

TESE DE
DOUTORADO

Aspectos de Gravitação Quântica e
de Teorias Quânticas
com Torção Dinâmica

GUILHERME DE BERREDO PEIXOTO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF
RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 2001

À memória de

*Luiz Bousquet de Berrêdo,
Francisco Peixoto Soares de Moura Filho, meus avós,
e Laura, minha irmã.*

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos

- a meus pais, José Maria Peixoto e Elza Maria Berredo Peixoto, pelas excelentes condições que recebi ao longo de minha formação;
- ao Prof. Ilya L. Shapiro, por sugerir os problemas nos quais trabalhei, pela orientação e esclarecimentos em questões técnicas e científicas, bem como a análise dos resultados, e pela ajuda na preparação do texto da tese;
- ao Prof. José A. Helayël-Neto, pelos esclarecimentos prestados, pela orientação e pelas valiosas sugestões na preparação da tese;
- aos meus colegas de profissão, pelo apoio e amizade, e ao Dr. André Penna Firme, pela colaboração;
- ao Prof. Mario Novello, pelos conhecimentos que obtive durante o programa de mestrado;
- ao CBPF, por me proporcionar excelentes condições de trabalho, em especial a assistência de seu quadro administrativo e técnico;
- ao CNPq, pela bolsa concedida.

Resumo

Investigamos nesta tese vários aspectos da teoria quântica de campos. No trabalho mais relevante, estudamos as restrições à torção dinâmica que surgem no contexto de uma teoria quântica de campos efetiva. Este resultado é um exemplo de restrição à geometria do espaço-tempo obtida através de métodos das teorias quânticas de campos. Outros resultados incluem a construção de uma nova versão de teoria com derivadas superiores e simetria conforme local, sua contribuição para a anomalia e o cálculo das divergências a 1-loop para a gravitação quântica usando uma nova parametrização conforme.

Abstract

Several problems of quantum field theory have been investigated throughout this thesis. The most relevant result is the analysis of the constraints on a dynamical torsion arising in the framework of effective quantum field theory. We then present an example of the restrictions on the space-time geometry obtained by quantum field theory methods. Other results include the construction of a new version of higher-derivative theory with local conformal symmetry, its contribution to anomaly and the derivation of 1-loop divergences for quantum gravity in a new conformal parametrization.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
Introdução	1
1 Gravitação Quântica e Parametrização Conforme	14
1.1 Ação de Einstein e parametrização conforme	14
1.2 Parte bilinear da ação nos campos quânticos	16
1.3 Cálculo das divergências a um <i>loop</i>	19
1.4 Discussão dos resultados	23
2 Ação Conforme Fermiônica com Derivadas Superiores	25
2.1 Simetria conforme	25
2.2 Cálculo das divergências	29
2.3 Discussão e o cálculo da anomalia conforme	32
3 Introdução às Teorias com Torção	36
3.1 A torção como objeto clássico	36
3.2 Interação da matéria com a torção de fundo	38

3.2.1	Torção no espaço de Riemann-Cartan	39
3.2.2	Acoplamento mínimo entre torção e espinores	40
3.3	Ação para a torção dinâmica	41
3.3.1	Cálculo das divergências a 1-loop	42
3.3.2	A ação para a torção dinâmica e a parametrização de Boulware	45
3.3.3	As identidades de Ward-Takahashi	47
4	Cálculo Completo das Divergências a 1-loop	49
4.1	Ação bilinear nos campos quânticos	49
4.2	Cálculo das divergências	51
4.2.1	Termo $n = 2$	52
4.2.2	Termo $n = 3$	54
5	Renormalização e Divergências a 2-Loops	57
5.1	Renormalização e o Grupo de Renormalização	57
5.2	Diagramas a 2-loops	60
5.3	Discussão	64
	Conclusão	66
A	Notações e Relações Úteis	69
A.1	Notações e convenções	69
A.2	Relações úteis	70
A.2.1	Espaço Euclideano	70
A.2.2	Espaço de Minkowski	71
B	A Ação de Dirac e a Invariância Conforme	72
C	A equivalência entre os espectros de $i\gamma^\mu D_\mu + m$ e $i\gamma^\mu D_\mu - m$	74

D	Cálculo das Divergências: Exemplos Particulares	76
D.1	Vetor Abeliano	76
D.2	Vetor axial sem massa	78
E	Diagramas a 2-loops usando parametrização de Feynman	80
	Referências	82

Introdução

Desde o surgimento da Teoria da Relatividade Geral (para uma introdução ao tema, veja [1, 2]) até os anos 50, a gravitação era vista sob o prisma da interpretação geométrica. Seu domínio de aplicabilidade compreendia os fenômenos de larga escala, quando podemos desprezar os efeitos da Teoria Quântica de Campos. Por outro lado, os efeitos da gravitação são ordens de grandeza menores do que os efeitos da Teoria Quântica de Campos na escala subatômica. Deste modo, estes dois cenários da física teórica tiveram por muito tempo domínios distintos.

O sucesso do Modelo Padrão (veja, por exemplo, [3]), que descreve as interações fortes, fracas e eletromagnéticas, na escala subatômica, reunindo-as num formalismo único de teoria quântica de campo, serviu como um estímulo aos relativistas¹ a considerarem a natureza quântica como uma possibilidade a ser explorada na gravitação. Além disso, e de modo mais decisivo, os próprios progressos da Cosmologia e da física dos buracos negros tornaram a *gravitação quântica* um projeto de grande relevância científica. O estudo dos fenômenos próximos ao Big Bang ganham crescente importância para a compreensão dos diversos aspectos da física teórica. Nesta escala de altas energias, os possíveis efeitos quânticos da gravidade não podem ser ignorados. No entanto, apesar de muitas tentativas, sugestões e desenvolvimentos, até hoje não existe uma teoria satisfatória da gravitação

¹O termo "relativista" designa, normalmente, os físicos especialistas na Teoria da Relatividade Geral bem como em áreas afins.

quântica.

Avanços na compreensão da quantização de teorias de gauge, tais como o desenvolvimento da quantização Lagrangeana [4, 5], tornaram possível a tentativa de se quantizar a gravitação. Entre os aspectos mais técnicos, podemos mencionar o esquema de regularização dimensional [6].

Nesta tese, vamos usar o formalismo da integração funcional (integrais de caminho) como método de quantização, e a ação efetiva como objeto central dos estudos. Em Teoria Quântica de Campos, a ação efetiva é uma quantidade que carrega todas as informações sobre as funções de Green da teoria, sobre os efeitos quânticos e os campos clássicos, além de ingredientes necessários à investigação da matriz S . A referência [7] oferece uma introdução ao formalismo da ação efetiva em gravitação quântica. Em geral, o esquema perturbativo inclui as expansões em *loop*, cujos termos podem ser representados por diagramas de Feynman.

O Método do Campo de Fundo é a maneira covariante de estudar a ação efetiva. Neste método, a parte clássica (*background*) e a parte quântica dos campos são levadas em conta de modos distintos durante o processo de quantização. Os diagramas de "árvore" representam interações puramente clássicas (entre campos clássicos), e o restante da série, com propagadores dos campos quânticos nos *loops*, representam as consequentes flutuações quânticas no fundo de campo clássico (*background*). Referências-padrão sobre o Método do Campo de Fundo podem ser encontradas em [7, 8, 9, 10, 11, 12].

Numa abordagem perturbativa, a teoria quântica da gravitação apresenta uma dificuldade adicional em relação às teorias de Yang-Mills e outros modelos renormalizáveis. Uma das razões é que a sua constante de acoplamento tem dimensão de $[\text{massa}]^{(-1)}$, enquanto que, por exemplo, as constantes de acoplamento do eletromagnetismo e da teoria de Yang-Mills são adimensionais. Como resultado, do ponto de vista da *power counting*,

a gravitação quântica é não-renormalizável. G. t'Hooft e M. Veltman [13] mostraram pela primeira vez, em 1974, que a teoria de Einstein pura (sem matéria) é finita a 1-loop na camada de massa (*on the mass shell*), ou seja, quando os campos de fundo satisfazem às equações de movimento. Ainda no mesmo trabalho, foi mostrado também que a gravitação acoplada a um campo escalar perde a finitude *on-shell* a 1-loop. S. Deser e P. van Nieuwenhuizen [14] mostraram, logo em seguida, que os contratermos a 1-loop não são nulos na camada de massa, quando o campo gravitacional interage com o eletromagnetismo, ou com férmions, conforme [15]. A ref. [16] examina as divergências a 2-loops. Vários cálculos com diferentes tipos de campos de matéria podem ser encontrados na literatura, a saber: o primeiro cálculo na gravitação pura num gauge não-mínimo [17]; cálculos usando os diagramas de Feynman com diferentes parametrizações da métrica [18]; o mesmo resultado de [13] obtido usando a representação local de momento baseada nas coordenadas normais de Riemann [19]; o cálculo para a gravitação acoplada com férmions de Majorana [20]; cálculos no formalismo de primeira ordem (onde a conexão é independente da métrica) usando os diagramas de Feynman [21], o método do campo de fundo e a técnica de Schwinger-DeWitt [22]. O trabalho [23] calcula as divergências para a teoria de Einstein-Cartan com uma corrente espinorial externa, e investiga o grupo de renormalização *on shell* (veja também [24]).

Assim como o estudo da mecânica quântica com campos eletromagnéticos de fundo representou uma etapa importante para o surgimento da eletrodinâmica quântica (veja, por exemplo, [25]), a Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo curvo (com métrica puramente clássica) também constitui uma etapa na busca de uma formulação da gravitação quântica. Para uma introdução à Teoria Quântica de Campos em espaços-tempo curvos, bem como suas aplicações, consulte as referências [7, 26]. Neste cenário (campos quânticos no *background* curvo), a renormalizabilidade, em geral, implica na adição de

novos termos à ação, com eventuais interações não-mínimas. Em gravitação quântica, a renormalizabilidade requer a introdução de termos com derivadas superiores.

As teorias gravitacionais com campos escalares vêm sendo, há dezenas de anos, extensivamente estudadas, com motivações diversas. Por exemplo, o campo escalar de Higgs, ainda não detectado nos aceleradores, desempenha um papel de grande importância nas teorias de gauge, seja em GUTs (Teorias de Grande Unificação) ou no Modelo Padrão, onde a partícula de Higgs assume papel-chave no mecanismo de quebra espontânea de simetria. Por outro lado, a composição campo escalar-gravitação, prevista pelas teorias de cordas, faz parte de um contexto fértil do ponto de vista teórico. Em Cosmologia, o *inflaton* é o campo escalar que provoca inflação e assim parametriza este importante mecanismo. Assim, as teorias com campo escalar são particularmente importantes para diversas áreas da Física, desde Cosmologia até teorias de cordas. Como é conhecido já por 30 anos [27], a teoria de gravitação acoplada a um campo escalar com simetria conforme é equivalente, no nível clássico (veja o Capítulo 1), à Relatividade Geral. A simetria conforme, em geral, tem papel importante na área de gravitação. No Capítulo 1, investigamos aspectos de gravitação quântica com simetria conforme e com um campo escalar.

Grande parte das peculiaridades matemáticas encontradas na quantização das teorias de gauge surgem das suas simetrias. Neste sentido, as teorias conformes de gravitação demandam maior atenção nesse aspecto, justamente por apresentarem uma simetria de adicional, que é a simetria conforme. Podemos citar os trabalhos [27, 28], que abordam a simetria conforme.

A simetria conforme não é uma boa simetria no nível quântico [29]: sistematicamente, nas teorias conformes no *background* curvo, o tensor momento-energia, classicamente sem traço, apresenta comportamento anômalo quando as correções quânticas são levadas em conta. O seu traço não é nulo devido aos efeitos quânticos da matéria [30, 31, 32].

Este efeito é a anomalia conforme, ou anomalia de traço. Para uma revisão geral sobre o tema, veja [33]. Em geral, as divergências a 1-loop ainda preservam a simetria, mas nas teorias conformes com quantização da métrica o problema exige cuidado ainda maior. Suas divergências não são sempre conformalmente invariantes, como mostra [24] em cálculo explícito para a ação com derivadas superiores. Imaginava-se, até então, que as divergências a 1-loop de uma teoria gravitacional conforme poderiam ser obtidas usando-se a suposição de que as divergências provenientes de duas ações relacionadas pela reparametrização $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \phi^2$ estariam também relacionadas entre si pela mesma reparametrização (veja [34, 35, 36]). Usando a técnica de regularização conforme (proposta na ref. [36]), na ref. [24] as divergências que preservam a simetria conforme são calculadas. Os resultados das divergências calculadas nas referências [24] e [37] diferem entre si, mas se igualam quando são sujeitas à regularização conforme. A equivalência a 1-loop entre a teoria de Einstein e a teoria métrico-escalar conforme é investigada na ref. [28].

Um problema relevante das teorias quânticas de campos é a questão da dependência dos contratermos nos parâmetros de gauge. Existem muitos trabalhos que investigaram diretamente o assunto na gravitação quântica [17, 38, 39, 40, 41, 42]. Em [39], as divergências a 1-loop para a gravitação de Einstein com constante cosmológica previamente calculadas em [43] são obtidas num gauge particular. Neste trabalho, aplicaram-se parametrizações do tipo $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + (-g)^r h_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + (-g)^l h^{\mu\nu}$, mais gerais do que as utilizadas em [13, 22]. Além de investigar questões sobre anomalia conforme em gravitação quântica com derivadas superiores, a ref. [44] mostra que na gravitação de Weyl a dependência de gauge das divergências (a 1-loop) é sistematicamente anulada pelas equações de movimento. Veja também [45]. A independência de gauge da matriz S é condição necessária à consistência das teorias de gauge [5, 46]. Assim, verificar esta propriedade para as diversas fixações de gauge é um requisito de importância especial.

Em [38], a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt [47] foi usada para confirmar a dependência na fixação de gauge calculada em [17].

Calculamos (veja também [48]) as divergências a 1-loop para a gravitação de Einstein, com constante cosmológica, num gauge conforme arbitrário. Para tal, usamos o Método do Campo de Fundo, bem como o método de Schwinger-DeWitt [47]. Consideramos uma parametrização da métrica quântica, similar à usada em [49], baseada na separação do fator conforme da métrica. No presente trabalho, a ação clássica descreve a gravitação de Einstein (sem simetria conforme), mas o setor quântico possui simetria conforme. Para fixar a simetria, primeiramente usamos a fixação de gauge $h^\mu{}_\mu = 0$, extensivamente adotada nas teorias de gravitação quântica conforme [24, 35, 36]. Como forte teste de consistência do procedimento $h^\mu{}_\mu = 0$ e como verificação dos cálculos, obtivemos a independência das divergências *on-shell* no parâmetro de gauge conforme.

A anomalia de traço, própria das teorias conformes, exerce um papel de grande relevância em Física [7, 26, 33]. A anomalia de traço pode ser interpretada como um efeito quântico da matéria ao ser quantizada no espaço-tempo curvo (métrica de fundo). Esta correção ao tensor momento-energia tem influência no espaço-tempo, caracterizando o que é normalmente chamado de *back reaction*. Uma das aplicações da anomalia e da ação induzida é a obtenção sistemática, em [50](veja também referências internas), do resultado padrão para o efeito de Bekenstein-Hawking [51, 52]. Também, o estudo da ação induzida procura investigar a relação entre a entropia de Bekenstein-Hawking e a ação gravitacional. Uma revisão sobre o tema pode ser encontrada em [53]. Podemos citar também [54, 55, 50, 56], como trabalhos dedicados à abordagem semi-clássica do efeito Hawking.

A ação induzida por anomalia sempre traz as contribuições não-locais da distribuição de energia da matéria quantizada. Cabe ressaltar o importante papel dos modelos de ação

induzida em Cosmologia [57, 58]. Dentre os trabalhos que incluem torção, podemos citar [57, 59]. A integração da anomalia de traço não especifica completamente a ação induzida. Um dos primeiros avanços neste sentido foi realizado nos trabalhos das referências [60, 61], onde termos não-locais foram obtidos na ação induzida, bem como um novo operador diferencial (atuando em campos escalares) de quarta ordem, que possui simetria conforme. Em analogia com a ação de Liouville-Polyakov [62], este operador tem papel relevante nas ações induzidas quadridimensionais. Generalizações foram realizadas em [63], onde operadores conformes agindo sobre tensores foram calculados. A referência [64] traz novos progressos com relação a [60, 61], construindo a ação induzida com uma expansão não-local em potências das curvaturas, obtida até a terceira ordem. Construimos, no Capítulo 2 (conforme [65]), um operador diferencial de terceira ordem nas derivadas, fermiônico, conformalmente simétrico. Calculamos também as divergências a 1-loop da teoria com derivadas superiores, bem como a anomalia de traço correspondente. Sobre o estudo das teorias fermiônicas conformes com derivadas superiores, podemos citar [66], que analisa aspectos de teorias de férmions com derivadas superiores bem como sua invariância no espaço plano com respeito ao grupo conforme (generalização do grupo de Poincaré).

Teorias com spins elevados costumam apresentar inconsistência na definição da anomalia, decorrente da presença de termos não-conformes [67]. Levando em conta os desenvolvimentos da última década, podemos afirmar que estes termos dependem da condição de gauge e que, de modo geral, a definição de anomalia para campo de spin 2 não é livre de ambiguidade. As teorias com derivadas superiores, em geral, podem gerar anomalias conformes, mas possuem problemas com a unitariedade. Em [68], algumas propriedades das teorias com spins elevados e das teorias com derivadas superiores são analisadas com o objetivo de relacionar anomalia com a universalidade do grupo de renormalização. Podemos citar também os trabalhos [69, 70] como importantes referências no estudo dos

aspectos de supergravidade conforme, bem como das anomalias, para diversos conteúdos de campos.

Como já foi mencionado, a renormalizabilidade na gravitação quântica exige a adição de termos com derivadas superiores para a gravitação pura. Assim, a ação para uma teoria quântica da gravitação deve conter derivadas superiores da métrica, além do termo usual de Einstein-Hilbert para assegurar o limite Newtoniano. Dentre os numerosos trabalhos em gravitação quântica com derivadas superiores, podemos destacar os artigos [24, 37, 45, 71, 72, 73, 74] e o livro [7] para uma introdução e revisão sobre o tema. A teoria da gravitação com derivadas superiores, que pode ser considerada renormalizável [73, 74], tem ação clássica equivalente à ação do vácuo de uma teoria de grande unificação (a 1-loop) no fundo de gravitação. No entanto, a investigação de [73, 45] mostra sérios problemas com a unitariedade, por surgirem no espectro partículas não-físicas (*ghosts*) que, talvez, não possam ser suprimidas por correções radiativas [75]. Sobre tentativas de solucionar a questão da unitariedade em teorias de gravitação com derivadas superiores, veja [75, 76, 77, 78, 79, 80]. A ref. [79] propõe uma teoria sem *ghosts* baseada na descrição da gravitação em termos de um conjunto de campos de gauge do tipo Yang-Mills, no formalismo proposto em [81, 82], no entanto a teoria não é renormalizável. As interações com a gravitação quântica com derivadas superiores podem provocar mudanças no comportamento assintótico para modelos de GUT [83, 84, 45]. A gravitação quântica com derivadas superiores não pode ser considerada uma teoria fundamental, mas em geral é usada como um modelo, ou como uma teoria efetiva para uma teoria de gravitação quântica desconhecida. Nas teorias gravitacionais, porém, não é possível solucionar os problemas da renormalizabilidade e da unitariedade simultaneamente. Sistemáticamente, as teorias de gravitação quântica (em quatro dimensões) sempre possuem um desses problemas, caracterizando bem o conflito renormalizabilidade versus unitariedade.

O formalismo da gravitação quântica pode ser submetido ao cenário de uma teoria efetiva. Sua aplicabilidade é justificável nos regimes de baixas energias, onde os problemas de unitariedade e renormalizabilidade ganham um aspecto flexível. Em física teórica, atualmente, a validade de um modelo está vinculada à sua aplicabilidade. Deste modo, a gravitação de Einstein, por exemplo, deve ser o limite de uma teoria mais fundamental para grandes distâncias, e ao mesmo tempo deve conter a gravitação de Newton como o seu limite para baixas energias. Para energias baixas, a propagação dos ghosts massivos de spin-2 é negligível, uma vez que suas massas são da ordem da massa de Planck. Igualmente, a gravitação quântica deve conter a teoria de Einstein como um limite para grandes distâncias e deve ser um limite a baixas energias de uma teoria mais fundamental. Neste sentido, todas as teorias de campo podem ser consideradas como teorias efetivas.

No momento, uma das teorias candidatas à teoria fundamental da gravitação quântica, a teoria das (super)cordas, produz a gravitação como teoria efetiva no regime de baixas energias [85]. Mais especificamente, o tensor métrico é um campo previsto pela teoria de cordas. Também fazem parte do espectro de baixas energias o campo escalar e um campo de *rank-3* (3-forma) totalmente antissimétrico, freqüentemente associado a um campo de torção. Se quisermos investigar teorias efetivas (bem como as consequências das suas correções quânticas), é natural e interessante incluir campos escalares e torção na ação de baixas energias. Neste trabalho investigamos, entre outros assuntos, a possibilidade de formulação de uma teoria quântica efetiva da torção. Como veremos, a consistência da teoria da torção dinâmica exige um acoplamento muito fraco ou uma grande massa (bem maior do que a massa dos férmions) para a torção. Neste caso, a torção não se propaga a baixas energias (na escala de energia das partículas do Modelo Padrão). Assim, não podemos afirmar que a torção definitivamente não existe só pelo fato de não ser detectável.

No nível clássico, a gravitação com torção foi objeto de extensivo estudo [86, 87]. Po-

demos encontrar vários trabalhos sobre campos quantizados num *background* de torção (veja, por exemplo, [88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96]). Da mesma forma que a teoria quântica de campos num *background* curvo constitui a primeira etapa para a compreensão da gravitação quântica, modelos no background de Riemann-Cartan também têm importante apelo no sentido da formulação de uma teoria quântica da torção. Investigações pioneiras sobre campos quantizados interagindo com a torção foram realizadas em [57, 97, 98, 99], onde o estudo da renormalização obteve destaque especial. De modo geral, a análise da renormalizabilidade requer acoplamentos não-mínimos da matéria com a torção. Sabemos que a interação mínima entre a matéria (férmions) e a torção realiza-se efetivamente entre o espinor e a componente axial da torção. A referência [100] propõe um modelo no qual o campo vetorial Abelianos interage com a torção. É interessante citar a referência [101], na qual a torção não é analisada no contexto das teorias efetivas. Ao invés disso, a torção é formulada na ação bidimensional que descreve as cordas, com a intenção de evitar alguns problemas clássicos da teoria das cordas.

Partindo de diferentes tipos de acoplamentos, diversos artigos investigaram a possibilidade de detecção da torção em experimentos variados, escrevendo convenientemente as equações de movimento no limite não-relativístico [102, 103], ou usando as transformações de Foldy-Wouthuysen apropriadas² [106, 107], encontrando limites superiores para os parâmetros da torção. Os limites superiores para a massa da torção também são estimados usando equações do grupo de renormalização e vários experimentos conhecidos, em aceleradores e em física atômica [108].

Além das diversas motivações para a inclusão da torção como objeto dinâmico nas teorias quânticas de campos, é natural admitir sua existência como uma consequência da teoria de cordas. Em baixas energias, isso implica na necessidade de formulação de

²A versão exata das transformações de Foldy-Wouthuysen para o caso de campos de fundo constantes podem ser encontradas em [104, 105].

uma teoria quântica da torção dinâmica. Em três dimensões, o estudo da torção oferece uma vantagem adicional, que é a introdução de dinâmica à gravitação pela torção³, que é um campo associado à geometria. Para o estudo da torção dinâmica em três dimensões, o leitor pode verificar as referências [110, 111]. Em [110] a gravitação com torção sem acoplamento com a matéria é analisada, bem como os aspectos, no nível de "árvore", relacionados à unitariedade; e em [111] termos com derivadas superiores da métrica são introduzidos na ação para a torção acoplada com férmion a fim de dar dinâmica à torção (o único grau de liberdade da torção que se acopla minimamente ao férmion não possui dinâmica, em três dimensões).

Embora as condições de renormalizabilidade e unitariedade sejam mais severas em quatro dimensões, há muitos trabalhos que investigam uma ação para a torção dinâmica, [79, 82, 108, 112, 113, 114, 115, 116]. A ref. [115] propõe uma classe mais abrangente de ações para a torção (dinâmica) com gravitação sem *ghosts*, em comparação com [114]. Em [79, 112, 113, 114, 115], o princípio seguido é a unitariedade, e conforme [112, 115], o preço pago é a não-renormalizabilidade por contagem de potências. Para uma revisão geral das teorias da torção, consulte [117]. Se estamos interessados em investigar a torção como um objeto físico (e portanto detectável), devemos considerar uma ação que descreva seu acoplamento com a matéria, constituindo um sistema férmion-torção. Como podemos verificar (veja o Capítulo 3), somente a componente axial da torção se acopla minimamente com os férmions. Além disso, de acordo com [116], somente os termos quadráticos na derivada são relevantes no estudo dos efeitos da torção a baixas energias. A propagação simultânea dos modos longitudinais e transversais do vetor axial quebra a unitariedade, analogamente ao eletromagnetismo (veja, por exemplo, [118]).

Na busca de uma ação para a torção, em [108], foram considerados os dois critérios

³A teoria da gravitação de Einstein no vácuo em três dimensões é uma teoria topológica, sem dinâmica (veja, por exemplo, [109]).

de consistência (renormalizabilidade e unitariedade) na procura do termo cinético para a torção. A renormalizabilidade exige a propagação das contribuições transversais, além de um termo massivo, assim a unitariedade descarta as contribuições longitudinais da ação. Nesta tese (veja [119]), levamos em conta esses termos (do setor axial) para o cálculo completo das divergências a 1-loop. Convém mencionar que a ref. [108] introduz um campo escalar na teoria, com acoplamento de Yukawa, e que o setor escalar demanda a adição do termo cinético $(\partial_\mu S^\mu)^2$ para assegurar renormalizabilidade. Este termo contém modos longitudinais, que violam a unitariedade. Assim, na teoria com férmion, torção e campo escalar (no background plano) o conflito entre renormalizabilidade e unitariedade, que é propriedade característica da teoria de gravitação quântica, sempre existe. Um aspecto interessante é a diferença entre a torção (vetor axial) e o campo vetorial acoplados com espiniores, que pode ser revelada quando fazemos uma reparametrização dos campos em suas componentes transversais e longitudinais [120] na teoria com o férmion e a torção e comparamos com o mesmo procedimento para férmion e um vetor (Abeliano). No segundo caso (eletromagnetismo e férmion), o modo longitudinal do vetor se desacopla. No entanto, no primeiro caso, a contribuição longitudinal não se desacopla dos férmions. Isto indica problemas muito semelhantes com a teoria composta pelos campos fermiônicos, campos escalares e campos de torção, com acoplamento do tipo Yukawa. De fato, mostramos em [119] que uma interação quártica fermiônica, necessária à renormalização (a 1-loop), produz a dois *loops* divergências longitudinais, quebrando a unitariedade. Investigamos os valores relativos entre a massa da torção e a massa do férmion que tornariam a interação quártica desprezível no regime de baixas energias. Levando em conta resultados fenomenológicos em [108], este limite inferior para a massa da torção não é realístico do ponto de vista das experiências modernas. Sem limites para a massa, a torção não pode ser quantizada no contexto das teorias efetivas.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: No Capítulo 1, calculamos as divergências a 1-loop da gravitação quântica numa nova parametrização, e mostramos no regime *on-shell* que as divergências independem do parâmetro de gauge conforme. No Capítulo 2, construímos um operador fermiônico de terceira ordem nas derivadas, cuja ação correspondente para férmions livres sem massa possui simetria conforme. No Capítulo 3, fazemos uma breve introdução ao estudo da torção, com alguns detalhes da torção clássica, e consideramos a condição de renormalizabilidade na busca de uma ação para a torção. No Capítulo 4, exibimos os cálculos das divergências a 1-loop para os setores pseudo-vetoriais e fermiônicos; no Capítulo 5, escrevemos as equações do grupo de renormalização (1-loop) para os acoplamentos da teoria. Consideramos, também, os cálculos das divergências no nível de 2-loops com importantes consequências para a teoria. Seguem-se as Conclusões Gerais e os Apêndices A, B, C, D e E, onde são reunidos resultados, expressões auxiliares e rápidas revisões de tópicos necessários aos desenvolvimentos realizados nos cinco capítulos.

Capítulo 1

Gravitação Quântica e

Parametrização Conforme

Neste capítulo, vamos considerar a Relatividade Geral e o cálculo dos seus contratermos a 1-loop, com constante cosmológica, usando parametrização conforme da métrica quântica. Mantendo o parâmetro conforme arbitrário, mostramos que o resultado on-shell para as divergências é independente da gauge conforme.

1.1 Ação de Einstein e parametrização conforme

Considere a ação de Einstein para gravitação pura, com constante cosmológica

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (1.1)$$

sendo κ a constante de acoplamento, g o determinante da métrica (de assinatura $(1, -1, -1, -1)$), Λ a constante cosmológica e R o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ (veja o Apêndice A). Sob a transformação conforme, $g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma(x)}$, podemos encontrar as relações entre as quantidades construídas com a métrica original e as quantidades

construídas com a métrica transformada:

$$\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-g} e^{4\sigma(x)}, \quad \hat{R} = e^{-2\sigma(x)} [R - 6\Box\sigma(x) - 6\nabla_\mu\sigma(x)\nabla^\mu\sigma(x)]. \quad (1.2)$$

O símbolo ∇_μ denota derivação covariante no espaço de Riemann (veja a equação (3.1).

Substituindo (1.2) em (1.1), podemos obter, integrando por partes¹.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{6}{\kappa^2} e^{2\sigma} \nabla_\mu\sigma\nabla^\mu\sigma + \frac{1}{\kappa^2} e^{2\sigma} R + \frac{2}{\kappa^2} \Lambda e^{4\sigma} \right\}. \quad (1.3)$$

Fazendo

$$\varphi(x) = \sqrt{12/\kappa^2} \cdot e^{\sigma(x)}, \quad (1.4)$$

a ação (1.1) pode ser escrita do seguinte modo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi + \frac{1}{12} R\varphi^2 + \frac{\kappa^2}{72} \Lambda\varphi^4 \right\}. \quad (1.5)$$

Esta ação descreve a teoria conforme métrico-escalar, conformalmente equivalente à Relatividade Geral. A simetria

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\rho(x)}, \quad \varphi' = \varphi \cdot e^{-\rho(x)} \quad (1.6)$$

compensa o grau de liberdade adicional do campo escalar.

O cálculo das divergências da teoria (1.5) pode ser realizado usando as técnicas desenvolvidas em [38] e [121], no entanto, o seu grau de dificuldade o torna inviável. Ao invés desse cálculo direto, abordaremos a teoria de Einstein usando a seguinte parametrização conforme no contexto do Método do Campo de Fundo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma} [g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}], \quad (1.7)$$

¹Assumimos que a função $\sigma(x)$ possui limite assintótico nulo, assim como os outros campos, para que o procedimento de ignorar termos de superfície seja válido.

onde $h_{\mu\nu}$ and σ são campos quânticos e $g_{\mu\nu}$ é a métrica de *background*, que realiza todas as operações de levantamento e rebaixamento de índices. Do mesmo modo que a simetria por transformações gerais de coordenadas provoca degenerescência no operador bilinear correspondente à ação (*heat kernel*), este efeito também é causado pela simetria conforme. A razão disso é a semelhança entre a parametrização conforme e a transformação conforme. Pode-se afirmar que os campos quânticos, $h_{\mu\nu}$ e σ , possuem simetria conforme.

1.2 Parte bilinear da ação nos campos quânticos

Para o cálculo no nível de um *loop*, precisamos explicitar a parte bilinear da ação nos campos quânticos, representada a seguir

$$S^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \begin{pmatrix} h^{\mu\nu} & \sigma \end{pmatrix} \hat{H} \begin{pmatrix} h^{\alpha\beta} \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

O operador \hat{H} pode ser encontrado aplicando (1.7) em (1.1). Note que, sob a parametrização (1.7), podemos escrever

$$\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-g} e^{4\sigma}, \quad \hat{R} = e^{-2\sigma} [\bar{R} - 6\Box\sigma - 6\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma]. \quad (1.9)$$

onde

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \quad \bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\rho}h^\nu{}_\rho + \dots \quad (1.10)$$

$$\sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + O(h^3) \right), \quad (1.11)$$

e $h = g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$. A ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{6}{\kappa^2} e^{2\sigma} \bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma + \frac{1}{\kappa^2} e^{2\sigma} \bar{R} + \frac{2}{\kappa^2} \Lambda e^{4\sigma} \right\}, \quad (1.12)$$

deve ser expandida em termos dos campos de *background* e dos campos quânticos, para podermos extrair sua parte bilinear, \hat{H} . Os objetos com barra são construídos com a métrica efetiva, eq. (1.10).

Vamos omitir a constante de acoplamento nos cálculos procedentes. Por substituição, encontramos as partes bilineares dos seguintes termos:

$$[\sqrt{-\bar{g}} e^{2\sigma} \bar{\nabla}_\mu \sigma \bar{\nabla}^\mu \sigma]^{(2)} = \sqrt{-g} \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma, \quad (1.13)$$

$$[\sqrt{-\bar{g}} e^{4\sigma} \Lambda]^{(2)} = \sqrt{-g} \left(8\sigma^2 + 2h\sigma + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \right) \Lambda, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{-\bar{g}} e^{2\sigma} \bar{R}]^{(2)} &= 2\sigma^2 R + \left(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \right) R + h\sigma R + \\ &+ \frac{1}{2}R^{(1)} + 2\sigma R^{(1)} + R^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde R , $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ são os termos da expansão do escalar \bar{R} em contribuições de, respectivamente, ordem zero, primeira e segunda ordem nos campos quânticos $h_{\mu\nu}$. Substituindo (1.13), (1.14) e (1.15) na ação (1.12), obtemos

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ 6\nabla_\nu \sigma \nabla^\nu \sigma + 16\Lambda\sigma^2 + 4\Lambda\sigma h + \frac{1}{4}\Lambda h^2 - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \Lambda + \right. \\ &+ \left. 2\sigma^2 R + \frac{1}{8}h^2 R - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} R + h\sigma R + 2\sigma R^{(1)} + \frac{1}{2}h R^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Para quebrar a degenerescência provocada pela simetria de *gauge*, é preciso introduzir a ação da fixação de *gauge*,

$$S_{GF} = -\frac{1}{\alpha} \int d^4x \sqrt{-g} \chi_\mu \chi^\mu, \quad (1.17)$$

onde

$$\chi_\mu = H_\mu - \gamma \nabla_\mu \sigma \quad \text{e} \quad H_\mu = \nabla_\alpha h^\alpha{}_\mu + \beta \nabla_\mu h, \quad (1.18)$$

e α , β e γ são os parâmetros de *gauge*. A fixação de *gauge* correspondente à Relatividade Geral (sem simetria conforme) é recuperada ao assumirmos $\gamma = 0$. A parte bilinear de

S_{GF} nos campos quânticos é achada através de substituição direta e algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned}
S_{GF}^{(2)} &= \frac{1}{\alpha} \int d^4x \sqrt{-g} \{ h^{\mu\nu} (g_{\nu\beta} \nabla_\mu \nabla_\alpha + \beta g_{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu + \beta g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta + \\
&+ \beta^2 g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \square) h^{\alpha\beta} + 2\gamma \nabla_\mu \sigma \nabla_\alpha h^{\alpha\mu} + 2\gamma \beta \nabla_\mu h \nabla^\mu \sigma \\
&- \gamma^2 \nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma \}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Para escrever a expressão explícita da ação (1.16), é necessário obter

$$R^{(1)} = \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \square h - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
R^{(2)} &= -h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\alpha h^\alpha_\nu - h^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu h^\alpha_\nu + h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + \\
&+ h^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu h - \frac{1}{4} \nabla_\mu h \nabla^\mu h - \nabla_\mu h^{\mu\nu} \nabla_\alpha h^\alpha_\nu + \nabla^\mu h \nabla^\nu h_{\mu\nu} + \\
&+ \frac{3}{4} \nabla_\alpha h^{\mu\nu} \nabla^\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\mu h_{\alpha\beta} \nabla^\beta h^\alpha_\mu + h^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu R_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Para que o operador bilinear seja mínimo², a escolha conveniente para os parâmetros de *gauge* é $\alpha = 2$, $\beta = -1/2$ e $\gamma = 2$. Podemos obter, substituindo (1.20) e (1.21) na soma de (1.16) com (1.19),

$$\begin{aligned}
S^{(2)} + S_{GF}^{(2)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ h^{\mu\nu} [K_{\mu\nu, \alpha\beta} (\square - 2\Lambda) + M_{\mu\nu, \alpha\beta}] h^{\alpha\beta} + \\
&+ \sigma (-4\square + 2R + 16\Lambda) \sigma + h^{\mu\nu} (-g_{\mu\nu} \square - 2R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R + 4\Lambda g_{\mu\nu}) \sigma \},
\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde

$$K_{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{4} \left(\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \right) \tag{1.23}$$

e

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu, \alpha\beta} &= -\frac{1}{4} \delta_{\mu\nu, \alpha\beta} R + \frac{1}{8} (g_{\nu\alpha} R_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha} R_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} R_{\nu\alpha} + g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha}) - \\
&- \frac{1}{4} (g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}) + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} R + \\
&+ \frac{1}{8} (R_{\mu\alpha\nu\beta} + R_{\nu\alpha\mu\beta} + R_{\nu\beta\mu\alpha} + R_{\mu\beta\nu\alpha}),
\end{aligned} \tag{1.24}$$

²Quando sua contribuição de segunda ordem nas derivadas é proporcional a \square

onde utilizamos a notação padrão, $\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$, para o operador identidade no espaço dos tensores de segunda ordem simétricos. Esse operador é equivalente ao projetor no espaço dos tensores simétricos.

Por conveniência, vamos separar o campo $h_{\mu\nu}$ no seu traço e na sua componente sem traço: $h_{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}h$. Assim, a ação bilinear pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} S^{(2)} + S_{GF}^{(2)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \bar{h}^{\mu\nu} \left[\frac{1}{4} \bar{\delta}_{\mu\nu, \alpha\beta} (\square - 2\Lambda) + M_{\mu\nu, \alpha\beta} \right] \bar{h}^{\alpha\beta} + \right. \\ &+ \bar{h}^{\mu\nu} [-2R_{\mu\nu}] \sigma + h \left[-\frac{1}{16} \square + \frac{1}{8} \Lambda \right] h + \\ &+ \left. h \left[-\square + \frac{1}{2} R + 4\Lambda \right] \sigma + \sigma [-4\square + 2R + 16\Lambda] \sigma \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Note que

$$\bar{\delta}_{\mu\nu, \alpha\beta} = \delta_{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}$$

é o projetor no espaço dos tensores simétricos e sem traço, ou, equivalentemente, o operador identidade nesse espaço.

1.3 Cálculo das divergências a um *loop*

A expressão (1.25) possui degenerescência nos setores dos campos σ e h , que pode ser removida através da fixação da *gauge* conforme $\sigma = \lambda h$, onde λ é o parâmetro da fixação da *gauge* correspondente. Obtemos então

$$\begin{aligned} S^{(2)} + S_{GF}^{(2)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \bar{h}^{\mu\nu} \left[\frac{1}{4} \bar{\delta}_{\mu\nu, \alpha\beta} (\square - 2\Lambda) + M_{\mu\nu, \alpha\beta} \right] \bar{h}^{\alpha\beta} + \right. \\ &+ \left. \bar{h}^{\mu\nu} [-2\lambda R_{\mu\nu}] h + h [b_1 \square + 2b_2 \Lambda + b_3 R] h \right\} \end{aligned} \quad (1.26)$$

onde

$$b_1 = -\frac{1}{16} - \lambda - 4\lambda^2; \quad b_2 = \frac{1}{16} + 2\lambda + 8\lambda^2; \quad b_3 = \frac{1}{2}\lambda + 2\lambda^2. \quad (1.27)$$

Método de Schwinger-DeWitt

A técnica da expansão de Schwinger-DeWitt [47] é útil para o cálculo da parte divergente da ação efetiva a um *loop*, $\Gamma^{(1)}$. Veja também [7, 38, 72, 122]. A ação efetiva a um *loop* é dada pela expressão padrão

$$\Gamma^{(1)} = \epsilon \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} \right\} \Big|_{\Phi=0} = \epsilon \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \hat{H} \right\} \quad (1.28)$$

onde $\epsilon = +1$ para campos bosônicos e $\epsilon = -1$ para campos fermiônicos e sTr (que será utilizado ao longo da tese) designa a generalização do traço, Tr , para matrizes com setores fermiônicos, bosônicos e mistos. Em (1.28), Φ representa um conjunto arbitrário de quaisquer campos (gravitacional, vetorial, fermiônico, etc). As letras i e j representam os índices relativísticos e internos, bem como a dependência das coordenadas. Como exemplo, $i \rightarrow (\mu\nu, x)$ e $j \rightarrow (\alpha\beta, y)$ para a gravitação. A operação Tr indica traço sobre os índices internos e relativísticos (discretos) e integração em $x = y$.

Na teoria em consideração, as divergências podem ser calculadas usando o algoritmo de Schwinger-DeWitt [47] para o operador $\hat{\mathbf{1}}\square + \hat{R}_\mu \nabla^\mu + \hat{\Pi}$, que atua no espaço dos campos correspondentes, de acordo com a equação (3.40), apresentada no Capítulo 3.

Podemos multiplicar o operador \hat{H} por um operador constante, de modo que o produto tenha a forma $\hat{C} \cdot \hat{H} = \hat{\mathbf{1}}\square + \hat{P}$. Como as divergências de $\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \hat{C} \cdot \hat{H} \right\}$ diferem das divergências correspondentes ao operador original por um fator global constante, podemos redefinir \hat{H} de acordo com $\hat{H} \rightarrow \hat{C} \cdot \hat{H}$:

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{1}}\square + \hat{P} \quad (1.29)$$

e conseqüentemente, considerando o operador \hat{H} correspondente a (1.26),

$$\hat{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu, \alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \bar{\delta}_{\mu\nu, \alpha\beta}(-2\Lambda - \frac{5}{6}R) + 2g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta} & -4\lambda\bar{R}_{\mu\nu} \\ -\frac{\lambda}{b_1}\bar{R}_{\alpha\beta} & \frac{b_2}{b_1}\Lambda + \frac{b_3}{b_1}R + \frac{1}{6}R \end{pmatrix},$$

onde levamos em conta as propriedades de simetria que a operação de tomar o traço possui. Assim, ao invés de escrevermos, por exemplo, $g_{\nu\alpha}R_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha}R_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}R_{\nu\alpha} + g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha}$, simplificamos os cálculos escrevendo $4g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha}$. Vamos determinar o traço de $\hat{P} \cdot \hat{P}$. Sejam

$$k_1 = \bar{\delta}_{\mu\nu, \alpha\beta}; \quad k_2 = g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha}; \quad k_3 = R_{\mu\alpha\nu\beta}.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{P} \cdot \hat{P} &= \left(2\Lambda + \frac{5}{6}\right)^2 \text{tr } k_1 k_1 + 4 \text{tr } k_2 k_2 + 4 \text{tr } k_3 k_3 + \\ &- \left(8\Lambda + \frac{10}{3}R\right) (\text{tr } k_1 k_2 + \text{tr } k_1 k_3) + 8 \text{tr } k_2 k_3 + \\ &+ \frac{8\lambda^2}{b_1} R_{\mu\nu} \bar{\delta}^{\mu\nu, \alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \left[\frac{b_2}{b_1}\Lambda + \frac{b_3}{b_1}R + \frac{1}{6}R\right]^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

E ainda,

$$\begin{aligned} \text{tr } k_1 k_1 &= 9 \quad \text{tr } k_2 k_2 = R_{\mu\nu}^2 + \frac{5}{16}R^2, \quad \text{tr } k_3 k_3 = \frac{3}{4}R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16}R^2, \\ \text{tr } k_1 k_2 &= \frac{9}{4}R, \quad \text{tr } k_1 k_3 = -\frac{3}{4}R, \quad \text{tr } k_2 k_3 = -R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{16}R^2, \end{aligned}$$

onde os traços foram calculados da seguinte maneira: Sejam $A_{\mu\nu, \alpha\beta}$ e $B_{\mu\nu, \alpha\beta}$ duas matrizes pertencentes ao espaço dos operadores que atuam no campo $\bar{h}_{\rho\lambda}$. Então

$$\text{tr } A B = \bar{\delta}^{\mu\nu, \rho\lambda} A_{\rho\lambda, \sigma\tau} \bar{\delta}^{\sigma\tau, \alpha\beta} B_{\mu\nu, \alpha\beta}.$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \text{tr } (\hat{P} \cdot \hat{P}) &= \left[\frac{13}{4} - \frac{2\lambda^2}{b_1} + \left(\frac{b_3}{b_1} + \frac{1}{6}\right)^2\right] R^2 + \left[18 + \frac{2b_2 b_3}{b_1^2} + \frac{b_2}{3b_1}\right] \Lambda R + \\ &+ \left[36 + \frac{b_2^2}{b_1^2}\right] \Lambda^2 + \left[\frac{8\lambda^2}{b_1} - 6\right] R_{\mu\nu}^2 + 3R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Para o cálculo de $\text{tr}(\hat{\mathcal{S}}_{\alpha\beta} \cdot \hat{\mathcal{S}}^{\alpha\beta})$, pode-se mostrar que, ao atuar sobre os campos,

$$(\hat{\mathcal{S}}_{\lambda\tau})_{\mu\nu, \alpha\beta} = (\hat{1})_{\mu\nu, \alpha\beta} (\nabla_\tau \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\tau) = \begin{pmatrix} 2R_{\mu\beta\tau\lambda} g_{\nu\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e conseqüentemente,

$$\text{tr}(\hat{\mathcal{S}}_{\alpha\beta} \cdot \hat{\mathcal{S}}^{\alpha\beta}) = -6R_{\mu\nu\alpha\beta}^2,$$

que coincide com o resultado correspondente ao caso da teoria de Einstein. Sabendo que

$$\text{tr} \left(\frac{1}{180} [R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2] \right) = \frac{1}{18} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{1}{18} R_{\mu\nu}^2$$

podemos finalmente exibir a expressão para $\Gamma_{\text{div}}^{(1)}$ correspondente a (1.26):

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}|_{\text{div}} &= -\frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{19}{18} R_{\rho\lambda\sigma\tau}^2 + \left(\frac{4\lambda^2}{b_1} - \frac{55}{18} \right) R_{\rho\lambda}^2 + \right. \\ &+ \left(\frac{59}{36} - \frac{\lambda^2}{b_1} + \frac{b_3}{6b_1} + \frac{b_3^2}{2b_1^2} \right) R^2 + \left(\frac{2b_2b_3}{b_1^2} + \frac{b_2}{3b_1} + 9 \right) R\Lambda + \\ &\left. + \left(\frac{2b_2^2}{b_1^2} + 18 \right) \Lambda^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.32)$$

A expressão completa para as divergências a um *loop* deve incluir a contribuição da ação dos *ghosts*:

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}|_{\text{div}} - i \text{Tr} \ln \hat{M}|_{\text{div}} \quad (1.33)$$

O operador \hat{M} , correspondente à ação dos *ghosts*, pode ser encontrado através da equação

$$(\hat{M})_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} = \frac{\delta\chi_\mu}{\delta h_{\rho\lambda}} R_{\rho\lambda\nu}$$

onde $R_{\rho\lambda\nu}$ são os geradores da transformação de *gauge*

$$\delta h_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}{}^\rho \xi_\rho$$

com os quatro parâmetros ξ_ρ . Para os geradores, somente as simetrias dos campos clássicos são consideradas. Assim, podemos escrever

$$R_{\mu\nu}{}^\rho = -\delta_\nu^\rho \nabla_\mu - \delta_\mu^\rho \nabla_\nu.$$

Por substituição direta, podemos escrever a expressão para o operador \hat{M} :

$$M_{\mu}^{\nu} = -\delta_{\mu}^{\nu} \square - R_{\mu}^{\nu}. \quad (1.34)$$

O cálculo da contribuição dos *ghosts* produz o resultado padrão [13]

$$-iTr \ln \hat{M}|_{\text{div}} = \frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{11}{90} E + \frac{7}{15} R_{\mu\nu}^2 + \frac{17}{30} R^2 \right\}, \quad (1.35)$$

onde $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$. No espaço quadri-dimensional, a quantidade $\int d^4 x \sqrt{-g} E$ é um invariante topológico, chamado de termo de Gauss-Bonnet. Reunindo (1.35) e (1.26) na equação (1.33), obtemos

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ p_1(\lambda) E + p_2(\lambda) C^2 + p_3(\lambda) R^2 + p_4(\lambda) R\Lambda + p_5(\lambda) \Lambda^2 \right\} \quad (1.36)$$

onde C^2 é o quadrado do tensor de Weyl, $C^2 = E + 2(R_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} R^2)$,

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \frac{1}{180} \frac{149 + 2384\lambda + 15296\lambda^2}{(1 + 8\lambda)^2}, \\ p_2(\lambda) &= \frac{1}{20} \frac{7 + 112\lambda - 192\lambda^2}{(1 + 8\lambda)^2}, \\ p_3(\lambda) &= \frac{1}{12} \frac{3 + 80\lambda + 1152\lambda^2 + 6144\lambda^3 + 10240\lambda^4}{(1 + 8\lambda)^4}, \\ p_4(\lambda) &= \frac{2}{3} \frac{13 + 432\lambda + 5696\lambda^2 + 31744\lambda^3 + 63488\lambda^4}{(1 + 8\lambda)^4} \quad e \\ p_5(\lambda) &= 4 \frac{5 + 176\lambda + 2368\lambda^2 + 13312\lambda^3 + 26624\lambda^4}{(1 + 8\lambda)^4}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.4 Discussão dos resultados

No cálculo das divergências a um *loop* nós fixamos os parâmetros α , β e γ , mas deixamos o parâmetro conforme, λ , livre. Apesar da dependência complicada em λ na expressão (1.36), é possível analisar sua consistência. A imposição $\lambda = 0$ equivale à teoria de Einstein com constante cosmológica, e portanto seu uso em (1.36) deve reproduzir um resultado

conhecido. De fato, as divergências para $\lambda = 0$ são

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{2\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{120} R^2 + \frac{7}{20} R_{\mu\nu}^2 + \frac{53}{90} E + \frac{13}{3} R\Lambda + 10 \Lambda^2 \right\}. \quad (1.38)$$

Este resultado é conhecido na literatura, podendo ser encontrado em [13] e em [43] com constante cosmológica. Além disso, podemos verificar que as divergências (1.36) são independentes de λ no regime *on-shell* ($R_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\Lambda$):

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)\text{on-shell}} = -\frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{53}{45} E - \frac{58}{5} \Lambda^2 \right\}, \quad (1.39)$$

Assim, podemos ver que o procedimento de fixação de gauge $h_\mu^\mu = 0$ é consistente e não é a origem das discrepâncias entre os resultados de [24] e [37].

Capítulo 2

Ação Conforme Fermiônica com Derivadas Superiores

Neste capítulo, calcularemos as divergências a 1-loop para férmions livres sem massa com derivadas de terceira ordem. Inicialmente, mostraremos que a ação correspondente possui invariância conforme para um único conjunto de coeficientes do operador bilinear. Exibiremos também a anomalia conforme da teoria considerada.

2.1 Simetria conforme

No Apêndice B, mostramos que a ação de Dirac (sem massa) é invariante conforme local. Nesta seção, mostraremos que existe uma ação fermiônica com derivadas superiores que também possui simetria conforme local. Por simplicidade, consideraremos as transformações infinitesimais. Vamos considerar a seguinte ação (Hermiteana) para férmions sem massa:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \} , \quad (2.1)$$

onde

$$\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu \square + k_1 R_{\mu\nu} \nabla^\nu + k_2 R \nabla_\mu,$$

k_1 e k_2 são constantes reais arbitrárias e γ^μ as matrizes de Dirac. Integrando por partes e omitindo os termos de superfície, podemos escrever

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} i \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi \quad (2.2)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \square + \square \nabla_\mu) + k_1 R_{\mu\nu} \nabla^\nu + k_2 R \nabla_\mu + \left(\frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{2} \right) (\nabla_\mu R). \quad (2.3)$$

Podemos simplificar essa expressão fazendo

$$\frac{1}{2}(\nabla_\mu \square + \square \nabla_\mu) = \nabla_\mu \square + \frac{1}{2}[\square, \nabla_\mu] \quad (2.4)$$

O comutador $[\square, \nabla_\mu]$ pode ser determinado através de cálculos padrão:

$$\begin{aligned} [\square, \nabla_\mu] \psi &= [\nabla_\rho, \nabla_\mu] \nabla^\rho \psi + \nabla^\rho [\nabla_\rho, \nabla_\mu] \psi = \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\rho} \nabla^\rho \psi + R_{\mu\rho} \nabla^\rho \psi - \frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\beta (\nabla^\rho R_{\alpha\beta\mu\rho}) \psi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde usamos

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_\mu \Sigma_{ab} \psi, \quad \nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_\mu \bar{\psi} \Sigma_{ab},$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \psi = \frac{1}{4} \gamma^\alpha \gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu} \psi$$

Substituindo (2.5) em (2.3), e redefinindo os coeficientes, obtemos

$$\gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu = \gamma^\mu [\nabla_\mu \square + a_1 R_{\mu\rho} \nabla^\rho + a_2 R \nabla_\mu + a_3 (\nabla_\mu R)], \quad (2.6)$$

onde $a_1 = k_1$, $a_2 = k_2$ e o coeficiente a_3 deve satisfazer $a_3 = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} - \frac{1}{8}$ como condição de Hermiticidade. Observe que o operador \mathcal{D}_μ na ação (2.1) possui dois graus de liberdade (em relação aos seus coeficientes), enquanto o operador em (2.6) possui um grau a mais,

quebrando a Hermiticidade. Vamos proceder com o operador mais geral e posteriormente substituir os valores convenientes dos coeficientes.

Considere a transformação conforme infinitesimal local

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = (1 + 2\sigma)g_{\mu\nu}, \quad \psi \rightarrow \psi' = \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\psi \quad \text{e} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\bar{\psi}. \quad (2.7)$$

Vamos investigar se para determinados valores de a_1 , a_2 e a_3 a ação (2.2) é invariante conforme. Devemos determinar a lei de transformação para (2.2). Para tal, é conveniente exibir alguns cálculos intermediários. Embora nossa atenção esteja voltada para as transformações infinitesimais, o Apêndice B pode ser de grande utilidade. Da equação (B.11), que explicita a lei de transformação do termo $\nabla_\mu\psi$, podemos encontrar a lei correspondente para o caso em consideração (onde os espinores têm peso conformê diferente), desprezando potências de σ superiores a 1:

$$(\nabla_\mu\psi)' = \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\nabla_\mu\psi - \frac{1}{2}\nabla_\mu\sigma\psi - \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\alpha}\nabla^\alpha\sigma\psi. \quad (2.8)$$

Consequentemente,

$$(\nabla_\mu\bar{\psi})' = \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\nabla_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\sigma\bar{\psi} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Sigma_{\mu\alpha}\nabla^\alpha\sigma. \quad (2.9)$$

A quantidade $\nabla_\nu\psi$ possui um índice covariante e outro espinorial. Portanto, pode-se escrever que

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\psi = \partial_\mu\nabla_\nu\psi + \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_\mu\Sigma_{ab}\nabla_\nu\psi - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho\psi, \quad (2.10)$$

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\bar{\psi} = \partial_\mu\nabla_\nu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_\mu\nabla_\nu\bar{\psi}\Sigma_{ab} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho\bar{\psi}. \quad (2.11)$$

Veja os Apêndices A e B para consultar as definições de Σ_{ab} e $\omega^{ab}{}_\mu$. Usando (2.8) e (2.10), obtemos

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu\psi)' = \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - 3\nabla_{(\mu}\sigma\nabla_{\nu)}\psi + i\Sigma_{\rho(\mu}\nabla^\rho\sigma\nabla_{\nu)}\psi +$$

$$+g_{\mu\nu}\nabla^\rho\sigma\nabla_\rho\psi - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\psi - \frac{i}{2}\Sigma_{\nu\rho}\nabla_\mu\nabla^\rho\sigma\psi \quad (2.12)$$

As equações (2.8) e (2.12) são suficientes para o cálculo da lei de transformação da ação (2.2) submetida à transformação conforme infinitesimal (2.7). Podemos obter

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Box\psi)' &= -(\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Box\psi)' = \\ &= -(1-4\sigma)\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Box\psi - \nabla_\mu\sigma\bar{\psi}\gamma^\mu\Box\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\nu\psi + \\ &+ i\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Sigma_{\rho\nu}\nabla^\nu\sigma\nabla^\rho\psi + \frac{1}{2}\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Box\sigma\psi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^\mu R_{\mu\rho}\nabla^\rho\psi)' &= (1-4\sigma)\bar{\psi}\gamma^\mu R_{\mu\rho}\nabla^\rho\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu R_{\mu}{}^\nu\Sigma_{\nu\rho}\nabla^\rho\sigma\psi - \\ &- \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu R_{\mu\nu}\nabla^\nu\sigma\psi - 2\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\nu\psi - \\ &- \bar{\psi}\gamma^\mu\Box\sigma\nabla_\mu\psi, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu R\nabla_\mu\psi)' = (1-4\sigma)\bar{\psi}\gamma^\mu R\nabla_\mu\psi - 6\bar{\psi}\gamma^\mu\Box\sigma\nabla_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu R\nabla_\mu\sigma\psi, \quad (2.15)$$

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu R\psi)' = (1-4\sigma)\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu R\psi - 2\bar{\psi}\gamma^\mu R\nabla_\mu\sigma\psi - 6\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Box\sigma\psi. \quad (2.16)$$

Substituindo esses resultados na ação (2.2), e usando as identidades

$$\begin{aligned} i\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Sigma_{\rho\nu}\nabla^\nu\sigma\nabla^\rho\psi &= -\frac{1}{4}\bar{\psi}R\gamma^\mu\nabla_\mu\sigma\psi + \Box\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\sigma\psi - \\ &- \nabla_\rho\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla^\rho\sigma\psi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$-\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\nu\psi = \nabla_\rho\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla^\rho\sigma\psi + \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\Box\sigma\psi \quad (2.18)$$

e

$$-\frac{i}{2}a_1\bar{\psi}\gamma^\mu R_{\mu}{}^\nu\Sigma_{\nu\rho}\nabla^\rho\sigma\psi = \frac{a_1}{2}\bar{\psi}R\gamma^\mu\nabla_\mu\sigma\psi - \frac{a_1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu R_{\mu\nu}\nabla^\nu\sigma\psi, \quad (2.19)$$

encontramos, omitindo alguns cálculos adicionais,

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\tilde{\mathcal{D}}_\mu\psi)' = (1-4\sigma)\bar{\psi}\gamma^\mu\tilde{\mathcal{D}}_\mu\psi + \left[-\frac{1}{4} + \frac{a_1}{2} + a_2 - 2a_3\right]\bar{\psi}R\gamma^\mu\nabla_\mu\sigma\psi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{3}{2} - a_1 + 6a_3 \right] \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \square \sigma \psi + [-6a_2 - 2a_1 + 6a_3] \bar{\psi} \gamma^\mu \square \sigma \nabla_\mu \psi + \\
& + [a_1 - 1] \nabla_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla^\nu \nabla_\mu \sigma \psi + [-a_1 + 1] \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla^\nu \nabla_\mu \sigma \nabla_\nu \psi.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Uma inspeção em (2.20) revela que a condição de simetria conforme

$$(\sqrt{-g} \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi)' = \sqrt{-g} \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi \tag{2.21}$$

só é satisfeita para o operador (2.6) para o conjunto único de coeficientes

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{5}{12} \quad \text{e} \quad a_3 = -\frac{1}{12}. \tag{2.22}$$

2.2 Cálculo das divergências

A ação efetiva a 1-loop para a teoria considerada é

$$\Gamma^{(1)} = -i \text{Tr} \ln(\gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu) = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln(\gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \gamma^\nu \tilde{\mathcal{D}}_\nu). \tag{2.23}$$

É conveniente escrever o termo de maior ordem nas derivadas na forma mínima, \square^n .

Fazemos

$$\gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \gamma^\nu \tilde{\mathcal{D}}_\nu = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \tilde{\mathcal{D}}^\mu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu [\tilde{\mathcal{D}}_\mu, \tilde{\mathcal{D}}_\nu]. \tag{2.24}$$

Depois de longos cálculos, pode-se chegar aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma^\nu [\tilde{\mathcal{D}}_\mu, \tilde{\mathcal{D}}_\nu] &= \frac{1}{8} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu R_{\alpha\beta\rho\lambda} R_{\mu\nu}{}^{\rho\lambda} \square - 2\gamma^\mu \gamma^\nu R_{\nu\rho} \nabla_\mu \nabla^\rho \square - \\
&- \frac{1}{2} \square R \square - \frac{1}{2} R \square^2 + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] R_{\nu\rho} \nabla_\mu \nabla^\rho \square + \\
&+ a_1 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \left(-R_{\alpha\beta\sigma\rho} R^\sigma{}_{[\nu} \nabla_{\mu]} \nabla^\rho + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta[\mu}{}^\sigma R_{\nu]\sigma} \square \right) + \\
&+ a_2 R^2 \square - 2a_2 \gamma^\mu \gamma^\nu R R_{\nu\rho} \nabla_\mu \nabla^\rho + \dots
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \tilde{\mathcal{D}}^\mu = \square^3 + (2a_1 + 1) R_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \square - \frac{1}{16} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\sigma R_{\alpha\beta\mu\rho} R_{\lambda\sigma}{}^{\mu\rho} \square +$$

$$\begin{aligned}
& + a_1 \square R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + 2a_1 \nabla_\mu \nabla_\rho R^{\mu\sigma} \nabla^\rho \nabla_\sigma + \\
& + (a_1 + a_1^2) R^{\mu\sigma} R_{\sigma\rho} \nabla_\mu \nabla^\rho + (a_2 + a_3) \square R \square + \\
& + 2(a_2 + a_3) \nabla_\mu \nabla_\nu R \nabla^\mu \nabla^\nu + (a_2 + 2a_1 a_2) R R_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu + \\
& + 2a_2 R \square^2 + a_2^2 R^2 \square + \dots, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

onde termos do tipo $\hat{Q}^{\mu\nu\alpha} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha$, $\hat{N}^\mu \nabla_\mu$ e \hat{P} foram omitidos por não contribuírem para as divergências. Isso pode ser verificado pela análise dimensional dos seus traços. O operador que estamos interessados é, portanto,

$$\gamma^\mu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \gamma^\nu \tilde{\mathcal{D}}_\nu = \square^3 + \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \square + \hat{U}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \dots = \hat{H}, \tag{2.27}$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{V}^{\mu\nu} &= 2a_1 R^{\mu\nu} + (2a_2 - \frac{1}{4}) R g^{\mu\nu} \tag{2.28} \\
\hat{U}^{\mu\nu} &= a_1 \square R^{\mu\nu} + 2a_1 \nabla_\rho \nabla^\mu R^{\rho\nu} + (a_2 + a_3 - \frac{1}{4}) g^{\mu\nu} \square R + \\
& + (a_1^2 + a_1) R^\mu{}_\rho R^{\rho\nu} + 2(a_2 + a_3) \nabla^\mu \nabla^\nu R + (2a_1 a_2 + a_2) R R^{\mu\nu} + \\
& + (a_1^2 - \frac{a_2}{2}) g^{\mu\nu} R^2 - \frac{1}{2} a_1 \gamma^{[\mu} \gamma^{\rho]} \gamma^\alpha \gamma^\beta R_{\alpha\beta}{}^{\sigma\nu} R_{\sigma\rho} - \frac{a_1}{2} R_{\alpha\beta}^2 g^{\mu\nu} - \\
& - a_2 \gamma^\mu \gamma^\rho R_{\rho}{}^\nu R. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Sabemos que as simetrias de gauge em geral exigem a inclusão da ação de fixação de gauge e conseqüentemente a contribuição dos ghosts, porém, a simetria conforme na ação considerada não constitui uma invariância de gauge no nível quântico, pois a métrica é um campo de background que não está submetido à quantização.

Para o cálculo das divergências correspondentes ao operador (2.27), é necessário utilizarmos a generalização do método de Schwinger-DeWitt [47] proposta por Barvinsky e Vilkovisky [38]. Podemos escrever

$$-\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \square^3 - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} \frac{1}{\square^3}, \tag{2.30}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\ln \hat{H} \frac{1}{\square^3} &= \ln \left\{ \hat{1} + \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} + \hat{U}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^3} \right\} = \\
&= \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} + \hat{U}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^3} - \\
&- \frac{1}{2} \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} \hat{V}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{\square^2} + \dots
\end{aligned}$$

onde os termos restantes da série não contribuem para as divergências. Usando essas expressões em (2.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{div}}^{(1)} &= -\frac{3i}{2} \text{Tr} \ln \square|_{\text{div}} - \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} \right\}_{\text{div}} - \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{U}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^3} \right\}_{\text{div}} + \\
&+ \frac{i}{4} \text{Tr} \left\{ \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} \hat{V}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{\square^2} \right\}_{\text{div}}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Usando os traços universais (veja [38])

$$\begin{aligned}
&-\frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} \right\}_{\text{div}} = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} \left\{ \hat{V}^{\mu\nu} \left(\frac{1}{6} R_{\mu\nu} - \frac{1}{12} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \hat{V}^{\mu\nu} \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \right\} \\
&-\frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{U}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^3} \right\}_{\text{div}} = -\frac{1}{4\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} g_{\mu\nu} \hat{U}^{\mu\nu} \\
\frac{i}{4} \text{Tr} \left\{ \hat{V}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{1}{\square^2} \hat{V}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{\square^2} \right\}_{\text{div}} &= \frac{i}{4} \text{Tr} \left\{ \hat{V}^{\mu\nu} \hat{V}^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{\square^4} \right\}_{\text{div}} = \\
&= \frac{1}{48\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} \hat{V}^{\mu\nu} \hat{V}^{\alpha\beta} g_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

onde $g_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}$ e $\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \hat{1}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$, juntamente com o resultado padrão

$$-\frac{3i}{2} \text{Tr} \ln \square|_{\text{div}} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{7}{120} R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{15} R^2_{\mu\nu} - \frac{1}{6} R^2 - \frac{2}{5} \square R \right\}, \quad (2.33)$$

podemos encontrar, levando em consideração as contribuições superficiais¹

$$\text{tr} \left\{ \frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu \hat{V}^{\mu\nu} + \frac{1}{12} \square \hat{V}^\mu{}_\mu \right\}, \quad (2.34)$$

¹As contribuições superficiais, no método generalizado de Schwinger-DeWitt, são omitidas no artigo de revisão [38] e consideradas na ref. [24].

a seguinte expressão para as divergências:

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \alpha R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \beta R_{\mu\nu}^2 + \gamma R^2 + \delta \square R \right\}, \quad (2.35)$$

onde

$$\alpha = \frac{7}{120}, \quad \beta = \frac{1}{3}a_1^2 - \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{15}, \quad (2.36)$$

$$\gamma = -\frac{1}{3}a_1^2 - 4a_2^2 - 2a_1a_2 - \frac{1}{6}a_1 - \frac{4}{3}a_2 - \frac{1}{8}, \quad (2.37)$$

$$\delta = \frac{2}{3}a_2 + 6a_3 - \frac{11}{15}. \quad (2.38)$$

Podemos expressar este resultado em termos do quadrado do tensor de Weyl, $C^2 = C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{3}R^2$, do termo topológico, $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$, e do escalar de curvatura, R^2 . Atualizando os valores dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 , que satisfazem a simetria conforme, o termo proporcional a R^2 se anula e obtemos as divergências a 1-loop da teoria (2.2) para as condições (2.22):

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{60}C^2 + \frac{3}{40}E - \frac{68}{45}\square R \right\}. \quad (2.39)$$

2.3 Discussão e o cálculo da anomalia conforme

Obtemos as divergências a 1-loop para a teoria geral (2.6), e mostramos que para determinados valores dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 , a teoria é conformalmente invariante, bem como seus contratermos. Convém notar que a ação (2.1) é um caso particular da teoria (2.6), onde o Lagrangeano não é Hermiteano.

Duas propriedades podem ser enunciadas a partir da análise dos resultados. Primeiramente, os coeficientes a_1 e a_2 devem obedecer a duas equações lineares independentes como condição de invariância conforme. Portanto, somente um operador (2.22) é conformalmente simétrico. A segunda propriedade é a existência de uma classe de infinitos operadores (todos sem simetria conforme e associados a uma ação não-Hermiteana) que

geram exatamente as mesmas divergências conformes (2.39) com exceção do coeficiente de $\square R$. Isso pode ser verificado pela inspeção de (2.38).

O cálculo da anomalia conforme² possui uma relevância especial por ser uma quantidade que traz consigo efeitos puramente quânticos. Uma dificuldade que aparece no cálculo da anomalia conforme é o aparecimento de termos não-conformes na ação dos contratermos para teorias com spins elevados, como por exemplo, a gravitação quântica (veja [24]). Nesse caso, a definição da anomalia conforme é ambígua. Na teoria conforme (2.1), calculamos as divergências que preservam a simetria e assim podemos calcular a anomalia conforme correspondente. A anomalia conforme é definida por

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.40)$$

A ação efetiva não-renormalizada ($\Gamma^{(1)} = \Gamma_{\text{ren}}^{(1)} - \Delta S$) é formulada sempre em quatro dimensões, devendo ser conformalmente simétrica, satisfazendo

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad (2.41)$$

Desta forma,

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Delta S}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2.42)$$

onde ΔS são os contratermos. Considere a decomposição $g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma(x)}$, onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ tem um grau de liberdade a menos (carregado por $\sigma(x)$). O determinante de $\bar{g}_{\mu\nu}$ é fixo por

$$\det||\bar{g}_{\mu\nu}|| = e^{-8\sigma} \det||g_{\mu\nu}||. \quad (2.43)$$

Podemos escrever

$$\frac{\delta}{\delta \sigma} = \frac{\delta g_{\rho\lambda}}{\delta \sigma} \frac{\delta}{\delta g_{\rho\lambda}} = 2g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.44)$$

²Consulte a ref. [122] para uma introdução ao tema.

Vamos escrever os contratermos típicos de uma teoria conforme,

$$\Delta S = \frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \{ \omega C^2 + bE + c\Box R \} , \quad (2.45)$$

em termos das variáveis $\bar{g}_{\mu\nu}$ e σ :

$$\Delta S = \frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} e^{2(n-4)\sigma} \{ \omega \bar{C}^2 + b(\bar{E} + \dots) + c(\Box \bar{R} + \dots) \} , \quad (2.46)$$

onde os termos omitidos são funcionais das derivadas de σ [7, 61]. Usando (2.44) em (2.42), e expandindo a exponencial em potências de $(n-4)\sigma$, obtemos, da única contribuição relevante (termo linear em $(n-4)\sigma$),

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Delta S}{\delta \sigma} = -\frac{1}{(4\pi)^2} (\omega C^2 + bE + c\Box R) . \quad (2.47)$$

Assim, os coeficientes da anomalia conforme são os mesmos coeficientes das divergências a 1-loop da ação do vácuo. A anomalia conforme associada às teorias conformes tem a forma geral (2.47) que corresponde às divergências (2.45), sendo $\omega > 0$ e $b < 0$ para teorias com spins 0, $\frac{1}{2}$ e 1, e $\omega < 0$ e $b > 0$ para a ação do campo escalar com derivadas quárticas

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \varphi \Delta \varphi \quad (2.48)$$

onde Δ é o operador conforme descoberto por Riegert [61]:

$$\Delta = \Box^2 - 2R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{2}{3} R \Box - \frac{1}{3} \nabla^\mu R \nabla_\mu . \quad (2.49)$$

Podemos constatar que a anomalia conforme da teoria (2.1) é tal que $\omega < 0$ e $b > 0$. Deste modo, é natural supor que a introdução de campos com derivadas superiores nas teorias convencionais (vetoriais, escalares e fermiônicos) pode proporcionar o cancelamento da anomalia conforme, devido à sua contribuição com sinal oposto. Isto pode ser verificado, conforme considerações a seguir.

Suponha uma teoria com N_0 escalares reais sem massa invariante conforme, $N_{1/2}$ espinores de Dirac e N_1 vetores Abelianos sem massa. Considere ainda n_4 campos escalares reais com derivadas superiores (2.48) e n_3 espinores com derivadas superiores (2.1). A expressão da anomalia resultante é (2.47), com os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}\omega_t &= \left(\frac{1}{120} N_0 + \frac{1}{20} N_{1/2} + \frac{1}{10} N_1 \right) - \left(\frac{1}{15} n_4 + \frac{1}{60} n_3 \right), \\ b_t &= - \left(\frac{1}{360} N_0 + \frac{11}{360} N_{1/2} + \frac{31}{180} N_1 \right) + \left(\frac{7}{90} n_4 + \frac{3}{40} n_3 \right), \\ c_t &= \frac{N_0}{180} + \frac{N_{1/2}}{30} - \frac{N_1}{10} - \frac{2}{45} n_4 - \frac{68}{45} n_3.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Para obter as condições de cancelamento de anomalia, basta anularmos os coeficientes ω_t e b_t , pois c_t pode sempre ser cancelado pela introdução do contratermo finito [31]

$$\Delta S_c = \frac{c_t}{12(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g} R^2.\tag{2.51}$$

Assim, a solução para $\omega_t = 0$ e $b_t = 0$ é

$$n_3 = N_1 - \frac{1}{2} N_{1/2} - \frac{1}{8} N_0, \quad n_4 = \frac{5}{4} N_1 + \frac{7}{8} N_{1/2} + \frac{5}{32} N_0.\tag{2.52}$$

Embora o cancelamento seja possível, algumas restrições devem ser impostas: n_3 e n_4 devem ser inteiros, $N_0 + 4N_{1/2} \leq 8N_1$, e N_0 , $N_{1/2}$ e N_1 devem ser múltiplos de, respectivamente, 32, 8 e 4.

A relação entre a ação (2.1) e a ação de Dirac é semelhante à relação entre o campo escalar de quarta ordem (2.48) e o campo escalar usual de segunda ordem conforme. Podemos sugerir a seguinte conjectura: Estas ações representam as primeiras de uma família de infinitas ações conformalmente invariantes com um número par (para escalares) e ímpar (para espinores) de derivadas em $n = 4$ dimensões.

Capítulo 3

Introdução às Teorias com Torção

Neste capítulo, propomos uma breve introdução aos aspectos clássicos da torção. Também, como investigar uma ação para a torção dinâmica, considerando, para isto, alguns trabalhos na literatura e cálculos a 1-loop.

3.1 A torção como objeto clássico

Para textos mais completos sobre a torção clássica, consulte [86, 87, 117], bem como suas listas de referências. O acoplamento da matéria à geometria do espaço-tempo, no esquema mínimo, é efetivado pela derivada covariante, definida pela equação

$$\nabla_{\beta} A^{\alpha} = \partial_{\beta} A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} A^{\gamma}, \quad (3.1)$$

para vetores contravariantes, onde $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ é a conexão afim, que carrega quantidades da geometria. Para definir a derivada covariante para outros campos tensoriais, basta considerarmos que o produto $\phi = A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} B^{\mu_1} B^{\mu_2} \dots B^{\mu_n}$ é um escalar, e levar em conta $\nabla_{\nu}\phi = \partial_{\nu}\phi$. Analogamente às teorias de gauge, a derivada covariante é definida de modo a preservar a invariância de gauge da teoria, que é a invariância por transformações gerais de coordenadas. Pode-se definir outro objeto geométrico, o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, que define

o intervalo (distância) entre dois pontos infinitesimalmente separados. A métrica leva um vetor contravariante no seu dual, covariante, que é representado com o índice rebaixado. Numa linguagem simplificada, a métrica levanta e rebaixa os índices.

Na Relatividade Geral, a estrutura afim do espaço-tempo é determinada pela estrutura métrica supondo duas condições: a simetria $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ e a condição de metricidade, $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$. Estas condições asseguram a solução mais simples para a conexão, dada unicamente em termos da métrica,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \{\beta^\alpha_\gamma\}, \quad (3.2)$$

onde o segundo membro da equação é o símbolo de Christoffel,

$$\{\beta^\alpha_\gamma\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\gamma g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\gamma} - \partial_\rho g_{\beta\gamma}).$$

Podemos, num ponto específico, $x_0^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, fazer $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Desse modo, a conexão (3.1) não exerce efeito físico local. De fato, de acordo com o Princípio de Equivalência, não há como detectar o campo gravitacional localmente.

Qual é o efeito da torção na geometria? Ao abirmos mão da simetria da conexão afim, podemos definir a torção como sua parte antissimétrica,

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} = T^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0. \quad (3.3)$$

Desta vez, a condição de metricidade $\tilde{\nabla}_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ não vincula todos os graus de liberdade da conexão com a métrica. Os graus de liberdade independentes da métrica são os graus associados à torção. Da condição de metricidade, podemos extrair

$$\tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} + K^\nu_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

onde $K^\nu_{\alpha\beta}$ é a contorção, dada por

$$K^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^\nu_{\alpha\beta} - T^\nu_{\beta\alpha} - T^\nu_{\alpha\beta}). \quad (3.5)$$

Localmente, embora possamos anular as componentes da conexão Riemanniana $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, o efeito da contorção permanece inalterado. Assim, contrariando o Princípio de Equivalência, a torção exerce influência local, diferentemente da gravitação métrica.

3.2 Interação da matéria com a torção de fundo

Na Relatividade Geral, o comutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ é nulo quanto atua sobre o campo escalar.

Na presença de torção, no entanto, pode-se obter

$$\left[\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta \right] \varphi = T^\lambda_{\alpha\beta} \partial_\lambda \varphi, \quad (3.6)$$

É conveniente decompor a torção nas suas componentes irredutíveis:

$$T_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3} (T_\beta g_{\alpha\mu} - T_\mu g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^\nu + q_{\alpha\beta\mu}, \quad (3.7)$$

onde $q_{\alpha\beta\mu}$ satisfaz $q^\alpha_{\beta\alpha} = 0$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha\beta\mu} = 0$.

Em geral, considera-se acoplamentos não-mínimos para o campo escalar real (veja [117]). A ação livre, com cinco parâmetros não-mínimos, $\xi_1 \dots \xi_5$, é

$$S_0 = \int d^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \xi_i P_i \varphi^2 \right\}. \quad (3.8)$$

onde

$$P_1 = R, \quad P_2 = \nabla_\alpha T^\alpha, \quad P_3 = T_\alpha T^\alpha, \quad P_4 = S_\alpha S^\alpha, \quad P_5 = q_{\alpha\beta\gamma} q^{\alpha\beta\gamma}. \quad (3.9)$$

Para campos vetoriais, o comutador é

$$\left[\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta \right] A^\lambda = T^\tau_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\tau A^\lambda + \tilde{R}^\lambda_{\tau\alpha\beta} A^\tau, \quad (3.10)$$

onde $\tilde{R}^\lambda_{\tau\alpha\beta}$ é o tensor de curvatura incluindo torção:

$$\tilde{R}^\lambda_{\tau\alpha\beta} = \partial_\alpha \tilde{\Gamma}^\lambda_{\tau\beta} - \partial_\beta \tilde{\Gamma}^\lambda_{\tau\alpha} + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\gamma\alpha} \tilde{\Gamma}^\gamma_{\tau\beta} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\gamma\beta} \tilde{\Gamma}^\gamma_{\tau\alpha}. \quad (3.11)$$

Embora seja padrão o fato do campo vetorial não interagir com a torção, podemos encontrar em [100] uma investigação que defende outro ponto de vista.

3.2.1 Torção no espaço de Riemann-Cartan

Vamos considerar a interação com os férmions com especial atenção. Os efeitos da torção na matéria são descritos pelo acoplamento entre os espinores e a torção. O formalismo adequado à descrição covariante dos espinores de Dirac é a geometria de Riemann-Cartan, onde a métrica é um campo composto pelos campos fundamentais e_μ^a (denominadas de tetradas):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b = e_\mu^a e_{a\nu}, \quad (3.12)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $a = 1, 2, 3, 4$. Os objetos e_μ^a também satisfazem

$$e_\mu^a e^{b\mu} = \eta^{ab}.$$

Pode-se fixar uma escolha para a conexão afim e conexão de spin impondo a condição de metricidade

$$\tilde{\nabla}_\mu e_\nu^a = 0.$$

Estas 64 equações permitem escrever as conexões (64 graus de liberdade) em termos dos campos fundamentais, e_μ^a e $T^\mu_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^\mu_{\beta\alpha}$. Na derivada covariante espinorial, introduz-se a conexão de spin na presença de torção:

$$\tilde{\nabla}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \tilde{\omega}^{ab}{}_\mu \Sigma_{ab} \psi \quad (3.13)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2} \tilde{\omega}^{ab}{}_\mu \bar{\psi} \Sigma_{ab}. \quad (3.14)$$

A relação entre $\tilde{\omega}^{ab}{}_\mu$ e os campos e_μ^a e $T^\mu_{\alpha\beta}$ pode ser encontrada quando impomos o caráter vetorial de $\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi$:

$$\tilde{\nabla}_\mu (\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} \bar{\psi} \gamma^\lambda \psi. \quad (3.15)$$

Obtemos

$$\partial_\mu \gamma^\alpha + \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} \gamma^\lambda = \frac{i}{2} \tilde{\omega}^{ab}{}_\mu \bar{\psi} (\gamma^\alpha \Sigma_{ab} - \Sigma_{ab} \gamma^\alpha). \quad (3.16)$$

Multiplicando por $\gamma^\beta = e_c^\beta \gamma^c$ e tomando o traço, temos

$$4e^{a\beta}(\partial_\mu e_\alpha^a) + 4\tilde{\Gamma}^{\alpha\beta}{}_\mu = -\frac{1}{4}\tilde{\omega}^{ab}{}_\mu e_c^\beta e_d^\alpha \text{tr}(\gamma^c \gamma^d [\gamma_a, \gamma_b] - \gamma^c [\gamma_a, \gamma_b] \gamma^d), \quad (3.17)$$

onde usamos a notação $\tilde{\Gamma}^{\alpha\beta}{}_\mu = g^{\beta\nu} \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu}$. Depois de manipulações algébricas, podemos encontrar a expressão para a conexão $\tilde{\omega}^{ab}{}_\mu$, antissimétrica no par de índices a e b :

$$\tilde{\omega}^{ab}{}_\mu = \omega^{ab}{}_\mu + \frac{1}{4}K^\alpha{}_{\beta\mu} (e_\alpha^b e^{\beta a} - e_\alpha^a e^{\beta b}), \quad (3.18)$$

onde $\omega^{ab}{}_\mu$ é a conexão de spin no espaço de Riemann-Cartan sem torção,

$$\omega^{ab}{}_\mu = \frac{1}{4} (e_\alpha^b \partial_\mu e^{\alpha a} - e_\alpha^a \partial_\mu e^{\alpha b}) + \frac{1}{4}\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} (e_\alpha^b e^{\beta a} - e_\alpha^a e^{\beta b}). \quad (3.19)$$

3.2.2 Acoplamento mínimo entre torção e espinores

No procedimento de acoplamento mínimo, substituímos as derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes na ação de Dirac,

$$S_{1/2} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu \psi - \tilde{\nabla}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right\}. \quad (3.20)$$

Usando as equações (3.13), (3.14) e (3.18), podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu \psi &= \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \\ &+ \frac{i}{8} \bar{\psi} K^\rho{}_{\lambda\mu} (e_\rho^b e^{\lambda a} - e_\rho^a e^{\lambda b}) \gamma^\mu \Sigma_{ab} \psi \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{\nabla}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= -\nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \\ &+ \frac{i}{8} \bar{\psi} K^\rho{}_{\lambda\mu} (e_\rho^b e^{\lambda a} - e_\rho^a e^{\lambda b}) \Sigma_{ab} \gamma^\mu \psi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por cálculo direto, pode-se encontrar

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\nabla}_\mu \psi - \tilde{\nabla}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} K \psi \quad (3.23)$$

onde

$$K = -\frac{1}{8} (K_{\rho\lambda\mu} - K_{\lambda\rho\mu}) (\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\rho + \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu). \quad (3.24)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$K = \frac{1}{4} T_{\mu\nu\alpha} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha + \frac{1}{2} T_\mu \gamma^\mu, \quad (3.25)$$

onde $T_\mu = T^\alpha{}_{\mu\alpha}$. Finalmente, encontramos

$$K = \frac{1}{4} T_{[\mu\nu\alpha]} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \quad (3.26)$$

onde $T_{[\mu\nu\alpha]}$ é a torção totalmente antissimetrizada,

$$T_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{2}{3!} (T_{\mu\nu\alpha} + T_{\alpha\mu\nu} + T_{\nu\alpha\mu}). \quad (3.27)$$

Somente a parte antissimetrizada da torção interage com os espinores. O vetor axial $S^\beta = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha}$, definido em (3.7), carrega os graus de liberdade de $T_{[\mu\nu\alpha]}$. Assim, a interação mínima dos férmions com a torção é expressa pelo acoplamento de um vetor axial com os espinores. Pode-se obter a ação de Dirac acoplada com a torção de fundo:

$$S_{1/2} = i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} [\gamma^\alpha (\nabla_\alpha + \eta_0 T_\alpha + i \eta \gamma_5 S_\alpha) - im] \psi. \quad (3.28)$$

O acoplamento é mínimo se $\eta_0 = 0$ e $\eta = 1/8$. É conveniente enfatizar que a Hermiticidade da ação exige valores de η_0 imaginários puros.

3.3 Ação para a torção dinâmica

Considere a ação de Dirac com um campo Abeliano, A_μ , e torção de fundo, para η geral (acoplamento não-mínimo):

$$S_{1/2} = i \int d^4x \bar{\psi} [\gamma^\alpha (\nabla_\alpha - iq A_\alpha + i \eta \gamma^5 S_\alpha) - im] \psi. \quad (3.29)$$

É interessante notar que além da simetria usual

$$\psi' = \psi e^{i\alpha(x)}, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha(x)}, \quad A'_\mu = A_\mu + q^{-1} \partial_\mu \alpha(x), \quad (3.30)$$

a ação (3.29) possui a simetria

$$\psi' = e^{i\gamma_5\beta(x)} \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\gamma_5\beta(x)}, \quad S'_\mu = S_\mu - \eta^{-1} \partial_\mu\beta(x), \quad (3.31)$$

com quebra suave pela massa m .

3.3.1 Cálculo das divergências a 1-loop

Apresentaremos o cálculo das divergências a 1-loop para obter demais contribuições contendo o vetor axial que são requeridas pela renormalização.

As divergências a um *loop* são dadas pela expressão

$$\Gamma_{\text{div}}^{(1)} = -i \text{Tr} \ln(\hat{D})_{\text{div}}, \quad (3.32)$$

onde $\hat{D} = i\gamma^\mu D_\mu + m$ e as interações com os campos de fundo são especificadas pela derivada covariante

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu + i\eta\gamma^5 S_\mu. \quad (3.33)$$

O método de Schwinger-DeWitt é conveniente para o cálculo de $\Gamma^{(1)}|_{\text{div}}$. Visando a este objetivo, podemos escrever $-i \text{Tr} \ln(\hat{D})$ em termos de $-i \text{Tr} \ln(\hat{1}\square + m^2 \hat{1})$, do seguinte modo:

$$-i \text{Tr} \ln(\hat{D}) = -i \text{Tr} \ln \{(i\gamma^\mu D_\mu + m)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\} + i \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu D_\mu - m). \quad (3.34)$$

O espectro de \hat{D} independe do sinal de m (veja o Apêndice C), então obtemos

$$-i \text{Tr} \ln(\hat{D}) = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \{\gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu + m^2\}. \quad (3.35)$$

Por cálculo direto, podemos escrever

$$\hat{H} = \gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu + m^2 = \square + R_\mu \nabla^\mu + \Pi, \quad (3.36)$$

onde R_μ e Π são dados por

$$\begin{aligned}
R_\mu &= -2ieA_\mu + 2\eta\Sigma_{\mu\nu}\gamma^5 S^\nu; \\
\Pi &= -ie\nabla^\mu A_\mu + i\eta\gamma^5\nabla^\mu S_\mu - e^2 A^\mu A_\mu + \eta^2 S^\mu S_\mu - \frac{i}{2}e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} + \\
&+ \frac{i}{2}\eta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 S_{\mu\nu} - 2ie\eta\Sigma^{\mu\nu}\gamma^5 A_\mu S_\nu - \frac{1}{4}R + m^2,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde usamos

$$\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \frac{1}{8}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda R_{\mu\nu\rho\lambda} = -\frac{1}{4}R,$$

$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, $S_{\mu\nu} = \nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu$ e $\Sigma_{\mu\nu} = i/2 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Note que o operador $\hat{1}$ foi omitido em algumas expressões (este procedimento é repetido em casos evidentes ao longo desta tese). Alternativamente poderíamos escrever \hat{H} de modo covariante:

$$\hat{H} = g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + E_\mu D^\mu + F \tag{3.38}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_\mu &= -2i\eta\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^5 S^\nu e \\
F &= -\frac{i}{2}e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\eta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 S_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R + m^2.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Agora podemos levar em conta a técnica da expansão de Schwinger-DeWitt para calcular a parte divergente de $\Gamma^{(1)}$. A expressão é dada por (consulte [7, 47, 38, 72]):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{div}}^{(1)} &= -\frac{i}{2}\text{Tr} \ln \{\square + R_\mu\nabla^\mu + \Pi\} |_{\text{div}} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \text{tr} \left\{ \frac{1}{2}\hat{P} \cdot \hat{P} + \frac{1}{12}\hat{S}_{\alpha\beta} \cdot \hat{S}^{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\square\hat{P} + \right. \\
&\left. + \frac{\hat{1}}{180}(R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \square R) \right\},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde $\varepsilon = (4\pi)^2(n-4)$ e

$$\begin{aligned}
\hat{P} &= \Pi + \frac{\hat{1}}{6}R - \frac{1}{2}\nabla_\mu R^\mu - \frac{1}{4}R_\mu \cdot R^\mu \quad e \\
\hat{S}_{\alpha\beta} &= \hat{1}[\nabla_\beta, \nabla_\alpha] + \frac{1}{2}(\nabla_\beta R_\alpha - \nabla_\alpha R_\beta) + \frac{1}{4}(R_\beta R_\alpha - R_\alpha R_\beta).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Para obter \hat{P} e $\hat{S}_{\alpha\beta}$, os seguintes resultados são úteis:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta R_\alpha &= -2ie\nabla_\beta A_\alpha + 2\eta\Sigma_{\alpha\nu}\gamma^5\nabla_\beta S^\nu; \\ R_\beta R_\alpha &= -e^2 A_\alpha A_\beta - ie\eta\Sigma_{\alpha\mu}\gamma^5 A_\beta S^\mu - ie\eta\Sigma_{\beta\mu}\gamma^5 A_\alpha S^\mu + \\ &+ \eta^2\Sigma_{\beta\nu}\gamma^5\Sigma_{\alpha\mu}\gamma^5 S^\nu S^\mu.\end{aligned}\quad (3.42)$$

A partir daí, podemos obter $\nabla_\mu R^\mu$ e $R_\mu R^\mu$, e finalmente

$$\hat{P} = i\eta\gamma^5\nabla_\mu S^\mu - 2\eta^2 S_\mu S^\mu - \frac{i}{2}e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}R + m^2. \quad (3.43)$$

Antissimetrizando as equações (3.42) estaremos aptos a escrever

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}R_{\beta\alpha\rho\lambda}\gamma^\rho\gamma^\lambda + ieF_{\alpha\beta} + \eta\Sigma_{\alpha\nu}\gamma^5\nabla_\beta S^\nu - \eta\Sigma_{\beta\nu}\gamma^5\nabla_\alpha S^\nu + \\ &+ (\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu - \gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu)S^\mu S^\nu.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Obtemos, através de manipulações algébricas, os seguintes traços:

$$\begin{aligned}\text{tr}(\hat{P} \cdot \hat{P}) &= -4\eta^2(\nabla^\mu S_\mu)^2 + 16\eta^4(S_\mu S^\mu)^2 + \frac{4}{3}\eta^2 S_\mu S^\mu R - 16m^2\eta^2 S_\mu S^\mu \\ &+ 2e^2 F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{36}R^2 - \frac{2}{3}m^2 R + 4m^4;\end{aligned}\quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\text{tr}(\hat{S}_{\alpha\beta} \cdot \hat{S}^{\alpha\beta}) &= -\frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho\lambda}^2 - 4\eta\varepsilon^{\rho\lambda\alpha\nu}\nabla^\beta S_\nu R_{\alpha\beta\rho\lambda} + 16\eta^2 R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu - 8R S_\mu S^\mu + \\ &+ 16\eta^2(\nabla_\mu S_\nu)(\nabla^\mu S^\nu) + 8\eta^2(\nabla^\mu S_\mu)^2 - 96\eta^4(S_\mu S^\mu)^2 - 4e^2 F_{\mu\nu}^2.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Para incluir as contribuições de superfície, precisamos dos seguintes resultados:

$$\frac{1}{6}\text{tr}(\square\hat{P}) = \frac{4}{3}\eta^2\square(S^\mu S_\mu) - \frac{1}{18}\square R \quad \text{e} \quad \frac{1}{180}\text{tr}(\hat{1}\square R) = \frac{1}{45}\square R. \quad (3.47)$$

Substituindo essas expressões na fórmula (3.40), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{div}}^{(1)} &= \frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{2}{3}e^2 F_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{3}\eta^2 S_{\mu\nu}^2 - 8m^2\eta^2 S_\mu S^\mu - \frac{1}{3}m^2 R + 2m^4 + \right. \\ &+ \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{45}R_{\mu\nu}^2 - \frac{7}{360}R_{\mu\nu\rho\lambda}^2 - \frac{4}{3}\eta^2\square(S^\mu S_\mu) + \\ &\left. + \frac{4}{3}\nabla_\mu(S^\nu\nabla_\nu S^\mu - S^\mu\nabla_\nu S^\nu) - \frac{1}{30}\square R \right\}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Considerando o espaço de fundo de Minkowski sem campo vetorial, e desprezando os termos superficiais, as divergências se reduzem a

$$\Gamma_{fermion,div}^{(1)} = \frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^n x \left\{ \frac{2\eta^2}{3} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 8m^2 \eta^2 S^\mu S_\mu + 2m^4 \right\}. \quad (3.49)$$

3.3.2 A ação para a torção dinâmica e a parametrização de Boulware

A torção é uma quantidade geométrica independente da estrutura métrica do espaço-tempo. Podemos considerar, para simplificar a análise da teoria da torção, o espaço-tempo plano. Baseado no resultado (3.49) (desprezando termos superficiais), a ação para a torção dinâmica, omitindo o campo vetorial, é

$$S_{tor-fer} = \int d^4 x \left\{ -\frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 S_\mu S^\mu + i \bar{\psi} [\gamma^\alpha (\partial_\alpha + i \eta \gamma_5 S_\alpha) - im] \psi \right\}. \quad (3.50)$$

Esta ação é o principal objeto de investigação de uma teoria para a torção.

Considere, como um exemplo ilustrativo, a ação para o campo vetorial massivo, análoga à (3.50):

$$S_V = \int d^4 x \left\{ -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 V_\mu V^\mu + i \bar{\psi} [\gamma^\alpha (\partial_\alpha - i g V_\alpha) - im] \psi \right\}. \quad (3.51)$$

De acordo com a parametrização de Boulware [120], fazemos a seguinte mudança de variáveis de campo:

$$\psi = \exp \left\{ \frac{ig}{M} \cdot \varphi \right\} \cdot \chi, \quad \bar{\psi} = \bar{\chi} \cdot \exp \left\{ -\frac{ig}{M} \cdot \varphi \right\}, \quad V_\mu = V_\mu^\perp - \frac{1}{M} \partial_\mu \varphi. \quad (3.52)$$

Nas novas variáveis, χ , $\bar{\chi}$, V_μ^\perp e φ , a ação é:

$$S_{m-vec} = \int d^4 x \left\{ -\frac{1}{4} (V_{\mu\nu}^\perp)^2 + \frac{1}{2} M^2 V_\mu^\perp V^{\perp\mu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + i \bar{\chi} [\gamma^\alpha (\partial_\alpha + i g V_\alpha^\perp)] \chi \right\} \quad (3.53)$$

onde o campo escalar (componente longitudinal de V_μ) se desacopla dos demais campos.

Para a ação (3.50), as transformações correspondentes são

$$\psi = \exp \left\{ \frac{i\eta}{M} \gamma^5 \varphi \right\} \chi, \quad \bar{\psi} = \bar{\chi} \exp \left\{ \frac{i\eta}{M} \gamma^5 \varphi \right\}, \quad S_\mu = S_\mu^\perp - \frac{1}{M} \partial_\mu \varphi, \quad (3.54)$$

e a ação nas novas variáveis é

$$S_{tor-fer} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} S_{\mu\nu}^\perp S^{\perp\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 S_\mu^\perp S^{\perp\mu} + \right. \\ \left. + i \bar{\chi} [\gamma^\alpha (\partial_\alpha + i \eta \gamma_5 S_\alpha^\perp) - im \cdot e^{\frac{2i\eta}{M} \gamma^5 \varphi}] \chi + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \right\}, \quad (3.55)$$

onde $S_{\mu\nu}^\perp = \partial_\mu S_\nu^\perp - \partial_\nu S_\mu^\perp = S_{\mu\nu}$. Comparando com (3.53), o sistema férmion-torção (3.55) apresenta uma diferença importante sobre o papel do campo escalar, que não se desacopla. Surge uma nova interação com este acoplamento (ausente no caso vetorial), exponencial, similar ao acoplamento de Yukawa.

Esta característica é um indicativo de problemas com a consistência da teoria, de acordo com considerações sobre a introdução do campo escalar, analisada no segundo trabalho da referência [108]. A interação de Yukawa produz uma quebra rígida de simetria (3.31), deixando livre de restrições as divergências provenientes dos diagramas contendo o vértice de Yukawa. Como provado em [108], o contratermo longitudinal $(\partial_\alpha S^\alpha)^2$ é necessário no nível de 2-loops. No entanto, a introdução desse termo adicional, como requisito de renormalizabilidade, quebra a unitariedade. Assim, na teoria férmion-torção-escalar o conflito entre renormalizabilidade e unitariedade é explícito, analogamente à gravitação com derivadas superiores [73, 7].

Para verificar se as indesejadas propriedades das teorias com o campo escalar são igualmente reais para a teoria (3.50), é necessário um exame mais detalhado. O cálculo das divergências de todos os setores da teoria será mostrado no próximo capítulo. Antes disso, é conveniente e instrutivo examinar o efeito da massa fermiônica nos vértices das interações, considerando a quebra de simetria (3.31), através das identidades de Ward-Takahashi.

3.3.3 As identidades de Ward-Takahashi

Considerando a teoria (3.51), a identidade de Ward-Takahashi correspondente à sua ação efetiva, $\Gamma[V_\mu, \psi, \bar{\psi}]$ ($V_\mu, \psi, \bar{\psi}$ são campos médios) tem a forma

$$i\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta V_\mu} + ie \left(\bar{\psi} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\psi}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta \psi} \psi \right) - iM^2 \partial^\mu V_\mu = 0. \quad (3.56)$$

Aplicando o operador $\delta/\delta V_\mu$, e fazendo $V_\mu, \psi, \bar{\psi} = 0$, obtemos a identidade para o operador inverso

$$\partial_\mu \frac{\delta^2\Gamma}{\delta V_\mu(x)\delta V_\nu(y)} = M^2 \partial_\nu \delta(x-y). \quad (3.57)$$

Agora, aplicando $\delta^2/\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)$, obtemos

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta V_\mu(x)} = ie \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)} \delta(x-y) - \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)} \delta(x-z) \right). \quad (3.58)$$

A massa vetorial se desacopla dos vértices contendo espinores. A massa fermiônica não afeta nenhum vértice e portanto não contribui significativamente para as divergências. Isto é a confirmação da quebra suave de simetria, e do desacoplamento observado em (3.53).

Vamos considerar agora a ação dos espinores acoplados com o vetor axial, (3.50).

Seguindo procedimento análogo, podemos escrever

$$-\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta S_\mu} - i\eta \left(\bar{\psi} \gamma_5 \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\psi}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta \psi} \gamma_5 \psi \right) + 2i\eta m \bar{\psi} \gamma_5 \psi + M^2 \partial^\mu S_\mu = 0. \quad (3.59)$$

Aplicando derivadas funcionais, as identidades de Ward-Takahashi para o propagador inverso e os vértices tomam a forma:

$$\partial_\mu \frac{\delta^2\Gamma}{\delta S_\mu(x)\delta S_\nu(y)} = M^2 \partial_\nu \delta(x-y) \quad (3.60)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta S_\mu(x)\delta\psi(y)} &= -2i\eta m \gamma_5 \delta(x-y)\delta(x-z) + \\ &+ i\eta \left(-\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)} \gamma_5 \delta(x-y) + \delta(x-z) \gamma_5 \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)} \right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

Aqui a massa axial desempenha o mesmo papel que a massa vetorial do caso precedente. Porém, nas identidades com os vértices de interação, há uma diferença crucial entre ambas as teorias. Na teoria com o vetor massivo axial, a massa fermiônica, m , influencia os vértices. Como consequência, pode-se esperar o aparecimento de termos não-invariantes nas divergências. O cálculo exato de todas as divergências a 1-loop é um passo obrigatório na avaliação da consistência da teoria (3.50).

Capítulo 4

Cálculo Completo das Divergências a 1-loop

Usaremos o método do campo de fundo, separando os campos nas partes quânticas e de fundo (clássicas). Para contornar o grau de complexidade dos cálculos baseados neste método, vamos usar uma técnica que é uma combinação do método de campo de fundo com a parametrização de Boulware, apresentada em (3.54).

4.1 Ação bilinear nos campos quânticos

A combinação do método do campo de fundo e da parametrização de Boulware, para o caso do vetor massivo axial, consiste em separar os campos nas partes de fundo, $(S_\mu, \psi, \bar{\psi})$, e nas partes quânticas, $(t_\mu^\perp, \varphi, \chi, \bar{\chi})$, conforme

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\frac{\eta}{M}\gamma_5\varphi} \cdot (\psi + \chi), \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = (\bar{\psi} + \bar{\chi}) \cdot e^{i\frac{\eta}{M}\gamma_5\varphi}, \\ S_\mu &\rightarrow S'_\mu = S_\mu + t_\mu^\perp - \frac{1}{M}\partial_\mu\varphi.\end{aligned}$$

O cálculo das divergências a 1-loop depende da parte bilinear da ação nos campos quânticos.

Usando as novas variáveis, podemos encontrar a parte bilinear correspondente a (3.50):

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left\{ t_\mu^\perp (\square + M^2) t^{\perp\mu} + \varphi (-\square) \varphi + t_\mu^\perp (-2\eta \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5) \chi + \varphi \left(-\frac{4m\eta^2}{M^2} \bar{\psi} \psi\right) \varphi + \right. \\ \left. + \bar{\chi} (-2\eta \gamma^\nu \gamma^5 \psi) t_\nu^\perp + \bar{\chi} \left(\frac{4im\eta}{M} \gamma^5 \psi\right) \varphi + \varphi \left(\frac{4i\eta m}{M} \bar{\psi} \gamma^5\right) \chi + \bar{\chi} (2i\gamma^\mu D_\mu + 2m) \chi \right\}. \quad (4.1)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\chi = -\frac{i}{2}(\gamma^\mu D_\mu + im)\tau$, e substituindo $\varphi \rightarrow i\varphi$, obtemos a seguinte expressão:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \begin{pmatrix} t_\mu^\perp & \varphi & \bar{\chi} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} t_\nu^\perp \\ \varphi \\ \tau \end{pmatrix},$$

onde o operador Hermiteano $\hat{\mathbf{H}}$ é

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \theta^{\mu\nu}(\square + M^2) & 0 & \theta^\mu{}_\beta(L^{\beta\alpha}\partial_\alpha + M^\beta) \\ 0 & \square + N & A^\alpha\partial_\alpha + B \\ P_\beta\theta^{\beta\nu} & Q & \hat{\square} + R^\lambda\partial_\lambda + \Pi \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

e $\theta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial_\nu$ é o projetor no espaço dos vetores transversais. Os elementos do operador matricial (4.2) são definidos de acordo com (4.1):

$$\begin{aligned} L^{\alpha\beta} &= -i\eta \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta, & M^\beta &= \eta^2 \bar{\psi} \gamma^\beta \gamma^\alpha S_\alpha + \eta m \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\beta, \\ A^\alpha &= 2i\eta \frac{m}{M} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\alpha, & B &= 2\eta^2 \frac{m}{M} \bar{\psi} \gamma^\beta S_\beta - 2\eta \frac{m^2}{M} \bar{\psi} \gamma_5, \\ N &= 4\eta^2 \frac{m}{M^2} \bar{\psi} \psi, & P^\beta &= -2\eta \gamma^\beta \gamma_5 \psi, & Q &= -4\eta \frac{m}{M} \gamma_5 \psi, \\ R^\mu &= 2\eta \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 S_\nu, & \Pi &= i\eta \gamma_5 (\partial_\mu S^\mu) + \frac{i}{2} \eta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 S_{\mu\nu} + \eta^2 S_\mu S^\mu + m^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2 Cálculo das divergências

O operador $\hat{\mathbf{H}}$ se assemelha a um operador mínimo de segunda ordem ($\square + 2h^\lambda \nabla_\lambda + \Pi$); no entanto, ele não é mínimo devido à presença do projetor $\theta^{\mu\nu}$ no setor $t_\mu^\perp = t_\nu^\perp$. Assim, o método de Schwinger-DeWitt não é adequado para este problema. Usaremos, então, a técnica generalizada por Barvinsky e Vilkovisky [38].

Até certo grau, as transformações consideradas são similares às usadas nos cálculos em gravitação com derivadas superiores acoplada com matéria [83] (veja também [7]). No nosso caso, as transformações permitem realizar cálculos para teorias com campo vetorial Abelian. No caso de vetores sem massa, pode-se verificar que os resultados equivalem aos resultados conhecidos, calculados seguindo o método de Faddeev-Popov.

Como estamos considerando operadores mistos, com setores bosônicos e fermiônicos, o traço de todos os produtos equivalem ao supertraço (Str), que implica num sinal positivo para o setor bosônico e negativo para o fermiônico. Do mesmo modo descrito no Capítulo 2, podemos expandir a ação efetiva a 1-loop do seguinte modo:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} s\text{Tr} \ln \mathbf{H} = \frac{i}{2} s\text{Tr} \ln \begin{pmatrix} \theta \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Pi} \square \end{pmatrix} - \frac{i}{2} s\text{Tr} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^n \right\}, \quad (4.4)$$

onde o operador $\hat{\Pi}$ corresponde a (4.2):

$$\hat{\Pi} \frac{1}{\square} = \left\{ \begin{array}{ccc} \theta^{\mu\nu} M^2 \frac{1}{\square} & 0 & \theta^\mu{}_\beta (L^{\beta\alpha} \partial_\alpha + M^\beta) \frac{1}{\square} \\ 0 & N \frac{1}{\square} & A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} + B \frac{1}{\square} \\ P^\beta \theta_\beta{}^\nu \frac{1}{\square} & Q \frac{1}{\square} & (R^\lambda \partial_\lambda + \Pi) \frac{1}{\square} \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

Usaremos os traços universais [38]. Como o espaço de fundo é plano, somente os seguintes termos devem ser levados em conta:

$$\text{Tr} \left(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2n-4}} \frac{1}{\square^n} \right) |_{\text{div}} = -\frac{2i}{\varepsilon} \int d^4x \frac{g_{\mu_1 \dots \mu_{2n-4}}^{(n-2)}}{2^{n-2} (n-1)!}, \quad (4.6)$$

onde a convenção padrão de [38] é usada:

$$g^{(0)} = 1, \quad g_{\mu\nu}^{(2)} = g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu\alpha\beta}^{(4)} = g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}, \quad \text{e.t.c.}$$

Pode-se notar que as divergências aparecem somente para $n = 2, 3, 4$, por contagem de potências nos termos da série (4.4). Além disso, somente as contribuições do setor fermiônico puro aparecem nas divergências do termo $n = 4$. Esta contribuição é um caso particular do resultado já obtido no Capítulo anterior. Então só precisamos considerar os termos com $n = 2, 3$.

4.2.1 Termo $n = 2$

Pode-se encontrar, por substituição direta,

$$\left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^2 = \begin{pmatrix} D_1^{(2)} & E_1^{(2)} & E_2^{(2)} \\ E_3^{(2)} & D_2^{(2)} & E_4^{(2)} \\ E_5^{(2)} & E_6^{(2)} & D_3^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

onde

$$D_1^{(2)} = \theta^{\mu\nu} M^4 \frac{1}{\square^2} + \theta^\mu{}_\beta L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} P^\gamma \theta_{\gamma\nu} \frac{1}{\square} + \theta^\mu{}_\beta M^\beta \frac{1}{\square} P^\gamma \theta_{\gamma\nu} \frac{1}{\square}, \quad (4.8)$$

$$E_1^{(2)} = \theta^\mu{}_\beta L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} + \theta^\mu{}_\beta M^\beta \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} E_2^{(2)} &= \theta^{\mu\rho} M^2 \frac{1}{\square} \theta_{\rho\beta} L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} + \theta^{\mu\rho} M^2 \frac{1}{\square} \theta_{\rho\beta} M^\beta \frac{1}{\square} + \theta^\mu{}_\beta L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + \\ &+ \theta^\mu{}_\beta L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} \Pi \frac{1}{\square} + \theta^\mu{}_\beta M^\beta \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + \theta^\mu{}_\beta M^\beta \frac{1}{\square} \Pi \frac{1}{\square}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$E_3^{(2)} = A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} P^\beta \theta_{\beta\nu} \frac{1}{\square} + B \frac{1}{\square} P^\beta \theta_{\beta\nu} \frac{1}{\square}, \quad (4.11)$$

$$D_2^{(2)} = N \frac{1}{\square} N \frac{1}{\square} + A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} + B \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
E_4^{(2)} &= N \frac{1}{\square} A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} + N \frac{1}{\square} B \frac{1}{\square} + A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} \Pi \frac{1}{\square} + \\
&+ B \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + B \frac{1}{\square} \Pi \frac{1}{\square}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$E_5^{(2)} = P^\beta \theta_{\beta\rho} \frac{1}{\square} \theta_{\rho\nu} M^2 \frac{1}{\square} + R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} P^\beta \theta_{\beta\nu} \frac{1}{\square} + \Pi \frac{1}{\square} P^\beta \theta_{\beta\nu} \frac{1}{\square}, \tag{4.14}$$

$$E_6^{(2)} = Q \frac{1}{\square} N \frac{1}{\square} + R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} + \Pi \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
D_3^{(2)} &= P^\gamma \theta_{\gamma\rho} \frac{1}{\square} \theta_{\rho\beta} L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} + P^\gamma \theta_{\gamma\rho} \frac{1}{\square} \theta_{\rho\beta} M^\beta \frac{1}{\square} + Q \frac{1}{\square} A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} + \\
&+ Q \frac{1}{\square} B \frac{1}{\square} + \left\{ R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + \Pi \frac{1}{\square} \right\}^2. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Aqui, usamos $\text{Tr}(AB) = \pm \text{Tr}(BA)$ para os operadores, dependendo das suas paridades Grassmannianas. Omitindo as contribuições puramente fermiônicas, e usando

$$\begin{aligned}
N \frac{1}{\square} N \frac{1}{\square} &= N^2 \frac{1}{\square^2} + N \left[\frac{1}{\square}, N \right] \frac{1}{\square} = N \frac{1}{\square} [N, \square] \frac{1}{\square^2} = \\
&= N^2 \frac{1}{\square^2} + \text{parte convergente}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

podemos escrever, para a parte divergente,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \text{sTr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \theta^{\mu\nu} M^4 \frac{1}{\square^2} + 2\theta^\mu{}_\beta L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} P^\gamma \theta_{\gamma\nu} \frac{1}{\square} + \right. \\
&+ \left. 2\theta^\mu{}_\beta M^\beta \frac{1}{\square} P^\gamma \theta_{\gamma\nu} \frac{1}{\square} + N^2 \frac{1}{\square^2} + 2A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} + 2B \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} \right\}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

É possível simplificar os demais termos da expressão acima usando comutadores do tipo (4.17). Os termos cujos comutadores correspondentes contribuem para as divergências são

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu\nu} (2\theta^\mu{}_\beta L^{\beta\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} P^\gamma \theta_{\gamma\nu} \frac{1}{\square}) &= -4L_\gamma{}^\alpha (\partial^\rho P^\lambda) \partial_\alpha \partial_\rho \frac{1}{\square^3} + 4L_\beta{}^\alpha (\partial^\rho P^\lambda) \partial^\beta \partial_\gamma \partial_\alpha \partial_\rho \frac{1}{\square^4} + \\
&+ 2L_\gamma{}^\alpha (\partial_\alpha P^\gamma) \frac{1}{\square^2} - 2L_\beta{}^\alpha (\partial_\alpha P^\gamma) \partial^\beta \partial_\gamma \frac{1}{\square^3} + \dots \tag{4.19}
\end{aligned}$$

e

$$2A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} = -4A^\alpha (\partial^\rho Q) \partial_\alpha \partial_\rho \frac{1}{\square^3} + 2A^\alpha (\partial_\alpha Q) \frac{1}{\square^2} + \dots \quad (4.20)$$

onde as partes não-divergentes foram desconsideradas. Note que o resultado (4.19) é equivalente a (4.18), com a única diferença de se tomar o traço com respeito a μ e ν antecipadamente. Finalmente, depois dessas manipulações, chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{sTr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \theta^{\mu\nu} M^4 \frac{1}{\square^2} - 4L^{\gamma\alpha} (\partial^\rho P_\gamma) \partial_\alpha \partial_\rho \frac{1}{\square^3} + 2L^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha P_\gamma) \frac{1}{\square^2} + \right. \\ &+ 4L^{\beta\alpha} (\partial^\rho P^\gamma) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\rho \frac{1}{\square^4} - 2L^{\beta\alpha} (\partial_\alpha P^\gamma) \partial_\beta \partial_\gamma \frac{1}{\square^3} + 2M^\gamma P_\gamma \frac{1}{\square^2} - 2M^\beta P^\gamma \partial_\beta \partial_\gamma \frac{1}{\square^3} + \\ &\left. + N^2 \frac{1}{\square^2} - 4A^\alpha (\partial^\rho Q) \partial_\alpha \partial_\rho \frac{1}{\square^3} + 2A^\alpha (\partial_\alpha Q) \frac{1}{\square^2} + 2BQ \frac{1}{\square^2} \right\}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Usando (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{sTr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^2 \Big|_{\text{div}} &= \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ 3M^4 + \frac{2}{3} L^{\gamma\alpha} (\partial_\alpha P_\gamma) + \frac{1}{6} L_\alpha^\alpha (\partial_\gamma P^\gamma) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} L^{\gamma\alpha} (\partial_\gamma P_\alpha) + \frac{3}{2} M^\gamma P_\gamma + A^\alpha (\partial_\alpha Q) + 2BQ + N^2 \right\}. \quad (4.22) \end{aligned}$$

Por substituição direta das expressões A^α, \dots, Π pode-se chegar ao seguinte resultado parcial:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{sTr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^2 \Big|_{\text{div}} &= \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ 3M^4 + 16\eta^3 \frac{m^2}{M^2} \bar{\psi} \gamma_5 \mathcal{G} \psi + (16\eta^2 \frac{m^3}{M^2} - 12\eta^2 m) \bar{\psi} \psi + \right. \\ &\left. - 6\eta^3 \bar{\psi} \gamma_5 \mathcal{S} \psi + 8i\eta^2 \frac{m^2}{M^2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi + 16\eta^4 \frac{m^2}{M^4} (\bar{\psi} \psi)^2 \right\}. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Note que cada termo do integrando tem dimensão [massa]⁴, apesar das contribuições pouco usuais da massa da torção, M .

4.2.2 Termo $n = 3$

Para determinar a contribuição do termo $n = 3$ da série, basta calcular os três termos diagonais do operador $(\hat{\Pi} \frac{1}{\square})^3$:

$$D_1^{(3)} = \theta_{\mu\rho} L_\rho^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} P^\beta \theta_\beta^\nu \frac{1}{\square},$$

$$D_2^{(3)} = A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square},$$

$$\begin{aligned} D_3^{(3)} &= P^\beta \theta_\beta^\nu \frac{1}{\square} \theta_{\mu\rho} L_\rho^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + Q \frac{1}{\square} A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + \\ &+ R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} P^\beta \theta_\beta^\nu \frac{1}{\square} \theta_{\mu\rho} L_\rho^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} + R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} + \\ &+ \left(R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} + \Pi \frac{1}{\square} \right)^3. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{3} s\text{Tr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^3 \Big|_{\text{div}} = \frac{1}{3} \text{Tr} \left(3\theta_{\mu\rho} L^{\rho\alpha} \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} P^\beta \theta_\beta^\nu \frac{1}{\square} + 3A^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\square} R^\lambda \partial_\lambda \frac{1}{\square} Q \frac{1}{\square} \right) \Big|_{\text{div}} \quad (4.25)$$

onde novamente omitimos a contribuição do setor fermiônico puro. Os comutadores correspondentes aos termos da equação acima não produzem divergências, portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} s\text{Tr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^3 \Big|_{\text{div}} &= \frac{1}{3} \text{Tr} \left(3L_\beta^\alpha R^\lambda P^\beta \partial_\alpha \partial_\lambda \frac{1}{\square^3} + 3A^\alpha R^\lambda Q \partial_\alpha \partial_\lambda \frac{1}{\square^3} - \right. \\ &\left. - L_\rho^\alpha R^\lambda P^\beta \partial^\rho \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\lambda \frac{1}{\square^4} \right) \Big|_{\text{div}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Usando os traços universais, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} s\text{Tr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^3 \Big|_{\text{div}} &= -\frac{2i}{3\varepsilon} \int d^4x \left\{ \frac{5}{8} L^{\rho\alpha} R_\alpha P_\rho - \frac{1}{8} L^\alpha{}_\alpha R_\lambda P^\lambda + \right. \\ &\left. - \frac{1}{8} L^{\rho\alpha} R_\rho P_\alpha + \frac{3}{4} A_\alpha R^\alpha Q \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Substituindo os valores de $L^{\rho\alpha}$, R_α , P_ρ e Q , achamos

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} L^{\rho\alpha} R_\alpha P_\rho &= -15\eta^3 \bar{\psi} \gamma^{\bar{5}} S \psi; & -\frac{1}{8} L^\alpha{}_\alpha R_\lambda P^\lambda &= 6\eta^3 \bar{\psi} \gamma^{\bar{5}} S \psi; \\ -\frac{1}{8} L^{\rho\alpha} R_\rho P_\alpha &= 0; & \frac{3}{4} A_\alpha R^\alpha Q &= 36\eta^3 \frac{m^2}{M^2} \bar{\psi} \gamma^{\bar{5}} S \psi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A contribuição para o termo $n = 3$ pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{3} s\text{Tr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^3 \Big|_{\text{div}} = \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ 6\eta^3 \bar{\psi} \gamma_5 S \psi - 24\eta^3 \frac{m^2}{M^2} \bar{\psi} \gamma_5 S \psi \right\}. \quad (4.29)$$

Levando em conta o resultado do setor fermiônico (3.49), no Capítulo anterior, e as contribuições (4.23) e (4.29), obtemos o resultado final para as divergências a 1-loop para a teoria (3.50):

$$\Gamma_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^n x \left\{ -\frac{2\eta^2}{3} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + 8m^2\eta^2 S^\mu S_\mu - 2m^4 + \frac{3}{2} M^4 + \right. \\ \left. + \left(8\eta^2 \frac{m^3}{M^2} - 6\eta^2 m \right) \bar{\psi}\psi + 8\eta^4 \frac{m^2}{M^4} (\bar{\psi}\psi)^2 + 4i\eta^2 \frac{m^2}{M^2} \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu^* \psi \right\}, \quad (4.30)$$

onde $D_\mu^* = \partial_\mu - i\eta\gamma^5 S_\mu$. Observa-se facilmente que o resultado acima não é invariante de gauge. A causa desta propriedade é o acoplamento não-trivial do modo longitudinal do vetor axial (campo escalar) com os férmions. No Apêndice D, calculamos as divergências para o vetor massivo. O resultado (4.30) é uma confirmação da análise das identidades de Ward-Takahashi, no Capítulo precedente. A seguir, examinaremos a renormalização a 1-loop e investigaremos os efeitos a 2-loops do resultado (4.30).

Capítulo 5

Renormalização e Divergências a 2-Loops

Neste capítulo, investigaremos as equações do grupo de renormalização a 1-loop, partindo do resultado (4.30). Em seguida, examinaremos as consequências da interação $(\bar{\psi}\psi)^2$ no nível de 2-loops.

5.1 Renormalização e o Grupo de Renormalização

A expressão (4.30) contém 2 partes não invariantes. O termo $\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu^*\psi$ é um exemplo. Porém, este termo pode ser absorvido na renormalização da constante de acoplamento, η . Desse modo, a simetria de gauge permanece suavemente quebrada no nível quântico. No entanto, o termo $(\bar{\psi}\psi)^2$ é essencialmente não-invariante.

A renormalizabilidade da teoria requer a introdução da interação $(\bar{\psi}\psi)^2$ na ação clássica. O cálculo das divergências a 1-loop teria que ser repetido levando em conta a nova interação quártica. Porém, este procedimento não é necessário pela simples constatação de que o vértice correspondente a $(\bar{\psi}\psi)^2$ não aparece nos diagramas a 1-loop.

Como mostraremos na seção seguinte, a interação quártica produz no nível de 2-loops o termo cinético $(\partial_\mu S^\mu)^2$, que carrega contribuições longitudinais do vetor axial S_μ . Este fato quebra a unitariedade da teoria. É conveniente examinarmos as equações do grupo de renormalização para considerarmos possíveis restrições à massa da torção.

A renormalização a 1-loop da teoria (3.50) obedece à seguinte relação padrão, levando em conta o resultado (4.30):

$$S_0 = S + \Delta S \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} S_0 = & \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} S_{\mu\nu}^0 S^{0\mu\nu} + \frac{1}{2} M_0^2 S_\mu^0 S^{0\mu} + \lambda_0 (\bar{\psi}_0 \psi_0)^2 + \right. \\ & \left. + i\bar{\psi}_0 [\gamma^\mu (\partial_\mu + i\eta\gamma^5 S_\mu^0) - im_0] \psi_0 \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} S = & \mu^{(n-4)} \int d^n x \left\{ -\frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 S_\mu S^\mu + \lambda (\bar{\psi}\psi)^2 + \right. \\ & \left. + i\bar{\psi} [\gamma^\mu (\partial_\mu + i\eta\gamma^5 S_\mu) - im] \psi \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

e os contratermos são

$$\begin{aligned} \Delta S = & \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \left\{ -\frac{2\eta^2}{3} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + 8m^2\eta^2 S^\mu S_\mu - 2m^4 + \frac{3}{2} M^4 + \right. \\ & \left. + \left(8\eta^2 \frac{m^3}{M^2} - 6\eta^2 m \right) \bar{\psi}\psi + 8\eta^4 \frac{m^2}{M^4} (\bar{\psi}\psi)^2 + 4i\eta^2 \frac{m^2}{M^2} \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu^* \psi \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como consequência direta do uso de (5.1), e algumas manipulações algébricas, podemos encontrar as seguintes equações de renormalização de campos e parâmetros:

$$\begin{aligned} S_\mu^0 = & \mu^{\frac{n-4}{2}} S_\mu \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{4\eta^2}{3} \right), & \psi^{(0)} = & \mu^{\frac{n-4}{2}} \psi \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{2\eta^2 m^2}{M^2} \right), \\ \eta^0 = & \mu^{\frac{4-n}{2}} \left(\eta - \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{4\eta^3}{3} \cdot \left[1 + 6 \frac{m^2}{M^2} \right] \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\lambda_0 = \mu^{(4-n)} \left(\lambda - \frac{8\eta^2 m^2}{\epsilon M^2} \lambda + \frac{8\eta^4 m^2}{\epsilon M^4} \right)$$

Podemos encontrar também

$$m_0 = m + \frac{4\eta^2 m^3}{\epsilon M^2} - \frac{6m\eta^2}{\epsilon} \quad (5.6)$$

e

$$M_0^2 = M^2 + \frac{8\eta^2}{3\epsilon} (6m^2 - M^2). \quad (5.7)$$

De (5.6) e (5.7) segue-se que

$$\frac{m_0^2}{M_0^4} = \frac{m^2}{M^4} - \frac{\eta^2}{\epsilon} \left\{ \frac{20 m^2}{3 M^4} + 24 \frac{m^4}{M^6} \right\} \quad (5.8)$$

Pode-se escrever a relação (5.1) para o novo parâmetro $\tilde{\lambda} = \frac{M^4}{m^2} \lambda$, usando (5.8):

$$\tilde{\lambda}^{(0)} = \mu^{4-n} \left[\tilde{\lambda} + \frac{8\eta^4}{\epsilon} + \frac{16\tilde{\lambda}\eta^2 m^2}{M^2 \epsilon} + \frac{20\tilde{\lambda}\eta^2}{3\epsilon} \right]. \quad (5.9)$$

A partir da equação (5.5), é possível calcular a equação do grupo de renormalização para a constante de acoplamento η , que assume a forma

$$(4\pi)^2 \frac{d\eta^2}{dt} = \frac{8}{3} \left[1 + 6 \frac{m^2}{M^2} \right] \eta^4, \quad \eta(0) = \eta_0. \quad (5.10)$$

O parâmetro t é a escala de energia usual, $t = \ln(\mu/\mu_0)$. É interessante notar que (5.10) se reduz, no limite $m \ll M$, à equação apresentada por [108], que é idêntica à correspondente para a Eletrodinâmica Quântica. Usando (5.9), podemos encontrar a equação do grupo de renormalização para a constante de acoplamento $\tilde{\lambda}$:

$$(4\pi)^2 \frac{d\tilde{\lambda}}{dt} = 8 \eta^4. \quad (5.11)$$

Suponha que a massa da torção é muito maior do que a massa de qualquer férmion, ou seja, $m \ll M$. É claro que se considerarmos férmions sem massa, o contratermo $(\bar{\psi}\psi)^2$ não existiria e a teoria seguramente estaria livre de complicações, mas a existência de férmions

sem massa é problemática para o Modelo Padrão. Seguindo a restrição $m \ll M$, os contra-termos não-invariantes carregariam coeficientes negligíveis. Suponha que a interação "problemática" $(\bar{\psi}\psi)^2$ seja introduzida na ação com uma constante de acoplamento bem pequena, da ordem de $\lambda \sim m^2/M^4$. Este procedimento não é violado pela equação (5.11), que estabelece uma variação da constante $\tilde{\lambda}$ compatível com sua ordem de grandeza. Assim, é possível preservar renormalizabilidade a 1-loop pela introdução de uma fraca interação quártica, $(\bar{\psi}\psi)^2$.

5.2 Diagramas a 2-loops

É necessário fazer uma análise sobre as consequências no nível de 2-loops do resultado (4.30). Vamos investigar a possibilidade de contribuições longitudinais no propagador do vetor axial S_μ . Nossa atenção será voltada às divergências proporcionais a $1/\epsilon^2$. Como mostraremos, isto será suficiente para nosso propósito. As integrais implicadas podem ser encontradas em [123, 124].

Há dois tipos de diagramas a 2-loops: os que contém o vértice $(\bar{\psi}\psi)^2$ e os que não contém esta interação quártica. Vimos que esta interação é uma propriedade importante, que não existe na teoria do vetor massivo. Consideremos os diagramas com a interação $(\bar{\psi}\psi)^2$ (veja as Figuras). Usaremos aqui a expansão proposta em [108], que pode ser verificada pelo cálculo padrão com os parâmetros de Feynman (Apêndice E).

O diagrama da Figura 1 pode ser expresso por

$$\Pi_{\mu\nu}^1 = -\lambda\eta^2 \text{tr} \{I_\nu \cdot I_\mu\}, \quad (5.12)$$

onde $\lambda \sim \frac{m^2}{M^4}$ é o acoplamento do vértice quártico, e o traço é tomado no espaço dos espinores de Dirac, e

$$I_\nu = \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{\not{p} - \not{q} - m}{(p-q)^2 - m^2}. \quad (5.13)$$

Com algumas manipulações algébricas, é possível escrever

$$\Pi_{\mu\nu}^1 = -\lambda\eta^2 \text{tr} \{J_\nu \cdot K_\mu\}, \quad (5.14)$$

onde

$$J_\nu = \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{A_{\alpha\nu\beta} p^\alpha p^\beta + B_{\alpha\nu} p^\alpha + C_\nu}{(p^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]}, \quad (5.15)$$

$$K_\mu = \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{a_{\alpha\mu\beta} k^\alpha k^\beta + b_{\mu\alpha} k^\alpha + c_\mu}{(k^2 - m^2)[(k - q)^2 - m^2]}, \quad (5.16)$$

e

$$\begin{aligned} A_{\alpha\nu\beta} &= \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \\ B_{\alpha\nu} &= -\gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta q^\beta - 2\eta_{\nu\alpha} m + 2m\gamma_\alpha \gamma_\nu \\ C_\nu &= m\gamma_\nu \gamma_\alpha q^\alpha - m^2 \gamma_\nu \\ a_{\alpha\mu\beta} &= \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \\ b_{\mu\alpha} &= -\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha q^\beta - 2\eta_{\mu\alpha} m + 2m\gamma_\mu \gamma_\alpha \\ c_\mu &= m\gamma_\beta \gamma_\mu q^\beta - m^2 \gamma_\mu. \end{aligned}$$

Pode-se calcular as integrais separadamente. Seguindo [108], realizaremos a seguinte expansão

$$\frac{1}{(p - q)^2 - m^2} = \frac{1}{p^2 - m^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{-2p \cdot q + q^2}{p^2 - m^2} \right)^n. \quad (5.17)$$

Tendo em vista o cenário da teoria de campos efetiva, é possível simplificar (5.17) desprezando as potências de q superiores a 2 na série. Aplicando esta expansão nas integrais J_ν e K_μ , e utilizando as integrais-padrão (veja o Apêndice A), encontramos

$$J_\nu = K_\mu = \frac{i}{\epsilon} \left\{ -\frac{1}{6} q^2 \gamma_\nu - 2m^2 \gamma_\nu - \frac{1}{6} \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta q^\alpha q^\beta + m q_\nu \right\} + \dots, \quad (5.18)$$

onde só levamos em conta o pólo $1/\varepsilon$ (por estarmos interessados no cálculo da parte de $\Pi_{\mu\nu}$ proporcional a $1/\varepsilon^2$). A parte omitida (indicada pelas reticências) representa os termos com potências de q superiores a 2, bem como a parte finita. Tomando o traço, pode-se encontrar a expressão final para (5.12):

$$\Pi_{\mu\nu}^{1,div} = -\frac{\lambda\eta^2}{\varepsilon^2} \left\{ +16m^4\eta_{\mu\nu} + \frac{28}{3}m^2q_\mu q_\nu - \frac{16}{3}m^2q^2\eta_{\mu\nu} \right\} + \dots \quad (5.19)$$

Este resultado mostra que a parte divergente do diagrama considerado traz contribuições longitudinais (termo $q_\mu q_\nu$) para os contratermos a 2-loops¹.

Considere agora o diagrama da Figura 2. Igualmente, podemos escrever o operador polarização correspondente, omitindo algumas manipulações, na forma

$$\Pi_{\mu\nu}^2 = -\lambda\eta^2 \text{tr} \{ I_{\nu\mu} \cdot J \}, \quad (5.20)$$

onde

$$I_{\nu\mu} = \mu^{(4-n)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p-q)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2} \quad (5.21)$$

e

$$J = \mu^{(4-n)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\not{k} - m}{k^2 - m^2}. \quad (5.22)$$

Depois de cálculos algébricos, pode-se escrever a primeira integral na seguinte forma:

$$I_{\nu\mu} = \mu^{(4-n)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{A_{\alpha\nu\beta\mu\rho} \cdot p^\alpha p^\beta p^\rho + B_{\alpha\nu\mu\beta} \cdot p^\alpha p^\beta + C_{\alpha\nu\mu} p^\alpha + D_{\nu\mu}}{(p^2 - m^2)^2 ((p-q)^2 - m^2)}. \quad (5.23)$$

onde

$$A_{\alpha\nu\beta\mu\rho} = \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\rho,$$

$$B_{\alpha\nu\mu\beta} = -q^\rho \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\beta + m (\gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta - \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta - \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu),$$

¹Não precisamos calcular as divergências proporcionais a $1/\varepsilon$ para concluirmos este fato, pois os dois pólos são de ordens distintas, e assim não interferem entre si.

$$C_{\alpha\nu\mu} = m^2 (\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha - \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) + m q^\beta (\gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu),$$

$$D_{\nu\mu} = -m^2 q^\beta \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu + m^3 \gamma_\nu \gamma_\mu.$$

Usando a expansão (5.17) e novamente desprezando ordens em q superiores a 2 (assim como suas potências ímpares), obtemos, com a ajuda de resultados-padrão (Veja [124] e o Apêndice A),

$$I_{\nu\mu} = \frac{i}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{4} B^\alpha{}_{\nu\mu\alpha} + \frac{1}{12} (A^\alpha{}_{\nu\alpha\mu\rho} + A^\alpha{}_{\nu\rho\mu\alpha} + A_{\rho\nu\alpha\mu}{}^\alpha) q^\rho \right\} + \dots \quad (5.24)$$

que produz, depois de manipulações algébricas,

$$I_{\nu\mu} = \frac{i}{\epsilon} \left\{ m \gamma_\mu \gamma_\nu - 3m \eta_{\mu\nu} - \frac{2}{3} \gamma_\rho q^\rho \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \gamma_\mu q_\nu + \frac{1}{3} \gamma_\nu q_\mu \right\} + \dots \quad (5.25)$$

A contribuição divergente de J assume a forma

$$J = -\frac{i}{\epsilon} m^3 + \dots \quad (5.26)$$

Por substituição direta, a expressão final para (5.20), proporcional a $1/\epsilon^2$, a baixas energias, é

$$\Pi_{\mu\nu}^2 = -\frac{\lambda \eta^2}{\epsilon^2} 8m^4 \eta_{\mu\nu} + \dots \quad (5.27)$$

Como podemos notar, este diagrama não produz termo cinético nas condições consideradas. A consequência é que sua contribuição não cancela a contribuição longitudinal do primeiro diagrama, exibida em (5.19).

Os demais diagramas a 2-loops² (Figuras 3 e 4) não possuem o vértice $(\bar{\psi}\psi)^2$. Assim, mesmo que estes diagramas contribuíssem com termos longitudinais, o cancelamento destes com a respectiva parte de $\Pi_{\mu\nu}^1$ exigiria um ajuste especial entre η e λ .

Pode-se mostrar que esses diagramas não contribuem para o modo longitudinal do pólo $1/\epsilon^2$. Para o cálculo das divergências do tipo $1/\epsilon^2$, basta levar em conta as divergências dos seus subdiagramas (1-loop), e encontraremos as mesmas expressões do

²É importante ressaltar que nossa consideração no nível de 2-loops se refere ao setor axial.

resultado (4.30) multiplicadas por um fator extra, $1/\varepsilon$. Como resultado, a divergência longitudinal proporcional a $1/\varepsilon^2$ não se cancela.

5.3 Discussão

A unitariedade é quebrada a 2-loops no regime de baixas energias da teoria da torção acoplada ao férmion. A possibilidade de tornar este efeito negligível é impor um pequeno acoplamento λ , ou seja, que a massa da torção seja bem maior do que o mais pesado férmion (por exemplo, o top-quark, com $m = 175$ GeV), e considerar o regime de baixas energias. Evidentemente essas considerações implicam na existência de alguma outra teoria fundamental, válida nos regimes de altas energias. Se a massa da torção é da ordem dessa escala de energia, então ela deve ser descrita pela teoria fundamental, e conseqüentemente sua descrição no contexto da teoria quântica de campos efetiva perde sentido.

Portanto, para a existência da teoria quântica efetiva da torção dinâmica, a condição abaixo deve ser satisfeita:

$$m_{fermion} \ll M_{tor} \ll M_{fundamental}. \quad (5.28)$$

Das restrições impostas por modernas experiências [108], somente a região $M < 3Tev$ é permitida. Isto faz com que a condição (5.28) seja inacessível para todos os férmions do Modelo Padrão.

A situação é similar à encontrada na gravitação quântica: O conflito entre a renormalizabilidade (que na gravitação de Einstein é quebrada [13, 14]) e a unitariedade (violada nas teorias gravitacionais com derivadas superiores [73, 45]). Pode-se supor que esta analogia seja natural, uma vez que tanto a métrica quanto a torção carregam graus de liberdade da geometria. No entanto, há uma diferença importante: a métrica possui graus

de liberdade sem massa, contrariamente à torção.

A consequência do resultado deste Capítulo é que não há uma teoria quântica de campos efetiva consistente para a torção dinâmica, no regime de baixas energias. A menos que se descubra alguma simetria adicional, deve-se considerar a torção no contexto de teorias fundamentais, ou como um campo clássico de fundo.

Lista de figuras

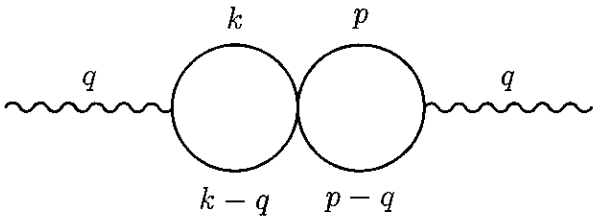


Figura 1

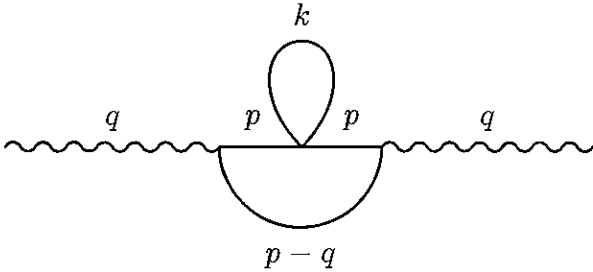


Figura 2

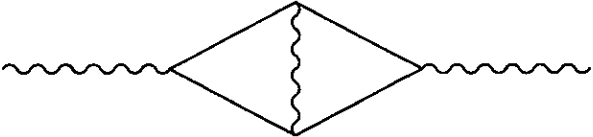


Figura 3

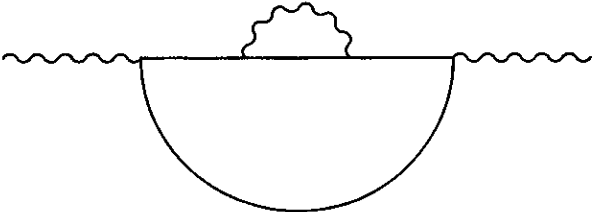


Figura 4

Conclusões Gerais

Nesta tese foram obtidos os seguintes resultados:

- Consideramos as simetrias do sistema torção-férmion no nível quântico, usando as identidades de Ward-Takahashi. Construimos o análogo da parametrização de Boulware para este sistema.
- Desenvolvemos a aplicação da técnica de Schwinger-DeWitt generalizada para operadores no espaço transversal, aplicando-a no cálculo de todas as divergências a 1-loop das teorias com vetor massivo e sem massa acoplado ao férmion, e com vetor axial (acoplado ao férmion), também para os casos massivo e sem massa.
- Na busca de uma ação para a torção dinâmica, calculamos todas as divergências a um *loop*, dos setores axiais e fermiônicos; além disso, calculamos as divergências para o setor fermiônico num *background* de Riemann-Cartan com campo de gauge Abelian.
- Investigamos o grupo de renormalização a 1-loop da teoria; calculamos as divergências dos diagramas necessários a dois *loops*, e seguindo o princípio de unitariedade e renormalizabilidade, mostramos sérias restrições para a existência da torção quântica.

- Construímos um operador fermiônico com derivadas até a terceira ordem que possui simetria conforme local. Calculamos as divergências a 1-loop da teoria sem massa no espaço-tempo curvo, desenvolvendo a técnica dos cálculos para o operador geral de terceira ordem. Verificamos que estas divergências são invariantes conformes quando particularizamos a ação tornando-a Hermiteana e conformalmente simétrica. Calculamos a anomalia conforme da teoria correspondente.
- Investigamos a gravitação de Einstein com constante cosmológica com parametrização conforme, calculamos as divergências a 1-loop usando fixação de gauge conforme com parâmetro arbitrário e mostramos que o resultado se reduz a outros conhecidos na literatura para uma *gauge* particular. Exibimos a independência do parâmetro conforme nas divergências, no regime *on-shell*.

Possibilidades de pesquisas futuras

- Considerar o operador fermiônico com derivadas superiores nos modelos de ação induzida por anomalia conforme;
- Investigar a sua versão com parâmetros de massa e o espectro de partículas no nível de árvore, bem como a unitariedade;
- Verificar a conjectura enunciada no Capítulo 2 e calcular as anomalias correspondentes;
- Investigar a anomalia axial para a teoria fermiônica de terceira ordem;
- Na gravitação quântica com derivadas superiores conformalmente simétrica (gravitação de Weyl), calcular a anomalia de traço e investigar o problema da anomalia em teorias gravitacionais;

- Estudar o papel dos vértices oriundos do termo de Gauss-Bonnet na gravitação de Weyl, sobretudo na anomalia conforme.

Apêndice A

Notações e Relações Úteis

A.1 Notações e convenções

Como regra geral, utilizamos o símbolo til para objetos construídos num espaço de fundo com torção, excetuando-se o operador $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, definido no Cap. 2. Deste modo,

- $\tilde{\nabla}_\mu$ é a derivada covariante definida com a conexão na presença de torção, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$.
- $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + K^\alpha_{\mu\nu}$, onde $K^\alpha_{\mu\nu}$ é o tensor contorção e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ é a conexão métrica, $\{\mu^\alpha{}_\nu\}$, considerando metricidade.

Símbolos de simetrização e antissimetrização:

- $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$
- $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

Curvatura:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}$$

A.2 Relações úteis

A.2.1 Espaço Euclidiano

Contrações e traços

$$\begin{aligned}
 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= -2\delta_{\mu\nu} \hat{1} \\
 \gamma_\alpha \gamma^\alpha &= -4 \hat{1} \\
 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma^\alpha &= 2\gamma_\mu \\
 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\alpha &= 4\delta_{\rho\mu} \hat{1} \\
 \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\alpha &= 2\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \\
 \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= -4\delta_{\mu\nu} \\
 \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda) &= 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\lambda} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho})
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Integrais comuns da regularização dimensional

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{d/2 - n} \\
 \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - 1 - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{1 + d/2 - n} \delta_{\mu\nu} \\
 \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{(k^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{4(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - 2 - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{2 + d/2 - n} \delta_{\mu\nu\rho\sigma}
 \end{aligned}$$

onde

$$\delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\rho\nu}.$$

A.2.2 Espaço de Minkowski

Contrações e traços

$$\begin{aligned}
 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2\eta_{\mu\nu} \hat{1} \\
 \gamma_\alpha \gamma^\alpha &= 4 \hat{1} \\
 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma^\alpha &= -2\gamma_\mu \\
 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\alpha &= 4\eta_{\rho\mu} \hat{1} \\
 \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\alpha &= -2\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \\
 \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4\eta_{\mu\nu} \\
 \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda) &= 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\lambda} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}) \\
 \text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \\
 \text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\
 \text{tr}(\Sigma^{\mu\nu} \Sigma^{\alpha\beta}) &= 4\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\beta} - 4\eta^{\beta\mu}\eta^{\nu\alpha},
 \end{aligned}$$

onde

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Integrais comuns da regularização dimensional

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} &= \frac{i(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{d/2-n} \\
 \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Delta)^n} &= -\frac{i(-1)^n}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - 1 - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{1+d/2-n} \eta_{\mu\nu} \\
 \int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \Delta)^n} &= \frac{i(-1)^n}{4(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - 2 - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{2+d/2-n} \eta_{\mu\nu\rho\sigma}
 \end{aligned}$$

onde

$$\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}.$$

Apêndice B

A Ação de Dirac e a Invariância Conforme

Vamos mostrar que a ação de Dirac sem massa,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \} , \quad (\text{B.1})$$

é invariante sob as transformações

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu} , ; \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{-\frac{3\sigma}{2}} \psi \quad \text{e} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-\frac{3\sigma}{2}} \bar{\psi} .$$

Como a transformação para o determinante $\sqrt{-g}$ segue a regra

$$(\sqrt{-g})' = \sqrt{-g} e^{4\sigma} ,$$

será suficiente mostrar que

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' = (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) e^{-4\sigma} . \quad (\text{B.2})$$

A derivada covariante atua sobre os espinores de acordo com a seguinte expressão, que define a conexão de spin,

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_\mu \Sigma_{ab} \psi \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2} \omega^{ab}{}_\mu \bar{\psi} \Sigma_{ab} . \quad (\text{B.4})$$

No espaço de Riemann-Cartan (veja o Cap. 3), a conexão $\omega^{ab}{}_{\mu}$ é dada por

$$\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{4} (e_{\alpha}^b \partial_{\mu} e^{\alpha a} - e_{\alpha}^a \partial_{\mu} e^{\alpha b}) + \frac{1}{4} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} (e_{\alpha}^b e^{\beta a} - e_{\alpha}^a e^{\beta b}) . \quad (\text{B.5})$$

Pode-se mostrar por cálculo direto que

$$\Gamma'^{\alpha}{}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} + \Delta\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} \quad (\text{B.6})$$

onde

$$\Delta\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\lambda} \partial_{\mu} \sigma + \delta^{\alpha}{}_{\mu} \partial_{\lambda} \sigma - g_{\mu\lambda} \partial^{\alpha} \sigma . \quad (\text{B.7})$$

Conseqüentemente,

$$\omega'^{ab}{}_{\mu} = \omega^{ab}{}_{\mu} + \Delta\omega^{ab}{}_{\mu} \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{4} \Delta\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} (e^{\lambda a} e_{\alpha}^b - e^{\lambda b} e_{\alpha}^a) . \quad (\text{B.9})$$

Pode-se obter, desta equação,

$$\Delta\omega^{ab}{}_{\mu} \Sigma_{ab} = -\Sigma_{\mu\alpha} \nabla^{\alpha} \sigma , \quad (\text{B.10})$$

e então podemos achar a lei de transformação de $\nabla_{\mu} \psi$,

$$(\nabla_{\mu} \psi)' = (\nabla_{\mu} \psi - \frac{3}{2} \nabla_{\mu} \sigma \psi - \frac{i}{2} \Sigma_{\mu\alpha} \nabla^{\alpha} \sigma \psi) e^{-3\sigma/2} . \quad (\text{B.11})$$

Obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi)' = (\bar{\psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi) e^{-4\sigma} . \quad (\text{B.12})$$

Como a ação (B.1) pode ser escrita em termos de $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi$ quando integramos por partes e desprezamos termos superficiais, o resultado (B.12) implica na validade da equação (B.2).

Apêndice C

A equivalência entre os espectros de

$$i\gamma^\mu D_\mu + m \quad \text{e} \quad i\gamma^\mu D_\mu - m$$

Seguindo [125], vamos considerar a seguinte base do espaço das matrizes 4x4, (Γ^μ, Γ^4) dada em termos das matrizes de Dirac:

$$\Gamma^\mu = i\gamma^5 \gamma^\mu ; \quad \Gamma^4 = i\gamma^5 . \quad (\text{C.1})$$

Estas matrizes também satisfazem a álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \Gamma^4 \Gamma^4 = -1 .$$

Considere o operador $\hat{F} = \Gamma^4 \hat{D} = \Gamma^4 (i\gamma^\mu D_\mu + m) = i\Gamma^\mu D_\mu + \Gamma^4 m$. Para passar da equação (3.34) para a equação (3.35), é necessário provar que

$$-i \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu D_\mu + m) = -i \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu D_\mu - m) . \quad (\text{C.2})$$

A expressão $-i \text{Tr} \ln(\hat{F}^2)$ é idêntica à expressão $-i \text{Tr} \ln \{(i\gamma^\mu D_\mu + m)(i\gamma^\mu D_\mu + m)\}$, pois a única diferença está nas diferentes bases para as matrizes γ . Conseqüentemente, podemos escrever

$$-i \text{Tr} \ln(\hat{F}^2) = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln(\hat{F}) = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu D_\mu + m) . \quad (\text{C.3})$$

Será suficiente explicitar \hat{F}^2 , fazer pequenas manipulações algébricas e em seguida voltar à base original para compararmos o resultado com a expressão para \hat{H} (3.36). Por cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu D_\mu \Gamma^\nu D_\nu &= \Gamma^\mu \Gamma^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu - ie \nabla_\mu A_\nu - ie A_\nu \nabla_\mu - ie A_\mu \nabla_\nu + \xi \Gamma^4 \nabla_\mu S_\nu + \xi \Gamma^4 S_\nu \nabla_\mu - \\ &- e^2 A_\mu A_\nu - ie \xi \Gamma^4 A_\mu S_\nu + ie \xi \Gamma^4 A_\nu S_\mu - \xi \Gamma^4 S_\mu \nabla_\nu + \xi^2 S_\mu S_\nu). \end{aligned} \quad (C.4)$$

Usando esta expressão para calcular \hat{F}^2 , e voltando à base original, encontramos

$$\hat{F}^2 = \square + R_\mu \nabla^\mu + \Pi, \quad (C.5)$$

com R_μ e Π satisfazendo (3.37). A conclusão imediata é

$$\hat{F}^2 = \hat{H} = (i\gamma^\mu D_\mu + m) \cdot (i\gamma^\mu D_\mu - m). \quad (C.6)$$

Como conseqüência, pode-se estabelecer

$$-i \text{Tr} \ln \{(i\gamma^\mu D_\mu + m) \cdot (i\gamma^\mu D_\mu + m)\} = -i \text{Tr} \ln \{(i\gamma^\mu D_\mu + m) \cdot (i\gamma^\mu D_\mu - m)\} \quad (C.7)$$

e assim a equivalência (C.2) está demonstrada.

Apêndice D

Cálculo das Divergências: Exemplos Particulares

D.1 Vetor Abeliano

Considere primeiramente a teoria para vetores massivos, com a ação (3.51)

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 V_\mu V^\mu + i\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - im)\psi \right\}, \quad (\text{D.1})$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - igV_\mu$ and $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. No contexto do método do campo e fundo, fazemos

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\frac{g}{M}\varphi}(\psi + \eta), \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = (\bar{\psi} + \bar{\eta})e^{-i\frac{g}{M}\varphi}, \\ V_\mu &\rightarrow V'_\mu = V_\mu + t_\mu^\perp + \frac{1}{M}\partial_\mu\varphi. \end{aligned}$$

Como o campo escalar não se acopla com nenhum outro campo, o setor escalar pode ser fatorizado da ação. A parte quadrática (nos campos quânticos, $t_\mu^\perp, \eta, \bar{\psi}$), submetida à

mudança de variável $\eta = -\frac{i}{2}(\gamma^\mu D_\mu + im)\tau$, pode ser escrita na forma

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \begin{pmatrix} t_\mu^\perp & \bar{\eta} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} t_\nu^\perp \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

onde

$$\hat{\mathbf{H}} = \left\{ \begin{array}{cc} \theta^{\mu\nu}(\square + M^2) & \theta^\mu{}_\beta(L^{\beta\alpha}\partial_\alpha + N^\beta) \\ h^\beta\theta_{\beta\nu} & \square + R^\lambda\partial_\lambda + \Pi \end{array} \right\}, \quad (\text{D.3})$$

e

$$\begin{aligned} L^{\beta\alpha} &= -ig\bar{\psi}\gamma^\beta\gamma^\alpha, & N^\beta &= -g^2\bar{\psi}\gamma^\beta\gamma^\alpha V_\alpha + mg\bar{\psi}\gamma^\beta, \\ h^\beta &= 2g\gamma^\beta\psi, & R^\lambda &= -2igV^\lambda, \\ \Pi &= -\frac{i}{2}g\gamma^\mu\gamma^\nu V_{\mu\nu} - ig(\partial_\mu V^\mu) - g^2V^\mu V_\mu + m^2. \end{aligned}$$

O operador (D.3) é mais simples do que (4.2), devido ao desacoplamento do modo escalar, no caso vetorial.

Podemos calcular as divergências a 1-loop da ação efetiva da teoria (3.51). Para tal, usamos a mesma expansão, (4.4), com

$$\hat{\Pi}\frac{1}{\square} = \left\{ \begin{array}{cc} \theta^{\mu\nu}M^2\frac{1}{\square} & \theta^\mu{}_\beta(L^{\beta\alpha}\partial_\alpha + N^\beta)\frac{1}{\square} \\ h^\beta\theta_{\beta\nu}\frac{1}{\square} & (R^\lambda\partial_\lambda + \Pi)\frac{1}{\square} \end{array} \right\}, \quad (\text{A4})$$

e considerando somente os termos $n = 2, 3, 4$ da série. Note que a contribuição $n = 4$, que vem do setor fermiônico, é um caso particular do resultado que obtivemos no Capítulo 3, padrão na literatura. Assim, procedemos no cálculo dos termos $n = 2, 3, 4$ analogamente ao caso do vetor axial. Com os resultados parciais

$$-\frac{1}{2} \text{sTr} \left(\hat{\Pi}\frac{1}{\square} \right)^2 \Big|_{\text{div}} = \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \{ 3M^4 + 6g^3\bar{\psi}V\psi + 12g^2m\bar{\psi}\psi \} \quad (\text{D.4})$$

e

$$\frac{1}{3} \text{sTr} \left(\hat{\Pi}\frac{1}{\square} \right)^3 \Big|_{\text{div}} = \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \{ -6g^3\bar{\psi}V\psi \} \dots, \quad (\text{D.5})$$

podemos, adicionando a contribuição fermiônica, encontrar a expressão completa para as divergências

$$\Gamma_{div}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ \frac{3}{2} M^4 + 6g^2 m \bar{\psi} \psi - \frac{2g^2}{3} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} - 2m^4 \right\}. \quad (\text{D.6})$$

D.2 Vetor axial sem massa

No caso do vetor sem massa acoplado com espinores (QED) e do vetor axial sem massa acoplado ao espinor sem massa, os cálculos a 1-loop podem ser realizados da maneira usual, baseada no método de Faddeev-Popov. No entanto, como verificação do nosso procedimento, reproduzimos esses resultados seguindo a mesma metodologia. Em virtude da maior simplicidade dos cálculos nesses casos particulares, vamos omitir a maior parte das passagens intermediárias.

Para a Eletrodinâmica Quântica (QED), o resultado encontrado é bem conhecido (compare com o resultado (D.6)):

$$\Gamma_{div}^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ -6e^2 m \bar{\psi} \psi + \frac{2e^2}{3} F_{\mu\nu}^2 \right\}. \quad (\text{D.7})$$

Considere a teoria para o vetor axial sem massa acoplado com espinores sem massa. A ação clássica é

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \right\}, \quad (\text{D.8})$$

onde a derivada covariante é a mesma para o caso massivo. Esta ação é invariante sob as transformações de gauge (3.31). Fazendo a mudança de variáveis e usando o método do campo de fundo, como descritos previamente, podemos chegar à seguinte expressão para a ação bilinear:

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \theta^{\mu\nu} (\square + M^2) & \theta^\mu{}_\beta (L^{\beta\alpha} \partial_\alpha + M^\beta) \\ P_\beta \theta^{\beta\nu} & \hat{1} \square + R^\lambda \partial_\lambda + \Pi \end{pmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

onde

$$L^{\alpha\beta} = -i\eta\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\beta, \quad M^\beta = \eta^2\bar{\psi}\gamma^\beta\gamma^\alpha S_\alpha, \quad P^\beta = -2\eta\gamma^\beta\gamma_5\psi. \quad (\text{D.10})$$

A expansão para $\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{\mathbf{H}}$ e os cálculos restantes produzem quase as mesmas fórmulas intermediárias encontradas no caso do vetor massivo, pois as matrizes $\hat{\mathbf{H}}$ têm a mesma estrutura, sendo as únicas diferenças as equações (D.10) acima. Desta maneira, podemos obter

$$-\frac{1}{2} \text{sTr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^2 \Big|_{div} = \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \{ -6\eta^3 \bar{\psi} \gamma_5 \not{S} \psi \} \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{1}{3} \text{sTr} \left(\hat{\Pi} \frac{1}{\square} \right)^3 \Big|_{div} = \frac{i}{\varepsilon} \int d^4x \{ 6\eta^3 \bar{\psi} \gamma_5 \not{S} \psi \}. \quad (\text{D.12})$$

A expressão geral para as divergências é completamente definida, portanto, pelo loop fermiônico:

$$\Gamma_{div}^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \frac{2\eta^2}{3} S_{\mu\nu}^2. \quad (\text{D.13})$$

Este resultado, invariante de gauge, segue-se do procedimento padrão usando o método de Faddeev-Popov.

Apêndice E

Diagramas a 2-loops usando parametrização de Feynman

Partimos da expressão (5.15) e fazemos, no denominador, a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{\{ax + (1-x)b\}^2}.$$

Seguindo os procedimentos-padrão em regularização dimensional, fazemos a mudança de variável $p \rightarrow p' = p - qx$. Depois de algumas manipulações, encontramos integrais conhecidas e obtemos

$$I_\nu = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \{ \Delta \gamma_\nu + \Delta^{-\epsilon} D_\nu \},$$

onde

$$\Delta = q^2 x(1-x) - m^2,$$

$$D_\nu = \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta q^\alpha q^\beta x^2 + xp^\alpha (-2m \eta_{\nu\alpha} + 2m \gamma_\alpha \gamma_\nu - \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta q^\beta) + mq^\alpha \gamma_\nu \gamma_\alpha - m^2 \gamma_\nu.$$

O cálculo direto da integral (E) dá como resultado a mesma expressão encontrada previamente, (5.18). Assim, o operador polarização (correspondente ao diagrama da Figura 1) calculado pelos dois métodos é o mesmo, (5.19).

Agora, considere o diagrama da Figura 2. Partindo de (5.23), fazemos, desta vez, a seguinte parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x) dx}{(ax + (1-x)b)^3},$$

e a mudança usual de variáveis, $\bar{p} = p - xq$. Pode-se, com algumas manipulações algébricas, encontrar

$$I_{\nu\mu} = 2 \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(A_{\alpha\nu\beta\mu\rho} + A_{\alpha\nu\rho\mu\beta} + A_{\rho\nu\beta\mu\alpha})xq^\rho + B_{\alpha\nu\mu\beta}}{(p^2 - \Delta)^3} p^\alpha p^\beta.$$

A partir das integrais conhecidas da regularização dimensional, podemos integrar em x e escrever

$$I_{\nu\mu} = \frac{i}{12\epsilon} (\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho q^\rho + \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu q^\rho + \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu q^\rho) + \frac{1}{4\epsilon} (12m \eta_{\mu\nu} - 4m \gamma_\mu \gamma_\nu + 2q^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu) + \dots$$

Como já dispomos de J , obtemos como resultado final a mesma expressão encontrada em (5.27).

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [2] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Foundations* (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [4] L.D. Faddeev and V.N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. **B 25** (1967) 29-30.
- [5] B.S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. I. The canonical theory*, Phys. Rev. **160** (1967) 1113-1148;
B.S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory*, Phys. Rev. **162** (1967) 1195-1239;
B.S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory*, Phys. Rev. **162** (1967) 1239-1256.
- [6] G. t'Hooft and M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189-213.
C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Dimensional renormalization: the number of dimension as a regularizing parameter*, Nuovo Cim. **B 12** (1972) 20-25.

- [7] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publishing-Bristol (1992).
- [8] G. t'Hooft, *The background field method in gauge field theories*, 1975. In Karpacz 1975, Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis n.368, vol.1, Wroclaw 1976, 345-369.
- [9] L.F. Abbot, Nucl. Phys. **B 185** (1981) 189-203.
- [10] S. Ichinose and M. Omote, *Renormalization using the background field method*, Nucl. Phys. **B 203** (1982) 221;
S. Ichinose and M. Omote, *One loop renormalization in curved space-times using the background field method*, Phys. Rev. **D 27** (1983) 2341.
- [11] C. Lee, *Proper time renormalization of multiloop amplitudes in the background field method. I. ϕ^4 -Theory*, Nucl. Phys. **B 207** (1982) 157;
C. Lee and T. Lee, *Background field and Schwinger-DeWitt proper time algorithm for the low-energy effective theory action*, Phys. Rev. **D 39** (1989) 1681-1700.
- [12] I. Jack and H. Osborn, *two loop background field calculations for arbitrary background fields*, Nucl. Phys. **B 207** (1982) 474;
D.M. Capper and A. MacLean, *The background field method at two loops: a general gauge Yang-Mills calculation*, Nucl. Phys. **B 203** (1982) 413-422;
I. Jack, *Background field calculations in curved space-time. I. Application to a pure gauge theory*, Nucl. Phys. **B 234** (1984) 331-364.
I. Jack, *Background field calculations in curved space-time. II. General formalism and application to scalar fields*, Nucl. Phys. **B 234** (1984) 365-378.

- [13] G. t'Hooft and M. Veltman, *One-loop divergences in the theory of gravitation*, Ann. Inst. Henri Poincaré bf XX n.1, 69-94.
- [14] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, *One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields*, Phys. Rev. **D 10**, n.2 (1974) 401-410.
- [15] S. Deser, Hung-Sheng Tsao and P. van Nieuwenhuizen, *One-loop divergences of the Einstein Yang-Mills system*, Phys. Rev. **D 10** (1974) 3337;
Nonrenormalizability of Einstein Yang-Mills interactions at the one loop level, Phys. Lett. **B 50** (1974) 491.
- [16] M.H. Goroff and A. Sagnotti, *Quantum gravity at two loops*, Phys. Lett. **B 160** (1985) 81;
M.H. Goroff and A. Sagnotti, *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. **B 266** (1986) 709.
- [17] Kallosh R.E., Tarasov O.V. and Tyutin I.V., *One-loop finiteness of quantum gravity off mass shell*, Nucl.Phys. **B137** (1978) 145.
- [18] D.M. Capper, G. Leibbrandt and M.R. Medrano, *Calculation of the graviton self-energy using dimensional regularization*, Phys. Rev. **D8** (1973) 4320;
D.M. Capper, M.A. Namazie, *A general gauge calculation of the graviton self-energy*, Nucl. Phys. **B142** (1978) 535;
D.M. Capper, *A general gauge graviton loop calculation*, J. Phys. **A 13** (1980) 199.
- [19] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Local momentum space representation of graviton propagators in an external gravitational field an one loop counter-terms in quantum gravity*, Sov. Phys. J. **27,n4** (1984) 298-300.

- [20] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Divergences and anomalies for coupled gravitational and Majorana spin 1/2 fields*, Nucl.Phys. **B 191** (1981) 237-259.
- [21] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, Sov. J. Nucl. Phys. **8** (1983) 58.
- [22] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *One loop counterterms derivation in the first order quantum gravity formalism* Acta Phys. Polon. **B 16** (1985) 103-107.
- [23] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Izv. VUZov. Fizika (Sov. J. Phys.)* **31**, n.9 (1988) 40.
- [24] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Nucl. Phys. **B 201** (1982) 469-491.
- [25] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [26] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [27] S. Deser, *Self-interaction and gauge invariance*, Gen. Rel. Grav. **1** (1970) 9-18.
- [28] I.L. Shapiro and H. Takata, *Conformal transformation in gravity*, Phys. Lett. **B 361** (1995) 31-37.
- [29] D.M. Capper and M.J. Duff, *Conformal Anomalies and the Renormalizability Problem in Quantum Gravity*, Phys. Lett. **A 53** (1975) 361.
- [30] S. Deser, M. Duff and C.J. Isham, *Nonlocal Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B 111** (1976) 45.
- [31] M.J. Duff, *Observations on Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **125 B** (1977) 334.

- [32] L.S. Brown, *Stress Tensor Trace Anomaly in a Gravitational Metric: Scalar Fields*, Phys. Rev. **D 15** (1977) 1469;
L.S. Brown and J.P. Cassidy, *Stress Tensor Trace Anomaly in a Gravitational Metric: General Theory, Maxwell Fields*, Phys. Rev. **D 15** (1977) 2810.
- [33] M.J. Duff, *Twenty years of Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387-1404.
- [34] R. Kallosh, *Phys. Lett B* **55** (1975) 321.
- [35] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, *Conformal off mass shell extension and elimination of conformal anomalies in quantum gravity*, Phys. Lett. **B 73** (1978) 209.
- [36] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, *Conformal invariance and asymptotic freedom in quantum gravity*, Phys. Lett. **B 77** (1978) 262.
- [37] I. Antoniadis, P.O. Mazur and E. Mottola, *Conformal symmetries and central charges in four dimensions*, Nucl. Phys. **B388** (1992) 627-647.
- [38] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Repts. **119** (1985).
- [39] M.Yu. Kalmykov, K.A. Kazakov, P.I. Pronin and K.V. Stepanyantz, *Detailed analysis of the dependence of the one loop counterterms on the gauge and parametrization in the Einstein gravity with the cosmological constant*, Class. Quant. Grav. **15** (1998) 3777-3794;
M.Yu. Kalmykov, *Gauge and parametrization dependences of the one loop counterterms in the Einstein gravity*, Class. Quant. Grav. **12** (1995) 1401-1412.
- [40] P.M. Lavrov and A.A. Reshetnyak, *One loop effective action for Einstein gravity in special background gauge*, Phys.Lett. **351B** (1995) 105. Neste artigo, foi realizado o tratamento correto da gauge proposta anteriormente por

- [41] Sh. Ichinose, *BRST symmetry on background field, Kallosh theorem and renormalization*, Nucl.Phys. **B 395** (1993) 433.
- [42] A.G. Jacksenaev and I.L. Shapiro, *Gauge fixing dependence of the one loop divergences in higher derivative quantum gravity with scalar field and the effective potential*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1677-1685.
- [43] S.M. Christensen and M.J. Duff, *Quantizing gravity with a cosmological constant*, Nucl. Phys. **B 170** (1980) 480.
- [44] A.G. Jacksenaev, I.L. Shapiro, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. **B 324** (1994) 286-292.
- [45] M. Asorey, J.L. López and I.L. Shapiro, *Some remarks on higher derivative quantum gravity*, Int. Jour. Mod. Phys. **A 12** n.32 (1997) 5711-5734.
- [46] R. Kallosh, *The renormalization in non-Abelian gauge theories*, Nucl. Phys. **B 78** (1974) 293.
- [47] B.S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields* (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [48] G. de Berredo-Peixoto, A.B. Penna-Firme and I.L. Shapiro, *One-loop divergences of quantum gravity using conformal parametrization*, Mod. Phys. Lett. **A 15**, n. 38,39 (2000), 2335-2343. CBPF-NF-086/00.
- [49] H. Kawai, Y. Kitazawa and M. Ninomia, *Ultraviolet stable fixed point and scaling relations in $2 + \epsilon$ dimensional quantum gravity*, Nucl. Phys. **B404** 684 (1993).
- [50] R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Anomaly induced effective actions and Hawking radiation*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1494-1497.

- [51] J.D. Bekenstein, *Black holes and the second law*, Nuovo Cim. Lett. **4** (1972) 737;
Black holes and entropy, Phys. Rev. **D 7** (1973) 2333;
Generalized second law of thermodynamics in black holes physics, Phys. Rev. **D 9**
(1974) 3292.
- [52] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975)
199-220.
- [53] V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Thermal fields, entropy and black holes*, Class. Quant.
Grav. **15** (1998) 2041-2074.
- [54] V.P. Frolov, W. Israel and S.N. Solodukhin, *One-loop quantum corrections to the
thermodynamics of charged black holes*, Phys. Rev. **D 54** n.4 (1996) 2732.
- [55] V.P. Frolov, D.V. Fursaev and A.I. Zelnikov, *Statistical origin of black hole entropy
in induced gravity*, Nucl. Phys. **B 486** (1997) 339-352.
- [56] V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Statistical mechanics of charged black holes in induced
Einstein-Maxwell gravity*, Phys. Rev. **D 61** (2000) 064010.
- [57] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Non-singular cosmological model
with torsion induced by vacuum quantum effects*, Phys. Lett. **B 162** (1985) 92-96.
- [58] J.C. Fabris, A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *Anomaly induced effective action for
gravity and inflation*, Grav. Cosmol. **6** (2000) 59-65.
J.C. Fabris, A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *to be published in the proceedings of
EURESCO Conference on Frontiers in Particle Astrophysics and Cosmology*, San
Feliu de Guixols, Spain, 2000. *E-print archive: hep-th/0011030*.

- [59] J.A. Helajel-Neto, A.B. Penna-Firme and I.L. Shapiro, *Conformal symmetry, anomaly and effective action for metric-scalar gravity with torsion*, Phys. Lett. **B 479** (2000) 411-420.
- [60] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories*, Phys. Lett. **B 134** n.3,4 (1984) 187.
- [61] R.J. Riegert, *A non-local action for the trace anomaly*, Phys. Lett. **B 134** n.1,2 (1984)
- [62] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B 103** (1981) 207.
- [63] J. Erdmenger and H. Osborn, *Conformally covariant differential operators: symmetric tensor fields* Class. Quant. Grav. **15** (1998) 273-280.
- [64] A.O. Barvinsky, Yu.V. Gusev, G.A. Vilkovisky and V.V. Zhytnikov, *The one-loop effective action and trace anomaly in four dimensions*, Nucl. Phys. **B 439** (1995) 561-582.
- [65] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *On the high derivative fermionic operator and trace anomaly*, trabalho em fase de conclusão.
- [66] H.P. Dürr and P. du T. van der Merwe, *Conformal invariant spinor theory with third order derivatives*, Il Nuovo Cim. **23 A** n.1 (1974) 1; C.C. Chiang and H.P. Dürr, *Higher-order derivative theories and conformal invariance*, Il Nuovo Cim. **28 A** n.1 (1975) 89.
- [67] S.M. Christensen and M.J. Duff, *New gravitational index theorems and super theorems*, Nucl. Phys. **B 154** (1979) 301.

- [68] D. Anselmi, *Irreversibility and higher spin conformal field theory*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 2847-2866.
- [69] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *One-loop β -function in conformal supergravity*, *Nucl. Phys. B* **203** (1982) 157-178.
- [70] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal supergravity*, *Phys. Rep.* **19** n. 4,5 (1985) 233-262.
- [71] J. Julve and M. Tonin, *Quantum gravity with higher derivative terms*, *Il Nuovo Cim.* **B 46** (1978) n.1 137
- [72] I.G. Avramidi and A.O. Barvinski, *Asymptotic freedom in higher derivative quantum gravity*, *Phys. Lett. B* **159** (1985) 269-274.
 I.G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action of quantum field theory and investigation of higher derivative quantum gravity*, PhD Thesis (1986), hep-th/9510140.
- [73] K.S. Stelle, *Renormalization of higher derivative quantum gravity*, *Phys.Rev. D* **16** (1977) 953.
- [74] B.L. Voronov and I.V. Tyutin, *On renormalization of R^2 -gravitation (in Russian)*, *Yad. Fiz. (J. Nucl. Phys.)* **39** (1984) 998.
- [75] D.A. Johnston, *Sedentary ghost poles in higher derivative quantum gravity*, *Nucl. Phys. B* **297** (1988) 721.
- [76] P. van Nieuwenhuizen, *On ghost-free tensor Lagrangians and linearized gravitation*, *Nucl. Phys. B* **60** (1973) 478-492.

- [77] E. Tomboulis, *1/N Expansion and renormalization in quantum gravity*, Phys Lett. **B 70** (1977) 361.
- [78] A. Salam and J. Strathdee, *Remarks on high-energy stability and renormalizability of gravity theory*, Phys. Rev. **D 18** (1978) 4480.
- [79] D. Neville, *Gravity Lagrangian with ghost-free curvature-squared terms*, Phys. Rev. **D 18** n.10 (1978) 3535-3543.
- [80] I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Gauge invariance and unitarity in higher derivative quantum gravity*, Phys. Rev. **D 33** (1986) 2756.
- [81] R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Phys. Rev. **101** (1956) 1597-1607.
- [82] T.W.B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, J. Math. Phys. **2** (1961) 212-221.
- [83] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Sov. J. Nucl. Phys* **44** (1986) 1348;
 I.L. Buchbinder, O.K. Kalashnikov, I.L. Shapiro, V.B. Vologodsky and J.J. Wolfenbut, *The stability of asymptotic freedom in grand unified models coupled to R^2 -gravity*, Phys. Lett. **B 216** (1989) 127-132.
- [84] I.L. Shapiro, *Asymptotic behavior of effective Yukawa coupling constants in quantum R^2 -gravity with matter*, Class. Quant. Grav. **6** (1989) 1197-1201.
- [85] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory. 1. Introduction*, Cambridge Univ. Pr., Cambridge, UK, 1987.
- [86] F.M. Hehl, Gen. Rel. Grav. **4** (1973) 333;
 F.M. Hehl, Gen. Rel. Grav. **5** (1974) 491.

- [87] F.M. Hehl, P. Heyde, G.D. Kerlick and J.M. Nester, *General relativity with spin and torsion: foundations and prospects*, Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 393; F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, *Metric affine gauge theory of gravity: field equations, noether identities, world spinors and breaking of dilaton invariance*, Phys. Rep. **258** (1995) 1-171.
- [88] H. Rumpf, *Creation of Dirac particles in general relativity with torsion and electromagnetism. I. The general formalism*, Gen. Rel. Grav. **10** (1979) 509;
H. Rumpf, *Creation of Dirac particles in general relativity with torsion and electromagnetism. II. The constant electric field - a pedagogical example*, Gen. Rel. Grav. **10** (1979) 526;
H. Rumpf, *Creation of Dirac particles in general relativity with torsion and electromagnetism. III. Matter production in a model of torsion*, Gen. Rel. Grav. **10** (1979) 647.
- [89] V.N. Ponomarev and P.I. Pronin, *Production of massless scalar particles by a torsion field*, Theor. Math. Phys. **39** (1979) 559-561.
- [90] W.H. Goldthorpe, *Spectral geometry and $SO(4)$ gravity in a Riemann-Cartan spacetime*, Nucl. Phys. **B 170** (1980) 307-328.
- [91] T. Kimura, *Expansion coefficient of heat kernel of Laplacian operator in Riemann-Cartan space*, J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981) 329.
- [92] T. Kimura, *Conformal and axial anomalies in Riemann-Cartan space*, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 2011.
- [93] Yu.N. Obukhov, *Spectral geometry of the Riemann-Cartan spacetime*, Nucl. Phys. **B 212** (1983) 237-254;

- Yu.N. Obukhov, *Spectral geometry of the Riemann-Cartan spacetime and the axial anomaly*, Phys. Lett. **B 108** (1982) 308-310;
- Yu.N. Obukhov, *Arbitrary spin field equations and anomalies in the Riemann-Cartan spacetime*, J. Phys. A: Math. Gen. **16** (1983) 3795-3804.
- [94] H.T. Nieh and M.L. Yan, *Quantized Dirac field in curved Riemann-Cartan background. I. Symmetry properties, Green's function*, Ann. of Phys. **138** (1982) 237-259.
- [95] G. Cognola and S. Zerbini, *Seeley-DeWitt coefficients in a Riemann-Cartan spacetime*, Phys. Lett. **214** (1988) 70.
- [96] S. Yajima, *Evaluation of the heat kernel in Riemann-Cartan space*, Class. Quant. Grav. **13** (1996) 2423-2435.
- [97] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the renormalization of the models of quantum field theory in an external gravitational field with torsion*, Phys. Lett. **B 151** (1985) n.3,4 263;
- I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, Sov. Fiz. **8** (1985) 94; **12** (1985) 58.
- [98] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the renormalization group equations in curved spacetime with torsion*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1197-1206.
- [99] I.L. Buchbinder, *Quantum field theory renormalization in curved spacetime and renormalization group equations*, Fortschr. Phys. **34** (1986) 605-628.
- [100] M. Novello, *Scalar and massless vector fields in Cartan space*, Phys. Lett. **A 59** (1976) 105-106.
- [101] M.O. Katanayev and I.V. Volovich, *String model with dynamical geometry and torsion*, Phys. Lett. **B 175** n.4 (1986) 413;

- Two-dimensional gravity with dynamical torsion and strings*, Ann. Phys. **197** (1990) 1-32.
- [102] V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the possible experimental manifestations of the torsion field at low energies*, Izv. VUZov., Fisica (in Russian) **35**, n.3 (1992) 5, hep-th/9406122.
- [103] R.T. Hammond, *Upper limit on the torsion coupling constant*, Phys. Rev. D **52** n.12 (1995) 6918-6921.
- [104] A.G. Nikitin, *On exact Foldy-Wouthuysen transformation*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 3297-3300.
- [105] K.M. Case, *Some generalizations of the Foldy-Wouthuysen transformation*, Phys. Rev. **95** n.5 (1954) 1323-1328.
- [106] C. Lämmerzahl, *Constraints on spacetime torsion from Hughes-Drever experiments*, Phys. Lett. A **228** (1997) 223-231.
- [107] L.H. Ryder and I.L. Shapiro, *On the interaction of massive spinor particles with external electromagnetic and torsion fields*, Phys. Lett. **A247** (1998) 21-26.
- [108] A.S. Belyaev and I.L. Shapiro, *Torsion action and its possible observables*, Phys. Lett. **B 425** (1998) 246; Nucl. Phys, **B 543** (1999) 20-46.
- [109] G. de Berredo-Peixoto, *Gravitação em Três Dimensões*, tese de mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, 1997.
- [110] J.L. Boldo, J.A. Helajel-Neto and L.M. de Moraes, *Comments on topologically massive gravity with torsion*, Class. Quantum Grav. **17** (2000) 813;

- [111] J.L. Boldo, J.A. Helajel-Neto and N. Panza, *Propagating Torsion in 3D-Gravity and Dynamical Mass Generation*, **hep-th/9905110**. A ser publicado em Europhys. Letters.
- [112] D. Neville, *Gravity theories with propagating torsion*, Phys. Rev. **D 21** n.4 (1980) 867.
- [113] D. Neville, *Spin-2 propagating torsion*, Phys. Rev. **D 23** n.6 (1981) 1244.
- [114] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, *New ghost-free gravity Lagrangian with propagating torsion*, Phys. Rev. **D 21** (1980) 3269.
- [115] E. Sezgin, *Class of ghost-free gravity Lagrangians with massive or massless propagating torsion*, Phys. Rev. **D 24** n.6 (1981) 1677.
- [116] S.M. Carroll and G.B. Field, *Consequences of propagating torsion in connection dynamic theories of gravity*, Phys.Rev. **50D** (1994) 3867.
- [117] I.L. Shapiro, *Physical aspects of the space-time torsion*, a ser publicado no Phys. Rep.
- [118] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge fields. Introduction to quantum theory*. (Benjamin/Cummings, 1980).
- [119] G. de Berredo-Peixoto, J.A. Helajel-Neto and I.L. Shapiro *On the consistency of a fermion-torsion effective theory*, JHEP **02** (2000) 003.
- [120] D.G. Boulware, *Renormalizability of massive non-Abelian gauge fields: a functional integral approach*, Ann. Phys. **56** (1970) 140-171.
- [121] S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *One-loop renormalization of two-dimensional induced quantum gravity*, Phys. Lett. **B 263** (1991) 183-189.

- [122] A.M. Pelinson, *Ação efetiva induzida por anomalia para solução gravitacional e inflacionária*, Tese de Mestrado (1998), UFJF, Juiz de Fora, MG.
- [123] G. Leibbrandt, *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 849.
- [124] J.A. Helayël-Neto, *Broken $N=4$ Yang-Mills theory: Two-loop finiteness*, Il.Nuovo Cim. **81A** (1984) 533;
J.A. Helayël-Neto, I.G. Koh and H. Nishino, *Locally supersymmetric grand unified theory with two-loop stable mass hierarchy*, Phys.Lett. **B 131** (1984) 75.
- [125] B. Geyer, D. Gitman and I.L. Shapiro, *Path integral and pseudoclassical action for spinning particle in external electromagnetic and torsion fields*, Int. J. Mod. Phys. **A 15** (2000) 3861-3876.

“ASPECTOS DE GRAVITAÇÃO QUÂNTICA E DE TEORIAS QUÂNTICAS COM TORÇÃO DINÂMICA”

Guilherme de Berreto Peixoto

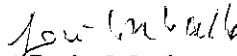
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Chapiro Ilya Lvovich – Presidente



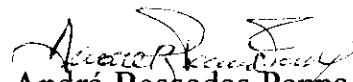
José Abdalla Helayël Neto – Co-orientador



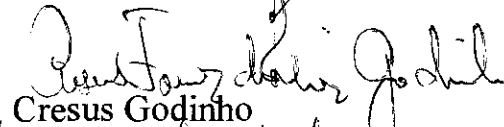
José Luiz Matheus Valle




Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz



André Bessadas Penna Firme



Cresus Godinho



Nelson Pinto Neto

Rio de Janeiro, 21 de fevereiro de 2001