Tese de Mestrado

Soluções de D' Alembert Estendidas para Equações de Onda com Derivadas de Ordem Superiores.

Ricardo Sibanto Simões

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro, março de 2001

Aos Meus Pais Antônio Geraldo Simões e Nanci Sibanto Simões, porto seguro de minha alma. Aos meus falecidos padrinhos Armando José Sibanto e Nilcenira Sibanto, que tão importante foram na minha infância e início de adolescência. Ao meu filho Hideo Takimoto Simões e a minha noiva Flávia Sousa de Almeida, as maiores alegrias da minha vida.

Agradecimentos

Ao Departamento de Campos e Partículas...

Se eu fosse me estender em agradecimentos a todas as pessoas que de alguma forma me auxiliaram na elaboração e realização desta tese, de maneira direta ou indireta, obviamente, não conseguiria faze-lo sem me estender mais do que o devido.

Para que minimize, eu, alguma injustiça, faço os meus agradecimentos em duas partes.

A primeira: de maneira geral, deixo meus agradecimentos, a todos aqueles que futuramente se farão presentes em minha desorganizada memória, que uma vez estimulada por algum evento aleatório consumirá minha consciência em culpa, por não me lembrar daquele incidente corriqueiro ao qual um de vocês pronta e atenciosamente me ajudou a resolver, seja no âmbito acadêmico, seja no âmbito pessoal.

A segunda parte destina-se aos agradecimentos mais discriminados.

Agradeço ao meu orientador José Helayel Neto, que desde a minha chegada ao DCP, sempre se mostrou extremamente gentil e paciente em prestar-me todo e qualquer tipo de esclarecimento, sempre me deixando muito a vontade para inquiri-lo, mesmo nas perguntas mais básicas e simples.

Ao Thales e ao Paulo, indispensáveis na hora de aperto com a minha inabilidade em entender os ditames das regras simples de utilização do Scientific Work Place, e sem os quais não estaríamos lendo esta tese.

Ao Danilo , a quem além de um simples agradecimento, devoto a minha imensa satisfação, pelas horas de boas e proveitosas discussões a cerca deste trabalho, indispensáveis na elaboração das partes mais delicadas e importantes. Isto sem falar nas diversas contribuições do ponto de vista técnico: como por exemplo, a elaboração de um programa capaz de resolver as equações deste trabalho, e amplamente utilizado para conferir nossos resultados.

As funcionárias da secretaria do DCP, sempre prestativas e muito educadas no trato com todos nós, e pela sua boa vontade em tentar atender todos os nossos pedidos.

A Mirian do CFC, sempre paciente em resolver meus problemas com prazos: resultados da minha desatenção.

Ao CNPQ, pela bolsa que me foi concedida.

Não posso deixar de falar dos meus avós: Geraldo Simões, Mafalda Lima Simões, Armando Sibanto e Josepha Oses Sibanto que sempre demosntraram seu carinho e adimiração que tanto me fortaleceram na continuidade de meus esforços.

Nem de agradecer ao meu sogro Silvio e a minha sogra Lucinda, que me acolheram como a um filho e me permitiram ter sempre um bom ambiente de estudo em sua casa.

Aos meus irmãos que com toda a brincadeira sempre se fizeram presentes, seja Rafael com sua paciência em me ouvir falar das idéias gerais do meu trabalho, nos momentos de maior empolgação, seja Rodrigo com sua prestatividade em me ajudar a resolver os problemas práticos do dia-dia que tanto me tomariam tempo na reta final deste trabalho.

Aos meus pais que desde notificados do meu desejo de fazer física, sempre me apoiaram e encorajaram, mesmo que receando, quase secretamente, pelas minha condições de subsistência nessa profissão.

A Deus e aos espíritos que sempre me orientam e nunca me desamparam, mesmo distante das minhas faculdades perceptivas.

Finalmente a minha noiva e futura esposa, espero que ainda este ano (se tio FHC ajudar), por ser a pessoa que melhor me compreende neste mundo, por me tratar com carinho e atenção, me enchendo de cuidados mesmo quando irritada comigo, por ter aguentado todo o meu mau-humor nos momentos de crise desta tese e, por sempre me apoiar incondicionalmente. Em fim, por ter aparecido em minha vida em uma época muito pessimista desta, devolvendo-me a empolgação necessária para tocar os projetos adormecidos, entre eles o meu mestrado; obrigado Flávia por resgatar o Ricardo de quem eu sentia falta.

Resumo

Este trabalho tem por finalidade formular e estudar equações clássicas de campo em 2 dimensões espaço-temporais com derivadas de ordem superior.

A solução de D' Alembert é estendida e explicitamente construída para o caso dos operadores $\Box^2$e $\Box^3$, com condições completamente arbitrárias.

A contrapartida-clássica daquilo que serão os ghosts da teoria quantizada é encontrada, e as soluções não-fisicamente plausíveis são identificadas.

Abstract

Solutions to classical field equations with higher derivatives are formulated and studied in two space-time dimensions.

The D' Alembert-type solution is extend and built up to account, for the $\Box^2$ e $\Box^3$ operators, with initial conditions left completely arbitrary.

The classical counterpart of the ghost states that show up in the second-quantised theory is found out and the unphysical solutions are identified.

Conteúdo

Introdução

Os modelos fisicamente consistentes que visam obter de maneira satisfatória a descrição das interações fundamentais da Natureza são baseados nas chamadas teorias de gauge, que se têm mostrado altamente eficientes na descrição das interações eletromagnéticas e nucleares (forte e fraca) e fornecem subsídios para o programa de busca por uma teoria de campo unificada, mesmo que a gravitação ainda não possa ser incluída neste cenário.

Entretanto, um dos requisitos básicos para se construir uma teoria quântica de campo satisfatória é que a mesma seja renormalizável. Na tentativa de tornar a gravitação em 4 dimensões, uma teoria renormalizável, foram propostos alguns modelos baseados em termos com derivadas superiores do tensor métrico[2].

Estes modelos obtiveram relativo sucesso neste sentido, pois a renormalização do ponto de vista meramente matemático foi alcançada; a um custo, entretanto, imperdoável do ponto de vista da interpretação física. Os termos de derivadas superiores levaram a um acréscimo nas equações dinâmicas dos grávitons que estariam relacionados a partículas descritas por funções-de-onda com norma negativa: os chamados ghosts[3].

Inspirados por um procedimento habitual da Física, que é a necessidade de certas simplificações no tratamento teórico de certos problemas (como, por exemplo, na Mecânica Quântica, onde modelos unidimensionais serviram de base para o conhecimento da estrutura quântica da matéria), os teóricos de campo também enveredaram pela investigação de modelos bi e tridimensionais que podem lançar alguma luz sobre os problemas surgidos em 4 dimensões. [4]

Seguindo esta linha de raciocínio, o nosso trabalho procura elaborar e investigar problemas meramente teóricos sobre a implementação de derivadas superiores dentro de um panorama mais confortável e bem conhecido, ou seja, o da teoria clássica de campos. Podemos afirmar mais precisamente que, de início, o objetivo maior seria verificar se, pelo menos do ponto de vista teórico, se poderia imaginar um modelo onde a implementação de derivadas superiores gerasse soluções adequadas a uma interpretação físicamente viável.

Tentamos desenvolver a proposta de maneira lógica, buscando inspiração nas técnicas de D'Alembert para resolver equações diferenciais parciais hiperbólicas[1] , como veremos no Capítulo 1[5], seguida da resolução de D'Alembertianos de ordem superior (ao quadrado e ao cubo) para campos escalares[6], nos Capítulos 3 e 4, e de uma estilização da equação de Dirac no Capítulo 2[7]; todos esses casos serão tratados apenas em dimensão (1+1).

No Capítulo 5, observaremos e discutiremos qualitativamente a evolução temporal das soluções obtidas nos capítulos precedentes e as dificuldades encontradas em suas interpretações. Mostraremos, ainda, que estas soluções conduzem-nos, de maneira quase natural, à decomposição das mesmas em uma parte que tem termos multiplicados por uma potência do tempo e uma parte que seria solução do D'Alembertiano simples.

[1] Esclarecimentos quanto à classificação das equações diferencias parciais de segunda ordem podem ser encontrados no Apêndice A

Capítulo 1

A Solução de D'Alembert Em (1+1) Dimensões.

Neste Capítulo, apresentamos o tratamento de D'Alembert para o problema de uma corda vibrante, e neste caso unidimensional construímos soluções para condições iniciais genéricas.

Em seguida, explicitamos dificuldades do caso de (1+3) dimensões.

1.1 A Solução da Equação de uma Corda Vibrante pelo Método de D'Alembert:

A equação para uma corda que vibra livremente, ou seja, quando essa vibra na ausência de forças transversais externas é:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi(x;t)}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1}$$

onde $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, sendo T a tração a qual a corda está submetida, e ρ a sua densidade linear.

Com a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}\xi &= x - vt \\ \eta &= x + vt,\end{aligned}$$

podemos escrever a equação(1.1) na segunda forma canônica:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Psi}}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \tag{1.2}$$

que tem como solução mais geral possível:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = f(\xi) + g(\eta). \tag{1.3}$$

onde f e g são funções arbitrárias, definidas a partir de condições iniciais a serem especificadas e ξ e η são as chamadas coordenadas do cone-de-luz e correspondem, respectivamente, aos chamados R- e L-movers.

Supondo que estas condições sejam dadas por:

$$\Psi(x;0) = F(x)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x;0) = G(x),$$

temos:

$$F(x) = f(x) + g(x), \tag{1.4}$$

$$G(x) = -f'(x) + g'(x). \tag{1.5}$$

Isolando f em (1.4), chegamos a :

$$f(x) = F(x) - g(x). \tag{1.6}$$

Diferenciando:

$$f'(x) = F'(x) - g'(x)\,; \tag{1.7}$$

levando agora (1.7)em (1.5), somos conduzidos a :

$$g'(x) = \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2}G(x)\,. \tag{1.8}$$

Integrando:

$$g(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}\int_a^x dyG(y)\,. \tag{1.9}$$

Levando (1.9) em (1.6), temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}\int_a^x dyG(y)\,. \tag{1.10}$$

Estendemos agora as soluções de f e g para qualquer t, e encontramos:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}F(\xi) - \frac{1}{2}\int_a^\xi dyG(\xi)\,. \tag{1.11}$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2}F(\eta) + \frac{1}{2}\int_a^\eta dyG(y)\,. \tag{1.12}$$

Finalmente, substituimos (1.11) e (1.12) em (1.3), e encontramos como solução geral para o nosso problema:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}F(x-t) + \frac{1}{2}F(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} dyG(y)\,.$$

Podemos verificar, a partir deste resultado, que a solução de um D'Alembertiano simples é composta de uma parte R - mover (primeiro termo da equação acima e o termo que será originado pelo limite de integração inferior) e outra L - mover (segundo termo e o termo que será originado pelo limite de integração superior), que se comportam como soluções de onda que mantêm a mesma forma, para qualquer t, apenas propagando-se para a direita ou para a esquerda, respectivamente.

No capítulo a seguir, tencionamos apresentar a incapacidade da técnica utilizada nesta seção em resolver as equações de onda do Eletromagnetismo, no espaço de Minkowski em quatro dimensões.

1.2 Solução da Equação de Onda do Eletromagnetismo no Vácuo a partir do Método de D'Alembert de Separação de Váriáveis:

Sabemos que as equações de Maxuell no vácuo são:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \circ \overrightarrow{E} &= 0 & \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla} \circ \overrightarrow{B} &= 0 & \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \circ \overrightarrow{E} = 0 \tag{1.13}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{1.14}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \circ \overrightarrow{B} = 0 \tag{1.15}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}. \tag{1.16}$$

que demonstram claramente que a presença de campos elétrico e magnético em uma certa região do espaço não está. necessariamente, associada à existência de cargas. mas que eles podem ser gerados um a partir do outro[1].

É possível ainda mostrar que estes campos propagam-se no espaço na forma de ondas eletromagnéticas. Para tanto lembremos que:

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \circ A) - \nabla^2 A. \tag{1.17}$$

Aplicando. agora, o rotacional em ambos os lados da equação (1.16), somos levados

[1] Daqui em diante, por uma questão de economia , suprimiremos a seta da notação usual de vetores.

a:

$$\nabla \times (\nabla \times B) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) = 0. \tag{1.18}$$

Aplicando a propriedade (1.17) em (1.18), temos:

$$\nabla (\nabla \circ B) - \nabla^2 B - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) = 0.$$

Lembrando ainda que o divergente de B é nulo, e que o rotacional de E relaciona-se com B a partir da equação(1.14), determinamos a expressão:

$$\nabla^2 B - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0, \tag{1.19}$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

Com o mesmo raciocinio, porém começando pela equação (1.14), podemos escrever:

$$\nabla^2 E - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{1.20}$$

Em outras palavras, E e B satisfazem à equação de onda:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.21}$$

que é uma equação diferencial parcial hiperbólica em (1+3) dimensões, que pode ser resolvida por separaçaõ de variáveis como se segue[8]:

$$\Psi(x; y; z; t) = f(x)\, g(y)\, h(z)\, T(t)$$

Por uma questão de notação simplificada, definiremos que:

$$\Psi(x; y; z; t) = \Psi(r; t),$$

ou seja:

$$\Psi(r;t) = f(x)\, g(y)\, h(z)\, T(t)\,. \tag{1.22}$$

Substituindo (1.22) em (1.21), teremos:

$$ght\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fht\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + fgt\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - fgh\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0;$$

dividindo esta equação por $f(x)\, g(y)\, h(z)\, T(t)$, encontramos:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0. \tag{1.23}$$

Esta equação só pode ser satisfeita se cada um dos termos constantes obedecerem às seguintes relações:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_1^2, \tag{1.24}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = k_2^2, \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = k_3^2, \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{t}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = k^2, \tag{1.27}$$

onde:

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

e

$$\omega^2 = k^2 c^2.$$

As equações (1.24), (1.25), (1.26) e (1.27) são equações análogas à do oscilador harmônico e, conseqüentemente, têm como soluções:

$$f(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}, \tag{1.28}$$

$$g(y) = Ce^{ik_2 y} + De^{-ik_2 y}, \tag{1.29}$$

$$h(z) = Ee^{ik_3 z} + Fe^{-ik_3 z}, \tag{1.30}$$

$$T(t) = Ge^{i\omega t} + He^{-i\omega t}. \tag{1.31}$$

Como estamos interessados apenas em discutir o caráter geral da solução, imporemos a simplificação de que o nosso pulso eletromagnético é monocromático e propaga-se no vácuo. Sendo assim, as constante B, D, F e G devem ser nulas pois, não existindo limites para a propagação, não teremos pulso refletido (observe que também poderíamos manter essas constantes e exigir que as demais se anulassem).

Substituindo, agora, (1.28), (1.29), (1.30) e (1.31), tomando a simplificação proposta, em (1.22), somos levados a:

$$\Psi(r;t) = Ae^{ik_1 x}Ce^{ik_2 y}Ee^{ik_3 z}He^{-i\omega t},$$

que pode ser escrito como:

$$\Psi(r;t) = Je^{i(k_0 r - \omega t)}.$$

Percebamos, entretanto, que esta solução está atrelada ao valor de k, que não está fixado de maneira unívoca. Então, a maneira precisa de escrever a equação acima deveria ser[9], [10]:

$$\Psi(r;t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} J(k) e^{i(k_0 r - \omega t)} dk. \tag{1.32}$$

onde o parâmetro $J(k)$ deve ser determinado pelas condições iniciais.

1.2.1 Determinação de J e da Soluçaõ Final:

Tomemos como condição inicial:

$$\Psi(r;0) = Q(r).$$

Tomando a equação (1.32) no instante $t = 0$, temos:

$$Q(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} J(k) e^{i(k \circ r)} dk, \qquad (1.33)$$

que reconhecemos como uma transformada de Fourier.

A transformada inversa fornercer-nos-á quem é J em funçaõ da condiçao inicial, ou seja:

$$J(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(r') \, e^{-i(k \circ r')} dr'. \qquad (1.34)$$

Substituindo (1.34) em (1.32), somos conduzidos a:

$$\Psi(r; t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(r') \, e^{i[k \circ (r - r') - \omega t]} dk dr'. \qquad (1.35)$$

Como podemos perceber a análise das soluções das equações de onda de um problema em dimensões superiores a $(1+1)$, levam a um tratamento consideravelamente mais complexo, afinal um número maior de graus de liberdade está envolvido.

No capítulo seguinte, tentaremos estender a aplicação da técnica de mudança de variáveis de D'Alembert, exibida na primeira seção deste capítulo, na busca de uma solução para um problema teórico de um campo escalar que tem derivadas de 4^aordem em sua equação de campo.

Capítulo 2

Extensão da Solução de D'Alembert para a Equação $\Box^2\Psi(x;t)$ em (1+1) Dimensões:

Neste capítulo, introduzimos o nosso primeiro problema teórico: a resolução de uma equação de campo escalar em (1+1) dimensões que tem derivadas de 4ªordem, utilizando uma extensão do método da decomposição em R- e L-movers de D'Alembert[6].

2.1 A Parametrização da Solução da Equação para $\Box^2$ em R- e L-Movers

Para a resolução da equação

$$\Box^2\Psi(x;t) = 0 \quad . \tag{2.1}$$

utilizaremos a seguinte (e conveniente) mudança de variáveis:

$$\Psi(x;t) = \widetilde{\Psi}(\xi,\eta),$$

onde:

$$\begin{aligned} \xi &= x - t, \\ \eta &= x + t. \end{aligned}$$

Reescrevamos a equação (3.1) em termos de ξ e η:

$$-4\frac{\partial^4 \widetilde{\Psi}(\xi;\eta)}{\partial\xi^2\partial\eta^2} = 0,$$

e consideremos a sua solução mais geral possível:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi) \qquad (2.2)$$

devendo, ainda, fixar as quatro funções arbitrárias f, g, h, r em termos das seguintes condições-de-contorno, para $t = 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \Psi(t=0;x), \\ G(x) &= \frac{d}{dt}\Psi(t=0;x), \\ H(x) &= \frac{d^2}{dt^2}\Psi(t=0;x), \\ R(x) &= \frac{d^3}{dt^3}\Psi(t=0;x). \end{aligned}$$

Vamos, agora, relacionar as condições-de-contorno com a expressção de Ψ, em termos de f, g,h e r.

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi), \\ \frac{d}{dt}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} + \xi\frac{\partial h}{\partial \eta} - h(\eta) + r(\xi) - \eta\frac{\partial r}{\partial \xi}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial h}{\partial \eta} - 2\frac{\partial r}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \eta\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2}, \\ \frac{d^3}{dt^3}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= -\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - 3\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \xi\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} - \eta\frac{\partial^3 r}{\partial \xi^3}. \end{aligned}$$

Tomando Ψ, $\frac{d}{dt}\ \Psi$, $\frac{d^2}{dt^2}\ \Psi$, $\frac{d^3}{dt^3}\ \Psi$ no instante $t = 0$:

$$F(x) = f(x) + g(x) + xh(x) + xr(x), \tag{2.3}$$

$$G(x) = -f'(x) + g'(x) + xh'(x) - xr'(x) - h(x) + r(x), \tag{2.4}$$

$$H(x) = f''(x) + g''(x) + xh''(x) + xr''(x) - 2h'(x) - 2r'(x), \tag{2.5}$$

$$R(x) = -f'''(x) + g'''(x) + xh'''(x) - xr'''(x) - 3h''(x) + 3r''(x); \tag{2.6}$$

isolando f na equação (2.3), e diferenciando temos:

$$f(x) = F(x) - g(x) - xh(x) - xr(x), \tag{2.7}$$

$$f'(x) = F - g - h - xh' - r - xr', \tag{2.8}$$

$$f''(x) = F'' - g'' - 2h' - xh'' - 2r' - xr'', \tag{2.9}$$

$$f'''(x) = F''' - g''' - 3h'' - xh''' - 3r'' - xr'''. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.8),(2.9) e (2.10) em (2.4), (2.5) e (2.6), chegamos a:

$$F' + G = 2g' + 2xh' + 2r, \tag{2.11}$$

$$F'' - H = 4h' + 4r', \tag{2.12}$$

$$F''' + R = 2g''' + 2xh''' + 6r''. \tag{2.13}$$

Isolemos r na expressão (2.11), e o diferenciemos:

$$r(x) = \frac{1}{2}F' + \frac{1}{2}G - g' - xh', \tag{2.14}$$

$$r'(x) = \frac{1}{2}F'' + \frac{1}{2}G' - g'' - xh'' - h', \tag{2.15}$$

$$r''(x) = \frac{1}{2}F''' + \frac{1}{2}G'' - g''' - xh''' - 2h''. \tag{2.16}$$

Levemos, agora, (2.15) e (2.16) em (2.12) e (2.13) :

$$F'' + 2G' + H = 4g'' + 4xh'' \quad , \tag{2.17}$$

$$2F''' + 3g''' - R = 4g''' + 4xh''' + 12h''. \tag{2.18}$$

Isolando g'' na equação (2.17), diferenciando-o e substituindo em (2.18), somos conduzidos a:

$$h''(x) = \frac{1}{8}F''' + \frac{1}{8}G'' - \frac{1}{8}H' - \frac{1}{8}R \tag{2.19}$$

que, uma vez substituída em (2.17), fornece:

$$g''(x) = \frac{1}{4}F'' - \frac{1}{8}xF''' + \frac{1}{2}G' - \frac{1}{8}xG'' + \frac{1}{4}H + \frac{1}{8}xH' + \frac{1}{8}xR. \tag{2.20}$$

O próximo passo é a integração de h'' e g'', a fim de se chegar a h', g', h e g, para, então, determinarmos f e r apenas em função das condições iniciais.

De h'', chega-se à expressão:

$$h'(x) = \frac{1}{8}F'' + \frac{1}{8}G' - \frac{1}{8}H - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ R(y) + C_1. \tag{2.21}$$

que, integrado mais uma vez, fornece:

$$h(x) = \frac{1}{8}F' + \frac{1}{8}G - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ H(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dy \int_a^y dz\ R(z) + C_1 x + C_2. \tag{2.22}$$

Integrando g'', chegamos a:

$$\begin{aligned} g'(x) \quad = \quad & \frac{1}{4}F' + \frac{1}{2}G - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ F'''(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ G''(y) + \frac{1}{4}\int_a^x dy\ H(y) + \\ & + \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ H'(y) + \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ R(y) + C_3'. \end{aligned}$$

Integrando-se por partes, temos:

$$g'(x) = -\frac{1}{8}xF'' + \frac{3}{8}F' - \frac{1}{8}xG' + \frac{5}{8}G + \frac{1}{8}xH + \frac{1}{8}\int_a^x dy\ H(y) + \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ R(y) + C_3, \quad (2.23)$$

onde C_3 engloba a constante C_3'e C_3'' proveniente das integrações parciais.

A partir de (2.23), conseguimos:

$$g(x) = \frac{3}{8}F - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ F''(y) - \int_a^x dy\ y\ G'(y) + \frac{5}{8}\int_a^x dy\ G(y) + \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ H(y) - + \frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dz\ H(z) + \frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dz\ z\ R(z) + C_3x + C_4.$$

Conduzindo uma nova integração por partes, somos levados a:

$$g(x) = \frac{1}{2}F - \frac{1}{8}xF' - \frac{1}{8}xG + \frac{3}{4}\int_a^x dy\ G(y) + \frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dz\ H(z) - + \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ H(y) + \frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dz\ z\ R(z) + C_3x + C_4 \quad (2.24)$$

Levemos agora as equações (2.23) e (2.21)em (2.14) para que possamos obter r:

$$r(x) = \frac{1}{8}F' - \frac{1}{8}G - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ \ H(y) + \frac{1}{8}x\int_a^x dy\ R(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ R(y) + -C_1x - C_3 \quad (2.25)$$

De posse das equações que determinam g, h e r em termos das condições de contorno fornecidas, podemos, então, encontrar f, bastando que para isso levemos as equações (2.25), (2.24) e (2.22) em (2.3), o que nos dá:

$$f(x) = \frac{1}{2}F - \frac{1}{8}xF' + \frac{1}{8}xG - \frac{3}{4}\int_a^x dy\ \ G(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dy\ y\ H(y) + + \frac{1}{4}x\int_a^x dy\ \ H(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dz\ H(z) - \frac{1}{8}x^2\int_a^x dy\ R(y) + + \frac{1}{8}x\int_a^x dy\ y\ R(y) + \frac{1}{8}x\int_a^x dy\int_a^y dz\ R(z) + \quad (2.26)$$

$$-\frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dz\ z\ R(z)-C_2x-C_4 \quad .$$

Agora que já sabemos escrever as funcões f, g, h e r em termos das condições-de-contorno F, G, H e R, temos que a solução da equação $\Box^2\Psi(x;t)=0$ é determinada segundo a expansão:

$$\Psi(x;t)=f(x-t)+g(x+t)+(x-t)\ h(x+t)+(x+t)\ r(x-t) \qquad (3.24) \quad (2.27$$

2.2 Construção da Solução Final:

Utilizando a mudança de variáveis $\Psi(x;t)=\widetilde{\Psi}(\xi,\eta)$, podemos reescrever a equação (2.27), na forma :

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta)=f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi).$$

Aplicando a mesma expansão nas equações (2.26), (2.25), (2.22) e (2.24) e multiplicando estas duas últimas por ξ e η, respectivamete, encontraremos:

$$\begin{aligned}
f(\xi) \;=\; & \frac{1}{2}F(\xi)-\frac{1}{8}\xi F'(\xi)+\frac{1}{8}\xi G(\xi)-\frac{3}{4}\int_a^\xi dy\ \ G(y)-\frac{1}{8}\int_a^\xi dy\ y\ H(y)+\\
& +\frac{1}{4}\xi\int_a^\xi dy\ \ H(y)-\frac{1}{8}\int_a^\xi dy\int_a^y dz\ H(z)-\frac{1}{8}\xi^2\int_a^\xi dy\ R(y)+\\
& +\frac{1}{8}\xi\int_a^\xi dy\ y\ R(y)+\frac{1}{8}\xi\int_a^\xi dy\int_a^y dz\ R(z)-\frac{1}{8}\int_a^\xi dy\int_a^y dz\ z\ R(z)-C_2\xi-C_4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\eta) \;=\; & \frac{1}{2}F(\eta)-\frac{1}{8}\eta F'(\eta)-\frac{1}{8}\eta G(\eta)+\frac{3}{4}\int_a^\eta dy\ G(y)+\frac{1}{8}\int_a^\eta dy\int_a^y dz\ H(z)-\\
& +\frac{1}{8}\int_a^\eta dy\ y\ H(y)+\frac{1}{8}\int_a^\eta dy\int_a^y dz\ z\ R(z)+C_3\eta+C_4,
\end{aligned}$$

$$\xi h(\eta)=\frac{1}{8}\xi F'(\eta)+\frac{1}{8}\xi G(\eta)-\frac{1}{8}\xi\int_a^\eta dy\ H(y)-\frac{1}{8}\xi\int_a^\eta dy\int_a^y dz\ R(z)+C_1\xi\eta+C_2\xi$$

$$
\begin{aligned}
\eta r(\xi) \;=\;& \frac{1}{8}\eta\xi F' - \frac{1}{8}\eta\xi G - \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy \;\; H(y) + \frac{1}{8}\eta\xi\int_a^\xi dy \; R(y) - \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy \; y \; R(y) + \\
& -C_1\eta\xi - C_3\eta .
\end{aligned}
$$

Substituindo estas quatro últimas equações em (2.2), e organizando convenientemente os termos:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) \;=\;& \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; G(\xi) + \\
& + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; G(\eta) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dy\; G(y) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\; yH(y) - \frac{1}{8}\xi\int_\xi^\eta dy\; H(y) + \\
& + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_a^\xi dy \;\; H(y) + \frac{1}{8}\int_a^\eta dy\int_a^y dz\; H(z) - \frac{1}{8}\xi(\xi-\eta)\int_a^\xi dy R(y) + \\
& \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_a^\xi dy\; yR(y) - \frac{1}{8}\xi\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz \;\; R(z) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz\; zR(z).
\end{aligned}
$$

Integrando por partes: $\int_\xi^\eta dy\; yH(y)$ e $\int_a^\xi dy\; yR(y)$ e, novamente arrumando os termos de maneira conveniente, chegamos finalmente à solução:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) \;=\;& \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\eta) + \\
& + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; G(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; G(\eta) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dy\; G(y) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_\xi^\eta dy\; H(y) - \\
& + \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy\int_a^y dz \;\; R(z) - \frac{1}{8}\xi\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz \;\; R(z) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz\; zR(z).
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Observemos que a solução final, escrita em termos de integrais definidas, pode-nos dar a falsa impressão de que a mesma depende da escolha do parâmetro a. Entretanto, traduzindo a nossa solução em termos de integrais indefinidas[1], como na equação a seguir:

$$
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) \;=\; \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\eta) + \tag{2.29}
$$

[1] No Apêndice A, mostramos como traduzir a nossa solução de uma notação de integrais definidas para integrais indefinidas.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{8}(\xi-\eta)\ G(\xi)+\frac{1}{8}(\xi-\eta)\ G(\eta)+\frac{3}{4}\int d\eta\ G(\eta)-\frac{3}{4}\int d\xi G(\xi) \\
&-\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int d\eta\ H(\eta)+\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int d\xi H(\xi)-\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int\int d\eta d\eta R(\eta)+ \\
&-\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int\int d\xi d\xi R(\xi)+\frac{1}{4}\int\int\int d\xi d\xi d\xi R(\xi)-\frac{1}{4}\int\int\int d\eta d\eta d\eta R(\eta).
\end{aligned}
$$

verificamos, facilmente que a nossa solução independe do parâmetro a.

Mais adiante, discutiremos outras vantagens de escrevermos as nossas soluções em termos de integrais indefinidas.

Podemos chamar a atenção, neste fechamento de Capítulo, que a solução (2.29), apresenta problemas na sua interpretação física[2], já que esta contém termos que dependem do tempo explicitamente[3], ou seja, a amplitude da onda descrita por esta equação tende a se tornar cada vez maior com o passar do tempo.

No próximo capítulo, continuaremos a nossa extensão do método de separação de variáveis, aplicando-o a uma equação de Dirac, onde também estão presentes termos de derivada superior.

[2]Como será discutido em detalhes no Capítulo 5.

[3]Basta lembrar que: $\xi-\eta=-2t$

Capítulo 3

Extensão da Solução de D'Alembert para a Equação de Dirac em Dimensão (1+1) :

Neste capítulo, procuramos introduzir um operador diferencial, o D'Alembertiano, em uma equação de Dirac modificada, com o intuito de obtermos uma equação de campo espinorial com derivadas de 3^a ordem[7], [11], tratando a solução a partir do método de separação de variáveis de D'Alembert.

A equação:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Box\Psi(x;t) = 0, \tag{3.1}$$

expressa em termos de ξ e η, a partir da mudança de variáveis: $\Psi(x;t) = \widetilde{\Psi}(\xi;\eta)$, pode ser escrita sob a forma:

$$-4\partial_{\xi}\partial_{\eta}\begin{pmatrix} 0 & \partial_{\xi} \\ \partial_{\eta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1 \\ \widetilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = 0,$$

o que nos leva a:

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta}\widetilde{\psi}_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\eta^2\partial\xi}\widetilde{\psi}_1 \;=\; 0.$$

Estas possuem como solução mais geral possível:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}_1 &= f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi),\\
\widetilde{\psi}_2 &= f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_1(\eta).
\end{aligned}$$

onde as soluções L-Mover são: g_1, g_2 e h_2 e as soluções R-Mover são: f_1, f_2 e h_1. Sendo assim:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) \\ f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_2(\eta) \end{pmatrix}.$$

As condições iniciais que fixarão as funções f, g e h, são:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} &= \Psi(x;0),\\
\begin{pmatrix} J(x) \\ H(x) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\Psi(x;0),\\
\begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix} &= \frac{d^2}{dt^2}\Psi(x;0).
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \begin{pmatrix} f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) \\ f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_2(\eta) \end{pmatrix},\\
\frac{d}{dt}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \begin{pmatrix} -f_1'(\xi) + g_1'(\eta) + h_1(\xi) - \eta h_1'(\xi) \\ -f_2'(\xi) + g_2'(\eta) - h_2(\eta) + \xi h_2'(\eta) \end{pmatrix},\\
\frac{d}{dt}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \begin{pmatrix} f_1''(\xi) + g_1''(\eta) - 2h_1'(\xi) + \eta h_1''(\xi) \\ f_2''(\xi) + g_2''(\eta) - 2h_2'(\eta) + \xi h_2''(\eta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Tomando $\widetilde{\Psi}$, $\frac{d}{dt}\widetilde{\Psi}$, $\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{\Psi}$ em $t=0$, quando $\xi = \eta = x$, e usando as condições iniciais fornecidas, geramos dois sistemas desacoplados: um para f_1, g_1, e h_1; e outro para f_2, g_2, e h_2.

3.1 Solução da Primeira Equação :

Para $t = 0$, temos:

$$F(x) = f_1(x) + g_1(x) + x\ h_1(x). \tag{3.2}$$

$$H(x) = -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) - xh_1'(x). \tag{3.3}$$

$$R(x) = f_1''(x) + g_1''(x) - 2h_1'(x) + xh_1''(x). \tag{3.4}$$

Isolando f_1 em (3.2), e diferenciando:

$$f_1(x) = F - g_1 - x\ h_1. \tag{3.5}$$

$$f_1'(x) = F' - g_1' - h_1 - xh_1'. \tag{3.6}$$

$$f_1''(x) = F'' - g_1'' - 2h_1' - xh_1''. \tag{3.7}$$

Substituindo a equação (3.7) em (3.4), temos:

$$h_1' = \frac{1}{4}F'' - \frac{1}{4}R.$$

o que nos conduz, uma vez que integremos esta equação, a seguinte resposta:

$$h_1(x) = \frac{1}{4}F' - \frac{1}{4}\int_a^x dy\ R(y) + C_1. \tag{3.8}$$

Substituindo a equação (3.6) em (??)

$$g_1' = \frac{1}{2}F' + \frac{1}{2}H - h. \tag{3.9}$$

$$S(x) = f_2'' + g_2'' - 2h_2' + xh_2''. \tag{3.14}$$

Isolando f_2 em (??), temos:

$$f_2(x) = G - g_2 - xh_2, \tag{3.15}$$

que. diferenciando, leva-nos a expressão:

$$f_2'(x) = G' - g_2' - h_2 - xh_2', \tag{3.16}$$

e

$$f_2''(x) = G'' - g_2'' - 2h_2' - xh_2''. \tag{3.17}$$

Usando (3.16) em (3.13), temos:

$$g_2'(x) = \frac{G'}{2} + \frac{J}{2} - xh_2'. \tag{3.18}$$

de onde se comclui que

$$g_2''(x) = \frac{G''}{2} + \frac{J'}{2} - h_2' - xh_2''. \tag{3.19}$$

Substituindo(3.17) em (3.14) . encontramos:

$$h_2' = \frac{G''}{4} - \frac{S}{4}, \tag{3.20}$$

$$h_2(x) = \frac{1}{4}G' - \frac{1}{4}\int_a^x dy\ S(y) + C_1. \tag{3.21}$$

Levando (3.20) em (3.18), e integrando o resultado, determinamos g_2, conforme segue:

$$g_2(x) = \frac{1}{2}G - \frac{1}{4}\int_a^x dy\ yG''(y) + \frac{1}{4}\int_a^x dy\ yS(y) + \frac{1}{2}\int_a^x dy\ J(y) + C. \tag{3.22}$$

Encontramos agora.então, f_2, substituindo(3.22) e (3.21) em (3.15):

$$f_2(x) \quad = \quad \frac{1}{2}G + \frac{1}{4}\int_a^x dy\ yG''(y) - \frac{1}{4}\int_a^x dy\ yS(y) - \frac{1}{2}\int_a^x dy\ J(y) + \tag{3.23}$$

$$-\frac{1}{4}xG' + \frac{1}{4}x\int_a^x dy\ S(y) - C_1x - C_2.$$

Finalmente. levando (3.23), (3.22) e (3.21) na solução

$$\widetilde{\psi}_2(\xi;\eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi\ h_2(\eta).$$

de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior. podemos encontrar:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_2(\xi;\eta) &= \frac{1}{2}G(\xi) + \frac{1}{2}G(\eta) - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy\ yG''(y) + 1\frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy\ yS(y) + \\ &+\frac{1}{2}\int_\xi^\eta dy\ J(y) + \frac{1}{4}\xi\left[G'(\eta) - G'(\xi)\right] - \frac{1}{4}\xi\int_\xi^\eta dy\ S(y).\end{aligned}$$

Integrando por partes $\int_\xi^\eta dy\ yG''(y)$. e após algumas simplificações. conduzimos a última equação à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_2(\xi;\eta) &= \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi-\eta)\,G'(\eta) + \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy\ yS(y) + \\ &+\frac{1}{2}\int_\xi^\eta dy\ J(y) - \frac{1}{4}\xi\int_\xi^\eta dy\ S(y).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Analogamente ao que foi feito com a equação (3.11). e pela mesma motivação[2]. reescreveremos nossa solução em termos de integrais indefinidas. levando a equação (3.24) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_2(\xi;\eta) &= \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi-\eta)\,G'(\eta) + \frac{1}{4}\int\int d\xi d\xi S\,(\xi) + \\ &-\frac{1}{4}\int\int d\eta d\eta S\,(\eta) - \frac{1}{4}(\xi-\eta)\int d\eta S\,(\eta) + \frac{1}{2}\int d\eta J\,(\eta) + \\ &-\frac{1}{2}\int d\xi J\,(\xi)\,.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Mais uma vez, podemos verificar que as nossas soluções. (3.12) e (3.25). encontram problemas em suas interpretações físicas. por conta de termos que dependem explicita-

[2]Verificar a independência de nossas soluções da escolha do parâmetro de integração a.

mente do tempo, fazendo com que a amplitude da onda cresça indefinidamente com o passar do tempo.

No Capítulo seguinte, fechamos os exempios que nos propusemos a discutir nesta tese. buscando soluções para uma equação de campo escalar que possui derivadas de 6ªordem na equação que descreve a sua dinâmica.

Capítulo 4

Extensão da Solução de D'Alembert para a Equação $\Box^3\Psi(t;x) = 0$.

Neste Capítulo, procuramos encontrar soluções para uma equação de campo escalar, com derivadas de 6^a ordem, ainda aplicando o método de separação de variáveis de D'Alembert[6].

4.1 Parametrizção da Solução em R- e L-Movers.

Para a resolução da equação

$$\Box^3\Psi(x;t) = 0, \tag{4.1}$$

utilizamos, novamente, a conveniente mudança de variáveis:

$$\Psi(x;t) = \widetilde{\Psi}(\xi,\eta),$$

onde:

$$\begin{aligned}\xi &= x - t,\\ \eta &= x + t.\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (5.1) em termos de ξ e η:

$$-64\frac{\partial^6\widetilde{\Psi}(\xi;\eta)}{\partial\xi^3\partial\eta^3}=0,$$

considerando a solução mais geral possível desta equação:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta)=f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi)+\xi^2 s(\eta)+\eta^2 u(\xi)\,. \tag{4.2}$$

e fixando as seis funções arbitrárias. f, g, h, r, s e u, em termos das seguintes condições-de-contorno, para $t=0$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \Psi(t=0;x),\\
G(x) &= \frac{d}{dt}\,\Psi(t=0;x),\\
H(x) &= \frac{d^2}{dt^2}\Psi(t=0;x),\\
R(x) &= \frac{d^3}{dt^3}\Psi(t=0;x),\\
S(x) &= \frac{d^4}{dt^4}\Psi(t=0;x),\\
U(x) &= \frac{d^5}{dt^5}\Psi(t=0;x),
\end{aligned}$$

estamos aptos a iniciar o processo de resolução de (4.1).

Vamos agora relacionar as condições-de-contorno com a expressão de Ψ em termos de f, g,h e r.

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta)=f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi)+\xi^2 s(\eta)+\eta^2 u(\xi)\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= -\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{\partial g}{\partial\eta}+\xi\frac{\partial h}{\partial\eta}-h(\eta)+r(\xi)-\eta\frac{\partial r}{\partial\xi}\;-2\xi s(\eta)+\\
&\quad+\xi^2\frac{\partial s}{\partial\eta}+2\eta u(\xi)-\eta^2\frac{\partial u}{\partial\xi},
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial h}{\partial\eta} - 2\frac{\partial r}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial^2 h}{\partial\eta^2} + \eta\frac{\partial^2 r}{\partial\xi^2} + 2s\,(\eta) + +2u\,(\xi) - 4\xi\frac{\partial s}{\partial\eta} - 4\eta\frac{\partial u}{\partial\xi} + \xi^2\frac{\partial^2 s}{\partial\eta^2} + \eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}.$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\,\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = -\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial\eta^3} - 3\frac{\partial^2 h}{\partial\eta^2} + 3\frac{\partial^2 r}{\partial\xi^2} + \xi\frac{\partial^3 h}{\partial\eta^3} - \eta\frac{\partial^3 r}{\partial\xi^3} + 6\frac{\partial s}{\partial\eta} - 6\frac{\partial u}{\partial\xi} + 6\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - 6\xi\frac{\partial^2 s}{\partial\eta^2} + \xi^2\frac{\partial^3 s}{\partial\eta^3} - \eta^2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}.$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\,\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = \frac{\partial^4 f}{\partial\xi^4} + \frac{\partial^4 g}{\partial\eta^4} - 4\frac{\partial^3 h}{\partial\eta^3} - 4\frac{\partial^3 r}{\partial\xi^3} + \xi\frac{\partial^4 h}{\partial\eta^4} + \eta\frac{\partial^4 r}{\partial\xi^4} + +12\frac{\partial^2 s}{\partial\eta^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - 8\eta\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3} - 8\xi\frac{\partial^3 s}{\partial\eta^3} + \xi^2\frac{\partial^4 s}{\partial\eta^4} + +\eta^2\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}.$$

$$\frac{d^5}{dt^5}\,\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = -\frac{\partial^5 f}{\partial\xi^5} + \frac{\partial^5 g}{\partial\eta^5} - 5\frac{\partial^4 h}{\partial\eta^4} + 5\frac{\partial^4 r}{\partial\xi^4} + \xi\frac{\partial^5 h}{\partial\eta^5} - \eta\frac{\partial^5 r}{\partial\xi^5} + +20\frac{\partial^3 s}{\partial\eta^3} - 20\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3} + 10\eta\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4} - 10\xi\frac{\partial^4 s}{\partial\eta^4} + +\xi^2\frac{\partial^5 s}{\partial\eta^5} - \eta^2\frac{\partial^5 u}{\partial\xi^5}.$$

Tomando Ψ, $\frac{d}{dt}\,\Psi$, $\frac{d^2}{dt^2}\,\Psi$, $\frac{d^3}{dt^3}\,\Psi$, $\frac{d^4}{dt^4}\,\Psi$ e $\frac{d^5}{dt^5}\,\Psi$ no instante $t = 0$:

$$F(x) = f + g + xh + xr + x^2 s + x^2 u. \tag{4.3}$$

$$G(x) = -f' + g' + xh' - xr' - h + r - 2xs + 2xu + x^2 s' - x^2 u'. \tag{4.4}$$

$$H(x) = f'' + g'' + xh'' + xr'' - 2h' - 2r' + 2s + 2u - 4xs' - 4xu' + x^2 s'' + +x^2 u'' \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= -f''' + g''' + xh''' - xr''' - 3h'' + 3r'' + 6s' - 6u' + 6xu'' - 6xs'' + \\ &+x^2s''' - x^2u''' \quad , \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= f'''' + g'''' - 4h''' - 4r''' + xh'''' + xr'''' + 12s'' + 12u'' - 8xu''' + \\ &-8xs''' + x^2s'''' + x^2u'''' \quad , \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} U(x) &= -f''''' + g''''' - 5h'''' + 5r'''' + xh''''' - xr''''' + 20s''' - 20u''' + \\ &10xu'''' - 10xs'''' + x^2s''''' - x^2u''''' \quad . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Isolando f em (4.3) :

$$f(x) = F - g - xh - xr - x^2s - x^2u \quad . \tag{4.9}$$

Diferenciando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= F' - g' - h - xh' - r - xr' - 2xs - x^2s' - 2xu + \\ &-x^2u' \quad , \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= F'' - g'' - 2h' - xh'' - 2r' - xr'' - 2s - 4xs' + \\ &-x^2s'' - 2u - 4xu' - x^2u'' \quad , \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= F''' - g''' - 3h'' - xh''' - 3r' - xr''' - 6s' + \\ &-6u' - 6xs'' - 6xu - x^2s''' - x^2u''' \quad . \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$f''''(x) = F'''' - g'''' - 4h''' - xh'''' - 4r''' - xr'''' - 12s'' + \tag{4.13}$$

$$-12u'' - 8xs''' - 8xu''' - x^2 s'''' - x^2 u''''.$$

$$\begin{aligned} f'''''(x) &= F''''' - g''''' - 5h'''' - xh''''' - 5r'''' - xr''''' + \\ &\quad -20s''' - 20u''' - 10xs'''' - 10xu'''' - x^2 s''''' + \\ &\quad -x^2 u''''' \quad . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Levando (4.10) em (4.4), (4.11) em (4.5), (4.12) em (4.6), (4.13) em (4.7) e (4.14) em (4.8), obtemos:

$$F' + G = 2g' + 2xh' + 2r + 2x^2 s' + 4xu \quad . \tag{4.15}$$

$$F'' - H = 4h' + 4r' + 8xs' + 8xu' \quad . \tag{4.16}$$

$$F''' + R = 2g''' + 2xh''' + 6r'' + 12s' + 12xu'' + 2x^2 s'' \quad . \tag{4.17}$$

$$F'''' - S = 8h''' + 8r''' + 16xs''' + 16xu''' \quad . \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} F''''' + U &= 2g''''' + 2xh''''' + 10r'''' + 40s''' + 20xu'''' - \\ &\quad +2x^2 s''''' \quad . \end{aligned} \tag{4.19}$$

O próximo passo é isolar r na equação (4.15):

$$r(x) = \frac{1}{2}F' + \frac{1}{2}G - g' - xh' - x^2 s' - 2xu. \tag{4.20}$$

Diferenciando:

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{1}{2}F'' + \frac{1}{2}G' - g'' - h' - xh'' - 2xs' - x^2 s'' + \\ &\quad -2u - 2xu' \quad . \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$r''(x) = \frac{1}{2}F''' + \frac{1}{2}G'' - g''' - 2h'' - xh''' - 2s' - 4xs'' + \tag{4.22}$$

$$-x^2 s''' - 4u' - 2xu'' \quad ,$$

$$\begin{aligned} r'''(x) &= \frac{1}{2}F'''' + \frac{1}{2}G''' - g'''' - 3h''' - xh'''' - 6s'' - 6xs''' + \\ &-x^2 s'''' - 6u'' - 2xu''' \quad . \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} r''''(x) &= \frac{1}{2}F''''' + \frac{1}{2}G''' - g''''' - 8u''' - 2xu''' - 2s''' - 8xs'''' + \\ &-x^2 s''''' - 4h'''' - xh''''' \quad . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Substituindo (4.21) em (4.16), (4.22) em (4.17), (4.23) em (4.18) e (4.24) em (4.19), chegamos a:

$$\frac{1}{4}F'' + \frac{1}{2}G' + \frac{1}{4}H = g'' + xh'' + x^2 s'' + 2u \quad . \tag{4.25}$$

$$\frac{1}{2}F''' + \frac{3}{4}G'' - \frac{1}{4}R = g''' + 3h'' + xh'' + 6xs'' + x^2 s''' + 6u' \quad . \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}F'''' + \frac{1}{2}G''' + \frac{1}{8}S &= g'''' + 2h''' + xh'''' + 6s'' + 4xs''' + \\ &+x^2 s'''' + 6u'' \quad . \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F''''' + \frac{5}{8}G'''' - \frac{1}{8}U &= g''''' + xh''''' + 5h'''' + 10s''' + \\ &+10xs'''' + x^2 s''''' + 10u''' \end{aligned} \tag{4.28}$$

Como podemos verificar, a função r foi eliminada nas passagens acima. O próximo passo é eliminar a função u. Para tanto, isolemos u na equação (4.25):

$$u(x) = \frac{1}{8}F'' + \frac{1}{4}G' + \frac{1}{8}H - \frac{1}{2}g'' - \frac{1}{2}xh'' - \frac{1}{2}x^2 s'' \tag{4.29}$$

Diferenciando:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{8}F''' + \frac{1}{4}G'' + \frac{1}{8}H' - \frac{1}{2}g''' - \frac{1}{2}h'' - \frac{1}{2}xh''' + \\ &\quad -xs'' - \frac{1}{2}x^2 s''' \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{1}{8}F'''' + \frac{1}{4}G''' + \frac{1}{8}H'' - \frac{1}{2}g'''' - h''' - \frac{1}{2}xh'''' + \\ &\quad -s'' - 2xs''' - \frac{1}{2}x^2 s'''' \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} u'''(x) &= \frac{1}{8}F''''' + \frac{1}{4}G'''' + \frac{1}{8}H''' - \frac{1}{2}g''''' - \frac{3}{2}h'''' - \frac{1}{2}xh''''' + \\ &\quad -3s''' - 3xs'''' - \frac{1}{2}x^2 s''''' \end{aligned} \tag{4.32}$$

Substituindo (4.30) em (4.26), (4.31) em (4.27) e (4.32) em (4.28), chegamos às equações:

$$\frac{1}{8}F''' + \frac{3}{8}G'' - \frac{3}{8}H' + \frac{1}{8}R = g''' + xh''' + x^2 s''' \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{16}F'''' + \frac{1}{2}G''' + \frac{3}{8}H'' - \frac{1}{16}S &= g'''' + 2h''' + xh'''' - 4xs''' + \\ &\quad + x^2 s'''' \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{16}F''''' + \frac{15}{32}G'''' + \frac{5}{16}H''' + \frac{1}{32}U &= g''''' + xh''''' + \frac{5}{2}h'''' + \\ &\quad 5s'''' + x^2 s''''' \end{aligned} \tag{4.35}$$

Da equação (4.33), tiramos que:

$$g'''(x) = \frac{1}{8}F''' + \frac{3}{8}H' + \frac{1}{8}R - xh''' - x^2 s''' \tag{4.36}$$

Diferenciando:

$$
\begin{aligned}
g''''(x) &= \frac{1}{8}F'''' + \frac{3}{8}G''' + \frac{3}{8}H'' + \frac{1}{8}R' - h''' - xh''' + \\
&\quad -2xs''' - x^2 s'''' ,
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
g'''''(x) &= \frac{1}{8}F''''' + \frac{3}{8}H''' + \frac{1}{8}R'' - 2h'''' - xh''''' - 2s''' + \\
&\quad -4xs'''' - x^2 s''''' .
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Levando (4.36) em (4.33), (4.37) em (4.34) e (4.38) em (4.35), temos:

$$\frac{1}{16}F'''' + \frac{1}{8}G''' - \frac{1}{8}R' - \frac{1}{16}S = h''' + 2xs''' \tag{4.39}$$

e

$$\frac{1}{8}F''''' + \frac{3}{16}G'''' - \frac{1}{8}H''' - \frac{1}{4}R'' + \frac{1}{16}U = h'''' + 6s''' + 2xs'''' . \tag{4.40}$$

Tomando-se h''' em (4.39):

$$h'''(x) = \frac{1}{16}F'''' + \frac{1}{8}G''' - \frac{1}{8}R' - \frac{1}{16}S - 2xs''' . \tag{4.41}$$

diferenciando e levando-o na equação (4.40), chegamos à relação:

$$s'''(x) = \frac{1}{64}F''''' + \frac{1}{64}G'''' - \frac{1}{32}H''' - \frac{1}{32}R'' + \frac{1}{64}S' + \frac{1}{64}U ; \tag{4.42}$$

Como podemos perceber, esta última equação nos fornece s''' escrito apenas em função das condições iniciais. Isto nos permite, também, escrever h''' e g''' apenas em função das condições iniciais.

4.2 Determinação de s, h e g:

Para concluirmos o proposto no último parágrafo da seção precedente, começamos por substituir (4.42) em 4.41, de onde encontramos:

$$\begin{aligned} h'''(x) &= \frac{1}{16}F'''' - \frac{1}{32}xF''''' + \frac{1}{8}G''' - \frac{1}{32}xG'''' + \frac{1}{16}xH''' - \\ &-\frac{1}{8}R' + \frac{1}{16}xR'' - \frac{1}{16}S - \frac{1}{32}xS' - \frac{1}{32}xU \end{aligned}$$

Lembrando que xy', pode ser escrito na forma $(xy)' - y$, conduzimos nossa equação à forma:

$$\begin{aligned} h'''(x) &= \frac{3}{32}F'''' - \frac{1}{32}(xF'''')' + \frac{5}{32}G''' - \frac{1}{32}(xG''')' - \frac{1}{16}H'' + \\ &\frac{1}{16}(xH'')' - \frac{3}{16}R' + \frac{1}{16}(xR')' - \frac{1}{32}S - \frac{1}{32}(xS)' - \frac{1}{32}xU. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Manipulando convenientemente as expressões (4.42), (4.43) e (4.36), chegamos a:

$$\begin{aligned} g'''(x) &= \frac{1}{8}F''' - \frac{1}{16}xF'''' + \frac{1}{64}x^2F''''' + \frac{3}{8}G'' - \frac{1}{8}xG''' + \frac{1}{64}x^2G'''' + \\ &+\frac{3}{8}H' - \frac{1}{32}x^2H''' + \frac{1}{8}R + \frac{1}{8}xR' - \frac{1}{32}x^2R'' + \frac{1}{16}xS + \\ &+\frac{1}{64}x^2S' + \frac{1}{64}x^2U. \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos com h''', chegamos a:

$$\begin{aligned} g'''(x) &= \frac{7}{32}F''' - \frac{3}{32}\left(xF'''\right)' + \frac{1}{64}\left(x^2F''''\right)' + \frac{17}{32}G'' - \frac{5}{32}(xG'')' + \frac{1}{64}\left(x^2G'''\right)' + \\ &\frac{5}{16}H' + \frac{1}{16}\left(xH'\right)' - \frac{1}{32}\left(x^2H''\right)' - \frac{1}{16}R + \frac{3}{16}(xR)' - \frac{1}{32}\left(x^2R'\right)' + \frac{1}{32}xS + \\ &+\frac{1}{64}\left(X^2S\right)' + \frac{1}{64}x^2U \end{aligned} \tag{4.44}$$

Estamos prontos para iniciar as integrações que nos permitirão determinar s, h e g.

Integrando (4.42), decorre que:

$$\begin{aligned} s''(x) &= \frac{1}{64}F'''' + \frac{1}{64}G''' - \frac{1}{32}H'' - \frac{1}{32}R' + \frac{1}{64}S + \\ &+ \frac{1}{64}\int_a^x dy\ U(y) + C_1 \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned} s'(x) &= \frac{1}{64}F''' + \frac{1}{64}G'' - \frac{1}{32}H' - \frac{1}{32}R + \frac{1}{64}\int_a^x dy\ S(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dy \int_a^y dz\ U(z) \\ &+ C_1 x + C_2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{64}F'' + \frac{1}{64}G - \frac{1}{32}H - \frac{1}{32}\int_a^x dy\ R(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dy \int_a^y dz\ S(z) + \\ &+ \frac{1}{64}\int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z dw\ U(w) + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Integrando (4.43), temos:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{3}{32}F''' - \frac{1}{32}xF'''' + \frac{5}{32}G'' - \frac{1}{32}xG''' - \frac{1}{16}H' + \frac{1}{16}xH'' - \frac{3}{16}R + \\ &+ \frac{1}{16}xR' - \frac{1}{32}\int_a^x dy\ S(y) - \frac{1}{32}xS - \frac{1}{32}\int_a^x dy\ yU(y) + D_1. \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3}{32}F'' - \frac{1}{32}\int_a^x dy\ yF''''(y) + \frac{5}{32}G' - \frac{1}{32}\int_a^x dy\ yG'''(y) - \frac{1}{16}H + \\ &+ \frac{1}{16}\int_a^x dy\ yH''(y) - \frac{3}{16}\int_a^x dy\ R(y) + \frac{1}{16}\int_a^x dy\ yR'(y) - \frac{1}{32}\int_a^x dy \int_a^y dz\ S(z) - \\ &- \frac{1}{32}\int_a^x dy\ yS(y) - \frac{1}{32}\int_a^x dy \int_a^y dz\ zU(z) + D_1 x + D_2 \end{aligned}$$

Realizando integrações parcias em:

$$\int_a^x dy\ yF''''(y),$$

$$\int_a^x dy\ yG'''(y).$$

$$\int_a^x dy\ yH''(y),$$

$$\int_a^x dy\ yR'(y),$$

$$\int_a^x dy\ yS(y),$$

temos:

$$\begin{aligned} h'(x) \ = \ & \frac{1}{8}F'' - \frac{1}{32}xF''' + \frac{3}{16}G' - \frac{1}{32}xG'' - \frac{1}{8}H + \frac{1}{16}xH' + \frac{1}{16}xR + \\ & -\frac{1}{4}\int_a^x dy\ R(y) - \frac{1}{32}x\int_a^x dy\ S(y) - \frac{1}{32}\int_a^x dy \int_a^y dz\ zU(z) + D_1 x + \\ & +D_2 + D_3 \ , \end{aligned} \tag{4.49}$$

onde. D_3 é uma constante que resulta das integrações parciais efetuadas na equação acima.

Determinamos. assim. a função h:

$$\begin{aligned} h(x) \ = \ & \frac{1}{8}F' - \frac{1}{32}\int_a^x dyyF'''(y) + \frac{3}{16}G - \frac{1}{32}\int_a^x dyyG''(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dyH(y) - \\ & +\frac{1}{16}\int_a^x dyyH'(y) + \frac{1}{16}\int_a^x dyyR(y) - \frac{1}{4}\int_a^x dy\int_a^y dz\ R(z) - \\ & -\frac{1}{32}\int_a^x dyy\int_a^y dz\ S(z) - \frac{1}{32}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\ wU(w) + \frac{1}{2}D_1x^2 + \\ & +D_2x + D_3x + D_4. \end{aligned}$$

Realizando integrações parciais. da mesma forma que no caso precedente. chegamos a:

$$\begin{aligned} h(x) \ = \ & \frac{5}{32}F' - \frac{1}{32}xF'' + \frac{7}{32G} - \frac{1}{32}xG' + \frac{1}{16}xH - \frac{3}{16}\int_a^x dyH(y) + \\ & +\frac{1}{16}x\int_a^x dyR(y) - \frac{5}{16}\int_a^x dy\int_a^y dzR(z) - \frac{1}{32}\int_a^x dyy\int_a^y dzS(z) + \\ & -\frac{1}{32}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\ wU(w) + \frac{1}{2}D_1x^2 + D_2x + D_3x + D_4 + D_5 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Efetuando a integração da equação (4.44):

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{7}{32}F'' - \frac{3}{32}xF''' + \frac{1}{64}x^2F'''' + \frac{17}{32}G' - \frac{5}{32}xG'' + \frac{1}{64}x^2G''' + \frac{5}{16}H + \\ &+\frac{1}{16}xH' - \frac{1}{32}x^2H'' - \frac{1}{16}\int_a^x dyR(y) + \frac{3}{16}xR - \frac{1}{32}x^2R' + \frac{1}{32}\int_a^x dyyS(y) + \\ &+\frac{1}{64}x^2S + \frac{1}{64}\int_a^x dyy^2U(y) + E_1 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{7}{32}F' - \frac{3}{32}\int_a^x dyyF'''(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dyy^2F''''(y) + \frac{17}{32}G + \\ &-\frac{5}{32}\int_a^x dyyG''(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dyy^2G'''(y) + \frac{5}{16}\int_a^x dyH(y) + \\ &+\frac{1}{16}\int_a^x dyyH'(y) - \frac{1}{32}\int_a^x dyy^2H''(y) - \frac{1}{16}\int_a^x dy\int_a^y dzR(z) + \\ &+\frac{3}{16}\int_a^x dyyR(y) - \frac{1}{32}\int_a^x dyy^2R'(y) + \frac{1}{32}\int_a^x dy\int_a^y dzzS(z) + \\ &+\frac{1}{64}\int_a^x dyy^2S(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dy\int_a^y dzz^2U(z) + E_1x + E_2. \end{aligned}$$

Novamente, integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{11}{32}F' - \frac{1}{8}xF'' + \frac{1}{64}x^2F''' + \frac{23}{32}G - \frac{3}{16}xG' + \frac{1}{64}x^2G'' + \\ &+\frac{3}{16}\int_a^x dyH(y) + \frac{1}{8}xH - \frac{1}{32}x^2H' - \frac{1}{16}\int_a^x dy\int_a^y dzR(z) + \\ &+\frac{1}{4}\int_a^x dyyR(y) - \frac{1}{32}x^2R + \frac{1}{32}\int_a^x dy\int_a^y dzzS(z) + \frac{1}{64}\int_a^x dyy^2S(y) + \\ &+\frac{1}{64}\int_a^x dy\int_a^y dzz^2U(z) + E_1x + E_2 + E_3 \end{aligned} \tag{4.52}$$

chegamos, então, a:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{11}{32}F - \frac{1}{8}\int_a^x dyyF''(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dyy^2F'''(y) + \frac{23}{32}\int_a^x dyG(y) + \\ &-\frac{3}{16}\int_a^x dyyG'(y) + \frac{1}{64}\int_a^x dyy^2G''(y) + \frac{3}{16}\int_a^x dy\int_a^y dzH(z) + \\ &+\frac{1}{8}\int_a^x dyyH(y) - \frac{1}{32}\int_a^x dyy^2H'(y) - \frac{1}{16}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\ R(w) + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\int_a^x dy\int_a^y dzzR(z) - \frac{1}{32}\int_a^x dyy^2R(y) + \frac{1}{32}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\; wS(w) +$$
$$+\frac{1}{64}\int_a^x dy\int_a^y dzz^2S(z) + \frac{1}{64}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\; w^2U(w) + \frac{1}{2}E_1x^2 +$$
$$+E_2x + E_3x + E_4.$$

Mais uma vez, integrando por partes, somos levados a:

$$\begin{aligned} g(x) \;=\;& \frac{1}{2}F - \frac{5}{32}xF' + \frac{1}{64}x^2F'' + \frac{15}{16}\int_a^x dyG(y) - \frac{7}{32}xG + \frac{1}{64}x^2G' + \\ & +\frac{3}{16}\int_a^x dy\int_a^y dzH(z) + \frac{3}{16}\int_a^x dyyH(y) - \frac{1}{32}x^2H + \\ & -\frac{1}{16}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\; R(w) + \frac{1}{4}\int_a^x dy\int_a^y dzzR(z) - \frac{1}{32}\int_a^x dyy^2R(y) - \\ & +\frac{1}{32}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\; wS(w) + \frac{1}{64}\int_a^x dy\int_a^y dzz^2S(z) + \\ & +\frac{1}{64}\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dw\; w^2U(w) + \frac{1}{2}E_1x^2 + E_2x + E_3x + E_4 + E_5 \end{aligned} \qquad (4.53)$$

Conseguimos até aqui escrever as funções g, h e r, em função, apenas, das condições inicias, e de posse destas funções e das equaçõs anteriormente determinadas podemos seguir e encontrar as demais funções que nos faltam (u, f e r, nessa ordem).

4.3 Determinação de u, r e f:

Da equação (4.29), sabemos que:

$$u(x) = \frac{1}{8}F''' + \frac{1}{4}G' + \frac{1}{8}H - \frac{1}{2}g'' - \frac{1}{2}xh'' - \frac{1}{2}x^2s''.$$

Substituindo (4.51), (4.48) e (4.45) na equação acima, determinamos u.

Da equação (4.20), sabemos que:

$$r(x) = \frac{1}{2}F' + \frac{1}{2}G - g' - xh' - x^2s' - 2xu$$

e uma vez que já determinamos todas essas funções em termos das condições iniciais somos, então, capazes de determinar r.

Finalmente, podemos determinar f, pois, como podemos observar, da equação (4.9):

$$f(x) = F - g - xh - xr - x^2 s - x^2 u \quad .$$

faltava-nos apenas determinar u e r, antes de iniciarmos essa subseção, detalhe do qual já nos encarregamos, como visto acima.

4.4 Construção da Solução Final:

Agora que já sabemos escrever as funcões f, g, h, r, s e u em termos das condições iniciais F, G, H, R, S e U, temos que a solução da equação $\Box^3\Psi(x;t) = 0$ é determinada segundo a expansão:

$$\begin{aligned} \Psi(x;t) = {} & f(x-t) + g(x+t) + (x-t)\ h(x+t) + (x+t)\ r(x-t) + \qquad (4.54) \\ & +(x-t)^2\ s(x-t) + (x+t)^2 u(x-t). \end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variáveis $\Psi(x;t) = \widetilde{\Psi}(\xi,\eta)$, podemos reescrever a expressão (4.54), na forma:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi) + \xi^2 s(\eta) + \eta^2 u(\xi)$$

Aplicando a mesma expansão nas funções f, g, h, r, s, e s e multiplicando as quatro últimas equações por ξ, η, ξ^2 e η^2, respectivamente, encontraremos, de maneira análoga ao que foi feito na Seção (3.1), a solução da equação(4.1):

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = {} & \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) + \frac{5}{32}(\xi-\eta)\left[F'(\eta) - F'(\xi)\right] + \frac{1}{64}(\xi-\eta)^2\left[F''(\xi) + F''(\eta)\right] + \qquad (4.55) \\ & + \frac{7}{32}(\xi-\eta)\left[G(\xi) + G(\eta)\right] - \frac{1}{64}(\xi-\eta)^2\left[G'(\xi) - G'(\eta)\right] + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{32}\left(\xi-\eta\right)^2\left[H\left(\xi\right)+H\left(\eta\right)\right]+\frac{15}{16}\int G\left(\eta\right)d\eta-\frac{15}{16}\int G\left(\xi\right)d\xi+\\
&-\frac{3}{16}\left(\xi-\eta\right)\int H\left(\eta\right)d\eta+\frac{3}{16}\left(\xi-\eta\right)\int H\left(\xi\right)d\xi-\frac{1}{32}\left(\xi-\eta\right)^2\int R\left(\eta\right)d\eta+\\
&+\frac{1}{32}\left(\xi-\eta\right)^2\int R\left(\xi\right)d\xi-\frac{5}{16}\left(\xi-\eta\right)\int\int R\left(\xi\right)d\xi d\xi-\frac{5}{16}\left(\xi-\eta\right)\int\int R\left(\eta\right)d\eta d\eta+\\
&+\frac{5}{8}\int\int\int R\left(\xi\right)d\xi d\xi d\xi-\frac{5}{8}\int\int\int R\left(\eta\right)d\eta d\eta d\eta+\frac{1}{64}\left(\xi-\eta\right)^2\int\int S\left(\eta\right)d\eta d\eta\\
&+\frac{1}{64}\left(\xi-\eta\right)^2\int\int S\left(\xi\right)d\xi d\xi+\frac{1}{32}\left(\xi-\eta\right)\int\int\int R\left(\eta\right)d\eta d\eta d\eta+\\
&-\frac{1}{32}\left(\xi-\eta\right)\int\int\int R\left(\xi\right)d\xi d\xi d\xi-\frac{1}{64}\left(\xi-\eta\right)^2\int\int\int U\left(\xi\right)d\xi d\xi d\xi+\\
&+\frac{1}{64}\left(\xi-\eta\right)^2\int\int\int U\left(\eta\right)d\eta d\eta d\eta+\frac{3}{32}\left(\xi-\eta\right)\int\int\int\int R\left(\eta\right)d\eta d\eta d\eta d\eta-\\
&-\frac{3}{16}\int\int\int\int\int U\left(\xi\right)d\xi d\xi d\xi d\xi d\xi+\frac{3}{16}\int\int\int\int\int R\left(\eta\right)d\eta d\eta d\eta d\eta d\eta.
\end{aligned}
$$

Mais uma vez, como podemos constatar nesta última equação, as soluções das equações de campo parecem-nos indicar que a tentativa de implementarmos termos de derivadas de ordem superior levam a soluções onde as amplitudes de onda crescem indefinidamente com o tempo.

No capítulo que se segue, discutiremos as implicações físicas destas soluções divergentes, tentando apontar possíveis soluções para evitar este comportamento.

Capítulo 5

Análise da evolução temporal:

Neste capítulo, iremos levantar e discutir problemas que derivam da extensão temporal das soluções que obtivemos, tomando Gaussianas como exemplo de funções associadas às condições iniciais dos problemas levantados nos Capítulos 2 e 3 . Mostraremos, também, que os comportamentos destas funções, inseridas em nossas soluções, já eram esperados a partir das soluções gerais dos nossos problemas.

Podemos verificar, nas equações (2.29), (3.12), (3.25) e (4.55), que a evolução temporal de nossas soluções, para $\Box^n\Psi(x;t) = 0$, tem uma dependência explícita no tempo multiplicando as funções fixadas como condições iniciais. Basta lembrar que:

$$\xi - \eta = -2t. \tag{5.1}$$

Usando a relação (5.1) , podemos levar (2.29) a assumir a forma:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) + \frac{3}{4}\int d\eta\ G(\eta) - \frac{3}{4}\int d\xi G(\xi) + \\
&+\frac{1}{4}\int\int\int d\xi d\xi d\xi R(\xi) - \frac{1}{4}\int\int\int d\eta d\eta d\eta R(\eta) \\
&+\frac{1}{4}tF'(\xi) - \frac{1}{4}t\ F'(\eta) + -\frac{1}{4}t\ G(\xi) - \frac{1}{4}t\ G(\eta) \\
&+\frac{1}{4}t\int d\eta\ H(\eta) - \frac{1}{4}t\int d\xi H(\xi) + \frac{1}{4}t\int\int d\eta d\eta R(\eta) +
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$+\frac{1}{4}t\int\int d\xi d\xi R(\xi),$$

(3.12) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_1(\xi;\eta) &= \frac{3}{4}F(\xi)+\frac{1}{4}F(\eta)+\frac{1}{2}\int d\eta H(\eta)-\frac{1}{2}\int d\xi H(\xi)+ \\ &+\int\int d\eta d\eta R(\eta)-\int\int d\xi d\xi R(\xi)+\frac{1}{2}tF'(\xi)-\frac{1}{2}t\int d\eta R(\eta).\end{aligned} \tag{5.3}$$

(3.25) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_2(\xi;\eta) &= \frac{1}{4}G(\xi)+\frac{3}{4}G(\eta)+\frac{1}{2}\int d\eta J(\eta)-\frac{1}{2}\int d\xi J(\xi)+ \\ &+\frac{1}{4}\int\int d\xi d\xi S(\xi)-\frac{1}{4}\int\int d\eta d\eta S(\eta)+\frac{1}{2}t\int d\eta S(\eta)+ \\ &-\frac{1}{2}tG'(\eta).\end{aligned} \tag{5.4}$$

e (4.55) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \frac{1}{2}F(\xi)+\frac{1}{2}F(\eta)+\frac{15}{16}\int G(\eta)\,d\eta-\frac{15}{16}\int G(\xi)\,d\xi+ \\ &+\frac{5}{8}\int\int\int R(\xi)\,d\xi d\xi d\xi+\frac{3}{16}\int\int\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta d\eta d\eta+ \\ &-\frac{5}{8}\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta-\frac{3}{16}\int\int\int\int\int U(\xi)\,d\xi d\xi d\xi d\xi d\xi+ \\ &-\frac{5}{16}t\left[F'(\eta)-F'(\xi)\right]-\frac{7}{16}t\left[G(\xi)+G(\eta)\right]+\frac{3}{8}t\int H(\xi)\,d\xi+ \\ &+\frac{3}{8}t\int H(\eta)\,d\eta+\frac{5}{8}t\int\int R(\xi)\,d\xi d\xi+\frac{5}{8}t\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta+ \\ &-\frac{3}{16}t\int\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta d\eta+\frac{1}{16}t\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta+ \\ &-\frac{1}{16}t\int\int\int R(\xi)\,d\xi d\xi d\xi+\frac{1}{16}t^2\left[F''(\xi)+F''(\eta)\right]+\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$+\frac{1}{4}t\int\int d\xi d\xi R(\xi),$$

(3.12) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_1(\xi;\eta) &= \frac{3}{4}F(\xi)+\frac{1}{4}F(\eta)+\frac{1}{2}\int d\eta H(\eta)-\frac{1}{2}\int d\xi H(\xi)+ \\ &+\int\int d\eta d\eta R(\eta)-\int\int d\xi d\xi R(\xi)+\frac{1}{2}tF'(\xi)-\frac{1}{2}t\int d\eta R(\eta).\end{aligned} \tag{5.3}$$

(3.25) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_2(\xi;\eta) &= \frac{1}{4}G(\xi)+\frac{3}{4}G(\eta)+\frac{1}{2}\int d\eta J(\eta)-\frac{1}{2}\int d\xi J(\xi)+ \\ &+\frac{1}{4}\int\int d\xi d\xi S(\xi)-\frac{1}{4}\int\int d\eta d\eta S(\eta)+\frac{1}{2}t\int d\eta S(\eta)+ \\ &-\frac{1}{2}tG'(\eta).\end{aligned} \tag{5.4}$$

e (4.55) à forma:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \frac{1}{2}F(\xi)+\frac{1}{2}F(\eta)+\frac{15}{16}\int G(\eta)\,d\eta-\frac{15}{16}\int G(\xi)\,d\xi+ \\ &+\frac{5}{8}\int\int\int R(\xi)\,d\xi d\xi d\xi+\frac{3}{16}\int\int\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta d\eta d\eta+ \\ &-\frac{5}{8}\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta-\frac{3}{16}\int\int\int\int\int U(\xi)\,d\xi d\xi d\xi d\xi d\xi+ \\ &-\frac{5}{16}t\left[F'(\eta)-F'(\xi)\right]-\frac{7}{16}t\left[G(\xi)+G(\eta)\right]+\frac{3}{8}t\int H(\xi)\,d\xi+ \\ &+\frac{3}{8}t\int H(\eta)\,d\eta+\frac{5}{8}t\int\int R(\xi)\,d\xi d\xi+\frac{5}{8}t\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta+ \\ &-\frac{3}{16}t\int\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta d\eta+\frac{1}{16}t\int\int\int R(\eta)\,d\eta d\eta d\eta+ \\ &-\frac{1}{16}t\int\int\int R(\xi)\,d\xi d\xi d\xi+\frac{1}{16}t^2\left[F''(\xi)+F''(\eta)\right]+\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$-\frac{1}{16}t^2\left[G'(\xi)-G'(\eta)\right]-\frac{1}{8}t^2\left[H(\xi)+H(\eta)\right]-\frac{1}{8}t^2\int R(\eta)\,d\eta\xi+$$
$$+\frac{1}{8}t^2\int R(\xi)\,d+\frac{1}{8}t^2\int\int S(\xi)\,d\xi d\xi+$$
$$+\frac{1}{8}t^2\int\int S(\eta)\,d\eta d\eta+\frac{1}{8}t^2\int\int\int U(\eta)\,d\eta d\eta d\eta-\frac{1}{8}t^2\int\int\int U(\xi)\,d\xi d\xi d\xi-$$

Como o nosso trabalho não está restrito a uma mera determinação de soluções de equações diferenciais, mas propõem-se a encontrar funções de onda que sejam, ao mesmo tempo, soluções de equações que contenham termos de derivadas de ordem superior e que sejam compatíveis com a descrição de um problema físico., devemos analisar esta dependência temporal cuidadosamente.

O fato de que a amplitude da nossa função de onda cresça indeterminadamente, sugere-nos um problema de energia não localizada[1]. Não devemos, do ponto de vista físico, encontrar soluções que tendam a crescer indefinidamente com o passar do tempo. Restam-nos então, duas saídas: ou as condições iniciais são tais que os termos que se encontrem multiplicados por t sejam nulos ou se anulem mutuamente, ou que as funções fornecidas pelas condições iniciais sejam funções, como por exemplo Gaussianas,que são fortemente amortizadas com o passar do tempo, ou seja, tendam a zero muito rapidamente.

5.1 Análise da Solução Apresentada no Capítulo 2:

Tentamos verificar como se comportava a evolução temporal da equação (2.29), fornecendo dois conjuntos de condições iniciais:

i)

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-x^2}, \\ G(x) &= e^{-x^2}, \\ H(x) &= e^{-x^2}, \end{aligned}$$

[1] Ou seja, nosso pulso seria gerado com energia infinita.

$$R(x) = e^{-x^2},$$

onde verificamos, como pode ser visto na Figura (a), que a amplitude da onda cresce indefinidamente.

ii)

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-x^2}, \\ G(x) &= 0, \\ H(x) &= 0, \\ R(x) &= 0. \end{aligned}$$

onde também verificamos, como pode ser visto na Figura (b), que a amplitude da onda cresce indefidamente.

A análise das Tabelas (a) e (b), faz-nos perceber que a questão matemática que se nos apresenta refere-se aos limites de t e x tendendo a infinito simultaneamente. No caso das Gaussianas, para um dado ponto x, o limite assintótico para t cancela o sinal do nosso campo. Entretanto, nas regiões espaciais assintóticas, o limite $t \rightarrow \infty$ poderá fazer com que a perturbação cresça indefinidamente pois $(x-t)$ pode se manter finito, mesmo que $x \longrightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$.

5.2 Análise da Solução Apresentada no Capítuo 3:

Podemos, facilmente, verificar que as equações (5.6) e (5.4) admitem soluções fisicamente aceitáveis, ou seja, tendem para zero, quando tomados os limites de $t \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow \infty$, desde que fixemos condições iniciais tais que todos os termos multiplicados por potências no tempo sejam anulados.

Tomemos, como exemplo, a solução :

$$\widetilde{\psi}_1(\xi;\eta) = \frac{3}{4}F(\xi) + \frac{1}{4}F(\eta) + \frac{1}{2}tF'(\xi) + \frac{1}{2}\int d\eta H(\eta) - \frac{1}{2}\int d\xi H(\xi) + \\ -\frac{1}{2}t\int d\eta R(\eta) + \int\int d\eta d\eta R(\eta) - \int\int d\xi d\xi R(\xi). \tag{5.6}$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \\ G(x) &= 0, \\ R(x) &= 0, \\ H(x) &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Desta maneira, nossa solução reduz-se à forma:

$$\widetilde{\psi}_1(\xi;\eta) = \frac{1}{2}\int d\eta e^{-\eta^2} - \frac{1}{2}\int d\xi e^{-\xi^2}.$$

Resolvendo as integrais, encontramos:

$$\widetilde{\psi}_1(\xi;\eta) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\eta) - \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\xi).$$

Tomando agora, $t \to \infty$ e $x \to \infty$, ou seja, tomando, $\eta \to \infty$ e $\xi \to \infty$, encontramos:

$$\lim_{\xi,\,\eta\to\infty} \widetilde{\psi}_1(\xi;\eta) = 0.$$

5.3 Análise Geral das Soluções de Derivadas de Ordem Superior em Dimensão (1+1):

Em verdade, uma análise mais atenta das equações (5.2), (5.6), (5.4) e (5.5), mostra que é possível decompor todas as soluções encontradas em termos de funções que são soluções do D'Alembertiano simples e que os demais termos estão multiplicados explicitamente pelo tempo[2].

Mais importante ainda é perceber que todas as funções multiplicadas explicitamente pelo tempo são funções L-mover ou R-mover, ou seja, não mudam sua forma com o passar do tempo, apenas aumentam sua amplitude indefinidamente.

A partir do exposto acima, não é difícil perceber que a proposta de anular os termos dependentes explicitamente do tempo é a única viável. Portanto, a solução adequada às exigências de um problema fisicamente aceitável com equações que contenham termos de derivadas de ordem superior em dimensão(1+1), são funções associadas à solução do D'Alembertiano simples.

[2]Mostramos, no Apêndice B, que as soluções gerais propostas para resolver cada um dos nossos problemas, a partir de um pouco de manipulação algébrica, já indica que devemos procurar soluções que apresentem a decomposição proposta nesse capítulo.

Conclusão

Estruturar uma interpretação e uma linha de raciocínio adequados a descrever os fenômenos observados na Natureza, em geral, não é das tarefas mais simples. Em verdade, é trabalho que, por vezes, desafia várias gerações de físicos na busca de um tratamento teórico adequado.

Não tencionamos estruturar um modelo, ou sequer uma linha de raciocínio que procure descrever com sucesso um certo fenômeno natural. Nosso objetivo é tão somente, como citado em nossa Introdução, formular e encontrar soluções para alguns problemas teóricos em dimensão (1+1) que nos permitam estabelecer um programa futuro que possa levar alguma luz ao tratamento dos ghosts provenientes da introdução de derivadas de ordem superior nas equações da gravitação.

Podemos perceber a partir das equações (5.2), (5.6), (5.4) e (5.5), a possibilidade de decompor nossos resultados em termos que são solução do D'Alembertiano simples e termos multiplicados por um fator explícito de tempo, ou a alguma potência do mesmo, que não satisfazem a esta condição[3].

Normalmente, quando se começa um trabalho como o nosso, espera-se encontrar resultados que permitam divagar a cerca de quais condições de contorno filtram as "impurezas" que tornam as soluções incompatíveis com uma descrição fisicamente aceitável.

Nossos resultados, entretanto, não permitem que se abra um horizonte muito amplo de especulações[4]. Basta lembrar que os termos de nossas soluções que não satisfazem ao D'Alembertiano simples, são funções do tipo L-mover ou R-mover e, por este motivo,

[3] Ou seja, não são soluções do D'Alembertiano simples.

[4] Como exposto no Capítulo 5.

descrevem pulsos que não mudam sua forma com o tempo, ou seja, uma vez que essas soluções estejam multiplicadas por um fator explícito de tempo, a amplitude do pulso por elas descritas crescerá incessantemente à medida que este evolui.

Esta análise condena-nos a aceitar que, para um Universo de dimensão (1+1), no qual existissem equações de campo com derivadas de ordem superior, a Natureza seria generosa o suficiente para sempre nos prover condições de contorno que eliminassem os termos que não atendem às exigências da conservação de energia, ou seja, a única parcela fisicamente aceitável de uma equação de campo que contenha termos de derivadas superiores é a parcela que é também solução do D'Alembertaino simples.

Esta conclusão leva-nos inevitavelmente a estabelecer um programa futuro que tenciona verificar se a introdução de derivadas de ordem superior em equações de campo de dimensão (1+2) apresentam o mesmo tipo de decomposição apresentada nesse trabalho.

Antes de fecharmos as conclusões, não podemos negligenciar, ao leitor, uma última e atenta análise das equações (5.2), (5.5), (5.6) e (5.4). Podemos verificar que as duas primeiras destas equações, enquanto soluções, não fornecem um problema fisicamente aceitável, pois todas as funções fixadas pelas condições iniciais (F.G.H e R, no primeiro caso e F, G, H, R, U e S no segundo caso), ou alguma de suas derivadas apresentam um fator multiplicativo do tempo. A única maneira de limpar estes termos é impondo condições iniciais triviais e, portanto, sem interesse.

Entretanto, as duas últimas destas equações[5] apresentam soluções fisicamente aceitáveis, pois podemos, a partir de condições iniciais convenientemente escolhidas, anular os termos explicitamente multiplicados pelo tempo, e encontrar uma solução convergente para posições e tempos assintóticos. Estas soluções, fisicamente sensatas, correspondem a configurações clássicas que correspondem, numa versão de segunda quantização, a partículas intermediárias de interação de curto alcance.

[5]Onde: $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\psi}_1 \oplus \widetilde{\psi}_2$

Apêndice A

Transcrição da Notação de Integrais Definidas para Indefinidas

Este Apêndice tem por objetivo mostrar, de maneira clara, o desenvolvimento algébrico para se levar uma solução escrita em termos de integrais definidas em uma solução escrita em termos de integrais indefinidas, utilizando como exemplo a equação (2.28).

A idéia básica da transcrição é lembrar que:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \int bdb - \int ada.$$

ou seja:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(b)\, db - \int f(a)\, da.$$

Tomemos, então a equação (2.28):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) \;=\; & \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\ F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\ F'(\eta) + \\
& + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\ G(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\ G(\eta) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dy\ G(y) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_\xi^\eta dy\ H(y) + \\
& + \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy\int_a^y dz\ \ R(z) - \frac{1}{8}\xi\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz\ \ R(z) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz\ zR(z).
\end{aligned}$$

onde:

$$I_1 = \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dy\ G(y) = \frac{3}{4}\int d\eta\ G(\eta) - \frac{3}{4}\int d\xi G\left(\xi\right).$$

$$I_2 = -\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_\xi^\eta dy\ H(y) = -\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int d\eta\ H(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int d\xi H\left(\xi\right)$$

e

$$I_3 = \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy\int_a^y dz\quad R(z)$$

$$I_3 = \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy\left[\int dy\quad R(y) - \int daR\left(a\right)\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{8}\eta\int\int d\xi d\xi R\left(\xi\right) - \frac{1}{8}\eta\int\int dadaR\left(a\right) - \frac{1}{8}\eta\xi\int daR\left(a\right) + \frac{1}{8}\eta a\int daR\left(a\right).$$

De maneira análoga ao que foi feito com a integral I_3. temos:

$$I_4 = -\frac{1}{8}\xi\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz\quad R(z).$$

$$I_4' = -\frac{1}{8}\xi\int d\eta d\eta R\left(\eta\right) + \frac{1}{8}\xi\int\int dadaR\left(a\right) + \frac{1}{8}\eta\xi\int daR\left(a\right) - \frac{1}{8}\xi a\int daR\left(a\right)$$

Finalmente, manipularemos a última das integrais:

$$I_5 = \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_a^y dz\ zR(z)$$

$$I_5 = \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\left[\int dyyR\left(y\right) - \int daaR\left(a\right)\right].$$

Integrando por partes os termos entre colchetes, levamos a integral I_5 à forma:

$$\begin{aligned} I_5 \quad = \quad & \frac{1}{8}\int d\eta\eta\int R\left(\eta\right)d\eta - \int d\xi\xi\int R\left(\xi\right)d\xi - \int\int\int d\eta d\eta d\eta R\left(\eta\right) + \int\int\int d\xi d\xi d\xi R\left(\xi\right) + \\ & -\eta a\int R\left(a\right)da + \xi a\int R\left(a\right)da + \eta\int\int R\left(a\right)da - \xi\int\int R\left(a\right)da \end{aligned}$$

Após efetuarmos integrações parciais nos dois primeiros termos da equação acima. e somando a equação I_5 resultante a I_1, I_2, I_3 e I_4. já escritas em termos de integrais indefinidas, somos levados a:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) \;=\;& \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; F'(\eta) + \\
&+\frac{1}{8}(\xi-\eta)\; G(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\; G(\eta) + \frac{3}{4}\int d\eta\; G(\eta) - \frac{3}{4}\int d\xi G(\xi) \\
&-\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int d\eta\; H(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int d\xi H(\xi) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int\int d\eta d\eta R(\eta) + \\
&-\frac{1}{8}(\xi-\eta)\int\int d\xi d\xi R(\xi) + \frac{1}{4}\int\int\int d\xi d\xi d\xi R(\xi) - \frac{1}{4}\int\int\int d\eta d\eta d\eta R(\eta)\,.
\end{aligned}
$$

Apêndice B

Decomposição Geral das Soluções

Este Apêndice tem como objetivo mostrar claramente que as soluções gerais propostas para cada uma das soluções dos nossos problemas já indica que devemos procurar por soluções que possam ser decompostas em termos que são soluções do D'Alembertiano simples, e que os demais termos são funções propagantes multiplicadas pelo tempo, ou por alguma potênciado mesmo, t^n.

Podemos resumir a formulção dos nossos problemas negligenciando a informação das condições iniciais da seguimte forma:

a)

$$\begin{aligned} \Box\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= 0 \\ \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= f(\xi)+g(\eta); \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \Box^2\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= 0 \\ \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi); \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Box\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= 0 \\ \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \begin{pmatrix} f_1(\xi)+g_1(\eta)+\eta h_1(\xi) \\ f_2(\xi)+g_2(\eta)+\xi h_2(\eta) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \Box^3\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= 0 \\ \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi)+\xi^2 s(\eta)+\eta^2 u(\xi). \end{aligned}$$

Introduzimos aqui também, para fortalecer nossos argumentos, a análise de uma equação que contém termos de derivadas de 8^aordem:

e)

$$\begin{aligned} \Box^4\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= 0 \\ \widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi)+\xi^2 s(\eta)+\eta^2 u(\xi)+\xi^3 v(\eta)+\eta^2 w(\xi) \end{aligned}$$

Comecemos, então, por manipular o problema (b):

A solução:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi)$$

pode ser escrita da seguinte forma, sem perda de generalidade:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = [a(\xi)-\xi r(\xi)]+[b(\eta)-\eta h(\eta)]+\xi h(\eta)+\eta r(\xi).$$

onde:

$$f(\xi) = a(\xi)-\xi r(\xi)$$

e

$$g(\eta) = b(\eta)-\eta h(\eta),$$

levando-nos a :

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = a(\xi) + b(\eta) - (\xi - \eta) r(\xi) + (\xi - \eta) h(\eta),$$

o que, finalmente, reduz-se a:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = a(\xi) + b(\eta) + 2tr(\xi) - 2th(\eta).$$

Manipulando o problema (c):

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) \\ f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_2(\eta) \end{pmatrix}.$$

podemos reescrever essa solução na forma:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = \begin{pmatrix} a_1(\xi) + g_1(\eta) + 2th_1(\xi) \\ f_2(\xi) + b_2(\eta) - 2th_2(\eta) \end{pmatrix}$$

onde:

$$f_1(\xi) = a_1(\xi) - \xi h_1(\xi)$$

e

$$g_2(\eta) = b_2(\eta) - \eta h_2(\eta).$$

Manipulemos, agora, o problema (d):

sem perder a generalidade da solução, podemos supor que:

$$f(\xi) = a(\xi) - \xi\rho(\xi) + \xi^2 u(\xi).$$

$$g(\eta) = b(\eta) - \eta\gamma(\eta) + \eta^2 s(\eta),$$

$$h(\eta) = \gamma(\eta) - 2\eta s(\eta),$$

$$r(\xi) = \rho(\xi) - 2\xi u(\xi).$$

Substituindo estas funções em:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi) + \xi^2 s(\eta) + \eta^2 u(\xi),$$

somos levados a:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= \left[a(\xi) - \xi\rho(\xi) + \xi^2 u(\xi)\right] + \left[b(\eta) - \eta\gamma(\eta) + \eta^2 s(\eta)\right] + \\ &+ \xi\left[\gamma(\eta) - 2\eta s(\eta)\right] + \eta\left[\rho(\xi) - 2\xi u(\xi)\right] + \xi^2 s(\eta) + \eta^2 u(\xi).\end{aligned}$$

o que reduz-se a:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= a(\xi) + b(\eta) + (\xi-\eta)\gamma(\eta) - (\xi-\eta)\rho(\xi) + \\ &+ (\xi-\eta)^2 s(\eta) + (\xi-\eta)^2 u(\xi);\end{aligned}$$

finalmente, chegando a:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= a(\xi) + b(\eta) - 2t\gamma(\eta) + 2t\rho(\xi) + \\ &+ 4t^2 s(\eta) + 4t^2 u(\xi).\end{aligned}$$

Por último, manipulemos o problema (e):

Tomemos as funções:

$$f(\xi) = a(\xi) - \xi\rho(\xi) + \xi^2\beta(\xi) - \xi^3 w(\xi),$$

$$g(\eta) = b(\eta) - \eta\gamma(\eta) + \eta^2\alpha(\eta) - \eta^3 v(\eta),$$

$$h(\eta) = \gamma(\eta) - 2\eta\alpha(\eta) + 3\eta^2 v(\eta),$$

$$r(\xi) = \rho(\xi) - 2\xi\beta(\xi) + 3\xi^2 w(\xi).$$

$$s(\eta) = \alpha(\eta) - 3\eta v(\eta),$$

$$r(\xi) = \beta(\xi) + 3\xi w(\xi),$$

e levemos em:

$$\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi) + \xi^2 s(\eta) + \eta^2 u(\xi) + \xi^3 v(\eta) + \eta^2 w(\xi).$$

Por fim, após algumas manipulações, chegamos a:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\xi;\eta) &= a(\xi) + b(\eta) - 2t\gamma(\eta) + 2t\rho(\xi) + 4t^2\beta(\xi) + 4t^2\alpha(\eta)\\ &\quad +8t^3 v(\eta) - 8t^3 w(\xi).\end{aligned}$$

Apêndice C

Classificação Geral das Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

As equações diferenciais parciais básicas da condução do calor, da propagação de ondas e da teoria do potencial, estão associadas a três diferentes tipos de fenômenos físicos: os processos difusivos, oscilatórios e independentes do tempo ou permanentes. Por isto, têm importância fundamental em vários ramos da Física.

As equações diferenciais cuja teoria está mais desenvolvida, e cujas aplicações são mais significativas, são as equações lineares de segunda ordem. Todas estas equações podem ser classificadas em uma das três seguintes categorias: elípticas, hiperbólicas e parabólicas, cujos protótipos são, respectivamente: a equação do potencial, a equação das ondas e a equação da condução do calor. Podemos, então, afirmar que a investigação destas três equações, traz-nos muitas informações sobre o comportamento das equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem mais gerais.

Por exemplo, podemos inspecionar os três casos citados no parágrafo acima para tentar identificar quais devem ser as características gerais que devemos levantar de uma equação diferencial de segunda ordem, a fim de poder identificar a qual dos três tipos gerais ela pertence.

Comecemos por analisar a equação de onda:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0,$$

e verifiquemos que esta equação, possui quatro coeficientes associados as derivadas de segunda ordem presentes na equação: três associados à parte espacial e um associado à parte temporal. Podemos verificar ainda, sem dificuldade, que a soma dos parâmetros positivos e negativos presentes nas derivadas de segunda ordem da equação correspondem à dimensão da mesma ($n = 4$): 3 coeficientes positivos($r = 3$) e um negativo ($s = 1$).

Em verdade, podemos afirmar que toda equação hiperbólica atende à seguinte condição: a soma dos coeficientes positivos (r) da equação, com os coeficientes negativos(s), presentes nas derivadas de segunda ordemda mesma, tem que ser igual à dimensão desta(n).

Tomando a equação da condução do calor:

$$\nabla^2\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0,$$

podemos verificar que existe um total de 4 coeficientes, dos quais apenas três aparecem presentes nos termos que possuem derivadas de segunda ordem, ou seja, a soma dos coeficientes positivos ($r = 3$) com os coeficientes negativos ($s = 0$) presentes nas derivadas de segunda ordem da equação, são menores que a dimensão da mesma ($n = 4$).

De fato, podemos garantir que toda equação parabólica atende à seguinte condição: a soma dos coeficientes positivos (r) com os coeficientes negativos(s),presentes nas derivadas de segunda ordem da mesma, tem que ser menor que a dimensão desta(n).

Enfim, analisando a equação do potencial (equação de Laplace):

$$\nabla^2\Psi = 0,$$

podemos verificar que temos um total de três coeficientes presentes na equação, dos quais todos são positivos e estão presentes nas derivadas de segunda ordem.

De fato, podemos afirmar que toda equação elíptica atende à seguinte condição: o número de coeficientes positivos presentes nas derivadas de segunda ordem da equação(r) é igual à dimensão desta (n).

Em resumo:

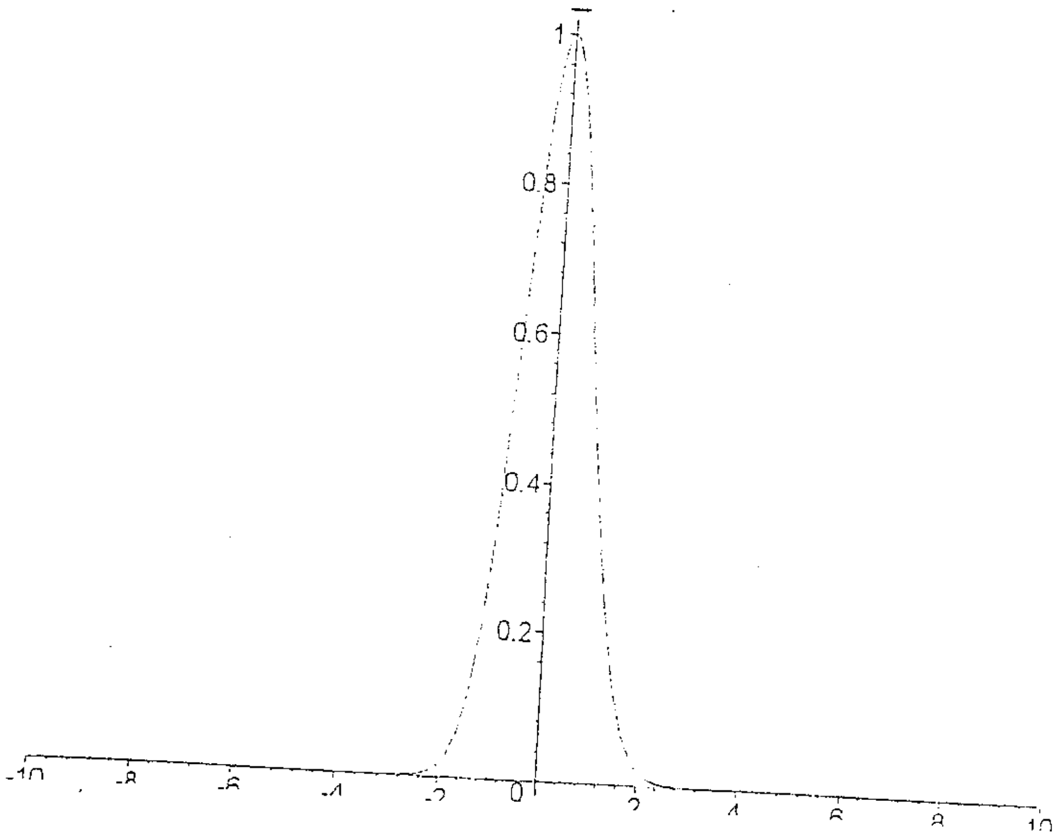
a) Equações Hiperbólicas: - $r + s = n$;

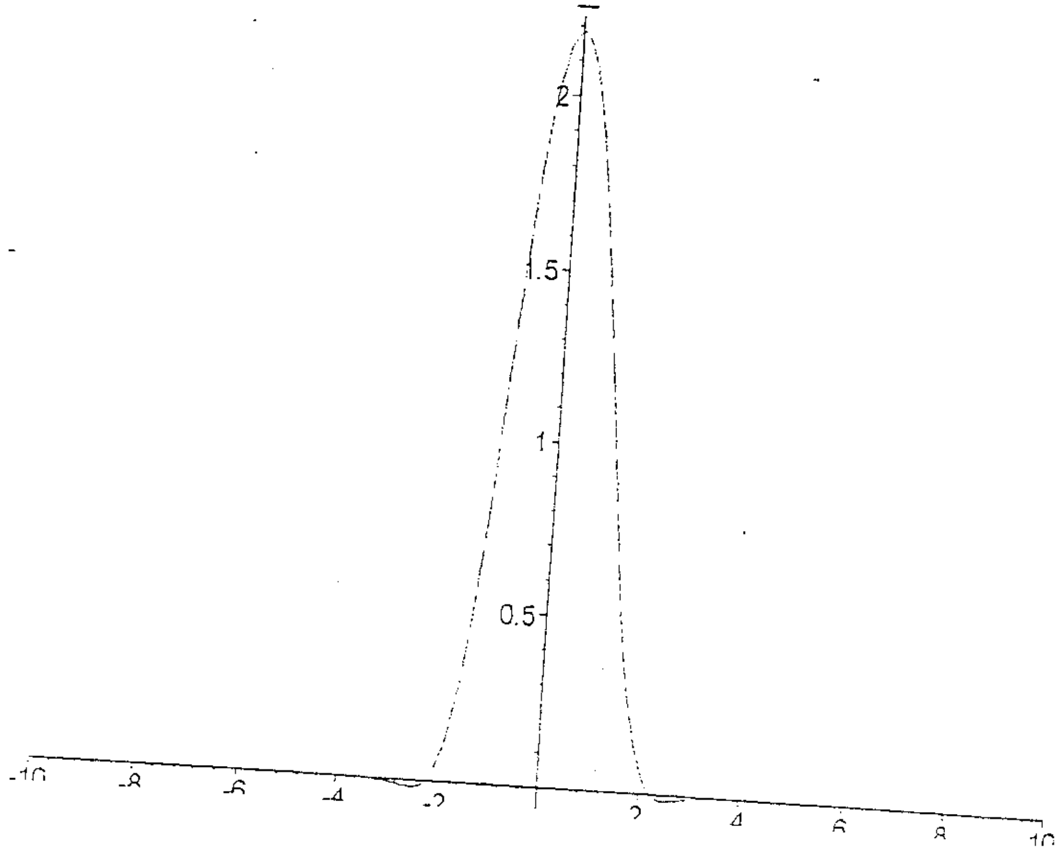
b) Equações Parabólicas: - $r + s < n$;

c) Equações Elípticas: - $r = n$ e $s = 0$.

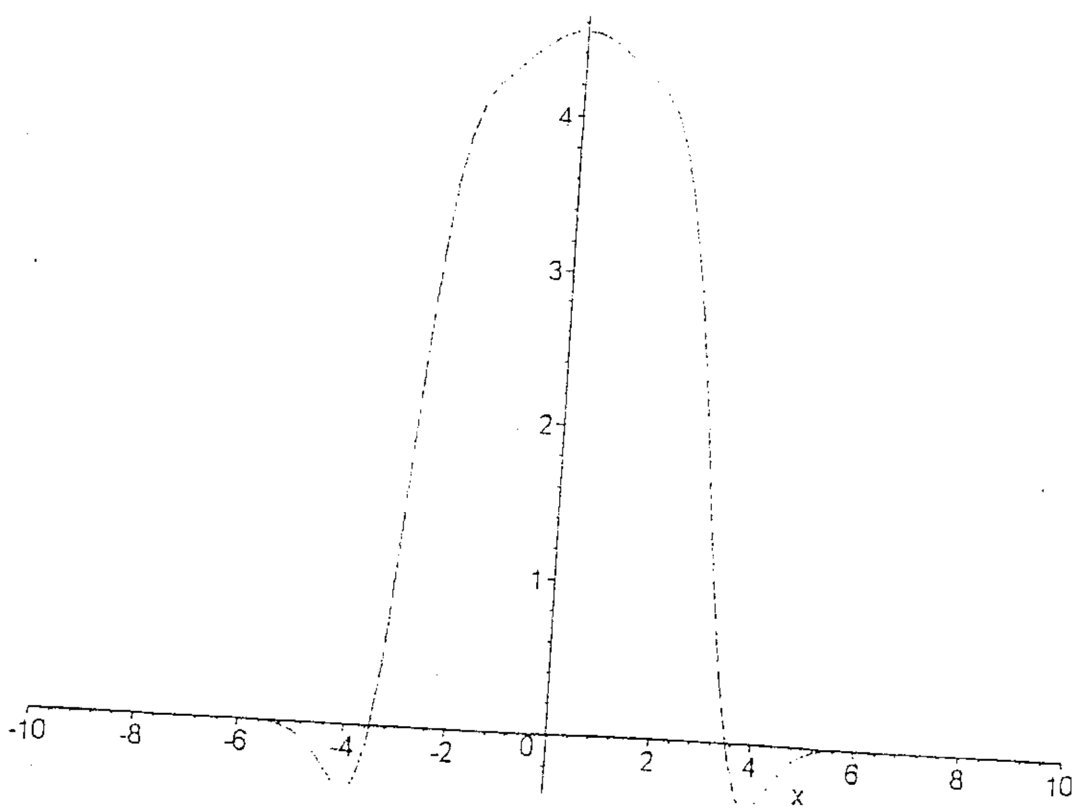
Lista de Figuras

gura(a): Evolução Temporal da Solução (2.29), a partir das condições iniciais fixadas r: {$F(x) = \exp(-x^2)$, $G(x) = \exp(-x^2)$, $H(x) = \exp(-x^2)$, e $R(x) = \exp(-x^2)$}

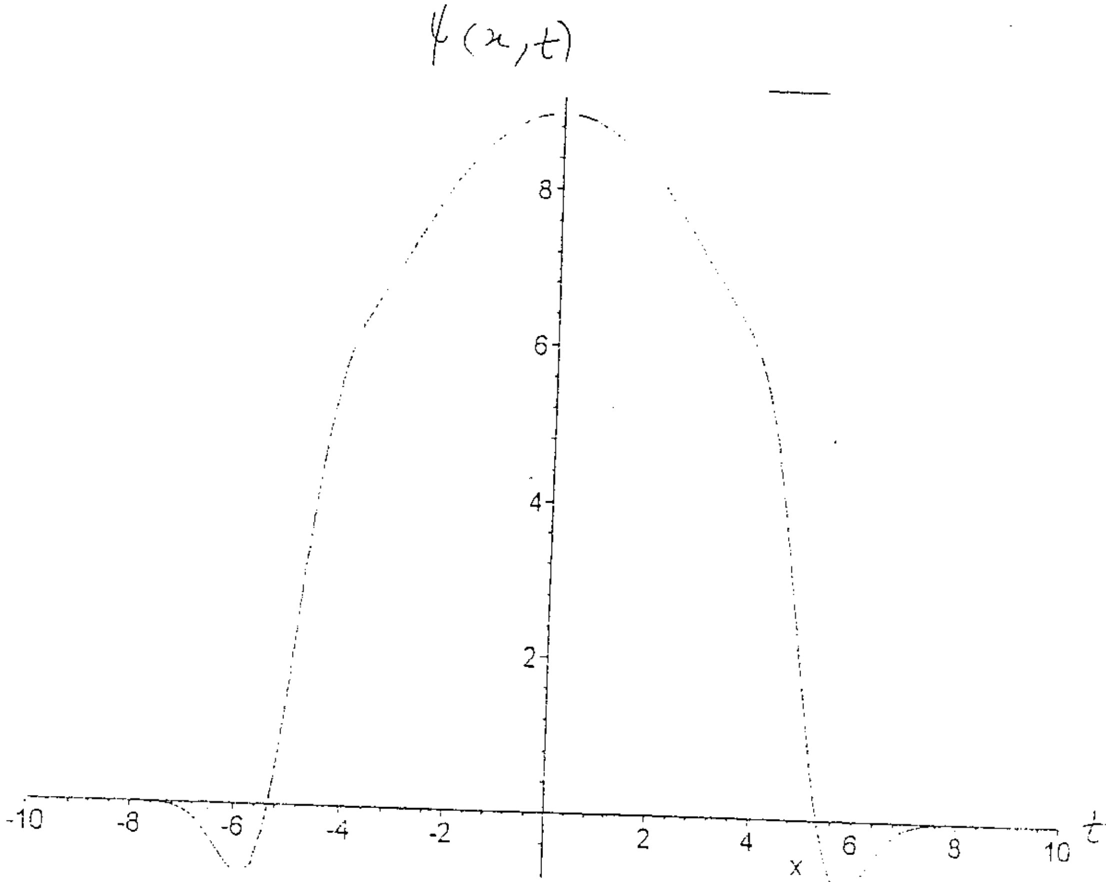




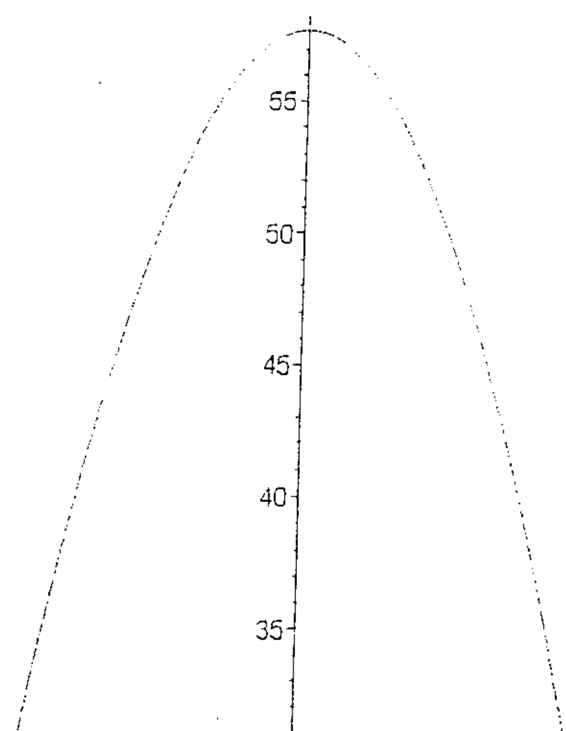
2
1.5
1
0.5
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10



4
3
2
1
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x

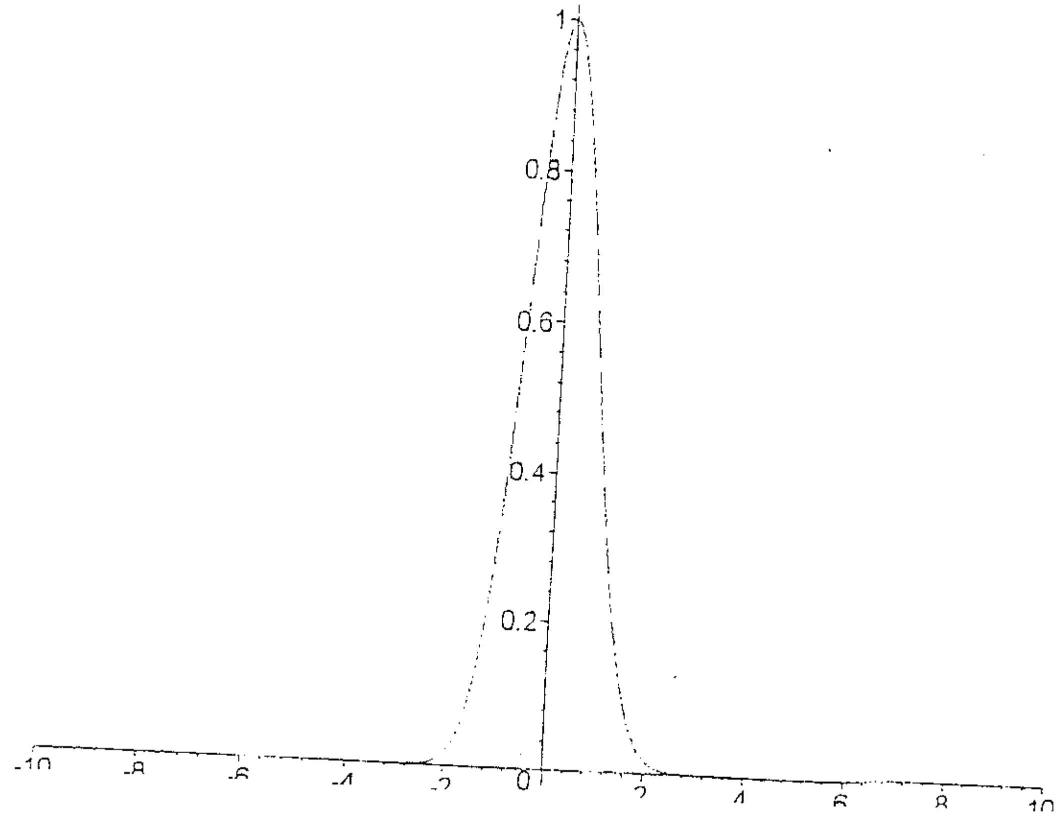


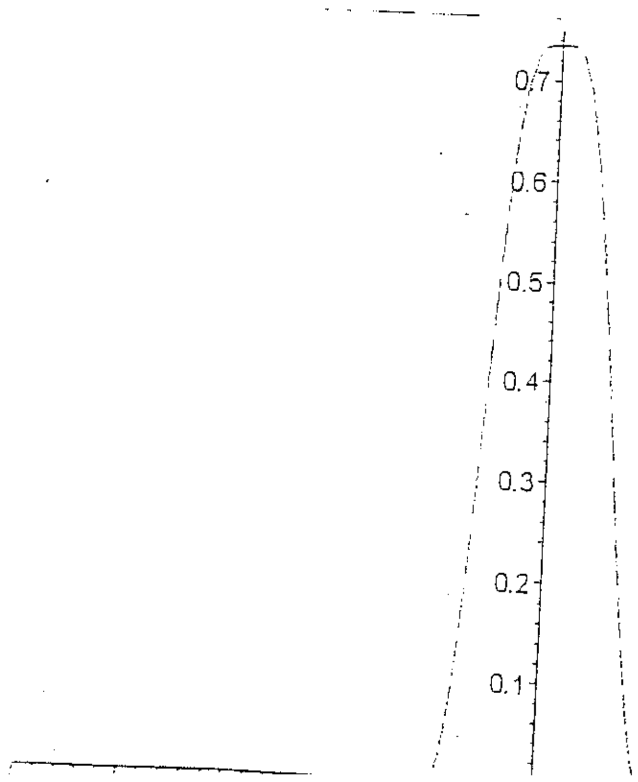
ψ(x,t)
8
6
4
2
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
x
t

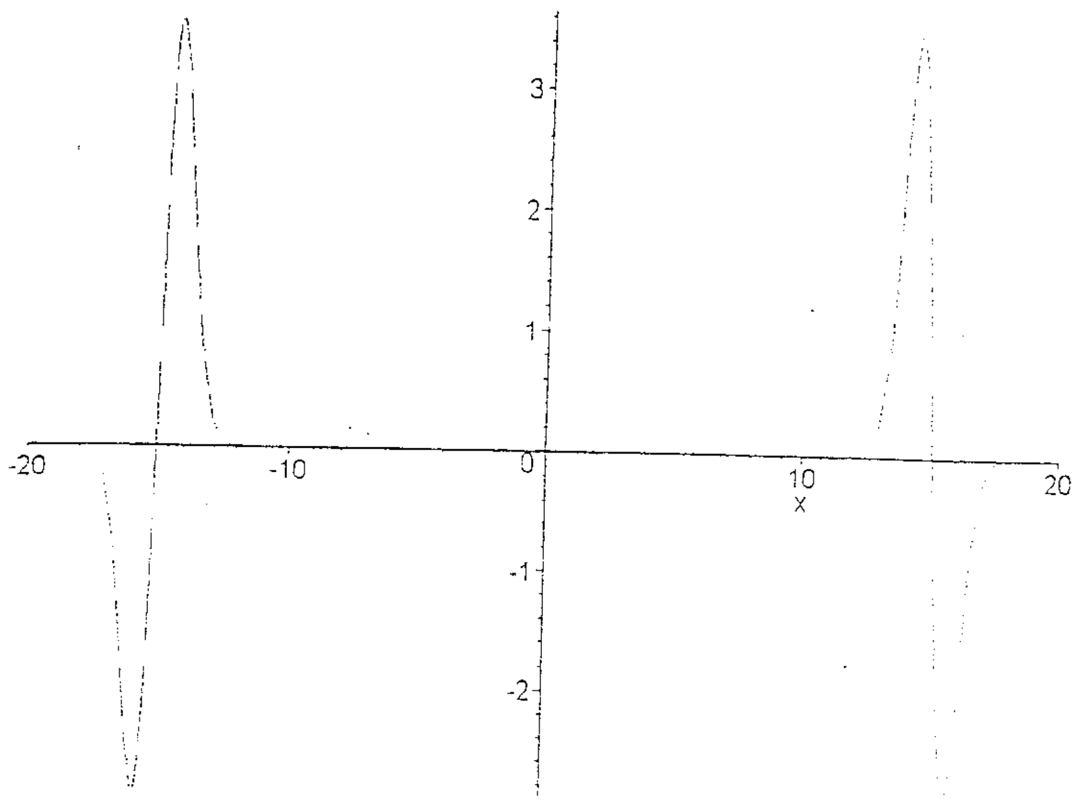


55
50
45
40
35

Figura(b): Evolução Temporal da Solução (2.29), a partir das condições iniciais fixadas por: { $F(x) = \exp(-x^2)$, $G(x) = 0$, $H(x) = 0$, e $R(x) = 0$}







3
2
1
-1
-2
-20
-10
0
10
20
x

Bibliografia

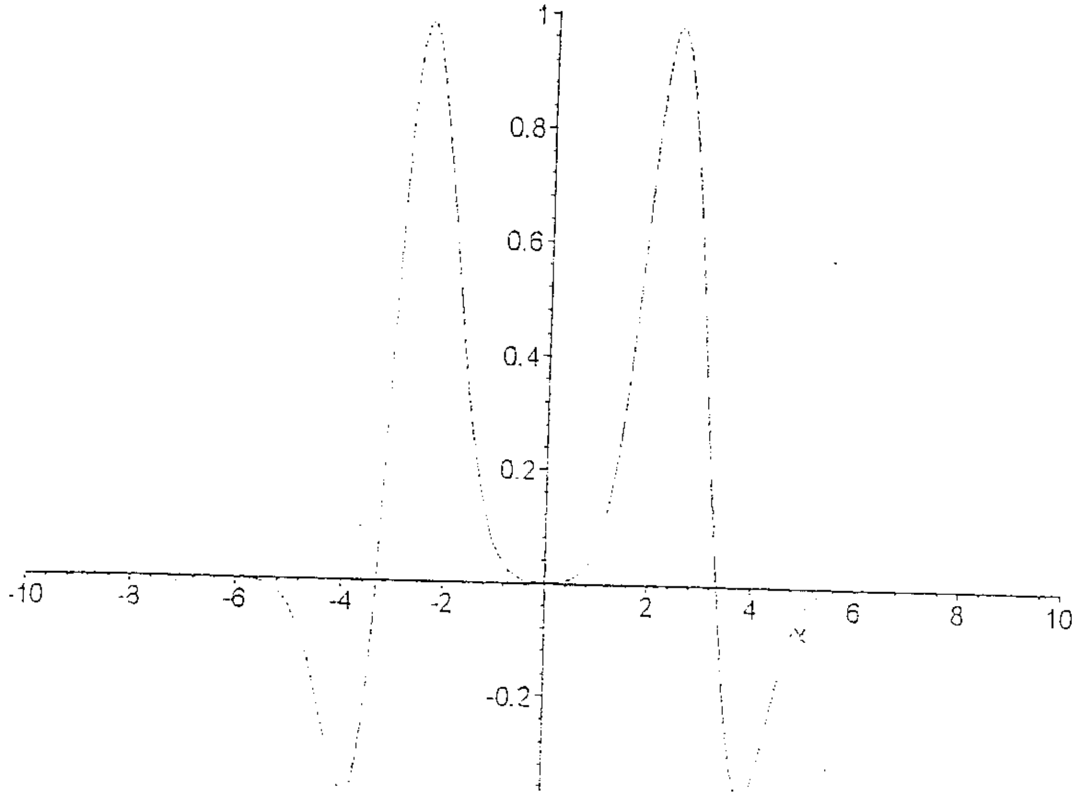
[1] Ferrara, J. Ellis and P. Nieuwenhuizen (Plenum Press. New York. 1980). p. 587:
Niels. H. P.. Phys. Rev. 110C (1984) 1;
H.E. Haber and G.L. Kane. Physics Reports 117C (1985) 75:
Ellis. J.. Supersymmetry and GU. Cern-TH/9512335.

[2] Nieuwenhuizen. P. Nuc. Phys. B 60. 478 (1973).
Boldo. J.L.: de Moraes. L. M.: Helayël-Neto. J.A.. Class. Quantum Grav. 17. 813.
Nunes F.. C. P.: Pires. G. O.. Phys.Lett. B 301. 339 (1993).
Deser. S. and Jackiw. R., Higher Derivative Chern-Simons Extensions. BRX. TH-449. hep-th/9901125 (1999)

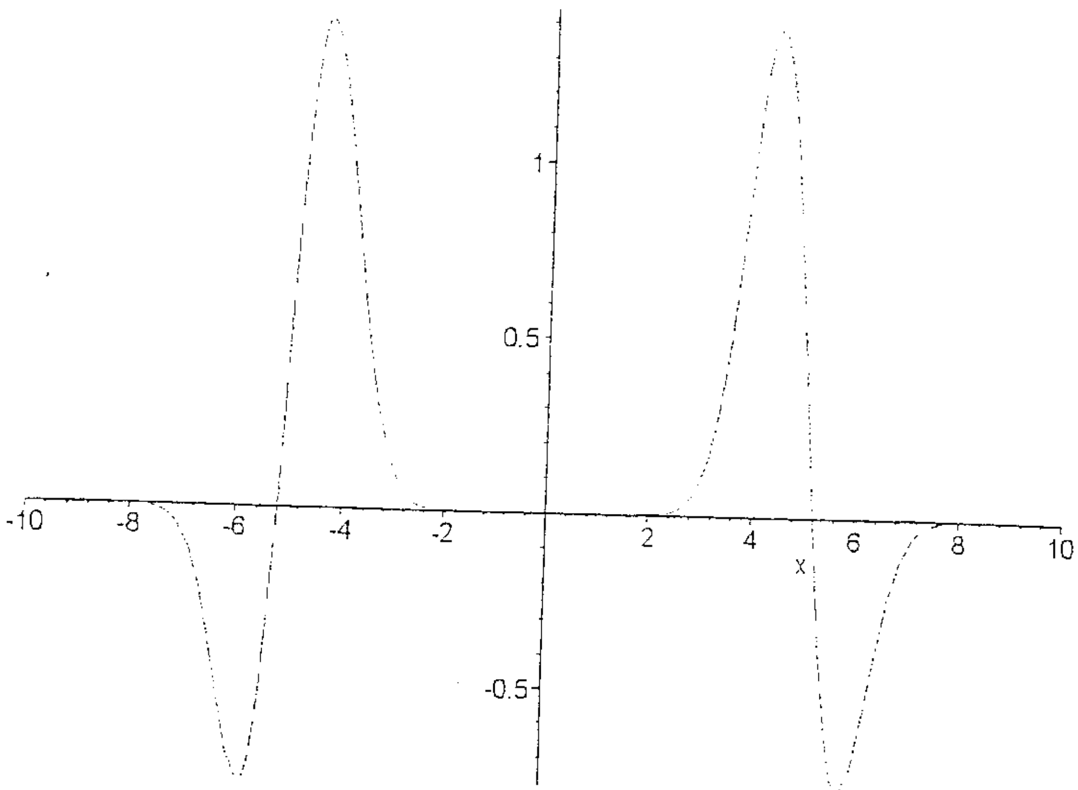
[3] Nagy. K. L. . State Vector Spaces with indefinite Metric in QFT. P. Noordhoff Ltd. - Growingen. and Akadémiai Kiadó. Budapest - 1966.
Helayël-Neto. J.A.. Campos Quânticos e Teorias de Gauge. O Aprouche de Gauge para a Gravitação. notas de curso. cursos homônimos ministrados na pós-graduação do CBPF e no grupo de Física Teórica da UCP (GFT-UCP).

[4] Brow. J. D., Lower Dimensional Gravity. Word Scientific. Singapura (1991)

[5] Courant, R., Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics. Mathematical Physics Series. Intersience. New York. 1953



1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
x



1
0.5
-0.5
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
x

[6] Helayël-Neto, J.A., Simões, R.S., Extending the D'Alembert Solution for Higher-Derivative Wave Equation in (1+1) D, submetido para publicação.

[7] Helayël-Neto, J.A., Simões, R.S., General Solutiuons for Higher-Derivative Dirac Equation in (1+1) D, submetido para a publicação.

[8] Griffiths, D.J., Introduction to Eletrodynamics, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1989.

[9] Butkov, E., Física Matemática, St. Jhon's University, New York, 1988.

[10] Jackson, J.D., Classical Eletrodynamics, Secon Edition, John Wiley & Sons, New York, 1975.

[11] Merwe, P. du T., Dürr, H.P., Conformal Invariant Spinor Theory with Third-Order Derivative, Nuovo Cimento, Vol 23 A, N.1 (1974).

"SOLUÇÕES DE D'ALEMBERT ESTENDIDAS PARA EQUAÇÕES DE ONDA COM DERIVADAS SUPERIORES"

Ricardo Sibanto Simões

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto.

José Abdalla Helayël Neto - Presidente

Alexander Willian Smith – Co-orientador

Winder Alexander de Moura Melo

Nelson Pinto Neto

Nelson Pinto Neto

Sebastião Alves Dias – Suplente

Rio de Janeiro, 13 de junho de 2001