>15</sup>A métrica associada ao índice que identifica a variável generalizada é Euclideana:  $\xi_i^*(x) = \xi^{i*}(x)$ .

Da mesma forma, verificam-se eqs. de 2ª ordem acopladas para as variáveis (associadas a campos)  $\ddot{\xi}_2^*$ ,  $\ddot{\xi}_3^*$ ,  $\ddot{\xi}_6^*$  e  $\ddot{\xi}_7^*$ . Sem perda de generalidade, pode-se tomar o momentum paralelo ao eixo x, adotando  $\mathbf{k} = (k, 0)$ , e, assim, selecionando  $(A_2, B_2)$ , ou seja,  $(\xi_3^*, \xi_7^*)$ , como graus de liberdade transversos. Nesta situação,  $\xi_2^*$ ,  $\xi_6^*$  e  $\xi_{12}^*$  se anulam, enquanto  $\xi_{16}^*$  torna-se dependente de  $\xi_3^*$ . Os pares coordenada/momentum independentes se resumem a  $(\xi_3^*, \xi_{13}^*)$ ,  $(\xi_4^*, \xi_{14}^*)$  e  $(\xi_7^*, \xi_{17}^*)$ , e as eqs. de movimento são:

$$\begin{aligned}\square \xi_4^* &= -m^2 \xi_4^* , \\ \square \xi_3^* &= -m^2 \xi_3^* , \\ \square \xi_7^* &= -m^2 \xi_7^* .\end{aligned}\tag{2.53}$$

O MPS revela, portanto, a presença de três graus de liberdade degenerados em massa no espectro de (2.32), um de origem escalar e os outros dois de natureza vetorial.

Retoma-se, agora, o problema de se ter produzido, via redução dimensional, uma teoria com a desejável N=2-invariância, mas que contém termo de Chern-Simons misto e acoplamento não-mínimo da matéria com uma intensidade de campo que **não** se obtém a partir do potencial que define o acoplamento mínimo, ou seja, revisita-se o diagnóstico de espaço funcional “excessivo” em (2.28). Note-se que um eventual mapeamento de (2.28) em outra teoria, definida sobre um sub-espaço do espaço funcional que abriga (2.28), implementado via uma identificação de campos, pode, em princípio, produzir o conteúdo bosônico almejado. Não se deseja, contudo, abrir mão da invariância N=2, e, portanto, deve-se buscar um conjunto de identificações (campos e parceiros) que preserve a N=2-álgebra, traduzida pelas transformações de supersimetria dos campos da teoria. Passa-se,



então, a analisar o conjunto de transformações de *susy* perante o qual (2.28) é invariante. Antes disso, observe-se que as eqs. (2.53), resultado da aplicação do MPS sobre (2.32) (projeção bosônica do setor de *gauge* de (2.28)), indicam a *existência de espaço formal para a identificação dos dois potenciais de gauge,  $A_\mu$  e  $B_\mu$* , visto que as excitações a que estes campos se associam são idênticas. A idéia, portanto, é a de se promover identificação de *cópias* de realizações da N=2-super-álgebra.

## 2.4 Identificação de Campos

Tomam-se, então, as transformações de supersimetria N=2-D=3 perante as quais a ação (2.28) é invariante:

Multiplete de matéria:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_-X_+, \\
\delta S &= -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+(\not{D} - ihN)X_+ + h\bar{\varepsilon}_+\Lambda_-\varphi, \\
\delta X_+ &= 2S\varepsilon_+ + 2(hN\varphi - i\not{D}\varphi)\varepsilon_-, \\
\delta X_- &= 2S^*\varepsilon_- + 2(hN\varphi^* - i\not{D}\varphi^*)\varepsilon_+;
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Multiplete vetorial:

$$\begin{aligned}
\delta N &= -\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_+\Lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\Lambda_-), \\
\delta\Lambda_\pm &= (2\Delta + i\not{\partial}N)\varepsilon_\pm \pm \gamma_\mu\tilde{F}^\mu\varepsilon_\pm, \\
\delta\Delta &= -\frac{i}{2}(\bar{\varepsilon}_+\not{\partial}\Lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\not{\partial}\Lambda_-), \\
\delta\tilde{F}^\mu &= -\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_+\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\partial_\nu\Lambda_+ - \bar{\varepsilon}_-\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\partial_\nu\Lambda_-);
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Multiplete tensorial:

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{4}(\bar{\varepsilon}_+ \Xi_- - \bar{\varepsilon}_- \Xi_+), \\
\delta \Xi_{\pm} &= \pm 2(\not{\partial} M + i \partial_{\mu} Z^{\mu}) \varepsilon_{\mp} - 2i \gamma_{\mu} \tilde{G}^{\mu} \varepsilon_{\mp}, \\
\delta(\partial_{\mu} Z^{\mu}) &= \frac{1}{4}(\bar{\varepsilon}_+ \not{\partial} \Xi_- - \bar{\varepsilon}_- \not{\partial} \Xi_+), \\
\delta \tilde{G}^{\mu} &= -\frac{i}{4}(\bar{\varepsilon}_- \epsilon^{\mu\nu\lambda} \gamma_{\lambda} \partial_{\nu} \Xi_+ + \bar{\varepsilon}_+ \epsilon^{\mu\nu\lambda} \gamma_{\lambda} \partial_{\nu} \Xi_-).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Inspeção direta sobre os dois multipletes de *gauge*, (2.55) e (2.56), permite intuir imediatamente a viabilidade de uma identificação do tipo  $N \propto M$ ,  $\Lambda_{\pm} \propto \Xi_{\pm}$ ,  $\Delta \propto \partial_{\mu} Z^{\mu}$  e  $\tilde{F}^{\mu} \propto \tilde{G}^{\mu}$ , com, convenientemente,  $A_{\mu} \propto B_{\mu}$ . Se houver uma solução de coeficientes que permita escrever as transformações (2.56) a partir das transformações (2.55) com os campos substituídos pelos seus idênticos e vice-versa, ter-se-á encontrado uma identificação de campos N=2-consistente. Neste contexto, os dois multipletes de *gauge*, que compartilham da mesma (super)tensorialidade (daí a mesma estrutura de transformações), reduzir-se-iam a um único. Como previamente comentado, identificam-se N=2-cópias, o que não afeta a super-álgebra estendida. A redução do espaço funcional pode, em princípio, ameaçar a realização da N=2-*susy*. Mas, reitera-se, neste caso, a perda de graus de liberdade, associada ao mapeamento na teoria com o conteúdo bosônico desejado, é construída *a partir da prevalência da N=2-álgebra*, garantindo sua realização. Vale, contudo, a ressalva de que eventuais simetrias adicionais podem estar sendo inviabilizadas quando se implementa a identificação.

De qualquer modo, afirma-se que o procedimento aqui adotado, ainda que encontre espaço formal e seja dotado de consistência suficiente - preserve o que se deseja preservar

- é interpretado como *construção algorítmica*, prescindindo, *neste sentido*, de justificativa física.

A solução de coeficientes existe<sup>16</sup> e a identificação das duas N=2-cópias. vetorial e tensorial, se dá segundo

$$N \equiv -M, \quad \Delta \equiv -\frac{1}{2}\tilde{G}^3 = \frac{1}{2}\partial_\mu Z^\mu. \quad \Lambda_\pm \equiv \pm \frac{i}{2}\tilde{\Xi}_\mp, \quad (2.57)$$

além de, obviamente, como referência e razão de ser deste processo - buscam-se Chern-Simons diagonal e acoplamentos mínimo e não-mínimo unificados -  $A_\mu = B_\mu$  e  $\tilde{F}^\mu = \tilde{G}^\mu$ . A implementação das identificações (2.57) na ação (2.28) produzirá, após reescalamentos necessários à geração dos termos cinéticos na forma canônica, a teoria 3D Maxwell-Chern-Simons-Matéria mínima e não-minimamente acoplados, dotada de invariância supersimétrica estendida N=2 em sua formulação *off-shell*. Responde-se, assim, à demanda que se verificou na literatura. A nova ação N=2-D=3, pós-identificação de campos, escreve-se:

$$\begin{aligned} S_{MCS}^{N=2} = & \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + 2\Delta^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N + 2mN\Delta - hv^2\Delta + \right. \\ & + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_-(i\cancel{\partial} + m)\Lambda_- + e^{2gN} \left[ (\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* - (hN - 2g\Delta)^2\varphi\varphi^* + \right. \\ & + \frac{1}{4}(hN - 2g\Delta)X_+X_+ + \frac{i}{8}(\bar{X}_-\cancel{\nabla}_-X_- + \bar{X}_+\cancel{\nabla}_+X_+) + \\ & \left. + \frac{ig}{2}(\bar{\Lambda}_+\cancel{\nabla}\varphi X_- - \bar{\Lambda}_-(\cancel{\nabla}\varphi)^*X_+) - \frac{g}{2}(hN - 2g\Delta)(\bar{\Lambda}_+X_-\varphi + \bar{\Lambda}_-X_+\varphi^*) + \right. \end{aligned}$$

---

<sup>16</sup>E não é única. No próximo capítulo, essa discussão se dará em ambiente mais apropriado. A idéia, neste caso, é ajustar coeficientes a partir de  $A_\mu = B_\mu$ .

$$\begin{aligned}
& -\frac{ig^2}{2}\partial_\mu N (\bar{X}_-\gamma^\mu\Lambda_+\varphi^* - \bar{\Lambda}_+\gamma^\mu X_-\varphi) - i\frac{g^2}{2}\varphi^*\varphi (\bar{\Lambda}_+\not{\partial}\Lambda_+ + \bar{\Lambda}_-\not{\partial}\Lambda_-) + \\
& +\frac{g^2}{h}\left(\frac{1}{2}(\bar{\Lambda}_+\gamma^\mu J_\mu\Lambda_+ - \bar{\Lambda}_-\gamma^\mu J_\mu\Lambda_-) + \bar{\Lambda}_+\Lambda_+h(hN - 2g\Delta)\varphi\varphi^*\right) + \\
& +\varphi\varphi^*(2h\Delta + 2gh\bar{\Lambda}_+\Lambda_+ - g^2\partial_\mu N\partial^\mu N) + \\
& -\frac{h}{2}(\varphi\bar{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\bar{X}_-\Lambda_+) + \left[S + \frac{g}{2}\bar{X}_-\Lambda_- - \frac{g^2}{2}\varphi\bar{\Lambda}_+\Lambda_- \right]^2 \Bigg\}, \tag{2.58}
\end{aligned}$$

onde a primeira linha exibe Maxwell-Chern-Simons (diagonal) e o termo  $(\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^*$  representa os acoplamentos mínimo e não-mínimo pretendidos:

$$\nabla_\mu\varphi = \left(\partial_\mu + ihA_\mu + ig\bar{F}_\mu\right)\varphi. \tag{2.59}$$

Acrescenta-se, ainda, como última parcela da 1ª linha, um termo de Fayet-Iliopoulos[50]. Sua conseqüência, produzir quebra espontânea de simetria, será exaustivamente analisada na seção e capítulos subseqüentes. A introdução deste termo pode ser feita, equivalentemente, em formalismo de N=1-D=4-superespaço/supercampos, via  $\mathcal{L}_{\text{FI}} = -\frac{1}{16}hv^2\mathcal{V}$ . Sua redução dimensional, contudo, é trivial: tanto no superespaço, quanto no espaço usual, resume-se a um escalar. Por isto, sua inserção diretamente em 3D.

Note-se, também, a presença de um escalar neutro, o campo  $N$ , compondo o setor bosônico de (2.58). Na Ref. [6], Navrátil dispensa, intencionalmente, um tal ingrediente, às expensas da promoção N=1  $\rightarrow$  N=2 alcançada só ter validade *on-shell*. Em trabalhos anteriores ([13, 14, 16]), um escalar neutro surge como viabilizador de regime auto-dual (relações de Bogomol'nyi), o que, na especificidade de [6], revela-se desnecessário. Uma interessante abordagem à promoção N=1 $\rightarrow$ N=2, realizada diretamente em 3D, e visando obter extensão N=2 *off-shell* para Maxwell-Chern-Simons/Matéria em acoplamento mínimo, é desenvolvida com sucesso na Ref. [19]. Verifica-se, também naquele

caso, a presença do campo escalar neutro, introduzido como componente de um super-campo escalar real extra necessário a uma composição, com o N=1-multiplete vetorial, que realize a N=2-super-álgebra. No procedimento que apresentamos em [5], o campo  $N$  justifica-se, naturalmente, tanto como parceiro do campo tensorial  $B_{\mu\nu}$ , quanto, agora identicamente, como componente adicional (do ponto de vista de  $SO(1,2)$ ) do vetor  $A_{\hat{\mu}}$ , para  $\hat{\mu} = 3$ , ou seja, como fruto da redução dimensional.

Observe-se, finalmente, que a realização *off-shell* de uma teoria descrevendo acoplamento não-mínimo entre Maxwell-Chern-Simons e Matéria, em  $3D$ , *invariante por supersimetria estendida N=2*, **não requer nenhuma relação específica entre os parâmetros da teoria** (massa e constantes de acoplamento,  $h$  e  $g$ ), como se afirma em [6]. Dependências entre parâmetros também surgem como condições necessárias à extensão N=2 (e. assim. à auto-dualidade) em [13] e [16], em regime de acoplamento mínimo. Entretanto, nestes dois trabalhos, o vínculo que se estabelece é entre o parâmetro associado ao potencial de Higgs e a constante de acoplamento mínimo. No que aqui se propõe, tal relação é automática. Não se parte, no que aqui se apresenta, de um potencial do tipo  $\lambda(\phi - v^2)^2$ , mas de interações mínima e não-mínima gerais, em ambiente supersimétrico covariante (2.1). Na próxima seção, mostra-se que esta abordagem é *suficiente* para gerar um potencial que, em certos limites, reproduz o potencial de Higgs<sup>17</sup>. Reconhece-se a particularidade de  $g_{\text{crit.}} = -e/m$ , e, no que se segue, esta relação será adotada na investigação do es-

---

<sup>17</sup>Previsivelmente, os campos auxiliares, tomados *on-shell*, têm papel decisivo neste resultado. A proposta de interação tipo  $\lambda\phi^4$ , em ambiente covariante N=1-D=4, também se realiza via auxiliares *on-shell* [51].

pectro associado a (2.58). Entretanto, e tome-se (2.58) como demonstração, reitera-se: nem a supersimetria  $N=2$  *off-shell*, nem a conseqüente auto-dualidade - *bound* e eqs. de Bogomol'nyi - têm o acoplamento crítico como requisito.

Na próxima seção, aborda-se a projeção bosônica do modelo acima, com o objetivo de investigar eventual auto-dualidade do sistema, ou seja, visando obter, para a teoria definida em (2.58), relações de Bogomol'nyi: cota inferior para o funcional de energia e eqs. de 1ª ordem na saturação dessa cota. Havendo tal regime, viabiliza-se a busca de excitações como vórtices topológicos.

## 2.5 Projeção Bosônica e Acoplamento Crítico

Investigam-se, então, configurações no regime de mínima energia associado a (2.58). Toma-se, como ponto de partida, uma reparametrização da ação (2.58), dada, agora, em termos do campo  $M$ ,  $M = -N$ , e com as redefinições  $g \rightarrow -g$  e  $h \rightarrow -e$  [32]. O setor bosônico do Lagrangeano assume, então, a expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{bóson}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}G\partial_\mu M\partial^\mu M + e^{2gM}(\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* + \frac{m}{2}A_\mu\tilde{F}^\mu \\ & + \{2\Delta^2 - 2mM\Delta + ev^2\Delta - e^{2gM}|\varphi|^2 [(eM + 2g\Delta)^2 + 2e\Delta]\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde  $\nabla_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu - ig\tilde{F}_\mu)\varphi$ , e  $G \equiv 1 - 2g^2e^{2gM}|\varphi|^2$ .<sup>18</sup> Tomam-se, para o que se segue, campos auxiliares *on-shell*. De fato,  $\mathcal{L}_{\text{bóson}}$  já incorpora a eq. de movimento para o auxiliar de matéria, o campo  $S$ , que se escreve totalmente em termos de campos

<sup>18</sup>No que se segue,  $g^2|\phi|^2 < 1$ . A supersimetria garante a positividade da energia.

fermiônicos, levando, na projeção bosônica, a  $S = 0$ . A equação de movimento para o auxiliar  $\Delta$  escreve-se:

$$\Delta = \frac{e}{4G} \left( 2e^{2gM} |\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e} M + 4ge^{2gM} |\varphi|^2 M \right), \quad (2.61)$$

e sua substituição em (2.60) produz:

$$\mathcal{L}_{\text{bóson}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} G \partial_\mu M \partial^\mu M + e^{2gM} (\nabla_\mu \varphi) (\nabla^\mu \varphi)^* + \frac{m}{2} A_\mu \tilde{F}^\mu - U, \quad (2.62)$$

onde o potencial  $U = U(M, \varphi)$  merece a seguinte tradução:

$$U = \frac{e^2}{8G} \left( 2e^{2gM} |\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e} M + 4ge^{2gM} |\varphi|^2 M \right)^2 + e^2 M^2 e^{2gM} |\varphi|^2. \quad (2.63)$$

Adotam-se, ainda, as seguintes parametrizações: 1- o campo escalar complexo assume forma composta,  $\phi$ , definido segundo

$$\phi \equiv \sqrt{2} e^{gM} \varphi,$$

e, portanto, mapeia-se, no espaço funcional,  $(M, \varphi) \rightarrow (M, \phi)$ ; 2- a corrente (U(1)) conservada absorve esta definição de  $\phi$  e vale

$$\mathcal{J}_\mu = \frac{ie}{2} (\phi^* \nabla_\mu \phi - \phi \nabla_\mu \phi^*). \quad (2.64)$$

Adicionalmente, é útil definir uma corrente associada ao campo escalar original,  $\varphi$ , e ao acoplamento mínimo, a saber,  $H_\mu = -\frac{ie}{2} (\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi D_\mu \varphi^*)$ . Esta corrente participa de identidades que tornam manifestas, na análise do funcional de energia, a existência de cota inferior não-trivial e a prevalência de eqs. de 1ª ordem na saturação desta cota. A parametrização  $\phi$  compõe, junto com o potencial de *gauge*  $A_\mu$ , as configurações de vórtice

que o sistema admite. Na busca de tais excitações, portanto, reescreve-se o potencial tipo-Higgs (2.63) na forma

$$U = \frac{e^2}{8G} \left( |\phi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e}M + 2g|\sigma|^2 M \right)^2 + \frac{e^2}{2} M^2 |\phi|^2. \quad (2.65)$$

Observe-se que, para  $g = 0$ , obtém-se o potencial de Higgs supersimétrico, em regime de acoplamento mínimo, apresentado na Ref. [14], já verificando, *automaticamente*, o vínculo entre parâmetros  $\lambda = e^2/8$ . Este potencial apresenta dois mínimos degenerados: uma fase que proporciona a investigação de configurações de vórtices topológicos, ( $|\phi|^2 = v^2$ ,  $M = 0$ ), e outra que se associa a vórtices não-topológicos, ( $|\phi|^2 = 0$ ,  $M = ev^2/2m$ ). O ambiente para vórtices *topológicos* é novo para N=2 MCS/Matéria em regime de acoplamento mínimo e não-mínimo. Em [29], um potencial tipo  $m^2|\phi|^2$  é tomado como condição necessária à verificação de relações auto-duais. Em [6] e [30], este mesmo potencial, que proíbe vórtices  $(\phi, A_\mu)$  em configuração *topológica* de mínima energia, é apresentado como uma condição, entre outras, para a extensão N=2.

Na análise de configurações  $(\phi, A_\mu)$ , utiliza-se a eq. de movimento para o campo  $A_\mu$ :

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} + m\tilde{F}^\rho = -\mathcal{J}^\rho - \frac{g}{e}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\mathcal{J}_\nu \quad (2.66)$$

$$\xrightarrow{\text{comp. zero}} \partial_i E_i + mB - \frac{g}{e}\varepsilon_{ij}\partial_i\mathcal{J}_j - \mathcal{J}_0 = 0. \quad (2.67)$$

Integrando-se a última equação, (2.67), em todo o espaço, anulam-se as contribuições de  $\partial_i E_i$  - campo de *gauge* massivo, configuração da intensidade levando a fluxo nulo no infinito - e de  $(g/e)\varepsilon_{ij}\partial_i\mathcal{J}_j$  - na hipótese (física) de energia finita, circulação da corrente nula no infinito. Resulta, então,

$$Q = m\Phi_B, \text{ com } \Phi_B \equiv \int d^2x B, \quad (2.68)$$



associando às configurações de vórtice uma carga de natureza topológica, o fluxo magnético.

Verfica-se, agora, a prevalência de relações de Bogomol'nyi no modelo proposto. Adota-se, como estratégia para exibir este fato, a manipulação do funcional de energia. No próximo capítulo, uma abordagem estritamente algébrica revisita a auto-dualidade. O funcional de energia (*improved* para o campo de *gauge*,  $A_\mu$ ) escreve-se:

$$\mathcal{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}G(B^2 + E^2) + \frac{1}{2}G\partial_0 M\partial_0 M + \frac{1}{2}G\partial_i M\partial_i M + e^{2gM}(D_0\varphi)(D_0\varphi)^* + e^{2gM}(D_i\varphi)(D_i\varphi)^* + U \right\}. \quad (2.69)$$

Com o uso da expressão (2.63) para o potencial  $U$ , e manipulando-se para completar quadrados, vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}G \left[ B \mp \frac{e}{2G} \left( 2e^{2gM}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e}M + 4ge^{2gM}|\varphi|^2 M \right) \right]^2 \right. \\ \pm eB \left( e^{2gM}|\varphi|^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{m}{e}M + 2ge^{2gM}|\varphi|^2 M \right) + \frac{1}{2}G(E_i \pm \partial_i M)^2 \\ \mp GE_i\partial_i M + e^{2gM} \left( |D_0\varphi \mp ieM\varphi|^2 \pm 2MH_0 + |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + \right. \\ \left. \pm \frac{1}{e}\epsilon_{ij}\partial_i H_j \mp eB|\varphi|^2 \right) + \frac{1}{2}G\partial_0 M\partial_0 M \left. \right\}. \quad (2.70) \end{aligned}$$

Utilizando-se, agora, as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e}e^{2gM}\epsilon_{ij}\partial_i H_j &= -\frac{1}{2e}\epsilon_{ij}\partial_i \mathcal{J}_j + \frac{1}{2e}\partial_i E_i + \frac{g}{e}\epsilon_{ij}(\partial_i M)\mathcal{J}_j - 2g^2e^{2gM}|\varphi|^2 E_i\partial_i M \\ 2e^{2gM}H_0 &= -\mathcal{J}_0 - 2ege^{2gM}|\varphi|^2 B, \end{aligned}$$

e, ainda, a “lei de Gauss”, (2.67), e realizando-se integrações por partes, com dispensa de termos de fronteira, obtém-se a seguinte expressão para o funcional de energia:

$$\mathcal{E} = \mp \frac{ev^2}{2}\Phi_B + \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}G \left[ B \mp \frac{e}{2G} \left( 2e^{2gM}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e}M + 4ge^{2gM}|\varphi|^2 M \right) \right]^2 \right.$$

$$+ \frac{1}{2}G(E_i \pm \partial_i M)^2 + e^{2gM} \left( |D_0\varphi \mp ieM\varphi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 \right) + \frac{G}{2}(\partial_0 M)^2 \} (2.71)$$

onde fica evidente a existência de uma cota inferior para  $\mathcal{E}$  proporcional à carga topológica/fluxo magnético, ou seja, a presença de um *bound* de Bogomol'nyi<sup>19</sup>. Além disto, percebe-se a saturação desta cota na prevalência das seguintes eqs. diferenciais de 1ª ordem:

$$B \mp \frac{e}{2G} \left( 2e^{2gM}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e}M + 4ge^{2gM}|\varphi|^2M \right) = 0$$

$$E_i \pm \partial_i M = 0$$

$$D_0\varphi \mp ieM\varphi = 0 \quad (2.72)$$

$$(D_1 \pm iD_2)\varphi = 0$$

$$\partial_0 M = 0. \quad (2.73)$$

Note-se que a saturação do *bound* pede configuração estática, conforme (2.73)<sup>20</sup>. Na parametrização  $(M, \phi)$ , fica:

$$B \mp \frac{e}{2G} \left( |\phi|^2 - v^2 + \frac{2m}{e}M + 2g|\phi|^2M \right) = 0$$

$$A_0 \pm M = 0$$

$$\nabla_1\phi \pm i\nabla_2\phi = 0, \quad (2.74)$$

$$\text{e, ainda, } \partial_0 M = 0.$$

---

<sup>19</sup>Uma abordagem geral às relações de Bogomol'nyi, com estudo de diferentes modelos, no ambiente da técnica de manipulação do funcional de energia, encontra-se em [52].

<sup>20</sup>De fato,  $\partial_0 M = 0$  implica, via  $E_i \pm \partial_i M = 0$ , também  $\partial_0 E_i = 0$ . Tomando, ainda,  $\varphi^*(D_0\varphi - ieM\varphi) + \varphi((D_0\varphi)^* + ieM\varphi^*) = 0$ , chega-se a  $\partial_0|\varphi|^2 = 0$ . Daí, com  $\partial_0 M = 0$ , obtém-se  $\partial_0 B = 0$ . A configuração estática é, assim, uma exigência da saturação do *bound*[14], não havendo necessidade de antecipá-la.

Adota-se, agora, o regime de acoplamento crítico, tomando-se

$$g_c = -\frac{e}{m}. \quad (2.75)$$

Esta relação, desnecessária, nesta proposta, à extensão  $N=2$ , e reivindicada em [6] como obrigatória para a construção ali apresentada, traz, de qualquer modo, um regime especial às teorias de Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo à matéria. Notavelmente, este vínculo, que surge em [6] e [30] por razões de natureza (super)algébrica, associa-se à estatística fracionária em  $3D$  e à descrição de *anyons*[26, 27]. No modelo que aqui se propõe, a prevalência de (2.75) reduz a eq. de movimento para o campo  $A_\mu$  à 1ª ordem, reproduzindo uma característica do modelo de Chern-Simons puro<sup>21</sup>. Fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu &= -m\tilde{F}_\mu \\ \text{comp. zero} \rightarrow & m \left( 1 - \frac{e^2}{m^2}|\phi|^2 \right) B = e^2 A_0 |\phi|^2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Definindo-se um novo parâmetro,  $\gamma$ , via  $m \equiv \gamma ev$ , restrito a  $\gamma > 1$  (ou, equivalentemente, a  $\gamma < -1$ ) de modo a manter a energia positiva-definida<sup>22</sup>, e empregando  $A_0 = \mp M$ , vem, a partir de (2.76), a relação

$$B = \mp \gamma ev M \frac{|\phi|^2}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2}. \quad (2.77)$$

<sup>21</sup>Esta razão “operacional” motiva, originariamente, a adoção, em [29], do acoplamento crítico.

<sup>22</sup>Este controle reside na escolha arbitrária do parâmetro associado ao termo de Fayet-Iliopoulos. O sinal deste termo, bem como a forma da constante  $ev^2$  que o parametriza são ajustados de modo a viabilizar a configuração  $|\phi|^2 = v^2$ . A magnitude de  $v$ , contudo, fica à disposição para regular a positividade da energia e caracterizar  $|\phi|^2 = v^2$  como solução em regime de mínima energia.

Reexpressando a primeira das eqs. (2.74) na forma

$$B = \pm \frac{ev^2}{2} \frac{|\phi|^2 - v^2}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2} \gamma^2 \pm \gamma ev M, \quad (2.78)$$

determinam-se, com a combinação de (2.77) e (2.78),  $M$  e  $B$  em função de  $|\phi|^2$ :

$$M = -\frac{(|\phi|^2 - v^2)}{2\gamma v}, \quad (2.79)$$

$$B = \pm \frac{e}{2} \frac{|\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2}. \quad (2.80)$$

Percebendo (2.65) como  $U = \frac{1}{2}GB^2 + \frac{e^2}{2}M^2|\phi|^2$ , escreve-se, finalmente,

$$U_{\text{crítico}} = \frac{e^2}{8} \frac{|\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2}{(m^2/e^2) - |\phi|^2}. \quad (2.81)$$

Note-se, neste potencial, que o limite  $m \rightarrow \infty$ , tomado com  $e^2/m$  constante, reproduz, como se poderia esperar, em ambiente em que já prevalece equação de *gauge* de 1<sup>a</sup> ordem, um potencial típico de um modelo de Chern-Simons puro, conforme [12], [14]. Observe-se, ainda, em comparação com o exposto em [6] e [30], o que resulta da “extensão” do espaço funcional - inclusão do escalar neutro  $M$  - aqui adotada, em relação ao conjunto de campos “suficiente” para descrever Maxwell-Chern-Simons/Matéria em acoplamento não-mínimo,  $\phi$  e  $A_\mu$ , adotado naqueles trabalhos. O descarte, intencional, de  $M$  em [6] restringe o modelo ali apresentado a uma (super)simetria N=2 prevalente apenas *on-shell*, condicionada a uma relação crítica entre parâmetros e, ainda, a um potencial na forma  $U = |\phi|^2$ , que proíbe configurações de vórtices topológicos. No modelo que aqui se propõe, a relação crítica, *desnecessária* à prevalência de N=2 *off-shell*, quando implementada, ou seja, quando se verifica *o único regime admitido em [6] e [30]*, **exclui** o campo  $M$  como grau de liberdade adicional (ver (2.79)), eliminando, consistentemente, o “excesso”, e,

ainda, proporciona um potencial que admite, em princípio, configurações não-topológicas (as únicas possíveis naquelas referências) e *topológicas*. Percebe-se, portanto, a presença do campo escalar neutro como fato necessário e associado à ambientação própria do conjunto MCS/Matéria/acoplamento não-mínimo e auto-dualidade, ou seja, à qualificação deste conteúdo em contexto N=2-covariante.

A investigação de eventuais configurações de vórtices se dá a partir do seguinte *ansatz*, com a premissa de simetria rotacional:

$$\phi(r, \theta) = v R(r) e^{in\theta}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{A} = -\frac{\hat{\theta}}{er} [a(r) - n]. \quad (2.83)$$

No *ansatz* acima,  $R(r)$  e  $a(r)$  são funções reais de  $r$  e  $n$ , a vorticidade, é um inteiro que indexa a carga topológica da configuração. O campo magnético e seu fluxo valem:

$$B = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \rightarrow \Phi_B = \frac{2\pi}{e} [a(0) - a(\infty)]. \quad (2.84)$$

A equação  $(\nabla_1 \pm i\nabla_2)\phi = 0$  e a combinação de (2.84) e (2.80), admitindo-se os campos com a expressão-tentativa (2.82,2.83), reescrevem-se na forma:

$$\left(1 - \frac{R^2}{\gamma^2}\right) \frac{dR}{dr} \mp \frac{a}{r} R = 0, \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{r} \frac{da}{dr} \pm \frac{e^2 v^2 R^2 (R^2 - 1)}{2(\gamma^2 - R^2)} = 0. \quad (2.86)$$

Condições de contorno apropriadas para cada fase, topológica e não-topológica, com a premissa comum de energia finita (parametrizando o comportamento no infinito) e comportamento não-singular (controlando  $R(0)$  e  $a(0)$ ), associadas às eqs. (2.85) e (2.86),

permitem verificar, com abordagem numérica, a presença de vórtices topológicos e não-topológicos no espectro deste modelo. Os detalhes desta análise encontram-se em [32] e [53]. Como exemplo destas condições, para a configuração topológica prevalecem:  $R(\infty) = 1$ ,  $a(\infty) = 0$ ,  $nR(0) = 0$ ,  $a(0) = n$ . Com isto, o fluxo (2.84) resulta quantizado:  $\Phi_B = \frac{2\pi}{e} [a(0) - a(\infty)] = 2\pi n/e$ .

Revisita-se, a partir do próximo capítulo, toda a construção e análise deste modelo. Em formulação *susy*-covariante de superespaço/supercampo, parte-se do *ansatz* N=1-D=4, retoma-se sua redução dimensional, a identificação N=2-consistente, a manifestação de auto-dualidade com a correspondente obtenção de *bound* para a energia e eqs. de 1<sup>a</sup> ordem na saturação deste *bound*, e a leitura desta cota como carga central na álgebra N=2. A generalidade deste modelo, que define-se com liberdade paramétrica e riqueza de espectro, abrigando inéditas configurações de vórtices topológicos, merece abordagem formal que aqui se inicia, com o intuito de investigar eventuais propriedades adicionais que, numa abordagem em campos-componentes, não se percebem facilmente.

## Capítulo 3

# Formulação Covariante: o ambiente Superespaço/Supercampos

Tendo sido alcançado o objetivo de estabelecer uma versão  $N=2$  *off-shell* para o modelo de Maxwell-Chern-Simons acoplado mínima e não-minimamente à matéria escalar (e aos seus parceiros), com o conseqüente registro de eqs. auto-duais de primeira ordem - eqs. de Bogomol'nyi -, prevalentes na saturação de uma manifesta cota inferior para o funcional de energia - limite de Bogomol'nyi, e confirmada a presença de vórtices topológicos entre as excitações que o modelo descreve, adota-se, a partir deste Capítulo, a proposta de aprofundar a investigação de aspectos formais associados à construção do modelo. Inicialmente, retoma-se o *ansatz* original, a ação  $N=1-D=4$  definida no ambiente superespaço/supercampos, eq.(2.1), e reformula-se toda a seqüência algorítmica empregada na geração do modelo-alvo, atendo-nos, desta vez, ao ambiente covariante próprio, ou seja, promovendo redução dimensional e identificação de campos **no superespaço**.

Busca-se, nesta formulação covariante, permitir a percepção de eventuais propriedades e/ou simetrias adicionais de difícil verificação na parametrização por componentes<sup>1</sup>; recuperar, de forma concisa e categórica, as informações algébricas associadas ao procedimento de identificação; preparar o contexto apropriado a uma eventual extensão quântica do modelo, que demanda o formalismo de supercampos como viabilizador operacional da determinação de correções, tarefa de difícil execução se proposta sobre a usual extensão de Lagrangeanos supersimétricos expressos em campos-componentes.

### 3.1 Redução Dimensional no Superespaço

Partindo da ação (2.1), adotaremos a mesma estratégia empregada na abordagem em campos-componentes, com a qualificação adicional de tomarmos supercampos, medidas do superespaço, cargas e derivadas covariantes como entradas do algoritmo que apresentamos no capítulo anterior. Essencialmente, agrupamos espinores - supercampos espinoriais, coordenadas do superespaço, cargas e derivadas, campos-componentes espinoriais

---

<sup>1</sup>Como exemplo do alcance da abordagem covariante no contexto específico de modelos auto-duais (presença de relações de Bogomol'nyi), sugere-se a Ref.[54]. Neste trabalho, demonstra-se a unicidade do potencial associado a modelos supersimétricos auto-duais que possam ser expressos, exclusivamente, em termos da super-intensidade vetorial,  $W$ . A relação usual entre potenciais de modelos supersimétricos e campos auxiliares, aliada à clareza que a expansão definidora do supercampo  $W$  empresta à seleção dos acoplamentos consistentes (por *susy*) do campo auxiliar catalizam a demonstração da unicidade alegada. Esta unicidade permite apontar convergências entre modelos mais ortodoxos, com cinemática de *gauge* definida por um termo de Maxwell, e modelos mais sofisticados, como as versões supersimétricas de teorias de Born-Infeld [55], que despertam interesse recente como provedoras de dinâmica para as “D-branas” [56].



presentes na expansão de qualquer supercampo - apresentados, em  $4D$ , como espinores de Weyl, em espinores de Majorana (4-componentes) na representação de Weyl. Coordenadas, supercampos e campos-componentes assumem, então, a forma geral:

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_a \\ \bar{\theta}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} \equiv \begin{pmatrix} W_a \\ \bar{W}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_a \\ \bar{b}^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Com estes espinores de 4-componentes, e adotando a mesma representação de matrizes de Dirac do capítulo anterior, eqs. (2.12), produzimos expressões invariantes por troca de representação espinorial e passamos à representação de Majorana conveniente (diagonal)(2.22), construída de modo a deflagrar, automaticamente, o *splitting* de cada espinor, originalmente  $4D$ , em dois espinores independentes perante  $SO(1,2)$ , e, portanto, promover a redução dimensional. O ambiente  $3D$  se estabelece, completamente, como já vimos, com a atribuição de caráter  $3D$ -escalar às componentes tensoriais associadas à dimensão compactada e a anulação da dependência de qualquer campo na coordenada que parametriza essa dimensão,  $\partial_3 (\forall \text{ campo}) = 0$ .

Esquemáticamente, categorizamos setores que compõem a (super-)ação a ser dimensionalmente reduzida percebendo-os como cinco diferentes tipos de “entrada” para o algoritmo que adotamos: a medida de integração completa  $N=1-D=4$ ,  $d^2\theta d^2\bar{\theta}$ , a medida quirial,  $d^2\theta$ , o setor de supercampos espinoriais,  $\frac{-1}{8}W^a W_a$ , o setor de supercampos escalares,  $\frac{-1}{2}\mathcal{G}^2 + \frac{1}{2}m\mathcal{V}\mathcal{G} + \frac{1}{16}\bar{\Phi} e^{2h\mathcal{V}} e^{4g\mathcal{G}} \Phi$ , e a expansão (em  $\theta, \bar{\theta}$ , agrupados em  $\Theta$ ) de cada um dos supercampos presentes em (2.1), quais sejam,  $W_a$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{V}$  e  $\Phi(\bar{\Phi})$ . Com exceção do quarto setor acima listado, o dos supercampos escalares, que mantém sua

expressão inalterada pela redução dimensional (embora suas expansões sofram, obviamente, as conversões necessárias), os demais percorrem o processo comentado: notação de 4-componentes, troca de representação, *splitting* e redução dimensional. Em particular, aplica-se o procedimento, também, às cargas e derivadas covariantes de supersimetria, de natureza espinorial, o que produz, na ocorrência do *splitting*, a promoção da supersimetria de N=1, em D=4 (uma carga perante SO(1,3)), a N=2, em D=3 (duas cargas perante SO(1,2)).

Em notação de 4-componentes, em forma invariante por troca de representação espinorial, temos as seguintes expansões 4D para os supercampos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & C + \bar{\Theta}B + \bar{\Theta}\Theta E - i\bar{\Theta}\Gamma_5\Theta F - \frac{1}{2}\bar{\Theta}\Gamma_5\Gamma^{\hat{\mu}}\Theta A_{\hat{\mu}} + \\ & + (\bar{\Theta}\Theta)\bar{\Theta} \left( \Lambda - \frac{i}{2}\Gamma^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}B \right) + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}\Theta)^2 \left( \Delta - \frac{1}{4}\square C \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{2}M - \frac{i}{4}\bar{\Theta}\Gamma_5\Xi + \frac{1}{4}\bar{\Theta}\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma_5\Theta\tilde{G}_{\hat{\mu}} + \frac{1}{8}(\bar{\Theta}\Theta)(\bar{\Theta}\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma_5\partial_{\hat{\mu}}\Xi) - \frac{1}{16}(\bar{\Theta}\Theta)^2\square M \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \varphi + (\bar{\Theta}\Gamma_L X) + (\bar{\Theta}\Gamma_L\Theta)S - \frac{i}{2}(\bar{\Theta}\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma_5\Theta)\partial_{\hat{\mu}}\varphi + \\ & - \frac{i}{2}(\bar{\Theta}\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma_5\Theta)(\bar{\Theta}\Gamma_L\partial_{\hat{\mu}}X) - \frac{1}{8}(\bar{\Theta}\Theta)^2\square\varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\alpha} = & \Lambda_{\alpha} + \left[ 2\delta_{\alpha\beta}\Delta + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}[\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\nu}}]\right)_{\alpha\beta} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] \Theta_{\beta} + \\ & + \frac{i}{2}(\Gamma_5)_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\mu}}\Lambda_{\beta})(\bar{\Theta}\Gamma^{\hat{\mu}}\Gamma_5\Theta) + \frac{i}{2}\Gamma^{\hat{\mu}}_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\mu}}\Lambda_{\beta})(\bar{\Theta}\Theta) + \\ & + \frac{i}{2}(\Gamma_5\Gamma^{\hat{\mu}})_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\mu}}\Lambda_{\beta})(\bar{\Theta}\Gamma_5\Theta) + \frac{i}{2}\Gamma^{\hat{\mu}}_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\mu}}\Delta)\Theta_{\beta}(\bar{\Theta}\Theta) + \\ & + \frac{i}{2}(\Gamma_5\Gamma^{\hat{\mu}})_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\mu}}\Delta)\Theta_{\beta}(\bar{\Theta}\Gamma_5\Theta) + \frac{i}{8}\left(\Gamma_5\left(\frac{i}{2}[\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\nu}}]\right)\Gamma^{\hat{\rho}}\right)_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\rho}}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}})\Theta_{\beta}(\bar{\Theta}\Theta) + \\ & + \frac{i}{8}\left(\left(\frac{i}{2}[\Gamma^{\hat{\mu}}, \Gamma^{\hat{\nu}}]\right)\Gamma^{\hat{\rho}}\right)_{\alpha\beta}(\partial_{\hat{\rho}}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}})\Theta_{\beta}(\bar{\Theta}\Gamma_5\Theta) - \frac{1}{8}\square\Lambda_{\alpha}(\bar{\Theta}\Theta)^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o índice espinorial não contraído em (3.5) é a exceção à propriedade de invariância

sob troca de representação (o que não afeta o termo  $W^a W_a$  da ação, que, como veremos, tem expressão invariante), e as componentes espinoriais, variáveis do superspaço e supercampo  $\mathcal{W}$  são descritos pelas expressões (2.12), (2.22) e por

$$\begin{aligned}
B^{\text{Weyl}} &\equiv \begin{pmatrix} b_a \\ \bar{b}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow B^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} ; & \Lambda^{\text{Weyl}} &\equiv \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \bar{\lambda}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} \lambda \\ \eta \end{pmatrix} \\
\Xi^{\text{Weyl}} &\equiv \begin{pmatrix} \xi_a \\ \bar{\xi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow \Xi^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} ; & X^{\text{Weyl}} &\equiv \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow X^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \omega \end{pmatrix} \\
\Theta^{\text{Weyl}} &\equiv \begin{pmatrix} \theta_a \\ \bar{\theta}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow \Theta^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} \theta \\ \tau \end{pmatrix} ; & \mathcal{W}^{\text{Weyl}} &\equiv \begin{pmatrix} W_a \\ \bar{W}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{W}^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} W \\ Y \end{pmatrix} , \quad (3.6)
\end{aligned}$$

repetindo-se as notações do capítulo anterior para as componentes de Weyl e espinores de Majorana  $3D$ . Na expansão para  $\mathcal{V}$ , percebe-se a adoção da parametrização *susy*-covariante, com a presença dos campos compensadores (entre os quais,  $H = E + iF$ ). Intenciona-se manter covariância manifesta, de modo a potencializar a percepção da estrutura algébrica subjacente ao modelo. A opção, possível, de fixar o gauge de Wess-Zumino, como foi feito na abordagem em campos-componentes, traria a inoportuna “mistura” das álgebras de *gauge* e supersimetria [57].

A medida de integração  $N=1-D=4$  “completa”,  $d^2\theta d^2\bar{\theta}$ , tem sua tradução no formalismo de 4-componentes dada por:

$$\begin{aligned}
d^2\theta d^2\bar{\theta} &= \frac{1}{2}(d\bar{\Theta}d\Theta)^2_{\text{Major.}} \frac{1}{2}(-2d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau) \\
&= -d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau
\end{aligned}$$

A medida quirial,  $d^2\theta$ , resulta:

$$d^2\theta = d\bar{\Theta}\Gamma_L d\Theta \xrightarrow{\text{Major.}} \frac{1}{2}(d\bar{\theta} + id\bar{\tau})(d\theta + id\tau)$$

O setor espinorial da ação (2.1) se reduz a

$$W^a W_a = \bar{W}\Gamma_L W \xrightarrow{\text{Major.}} \frac{1}{2}(\bar{W} + i\bar{Y})(W + iY)$$

Analogamente ao que ocorreu na abordagem em campos-componentes, a herança da quiralidade (e/ou anti-quiralidade)  $4D$  manifesta-se na ocorrência de projetores,  $\Gamma_{L,R}$ , o que impõe a parametrização dos produtos da redução dimensional via espinores complexos de Dirac, definidos segundo a regra geral<sup>2</sup>:

$$\Psi_{\pm} \equiv \psi_1 \pm i\psi_2,$$

onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  representam dois espinores (reais) de Majorana  $3D$  advindos do mesmo espinor de 4-componentes  $4D$ , ou seja, produtos de um *splitting*.

Na atual abordagem, obviamente, este fato se estende a medidas de integração, coordenadas do superespaço e supercampos. A medida quirial  $4D$  é lida, então, em  $3D$ , na forma

$$4D : d^2\theta \text{ red. dimens.} \xrightarrow{\Rightarrow} 3D : \frac{1}{2} d\bar{\theta}_- d\theta_+,$$

e o setor espinorial da ação produz

$$4D : W^a W_a \text{ red. dimens.} \xrightarrow{\Rightarrow} 3D : \frac{1}{2} \bar{W}_- W_+,$$

com  $W_{\pm} \equiv W \pm iY$  e  $\theta_{\pm} \equiv \theta \pm i\tau$ .

---

<sup>2</sup>Haverá exceção. Definiremos derivadas covariantes e cargas segundo combinação com sinal invertido.

A parametrização via espinores de Dirac, aplicada às expansões dos supercampos N=2-D=3, agrega-se à expansão em espinores de Majorana, compondo um conjunto de duas opções para a definição de cada supercampo. Ficamos com:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{3D} &= C + \bar{\theta}b + \bar{\theta}\theta(E + \frac{1}{2}N) + \\
&\quad -\bar{\tau} \left[ d + (2F - iA)\theta + (\eta + \frac{i}{2}\not{\partial}d)\bar{\theta}\theta \right] + \\
&\quad -\bar{\tau}\tau \left[ (E - \frac{1}{2}N) + \bar{\theta}(\lambda - \frac{i}{2}\not{\partial}b) + \bar{\theta}\theta(\Delta - \frac{1}{4}\square C) \right] = \\
&= C + \frac{1}{2}(\bar{\theta}_-B_+ + \bar{\theta}_+B_-) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}_-\theta_+H^* + \bar{\theta}_+\theta_-H) + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-A\theta_- + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_-N + \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{\theta}_+ \left( \Lambda_+ - \frac{i}{2}\not{\partial}B_- \right) (\bar{\theta}_+\theta_+) - \frac{1}{2}\bar{\theta}_- \left( \Lambda_- - \frac{i}{2}\not{\partial}B_+ \right) (\bar{\theta}_-\theta_-) + \\
&\quad -\frac{1}{2}(\bar{\theta}_-\theta_-)^2 \left( \Delta - \frac{1}{4}\square C \right), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{3D} &= -\frac{1}{2}M - \frac{1}{4}\bar{\theta}\zeta - \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\tilde{G}_3 + \\
&\quad +\bar{\tau} \left[ \frac{-1}{4} \left( \xi - 2i\tilde{Q}\theta - \frac{i}{2}\not{\partial}\xi\bar{\theta}\theta \right) \right] + \\
&\quad +\bar{\tau}\tau \left[ \frac{-1}{4} \left( \tilde{G}_3 - \frac{i}{2}\bar{\theta}\not{\partial}\zeta - \frac{1}{2}\square M(\bar{\theta}\theta) \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{2}M - \frac{i}{8}\bar{\theta}_+\Xi_- + \frac{i}{8}\bar{\theta}_-\Xi_+ - \frac{1}{4}\bar{\theta}_+\gamma^\mu\theta_+\tilde{G}_\mu - \frac{1}{4}\bar{\theta}_-\theta_-\tilde{G}_3 \\
&\quad -\frac{1}{32}(\bar{\theta}_+\theta_- + \bar{\theta}_-\theta_+)(\bar{\theta}_+\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_+ - \bar{\theta}_-\gamma^\mu\partial_\mu\Xi_-) + \frac{1}{16}(\bar{\theta}_-\theta_-)^2\square M
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{3D} &= \varphi + \frac{1}{2}\bar{\theta} \underbrace{(\chi + i\omega)}_{\equiv X_+} + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)S + \\
&\quad +\bar{\tau} \left[ \frac{i}{2}(\chi + i\omega) + (iS + \not{\partial}\varphi) - \left( \frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\chi + i\omega) \right) \bar{\theta}\theta \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\tau}\tau \left[ -\frac{1}{2}S + \bar{\theta}\left(\frac{i}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\chi + i\omega)\right) + \left(\frac{1}{4}\square\varphi\right)\bar{\theta}\theta \right] = \\
& = e^{(-\frac{1}{2}\bar{\theta}-\gamma^\mu\theta-\partial_\mu)} \left( \varphi + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-X_+ + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_+S \right),
\end{aligned}$$

onde a última expressão deixa evidente a tradução 3D da quiralidade 4D. De fato, derivadas covariantes de N=2-D=3 em notação de Dirac reproduzem ambiente e vínculo supersimétrico de quiralidade (e anti-quiralidade).  $\Phi_{3D}$  é, de fato, solução de (a definir!)  $\bar{D}_-\Phi = 0$ . Os supercampos  $W$  e  $Y$ , assim como  $W_\pm$ , podem ser obtidos a partir de  $\mathcal{V}_{3D}$ , após sucessivas derivações covariantes, segundo a regra<sup>3</sup> (segue uma expressão formal, uma vez que ainda se faz necessário definir as derivadas covariantes N=2-D=3 explicitamente):

$$W = -\frac{1}{4}(\bar{D}_\theta D_\theta - \bar{D}_\tau D_\tau)D_\theta\mathcal{V} \quad (3.9)$$

$$Y = -\frac{1}{4}(\bar{D}_\theta D_\theta - \bar{D}_\tau D_\tau)D_\tau\mathcal{V} \quad (3.10)$$

$$W_\pm = -\frac{1}{8}(\bar{D}_+D_- + \bar{D}_-D_+)D_\mp\mathcal{V}, \quad (3.11)$$

onde adotou-se  $D_4^{\text{Weyl}} \equiv \begin{pmatrix} D_a \\ \bar{D}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Major.}} D_4^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} D_\theta \\ D_\tau \end{pmatrix}$ , e

$$D_\pm \equiv D_\theta \mp iD_\tau. \quad (3.12)$$

Justificar-se-á, em breve, a convenção acima. Antes de analisarmos as reduções dimensionais de cargas e derivadas, note-se que já se define, completamente, com pleno significado para cada constituinte, a ação N=2-D=3 descendente de (2.1), que assume a forma:

$$\mathcal{S}_{3D,N=2} = \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ \left(\frac{-1}{32}\right)\bar{W}_-W_+ +$$

---

<sup>3</sup>Descendente das relações  $W_a = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D_aV$  e  $\bar{W}_{\dot{a}} = -\frac{1}{4}D^2\bar{D}_{\dot{a}}V$

$$+ \int d^3x d\bar{\theta} d\theta d\bar{\tau} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{G}^2 - \frac{1}{2} m \mathcal{V} \mathcal{G} - \frac{1}{16} \bar{\Phi} e^{2h\mathcal{V}} e^{4g\mathcal{G}} \Phi \right\}. \quad (3.13)$$

Perceba-se que a ação acima apresentada, apesar de escrita em termos de supercampos  $N=2$ , não possui covariância  $N=2-D=3$  manifesta, exibindo um setor sob integração restrita (primeira linha), com medida que não varre todo o superespaço  $N=2$  correspondente (consequência da “quiralidade”  $3D$ ). Além disso, dado que se busca reproduzir a identificação de campos realizada em (2.57), a parametrização acima não facilita esta tarefa, trazendo os dois setores - vetorial e tensorial - sob expansões de super-tensorialidade distintas, quais sejam,  $W_+$  (que resolve  $\bar{D}_- W_+ = 0$ ) e  $\mathcal{G}$  (que resolve  $\bar{D}_- D_+ \mathcal{G} = \bar{D}_+ D_- \mathcal{G} = 0$ ). Na próxima seção, constrói-se um ambiente totalmente covariante, o que favorece a percepção da parametrização adequada para implementar a identificação. Na última seção deste capítulo, apresenta-se uma alternativa de descrição, sob a mesma super-tensorialidade, dos graus de liberdade “vetoriais e tensoriais”. Antes disso, contudo, faz-se necessário obter expressões explícitas operatoriais (no sentido diferencial) para as duas cargas de  $N=2-D=3$  e, conseqüentemente, para as derivadas covariantes.

A redução dimensional de cargas e derivadas espinoriais traz a dificuldade adicional de não se dispor de expressões invariantes por troca de representação que venham a determinar, sem ambigüidades, a versão  $3D$  desses objetos. Pode-se, por exemplo, partir da expressão  $\bar{D}_4 D_4 (\bar{\Theta} \Theta)$  e, conhecendo-se o seu resultado em  $4D$ , reduzi-lo de modo a apontar  $D_\theta$  e  $D_\tau$  apropriados. Há, contudo, clara liberdade de redefinição de sinal. Adota-se, aqui, outra estratégia. Toma-se o conjunto de transformações geradas pela (conhecida)

carga de supersimetria N=1-D=4 ao atuar sobre as coordenadas do espaço,

$$\begin{aligned}\delta x^{\hat{\mu}} &= i\varepsilon^a \sigma_{a\hat{a}}^{\hat{\mu}} \bar{\theta}^{\hat{a}} + i\bar{\varepsilon}_{\hat{a}} \bar{\sigma}^{\hat{\mu} \hat{a} a} \theta_a = \\ &= i\bar{\mathcal{E}}\Gamma^{\hat{\mu}}\Theta \quad , \quad \text{com } \mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_a \\ \bar{\varepsilon}^{\hat{a}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Major.}} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix} ,\end{aligned}$$

para uma transformação definida por  $\delta x^{\hat{\mu}} = [\varepsilon^a Q_a + \bar{\varepsilon}_{\hat{a}} \bar{Q}^{\hat{a}}, x^{\hat{\mu}}]$ , com  $Q_a$  e  $\bar{Q}_{\hat{a}}$  dados por

$$\begin{aligned}Q_a &= \frac{\partial}{\partial \theta^a} + i\sigma_{a\hat{a}}^{\hat{\mu}} \bar{\theta}^{\hat{a}} \partial_{\hat{\mu}} \\ e \quad \bar{Q}_{\hat{a}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\hat{a}}} - i\theta^a \sigma_{a\hat{a}}^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} .\end{aligned}$$

Promove-se, agora, a redução dimensional da variação  $\delta x^{\hat{\mu}}$  (invariante por troca de representação), e investiga-se que cargas  $Q_{\theta}$  e  $Q_{\tau}$ , obtidas via redução dimensional do elemento da super-álgebra,  $\varepsilon^a Q_a + \bar{\varepsilon}_{\hat{a}} \bar{Q}^{\hat{a}}$  (também invariante por Weyl  $\rightarrow$  Majorana), produzem, pela ação correspondente (algo na forma  $[\bar{\varepsilon}_1 Q_{\theta} + \bar{\varepsilon}_2 Q_{\tau}, x^{\hat{\mu}}]$ ) a  $(\delta x^{\hat{\mu}})_{3D}$  determinada.

A variação  $\delta x^{\hat{\mu}}$  produz, em 3D ( após *splitting* de  $\mathcal{E}$  e  $\Theta$ ),

$$\delta x^{\mu} = i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\theta + i\bar{\delta}\gamma^{\mu}\tau \quad (3.14)$$

O elemento genérico da super-álgebra reduz-se a

$$\delta_{\text{susy } 3D} = \bar{\varepsilon}Q_{\theta} - \bar{\delta}Q_{\tau} , \quad (3.15)$$

e as cargas que, via  $\delta x^{\mu} = [\bar{\varepsilon}Q_{\theta} - \bar{\delta}Q_{\tau}, x^{\mu}]$ , reproduzem (3.14), se escrevem

$$Q_{\theta\alpha} = +\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\alpha}} + i\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \theta_{\beta} \partial_{\mu} \quad (3.16)$$

$$e \quad Q_{\tau\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{\alpha}} - i\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \tau_{\beta} \partial_{\mu} \quad (3.17)$$



Estas cargas também reproduzem a descendência das variações das coordenadas anti-comutantes,

$$4D : \delta\Theta = \mathcal{E} \quad \text{red. dimens.} \quad 3D : \delta\theta_\alpha = \varepsilon_\alpha \text{ e } \delta\tau_\alpha = \delta_\alpha .$$

As derivadas covariantes definem-se, então, como

$$D_{\theta\alpha} = + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_\alpha} - i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \theta_\beta \partial_\mu \quad (3.18)$$

$$\text{e } D_{\tau\alpha} = - \frac{\partial}{\partial\bar{\tau}_\alpha} + i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \tau_\beta \partial_\mu \quad (3.19)$$

Em notação espinorial complexa de Dirac, as derivadas têm as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} D_{+\alpha} &\equiv (D_\theta - i D_\tau)_\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{+\alpha}} - i \gamma_{\alpha\beta}^\mu \theta_{+\beta} \partial_\mu \\ D_{-\alpha} &\equiv (D_\theta + i D_\tau)_\alpha = 2 \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{-\alpha}} - i \gamma_{\alpha\beta}^\mu \theta_{-\beta} \partial_\mu \\ \bar{D}_{+\alpha} &\equiv (\bar{D}_\theta + i \bar{D}_\tau)_\alpha = -2 \frac{\partial}{\partial\theta_{+\alpha}} + i \bar{\theta}_{+\beta} \gamma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu \\ \bar{D}_{-\alpha} &\equiv (\bar{D}_\theta - i \bar{D}_\tau)_\alpha = -2 \frac{\partial}{\partial\theta_{-\alpha}} + i \bar{\theta}_{-\beta} \gamma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu . \end{aligned} \quad (3.20)$$

As cargas espinoriais de Dirac seguem a mesma convenção “invertida” (em relação às coordenadas, campos e supercampos espinoriais) das derivadas covariantes<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} Q_{\pm\alpha} &\equiv (Q_\theta \mp i Q_\tau)_\alpha \\ \text{e } \bar{Q}_{\pm\alpha} &\equiv (\bar{Q}_\theta \pm i \bar{Q}_\tau)_\alpha \end{aligned} \quad (3.21)$$

Explicitadas as derivadas, as extensões 3D do vínculo de quiralidade,  $\bar{D}_-\Phi = 0$ , e a

---

<sup>4</sup>A convenção utilizada na definição das cargas e derivadas de Dirac permite a indicação explícita, no rótulo (+, -), da coordenada de Dirac da qual depende o operador diferencial em questão.  $D_+$ , por exemplo, depende de  $\bar{\theta}_+$  e  $\theta_+$ .

definição dos supercampos  $W$ ,  $Y$  e  $W_{\pm}$  via derivações covariantes sucessivas de  $\mathcal{V}$  ganham sentido completo. Analisemos a álgebra realizada pelas cargas (3.17):

Majorana:

$$\{Q_{\theta\alpha}, \bar{Q}_{\theta\beta}\} = \{Q_{\tau\alpha}, \bar{Q}_{\tau\beta}\} = -2i\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\partial_{\mu}, \quad (3.22)$$

coerentemente com o que se obteria a partir da redução dimensional da álgebra N=1-D=4, escrita em termos das cargas de 4-componentes,  $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_a \\ \bar{Q}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_{\theta} \\ Q_{\tau} \end{pmatrix}$ , que se traduz por  $\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\beta}\} = -2i\Gamma_{\alpha\beta}^{\dot{\mu}}\partial_{\dot{\mu}}$ .

A redução dimensional da álgebra acima, contudo, além das contribuições reproduzidas em (3.22), ofereceria as seguintes relações para o setor anti-diagonal da álgebra das cargas de Majorana:

$$\{Q_{\theta\alpha}, \bar{Q}_{\tau\beta}\} = \{Q_{\tau\alpha}, \bar{Q}_{\theta\beta}\} = -2i\delta_{\alpha\beta} P_3, \text{ com } P_3 \equiv -i\partial_3. \quad (3.23)$$

Para as cargas apresentadas em (3.17), contudo, este setor anti-diagonal resulta nulo. O mesmo se dá na comparação dos resultados para a formulação de Dirac. As cargas (3.21) realizam a álgebra

$$\begin{aligned} \{Q_{+\alpha}, \bar{Q}_{-\beta}\} &= 0 \\ \{Q_{\pm\alpha}, \bar{Q}_{\pm\beta}\} &= -4i\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\partial_{\mu}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

enquanto que, se considerarmos as contribuições anti-diagonais (3.23), advindas da redução dimensional direta da álgebra N=1-D=4, as combinações de Dirac realizam

$$\begin{aligned} \{Q_{+\alpha}, \bar{Q}_{-\beta}\} &= 0 \\ \{Q_{\pm\alpha}, \bar{Q}_{\pm\beta}\} &= -4i\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\partial_{\mu} \pm 4\delta_{\alpha\beta}P_3, \end{aligned} \quad (3.25)$$

o que, observe-se, é a expressão usual para uma álgebra  $N=2-D=3$  na presença de carga central [22, 58]. Pode-se, contudo, atestar a convergência dos dois conjuntos de resultados. Em primeiro lugar, o processo de redução dimensional que adotamos trivializa o operador  $\partial_3$ , atribuindo valor zero à sua atuação sobre todo o espaço funcional. Isto anula, em princípio, a contribuição anti-diagonal expressa em (3.23), *se atribuirmos sua origem à redução dimensional*, ou ao *ansatz* que a define<sup>5</sup>. O fato fundamental em (3.23) consiste na indicação de que, na álgebra  $N=2-D=3$ , *há espaço formal para uma extensão central*, ainda que, nesta formulação, esta carga adicional não se origine, diretamente, de  $D=4$ . Como veremos no próximo capítulo, parênteses anti-diagonais, tomados a partir de expressões funcionais que o modelo oferece para as cargas, **não** se anulam, exibindo *carga central de origem topológica*. Na eventual ausência de configurações de topologia não-trivial, portanto, a integral de linha no infinito que caracteriza a carga central se anularia, restaurando as álgebras (3.22) e (3.24).

Merece comentário, ainda, o fato de que os operadores diferenciais que representam as cargas de supersimetria, (3.17), são suficientes, mesmo na presença de carga central não-trivial, para a descrição do modelo. Esses operadores, associados à introdução de coordenadas anti-comutantes, cumprem a função de definir o cenário em que as transformações de supersimetria, inicialmente percebidas como variações funcionais - simetrias internas

---

<sup>5</sup>Há procedimentos de redução dimensional que permitem a “sobrevivência” da componente  $P_3$ , e a leitura *direta* de sua contribuição à carga central. Como exemplo, menciona-se o método de redução dimensional via transformações de Legendre [59]. Este método oferece, portanto, perspectiva de investigação adicional, neste cenário.

[60], ganhem tradução como simetrias externas no mundo apropriado, o superespaço<sup>6</sup>. Neste ambiente, a supersimetria se realiza como variações nas coordenadas, no (super-) espaço de base. A presença de uma carga *central* na álgebra, ou seja, um objeto  $Z$  tal que  $[Z, \forall \text{carga}] = 0$ , convive com a manutenção da estrutura “original” do superespaço, cargas, derivadas e coordenadas, atribuindo-se à transformação gerada por  $Z$  a interpretação de uma *simetria interna escalar*. De qualquer modo, já se apresenta, como perspectiva de continuação deste trabalho, a *covariantização total* do formalismo, com a promoção da simetria gerada por  $Z$  ao status de simetria “externa”, construindo-se um conjunto de cargas e derivadas que contemplem o setor anti-diagonal (3.23), e adicionando ao superespaço uma coordenada bosônica extra (estatística de  $Z$ )[61, 62] que permita a leitura de variação de coordenada à transformação  $\delta_Z$ .<sup>7</sup>

Uma vez construídas as representações de cargas e derivadas que realizam a estrutura

---

<sup>6</sup>o que as aproxima, formalmente, do limite para o conjunto de simetrias da matriz  $S$  estabelecido por Coleman e Mandula [24]: simetrias externas, ou seja, Poincarè, e simetrias internas escalares perante Poincarè. No superespaço, amplia-se este limite ao caracterizar super-Poincarè como o conjunto de simetrias externas, rephraseando, covariantemente, a extensão demonstrada por Haag, Lopuszanski e Sohnius[20].

<sup>7</sup>Pode-se mostrar, e isto será apresentado no próximo capítulo, que há uma parametrização para os espinores de Dirac que se revela particularmente apropriada para caracterizar a carga central como *bound* para o funcional de energia (ou, em linguagem algébrica, para  $P_0$ ). Esta mesma parametrização facilita a extensão das cargas de modo a realizar a álgebra com carga central. Define-se  $\tilde{Q}_{+\alpha} \equiv Q_{\theta\alpha} - i\gamma_{\alpha\beta}^0 Q_{\tau\beta}$ . Com as cargas  $Q_\theta$ ,  $Q_\tau$  definidas em (3.17),  $\tilde{Q}_{+\alpha}$  resulta  $\tilde{Q}_{+\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial \theta_{+\alpha}} + 2i\gamma_{\alpha\delta}^0 \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_\delta} + i \gamma_{\alpha\delta}^\mu \theta_\delta \partial_\mu - (\gamma^0 \gamma^\nu)_{\alpha\delta} \tau_\delta \partial_\nu$ . A extensão  $(\tilde{Q}_+^{\text{c. centr.}})_\alpha = \tilde{Q}_{+\alpha} + \bar{\theta}_{+\alpha} Z$ , com  $Z \equiv P_3$ ,  $Z$  escalar,  $Z = Z^\dagger$ , realiza a álgebra (3.25).

algébrica que define o superespaço, e efetivada a redução dimensional de (2.1) neste superespaço, resta estabelecer versão covariante para o conjunto de identificações de campos, (2.57), necessário ao mapeamento final no modelo que nos propusemos obter. Na próxima seção, constrói-se o ambiente de covariância N=2 *manifesta*, tanto para a identificação quanto para a ação final que se produz. Na seção seguinte, propõe-se uma identificação alternativa, também N=2-manifesta (realizada em termos de supercampos N=2-D=3), mas definida sobre um superespaço reduzido, em ambiente (anti-)quiral 3D.

## 3.2 Identificação N=2-covariante

Retoma-se, agora, a ação (3.13). Como já comentado, a quiralidade 3D impede, na primeira abordagem, a leitura de uma plena covariância N=2-D=3. As super-intensidades vetoriais (conteúdo vetorial, parametrização espinorial)  $\bar{W}_-$  e  $W_+$  merecem integração sob medida que não varre todo o superespaço, em correspondência com os vínculos N=2-D=3-supersimétricos que as definem. Para  $W_+$ , vale:

$$\bar{D}_{-\alpha} W_{+\beta} = 0 \quad (3.26)$$

Uma solução para o vínculo (3.26) é tomar  $W_+$  proporcional à derivada N=2-covariante de um supercampo *linear*, ou seja, vale

$$W_{+\alpha} \propto D_{+\alpha} \mathcal{S}, \quad (3.27)$$

com  $\mathcal{S}$  definido por

$$\bar{D}_- D_+ \mathcal{S} = \bar{D}_+ D_- \mathcal{S} = 0. \quad (3.28)$$

Percebe-se, portanto, que os graus de liberdade (invariantes de *gauge*) reunidos em  $W_+$  podem ser acomodados, de modo N=2-covariante, em um supercampo linear[63]. Este fato aponta para a covariantização N=2 plena tanto da identificação de campos (2.57), quanto da ação (3.13).

Quanto à identificação, observe-se que a super-intensidade associada ao setor “tensorial”(com efeito, em  $3D$ , também vetorial:  $B_{\mu 3}$  é um vetor sob  $SO(1,2)$ , e  $B_{\mu\nu}$ , via dualidade de Hodge, também exhibe representação vetorial,  $B_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} Z^\rho$ ; esses fatos justificam a convergência de super-tensorialidades),  $\mathcal{G}$ , também se define via

$$\bar{D}_- D_+ \mathcal{G} = \bar{D}_+ D_- \mathcal{G} = 0. \quad (3.29)$$

ou seja,  $\mathcal{G}$  é um supercampo N=2-linear. Neste caso, trata-se de herança direta da linearidade N=1-D=4 de seu ascendente. Os vínculos (3.28) e (3.29) garantem a covariância N=2-supersimétrica de uma eventual identificação  $S \propto \mathcal{G}$ . E, de fato, é o que faremos. Retomem-se as eqs.(3.9),(3.10). Valendo as relações

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\theta\beta} D_{\theta\beta} D_{\theta\alpha} &= - D_{\theta\alpha} \bar{D}_{\theta\beta} D_{\theta\beta} \quad \text{e o mesmo para } \tau, \\ \text{e } \bar{D}_{\theta\beta} D_{\theta\beta} D_{\tau\alpha} &= + D_{\tau\alpha} \bar{D}_{\theta\beta} D_{\theta\beta} \quad \text{e o mesmo trocando } \theta \leftrightarrow \tau, \end{aligned}$$

chega-se a:

$$\begin{aligned} W &= +\frac{1}{4} D_\theta (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V} \\ Y &= -\frac{1}{4} D_\tau (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

o que recupera a solução do vínculo (3.26), eq.(3.27), se associarmos

$$W_+ \equiv W + iY = \frac{1}{4} (D_\theta - iD_\tau) (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V} =$$

$$= D_+ \left( \frac{1}{4} (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V} \right) \Rightarrow \mathcal{S} = \left( \frac{1}{4} (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V} \right) .$$

Observando-se a expansão de  $\mathcal{S} = \frac{1}{4} (D_\theta^2 + D_\tau^2) \mathcal{V}$ , e comparando-se com a expansão de  $\mathcal{G}$ , eq.(3.8), percebe-se que a identificação

$$\mathcal{S} = 2 \mathcal{G} \tag{3.31}$$

reproduz exatamente, quando projetada em componentes, o conjunto de identificações que adotamos no capítulo anterior, (2.57), provendo-lhe covariantização N=2-supersimétrica. Em particular, o coeficiente 2 em (3.31) é arbitrado para reproduzir (2.57). De modo geral, qualquer coeficiente real é compatível com(3.31)<sup>8</sup>, devendo ser acompanhado, como já veremos, de um correspondente reescalamto de supercampos e parâmetros, de modo a garantir termos cinéticos canônicos no Lagrangeano final, pós-identificação.

A troca de parametrização da super-intensidade vetorial, substituindo-se  $W_\pm$  por  $\mathcal{S}$ , permite reescrever a ação (3.13) com *todos* os termos sob integração  $d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau$ , ou seja, tornar a ação plena e manifestamente N=2-covariante. As derivadas que relacionam  $W_\pm$ ,  $\bar{W}_\pm$  e  $\mathcal{S}$  “migram” para o elemento de integração quando exibimos a ação como funcional de  $\mathcal{S}$ . Esquemáticamente, ocorre:

$$-\frac{1}{32} \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ \bar{W}_- W_+ = -\frac{1}{32} \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ \bar{D}_- \mathcal{S} D_+ \mathcal{S} =$$

---

<sup>8</sup>É necessário que o fator seja real;  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{G}$ , além de N=2-lineares, são reais, e a adoção de coeficiente com componente imaginária violaria a covariância supersimétrica. Se um imaginário puro pudesse ser arbitrado, uma escolha precisa poderia cancelar os (super-)termos tipo Maxwell. A identificação, neste caso, perderia a legitimidade de Lorentz, passando de um quadro em que se apagam cópias de excitações idênticas, mas preserva-se a estrutura de propagadores, para outro em que as excitações são alteradas, com violação de tensorialidade de Lorentz. Este quadro é proibido pela supersimetria.

$$= -\frac{1}{64} \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ \bar{D}_- D_+ S^2 = -\frac{1}{16} \int d^3x d\bar{\theta}_- d\theta_+ d\bar{\theta}_+ d\theta_- S^2,$$

onde empregou-se a linearidade de  $S$ . Note-se que  $d\bar{\theta}_- d\theta_+ d\bar{\theta}_+ d\theta_- = -4d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau$ .

A redução dimensional no superespaço leva, assim, à seguinte ação 3D:

$$S_{N=2}^{3D} = \int d^3x d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau \left\{ \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G}^2 - \frac{1}{2}m\mathcal{V}\mathcal{G} - \frac{1}{16}\bar{\Phi}e^{2h\mathcal{V}}\Phi e^{4g\mathcal{G}} \right\}. \quad (3.32)$$

Impondo-se (3.31), e reescalando-se supercampos e parâmetros segundo  $\mathcal{G} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{G}$ ;  $\mathcal{V} \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{4}\mathcal{V}$ ;  $g \rightarrow \sqrt{6}g$  e  $h \rightarrow \frac{4}{\sqrt{6}}h$ , produz-se a ação final manifestamente N=2-D=3-covariante para o modelo-alvo:

$$S_{MCS}^{N=2} = \int d^3x d\bar{\theta}d\theta d\bar{\tau}d\tau \left\{ +\frac{1}{4}\mathcal{G}^2 - \frac{1}{8}m\mathcal{V}\mathcal{G} - \frac{1}{16}\bar{\Phi}e^{2h\mathcal{V}}e^{4g\mathcal{G}}\Phi + \frac{1}{16}h\mathcal{V}^2\mathcal{V} \right\}, \quad (3.33)$$

acrescentando-se o termo de Fayet-Iliopoulos [64], e valendo  $\mathcal{G} = -\frac{1}{8}(D_\theta^2 + D_\tau^2)\mathcal{V}$ .

Reformula-se, na próxima seção, o processo de identificação, com abordagem ao ambiente (anti-)quiral 3D.

### 3.3 Identificação Alternativa

A identificação de campos que permite obter o desejado modelo  $N = 2 - D = 3$ , contendo um único (super)termo de Maxwell e um (super)termo de Chern-Simons *diagonal* como provedores da cinemática associada ao setor de *gauge*, além da definição da dinâmica via acoplamento não-mínimo ao setor de (super)matéria, tem, como já se demonstrou, expressão tanto no formalismo de campos componentes, quanto no formalismo de supercampos/superespaço. Mostrou-se a possibilidade de parametrizar, em 3D, a super-intensidade



associada a um supercampo potencial “vetorial” ( $V = V^\dagger$ , contendo  $A_\mu$ ) na forma de um supercampo  $\mathcal{S}$  linear ( $\bar{D}_+ D_- \mathcal{S} = \bar{D}_- D_+ \mathcal{S} = 0$ ). O vínculo supersimétrico que define  $\mathcal{S}$  é, como já se observou, o mesmo que define a super-intensidade  $\mathcal{G}$  (associada ao super-potencial “tensorial de *rank-2*”), supercampo portador dos graus de liberdade invariantes de gauge associados à 2-forma  $B_{\mu\nu}$  e seus (super)parceiros, e que “herdou” a linearidade de seu ascendente  $4D$ . Esta convergência de super-tensorialidades é a tradução, no ambiente supersimétrico, da usual dualidade de Hodge entre  $p$  e  $d - p$ -formas, e ( $N = 2$ -super)covariantiza as identificações que se mostraram formalmente consistentes, face à álgebra  $N = 2$ , no conjunto de campos componentes. Reúnem-se, assim, os dois *ranks* tensoriais sob uma expressão “tipicamente *rank-2*”.

Torna-se imediata, neste contexto, a busca de outra possibilidade de covariantização das identificações de campos, no ambiente superespaço-supercampo: a reunião das duas tensorialidades sob o formato “tipicamente vetorial”, ou seja, a obtenção de uma parametrização espinorial “quiral” (no sentido adaptado para 3D) que represente a super-intensidade associada ao potencial  $B_{\mu\nu}$ . Neste novo cenário, a medida de integração do setor de variáveis anticomutantes não é  $N = 2$ -manifesta, definindo-se sobre um sub-setor (“quiral” ou “anti-quiral”, 3D) do superespaço  $N = 2 - D = 3$ , conseqüência imediata, como já se demonstrou na seção anterior, da ascendência estritamente quiral  $4D$  definida pelo termo  $\int d^4x d^2\theta W^a W_a$ . De fato, a própria gênese da parametrização linear para a super-intensidade vetorial, eq. (3.27), indica a associação própria ao “formato vetorial”: a super-intensidade tensorial deve manifestar-se via derivação covariante do supercampo linear  $\mathcal{G}$ , e habitar um setor do superespaço  $N=2$  consistente com o vínculo que define essa

nova super-intensidade. Observa-se, ainda, que além de estabelecer o cenário formal completo, esta construção que agora se propõe oferece uma alternativa em eventuais incursões ao ambiente quântico, contribuindo para a seleção de correções radiativas/contratermos, ao proporcionar a exclusão de termos integrados sobre todo o superespaço  $N = 2$ <sup>9</sup>. Enfrenta-se, contudo, a importante limitação de mantermos o (super)termo de interação com a matéria sob integração completa.

Como estratégia para provermos a super-intensidade associada à  $B_{\mu\nu}$ , em  $3D$ , de uma parametrização espinorial “quiral” (ou anti-quiral), produziremos um supercampo espinorial anti-quiral em  $4D$  a partir do supercampo  $N = 1 - D = 4$ -linear  $\mathcal{G}$ , com recurso às derivadas covariantes que definem a medida de integração, e realizaremos a redução dimensional deste ambiente. Em  $3D$ , a leitura comparativa deste produto com o usual  $\int d^3x d\bar{\theta}_+ d\theta_- \bar{W}_+ W_-$ , apropriado à super-intensidade  $N = 2 - D = 3$  vetorial, levará à identificação alternativa que se pretende. Este método exhibe, também, a viabilidade de se “preparar”, ainda em  $4D$ , a convergência (super-)tensorial que possibilita a identificação em  $3D$ .

---

<sup>9</sup>Em  $4D$ , produzem-se teoremas de não-renormalização associados à expressão geral de uma correção de *loop* no superespaço, inspecionando-se as definições de super-variação funcional, adaptadas aos vínculos supersimétricos que definem (super)campos e (super)fontes, necessárias ao estabelecimento de funções de vértice e propagadores. Verifica-se, neste contexto, a eventual obrigatoriedade de definição sob integração total no superespaço de um termo que oferece correção radiativa, o que, evidentemente, isenta termos puramente quirais ou puramente anti-quirais de tais correções perturbativas. Super-termos de massa e acoplamento tipo  $\lambda\varphi^4$ , que no superespaço  $N = 1 - D = 4$  ganham representação na forma  $\int d^4x d^2\theta (m\Phi\Phi + \lambda\Phi\Phi\Phi)$ , ficam, portanto, isentos de renormalização [65]

Parte-se de:

$$\int d^4x d^2\bar{\theta} d^2\theta \frac{-1}{2} \mathcal{G}^2,$$

onde  $\mathcal{G}$  é dado por  $\mathcal{G} = \frac{i}{8} \left( D^a \Sigma_a - \bar{D}_a \bar{\Sigma}^a \right)$ . Recorrendo-se às derivadas covariantes que definem  $d^2\theta$ , obtém-se:

$$\int d^4x d^2\bar{\theta} D^b D_b \left( \frac{-1}{2} \mathcal{G}^2 \right) = \int d^4x d^2\bar{\theta} \left( - D^b \mathcal{G} D_b \mathcal{G} \right),$$

onde fizemos uso da linearidade de  $\mathcal{G}$ ,  $D^2 \mathcal{G} = 0$ . Note-se que  $D^b \mathcal{G}$  é anti-quiral:

$$D^b \mathcal{G} = \frac{i}{8} \left( D^b D^a \Sigma_a + \underbrace{D^b \bar{D}^a}_{= \{D^b, \bar{D}^a\} - \bar{D}^a D^b} \bar{\Sigma}_a \right),$$

o que, com  $\{D^b, \bar{D}^a\} = 2i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b}\partial_\mu$  e  $D^b \bar{\Sigma}_a = 0$  ( $\bar{\Sigma}_a$  anti-quiral), produz

$$D^b \mathcal{G} = \frac{-i}{16} \left( D^2 \Sigma^b - 4i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} (\partial_\mu \bar{\Sigma}_a) \right),$$

deixando evidente a anti-quiralidade de  $D^b \mathcal{G}$ :  $D_c D^b \mathcal{G} = 0$  (imediato, com  $D^3 = 0$  e, novamente,  $D_c \bar{\Sigma}_a = 0$ ). A ação  $4D$  pode, então, ser reescrita na forma:

$$S_{B_{\mu\nu}} = - \int d^4x d^2\bar{\theta} \left( \frac{-i}{16} \right)^2 \left( D^2 \Sigma^b D^2 \Sigma_b - 4i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} (\partial_\mu \bar{\Sigma}_a) + 4i(D^2 \Sigma^b) \sigma_{b\dot{a}}^\mu (\partial_\mu \bar{\Sigma}^{\dot{a}}) + 16\bar{\sigma}^{\mu\dot{c}b} \sigma_{b\dot{a}}^\nu (\partial_\mu \bar{\Sigma}_{\dot{c}}) (\partial_\nu \bar{\Sigma}^{\dot{a}}) \right).$$

Em notação espinorial de 4-componentes, temos:

$$S_{B_{\mu\nu}} = - \int d^4x (d\bar{\Theta} \Gamma_R d\Theta) \left( \frac{-i}{16} \right)^2 \left( (\bar{D}_4 \Gamma_L D_4) \bar{\Sigma}_4 (\bar{D}_4 \Gamma_L D_4) \Gamma_L \Sigma_4 + 4i \partial_\mu \bar{\Sigma}_4 \Gamma^\mu (\bar{D}_4 \Gamma_L D_4) \Gamma_L \Sigma_4 + 16 (\partial_\mu \bar{\Sigma}_4) \Gamma^\mu \Gamma_L \Gamma^\nu (\partial_\nu \Sigma_4) \right),$$

com as definições

$$D_4^{\text{Weyl}} \equiv \begin{pmatrix} D_a \\ \bar{D}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow D_4^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} D_\theta \\ D_\tau \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_4^{\text{Weyl}} \equiv \begin{pmatrix} \Sigma_a \\ \bar{\Sigma}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \rightarrow \Sigma_4^{\text{Major.}} \equiv \begin{pmatrix} \Sigma \\ T \end{pmatrix}.$$

Passando à representação espinorial de Majorana que definimos no Cap.2, com sua extensão ao superespaço apresentada no Cap.3, implementa-se a redução dimensional, com a “quebra” de cada espinor de Majorana 4D em dois espinores independentes perante SO(1,2). A ação 3D tem a forma:

$$S_{B\mu\nu}^{3D} = - \int d^3x \left( \frac{1}{2} d\bar{\theta}_+ d\theta_- \left( \frac{-i}{16} \right)^2 \left( \frac{1}{8} \right) ((\bar{D}_+ D_- \bar{\Upsilon}_-) (\bar{D}_+ D_- \Upsilon_+) - 8i (\partial_\mu \bar{\Upsilon}_+) \gamma^\mu (\bar{D}_+ D_- \Upsilon_+) + 8i (\bar{D}_+ D_- \bar{\Upsilon}_-) \gamma^\mu \partial_\mu \Upsilon_- + 64 (\partial_\mu \bar{\Upsilon}_+) \gamma^\mu \gamma^\nu (\partial_\nu \Upsilon_-)) \right),$$

adotando-se, na ação acima, as derivadas covariantes  $D_\pm$  e  $\bar{D}_\pm$  previamente definidas, e o supercampo N=2-D=3 espinorial de Dirac  $\Upsilon_\pm$ , definido por  $\Upsilon_\pm \equiv \Sigma \pm iT$ .

Retomando a expressão para o resultado da redução dimensional, no superespaço, de  $\int d^4x d^2\bar{\theta} \left( \frac{-1}{8} \right) \bar{W}_a \bar{W}^{\dot{a}}$ <sup>10</sup>, que se traduz por

$$S_{A\mu, \text{anti-qr}}^{3D} = \int d^3x \left( \frac{1}{2} d\bar{\theta}_+ d\theta_- \left( \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{-1}{8} \right) \bar{W}_+ W_- \right) \right),$$

percebe-se o espaço formal para promover uma identificação de supercampos- $N = 2$  espinoriais (de Dirac), segundo a regra

$$W_{-\beta} \equiv \frac{i}{16} (\bar{D}_{+\alpha} D_{-\alpha} \Upsilon_{+\beta} + 8i \gamma_{\beta\delta}^\mu \partial_\mu \Upsilon_{-\delta}). \quad (3.34)$$

<sup>10</sup>equivalente, módulo um termo de fronteira, à versão quirral que usamos,  $\int d^4x d^2\theta \left( \frac{-1}{8} \right) W^a W_a$ .

Observe-se que  $W_-$  e o supercampo que comparece no lado direito da equação acima, construído sobre  $\Upsilon_+$  e  $\Upsilon_-$ , são soluções do mesmo vínculo supersimétrico,  $\bar{D}_+W_- = \bar{D}_+(\text{Lado direito}) = 0$ , consistentemente<sup>11</sup>. Os supercampos  $W_-$ ,  $\Upsilon_+$  e  $\Upsilon_-$  merecem, respectivamente, as seguintes expansões:

$$\begin{aligned}
W_{-\beta} &\equiv (W - iY)_\beta = \\
&= (\lambda(x) - i\eta(x))_\beta + \left[ 2\delta_{\beta\delta}\Delta(x) - (\tilde{F})_{\beta\delta}(x) + i\gamma_{\beta\delta}^\mu(\partial_\mu N(x)) \right] \theta_{-\delta} + \\
&+ \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\theta_-) \gamma_{\beta\delta}^\mu \partial_\mu \underbrace{(\lambda(x) + i\eta(x))_\delta}_{\equiv \Lambda_{+\delta}(x)} - \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\gamma^\mu\theta_+) \partial_\mu \underbrace{(\lambda(x) - i\eta(x))_\delta}_{\equiv \Lambda_{-\delta}(x)} + \\
&- \frac{1}{4}(\bar{\theta}_+\theta_-)\theta_{+\beta}\square N(x) + \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\theta_-) \gamma_{\beta\epsilon}^\mu (\partial_\mu\Delta(x)) \theta_{+\epsilon} + \\
&+ \frac{i}{4}(\bar{\theta}_+\theta_-) \gamma_{\beta\delta}^\mu (\partial_\mu (\tilde{F})_{\delta\epsilon}(x)) \theta_{+\epsilon} + \frac{1}{8}(\bar{\theta}_+\theta_+)^2 \square \underbrace{(\lambda(x) - i\eta(x))_\beta}_{\equiv \Lambda_{-\beta}(x)}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{+\beta} &\equiv (\Sigma + iT)_\beta = \\
&= \psi_{+\beta}(x) - (\rho(x)\delta_{\beta\delta} - ((\mathcal{Z})_{\beta\delta}(x) - i(\mathcal{B})_{\beta\delta}(x))) \theta_{+\delta} + \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\theta}_-\theta_+) \Xi_{+\beta}^{\text{rep}}(x) + \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\gamma^\mu\theta_+) \partial_\mu \psi_{+\beta}(x) + \\
&- \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\gamma^\mu\theta_+) \partial_\mu (\delta_{\beta\delta}\rho(x) - \gamma_{\beta\delta}^\alpha((\mathcal{Z})_{\beta\delta}(x) - i(\mathcal{B})_{\beta\delta}(x))) \theta_{+\delta} + \\
&+ \frac{1}{8}(\bar{\theta}_+\theta_+)^2 (\square \psi_{+\beta}(x)).
\end{aligned}$$

---

<sup>11</sup>O mesmo se daria, evidentemente, qualquer que fosse o coeficiente empregado. Entretanto, analogamente ao que acontece entre  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{G}$  na seção anterior, ainda que  $\frac{i}{16}$  seja uma escolha arbitrária, considerados os N=2-vínculos diferenciais, o caráter imaginário puro deste coeficiente é obrigatório. Para um coeficiente real, por exemplo, igualdades do tipo  $M = iN$  surgiriam, para  $M, N$  reais, inviabilizando a identificação. Esta restrição evita, mais uma vez, o cancelamento dos termos de Maxwell.

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{-\beta} &\equiv (\Sigma - iT)_{\beta} = \\
&= \psi_{-\beta}(x) - \underbrace{[(P(x) - iM(x))\delta_{\beta\delta} + ((\mathcal{Z})_{\beta\delta}(x) + i(\mathcal{B})_{\beta\delta}(x))]}_{\equiv \rho^*(x)} \theta_{-\delta} + \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\theta}_+\theta_-) \underbrace{(\Xi_{-\beta}^{\text{fis.}}(x) + i\gamma_{\beta\epsilon}^{\mu}(\partial_{\mu}\psi_{+\epsilon}(x)))}_{\equiv \Xi_{-\beta}^{\text{rep.}}(x)} - \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\gamma^{\mu}\theta_+) \partial_{\mu}\psi_{-\beta}(x) + \\
&+ \frac{i}{2}(\bar{\theta}_+\gamma^{\mu}\theta_+) \partial_{\mu}(\delta_{\beta\delta}(P(x) - iM(x)) + ((\mathcal{Z})_{\beta\delta}(x) - i(\mathcal{B})_{\beta\delta}(x))) \theta_{-\delta} + \\
&+ \frac{1}{8}(\bar{\theta}_+\theta_+)^2 (\square\psi_{-\beta}(x)),
\end{aligned}$$

onde, como já se indicou,  $\Xi_{\pm\beta}^{\text{reparametrizado}} \equiv \Xi_{\pm\beta}^{\text{fisico}} \mp i\gamma_{\beta\epsilon}^{\mu}(\partial_{\mu}\psi_{\mp\epsilon})$ , sendo  $\Xi^{\text{rep}}$  o campo componente que descende do espinor  $\Xi_{4D}^{\text{rep}}$  introduzido em uma reparametrização de  $\Sigma_4$  (ver eq.(2.3)) conveniente, de modo a eliminar campos compensadores de super-intensidades definidas a partir do potencial  $\Sigma_4$ .

Os dois últimos supercampos geram a seguinte expansão para o lado direito de (3.34):

$$\begin{aligned}
\bar{D}_+D_-\Upsilon_{+\beta} + 8i\gamma_{\beta\delta}^{\mu}(\partial_{\mu}\Upsilon_{-\delta}) &= \\
&= -8\Xi_{+\beta}^{\text{fis.}}(x) - 16 \left[ i\delta_{\beta\delta} \partial^{\mu} Z_{\mu}(x) - i(\tilde{\mathcal{G}})_{\beta\delta}(x) + \gamma_{\beta\delta}^{\mu}(\partial_{\mu}M(x)) \right] \theta_{-\delta} + \\
&+ 4i(\bar{\theta}_+\theta_-) \gamma_{\beta\delta}^{\mu}(\partial_{\mu}\Xi_{-\delta}^{\text{fis.}}(x)) + 4i(\bar{\theta}_+\gamma^{\mu}\theta_+)(\partial_{\mu}\Xi_{+\beta}^{\text{fis.}}(x)) + \\
&- 4i(\bar{\theta}_+\theta_-)\theta_{+\beta} \square M(x) + 4(\bar{\theta}_+\theta_-) \gamma_{\beta\epsilon}^{\mu} \partial_{\mu}(\partial^{\alpha}Z_{\alpha}) + \\
&+ 4(\bar{\theta}_+\theta_-) \gamma_{\beta\delta}^{\mu}(\partial_{\mu}(\tilde{\mathcal{G}})_{\delta\epsilon}(x)) \theta_{+\epsilon} - (\bar{\theta}_+\theta_+)^2 (\square\Xi_{+\beta}^{\text{fis.}}(x)). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Impondo, agora, a identificação de supercampos N=2 sugerida em (3.34), ou seja, tomando  $[(3.35)] = \frac{i}{16} [(3.36)]$ , resulta, em campos componentes, o conjunto de identi-

ficações:

$$\text{Comp. zero: } \Lambda_-(x) = -\frac{i}{2} \Xi_+(x) \quad (3.37)$$

Comp.  $\theta_-$  :

$$2\delta_{\beta\delta} \Delta(x) - (\tilde{F})_{\beta\delta}(x) + i(\partial_{\beta\delta} N(x)) = \frac{i}{16} \left( -16 \left[ i(\partial \cdot Z(x))\delta_{\beta\delta} - i(\tilde{G})_{\beta\delta}(x) + (\partial_{\beta\delta} M(x)) \right] \right) .$$

levando a

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\Delta(x) = \partial \cdot Z(x) \\ \tilde{F}_{\beta\delta} = \tilde{G}_{\beta\delta} \\ N(x) = -M(x) \end{cases} \quad (3.38)$$

Comp.  $\bar{\theta}_+\theta_-$  :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \gamma_{\beta\delta}^\mu (\partial_\mu \Lambda_{+\delta}(x)) &= \frac{i}{16} (4i \gamma_{\beta\delta}^\mu (\partial_\mu \Xi_{-\delta}(x))) \\ \rightarrow \Lambda_{+\delta}(x) &= +\frac{i}{2} \Xi_{-\delta}(x) \end{aligned} \quad (3.39)$$

As demais componentes confirmam, consistentemente, as identificações acima.

As equações (3.37), (3.38) e (3.39) recuperam exatamente as mesmas identificações que obtivemos trabalhando no superespaço “completo”, covariante N=2-D=3 (3.31), parametrizando, naquele caso, a super-intensidade associada a  $A_\mu$  por um supercampo linear,  $S$ , e tomando-a como proporcional à super-intensidade linear  $\mathcal{G}$ , associada a  $B_{\mu\nu}$ . Nesta proposta alternativa e complementar que acabamos de apresentar, as parametrizações de ambas as super-intensidades resolvem o vínculo de “anti-quiralidade N=2-D=3”,  $\bar{D}_+\Phi = 0$ .

Com o Lagrangeano do modelo-alvo plenamente definido, tanto em campos-compo-  
nentes quanto no superespaço, passamos, no próximo Capítulo, à análise da álgebra sub-  
jacente. Pretende-se obter expressões funcionais para as cargas de supersimetria e para  
a carga central, bem como demonstrar, na especificidade do modelo que propomos, a já  
comentada relação entre as eqs. de Bogomol'nyi e a saturação de uma cota inferior para o  
funcional de energia, sendo esta cota definida pela carga central não-trivial induzida por  
informação topológica inerente ao sistema estudado.



# Capítulo 4

## Carga Central e Procedimento

### Algébrico

A justificativa de Hlousek e Spector [18] para a relação entre a eventual presença de equações de 1<sup>a</sup> ordem, compatíveis com as eqs. de movimento, no regime de saturação de uma cota inferior para o funcional de energia do modelo sob estudo (eqs. e limite de Bogomol'nyi), e a prevalência de uma estrutura algébrica subjacente, qual seja, uma super-álgebra estendida  $N=2$  com carga central de origem topológica, é revisitada, neste capítulo, no contexto específico do modelo que propusemos. Inicialmente, adapta-se o teorema de Noether para uma abordagem à ação (3.33), obtendo-se expressões funcionais para as cargas de supersimetria  $Q_\theta$  e  $Q_\tau$ . Em seguida, a carga central surge como resultado de um setor da variação supersimétrica de uma das cargas recém-definidas. A expressão resultante exhibe a natureza topológica da extensão central. Finalmente, propõe-se uma reparametrização conveniente do superespaço, na qual as cargas de supersimetria realizam

uma álgebra que deixa manifesto o papel da carga central como cota inferior para a energia, e, na saturação deste *bound*, evidencia-se a prevalência das equações de Bogomol'nyi como tradução funcional de um fato algébrico, a trivialização de uma das cargas no regime saturado. Este cenário é coerente com a justificativa de Hlousek e Spector em [18], mas não percorre a seqüência defendida em [17],  $N=1 + \text{carga topológica} \rightarrow N=2 + [\text{carga central} \propto \text{carga top.}]$ , dado que o modelo de partida. ação (3.33), já se define em ambiente manifestamente  $N=2$ -supersimétrico.

## 4.1 Cargas de Supersimetria: Noether no Superespaço

A hipótese de invariância da ação (3.33) sob transformações de supersimetria tem a seguinte tradução (super-)funcional [66]<sup>1</sup>:

$$S' \equiv \int_{\Omega'} d^3x' d^2\theta' d^2\tau' \mathcal{L}'[\phi'(x', \theta', \tau')] = S \equiv \int_{\Omega} d^3x d^2\theta d^2\tau \mathcal{L}[\phi(x, \theta, \tau)], \quad (4.1)$$

onde  $\phi$  é uma notação genérica para os (super)campos que definem  $\mathcal{L}$ , e  $\Omega$  indica o (super)volume integrado. Levando-se em conta a invariância de forma de  $\mathcal{L}$  perante transformações de supersimetria dos supercampos,  $\mathcal{L}'(\phi') = \mathcal{L}(\phi')$ , resulta:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega'} d^3x' d^2\theta' d^2\tau' \mathcal{L}[\phi'(x', \theta', \tau')] - \int_{\Omega} d^3x d^2\theta d^2\tau \mathcal{L}[\phi(x, \theta, \tau)] = \\ &= \int \underbrace{d\Omega(D_A \delta x^A)}_{= \delta(d\Omega)} \mathcal{L} + \int d\Omega \delta \mathcal{L}_{\text{TOTAL}} = \\ &= \int d\Omega [(D_A \delta x^A) \mathcal{L} + \delta x^A (D_A \mathcal{L}) + \delta \mathcal{L}_{\text{FUNC}}], \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Sugere-se, como compilação de abordagens ao teorema de Noether no ambiente superespaço/supercampos, o trabalho [67].

onde se adota uma notação compacta para o conjunto de coordenadas do superspaço,  $x^A \equiv (x^0, x^1, x^2, \theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$ , e  $D_A \equiv (\partial_\mu, D_\theta, D_\tau)$ . A variação funcional (ponto  $x^A$  fixo)  $\delta\mathcal{L}_{\text{FUNC.}}$  é dada por

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\Phi}} \delta\bar{\Phi} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathcal{V}} \delta\mathcal{V}, \quad (4.2)$$

fazendo-se uso do conteúdo específico de campos que define  $\mathcal{L}$  em (3.33).

As duas primeiras parcelas em (4.2) reduzem-se às equações de movimento para  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$  (devido à quiralidade (anti-quiral.)-N=2 de  $\Phi(\bar{\Phi})$ ), e, portanto, não contribuem para a corrente conservada. Para analisar a parcela associada à variação funcional de  $\mathcal{V}$ , escreve-se a forma geral de (3.33):

$$\mathcal{S} = \int d^3x d^2\theta d^2\tau \mathcal{L}[\Phi, \bar{\Phi}, \mathcal{V}, D_\theta^2\mathcal{V}, D_\tau^2\mathcal{V}]. \quad (4.3)$$

Observa-se, imediatamente, que a única forma de atuação de (super)derivadas sobre  $\mathcal{V}$  presente em  $\mathcal{L}$  é a derivação espinorial de segunda ordem (via  $\mathcal{G}$ ). Feito este registro, a terceira parcela em (4.2) traduz-se como

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathcal{V}} \delta\mathcal{V} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{V}} \delta\mathcal{V} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_A D_B \mathcal{V})} \delta(D_A D_B \mathcal{V}).$$

A fatoração de uma derivada total  $D_A$ , de modo a compor uma expressão do tipo  $\int d\Omega D_A(J^A_{\text{FUNC., } \mathcal{V}})$ , implica, pela exclusividade da presença de derivadas espinoriais de  $\mathcal{V}$  em nosso modelo, a produção, módulo eqs. de movimento, de uma contribuição à corrente conservada com dois índices espinoriais: o índice contraído (com D), A, e o índice que se produz na fatoração do parâmetro da transformação em jogo, no caso, a supersimetria,

de parâmetro espinorial. Se o que se busca são as correntes e cargas de supersimetria, ou seja, uma regra  $\delta S = \int d\Omega (\partial_\mu J_\alpha^\mu) \varepsilon_\alpha$ , indicando a corrente  $J_\alpha^\mu$  como constituinte da equação de continuidade que permite definir a carga  $Q = \int d^2x d^2\theta d^2\tau J_\alpha^0$ , então conclui-se que as contribuições associadas à variação funcional de  $\mathcal{V}$ , de tensorialidade diferente de  $J_\alpha^\mu$ , não participam da definição de  $Q_\theta$ ,  $Q_\tau$ . Portanto, módulo eqs. de movimento e setores desvinculados das cargas de supersimetria,  $\delta\mathcal{L}_{\text{FUNC}}$  pode ser descartada e resta:

$$\delta S_{\text{cargas}} = \int d^3x d^2\theta d^2\tau D_A [\delta x^A \mathcal{L}] = 0 ,$$

o que seleciona a corrente  $\delta x^A \mathcal{L}$ .  $\delta x^A$ , na parametrização de Majorana  $(\varepsilon, \delta)$ , escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= i(\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta + \bar{\delta}\gamma^\mu\tau) \\ \delta\theta &= \varepsilon , \quad \delta\tau = \delta , \end{aligned}$$

levando a

$$J^0 = i(\bar{\varepsilon}\gamma^0\theta + \bar{\delta}\gamma^0\tau)\mathcal{L} . \quad (4.4)$$

Fatorando-se os parâmetros, vem:

$$Q_{\theta\alpha} = i\gamma_{\alpha\beta}^0 \int d^2x d^2\theta d^2\tau \mathcal{L}\theta_\beta \quad (4.5)$$

$$Q_{\tau\alpha} = i\gamma_{\alpha\beta}^0 \int d^2x d^2\theta d^2\tau \mathcal{L}\tau_\beta . \quad (4.6)$$

Note-se que a integração no superspaço de um termo  $\theta\mathcal{L}$ , como ocorre em (4.5), implica selecionar a componente  $\bar{\tau}\tau\bar{\theta}$  do supercampo  $\mathcal{L}$ . Do mesmo modo,  $Q_\tau$  escreve-se em termos da componente  $\bar{\theta}\theta\bar{\tau}$  de  $\mathcal{L}$ . Expandindo-se, então,  $\mathcal{L}$ , e reunindo-se as correspondentes componentes, surgem as seguintes expressões funcionais para as cargas de supersimetria  $Q_\theta$  e  $Q_\tau$ :

$$\begin{aligned}
Q_\theta = & i\gamma^0 \int d^2x \left\{ -\frac{i}{2}N\cancel{\theta}\lambda - \lambda\Delta + \frac{i}{2}\tilde{F}\eta - \frac{m}{2}N \left( \lambda - \frac{i}{2}\cancel{\theta}b \right) + \frac{m}{2}(E - N/2)\lambda \right. \\
& + \frac{m}{4}(-2F - iA)\eta - i\frac{m}{4}\tilde{F}d - \frac{m}{2}\Delta b + i\frac{m}{4}C\cancel{\theta}\lambda + \frac{hv^2}{2} \left( \lambda - \frac{i}{2}\cancel{\theta}b \right) \\
& - e^{(2hC+2gN)} \left[ g^2 \left( -2\Delta\lambda|\varphi|^2 + i\tilde{F}\eta|\varphi|^2 \right) + h^2 \left( 2(E - N/2)|\varphi|^2b - (-2F - iA)d|\varphi|^2 \right) \right. \\
& - hg \left( 2(E - N/2)|\varphi|^2\lambda + (-2F - iA)\eta|\varphi|^2 - i\tilde{F}d|\varphi|^2 - 2\Delta|\varphi|^2b \right) \\
& + h \left( \frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)b - \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)d + \frac{1}{2}(E - N/2)(X_+\varphi^* + X_-\varphi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{4}(-2F - iA)(X_+\varphi^* - X_-\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi^*\cancel{\theta}\varphi - \varphi\cancel{\theta}\varphi^*)d + \left( \lambda - \frac{i}{2}\cancel{\theta}b \right) |\varphi|^2 \right) \\
& + g \left( -\frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)\lambda - \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)\eta + \frac{1}{2}\Delta(X_+\varphi^* + X_-\varphi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4}\tilde{F}(X_+\varphi^* - X_-\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi^*\cancel{\theta}\varphi - \varphi\cancel{\theta}\varphi^*)\eta - \frac{i}{2}(\cancel{\theta}\lambda)|\varphi|^2 \right) \\
& \left. + \left( \frac{1}{4}X_+S^* + \frac{1}{4}X_-S + \frac{i}{8}\cancel{\theta}\varphi X_- + \frac{i}{8}\cancel{\theta}\varphi^* X_+ - \frac{i}{8}\varphi\cancel{\theta} X_- - \frac{i}{8}\varphi^*\cancel{\theta} X_+ \right) \right\} \\
& + \text{termos com três férmions,}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

e

$$\begin{aligned}
Q_\tau = & i\gamma^0 \int d^2x \left\{ -\frac{i}{2}N\cancel{\theta}\eta - \eta\Delta - \frac{i}{2}\tilde{F}\lambda - \frac{m}{2}N \left( \eta + \frac{i}{2}\cancel{\theta}d \right) - \frac{m}{2}(E + N/2)\eta \right. \\
& + \frac{m}{4}(-2F + iA)\lambda - i\frac{m}{4}\tilde{F}b + \frac{m}{2}\Delta d + i\frac{m}{4}C\cancel{\theta}\eta + \frac{hv^2}{2} \left( \eta + \frac{i}{2}\cancel{\theta}d \right) \\
& - e^{(2hC+2gN)} \left[ g^2 \left( -2\Delta\eta|\varphi|^2 - i\tilde{F}\lambda|\varphi|^2 \right) + h^2 \left( 2(E + N/2)|\varphi|^2d + (-2F + iA)b|\varphi|^2 \right) \right. \\
& + hg \left( 2(E + N/2)|\varphi|^2\eta - (-2F + iA)\lambda|\varphi|^2 + i\tilde{F}b|\varphi|^2 - 2\Delta|\varphi|^2d \right) \\
& + h \left( \frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)d + \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)b - \frac{i}{2}(E + N/2)(X_+\varphi^* - X_-\varphi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4}(-2F + iA)(X_+\varphi^* + X_-\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi^*\cancel{\theta}\varphi - \varphi\cancel{\theta}\varphi^*)b + \left( \eta + \frac{i}{2}\cancel{\theta}d \right) |\varphi|^2 \right) \\
& \left. + \left( \frac{1}{4}X_+S^* + \frac{1}{4}X_-S + \frac{i}{8}\cancel{\theta}\varphi X_- + \frac{i}{8}\cancel{\theta}\varphi^* X_+ - \frac{i}{8}\varphi\cancel{\theta} X_- - \frac{i}{8}\varphi^*\cancel{\theta} X_+ \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g \left( -\frac{1}{2}(S\varphi^* + S^*\varphi)\eta + \frac{i}{2}(S\varphi^* - S^*\varphi)\lambda - \frac{i}{2}\Delta(X_+\varphi^* - X_-\varphi) \right. \\
& \quad \left. -\frac{i}{4}\tilde{F}(X_+\varphi^* + X_-\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi^*\not{\partial}\varphi - \varphi\not{\partial}\varphi^*)\lambda + \frac{i}{2}(\not{\partial}\eta)|\varphi|^2 \right) \\
& \quad \left. + \left( -\frac{i}{4}X_+S^* + \frac{i}{4}X_-S + \frac{1}{8}\not{\partial}\varphi X_- - \frac{1}{8}\not{\partial}\varphi^* X_+ - \frac{1}{8}\varphi\not{\partial} X_- + \frac{1}{8}\varphi^*\not{\partial} X_+ \right) \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

+termos com três férmions ,

onde exibiram-se apenas os termos com um campo fermiônico. Objetiva-se determinar a projeção bosônica da carga central, que é o que se admite igualar ao funcional de energia, no regime saturado, e termos com três férmions produziram, necessariamente, contribuições com dois ou quatro férmions à carga central. Note-se, ainda, que se pode obter (4.8) a partir de (4.7) promovendo as trocas<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
C & \rightarrow C , & b & \rightarrow -d , & d & \rightarrow b \\
E & \rightarrow -E , & F & \rightarrow -F , & N & \rightarrow N \\
\lambda & \rightarrow \eta , & \eta & \rightarrow -\lambda , & \Delta & \rightarrow \Delta \\
\mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{A} , & \tilde{H} & \rightarrow \tilde{H} \\
S & \rightarrow -S , & S^* & \rightarrow -S^* , & (\varphi, \varphi^*) & \rightarrow +(\varphi, \varphi^*) \\
X_+ & \rightarrow i X_+ , & X_- & \rightarrow -i X_-
\end{aligned}$$

Obtém-se, na próxima seção, a carga central.

---

<sup>2</sup>Estas expressões servem à agilização de uma eventual busca de tradução funcional para as parametrizações de Dirac,  $Q_{\pm}$  e  $\tilde{Q}_{\pm}$ . Exibem, ainda, a resposta funcional a uma rotação no setor anti-comutante do superspaço. O sistema percebe essa transformação como uma *simetria* (o que ficará manifesto na notação de espinores combinados, a ser apresentada no próximo Capítulo), inerente à estrutura N=2-supersimétrica : trata-se da paridade-R [68].

## 4.2 Carga Central

A álgebra associada ao setor “anti-diagonal” das cargas de supersimetria, eq. (3.23), indica, como já comentado, a existência de espaço formal para a eventual presença de carga central na álgebra subjacente ao modelo, ainda que esta não se perceba, diretamente, como fruto da redução dimensional. devido ao esquema que adotamos [41] no caminho  $4D \rightarrow 3D$ . A contribuição de natureza topológica, contudo, permanece como potencial realizadora desta extensão central. Com o objetivo de verificar a presença deste gerador adicional, calculam-se os parênteses (3.23), a partir das expressões funcionais recém obtidas para  $Q_\theta$  e  $Q_\tau$ . O resultado deixará clara a natureza topológica desta contribuição.

Pode-se, para calcular os parênteses em questão, definir, a partir da ação (3.33) expandida em componentes, os momenta canonicamente conjugados a cada um dos campos, e implementar os pares coordenada/momentum como os fornecedores de contribuição não nula à carga central. Com o alvo restrito à projeção bosônica desta extensão, selecionariam-se, ainda, apenas os pares coordenada/momentum fermiônicos, que “trocariam” a presença fermiônica por uma  $\delta^2(x - y)$ . Alternativamente, adota-se, aqui, a expressão geral da álgebra, (3.23), e o conjunto de transformações de supersimetria como instrumentos de determinação da carga central.

Voltando a (3.23), tem-se:

$$\{Q_{\theta\beta}, \bar{Q}_{\tau\alpha}\}\delta_\alpha = -2iP_3\delta_\beta,$$

onde se multiplicou a expressão original pelo parâmetro de *susy*  $\delta_\alpha$ . O lado esquerdo da

equação acima pode ser reescrito como

$$\{Q_{\theta\beta}, \bar{Q}_{\tau\alpha}\}\delta_\alpha = [-\bar{\delta}_\alpha Q_{\tau\alpha}, Q_{\theta\beta}] \equiv \delta_\tau Q_{\theta\beta},$$

o que mostra que se pode obter a carga central tomando-se a variação gerada *sobre* a carga  $Q_\theta$  *pela* carga  $Q_\tau$ . Ou seja, sabendo-se que a transformação (infinitesimal) de supersimetria tem a tradução algébrica  $\delta_{\text{SUSY}} = \bar{\epsilon}Q_\theta - \bar{\delta}Q_\tau$ , fica evidente que basta variar, termo a termo, o polinômio nos campos e derivadas que define (4.7), segundo a projeção- $\tau$  das transformações de *susy* que apresentamos no Capítulo 2, eqs. (2.54), (2.55) e (2.56). Além disto, a restrição de interesse ao setor bosônico da carga central implica tomar as variações  $\tau$ -*susy* apenas sobre os férmions, transmutando essas presenças em resposta bosônica. As projeções- $\tau$  das transformações de supersimetria dos férmions (note-se que *não* se fixa o *gauge* de Wess-Zumino, de modo a, reitera-se, não se produzir “mistura” entre *susy* e simetria de *gauge*)<sup>3</sup> são dadas por:

$$\begin{aligned}\delta_\tau b &= +(-2F - iA)\delta \\ \delta_\tau d &= 2(E - N/2)\delta + i\bar{\varphi}C\delta \\ \delta_\tau \lambda &= i\bar{\tilde{f}}\delta \\ \delta_\tau \eta &= (2\Delta + i\bar{\varphi}N)\delta \\ \delta_\tau X_+ &= 2iS\delta - 2i(hN\varphi - i\bar{\theta}\varphi)\delta\end{aligned}\tag{4.9}$$

---

<sup>3</sup>Ainda que a carga central seja U(1)-invariante, o que permitiria fixar o *gauge* de Wess-Zumino, sem prejuízo do resultado. A manutenção dos campos compensadores, contudo, funciona como uma verificação de consistência do resultado a ser obtido, que não deve depender desses campos “puro-*gauge*”, salvo por considerações de seus comportamentos assintóticos.



$$\delta_\tau X_- = -2iS^*\delta + 2i(hN\varphi^* - i\beta\varphi^*)\delta.$$

Promovendo-se, então, as variações acima, resulta, para a carga central,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & i\gamma_{\beta\delta}^0 \int d^2x \left\{ \partial_i \left[ -\frac{1}{2}(N - m\frac{C}{2})\tilde{F}_\nu(\gamma^\nu\gamma^i)_{\delta\varepsilon} + \right. \right. \\ & - \frac{i}{2}(mN - h(v^2 - |\phi_G|^2))F\gamma_{\delta\varepsilon}^i + \frac{1}{4}e^{(2hC+2gN)}(S^*\varphi - S\varphi^*)\gamma_{\delta\varepsilon}^i + \\ & \left. \left. + \frac{1}{4h}\mathcal{J}_\nu(\gamma^\nu\gamma^i)_{\delta\varepsilon} + \frac{1}{4}(mN - hv^2)A_\nu(\gamma^\nu\gamma^i)_{\delta\varepsilon} \right] \delta_\varepsilon \right\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

com o uso das notações

$$\mathcal{J}_\nu = -\frac{i\hbar}{2}(\phi_G^*\nabla_\nu\phi_G - \phi_G(\nabla_\nu\phi_G)^*), \quad \text{valendo } \partial_\nu\mathcal{J}^\nu = 0,$$

$$\text{onde } \nabla_\nu\phi_G = (\partial_\nu + ihA_\nu + ig\tilde{F}_\nu)\phi_G, \quad \text{com } \phi_G \equiv \sqrt{2}e^{(hC+gN)}\varphi,$$

e tomando-se nulas as derivações temporais.

A expressão (4.10) evidencia a natureza topológica da carga central, que se traduz pela integral, em todo o espaço plano, de uma divergência total, ou seja,  $\mathcal{Z}$  é dada por um “fluxo no infinito”. Considerando, ainda, as configurações associadas ao regime saturado, com limite nulo no infinito para os campos  $C, E, F, N, \tilde{F}_\mu, S$  (que se expressa, este último, *on-shell*, como uma soma de termos contendo, todos, ou  $H = E + iF$  ou férmions), e reiterando a conservação da corrente  $\mathcal{J}_\nu$  bem como sua anulação no infinito, de modo a viabilizar finitude da energia, resta para a carga central o termo

$$\mathcal{Z} = i\gamma_{\beta\delta}^0 \int d^2x \partial_i \left( -\frac{\hbar v^2}{4} A_\nu(\gamma^\nu\gamma^i)_{\delta\varepsilon} \right) \delta_\varepsilon.$$

Este termo desenvolve-se como

$$\mathcal{Z} = -\frac{i\hbar v^2}{4}\gamma_{\beta\delta}^0 \int d^2x \left[ (\partial_i A_0)(\gamma^0\gamma^i)_{\delta\varepsilon} + (\partial_i A_j)(\gamma^j\gamma^i)_{\delta\varepsilon} \right] \delta_\varepsilon =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ihv^2}{4}\gamma_{\beta\delta}^0 \int d^2x \left[ (\partial_i A_0)(i\mathcal{E}^{0ij}(\gamma_j)_{\delta\varepsilon}) + (\partial_i A_j)(i\mathcal{E}^{ji0}(\gamma_0)_{\delta\varepsilon}) \right] \delta_\varepsilon = \\
&= -\frac{ihv^2}{4}\gamma_{\beta\delta}^0 \int d^2x \left[ i \underbrace{\mathcal{E}^{0ij}}_{\equiv \mathcal{E}^{ij}} (\partial_i A_0)(\gamma_j)_{\delta\varepsilon} - i \underbrace{(\mathcal{E}^{0ij}\partial_i A_j)}_{\equiv \tilde{F}^0} (\gamma_0)_{\delta\varepsilon} \right] \delta_\varepsilon = \\
&= -\frac{ihv^2}{4} \int d^2x \partial_i (A_0 \gamma_{\delta\varepsilon}^i) \delta_\varepsilon - \frac{hv^2}{4} \int d^2x \tilde{F}^0 \delta_\beta,
\end{aligned}$$

e, considerando-se o vetor  $A_0\gamma^i$  como tendo limite nulo para  $r \rightarrow \infty$  (o que é compatível com (2.74)), resulta:

$$Z = \frac{hv^2}{4} \int d^2x B \delta_\beta, \quad (4.11)$$

o que demonstra a relação entre a carga central e a carga topológica, definida pelo fluxo magnético, e confirma a expectativa de que o espaço formal para a extensão central, indicado pela eq.(3.23), pode ser ocupado por uma contribuição de origem topológica, uma realização não-trivial (viabilizada, neste modelo específico, pelo termo de Fayet-Iliopoulos) da carga para a equação de continuidade/identidade de Bianchi  $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0$ .

A possibilidade de redefinição da corrente de Noether, que abriga ambigüidade face a uma soma de termos com  $\partial_\mu = 0$ , uma eq. de movimento, ou termos que, na prevalência das eqs. de movimento, tem  $\partial_\mu = 0$ , justifica a verificação do resultado acima via um “melhoramento” da corrente conservada, obtido com o acoplamento do modelo com supergravidade. No último capítulo, exibe-se, como perspectiva de continuidade, este acoplamento no superespaço  $N=1-D=3$ . Constrói-se, ainda, o ambiente para a verificação da própria corrente canônica, analisando-se a variação do modelo perante o relaxamento do parâmetro de *susy*[69], que passa a ter dependência espaço-temporal,  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ .

Na próxima seção investiga-se, para uma carga central genérica mas não-trivial, a

conseqüência algébrica da saturação de uma cota inferior para a energia do sistema. Percebe-se, explicitamente, a confirmação, para o modelo que se propõe, da associação, defendida por Hlousek e Spector [18], entre as eqs. de 1<sup>a</sup> ordem de Bogomol'nyi e a trivialização de uma carga de supersimetria no regime saturado.

### 4.3 Variações dos Férmions e Equações de Bogomol'nyi

A saturação do bound de Bogomol'nyi efetiva-se na anulação de um setor das transformações de supersimetria de todos os campos (concentrar-nos-emos em campos fermiônicos) que compõem o espaço funcional no qual se realiza a álgebra de supersimetria, originalmente  $N = 2$ , dotada de extensão central não-trivial de origem topológica. Este fato torna-se manifesto se os férmions apresentam-se escritos na parametrização do superespaço que restringe o setor diagonal da álgebra das cargas tipo Dirac aos operadores  $P_0$  (energia) e  $Z$  (carga central).

Em geral, a parametrização adotada define-se na composição de espinores do seguinte modo:

$$\tilde{\Lambda} \equiv \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma^0 \eta \end{pmatrix} .$$

com a correspondente expressão para a versão de Dirac assumindo a forma

$$\tilde{\Lambda}_{\pm} \equiv \lambda \pm i\gamma^0 \eta ,$$

e, conseqüentemente, definindo-se os barrados como  $\overline{\tilde{\Lambda}}_{\pm} \equiv \overline{\lambda} \mp i\overline{\eta}\gamma^0$ .

As cargas de supersimetria, construídas como espinores de Dirac a partir das duas cargas de Majorana resultantes do *splitting* promovido pelo procedimento de redução dimensional, assumem, então, nesta reparametrização do superespaço, a forma:

$$\tilde{Q}_{\pm} \equiv Q_{\theta} \mp i\gamma^0 Q_{\tau},$$

com a inversão do rótulo  $\pm$  sendo motivada, como já comentado, pela associação imediata à variável do superespaço (tipo Dirac) em termos da qual se escreve cada uma das cargas ( $Q_{\pm}$  define-se, operatorialmente, em termos de  $\theta_{\pm}$ ).

A álgebra de supersimetria definida pelas cargas de Dirac nesta nova parametrização produz, como resposta ao setor diagonal de seus anticomutadores, a presença exclusiva dos operadores de energia ( $P_0$ ) e carga central ( $Z$ ), cancelando, graças ao registro de um  $\gamma^0$  adicional na definição das cargas, as contribuições que adviriam dos operadores de momentum ( $P_i$ ), inicialmente presentes na parametrização de Dirac original (eq. (3.25))

<sup>4</sup>. Resulta, se renomearmos  $P_3 \equiv Z$  em (3.23):

$$\begin{aligned} \{\tilde{Q}_+, \bar{\tilde{Q}}_+\} &\equiv \{Q_{\theta} - i\gamma^0 Q_{\tau}, \bar{Q}_{\theta} + i\bar{Q}_{\tau}\gamma^0\} = \\ &= \{Q_{\theta\alpha}, \bar{Q}_{\theta\beta}\} + i\gamma^0_{\gamma\beta}\{Q_{\theta\alpha}, \bar{Q}_{\tau\gamma}\} - i\gamma^0_{\alpha\lambda}\{Q_{\tau\lambda}, \bar{Q}_{\theta\beta}\} + \gamma^0_{\alpha\lambda}\gamma^0_{\gamma\beta}\{Q_{\tau\lambda}, \bar{Q}_{\tau\gamma}\} \\ &= 2\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}P_{\mu} - i\gamma^0_{\alpha\lambda}(2i\delta_{\lambda\beta}Z) + i\gamma^0_{\gamma\beta}(2i\delta_{\alpha\gamma}Z) + \gamma^0_{\alpha\lambda}\gamma^0_{\gamma\beta}(2\gamma^{\mu}_{\lambda\gamma}P_{\mu}) \\ &= 2\gamma^0_{\alpha\beta}P_0 + 2\gamma^i_{\alpha\beta}P_i + 4\gamma^0_{\alpha\beta}Z + 2\underbrace{\gamma^0_{\alpha\lambda}\gamma^0_{\lambda\gamma}\gamma^0_{\gamma\beta}}_{=\gamma^0_{\alpha\beta}}P_0 + 2\underbrace{\gamma^0_{\alpha\lambda}\gamma^i_{\lambda\gamma}\gamma^0_{\gamma\beta}}_{=-\gamma^i_{\alpha\beta}}P_i \\ &= 2\gamma^0_{\alpha\beta}P_0 + 2\gamma^i_{\alpha\beta}P_i + 4\gamma^0_{\alpha\beta}Z + 2\gamma^0_{\alpha\beta}P_0 - 2\gamma^i_{\alpha\beta}P_i \\ &= 4\gamma^0_{\alpha\beta}(P_0 + Z). \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>A parametrização com  $\gamma^0$  adicional já aparece na literatura em [13] e [6].

A álgebra, em seu setor diagonal para  $\tilde{Q}_-$ , resulta, pelo motivo acima exposto,

$$\{\tilde{Q}_-, \overline{\tilde{Q}_-}\} = 4\gamma^0(P_0 - Z),$$

deixando evidente que a saturação do *bound* de Bogomol'nyi corresponde à trivialização **exclusiva** de uma única carga,  $\tilde{Q}_+$  ou  $\tilde{Q}_-$ , com a anulação de um dos anticomutadores implicando o “reforço” do outro. O setor cruzado mantém o resultado da parametrização anterior (eqs.(3.24,3.25)).

Pode-se, portanto, traduzir a saturação do *bound*, que corresponde, como já visto, à configuração de mínima energia, como o regime em que se dá a anulação da ação de uma das cargas sobre todo o espaço funcional no qual a álgebra, originalmente  $N = 2$ , se realiza. Nesta situação, então, justifica-se a afirmação de que os estados BPS[9, 70] preservam metade das supersimetrias originais[22]. Atendo-nos à perspectiva do ambiente supersimétrico como ferramenta para a obtenção de equações auto-duais de primeira ordem para o setor bosônico, motivados pela investigação de eventuais excitações topológicas, restringiremos, neste momento, a análise às conseqüências da anulação de um setor das transformações de supersimetria (= ação anuladora de uma das cargas) sobre os campos fermiônicos. Evidentemente, isto proverá equações de primeira ordem para o conjunto de campos bosônicos da teoria (2.72, [18]).

A reexpressão das transformações de supersimetria (eqs.(3.15), Cap.3) nesta nova parametrização do superespaço, reescrevendo-se as variações em termos de parâmetros globais  $\tilde{\mathcal{E}}_+$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_-$ , permite a imediata e usual correspondência entre a trivialização de uma das cargas e a anulação do setor das transformações associado ao parâmetro correspondente.

De fato, obtém-se:

$$\begin{aligned}\delta_{susy} &\equiv \bar{\mathcal{E}}\mathcal{Q}_\theta - \bar{\delta}\mathcal{Q}_\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left( \bar{\mathcal{E}}_+ \tilde{\mathcal{Q}}_+ + \bar{\mathcal{E}}_- \tilde{\mathcal{Q}}_- \right) .\end{aligned}$$

Resumindo, fora do gauge de Wess-Zumino, a exigência **simultânea** de

$$\delta\tilde{\Lambda}_+ = \delta\tilde{\Lambda}_- = \delta\tilde{X}_+ = \delta\tilde{X}_- = \delta\tilde{B}_+ = \delta\tilde{B}_- = 0 ,$$

com  $\tilde{\mathcal{Q}}_\mp = 0$  (faz-se a necessária ressalva de que se trata, nesta última condição, do uso de uma compactação formal, uma notação com implicação alternativa, uma vez que as hipóteses  $\tilde{\mathcal{Q}}_\mp = 0$  não convivem), produz:

$$\tilde{\Lambda} : \begin{cases} B = \pm 2\Delta \Rightarrow (B = \mp \frac{e}{2G} (|\phi|^2 - v^2 + \frac{2k}{e}M + 2g|\phi|^2M), \phi \text{ redefinido} \rightarrow e^{2hC}) \\ E_i = \mp \partial_i N \Rightarrow (\epsilon_{ij} \partial_i E_j = 0 \stackrel{\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0}{\Rightarrow} \partial_0 B = 0 \Rightarrow \partial_0 \Delta = 0) \quad e \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda} : \partial_0 N = 0 : \text{Configuração estática!!} \Rightarrow \partial_0 E_i = 0$$

Também:

$$\tilde{X} : \begin{cases} \partial_0 \varphi = 0 \Rightarrow \text{Configuração estática!!} \\ (\partial_1 \mp i\partial_2)\varphi = 0 \\ (\partial_1 \pm i\partial_2)\varphi^* = 0 \Rightarrow \text{Eqs. de Bogomol'nyi!!} \quad e \end{cases}$$

$$\tilde{X} : S = 0 \tag{4.12}$$

E ainda:

$$\tilde{B} : H = 0 \Rightarrow \text{reunido a (4.12), f\u00e9rmions nulos ;} \quad (4.13)$$

$$\tilde{B} : A_0 = \mp N \stackrel{\partial_0 N=0}{\Rightarrow} \partial_0 A_0 = 0 (*) ; \quad (4.14)$$

$$\tilde{B} : \begin{cases} A_2 = \mp \partial_1 C \\ A_1 = \pm \partial_2 C \Rightarrow A_i = \pm \epsilon_{ij} \partial_j C \Rightarrow \partial_i A_i = 0 \\ \partial_0 C = 0 \Rightarrow \text{Configura\u00e7\u00e3o est\u00e1tica!!} \Rightarrow \partial_0 A_i = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \partial_0 A_\mu = 0 \rightarrow \text{Config. est\u00e1t!!} \end{cases}$$

Al\u00e9m disso,  $\partial_0 \varphi = 0$  e eq.(4.14) permitem, mesmo fora do gauge de W.Z., *compor* a equa\u00e7\u00e3o:

$$D_0 \varphi \pm ihN\varphi = 0 ,$$

onde  $D_0 \varphi = (\partial_0 + ihA_0)\varphi$ . Vale ainda a rela\u00e7\u00e3o  $B = \mp \frac{1}{2} \square C$ .

Vale ressaltar, neste ponto, que a ado\u00e7\u00e3o pr\u00e9via de configura\u00e7\u00f5es est\u00e1ticas para o regime saturado, usualmente encontrada na literatura [29, 16, 13]<sup>5</sup>, demonstra-se correta mas desnecessariamente antecipada, uma vez que tal exig\u00eancia surge como conseq\u00fc\u00eancia imediata da pr\u00f3pria tradu\u00e7\u00e3o alg\u00e9brica da satura\u00e7\u00e3o. Coerentemente, a reparametriza\u00e7\u00e3o do superespa\u00e7o, com a rota\u00e7\u00e3o do *eixo*- $\tau$  por  $\gamma^0$ , dispensa o uso da declara\u00e7\u00e3o pr\u00e9via de regime est\u00e1tico como instrumento para reduzir o “lado direito” da \u00e1lgebra de supercargas aos operadores energia ( $P_0$ ) e carga central ( $Z$ ).

---

<sup>5</sup>Em [14], contudo, o car\u00e1ter estacion\u00e1rio da configura\u00e7\u00e3o se estabelece, como aqui se v\u00ea, a partir da satura\u00e7\u00e3o do *bound*.

Se fixamos o gauge de Wess-Zumino, os espinores  $\tilde{B}_\pm$  são eliminados do espaço funcional sobre o qual realiza-se, agora, uma álgebra de supersimetria **modificada**, redefinida com a composição obrigatória, em cada transformação implementada, da supersimetria original com uma “transformação de gauge de retorno”, de modo a preservar a escolha de gauge (W.Z.) adotada. Neste gauge não-covariante sob a susy original, eliminam-se, também, outros campos compensadores, além dos espinores  $\tilde{B}_\pm$ , quais sejam, os escalares  $C$  e  $H$ .

A saturação do bound de Bogomol’nyi também se verifica, com o gauge de W.Z. fixado, na anulação das transformações de susy dos espinores que habitam o espaço funcional no qual a álgebra se realiza, expressos na parametrização adequada do superespaço. A conversão necessária a este regime não-susy-covariante, contudo, deve ser observada, e resume-se à consideração de que as variações a serem anuladas são as transformações de susy *modificadas*, composições de susy + gauge.

Resumindo, no gauge de Wess-Zumino, a exigência **simultânea** de

$$\delta\tilde{\Lambda}_+ = \delta\tilde{\Lambda}_- = \delta\tilde{X}_+^{WZ} = \delta\tilde{X}_-^{WZ} = 0 ,$$

com  $\tilde{Q}_\mp = 0$  (mais uma vez: implicação alternativa, as hipóteses  $\tilde{Q}_\mp = 0$  não convivem), produz:

$$\tilde{\Lambda} : \left\{ \begin{array}{l} B = \mp 2\Delta \Rightarrow (B = \mp \frac{e}{2G} (|\phi|^2 - v^2 + \frac{2k}{e} M + 2g|\phi|^2 M)) , \\ E_i = \mp \partial_i N \Rightarrow (\epsilon_{ij} \partial_i E_j = 0 \stackrel{\partial\tilde{F}=0}{\Rightarrow} \partial_0 B = 0 \Rightarrow \partial_0 \Delta = 0 \Rightarrow \partial_0 |\phi|^2 = 0) , \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$e \tilde{\Lambda} : \partial_0 N = 0 : \text{Configuração estática!!} \Rightarrow \partial_0 E_i = 0 ,$$



ou seja, as mesmas equações que já havíamos encontrado fora do gauge de W.Z., quando investigamos as conseqüências de  $\delta\tilde{\Lambda}_+ = \delta\tilde{\Lambda}_- = 0$  - fato associado ao caráter invariante de gauge do espinor (físico!)  $\tilde{\Lambda}$ , o *gaugino* -, além das seguintes:

$$\tilde{X}^{WZ} : \begin{cases} D_0\varphi \pm ihN\varphi = 0 \\ (D_1 \mp iD_2)\varphi = 0 \\ (D_1 \pm iD_2)\varphi^* = 0 \Rightarrow \text{Eqs. de Bogomol'nyi!! } e \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\tilde{X}^{WZ} : S = 0 \Rightarrow \text{férmions nulos,}$$

e as conjugadas complexas para  $\tilde{\Lambda}_\pm$ ,  $\tilde{X}_\pm^{WZ}$ . Observe-se, nas expressões das eqs.(4.15), (4.16), que a análise algébrica reproduz e confirma integralmente os resultados - eqs. de Bogomol'nyi - obtidos anteriormente (Cap.2), com recurso, naquele contexto, à análise e manipulação direta da expressão para o funcional de energia do modelo proposto.

Vale ressaltar, ainda, que as alternativas, **mutuamente excludentes**, de trivialização (zero sobre todo o espaço funcional) de uma das duas cargas de susy,  $\tilde{Q}_+ = 0$  ou  $\tilde{Q}_- = 0$ , constituem a única forma de compatibilizar a saturação do *bound* de Bogomol'nyi -  $\delta_+(\nabla(\text{férmion})_\pm) = 0$  ou  $\delta_-(\nabla(\text{férmion})_\pm) = 0$  - com configurações não-triviais para os campos neste regime. A trivialização simultânea de ambas as supersimetrias produziria um regime de saturação que só poderia ser realizado para configurações topologicamente triviais<sup>6</sup>, e a energia deste regime resultaria nula, igualando-se à carga central que, des-

---

<sup>6</sup>De fato, configurações triviais, sem dependência espaço-temporal; em particular, a fase de  $\phi$  complexo, independente de  $(r, \theta)$ , levaria a uma realização trivial - anulação - da carga topológica, representada pelo fluxo magnético.

provida de contribuições topológicas, assumiria o valor zero. Mantendo-se o interesse em eventuais excitações como vórtices topológicos, deve-se notar que, no regime em que prevalecem as eqs. “auto-duais” de Bogomol’nyi, apenas metade das supersimetrias, uma, se preserva. Essas relações, manifestas neste modelo específico, entre o número de supersimetrias e a saturação de uma cota inferior para a energia associada à não-trivialidade da carga central em um contexto  $N = 2$ -supersimétrico, são reexpressões do fato algébrico geral que define as chamadas “*short representations*” [22], conforme antecipado no Cap.1. A especificidade desta classe de modelos reside, contudo, na natureza topológica - dependência de informação topológica introduzida por configurações de campos admissíveis no regime saturado - da realização não-trivial da carga central.

Obs.: Referimo-nos, ao mencionar “ausência de configurações de topologia não-trivial”, à inexistência, no sistema proposto, de graus de liberdade multi-valorados, como a fase do campo escalar complexo, que se acopla ao campo de *gauge*, e realiza a carga topológica/fluxo magnético[8]. Isto não implica, necessariamente, demandar configuração com  $|\phi|^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v^2 \neq 0$  (abusando da linguagem, “topologia do módulo”), uma vez que a topologia trivial de  $\phi$ , em geral, define-se via um limite (se  $r \rightarrow \infty$ ,  $|\phi| \rightarrow 0$ ) que não necessariamente afeta a fase (no *ansatz* de vórtice, com simetria rotacional, definitivamente não afeta; a fase é proporcional à coordenada angular e, como é usual, permanece multi-valorada em qualquer processo de limite para a coordenada radial,  $r$ ). De fato, isto permite, por exemplo, a eventual verificação de excitações classificadas como vórtices não-topológicos (presentes em nosso modelo), que se definem via simetria rotacional  $\oplus (|\phi|^2, A_i) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} = 0$  (por isto, ditos não-topológicos), mas que carregam carga (e, portanto, informação) topológica, associada ao fluxo magnético (ainda que, eventualmente, não quantizada [32]). Na especificidade de nosso modelo, acrescenta-se, essas configurações, ainda que verifiquem  $(|\phi|^2, A_i) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} = 0$ , definem-se de forma mais ampla, incluindo, necessariamente, um campo escalar real,  $M$ , de topologia *não-trivial*,  $M \xrightarrow{r \rightarrow \infty} = \frac{ev^2}{2\kappa}$ , como condição necessária à minimização do potencial (e conseqüente determinação dos vácuos de campos constantes, “conectados” na saturação do *bound* para  $P_0$ , regime em que as eqs. de 1ª ordem que apontam a existência dessas configurações de vórtice fazem sentido). Vê-se, portanto, que há informação topológica mesmo em “vórtices não-topológicos”. A situação limite de ausência de topologia não-trivial se daria, em nosso modelo, se abolíssemos o termo de Fayet-Iliopoulos. Neste caso, o potencial seria minimizado com  $|\phi|$  e  $M$  nulos, e, consis-

tentemente, o funcional de energia teria seu mínimo em zero, a carga central se anularia (é proporcional a  $v^2$ ), ambas as cargas de susy se trivializariam no mínimo de  $P_0$ , os dois conjuntos de eqs. de Bogomol'nyi (as duas possibilidades de sinais prevalecendo, as trans. de susy induzidas pelas duas cargas se anulando) se aplicariam simultaneamente, e como consequência disto tudo, ou, coerentemente compondo o quadro geral, os campos de gauge se anulariam e  $\phi$  assumiria valor constante (estático e, nessas circunstâncias. espacialmente homogêneo). O limite nulo no infinito (para eventual configuração conectando mínimos do potencial, que, neste contexto, pedem  $|\phi| = 0$ ), finalmente, obrigaria  $\phi$  constante e igual a zero, e nesta situação, **não** sobreviveria a fase do campo complexo, que não tem sentido para um campo nulo. A informação topológica se perde e, além de não contribuir à carga central (que pede um fator  $v^2$ ), a própria carga topológica, o próprio fluxo magnético teria realização nula.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Concluído o programa de produzir um modelo planar ( $D=(2+1)$ ) de Maxwell-Chern-Simons [71] acoplado mínima e não-minimamente à matéria, com realização *off-shell* de supersimetria estendida  $N=2$ , e verificada a presença de regime auto-dual na saturação de um *bound* algébrico/topológico, com a conseqüente prevalência de eqs. auto-duais de Bogomol'nyi, evidencia-se a necessidade de algumas investigações complementares para a total compreensão da teoria aqui proposta.

A realização da supersimetria estendida  $N=2$ , com a álgebra enriquecida pela presença de uma carga central de origem topológica, e a verificação de regime auto-dual que este contexto abriga **não** dependem de nenhuma relação específica entre parâmetros. A análise do regime auto-dual aqui apresentada, contudo, com a busca de eventuais excitações de vórtices deu-se, exclusivamente, sob a validade do acoplamento crítico. Cabe, evidentemente, uma análise complementar em ambiente mais geral, sem a prevalência de  $g = -e/m$ .

A proposta original, o *ansatz*  $N=1-D=4$  (2.1), assim como o processo de redução dimensional e identificação de campos, ainda que componham um conjunto ( $N=2$ ) consistente e suficiente para os objetivos que nortearam este trabalho, merecem revisitação detalhada, com a meta de se estabelecer os limites de generalidade desta construção formal. A adoção de interação (e conseqüente auto-interação) não-mínima em formato mais geral, não-polinomial ( $e^{4g\mathcal{G}}$ ), como extensão do termo de acoplamento mínimo, é evidentemente um progresso, no sentido da generalidade, em relação aos potenciais específicos pré-impostos na literatura precedente. Deve-se, contudo, buscar maior compreensão das conseqüências e traçar possíveis analogias no âmbito de modelos com interações não-polinomiais [72].

O processo de redução dimensional, também, merece uma proposta alternativa, como a apresentada na Ref.[59], de modo a esclarecer, comparativamente, as conexões próprias do resultado planar com a dimensão (física) original,  $D=(1+3)$ . No tocante às identificações de campos, uma eventual justificativa física, ainda que dispensável para o procedimento algorítmico que aqui se apresentou, definiria a ascendência dimensional de modo pleno, transformando o método para obtenção da teoria desejada em parte integrante da própria teoria. O *ansatz* em  $D=4$ , também, é alvo de investigação adicional, movida pelo interesse em produzir um ambiente de (super)simetrias mais amplo já em  $D=4$ . O conteúdo de campos sugere, por exemplo, o estudo do multiplete  $N=2-D=4$  vetor-tensorial [61, 73, 74] como possível ponto de partida para a geração de um interessante descendente planar [62].

## 5.1 Supercorrente, Ambiente de Supergravidade, Espinoros Combinados e Simetrias Adicionais: Comentários e Ações

A abordagem covariante [75], em formalismo de superespaço/supercampos, permitiu uma incursão mais criteriosa à estrutura algébrica do modelo. Há desvios, contudo, no que se expôs, de uma abordagem plenamente covariante. As expressões funcionais para as cargas de supersimetria derivam de uma super-corrente canônica, obtida via a construção de uma versão, no superespaço  $N=2-D=3$ , do Teorema de Noether. Cabe, evidentemente, uma reformulação do cálculo das super-cargas em ambiente *improved*, ou seja, a partir do acoplamento do modelo à supergravidade  $N=2-D=3$  linearizada. Sintomaticamente, a *magnitude* da carga central que obtivemos não coincide com a do *bound* para o funcional de energia (constante diferente  $\times ev^2\Phi_B$ ), que não é canônico, mas corrigido. As ambigüidades inerentes à magnitude de correntes e cargas [76] merecem, portanto, abordagem imediata. Apresenta-se, então, um par de ações já construídas para a revisão das expressões para correntes e cargas. A primeira, em campos-componentes, contribui para a verificação do *resultado canônico*, recorrendo-se à obtenção da corrente de Noether espinor-vetorial (super-corrente) a partir da variação da ação diante do relaxamento do parâmetro (espinorial) de *susy*, tomado como espaço-tempo dependente. A corrente de Noether acopla-se com a nova contribuição, o gradiente do parâmetro [69]:  $\delta S = \int d^3x (\partial_\mu \bar{\epsilon}(x)) J_N^\mu$  (iterativamente, promovendo-se *susy* local, este termo geraria a contrapartida  $\psi_{\mu\alpha} J_N^\mu$ , onde  $\psi_{\mu\alpha}$

é o campo de *gauge* para a supersimetria local, o gravitino). A ação em que a revisão se dará é escrita em termos de *espinores combinados*. Esta reparametrização deixa evidente a invariância da ação sob paridade-R, e funciona como ponto de partida para a busca de eventuais correntes conservadas globais adicionais. no regime de acoplamento crítico e *on-shell*, seguindo o procedimento da Ref.[6]. A segunda ação exhibe o acoplamento do modelo à supergravidade no superespaço N=1-D=3. Serve tanto à revisão das correntes, oferecendo um resultado *improved*, quanto à busca de extensões do modelo ao ambiente de supergravidade, em que o regime auto-dual tem características de extremo interesse (como a viabilização da definição de espinores covariantemente conservados) [77]. Seu detalhamento encontra-se na Ref.[78]. Seguem:

$$\begin{aligned}
S_{\text{MCS}}^{\text{N}=2} = & \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + 2\Delta^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N \right. \\
& + 2mN\Delta - hv^2\Delta + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}_-(i\rlap{/}\partial + m)\Lambda_- + \\
& + e^{2hC}e^{2gN} \left[ (\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi)^* + (hN + 2g\Delta) \left( -(hN - 2g\Delta)|\varphi|^2 + \frac{1}{8}(\bar{\Psi}_\uparrow\Psi_\uparrow + \bar{\Psi}_\downarrow\Psi_\downarrow) \right) \right. \\
& - \frac{h}{2}(\varphi\bar{\Lambda}_+\Psi_\downarrow + \varphi^*\bar{\Lambda}_-\Psi_\uparrow) + \frac{i}{8}(\bar{\Psi}_\uparrow\rlap{/}\nabla_+\Psi_\uparrow + \bar{\Psi}_\downarrow\rlap{/}\nabla_-\Psi_\downarrow) + \\
& + |\varphi|^2(2h\Delta - g^2\partial_\mu N\partial^\mu N + h^2\partial_\mu C\partial^\mu C) + \frac{h}{2}(\partial_\mu|\varphi|^2)(\partial^\mu C) + \\
& \left. + \left| S + 2h\varphi H + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}_\downarrow\mathcal{L}_\uparrow + g\varphi\bar{\mathcal{L}}_1\mathcal{L}_\uparrow) \right|^2 \right\},
\end{aligned}$$

onde os espinores combinados  $\Psi_\uparrow, \Psi_\downarrow, \mathcal{L}_\uparrow, \mathcal{L}_\downarrow$  e seus barrados têm valor de carga U(1) e comportamento perante a rotação dos eixos do superespaço,  $\theta_+ \rightarrow -i\theta_+, \theta_- \rightarrow +i\theta_-$ , bem definidos (homogêneos na combinação de espinores de Dirac  $X_\pm, \Lambda_\pm, \mathcal{B}_\pm$  e escalares  $\varphi, \varphi^*$ ). Os espinores  $\mathcal{L}_{\uparrow\downarrow}$  (neutros para U(1)) não contribuem para o acoplamento com  $\partial_\mu\bar{\epsilon}$ , uma vez que não aparecem em termos que possuam derivada. De fato, se tomarmos a



ação *on-shell* para os auxiliares de matéria,  $S, S^*$ , a última linha (módulo ao quadrado) desaparece e, com ela, a participação dos espinores  $\mathcal{L}_{\uparrow\downarrow}$ . As transformações de supersimetria para os  $\Psi$ 's podem ser facilmente obtidas a partir das transformações já estabelecidas para os espinores de Dirac e escalares que se combinam, segundo as seguintes definições:

$$\begin{aligned}\Psi_{\uparrow} &\equiv X_+ - 2g\varphi\Lambda_- + 2h\varphi\mathcal{B}_+ ; \text{ sob } \theta_{\pm} \rightarrow \mp i\theta_{\pm}, \Psi_{\uparrow} \rightarrow +i\Psi_{\uparrow} \\ \Psi_{\downarrow} &\equiv X_- - 2g\varphi^*\Lambda_+ + 2h\varphi^*\mathcal{B}_- ; \text{ sob } \theta_{\pm} \rightarrow \mp i\theta_{\pm}, \Psi_{\downarrow} \rightarrow -i\Psi_{\downarrow} \\ \mathcal{L}_{\uparrow} &\equiv \Lambda_- - \frac{h}{g}\mathcal{B}_+ ; \text{ sob } \theta_{\pm} \rightarrow \mp i\theta_{\pm}, \mathcal{L}_{\uparrow} \rightarrow +i\mathcal{L}_{\uparrow} \\ \mathcal{L}_{\downarrow} &\equiv \Lambda_+ - \frac{h}{g}\mathcal{B}_- ; \text{ sob } \theta_{\pm} \rightarrow \mp i\theta_{\pm}, \mathcal{L}_{\downarrow} \rightarrow -i\mathcal{L}_{\downarrow} .\end{aligned}$$

Exibe-se, assim, o cenário associado à revisão da corrente canônica. A obtenção de uma versão *improved* para correntes e cargas e a inserção do modelo proposto em ambiente de supergravidade tem como ponto de partida a seguinte ação, tomada no superespaço N=1-D=3:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{N=1\text{-supergravity}}^{N=2} &= \int d^3x d^2\theta E \left\{ \frac{1}{2}\mathcal{G}_1^\alpha\mathcal{G}_{1\alpha} - 2\mathcal{G}_0\mathcal{G}_2 + \frac{\kappa}{2} \left( \mathcal{V}_0\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_0\mathcal{V}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{V}_1^\alpha\mathcal{G}_{1\alpha} \right) + \right. \\ &- \frac{1}{4}h\nu^2\mathcal{V}_2 + \frac{1}{4}e^{4g\mathcal{G}_0}e^{2h\mathcal{V}_0} \left[ \left( -\frac{1}{2}\phi_1^\alpha\phi_{1\alpha} + \bar{\phi}_0\phi_2 + \bar{\phi}_2\phi_0 \right) + \right. \\ &+ 4g \left( \bar{\phi}_0\phi_0\mathcal{G}_2 - \text{Re}(\phi_0)(\phi_1^\alpha\mathcal{G}_{1\alpha}) \right) + 2h \left( \bar{\phi}_0\phi_0\mathcal{V}_2 - \text{Re}(\phi_0)(\phi_1^\alpha\mathcal{V}_{1\alpha}) \right) + \\ &\left. \left. - 4g^2\bar{\phi}_0\phi_0\mathcal{G}_1^\alpha\mathcal{G}_{1\alpha} - h^2\bar{\phi}_0\phi_0\mathcal{V}_1^\alpha\mathcal{V}_{1\alpha} - 4hg\bar{\phi}_0\phi_0\mathcal{V}_1^\alpha\mathcal{G}_{1\alpha} \right] \right\}, \quad (5.1)\end{aligned}$$

onde os índices numéricos identificam N=1- $\theta$ -supercampos tomados como componentes para uma super-expansão na direção integrada, aqui,  $\tau$  ( $\Phi(x, \theta, \tau) = \phi_0(x, \theta) + \bar{\phi}_1(x, \theta)\tau + \phi_2(x, \theta)\bar{\tau}\tau$ , e o mesmo para  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{G}$ ). A grandeza  $E$ , no elemento de integração, é o super-determinante da super-vielbein  $E_M^A$ , com os índices latinos maiúsculos compactando duas

tensorialidades: a espinorial,  $A = \alpha$ , e a bi-espinorial simetrizada - vetorial -,  $A = (\alpha\beta)$ . O começo do alfabeto, latino ou grego, denota (super)espaço tangente, e o meio do alfabeto indica “super-mundo”. Como a super-corrente aparece a partir da variação da ação acima em relação a super-vielbein  $E_{(\alpha\beta)}^\mu$ , e dado que este objeto habita as derivações covariantizadas, projetando-as no espaço tangente e compondo as conexões de spin <sup>1</sup> que realizam a covariantização, há que se estabelecer o conjunto de campos fundamentais, de modo a perceber todas as derivações em jogo. Os  $\mathcal{G}$ 's, em (5.1), escrevem-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0 &= -\frac{1}{8}(\nabla^\alpha\nabla_\alpha\mathcal{V}_0 - 4\mathcal{V}_2) \\ \mathcal{G}_1^\alpha &= -\frac{1}{8}(\nabla^\beta\nabla_\beta\mathcal{V}_1^\alpha - 2i(\nabla^{\alpha\beta}\mathcal{V}_{1\beta})) \\ \mathcal{G}_2 &= -\frac{1}{8}\left(\nabla^\alpha\nabla_\alpha\mathcal{V}_2 + \frac{1}{2}\nabla^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}\mathcal{V}_0\right),\end{aligned}$$

com as derivadas covariantes significando

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha &= E_\alpha{}^M(D_M + \Phi_M) \\ \nabla_{\alpha\beta} &= E_{\alpha\beta}{}^M(D_M + \Phi_M),\end{aligned}$$

onde  $\Phi_M$  é a conexão de spin,  $\Phi_M = \Phi_{M\delta}{}^\epsilon\mathcal{M}_\epsilon{}^\delta$ . O bi-espinor  $\mathcal{M}_\epsilon{}^\delta$  representa um gerador de Lorentz local. Define-se, assim, o ambiente para a identificação, na versão linearizada, da super-corrente *improved*, e efetiva-se, ainda, a abordagem à extensão do modelo ao contexto de supergravidade.

---

<sup>1</sup>A relação entre a (super)conexão de spin e a super-vielbein define-se, em ambiente geométrico, a partir da (super)generalização das eqs. de Maurer-Cartan, implicando, portanto, escolhas para a (super)torção. Na variação que se pretende realizar, estas escolhas são fundamentais se o formalismo de segunda ordem for indispensável [58], [76].

# Bibliografia

- [1] E. Witten, D.I. Olive, *Phys. Lett.* **B78** (1978) 97.
- [2] M.A.C. Kneipp, *Introduction to Dualities in Gauge Theories*; curso ministrado na X Jorge André Swieca Summer School, 1999, São Paulo, em *Proceedings*; eds.: J.C.A. Barata, M. Begalli, R. Rosenfeld (World Scientific, Cingapura, 2000).
- [3] A. Vilenkin, E. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, 1995 (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido).
- [4] C.N. Ferreira, M.B.D.S.M. Porto, J.A. Helayël-Neto, *Nucl. Phys.* **B620** (2002) 181 (hep-th/0101008).
- [5] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Int. J. Mod. Phys.* **A14** (1999) 147 (hep-th/9802096).
- [6] P. Navrátil, *Phys. Lett.* **B365** (1996) 119.
- [7] C. Marcio do Amaral, *Nuovo Cim.*, **B 25** (1975) 817; C. Marcio do Amaral, P. Pitanga, *Rev. Bras. Fís.*, **12**, no **3** (1982) 473;  
P. Pitanga, K.C. Mundim, *Nuovo Cim.*, **A 101** (1989) 345;

- P. Pitanga, *Nuovo Cim.*, **A103** (1990) 1529;
- P. Pitanga, *Projetores em Dinâmicas Vinculadas*, Tese de Doutorado, CBPF, 1991.
- [8] H.B. Nielsen, P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45.
- [9] E.B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24** (1976) 449.
- [10] H.J. de Vega, F.A. Schaposnik, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1100.
- [11] S.K. Paul, A. Khare, *Phys. Lett.* **B174** (1986) 420.
- [12] R. Jackiw, K. Lee, E.J. Weinberg, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3488;  
R. Jackiw, E.J. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2234.
- [13] C. Lee, K. Lee, E. Weinberg, *Phys. Lett.* **B243** (1990) 105.
- [14] C. Lee, K. Lee, H. Min, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 79.
- [15] C. Lee, K. Lee, H. Min, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 4588.
- [16] J. Edelstein, C. Núñez, F. Schaposnik, *Phys. Lett.* **B329** (1994) 39, e referências.
- [17] Z. Hlousek, D. Spector, *Nucl. Phys.* **B370** (1992) 143.
- [18] Z. Hlousek, D. Spector, *Mod. Phys. Lett* **A37** (1992) 3403;  
Z. Hlousek, D. Spector, *Nucl. Phys.* **B397** (1993) 173.
- [19] B. Damski, *Acta Phys. Pol.* **B31** (2000) 637.
- [20] R. Haag, J.T. Lopuszański, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

- [21] O. Piguet, *Supersymmetry, Supercurrent, and Scale Invariance*. Notas do curso dado na UCP e no CBPF, Rio de Janeiro, 1996, CBPF-NF-072/96, UGVA-DPT 1996/08-938, hep-th/9611003.
- [22] D. Freedman, “Irreducible Representations of Supersymmetry”, em *Recent Developments in Gravitation: Proceedings*, Cargèse 1978. eds. M. Lévy e S. Deser (Plenum, Nova York, 1979).
- [23] M.A. de Andrade. *Espinores e Álgebras de Clifford em Dimensões Arbitrárias*, Curso ministrado no CBPF, 1<sup>o</sup> semestre de 1998;  
M.A. de Andrade, O.M. Del Cima, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 1367.
- [24] S. Coleman, J. Mandula, Phys. Rev. **159**, (1967) 1251.
- [25] S. Ferrara, M. Porrati, Phys. Lett. **B423** (1998) 255, e referências.
- [26] I.I. Kogan, Phys. Lett. **B262** (1991) 83.
- [27] J. Stern, Phys. Lett. **B265** (1991) 119.
- [28] M.E. Carrington, G. Kunstatter, Phys. Rev. **D51** (1995) 1903.
- [29] M. Torres, Phys. Rev. **D46** (1992) R2295;  
T. Lee, H. Min, Phys. Rev. **D50** (1994) 7738;  
M. Torres, Phys. Rev. **D51** (1995) 4533.
- [30] A. Antillon, J. Escalona, M. Torres, Phys. Rev. **D55** (1997) 6327.
- [31] J. Escalona, A. Antillón, M. Torres, Y. Jiang, P. Parmananda, Chaos **10** (2000) 337.

- [32] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1999) 1721.
- [33] A.B. Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, J.A. Helayël-Neto, *Quantum Mechanical Consistency Aspects and Vortex-like Configurations in Abelian Models with Lorentz Breaking Terms*, hep-th/0204232, e referências.
- [34] G.T. Horowitz, *Commun. Math. Phys.* **125** (1989) 417;  
M. Blau, G. Thompson, *Ann. Phys.* **205** (1991) 130;  
D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, G. Thompson, *Phys. Rep.* **C209** (1991) 129.
- [35] M. Kalb, P. Ramond, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 2273.
- [36] O. Piguet, K. Sibold, *Renormalized Supersymmetry*, série “Progress in Physics”, vol. 12 (Birkhäuser Boston Inc., 1986).
- [37] A.L.M.A. Nogueira, *Matéria Tensorial em Teorias de Gauge Supersimétricas*, Tese de Mestrado, CBPF, julho de 1996.
- [38] V.E.R. Lemes, A.L.M.A. Nogueira, J.A. Helayël-Neto, *Int. J. Mod. Phys. A* **13** (1998) 3145.
- [39] E. Cremmer, J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 117.
- [40] W.A. Moura Melo, *Monopólos Magnéticos Abelianos e Quantização da Massa Topológica em (3+1) dimensões*, Tese de Mestrado, CBPF, 1997;

- W. A. Moura-Melo, N. Panza, J.A. Helayël-Neto, *Int. J. Mod. Phys.* **A14** (1999) 3949.
- [41] J. Scherk, *Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories*, in *Recent Developments in Gravitation*, Cargèse 1978, Ed. M. Lévy, S. Deser, Plenum Press; L. Brink, J.H. Schwarz, J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B121** (1977) 77.
- [42] L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, M.A. Santos, *Int. J. Mod. Phys* **A17** (2002) 1919.
- [43] R. Barreto Ribeiro, *Estudo de um Novo Modelo de Maxwell-Chern-Simons com Paridade Preservada*, Tese de Mestrado, CBPF, abril de 2002.
- [44] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., O.M. Del Cima, J.A. Helayël-Neto, *Int. J. Mod. Phys.* **A16** (2001) 4939;  
M.M. Ferreira Jr., *Estudo de Estados Ligados Elétron-Elétron no Contexto da QED<sub>3</sub>: Uma Aplicação à Supercondutividade de Alta-T<sub>c</sub>*, Tese de Doutorado, CBPF, dezembro de 2001.
- [45] M.E.X. Guimarães, J.A. Helayël-Neto, A.L.M.A. Nogueira, *Coupled U(1) X U(1) Vortices*, versão preliminar apresentada no XXII ENFPC, São Lourenço, MG, outubro de 2001; em andamento.
- [46] P.A.M. Dirac, *Can. J. Math*, **2** (1950) 129;  
P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, Academic Press, New York) 1967.

- [47] M.A. De Andrade, M.A. Santos, I.V. Vancea, *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 1907.
- [48] M.A. Santos, J.C. Mello, P. Pitanga, *Z. Phys.* **C55** (1992) 271; M.A. Santos, *Braz. J. Phys.* **23** (1993).
- [49] M.A. De Andrade, M.A. Santos, I.V. Vancea, *J. High Energy Phys.* **0106** (2001) 026.
- [50] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2a. ed., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1992.
- [51] L. O’Raifeartaigh, *Nucl. Phys.* **B96** (1975) 331.
- [52] C.A.S. Almeida, H.R. Christiansen, M.S. Cunha, hep-th/9706206.
- [53] M. S. Cunha, *Vórtices Auto-Duais do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Acoplamento Não-Mínimo*, Tese de Doutorado, CBPF, Janeiro de 1999.
- [54] H. Christiansen, C. Núñez, F. Schaposnik, *Phys. Lett.* **B441** (1998) 185.
- [55] S. Ketov, *Many faces of Born-Infeld Theory*, seminário convidado ao 7<sup>th</sup> International Wigner Symposium, 2001, Maryland, E.U.A. (hep-th/0108189).
- [56] G.A. Silva, *Born-Infeld Action and Supersymmetry*, Tese de Doutorado, Universidad de Cuyo, 2000, hep-th/0012267.
- [57] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.3, 1999 (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido).



- [58] S.J. Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry* (Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts, 1983).
- [59] M.F Sohnius, K.S. Stelle, P.C. West, Nucl. Phys. **B173** (1980) 127.
- [60] J. Wess, B. Zumino, Nuc. Phys. **B70** (1974) 39.
- [61] M.F Sohnius, K.S. Stelle, P.C. West, Phys. Lett. **B92** (1980) 123.
- [62] E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld, Phys. Lett. **B487** (2000) 192.
- [63] H. Nishino, S.J. Gates Jr., Int. J. Mod. Phys **A8** (1993) 3371.
- [64] P. Fayet, J. Iliopoulos, Phys. Lett. **B51** (1974) 461.
- [65] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, (World Scientific, Cingapura, 1987).
- [66] L.R.U. Manssur, *Resultados Recentes em Teorias de Gauge Planares*, Tese de Doutorado, CBPF, 2000.
- [67] M. Magro, I. Sachs, S. Wolf, Ann. Phys. **298** (2002) 123 (hep-th/0110131).
- [68] O. Piguet, *Introduction to Supersymmetric Gauge Theories*; curso ministrado na First School on Field Theory and Gravitation, 1997, Vitória, ES (hep-th/9710095).
- [69] P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. **C68** (1981) 189.
- [70] M.K. Prasad, C.M. Sommerfeld, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.

- [71] R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. **D23** (1981) 2291; J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185** (1981) 157; S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 975.
- [72] F. Brandt, N. Dragon, *Proceedings of the 31st International Symposium Ahrenshoop on the Theory of Elementary Particles*, Buckow. Alemanha. 1997.
- [73] A. Hindawi, B. Ovrut, D. Waldram, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B56** (1997) 164.
- [74] M.F. Sohnius, Phys. Rep. **C128** (1985) 39.
- [75] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Superspace Results on a Maxwell-Chern-Simons Theory with Non-Minimal Coupling*, em progresso.
- [76] M. Henneaux, B. Julia, S. Silva. Nucl. Phys. **B563** (1999) 448 (hep-th/9904003).
- [77] J.D. Edelstein, C. Núñez, F.A. Schaposnik, Phys. Lett. **B375** (1996) 163 (hep-th/9512117); *idem*, Nucl. Phys. **B458** (1996) 165 (hep-th/9506147);  
M. Abou-Zeid, H. Samtleben, Phys. Rev. **D65** (2002) 085016 (hep-th/0112035).
- [78] H.R. Christiansen, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira,  *$N=2$  Superalgebra of a Non-minimal Maxwell-Chern-Simons-Higgs Model: establishing the Central Extension*, apresentado no XXII ENFPC, São Lourenço, MG, outubro de 2001; J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, em progresso.

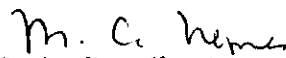
**“SUPERSIMETRIA ESTENDIDA EM TEORIAS DE  
GAUGE PLANARES: AUTO-DUALIDADE SOB  
ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO”**

*Álvaro Luis Martins de Almeida Nogueira*

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



José Abdalla Helayël Neto – Presidente



Maria Carolina Nemes



Olivier Piguet



Nelson Pinto Neto



Sebastião Alves Dias



José Martins Salim - Suplente

Rio de Janeiro, 24 de outubro de 2002