TESE DE DOUTORADO

ASPECTOS DE BOSONIZAÇÃO FUNCIONAL EM (2+1)D

João Felipe de Medeiros Neto

Orientador : Daniel Gustavo Barci

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Janeiro/2001

Resumo

Nesta tese fazemos uma análise geral de processos de bosonização no plano. Mostramos inicialmente que em duas dimensões espaciais, partículas podem apresentar estatística fracionária, sendo portanto anyons. Tais partículas podem ser associadas a férmions ou bósons acoplados a fluxos magnéticos. Mostramos uma aplicação deste formalismo para o cálculo da resposta electromagnética no efeito Hall Quântico Fracionário. Fazemos também um resumo da técnica de bosonização funcional de funções de correlação de correntes em sistemas fermiônicos relativísticos no plano, e mostramos a generalização dos resultados para a bosonização de modelos não-relativísticos em $(2+1)d$. Falamos ainda sobre as dificuldades para a realização do cálculo do determinante fermiônico e mostramos os principais métodos de cálculo deste termo. Também mostramos a relação deste determinante com o tensor de polarização do vácuo e realizamos ainda um cálculo para este tensor usando o método de regularização de point-splitting. A anomalia de paridade é discutida extensamente.

Abstract

We analyze different approaches of bosonization in two spatial dimensions. Firstly, we show that in the plane, particles can have fractional statistics and therefore they can be associated to fermions or bosons attached to magnetic fluxes. We apply this approach to the study of the electromagnetic response in the Fractional Quantum Hall Effect. Secondly, we develop a functional bosonization technique for current correlation functions for relativistic as well as non-relativistic fermions in $(2+1d)$. We also show the fundamental role of the fermion determinant in the bosonization approach and evaluate the vacuum polarization tensor using the point-slitting regularization. We discuss in detail the so called parity anomaly.

Agradecimentos

Durante a elaboração desta tese, o apoio, a paciência, a postura científica, a capacidade de trabalho, a visão da situação presente e futura, a pessoa enfim, de meu orientador realmente me impressionaram muito positivamente. Devo a ele não só esta tese, mas também todos os trabalhos que desenvolvemos, publicamos e apresentamos, e ainda os contatos científicos que estabeleci. Obrigado Daniel Gustavo Barci.

Apesar de não ter tomado muito o tempo de meu orientador *ad hoc* e amigo, Sebastião Alves Dias, sei que sempre pude contar com o apoio dele, e devo lembrar também um *pequeno* detalhe: sem ele esta tese não teria sido apresentada e não estaria agora em suas mãos, leitor. Obrigado Tião.

Agradeço também à minha esposa pelo apoio total durante a elaboração desta tese.

Não posso deixar de agradecer também a todos os amigos, em particular ao Danilo e ao Humberto, e a todas as pessoas do DCP. Agradeço ainda o suporte financeiro do CNPq.

À Elen

Conteúdo

1 Introdução **1**

2 Anyons, termo de Chern-Simons e a correspondência entre férmions e bósons **11**

2.1 Anyons 12

2.2 Anyons e a equivalência entre férmions e bósons 15

2.3 Anyons e o termo de Chern-Simons 16

2.4 Bósons carregados acoplados a um campo de Chern-Simons: resposta eletromagnética e outras características 18

3 Bosonização Funcional em (2+1)d **26**

3.1 Férmions relativísticos 27

3.1.1 O termo cinético 28

3.1.2 Interações 32

3.2 Férmions não-relativístas 35

3.2.1 Relação de dispersão linear 36

3.2.2 Relação de dispersão não-linear 39

4 O determinante fermiônico e o termo de Chern-Simons 45

4.1 Estrutura geral do determinante fermiônico e a ação bozonizada 46

4.2 Ambigüidades na determinação do coeficiente de Chern-Simons 51

4.3 O método point-splitting e o Coeficiente de Chern-Simons 58

5 Conclusões 67

A Anyons e o Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF) 73

B Transformações $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ de férmions em $(2+1)d$ 78

B.1 Transformação $\mathcal{P}$ - paridade 78

B.2 Transformação $\mathcal{C}$ - conjugação de carga 80

B.3 Transformação $\mathcal{T}$ - inversão temporal 81

B.4 Considerações finais sobre transformações $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ 82

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas de elétrons fortemente correlacionados em duas dimensões espaciais ($(2+1)d$) vem tendo sua importância ressaltada nos últimos anos, com a descoberta de fenomenos remarcáveis, como por exemplo o Efeito Hall Quântico e os supercondutores a altas temperaturas críticas. Nestes tipos de sistema, considera-se que as partículas constituintes estão confinadas a um plano, sendo que o movimento na terceira dimensão espacial pode ser desprezado.

Nos últimos anos tem-se avançado muito na aplicação de técnicas de Teoria de Campos a sistemas da Matéria Condensada[1]. Por exemplo, a referência [2] apresenta uma aplicação interessante de técnicas semiclássicas no Efeito Hall Quântico Inteiro (EHQI).

Uma das técnicas freqüentemente utilizada na descrição de sistemas de elétrons fortemente correlacionados é a bosonização. Esta técnica foi desenvolvida com êxito para sistemas em uma dimensão espacial, paralela e independentemente por físicos das áreas de matéria condensada e de teoria de campos. Os primeiros trabalhos podem ser atribuídos a F. Bloch[3] e S. Tomonaga[4] na primeira metade do século XX. Vinte anos mais tarde o assunto foi redescoberto por Mattis e Lieb[5], mas sua compreensão completa só foi atingida com os trabalhos de Coleman[6], Luther[7] e Mandelstam[8] no ano de 1975.

A idéia original foi fazer um mapeamento entre operadores de campo fermiônicos e bosônicos, de modo que modelos fermiônicos pudessem ser representados por modelos bosônicos, ou seja, pudessem ser "bosonizados". As regras para a bosonização em $(1+1)d$ mostraram-se ser universais, no sentido de que são independentes dos modelos considerados. Por exemplo, a bosonização da corrente fermiônica em $(1+1)d$, $j_\mu^F = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, nos leva à expressão da corrente bosônica $j_\mu^B = \epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi$, independentemente do modelo ao qual a corrente está associada. Tal universalidade aponta para a existência de uma estrutura matemática subjacente aos processos de bosonização, conhecida como "álgebra dual".

Além de assegurar a universalidade das regras de bosonização em $(1+1)d$, esta álgebra também é responsável pela existência de propriedades gerais de sistemas fermiônicos em uma dimensão espacial, propriedades estas que estão relacionadas a certas simetrias presentes nestes tipos de sistemas. Por exemplo, foi mostrado recentemente [9] que a condutância em certas classes de arames quânticos (com contatos elétricos) é universal, devido à presença de uma anomalia quiral global e à universalidade das regras de bosonização em $(1+1)d$.

Uma propriedade geral importante apresentada pelos sistemas interagentes em $(1+1)d$ é a "dualidade", que consiste basicamente na correspondência entre o regime perturbativo dos modelos fermiônicos e o regime não-perturbativo dos respectivos modelos bosônicos associados, e vice-versa. Como exemplo podemos citar o caso do modelo de Thirring massivo em $(1+1)d$, considerando um alto valor para a constante de acoplamento g. Neste caso não se pode aplicar métodos perturbativos, e a ação é dada por

$$S_F = \int d^2x \left(\bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - \frac{1}{2} g j_\mu^F j_\mu^F \right)$$

A este modelo pode-se associar um modelo bosonizado de sine-Gordon, cuja expansão em torno do ponto de mínima energia irá gerar uma ação que pode ser escrita como

$$S_B = \frac{1}{2} \int d^2x \left(\partial_\nu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\alpha_0}{2} \phi^2 + \frac{\alpha_0 \beta^2}{4!} \phi^4 + ... \right)$$

com

$$\beta = \left(\frac{4\pi}{1 + g/\pi} \right)^{1/2}$$

Deste modo a ação bosonizada permitirá a utilização das técnicas pertubativas. Fisicamente isto significa que os verdadeiros estados assintóticos do sistema não devem ser férmions (os quais estão fortemente acoplados), mas sim os estados ligados associados ao modelo de sine-Gordon. Por outro lado, se a constante de acoplamento for pequena, o modelo de Thirring considerado poderá ser desenvolvido pertubativamente, enquanto que o modelo de sine-Gordon associado não poderá ser tratado da mesma maneira [6]. Em particular, as excitações topológicas (sólitons) do modelo sine-Gordon correspondem aos férmios "quase-livres" do modelo de Thirring no regime perturbativo. A descorberta deste tipo de comportamento em $(1+1)d$, juntamente com o advento da álgebra dual, representaram um importante avanço no entendimento de sistemas físicos em uma dimensão espacial, e deram início a vários esforços no sentido de se estender as regras de bosonização a um número mais elevado de dimensões, em particular aos sistemas fermiônicos no plano, devido à sua importância nas diversas áreas de pesquisa citadas anteriormente. Em particular, a existência da dualidade "partícula-sóliton", conectando os regimes perturbativo e não-perturbativo, é um assunto completamente em aberto em dimensões superiores e atualmente é um assunto de intenso debate em diferentes áreas da física.

Na descrição de férmions em dimensões superiores através de excitações bosônicas, temos que individualizar diferentes tipos de sistemas. A separação de modelos pertencentes às áreas de "matéria condensada" ou "teoria de campos" não é hoje uma boa classificação, já que no contexto de elétrons fortemente correlacionados não existem diferenças essenciais entre estas duas abordagens. Talvez uma melhor e mais precisa classificação em termos físicos seria separar os modelos em dois grupos: os que apresentam "densidade finita" e os que têm "densidade nula". Os modelos fermiônicos a densidade finita caracterizam-se pela existência de uma superfície de Fermi. Já os modelos a densidade nula são os tradicionalmente tratados por físicos de teorias de campos. Porém, em matéria condensada os modelos a densidade nula são usados para descrever pequenas flutuações em torno de regiões específicas da superfície de Fermi. Um exemplo importante surge na descrição de algumas excitações em supercondutores à alta temperatura crítica, chamadas de "quasipartículas nodais" (*nodal quasiparticles*) [10], que comportam-se como férmions de Dirac não massivos em $(2+1)d$.

Nos modelos a densidade finita, a superfície de Fermi pode ser considerada como um "objeto quântico" (uma membrana), sendo que suas flutuações podem ser descritas em termos de uma teoria bosônica. A primeira tentativa neste sentido foi feita por A. Luther

[11] e continuada por F. Haldane [12], que bosonizou um sistema planar considerando-o composto por infinitos sistemas unidimensionais parametrizados por uma variável angular. A bosonização de líquidos de Fermi em $(2+1)d$ foi também estudada por A. H. Castro Neto e E. Fradkin [13, 14], que mostraram que a teoria de Landau para Líquidos de Fermi pode ser considerada como um ponto fixo estável, no contexto do grupo de renormalização. Algumas propriedades das excitações de uma partícula em liquidos de Férmi também foram estudadas com métodos funcionais nas refs. [15, 16, 17].

Outra classificação importante que pode ser usada para modelos fermiônicos diz respeito às simetrias que estes modelos apresentam. Em $(2+1)d$, as simetrias mais relevantes a serem consideradas são a de paridade e a de inversão temporal. A quebra destas simetrias provoca a aparição de um "gap" no espectro de energias, modificando a física de longas distâncias do sistema, assim como sua descrição em termos bosônicos.

Nos sistemas que apresentam quebra explícita da simetria de paridade existem duas formas de chegar a uma ação bosonizada que, a nosso entender, não possuem conexão aparente entre si. A primeira relaciona-se ao fato de que em $(2+1)d$ a estatística das partículas não está perfeitamente definida, em virtude do caráter *abeliano* do grupo de rotações no plano. Isto permite passar continuamente de uma estatística fermiônica para uma bosônica, simplesmente unindo adiabaticamente quanta de fluxo magnético às partículas. Esta idéia deu lugar à consideração de partículas com estatística arbitrária, chamadas de "anyons", para cuja descrição os campos de gauge com dinâmica de Chern-Simons desempenham um papel fundamental. No primeiro capítulo desta tese faremos um resumo desta técnica e mostraremos um exemplo do seu funcionamento no cálculo de observáveis no Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF). Porém, esta técnica é exclusiva para (2+1)d e não pode ser generalizada para outras dimensões, devido às particularidades matemáticas do grupo de rotações no plano.

O outro método que mencionamos, e que trataremos por extenso nesta tese, é um método de bosonização de correntes que poderia ser chamado mais propriamente de "dualização", já que propõe um mapeamento da corrente fermiônica $J_\mu^F = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ numa corrente de gauge dual (no sentido geométrico) dada por $J_\mu^B = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$. Dois métodos foram propostos para se obter esta bosonização: o método canônico[18] e o funcional[19]. De um modo geral, podemos dizer que o primeiro é adequado para estabelecer uma correspondência entre os campos fermiônico e bosônico, enquanto que o segundo pode ser empregado com mais facilidade no caso da bosonização das funções de correlação de correntes.

O método canônico de bosonização foi usado para se obter os primeiros resultados concernentes a sistemas de férmions livres não massivos no plano. Nestes casos, o campo bosônico é um campo de gauge vetorial, e a ação bosonizada tem a forma de um termo de Maxwell-Chern-Simons não-local neste campo[18].

Por outro lado, o método de bosonização funcional foi aplicado inicialmente a sistemas de férmions massivos interagentes. Os primeiros resultados neste campo foram encontrados por E. Fradkin e F. Schaposnik[19], que trabalharam com o modelo de Thirring massivo em $(2+1)d$. Estes autores obtiveram importantes resultados que apontaram na direção de uma universalidade nas regras de bosonização da corrente fermiônica, $J_\mu^F = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$, de modo semelhante ao que ocorre no caso de uma dimensão espacial. Eles mostraram que para o modelo considerado, tomado no limite de massa infinita, a corrente fermiônica é mapeada numa corrente bosônica, $J_\mu^B = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$. Além disso também foi mostrado que a ação bosonizada é local, do tipo de Maxwell-Chern-Simons no campo bosônico A_μ. Mais especificamente, temos:

$$J_\mu^F = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \quad \longleftrightarrow \quad J_\mu^B = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho \tag{1.1}$$

e

$$\bar{\Psi}\left(\not{\partial} + m\right)\Psi + g^2\left(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right)^2 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{i}{4m}\left(1 + mg^2\right)F_{\mu\nu}^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

A suspeita da existência de uma universalidade nas regras de bosonização da corrente fermiônica em $(2+1)d$, assim como ocorre no caso de uma dimensão espacial, foi confirmada recentemente por D. Barci, L. E. Oxman e S. P. Sorella [20]. Eles mostraram que no caso relativístico, a bosonização da corrente fermiônica, dada pela eq. (1.1), pode ser feita independentemente do modelo considerado, para qualquer funcional de correntes. Este fato é de grande importância no estudo da bosonização de sistemas bidimensionais, por tratar-se de um resultado geral; ele foi explorado recentemente na referência [21], onde é mostrado que, como conseqüência da universalidade nas regras de bosonização de correntes, a quantização da condutância em sistemas que apresentam Efeito Hall Quântico é exata e universal, no sentido que não depende das interações particulares do modelo.

Nesta tese (e na referência [22]) mostramos que a bosonização da corrente fermiônica no plano também obedece a regras gerais mesmo em casos não-relativísticos. Consideramos duas situações: quando o termo cinético apresenta uma simetria global $O(3)$, e quando esta simetria é quebrada. No primeiro caso o termo cinético tem a mesma forma daquele presente no caso relativístico, embora os potenciais de interação entre as correntes, V_μ, possam quebrar explicitamente a simetria de Lorentz. A densidade de lagrangeana pode ser escrita como:

$$\bar{\Psi}\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi + J_0^F(x)V_0(x,y)J_0^F(y) + J_i^F(x)V(x,y)J_i^F(y)$$

Neste caso, a regra de bosonização da corrente é idêntica à do caso relativístico, dada pela eq. (1.1). Veremos também que nos casos não-relativísticos em que a simetria global $O(3)$ do termo cinético é quebrada, a regra de bosonização da corrente é mantida, desde que as interações dependam apenas da densidade fermiônica J_0^F, como acontece na maioria dos casos não-relativísticos.

Como será mostrado ao longo desta tese, todo o processo de bosonização funcional depende de uma transformação do determinante fermiônico, particularmente sobre a parte do determinante que quebra a invariância de paridade. Isto implica num papel fundamental desempenhado pelo termo induzido de Chern-Simons em todo o processo de bosonização. Prova disso é o fato de que o coeficiente do termo de Chern-Simons é relacionado a um observável físico: a condutividade transversa, também chamada de condutividade Hall. Porém, é fato bem conhecido que a deteterminação do coeficiente de Chern-Simons envolve certas ambigüidades, que vêm da necessidade de se regularizar o comportamento ultravioleta da teoria. Estudaremos este problema detalhadamente, e mostraremos que o método de regularização de point-spliting parece ser o mais apropriado, quando consideradas as propriedades da teoria frente a uma transformação de paridade e a sua invariância perante às transformações de gauge.

A exposição desta tese está organizada como segue. No próximo capítulo mostramos que em duas dimensões espaciais, sistemas fermiônicos e bosônicos podem ser relacionados entre si por meio do acoplamento do sistema a um campo de gauge estatístico (campo de Chern-Simons). Mais genericamente, veremos que partículas num plano podem apresentar *estatística fracionária*, sendo portanto *anyons*, e tais partículas podem ser associadas a férmions ou bósons. Isto nos dará justificativas teóricas para mapearmos um sistema fermiônico num bosônico, usando o formalismo de integrais de caminho. Mostraremos então uma aplicação deste formalismo para o cálculo da resposta electromagnética no EHQF.

No capítulo (3) fazemos em primeiro lugar um resumo da técnica de bosonização funcional de sistemas fermiônicos relativísticos no plano. Logo depois mostramos a generalização destes resultados para a bosonização de modelos não-relativísticos em $(2+1)d$.

No quarto capítulo falamos sobre as dificuldades para a realização do cálculo exato do determinante fermiônico, e mostramos os principais métodos de cálculo deste termo. Também mostramos a relação deste determinante com o tensor de polarização do vácuo e realizamos ainda um cálculo para este tensor usando o método de regularização de point-splitting. Finalmente, na conclusão, é feito um balanço geral do trabalho, assim como das suas possíveis extensões.

Um resumo dos resultados originais desta tese podem ser achados nas referências:

1. "On the Electromagnetic Response of Charged Bosons Coupled to a Chern-Simons Gauge Field: A Path Integral Approach"

D. G. Barci, E. V. Corrêa Silva and J. F. Medeiros Neto

Phys. Rev. **B58** (16), 10921 (1998).

2. "Functional Bosonization of Non-relativistic Fermions in $2+1$ Dimensions"

   D. G. Barci, Cesar A. Linhares, J. F. Medeiros Neto and A. F. de Queiroz

   Int. J. Mod. Phys. **A**, (2000) (In press).

   Preprint: cond-mat/9907193.

3. "The point-splitting regularization of $(2+1)$d parity breaking models"

   D. G. Barci, J. F. Medeiros Neto, L. E. Oxman and S. P. Sorella

   Submetido para sua publicao

   Preprint hep-th/0011154.

Capítulo 2

Anyons, termo de Chern-Simons e a correspondência entre férmions e bósons

Neste capítulo estudaremos resumidamente o conceito de anyons, ressaltando a importância deste assunto no tratamento da equivalência entre sistemas fermiônicos e bosônicos no plano[1]. Com base nas idéias discutidas, apresentaremos resultados para a resposta eletromagnética de um sistema de bósons não-relativistas acoplados a um campo de Chern-Simons, observando que tal sistema é equivalente a um sistema fermiônico específico[24]. Como veremos, em nosso trabalho obtivemos uma expressão explícita para a corrente gerada no sistema por um campo eletromagnético externo arbitrário. Desta forma é

[1]Um estudo mais detalhado sobre o assunto pode ser encontrado por exemplo na referência [23].

possível generalizar resultados conhecidos do Efeito Hall Quântico Inteiro (EHQI) para o Fracionário (EHQF).

2.1 Anyons

De um modo geral, podemos dizer que anyons são partículas de spin arbitrário e que obedecem a uma estatística também arbitrária, associada ao spin. A possibilidade teórica da existência de tais partículas foi proposta pela primeira vez em 1977 por Leinaas e Myrrheim[25], sendo que mais tarde Wilczek [26] propôs a primeira prescrição física para se "gerar" anyons, como veremos. De fato, o termo "anyons" deve-se a ele. Tais partículas são utilizadas atualmente para explicar certos fenômenos físicos que ocorrem em planos, ou fenômenos em que o movimento em uma terceira dimensão espacial possa ser desprezado. Isto é possível basicamente por causa das propriedades do grupo de rotações no plano, $SO(2)$.

Como sabemos, campos físicos transformam-se de acordo com representações irredutíveis do Grupo de Lorentz. No caso de um espaço-tempo quadridimensional este grupo é o $SO(3,1)$. Mesmo no caso não-relativístico, o grupo de rotações é o $SO(3)$, que é um sub-grupo do $SO(3,1)$ e que possui três geradores (L_x, L_y, L_z) que satisfazem a relação de comutação

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{2.1}$$

Como conseqüência, as componentes espaciais do spin devem obedecer a uma relação de comutação idêntica à mostrada na eq. (2.1), trocando-se cada L_i pela respectiva componente de spin. Esta relação de comutação leva à quantização do spin, restringindo seus valores a números inteiros ou semi-inteiros. Devido ao teorema de spin-estatística tem-se então que as funções de onda para um sistemas de partículas em $(3+1)d$ devem ser simétricas ou anti-simétricas pelo intercâmbio de duas partículas.

A situação em duas dimensões espaciais se altera bastante. Neste caso, o Grupo de Lorentz é o $SO(2,1)$, e o grupo de rotações é o $SO(2)$, que possui um único gerador, L_z. As representações deste grupo são portanto unidimensionais, não sendo então possível construir uma relação análoga à eq. (2.1) para um sistema num plano. O número quântico que representa o momento angular pode então assumir *qualquer* valor l, inclusive *l fracionário*, o que condiz com a álgebra do $SO(2)$ [2]. Quanto à função de onda de um sistema de partículas no plano, Leinaas e Myrrheim[25] mostraram que no espaço de Hilbert que representa tais partículas, as funções de onda podem ser multi-valoradas (desde que não se permita que uma partícula "passe por cima" de outra), de maneira que as posições de duas partículas podem ser especificadas, em termos da função de onda, a menos de uma fase relacionada ao momento angular fracionário. Este fato sugere a possibilidade de uma estatística arbitrária. Como sabemos, a "estatística" de um sitema de partículas é determinada pela fase gerada na função de onda quando duas partículas são trocadas entre si. Há duas definições físicas possíveis para este tipo de troca: (a) simplesmente trocamos os números quânticos associados às partículas; (b) as duas partículas são transportadas adiabaticamente pelo espaço, de modo a trocarem de lugar entre si. Em três dimensões

[2] Isto não nos impede de impor a condição de l ser inteiro.

espaciais as duas definições são equivalentes, o que não ocorre em $(2+1)d$. Isto ocorre basicamente porque em três dimensões espaciais, caminhos que rodeiam a origem podem ser topologicamente modificados para não rodeá-la, e isto pode ser feito sem que os caminhos cortem a origem, enquanto que em duas dimensões isto não é possível. Para efeito de definição de estatística no plano, consideraremos a definição (b). Matematicamente, a definição (a) classifica as partículas como representações do Grupo de Permutações P, enquanto que a definição (b) as classifica em termos do Grupo de Torções B (*Braid Group*). Pode-se mostrar[23] que partículas cujas funções de onda transformam-se (em intercâmbios via transporte adiabático) de acordo com representações do Grupo de Permutações podem ser apenas férmions ou bósons (como ocorre em $(3+1)d$), enquanto que partículas que transformam-se como representações do Grupo de Torções geram, na função de onda associada, uma fase arbitrária, o que por sua vez indicará uma estatística arbitrária. Basicamente, supondo que a função de onda Ψ para um par de partículas no plano adquira uma fase η num intercâmbio de números qânticos, $\Psi \rightarrow \eta\Psi$, temos que após dois intercâmbios, $\Psi \rightarrow \eta^2\Psi = \Psi$, já que dois intercâmbios sucessivos fazem o sistema retornar à configuração inicial. Temos então que neste caso $\eta = \pm 1$, o que indica que as partículas são férmions ou bósons. Por outro lado, se r for a coordenada relativa de uma partícula em reação à outra, então a rotação de $\vec{r}$ de um ângulo π corresponde a um intercâmbio via transporte adiabático das partículas, sendo que neste caso nada podemos afirmar, a princípio, sobre a fase adquirida pela função de onda, já que as partículas foram efetivamente deslocadas.

Em 1982 Wilczek[26] mostrou que partículas carregadas num plano, ligadas a pequenos solenóides que se movem junto com elas (gerando linhas de campo magnético perpendiculares ao plano) têm spin e estatística arbitrários. Tais partículas são portanto a realização física do conceito de anyons visto acima. Em outras palavras, fisicamente podemos considerar cada anyon como um objeto composto de "partícula carregada + fluxo magnético", o que implica na existência do efeito Aharonov-Bohm para o movimento no plano. Sendo q a carga (arbitrária) de cada partícula e ϕ o fluxo magnético a ela associado, mostra-se facilmente que num intercâmbio via transporte adiabático de dois anyons idênticos, a função de onda associada transforma-se como $\Psi_{\text{antes}} \rightarrow e^{iq\phi/2}\Psi_{\text{depois}}$, sendo que Ψ_{antes} e Ψ_{depois} relacionam-se entre si de acordo com a estatística original dos campos, enquanto que

$$\eta = e^{iq\phi/2} \tag{2.2}$$

é uma fase que mede a mudança em relação à estatística original das partículas, e que surge em conseqüência do efeito Aharonov-Bohm. Deste modo, a liberdade de escolha do valor de q resulta nas propriedades anyonicas esperadas. Usualmente escreve-se $\eta = e^{i\theta}$ sendo $\theta = q\phi/2$ chamado de *parâmetro estatístico.* Vemos então que no caso dos anyons este parâmetro é arbitrário.

2.2 Anyons e a equivalência entre férmions e bósons

Definamos um "quantum" de fluxo magético[1] como $\phi_0 = 2\pi/q$. Então, da eq. (2.2), poderemos escrever a fase que indica a mudança na estatística original do sistema como

$\eta = e^{i\pi\phi/\phi_0}$. Lembrando agora que ϕ representa o fluxo que acompanha cada partícula, vemos que se associarmos um número par de quanta de fluxo a cada partícula, sua estatística será preservada. Por outro lado, associando a cada partícula um número ímpar de fluxos, mudaremos sua estatítica (de fermiônica para bosônica, por exemplo). Desta forma, se as partículas originais forem férmions e se associarmos a cada um deles um número ímpar de fluxos, então eles passarão a apresentar estatística bosônica. De um modo geral, *férmions (bósons) no plano podem ser descritos como bósons (férmions) acoplados a um número ímpar de quanta de fluxo, ou como férmions (bósons) associados a um número par de fluxos.* De um modo geral podemos associar férmions ou bósons no plano a partículas de estatística arbitrária, bastando escolher os parâmetros estatísticos apropriados.

2.3 Anyons e o termo de Chern-Simons

É importante notar que no modelo proposto por Wilczek, cada partícula está rigidamente ligada ao respectivo solenóide, o que usualmente não ocorre nos sistemas considerados quando se estuda o efeito Aharonov-Bohm. Do ponto de vista da Teoria de Campos, torna-se necessária a existência de um modelo que "una" partículas carregadas a fluxos magnéticos, a fim de se descrever corretamente os anyons. Este modelo é o de Chern-Simons, sobre o qual falaremos resumidamente a seguir.

Consideremos um sistema de partículas carregadas movendo-se num plano. Seja j_μ a corrente conservada associada ao sistema e a_μ um campo de gauge local. Consideremos o termo (invariante de gauge)

$$\Delta\mathcal{L} = j_\mu a^\mu - \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\nu\rho}a_\alpha\partial_\nu a_\rho \qquad (2.3)$$

onde $(\mu/2)\epsilon^{\alpha\nu\rho}a_\alpha\partial_\nu a_\rho$ é o *termo de Chern Simons* e $j_\mu a^\mu$ representa um acoplamento entre o campo de gauge e a corrente das partículas carregadas. No caso de férmions este termo é dado por $j_\mu a^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi a^\mu$, e no caso de bosons, $j_\mu a^\mu = D_\mu\phi(D^\mu\phi)^*$. Adicionamos então $\Delta\mathcal{L}$ à densidade de lagrangeana do sistema das partículas carregadas, de modo que as equações de movimento para a componente a_0 levarão a

$$j_0 = \mu\nabla\times\vec{a} \qquad (2.4)$$

Associando o rotacional (em $(2+1)d$) do campo de gauge a um fluxo magnético, temos que a equação acima representa um vínculo que associa um fluxo a cada carga, precisamente o que representa um anyon, de acordo com a construção de Wilczek. Vemos ainda das equações (2.2) e (2.4) que o campo de gauge a_ν está relacionado à estatística das partículas carregadas, sendo por isso chamado de *campo estatístico.* Desta maneira, de acordo com o que foi visto na seção (2.2), vemos que a construção de Chern-Simons permite representar um sistema fermiônico através de bósons ou um sistema bosônico por meio de férmions. Isto implica na possibilidade de se "bosonizar" um sistema fermiônico, reescrevendo-o em termos de bósons acoplados a um número ímpar de quanta de fluxos magnéticos. Na próxima seção mostraremos como exploramos esta possibilidade para calcular a resposta eletromagnética de um sistema de bósons num plano, acoplados a um campo de Chern-Simons.

2.4 Bósons carregados acoplados a um campo de Chern-Simons: resposta eletromagnética e outras características

Como sabemos, um sistema de elétrons interagentes num plano sob a ação de uma determinada diferença de potencial e de um campo magnético B_0, perpendicular ao plano, apresenta Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF) para valores suficientemente altos de B_0 e temperaturas suficientemente baixas[3][27]. Por outro lado, vimos nas seções anteriores que elétrons num plano podem ser representados por bósons acoplados a um número ímpar de quanta de fluxo magnético, e este acoplamento pode ser feito por meio do termo de Chern-Simons. Esta propriedade é a base da representação de Chern-Simons-Landau-Ginzburg (CSLG) para o EHQF[28, 29]. Neste modelo, o sistema de elétrons é mapeado num sistema bosônico com uma interação de gauge adicional, representada pelo termo de Chern-Simons. Desta forma, a densidade de lagrangeana que representa o modelo conterá um campo bosônico carregado ϕ, um campo eletromagnético externo A_μ e um campo de gauge estatístico a_μ. A resposta eletromagnética pode então ser calculada realizando-se a integral de caminho do sistema em duas etapas: inicialmente integra-se sobre o campo bosônico, obtendo-se uma ação efetiva S_{ef} para um "novo" campo de gauge $\delta a_\mu = A_\mu + a_\mu$. Mostra-se então[29] que sendo $\bar{\rho}$ a densidade média de partículas, a uma intensidade do

[3]No apêndice (A) fazemos uma revisão suscinta do fenômeno e de conceitos que serão usados nesta seção.

campo magnético externo dada por

$$B_0 = \phi_0 \theta \bar{\rho} / \pi \tag{2.5}$$

corresponderá a um valor médio nulo para δa_μ. Assim sendo, apenas pequenas flutuações quânticas de δa_μ serão consideradas, e por isso podemos aproximar a ação efetiva por uma forma quadrática em δa_μ. Esta forma poderá então ser integrada e dará a resposta linear do modelo. É importante notar que a eq. (2.5) *fixa* valores do campo magnético correspondentes a fatores de preenchimento da forma $\nu = 1/(2k+1)$ ($k = 1,\ 2,\ ...$), associados aos platôs na condutividade Hall do sistema, exatamente o que se observa no EHQF. Há no entanto, neste efeito, frações que não podem ser escritas como $1/(2k+1)$, o que evidencia o caráter aproximado dos cálculos.

Baseados nestas idéias, na referência [24] calculamos a resposta eletromagnética de um sistema de bósons não-relativistas no plano, acoplados a um campo de gauge de Chern-Simons a_μ e sujeitos a ação de um campo eletromagnético externo A_μ *arbitrário.* Desta forma, os resultados do modelo CSLG para o EHQF surgem como casos particulares de nossos cálculos. Também mostramos que no caso de um campo magnético externo $B = \nabla \times \vec{A}$ estático, uniforme e perpendicular ao plano, a quantização da condutividade Hall é exata mesmo na presença de *qualquer tipo de impurezas*, generalizando resultados obtidos anteriormente para o efeito inteiro e para impurezas localizadas[30, 31].

Partimos da ação não-relativística euclideana

$$\begin{aligned} S \;&=\; \int d^2x d\tau \left\{ \phi^* \left[\partial_\tau + i(A_0 + a_0) - i\mu \right] \phi - \frac{1}{m} \left| \left(\frac{1}{i} \nabla - e(\vec{A} + \vec{a}) \right) \phi \right|^2 \right\} + \\ &-\; \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau \; \left[\phi^*(x)\phi(x) - \bar{\rho}\, \right] V(x-y) \left[\phi^*(y)\phi(y) - \bar{\rho}\, \right] + \end{aligned}$$

$$- \quad \frac{i}{2}\frac{\pi}{\theta}\int d^2x d\tau\ \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \tag{2.6}$$

onde $V(x-y)$ representa um potencial de interação arbitrário. A função de partição será dada por

$$Z[A_0, A_i] = \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \mathcal{D}a_\mu\ G_F[\phi, a_\mu]\quad e^{-S[\phi,\phi^*,a_\mu,A_\mu]} \tag{2.7}$$

onde $G_F[\phi, a_\mu]$ representa um funcional de fixação de gauge. Integrando o campo de gauge estatístico a_μ e também a fase do campo complexo $\phi = \rho^{1/2}e^{i\theta}$, mostramos que $Z[A_0, A_i]$ pode ser escrita em termos de uma ação efetiva S_{ef} como

$$Z[A_0, A_i] = e^{\frac{i}{2}\frac{\pi}{\theta}\int d^2x d\tau\ \epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho} \int \mathcal{D}\rho\quad e^{-S_{ef}[\rho,\vec{E},B]} \tag{2.8}$$

sendo

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \frac{m}{2}\int d^3x d^3y\ \partial_0\rho \left[\frac{1}{\nabla\cdot(\rho\nabla)}\right]\partial_0\rho - \frac{1}{2m}\int d^2x d\tau\ \left(\frac{1}{4\rho}\nabla\rho\cdot\nabla\rho\right) \\
&- \frac{1}{2}\int d^2x d^2y d\tau\ \ [\rho(x)-\bar{\rho}\,]\, V(x-y)\, [\rho(y)-\bar{\rho}\,] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left(\nabla\cdot\frac{\rho}{m}\nabla\right) \\
&- \frac{1}{2}\int d^2x d^2y d\tau\ \left[\rho(x)-\frac{\pi}{\theta}B(x)\right] F(x-y) \left[\rho(y)-\frac{\pi}{\theta}B(y)\right] \\
&- \frac{1}{2m}\frac{\theta^2}{\pi^2}\int d^2x d^2y d^2z d\tau\ \nabla G(x-y)\cdot\nabla G(x-z)\ \times \\
&\qquad \times \left[\rho(x)-\frac{\pi}{\theta}B(x)\right]\left[\rho(y)-\frac{\pi}{\theta}B(y)\right]\left[\rho(z)-\frac{\pi}{\theta}B(z)\right] \\
&- \int d^2x d^2y d\tau\ \left[\rho(x)-\frac{\pi}{\theta}B(x)\right] G(x-y)\nabla\cdot\vec{E}(y)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde B e $\vec{E}$ representam os campos magnético (perpendicular ao plano) e elétrico externos, $\rho(x) = \phi(x)\phi^*(x)$ indica a densidade de carga e

$$\nabla^2 G(x-y) = \delta(x-y) \tag{2.10}$$

$$F(x-y) = \frac{\theta}{\pi}\frac{1}{m}\int d^2z\ B(z)\nabla G(z-x)\cdot\nabla G(z-y) \tag{2.11}$$

Como não fizemos nenhuma restrição às formas de B e $\vec{E}$, temos que a eq. (2.9) representa a ação efetiva (escrita em termos da densidade bosônica) para um sistema de bósons sujeitos à interação de um campo eletromagnético *arbitrário*.

Um detalhe importante é que no processo de "colagem de fluxos" para passar de uma teoria fermiônica a uma bosônica, apenas é alterada a fase dos campos. Portanto, a ação efetiva (2.9) escrita em termos da densidade de carga é exatamente a mesma tanto na teoria fermiônica quanto na bosônica. Mostra-se desta forma a utilidade de representar os férmions em termos de bósons acoplados a um campo de Chern-Simos, já que que não é possível (ou pelo menos não é obvio) como alcançar o resultado (2.9) diretamente da ação fermiônica original.

A eq. (2.8) nos permite calcular a forma das correntes conservadas do sistema, que serão dadas por:

$$\langle J_\mu(x)\rangle = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \ln(Z) \tag{2.12}$$

Calculando as derivadas funcionais envolvidas obtemos:

$$\begin{aligned} \langle iJ_0\rangle &= \langle \rho(x,\tau)\rangle \ ; && (2.13)\\ \langle J_i\rangle &= -i\frac{\pi}{\theta}\epsilon_{ij}\left[E_j - \partial_j \int d^2y\ G(x-y)\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right] \\ &+ \ i\int d^2y\ \partial_i G(x-y)\partial_0\left\langle \rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y)\right\rangle \\ &+ \ J_i^T(x\rangle && (2.14) \end{aligned}$$

com

$$J_i^T(x) = \frac{1}{m}\frac{\theta}{\pi}\epsilon_{ij}\partial_j\Delta(x) \tag{2.15}$$

e

$$\Delta(x) = \int d^2z d^2y \; \vec{\nabla}G(x-y)\cdot\vec{\nabla}_y G(y-z)\left\langle \left[\rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y)\right]\left[\rho(z) - \frac{\pi}{\theta}B(z)\right]\right\rangle \quad (2.16)$$

O termo $J_i^T(x)$ é topológico, no sentido de que é automaticamente conservado ($\partial_i J_i^T(x) = 0$ devido a antisimetria do tensor ϵ). Dizemos que $J_i^T(x)$ é uma *corrente topológica.* É interessante estudar o comportamento destas correntes no caso particular de um campo magnético estático e uniforme, sendo $\vec{E}$ ainda *arbitrário.* Este caso é importante pois é esta configuração que permite o EHQ. Neste caso mostramos que a eq. (2.14) torna-se:

$$\langle J_i\rangle = -i\frac{\pi}{\theta}\epsilon_{ij}\left[E_j - \partial_j \int d^2y \; G(x-y)\nabla\cdot\vec{E}\right] + J_i^T(x) \quad (2.17)$$

Podemos notar que o primeiro termo do lado direito da equação acima não depende de detalhes específicos do sistema, que estarão representados na corrente topológica $J_i^T(x)$. Em nosso trabalho, mostramos que esta corrente se anula no caso de um plano infinito com densidade média de carga $\bar{\rho} = \pi B/\theta$, sendo que tal densidade corresponde a um fator de preenchimento

$$\nu = \frac{\pi}{\theta} \quad (2.18)$$

Também mostramos que no caso de um plano finito com a mesma densidade média de carga, $J_i^T(x)$ não será mais nula, porém será cancelada por uma corrente de borda, de modo que tanto no caso de um plano finito quanto infinito, a corrente total é dada por

$$\langle J_i\rangle = -i\frac{\pi}{\theta}\epsilon_{ij}\left[E_j - \partial_j \int d^2y \; G(x-y)\nabla\cdot\vec{E}\right] \quad (2.19)$$

No caso de ausência de impurezas, $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ e então a corrente terá a forma correspondente ao EHQF (com a condutividade quantizada):

$$\langle J_i \rangle = \frac{1}{2n+1}\frac{e^2}{h}\epsilon_{ij}E_j \tag{2.20}$$

Numa amostra real $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$, mas mesmo neste caso podemos provar, a partir da eq. (2.19), que a corrente satisfaz a eq. (2.20) sendo que, neste caso, E_j estará associado ao campo elétrico externo (não levando em conta suas alterações provocadas por impurezas da amostra). Desta forma chegamos à conclusão de que para um fator de preenchimento da forma (2.18), *a condutividade Hall é independente das impurezas do sistema.* Vemos também que estas impurezas são responsáveis apenas pelo surgimento de correntes de borda, não afetando assim a corrente "transversa" associada à condutividade Hall. Esta é a razão para a quantização exata desta condutividade. Desta forma generalizamos resultados já conhecidos no EHQI[30], para caso do EHQF no contexto da teoria CSLG. Em outras palavras, mostramos a quantização da condutividade transversa no EHQF ocorre para qualquer tipo de distribuição de impurezas.

De posse da ação bosonizada (2.9) é possível calcular diferentes grandezas físicas especialmente interesantes. Uma delas é o propagador para flutuações de densidade de carga $\delta\rho(x) = \rho(x) - \langle\rho(x)\rangle$. Considerando que a densidade não difere muito da densidade media $\langle\rho(x)\rangle = \bar{\rho}$, podemos fazer uma expansão perturbativa em $\delta\rho$, achando uma ação efetiva para as flutuações. Os detalhes destes cálculos podem ser achados na referência [24], enquanto que uma abordagem mais pedagógica foi apresentada em [32]. O resultado é dado por

$$S = \frac{m}{2}\frac{1}{\bar{\rho}}\int d^3x d^3y \; \delta\dot{\rho}(x) G(x-y) \delta\dot{\rho}(y)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}\int d^3x d^3y\ \delta\rho(x)\left\{\frac{1}{4m\bar{\rho}}\nabla^2\delta(x-y) - \left[V(x-y) - \frac{\bar{\rho}}{m}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 G(x-y)\right]\right\}\delta\rho(y)\\
&+ \frac{1}{8m\bar{\rho}^2}\int d^3x\ \vec{\nabla}\delta\rho(x)\cdot\vec{\nabla}\delta\rho(x)\delta\rho(x) - \frac{1}{3\bar{\rho}^{3/2}}\int d^3x\ \delta\rho^3 + \ldots\\
&- \frac{1}{2m}\frac{\theta^2}{\pi^2}\int d^3x d^3y d^3z\ \vec{\nabla}G(x-y)\cdot\vec{\nabla}G(x-z)\ \delta\rho(x)\delta\rho(y)\delta\rho(z)\\
&+ \frac{m}{2}\frac{1}{\bar{\rho}^2}\int d^3x d^3y d^3z\ \vec{\nabla}G(x-z)\cdot\vec{\nabla}G(z-y)\ \delta\dot{\rho}(x)\delta\dot{\rho}(y)\delta\rho(z)\\
&- \int d^2x d^2y\ \delta\rho(x)G(x-y)\vec{\nabla}\cdot\vec{E}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Como as flutuações $\delta\rho$ são pequenas, podemos considerar que o termo quadrático da ação efetiva define a dinâmica das flutuações, enquanto que os termos de ordem superior podem ser considerados como perturbações. Neste sentido podemos escrever o propagador das flutuações de densidade no espaço de momentos como

$$
\langle\ \delta\rho(\omega,\mathbf{k})\delta\rho(-\omega,-\mathbf{k})\ \rangle = \frac{\frac{2\bar{\rho}}{m}\mathbf{k}^2}{\omega^2 - \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + \frac{\bar{\rho}}{m}\mathbf{k}^2 V(-\mathbf{k}^2) + \frac{\bar{\rho}^2}{m^2}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2\right]} \tag{2.22}
$$

É instrutivo escrever este propagador da seguinte forma

$$
\langle\ \delta\rho(\omega,\mathbf{k})\delta\rho(-\omega,-\mathbf{k})\ \rangle = \frac{\pi}{\theta}\mathbf{k}^2\left(\frac{1}{\omega-\omega_k} - \frac{1}{\omega+\omega_k}\right) + O(\mathbf{k}^3) \tag{2.23}
$$

com

$$
\omega_k = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + \frac{\bar{\rho}}{m}\mathbf{k}^2 V(-\mathbf{k}^2) + \frac{\bar{\rho}^2}{m^2}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)} \tag{2.24}
$$

Esta expressão mostra que nosso formalismo é consistente com o teorema de Kohon[33]. Este teorema estabelece que em um sistema planar invariante frente a traslações, submetido à ação de um campo magnético perpendicular ao plano, a função de correlação de densidade deve ter um "gap" $\omega_c = \bar{\rho}B/m$ quando calculada até ordem $\mathbf{k}^2$. Este é um resultado exato que independe dos detalhes microscópicos do sistema.

A relação de dispersão (2.24) coincide, no limite de longas distâncias (pequenos momentos), com as calculadas nas referências [34] e [35]. Para o potencial de Coulomb $V(-\mathbf{k}^2) \propto 1/|\mathbf{k}|$ a relaçãode dispersão é linear, como foi sugerido primeiramente por Halperin na referência [36]. Além disso, a eq. (2.24) coincide com a relação de dispersão das quasipartículas de um superfluido de anyons[37]. Estes fatos mostram a consistência do nosso método de análise das flutuações.

Capítulo 3

Bosonização Funcional em (2+1)d

No capítulo anterior estudamos uma possível estratégia para descrever férmions em termos de bósons num plano. Também mostramos uma aplicação concreta desta técnica no cálculo de sistemas que podem apresentar EHQ. Porém, duas limitações apresentadas por esta técnica devem ser citadas: a primeira é que não é possível generalizá-la para dimensões diferentes que (2+1)d; além disso não parece haver relação com as propriedades duais presentes em $(1+1)d$, embora este ponto não esteja completamente esclarecido até o momento. Neste capítulo apresentaremos uma abordagem do problema da bosonização funcional bastante diferente. No entanto, não se tem até o presente indicações precisas de que a abordagem que será mostrada não tenha relação com o procedimento seguido no capítulo anterior.

A idéia básica do método que agora apresentaremos é tentar encontrar uma relação entre as funções de correlação de correntes para uma teoria fermiônica e outra bosônica.

Isto significa que de certa forma estaremos declinando da possibilidade de expressar campos fermiônicos em função de campos bosônicos, para fazer uma descrição em termos de correntes que terão caráter bosônico. Por este motivo esta abordagem deveria ser, a princípio, mais simples, de modo a permitir entender melhor a estrutura e as dificuldades da técnica de bosonização em dimensões superiores.

Podemos aqui adiantar os resultados gerais, a saber: dada uma teoria fermiônica em termos de interações de correntes $J^F_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, será sempre possível bosonizá-la, transformando-a numa *teoria de gauge* cujo acoplamento será escrito em termos de uma corrente topológica $J^B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$. As duas teorias serão equivalentes no sentido que

$$\left\langle J^F_{\mu_1}(x_1)\ldots J^F_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{K_F} = \left\langle J^B_{\mu_1}(x_1)\ldots J^B_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{K_B} \tag{3.1}$$

onde K_F e K_B são as ações fermiônicas e bosônicas (de gauge) respetivamente.

Neste capítulo mostraremos que este resultado é universal, no sentido que não depende do tipo de interação particular considerado. Analisaremos os casos de férmions relativísticos e não-relativísticos separadamente. Na discussão destes casos seguimos essencialmente as referências [20, 22, 38].

3.1 Férmions relativísticos

Consideraremos um sistema de férmions relativísticos de spin 1/2 representado pelo funcional gerador

$$Z^{\text{int}}[s] = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\; e^{-\int d^3x\; \bar{\Psi}(\not{\partial}+m+i\not{s})\Psi - S^I\left[J^F\right]}$$

$$= \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\; e^{-K_F[\Psi,\bar{\Psi}]-S^I[J^F]-i\int d^3x\; s^\mu J^F_\mu} \tag{3.2}$$

onde $K_F[\Psi, \bar{\Psi}]$ representa a ação livre para os férmions,

$$K_F\left[\Psi, \bar{\Psi}\right] = \int d^3x\; \bar{\Psi}\,(\not{\partial} + m)\,\Psi \tag{3.3}$$

e s_μ é uma fonte externa acoplada à corrente fermiônica, $J^F_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$. Seguindo a notação usual temos que $\not{\partial} = \gamma_\mu\partial^\mu$, e as matrizes γ serão escritas em função das matrizes de Pauli (σ) como $\gamma_0 = -i\sigma_3$, $\gamma_1 = \sigma_1$ e $\gamma_2 = \sigma_2$, o que implica nas seguintes expressões para os traços:

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu) = 0 \qquad \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 2g_{\mu\nu} \qquad \mathrm{Tr}(\gamma_\eta\gamma_\rho\gamma_\sigma) = -2i\epsilon_{\eta\rho\sigma} \tag{3.4}$$

3.1.1 O termo cinético

Para ilustrar o funcionamento da técnica proposta consideremos inicialmente a teoria livre, $S^I = 0$.

Para começar, fazemos a seguinte mudança de variáveis nos campos fermiônicos (com Jacobiano trivial):

$$\Psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\Psi \tag{3.5}$$

$$\bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}e^{-i\alpha(x)} \tag{3.6}$$

O funcional gerador não deve depender de α, e portanto este fator poderá ser integrado em $Z[s]$, alterando-se após esta integração apenas o fator de normalização do funcional gerador. Desta maneira podemos escrever:

$$Z[s] = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\alpha \; e^{-\int d^3x \; \bar{\Psi}[\; \not{\partial} + m + i(\not{s} + \not{\partial}\alpha)]\Psi} \tag{3.7}$$

Introduzimos agora um novo campo b_μ, relacionado a α por:

$$\partial_\mu \alpha = b_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\partial^2}\partial^\mu b_\mu \tag{3.8}$$

e fazemos a substituição de variáveis de α para b_μ em Z[s]. A eq. (3.8) implica em que

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu = 0 \tag{3.9}$$

e portanto o campo b_μ será um campo de gauge puro. Temos então um vínculo para o campo b_μ, que deverá ser levado em conta na substituição de variáveis em questão. Por outro lado, sabemos que qualquer tensor antissimétrico de dois índices (como $f_{\mu\nu}$) possui apenas três componentes independentes, que podem ser evidenciadas de modo natural usando-se o pseudovetor dual ($\tilde{f}_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}$ em nosso caso). Sendo assim, o vínculo para b_μ pode ser levado em conta se inserirmos uma delta de Dirac funcional, escrita em função de $\tilde{f}_\mu$, em $Z[s]$. Teremos então:

$$Z[s] = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D} \; b_\mu \; \delta(\epsilon_{\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}[b]) \; e^{-\int d^3x \; \bar{\Psi}[\not{\partial} + i(\not{s} + \not{b}) + m]\Psi} \tag{3.10}$$

Fazemos agora uma "deslocamento" no campo b_μ,

$$b_\mu \to b_\mu - s_\mu \tag{3.11}$$

que desacoplará a fonte externa dos campos fermiônicos. Introduzindo ainda um multiplicador de Lagrange A_μ para exponenciar o funcional δ, obteremos, após uma integração sobre os férmions:

$$Z[s] = \int \mathcal{D}A_\mu \; e^{-K_B[A_\mu]-i\int d^3x \; s_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho} \tag{3.12}$$

onde $K_B[A_\mu]$ representa a ação livre bosonizada, sendo

$$e^{-K_B[A_\mu]} = \int \mathcal{D}b_\mu \; e^{-T[b]+i\int d^3x \; b_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho} \tag{3.13}$$

com $T[b]$ representando a ação fermiônica efetiva:

$$T[b] = -\mathrm{Tr}\ln(\partial\!\!\!/ + i \; b\!\!\!/ + m) \tag{3.14}$$

Lembrando ainda que $\det \hat{O} = \exp(\mathrm{Tr}\ln \hat{O})$, podemos escrever:

$$e^{-T[b]} = e^{\mathrm{Tr}\ln(\partial\!\!\!/ + i b\!\!\!/ + m)} = \det\left(\partial\!\!\!/ + i \; b\!\!\!/ + m\right) \tag{3.15}$$

sendo o determinante acima denominado *determinante fermiônico.*

Vemos então, da eq. (3.13), que para determinar $K_B[A_\mu]$ precisamos calcular a transformada de Fourier transversa da exponencial da ação efetiva $T[b]$. Trata-se de um cálculo não trivial e até o momento não se conhece nenhum resultado exato em duas dimensões. Na próximo capítulo voltaremos a este assunto.

Podemos dizer que a eq. (3.12) representa a essência do processo de bosonização para o sistema considerado, pois indica a expressão do funcional gerador em função do campo bosônico A_μ.

Para encontrar a correspondência entre as correntes fermiônica e bosônica, usamos o fato de que no formalismo funcional, as funções de correlação de correntes no vácuo são obtidas a partir de $Z[s]$, diferenciando funcionalmente este funcional em relação à fonte

s_μ. Para a eq. (3.2) temos:

$$\left\langle J^F_{\mu_1}(x_1)\dots J^F_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{K_F} = i^n \frac{\delta \ln Z[s]}{\delta s_{\mu_n}(x_n)\cdots\delta s_{\mu_1}(x_1)}\bigg|_{s=0} \tag{3.16}$$

Usando um raciocínio análogo para a eq. (3.12), e notando que $K_B[A_\mu]$ independe de s_μ, poderemos escrever:

$$\left\langle J^B_{\mu_1}(x_1)\dots J^B_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{K_B} = i^n \frac{\delta \ln Z[s]}{\delta s_{\mu_n}(x_n)\cdots\delta s_{\mu_1}(x_1)}\bigg|_{s=0} \tag{3.17}$$

onde J^B_μ representará a corrente bosônica, associada à corrente fermiônica e será dada por $J^B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$. Comparando agora as eqs. (3.16) e (3.17) vemos que

$$\left\langle J^F_{\mu_1}(x_1)\dots J^F_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{K_F} = \left\langle J^B_{\mu_1}(x_1)\dots J^B_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{K_B} \tag{3.18}$$

o que indica uma equivalência entre as teorias descritas pelas ações $K_F[\Psi,\bar\Psi]$ e $K_B[A_\mu]$.

Temos então que o processo de bosonização produz a seguinte correspondência:

$$J^F_\mu = \bar\Psi\gamma_\mu\Psi \quad \longrightarrow \quad J^B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho \tag{3.19}$$

$$K_F\left[\Psi,\bar\Psi\right] + i\int d^3x\ s^\mu J^F_\mu \quad \longrightarrow \quad K_B[A] + i\int d^3x\ s^\mu J^B_\mu \tag{3.20}$$

Neste ponto torna-se interessante fazer algumas observações a respeito das correntes mencionadas acima. Em primeiro lugar, notamos que assim como a corrente fermiônica é conservada ($\partial^\mu J^F_\mu = 0$) o mesmo ocorre com a corrente bosônica, J^B_μ. No entanto, enquanto a conservação da corrente fermiônica ocorre em função das equações de movimento, a corrente bosônica é conservada automaticamente, devido a sua forma: $\partial^\mu(\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho)$ é identicamente nula, devido à antissimetria do tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. Neste sentido dizemos que a corrente bosônica é topológica.

Em segundo lugar, vemos que assim como a corrente fermiônica é invariante sob transformações de gauge locais do campo fermiônico, da mesma forma a corrente bosônica apresenta invariância por transformações de gauge do campo vetorial.

Observamos também que é possível escrever a corrente bosônica como

$$J_\mu^B = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho \Longrightarrow \begin{cases} J_0^B &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ij}F_{ij} &= B \\ J_i^B &= -\frac{1}{2}\epsilon_{i\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \epsilon_{ij}E_j \end{cases} \tag{3.21}$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. "$B$" representa um fluxo magnético associado à densidade bosônica, e $\epsilon_{ij}E_j$ é interpretado como um campo elétrico transversal, associado às componentes espaciais da corrente fermiônica.

Finalmente, ressaltamos que a teoria bosonizada é uma teoria de gauge. É simples mostrar que a ação bosonizada K_B dada na eq. (3.13) é invariante de gauge. Este fato decorre do caráter transverso da transformada de Fourier do determinante fermiônico, que por sua vez é obviamente invariante de gauge, já que em $(2+1)d$ não existem anomalias.

3.1.2 Interações

Consideremos agora um termo de interação de correntes arbitrário $S^I[J^F]$. Nos casos em que este termo reprenta uma interação local corrente-corrente, a ação fermiônica será quártica nos férmions, e a integração nestes campos poderá ser feita por meio de uma transformação de Hubbard-Stratonovic, que tornará a ação quadrática nos férmions, introduzindo porém um campo auxiliar no modelo. No entanto, no caso de uma interação qualquer, poderá não ser possível realizar de forma exata e direta a integração fermiônica na eq. (3.2). O que mostraremos a seguir é que é possível obter, usando a técnica de bosonização, uma ação fermiônica quadrática a partir da ação que aparece na eq. (3.2). Isto permitirá uma integração sob os campos fermiônicos e a bosonização final do modelo.

O ponto inicial (e talvez o mais importante) para a bosonização do sistema que estamos considerando consiste na representação de $S^I[J^F]$ em termos de sua transformada de Fourier funcional:

$$e^{-S^I[J^F]} = \int \mathcal{D}a_\mu \; e^{-S[a]-i\int d^3x \; J^F_\mu a_\mu} \tag{3.22}$$

Notemos que para termos de interação não quadráticos nas correntes fermiônicas, nem sempre será possível encontrar o funcional $S[a]$, o que no entanto não prejudicará nossos cálculos, pois, como veremos, nosso resultado final depende apenas da quantidade conhecida $S^I[J^F]$, sendo apenas necessário fazer a substituição $J^F_\mu \to J^B_\mu$ em S^I. Para o desenvolvimento de nossos cálculos precisamos apenas considerar que a representação dada na eq. (3.22) de fato exista. Usando então esta equação, podemos reescrever $Z^{\text{int}}[s]$ como:

$$\begin{aligned} Z^{\text{int}}[s] &= \int \mathcal{D}a_\mu \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \; e^{-\int d^3x \; \bar{\Psi}(\not{\partial}+m+i\not{s}+i\not{a})\Psi - S[a]} \\ &= \int \mathcal{D}a_\mu \; e^{-S[a]} e^{-\Gamma[s+a]} \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde

$$e^{-\Gamma[s+a]} = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \; e^{-\int d^3x \; \bar{\Psi}[\;\not{\partial}+m+i(\not{s}+\not{a})]\Psi} \tag{3.24}$$

Este funcional tem a mesma forma do funcional gerador $Z[s]$ para um sistema de férmions livres (ver eq. (3.2)), bastando substituir s_μ por $s_\mu + a_\mu$. Usando então o resultado da eq.

(3.12) na eq. (3.23), obteremos:

$$Z^{\rm int}[s] = \int \mathcal{D}a_\mu \mathcal{D}A_\mu \; e^{-K_B[A]-i\int d^3x \;\; \epsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu(s_\rho+a_\rho)-S[a]} \tag{3.25}$$

onde $K_B[A]$ representa a ação livre bosonizada, tendo sido dada na eq. (3.13).

Podemos agora integrar a expressão para $Z^{\rm int}$ sobre o campo a_μ levando em conta a eq. (3.22). Obteremos:

$$\begin{aligned} Z^{\rm int}[s] &= \int \mathcal{D}A_\mu \; e^{-K_B[A]-S^I[\epsilon\partial A]-i\int d^3x \;\; s_\mu\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \; e^{-K_B[A]-S^I[J^B]-i\int d^3x \;\; s^\mu J^B_\mu} \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde usamos a definição da corrente bosônica, introduzida na seção anterior ($J^B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$).

Comparando agora as eqs. (3.26) e (3.2), vemos que no processo de bosonização de férmions interagentes (assim como para férmions livres) a corrente fermiônica J^F_μ é mapeada na corrente bosônica J^B_μ, e a versão bosonizada do funcional gerador pode ser obtida fazendo-se a substituição:

$$K_F\left[\Psi,\bar\Psi\right] + S^I\left[J^F\right] + i\int d^3x \;\; s^\mu J^F_\mu \quad \longrightarrow \quad K_B\left[A\right] + S^I\left[J^B\right] + i\int d^3x \;\; s^\mu J^B_\mu \tag{3.27}$$

Comparando este resultado com a eq. (3.20), vemos que a parte livre ação fermiônica e o termo de interação são bosonizados independentemente, sem que haja mistura entre eles. Este fato permite realizar a bosonização independentemente do modelo escolhido, com qualquer termo de interação que dependa apenas da corrente fermiônica.

Podemos então resumir esta seção dizendo que qualquer teoria fermiônica relativística e abeliana, cujos acoplamentos sejam dados a partir de interações entre correntes, pode ser escrita em termos de uma teoria de gauge. As regras de bosonização de correntes são universais no sentido que não dependem do modelo. Estas regras podem ser consideradas como uma generalização direta das regras de bosonização de correntes em $(1+1)d$. Para completar o programa de bosonização mostrado, deveríamos ser capazes de calcular a versão bosonizada do termo cinético $K_B[A_\mu]$. Embora este resultado não seja atualmente conhecido, podemos avançar na questão da determinação das características topológicas de $K_B[A_\mu]$, que serão consideradas no próximo capítulo.

3.2 Férmions não-relativístas

Nesta seção generalizamos os resultados obtidos anteriormente para o caso de férmions não-relativísticos. Neste caso, temos uma liberdade muito grande na escolha de modelos, já que não estamos restritos aos modelos invariantes de Lorentz. Ficará claro nesta seção que a covariância de Lorentz não é essencial tanto ao processo de bosonização quanto às propriedades de universalidade do mapeamento de correntes. Veremos que a invariância de gauge é o que realmente importa neste processo.

Para ilustrar os procedimentos de bosonização de férmions não-relativísticos em duas dimensões espaciais, escolhemos dois tipos de modelos com caracteristicas diferentes. Em primeiro lugar analisaremos modelos com relação de dispersão linear (porém anisotrópica), e interações densidade-densidade e corrente-corrente em geral não-locais. Tais modelos são uma generalização direta dos modelos relativísticos, e durante o ano passado atraíram interesse crescente da comunidade científica, devido à descoberta de novas fases da matéria que poderiam ser caracterizadas como líquidos de Fermi anisotrópicos[39].

O segundo exemplo que escolhemos tratar nesta seção é o caso de férmions com relação de dispersão quadrática. A característica essencial deste modelo é que as fontes externas não se acoplam de maneira linear com a corrente, devido ao fato de que a corrente de Noëther não é invariante local de gauge. Neste caso ficará envidente que a propriedade mais importante para demonstrar universalidade é invariância de gauge e não a covariância de Lorentz.

Nesta seção seguimos essencialmente a referência [22].

3.2.1 Relação de dispersão linear

Como primeiro exemplo, consideremos um modelo do tipo de Thirring, não-local e não-relativístico em duas dimensões espaciais. A versão em $(1+1)d$ deste modelo foi bosonizada através do método funcional na referência [40], e foi usada para descrever fenômenos relacionados à física dos arames quânticos nas referências [41]-[43]. Aqui traçaremos algumas considerações que podem permitir estender as análises feitas nestes artigos, a fim de se estudar sistemas fermiônicos no plano.

No formalismo de tempo imaginário, a ação fermiônica do modelo pode ser escrita como:

$$S_F = \mathcal{K}_F\left[\Psi, \bar{\Psi}\right] + \mathcal{S}^I\left[J^F\right] \tag{3.28}$$

sendo

$$\mathcal{K}_F\left[\Psi,\bar{\Psi}\right]=\int d^3x\ \bar{\Psi}\left(\gamma_0\partial_0+v_1\gamma_1\partial_1+v_2\gamma_2\partial_2+m\right)\Psi \tag{3.29}$$

e

$$\mathcal{S}^I\left[J^F\right]=\int d^3xd^3y\ \left[J_0^F(x)V_0(x,y)J_0^F(y)+J_i^F(x)V(x,y)J_i^F(y)\right] \tag{3.30}$$

Assim como no caso relativístico, J^F representa a corrente fermiônica e o campo fermiônico é representado por um espinor de duas componentes. Tem-se ainda que $V_0(x,y)$ e $V(x,y)$ são potenciais simétricos arbitrários que representam as interações densidade-densidade e corrente-corrente, respectivamente. A semelhança deste modelo com o modelo fermiônico mostrado na seção anterior é evidente. No entanto, o caráter não-relativístico do presente modelo fica evidenciado pela arbitrariedade na escolha dos potenciais de interação (e portanto em suas leis de transformação por transformações de Lorentz), e pela arbitrariedade na escolha dos parâmetros v_1 e v_2.

Este modelo é um caso geral que contem vários modelos conhecidos como casos particulares. Por exemplo, pode-se representar um sistema de cargas com uma interação coulombiana não relativística usual bastando para isso que V_0 tenha a forma apropriada. O modelo de Thirring relativístico também pode ser considerado como um caso particular do modelo que estamos estudando, fazendo $V_0=V=g^2\delta(x-y)$ e $v_1=v_2=1$. Os modelos de Tomonaga-Luttinger[44, 45] e o de Sutherland em $(2+1)d$[46] também podem ser considerados como casos particulares de nosso modelo[47]. Além disso, vários modelos fermiônicos com dinâmica de Chern-Simons para o campo de gauge têm sido estudados[34, 48], a fim de se descrever certos aspectos de líquidos quânticos em estados de Hall. Pode-se mostrar que a dinâmica de Chern-Simons induz interações de longa distância entre correntes, que podem ser modeladas pelo termo $V(x,y)$.

A forma mais simples de tratar este modelo é considerando uma nova representação das matrizes gama, de forma a absorver os parâmetros v_1 e v_2 na sua definição:

$$\gamma_0 = -i\sigma_3; \qquad \gamma_1 = v_1\sigma_1; \qquad \gamma_2 = v_2\sigma_2 \tag{3.31}$$

Esta definição induz uma métrica:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

que tem a forma $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, v_1, v_2)$. Desta maneira, o quadrado de um tri-vetor $k = (\omega, k_1, k_2)$ será dado por $k^2 = \omega^2 + v_1^2 k_1^2 + v_2^2 k_2^2$. Podemos no entanto escrever apenas $k^2 = k_\mu k_\nu g_{\mu\nu}$, sem especificar qual o tensor métrico usado. Podemos estender este raciocínio para todos os nossos cálculos, e trabalhar sempre com uma métrica euclideana com coeficientes arbitrários, fazendo no final das contas uma continuação analítica para os coeficientes v_1 e v_2. Este procedimento é uma generalização natural de uma rotação de Wick[49]. Considerando então este tipo de métrica, vemos que o modelo que estamos considerando pode ser tratado da mesma meneira que tratamos o modelo relativístico considerado na seção anterior, cujo funcional gerador é dado na eq. (3.2). A bosonização daquele modelo pode ser resumida pela eq. (3.27), de modo que para o modelo atual, dado pelas eqs. (3.28), (3.29) e (3.30), a bosonização poderá ser escrita como:

$$\mathcal{K}_F\left[\Psi, \bar{\Psi}\right] \longrightarrow K_B[A] \tag{3.33}$$

$$\mathcal{S}^I\left[J^F\right] \longrightarrow \mathcal{S}^I\left[J^B\right] \tag{3.34}$$

sendo $K_B[A]$ dado na eq. (3.13) e

$$\mathcal{S}^I\left[J^B\right]=\int d^3xd^3y\;\left[J_0^B(x)V_0(x,y)J_0^B(y)+J_i^B(x)V(x,y)J_i^B(y)\right] \qquad (3.35)$$

Usando a equação acima, juntamente com as eqs. (3.21) e (3.28), poderemos escrever a ação bosonizada como:

$$\begin{aligned} S_{\text{bos}}[A] &= K_B[A]+\int d^3xd^3y\;\left\{\frac{1}{4}\epsilon_{ij}F_{ij}(x)V_0(x,y)\epsilon_{lm}F_{lm}(y)+\right.\\ &\left.+\;F_{i0}(x)V(x,y)F_{i0}(y)\right\} \qquad (3.36) \end{aligned}$$

Vemos então que o único efeito do tipo de interação que consideramos é induzir na ação bosonizada um termo invariante de gauge do tipo do termo de Maxwell. É importante notar que no caso $V_0=V_1=\delta(x-y)$, quando o modelo se reduz ao modelo de Thirring relativístico, a ação induzida é exatamente $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Vemos também um fato importante que já tínhamos comentado: As regras de bosonização são as mesmas que no caso relativístico, mostrando desta forma que a covariância de Lorentz não é essencial no processo de bozonização proposto.

3.2.2 Relação de dispersão não-linear

Nesta seção consideraremos um sistema de férmions com relação de dispersão quadrática. O exemplo mais simples é considerar férmions sem spin em $(2+1)d$. Este tipo de modelo pode paracer pouco realista, no sentido de que os férmions (elétrons) têm spin. Porém, este modelo representa satisfatoriamente diferentes situações onde o grau de liberdade de spin é irrelevante. Por exemplo, quando um sistema de elétrons é submetido à ação de um forte campo magnético, os elétrons se polarizam na direção do campo. Supondo neste caso que a energia para produzir uma mudança de alinhamento de spin seja muito maior que as energias típicas do sistema, teremos que, neste caso, o grau de liberdade de spin poderá ser desprezado. Uma situação como esta ocorre em sistemas que apresentam efeito Hall para determinadoss valores do fator de preenchimento.

Consideremos então em primeiro lugar o caso sem interação descrito pela seguinte ação (no formalismo de tempo imaginário)[50]:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^3x \; \psi^*(x) \left[\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu\right] \psi(x) \tag{3.37}$$

onde ψ terá apenas uma componente e μ representará o potencial químico.

Em função da simetria por transformações globais $U(1)$ nos campos fermiônicos, o sistema possui as seguintes correntes de Noether:

$$\mathcal{J}_0^F = -i\psi^*\psi \tag{3.38}$$

$$\mathcal{J}_i^F = \psi^*\nabla_i\psi \tag{3.39}$$

que satisfazem a lei de conservação usual $\partial_\tau \mathcal{J}_0 + \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0$. Se quisermos então descrever um sistema de férmions interagentes (com interações entre densidades e correntes), seremos levados a considerar um termo de interação genérico $S_I[\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_i]$, em analogia ao que foi considerado na seção (3.1.2), na eq. (3.2). A ação fermiônica para o sistema interagente seria então:

$$\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_0\left[\psi^*, \psi\right] + S_I\left[\mathcal{J}_0^F, \mathcal{J}_i^F\right] \tag{3.40}$$

Esta ação seria usada para se construir o funcional gerador das funções de correlação de correntes para o sistema, $Z[s]$. Para obter este funcional deveríamos acoplar o sistema a um campo de gauge externo s_μ, usado como fonte para as funções de correlação, que seriam obtidas, como no caso relativístico, de acordo com

$$\left\langle \mathcal{J}^F_{\mu_1}(x_1)\dots\mathcal{J}^F_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{S_F} = i^n \frac{\delta \ln Z[s]}{\delta s_{\mu_n}(x_n)\cdots\delta s_{\mu_1}(x_1)}\Bigg|_{s=0} \tag{3.41}$$

Por se tratar de um campo de gauge, o acoplamento com a fonte s_μ se dá na forma usual, trocando-se derivadas comuns por derivadas covariantes. Assim após um cálculo direto, pode-se escrever a ação acoplada à fonte como:

$$S_F = \int d^3x\ \psi^* \left[\partial_\tau + is_0 - \frac{\left(\vec{\nabla} + i\vec{s}\right)^2}{2m} - \mu\right]\psi + S_I\left[\mathcal{J}_0, \vec{\mathcal{J}} + \vec{s}\mathcal{J}_0\right] \tag{3.42}$$

Notemos que neste caso o acoplamento da fonte externa à corrente fermiônica ocorre de modo diferente daquele que ocorre no caso relativístico, que foi considerado na seção (3.1.2). Esta diferença ocorre basicamente devido ao operador ∇ que surge na expressão da corrente considerada. Notemos ainda que esta forma da corrente é conseqüência direta da forma da ação considerada, que induz uma relação de dispersão não-linear $\omega = \vec{k}^2/2m$, que não ocorre no caso relativístico. Em outras palavras, a corrente de Noëther não é invariante local de gauge e portanto não se acopla de maneira linear com uma fonte externa. Como conseqüência do tipo de acoplamento da fonte s_μ tem-se que

$$\frac{\delta S_F}{\delta s_0} = \mathcal{J}_0 \tag{3.43}$$

$$\frac{\delta S_F}{\delta s_i} = \mathcal{J}_i + \frac{\mathcal{J}_0}{2m}s_i + \frac{\delta S_I}{\delta \mathcal{J}_i}J_0 \tag{3.44}$$

Da equação acima vemos que a eq. (3.41) só será válida se

$$\frac{\delta S_I\left[\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_i\right]}{\delta \mathcal{J}_i} = 0 \tag{3.45}$$

Como a eq. (3.41) é usual como modo de se obter funções de correlação, e como em nossa proposta de bosonização buscamos relações de equivalência entre estas funções de correlação, consideraremos que a eq. (3.45) seja válida, o que implica em que o termo de interação S_I não poderá depender de $\mathcal{J}_i$, ou seja, $S_I\left[\mathcal{J}_0, \vec{\mathcal{J}} + \vec{s}\mathcal{J}_0\right] \to S_I\left[\mathcal{J}_0\right]$.

Notemos no entanto que $S_I[\mathcal{J}_0]$ poderá assumir qualquer forma, de modo que vários tipos de sistemas físicos podem ser considerados como casos particulares do modelo estudado, assim como ocorreu no caso relativístico visto na seção (3.1.2).

Para realizar a bosonização do modelo que estamos considerando devemos encontrar uma ação bosonizada S_B que gere funções de correlação iguais àquelas que são obtidas a partir da ação fermiônica S_F, ou seja:

$$\left\langle \mathcal{J}^F_{\mu_1}(x_1)\ldots\mathcal{J}^F_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{S_F} = \left\langle \mathcal{J}^B_{\mu_1}(x_1)\ldots\mathcal{J}^B_{\mu_n}(x_n)\right\rangle_{S_B} \tag{3.46}$$

O funcional gerador para as funções de correlação fermiônicas é dado por

$$Z[s] = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^*\ e^{-S_F[\psi^*,\psi,s_\mu]} \tag{3.47}$$

sendo

$$S_F\left[\psi^*, \psi, s_\mu\right] = \int d^3x\ \psi^*\left[\partial_\tau + is_0 - \frac{\left(\vec{\nabla} + i\vec{s}\right)^2}{2m} - \mu\right]\psi + S_I\left[J^F_0\right] \tag{3.48}$$

Analogamente ao que foi feito no caso relativístico, escrevemos

$$e^{-S_I\left[\mathcal{J}^F_0\right]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\tilde{S}[\phi] - i\int d^3x\ \mathcal{J}^F_0\phi} \tag{3.49}$$

de modo que o funcional gerador ficará:

$$Z[s] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\phi \; e^{-\mathcal{S}[\;\psi^*,\;\psi,\;s_\mu,\;\phi]} \tag{3.50}$$

sendo agora

$$\mathcal{S}\left[\psi^*, \psi, s_\mu, \phi\right] = \int d^3x \psi^* \left[\partial_\tau + is_0 + i\phi - \frac{\left(\vec{\nabla} + i\vec{s}\right)^2}{2m} - \mu\right] \psi + \tilde{S}[\phi] \tag{3.51}$$

Para realizar a bosonização do funcional gerador deste sistema seguimos os mesmos passos tomados nas equações (3.5) a (3.14), o que nos levará à expressão bosonizada deste funcional:

$$Z[s] = \int \mathcal{D}A_\mu \; e^{-\mathcal{K}_B[A]-S_I[B]-i\int d^3x \; (s_0 B + s_i \epsilon_{ij} E_j)} \tag{3.52}$$

sendo B e E_j os campos magnético e elétrico definidos na eq. (3.21). $\mathcal{K}_B[A_\mu]$ representa a ação livre bosonizada:

$$e^{-\mathcal{K}_B[A]} = \int \mathcal{D}b_\mu \; e^{\mathrm{Tr}\ln\left[\partial_\tau + ib_0 - \frac{(\vec{\nabla}+i\vec{b})^2}{2m} - \mu\right] + i\int d^3x \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu b_\rho} \tag{3.53}$$

Portanto, neste caso em que a relação de dispersão não é linear, a bosonização é atingida com um procedimento completamente análogo aos exemplos anteriores. As características mais importantes são as seguintes: a ação bosonizada é uma teoria de gauge; as partes livre e de interação fermiônica não se misturam na ação bosonizada; a bozonização da ação de interação é atingida simplesmente substituindo a densidade por um campo magnético e a corrente por um campo elétrico transverso. Este resultado independe da forma explícita da ação de interação. Por sua vez, a ação bozonizada da parte livre é representada pela trasnformada de Fourier transversa do determinante fermiônico, neste caso dado por

$$T[b] = \mathrm{Tr}\ln\left[\partial_\tau + ib_0 - \frac{\left(\vec{\nabla} + i\vec{b}\right)^2}{2m} - \mu\right] \tag{3.54}$$

Um ponto importante que devemos ressaltar é que para chegar a este resultado, ao contrário de todos os casos anteriores, tivemos que eliminar, nas interações, termos que continham correntes. A razão fundamental deste procedimento é que no caso de relações de dispersão não lineares, as correntes não são invariantes locais de gauge. Voltaremos a tratar deste ponto nas conclusões.

Capítulo 4

O determinante fermiônico e o termo de Chern-Simons

Conforme vimos nos capítulos anteriores, o determinante fermiônico desempenha um papel fundamental na estrutura da bosonização funcional. Lamentavelmente, não se conhecem até hoje expressões exatas para este determinante, nem para sua transformada de Fourier transversa. Porém, nos últimos anos houve avanços significativos na compreensão da estrutura geral deste objeto, e também no desenvolvimento de algumas aproximações para seu cálculo.

Neste capítulo descreveremos alguns destes avanços, mas nos deteremos mais detalhadamente num aspecto sumamente importante do determinante fermiônico: o termo de Chern-Simons induzido. Como veremos, o coeficiente de Chern-Simons pode ser vinculado a um observável (a condutividade transversa), e portanto a determinação deste termo deve ser feita com precisão. Porém, existe certo grau de ambigüidade nesta determinação, proveniente da necessidade de se regularizar a teoria no regime ultravioleta. Estudaremos alguns apectos desta ambigüidade, e proporemos um método de regularização que, a nosso entender, é o mais apropriado para este tipo de cálculo. Um resumo dos assuntos discutidos neste capítulo pode ser encontrado na referência [51].

4.1 Estrutura geral do determinante fermiônico e a ação bozonizada

Quando estudamos a estrutura geral do determinante fermiônico para sistemas que quebram a simetria de paridade (por exemplo férmions de Dirac massivos), observamos a presença de um termo de Chern-Simons induzido pela dinâmica fermiônica. Talvez a observação mais importante a esse respeito seja a de que no limite de baixas energias e longas distâncias ($k^2/m^2 \to 0$) o determinante fermiônico pode ser escrito como um termo de Chern-Simons local puro. Isto significa que o sistema que gera o termo de Chern-Simons é representado por uma teoria topológica (que independe da métrica). De um modo geral podemos escrever

$$\lim_{m\to\infty} T[b] = \frac{\sigma}{2}\int d^3x\ \epsilon_{\mu\nu\rho} b_\mu \partial_\nu b_\rho \tag{4.1}$$

Como esta ação é quadrática, pode-se calcular sua transformada de Fourier transversa, obtendo-se para a ação bosonizada

$$K_B[A] = \frac{1}{2\sigma} \int d^3x \; \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \tag{4.2}$$

que também é uma ação topológica de Chern-Simons com coeficiente $1/\sigma$. Uma observação importante é que este resultado é exato no limite $k^2/m^2 \to 0$. O resultado mostrado na eq. (4.1) foi inicialmente calculado até a aproximação a um loop. Cálculos posteriores[52, 53] mostraram explicitamente que a correção de dois loops se anula no caso $m \to \infty$, o que constitui um resultado não trivial, proveniente do cancelamento de diferentes diagramas. De um modo geral, S. Coleman e B. Hill, usando técnicas diagramáticas, mostraram na referência [54] que para $m \to \infty$ não há correções ao termo de Chern-Simons induzido que sejam provenientes de outros diagramas que não sejam o de um loop. Tal resultado também foi obtido por outros autores[55, 56], utilizando técnicas diferentes, e é conhecido como *teorema de Coleman-Hill.* Devemos ressaltar que este teorema é válido somente para o caso relativístico abeliano. Desta maneira, temos que o resultado mostrado na eq. (4.1) pode ser considerado exato para $m \to \infty$, pois correções de ordem superior se anulam. Este comportamento pode ser visto como uma conseqüência do caráter topológico do termo de Chern-Simons. É muito interessante notar que este termo também pode ser relacionado a outros aspectos topológicos em teoria de campos, como por exemplo a fracionalização do número fermiônico em sistemas unidimensionais. Esta observação foi explorada na referência [57], onde o determinante fermiônico à temperatura finita pode ser expresso em termos de infinitos sistemas unidimensionais não interagentes.

Se considerarmos as correções para a ação bosonizada e levarmos em conta que ela é invariante de gauge (já que em $(2+1)d$ não existem anomalias, como em um número par de dimensões), veremos que tanto esta ação quanto o determinante fermiônico terão a estrutura de uma ação topológica perturbada com termos proporcionais a $F_{\mu\nu}$.

Aproveitando esta propriedade não trivial, na referência [58] foi demonstrado que existe uma transformação não-local e não-linear $b_\mu \rightarrow \hat{b}_\mu[b]$ que mapeia a ação fermiônica efetiva num termo de Chern-Simons puro, ou seja:

$$\mathrm{Tr}\ln(\partial\!\!\!/ + i\, b\!\!\!/ + m) \longrightarrow \frac{i\eta}{2}\int d^3x\ \epsilon_{\mu\nu\rho}\hat{b}_\mu\partial_\nu\hat{b}_\rho \tag{4.3}$$

onde $\hat{b}_\mu[b]$ é um campo de gauge e η é um fator numérico que pode ser calculado considerando-se apenas a contribuição de duas pernas ao cálculo de $T[b]$, como é mostrado na referência [20]. Naquele artigo, os autores mostram também que o resultado da eq. (4.3) permite reescrever a ação bosonizada $K_B[A]$ como um termo de Chern-Simons puro, a menos de uma redefinição não-local e não-linear do campo A_μ, ou seja:

$$K_B[A] = \frac{i}{2\eta}\int d^3x\ \epsilon_{\mu\nu\rho}\hat{A}_\mu\partial_\nu\hat{A}_\rho \tag{4.4}$$

com $\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu[A]$.

Embora esta observação não tenha apresentado conseqüências diretas em relação ao cálculo explícito da ação bosonizada, ela mostra que o caráter topológico e geométrico desta ação desempenham um papel fundamental.

Quanto às aproximações existentes para o cálculo da ação bosonizada K_B, a melhor que se conseguiu até o presente é, a nosso ver, a chamada aproximação gaussiana. Na referência [38], o cálculo da ação fermiônica efetiva é feito expandindo-se o logarítmo que aparece na expressão desta ação, até o termo quadrático em b_μ. Tal aproximação corresponde ao cálculo completo a um loop da ação fermiônica efetiva. O resultado pode ser expresso como a soma de dois termos, um que conserva a paridade e outro que quebra explicitamente esta simetria:

$$\mathrm{Tr}\ln(\partial\!\!\!/ + b\!\!\!/ + m) = T_{PC}(b) + T_{PV}(b) \tag{4.5}$$

com

$$\begin{aligned} T_{PC}(b) &= -\frac{1}{4}\int d^3x\ f_{\mu\nu}F(-\partial^2)f_{\mu\nu} &(4.6)\\ T_{PV}(b) &= -\frac{i}{2}\int d^3x\ b_\mu G(-\partial^2)\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu b_\rho &(4.7)\end{aligned}$$

onde F e G são funções que são calculadas usando a regularização de Pauli-Villars. No espaço dos momenta tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k^2) &= \frac{|\, m\,|}{4\pi k^2}\left[1 - \frac{1-(k^2/4m^2)}{(k/2m)}\mathrm{arcsen}\left(1+\frac{4m^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] &(4.8)\\ \tilde{G}(k^2) &= \frac{q}{4\pi} + \frac{m}{2\pi\,|\,k\,|}\,\mathrm{arcsen}\left(1+\frac{4m^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}} &(4.9)\end{aligned}$$

onde q indica a diferença entre o número de reguladores com massas positivas e negativas. Vemos então que, assim como ocorreu no cálculo realizado na referência [18], o resultado final do processo de bosonização depende do processo de regularização, pois a princípio q poderia assumir qualquer valor inteiro. Na próxima seção voltaremos a este assunto.

Escolhendo $q = 0$ na eq. (4.9) e usando as eqs. (4.5)-(4.9) para obter a expressão da ação bosonizada K_B, obteremos

$$K_B = \int d^3x\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\,C_1\,F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}A_\mu\,C_2\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda\right] \tag{4.10}$$

com

$$C_1 = \frac{F}{-\partial^2 F^2 + G^2} \quad ; \qquad\qquad C_2 = \frac{G}{-\partial^2 F^2 + G^2} \tag{4.11}$$

De posse da ação bosonizada K_B e usando a regra geral para a bosonização das correntes fermiônicas,

$$J_\mu^F = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \longrightarrow J_\mu^B = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$$

pode-se encontrar a versão bosonizada da ação (ou do funcional gerador) para o sistema fermiônico *com interações*. Na referência [22] por exemplo, encontramos a ação bosonizada do modelo de Thirring não-relativístico em $(2+1)d$, na aproximação gaussiana. O resultado pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} S_{\text{bos}}[A] &= \int d^3x \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\,C_1\,F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}A_\mu\,C_2\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda\right] \\ &+ \int d^3x d^3y \left[\frac{1}{4}\epsilon_{ij}F_{ij}(x)V_0(x,y)\epsilon_{lm}F_{lm}(y) + F_{i0}(x)V(x,y)F_{i0}(y)\right] \end{aligned}$$

Apesar de ter sido considerada apenas a aproximação a um loop para o cálculo da ação fermiônica efetiva e da ação bosonizada, pode ser mostrado[20, 59] que o resultado obtido é exato, desde que sejam consideradas apenas as funções de correlação de segunda ordem. Por outro lado, a aproximação gaussiana é exata no limite em que $k^2/m^2 \to 0$, em cujo caso a ação será do tipo de Maxell-Chern-Simons local.

4.2 Ambigüidades na determinação do coeficiente de Chern-Simons

Do que foi visto até agora, temos que a um loop, a ação bosonizada $K_B[A_\mu]$ pode ser escrita como um termo de Chern-Simons. Lembrando agora que para um sistema sem interações o funcional gerador é dado por (cf. eq. (3.26))

$$Z[s] = \int \mathcal{D}A_\mu \; e^{-K_B[A_\mu]-i\int d^3x \; s_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho} \tag{4.12}$$

vemos que o fato de $K_B[A_\mu]$ ser quadrática em A_μ permite escrever o funcional gerador na forma

$$Z[s] = e^{-\frac{1}{2}\int d^3x \; d^3y \; s_\mu(x)\Pi_{\mu\nu}(x-y)s_\nu(y)} \tag{4.13}$$

sendo $\Pi_{\mu\nu}$ o *tensor de polarização do vácuo* para a teoria. É importante notar que o resultado acima também se aplica a sistemas não-relativísticos e sistemas com interações quadráticas nas correntes, relativísticos ou não. Por exemplo, na referência [22] encontramos o tensor de polarização para o caso da aproximação gaussiana para o modelo de Thirring não-relativístico em $(2+1)d$.

É interessante notar que no caso de um sistema fermiônico livre, a equação que define o funcional gerador pode ser reescrita como

$$Z[s] = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \; e^{\bar{\Psi}(\not\partial+i\not s+m)\Psi} = e^{\mathrm{Tr}\ln(\not\partial+i\not s+m)} = e^{-T[s]} \tag{4.14}$$

Comparando esta expressão com a eq. (4.13), vemos que o tensor de polarização pode ser visto como resultado da expansão até a segunda ordem da ação fermiônica efetiva $T[s]$, ou seja:

$$\mathrm{Tr}\ln(\not{\partial}+i\not{s}+m)=-\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\; s_\mu(x)\;\Pi_{\mu\nu}(x-y)\; s_\nu(y) \tag{4.15}$$

Considerando agora a equação eq. (4.13), vemos que o valor médio da corrente poderá ser escrito como:

$$\langle J_\mu(x)\rangle \equiv \frac{\delta \ln Z[s]}{\delta s_\mu}=\int d^3y\Pi_{\mu\nu}(x-y)\; s_\nu(y). \tag{4.16}$$

Notemos agora que a invariância de gauge implica em que as componentes de $\Pi_{\mu\nu}$ não são independentes entre si: no espaço dos momenta deve-se ter $\Pi_{\mu\nu}k_\mu=0$. Em particular podemos escrever $\Pi_{\mu 0}=-\Pi_{\mu i}k_i/\omega$. Usando esta relação e supondo um campo elétrico externo da forma[22] $\vec{E}=\nabla s_0-\partial_0\vec{s}$, poderemos escrever, no espaço dos momenta:

$$\langle J_i(\omega,\vec{k})\rangle=\sigma_{ij}(\omega,\vec{k})\tilde{E}_j(\omega,\vec{k}) \tag{4.17}$$

onde foi suposto que $\nabla\cdot\vec{E}=0$ e

$$\sigma_{ij}=i\frac{1}{\omega}\Pi_{ij} \tag{4.18}$$

é o *tensor de condutividade* do sistema, representando a resposta linear do sistema (em termos de corrente) a um campo eletromagnético externo. O importante desta equação é que a condutividade transversa $\sigma\equiv\lim_{\omega k\to 0}(\sigma_{12})$ é precisamente o coeficiente do termo de Chern-Simons.

Observando as eqs. (4.3) e (4.9), vemos que o coeficiente de Chern-Simons depende da regularização utilizada para regularizar as divergências ultravioletas da teoria. Porém, sendo este coeficiente um observável, ele não deveria depender da regularização, ou pelo menos deveríamos ter um critério físico para fixá-lo, de modo a eliminar as ambigüidades. Para entender um pouco melhor a origem destas ambigüidades faremos aqui um pequeno resumo dos cálculos para σ existentes na literatura, usando diferentes métodos de regularização.

a) *Regularização Dimensional*

A regularização dimensional pode ser implementada a nível diagrámatico, sendo o resultado dado por[55]:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{|m|}{m} \tag{4.19}$$

b) *Regularização de ζ-function*

Esta regularização é baseada no cálculo da corrente de fermiônica, usando uma função de Green de Dirac regularizada. Para isto, a corrente regularizada é escrita como

$$J_\mu^{\mathrm{reg}} = -\frac{d}{d\lambda}\left\{\lambda \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \left(\partial\!\!\!/ + \not{s} + m\right)^{-\lambda-1}\right]\right\}\Big|_{\lambda=0} \tag{4.20}$$

onde λ é uma variável complexa a ser continuada analiticamente para $\lambda = 0$, onde a função Green não é bem definida. Devido a sutilezas da continuação analítica, o resultado contém termos anômalos, que induzem uma quebra de paridade extra, não sendo associados com o sinal da massa fermiônica original m. Neste caso o resultado é[60, 61]:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{|m|}{m} \pm 1\right) \tag{4.21}$$

c) *Regularização de Pauli-Villars*

O coeficiente de Chern-Simons induzido calculado por meio da regularização de Pauli-Villars pode ser encontrado em vários trabalhos[62]. O resultado obtido é dado por

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{m}{|m|} + q\right) \tag{4.22}$$

onde q é um número inteiro. Desta forma, na teoria abeliana é possível escolher $q = 0$ para todas as ordens na teoria de perturbações, desde que consideremos uma renormalização apropriada da constante de acoplamento[63].

É interessante ressaltar aqui certos aspectos da ambigüidade devido a regularização presentes na expressão de σ. De fato, a regularização de Pauli-Villars pode ser introduzida alternativamente por meio de uma lagrangeana de ordem mais alta nas derivadas. Cada parâmetro regulador de massa é associado a um novo fator de Dirac, com massa Λ_i, que muda o propagador fermiônico de modo a regularizar o comportamento ultravioleta da teoria, isto é,

$$(i\partial\!\!\!/ + m)^{-1} \rightarrow \left[(i\partial\!\!\!/ + m)\prod_i \frac{(i\partial\!\!\!/ + \Lambda_i)}{\Lambda_i}\right]^{-1} \tag{4.23}$$

Em geral, este procedimento muda as propriedades de paridade da ação inicial. Cada massa Λ_i contribui com um termo adicional $q_i = \Lambda_i/|\Lambda_i|$ para o coeficiente do termo de Chern-Simons induzido. Desta maneira, a mudança nas propriedades de paridade da teoria inicial é medida por $q = \sum_i q_i$ (cf. eq. (4.22)) e portanto, se estamos interessados em trabalhar com uma ação efetiva que possua as mesmas propriedades de paridade da teoria fermiônica clássica, devemos considerar um número igual de massas reguladoras positivas e negativas, o que corresponde a fixar $q = 0$ na eq. (4.22). Notamos também que o fator de Dirac associado a um par de massas de

Pauli-Villars Λ e $-\Lambda$,

$$(i\partial\!\!\!/ + \Lambda)(i\partial\!\!\!/ - \Lambda) \tag{4.24}$$

(que corresponde a $q = 0$) é invariante por uma transformação de paridade, *i.e.*, ele não introduz quebras adicionais de paridade. Neste caso, se o acoplamento com o campo externo deve ser mantido como $A_\mu \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu \Psi(x)$, devemos considerar um procedimento interativo sistemático para recuperar a invariância de gauge, ordem por ordem na teoria de perturbações.

e) *Regularização de rede*

Quando as divergências ultravioletas são regularizadas definindo o teoria em uma rede, o coeficiente do termo de Chern-Simons induzido torna-se[64]

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{m}{|m|}n \tag{4.25}$$

onde n é um número inteiro arbitrário. Na referência [64], n foi identificado como um número topológico que surge quando o propagador de fermiônico (em representação de momenta) é visto como um mapeamento de um toro tridimensional sobre o espaço das matrizes $SU(2)$.

Notemos que o resultado (4.25) coincide com o que é obtido através da regularização de Pauli-Villars, embora a interpretação para o inteiro n seja diferente. Enquanto no caso de Pauli-Villars é mais fácil relacionar o coeficiente σ com uma quebra adicional de paridade, no caso da regularização de rede a ambigüidade se origina de possíveis formulações não equivalentes que podem ser usadas para definir os férmions na rede.

Do que foi dito acima, vemos que uma possível ambigüidade (devida ao processo de regularização) na expressão da ação bosonizada irá gerar uma ambigüidade num resultado físico do modelo (condutividade), o que é obviamente inaceitável. Desta maneira, vemos que devemos adotar critérios adicionais de modo a determinar o valor do coeficiente de Chern-Simons, que a princípio seria ambíguo. De um ponto de vista puramente teórico, podemos dizer que não existe maneira de decidir qual o resultado correto, pois não há razão teórica para privilegiarmos determinado esquema de regularização em detrimento de outros. O que sabemos é que há diferentes esquemas de regularização que respeitam (ou não) a invariância de gauge[65], e que introduzem (ou não) uma quebra adicional de paridade. Deste ponto de vista, a determinação do coeficiente do termo de Chern-Simons exige informações físicas adicionais, ou seja, escolhida a estrutura física que nos levará a considerar a expressão da ação fermiônica efetiva, o esquema de regularização deverá ser escolhido de modo a respeitar as simetrias associadas.

Como já foi dito, um possível contexto físico onde a ação fermiônica é considerada é o estudo de determinados sistemas físicos no campo da matéria condensada. A maioria destes sistemas apresenta como importante característica o fato de que os termos que quebram a paridade (e como a quebram) *definem o modelo.* Por exemplo, podemos citar os modelos quânticos críticos[66] e modelos de quasipartículas nodais [10]. Em particular, a versão bosonizada de uma interação fermiônica corrente-corrente pode ser considerada como um modelo quântico crítico que descreve as transições topológicas entre platôs de condutividade no Efeito Hall Quântico Inteiro (EHQI). De fato, na referência [66], um determinado modelo foi associado à um ponto fixo de transformações de dualidade determinadas pelo coeficiente do termo de Chern-Simons. Como sabemos, a transição entre os platôs no EHQI é caracterizada por uma condutividade transversal $\sigma_{xy} = e^2/2hn$ com n inteiro, e uma condutividade longitudinal $\sigma_{xx} =$ finita. Na ausência de desordem, qualquer modelo fermiônico com este comportamento é chamado de quântico crítico, no sentido que as funções de correlação são dominadas por flutuações quânticas que produzem uma condutividade longitudinal finita, que no caso normal deveria ser zero ou infinita. Assim, o valor do condutividade transversa define o ponto de transição de fase. Desta forma, num modelo fermiônico qualquer usado para estudar propriedades de um sistema crítico como o citado, a condutividade transversal deve ser uma quantidade bem definida da teoria. De um ponto de vista teórico, a condutividade transversal é determinada pelo grau de quebra de paridade do modelo. Assim, neste contexto, uma exigência física é que a técnica usada nos cálculos não introduza nenhuma quebra de paridade adicional, já que isto mudaria o ponto de transição e alteraria portanto a condutividade transversal.

Outro exemplo que podemos citar é o estudo de líquidos nodais no contexto de supercondutores a altas temperaturas críticas [10]. Nestes sistemas, as excitações são descritas por dois férmions de Dirac em $(2+1)d$. Dependendo no parâmetro de ordem usado para descrever o supercondutor (por exemplo $d_{x^2-y^2}$ ou $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$), o sistema apresenta ou não quebra das simetrias $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$. De qualquer modo, como no exemplo anterior, a "quantidade" de quebra de paridade do parâmetro de ordem define o modelo. Deste modo, se esta quantidade é definida no nível "clássico", precisamos impor a condição adicional de que o método de regularização não induza quebras adicionais de paridade.

Na realidade, se o fato de "não introduzir quebra adicional de paridade" define um critério físico que determina certo sistema, então quaisquer métodos de regularização que obedeçam a esta exigência deveriam conduzir aos mesmos resultados físicos.

Na próxima seção consideraremos a regularização da ação fermiônica efetiva usando o método de point-splitting. Nosso interesse neste método baseia-se no fato de que ele não introduz quebras adicionais de paridade e respeita as invariâncias de gauge e de Lorentz. Além disso, este método pode ser implementado no nível lagrangeano, podendo-se definir desde o começo um funcional gerador regularizado. Portanto, este método deveria ser o mais apropriado no estudo de sistemas nos quais a "quantidade" de quebra de paridade pode ser vista como uma definição física. Como conseqüência, ao contrário do que ocorre quando utilizamos os métodos citados anteriormente, esperamos obter um resultado livre de ambigüidades.

4.3 O método point-splitting e o Coeficiente de Chern-Simons

Nesta seção calcularemos o tensor de polarização no limite $m \to \infty$ usando o método de regularização de point-splitting, introduzido originalmente por C. Becchi e G. Velo no estudo da anomalia quiral em teorias de gauge não-abelianas [67]. O conteúdo desta seção foi apresentado originalmente na referência [51].

Este método baseia-se numa separação de vértices na lagrangeana fermiônica original, tratando-se portanto de um método de regularização não-local. Esta "não-localidade" não acrescenta nenhuma dificuldade, uma vez que todas as simetrias do sistema são preservadas, em particular as simetrias de Lorentz, de gauge e de paridade. Deste modo, as propriedades analíticas dos gráficos de Feynman são mantidas nos diagramas. Veremos que nossos cálculos implicam num valor de condutividade Hall igual à metade do "quantum de condutividade" ($\frac{1}{2}\frac{e^2}{h}$), geralmente assumido no contexto dos sistemas de matéria condensada[1].

Inicialmente, notemos que de acordo com a eq. (4.13), para obter uma expressão regularizada para o tensor de polarização devemos regularizar o funcional gerador. No que segue trabalharemos com a expressão deste funcional no espaço pseudo-euclideano, a fim de comparar certas expressões com outras já conhecidas na literatura. Consideremos então a densidade de lagrangeana associada à eq. (4.14):

$$L(x) = \bar{\Psi}(x)\left[i\partial\!\!\!/ + \,A\!\!\!/ - m\right]\Psi(x) \qquad (4.26)$$

Como sabemos, esta densidade de lagrangeana é invariante sob transformações de Lorentz e de gauge. Sabemos também que o funcional gerador obtido a partir da eq. (4.26) conterá divergências ultravioletas, que serão evitadas usando-se o método de point-splitting. Podemos dizer que o ponto mais importante deste método consiste em "separar" os vértices dos gráficos obtidos a partir da densidade de lagrangeana original, o que equivale a separar o produto de operadores locais através de um vetor ε_μ. Isto corresponde a definir uma densidade de lagrangeana regularizada a partir da original. Seguindo o procedimento de [67], podemos escrever esta nova lagrangeana como:

$$L(x) = -2i\overline{\left\{\bar{\Psi}(x+\varepsilon)\frac{\gamma\cdot\varepsilon}{\varepsilon^2}T\left[e^{i\int_{-1}^{1}dt\varepsilon_\mu A^\mu(x+\varepsilon t)}\right]\Psi(x-\varepsilon)\right\}} - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \qquad (4.27)$$

onde T indicará o produto ordenado "temporalmente" em relação à variável t, na expansão da exponencial. A barra sobre o primeiro termo na eq. (4.27) representa uma média sobre as direções do vetor ε, de tal modo que as potências ímpares de ε são eliminadas. Esta operação garantirá a invariância do sistema sob transformações de Lorentz e de gauge, já que não privilegia nenhuma direção específica. Pode-se mostrar ainda que a eq. (4.27) reproduz a densidade de lagrangeana original no limite $|\varepsilon| \to 0$.

No espaço dos momenta, a ação para o sistema poderá ser escrita como:

$$A = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \bar{\Psi}(p) S^{-1}(p) \Psi(p) \;+ \int \frac{d^3p\, d^3q}{(2\pi)^3}\, \bar{\Psi}\left(p + \frac{1}{2}\, q\right) \Gamma(p,q) \Psi\left(p - \frac{1}{2}\, q\right) \quad (4.28)$$

onde

$$S^{-1}(p) = -2i\overline{\frac{\gamma \cdot \epsilon}{\epsilon^2} e^{2ip\cdot\varepsilon}} - m \;=\; -\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(\overline{\frac{e^{2ip\cdot\varepsilon}}{\varepsilon^2}}\right) - m \quad (4.29)$$

e parte que representará as interações com o campo de gauge será

$$\Gamma(p,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^{(n)}(p,q) \quad (4.30)$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(p,q) \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^{3n} n!} \int \left(\prod_{j=1}^{n} dk_j\right) \delta\left(q - \sum_{l=1}^{n} k_l\right) \;\times \\ &T\left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \left(\prod_{r=1}^{n} dt_r\right) \left[\prod_{s=1}^{n} A(k_s) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\right] S^{-1}\left(p - \sum_{g=1}^{n} k_g t_g\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Vemos então, da eq. (4.29), que uma determinada prescrição para a média de $\left[\exp(2ip\cdot\varepsilon)\right]/\varepsilon^2$ corresponderá a se fixar a forma de $S^{-1}(p)$. Escolhemos esta média de tal maneira que

$$\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left(\overline{\frac{e^{2ip\cdot\varepsilon}}{\varepsilon^2}}\right) = \frac{p^\nu}{f(\mu, p^2)} \quad (4.32)$$

onde μ e um escalar arbitrário, e $f(\mu, p^2)$ é uma função arbitrária que satisfaça

$$\lim_{\mu \to 0} f(\mu, p^2) = 1 \tag{4.33}$$

Embora esta liberdade de escolha de f introduza um grau de arbitrariedade, mostraremos que nenhuma ambigüidade surge quando calculamos o coeficiente do termo de Chern-Simons. Para determinar a forma de $f(\mu, p^2)$ podemos notar, usando a eq. (4.29), que a escolha feita na eq. (4.32) dará a seguinte forma para S:

$$S(p) = f(\mu, p^2) \frac{\not{p} + m f(\mu, p^2)}{p^2 - m^2 f^2(\mu, p^2)} \tag{4.34}$$

Consideraremos então a eq. (4.34) como a definição para o propagador fermiônico livre para a ação regularizada, que será dada pela eq. (4.28). As eqs. (4.30) e (4.31) representarão os vértices da teoria. Desta maneira, no limite $\mu \to 0$, o propagador fermiônico usual é obtido a partir de $S(p)$.

Usando as eqs. (4.31) e (4.34) vemos que a forma assintótica de $\Gamma^{(n)}$ é:

$$\Gamma^{(n)}_{p \to \infty}(p, q) \approx \frac{1}{f(\mu, p^2) p^{n-1}} \tag{4.35}$$

Esta equação, juntamente com a eq. (4.34), nos mostra que podemos assegurar a convergência de todas as integrais de loop, se escolhermos f como tendo uma dependência em p alta o bastante quando $p \to \infty$. Ainda da eq. (4.35), podemos ver que entre os vários $\Gamma^{(n)}$ $(n = 1,\ 2, ...)$, $\Gamma^{(1)}$ terá a maior dependência em p quando $p \to \infty$. Assim, se um dado gráfico G, contendo $\Gamma^{(1)}$ como um vértice, corresponder a uma integral de loop finita, então outro gráfico, obido a partir de G trocando-se $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(n)}$ $(n = 2,\ 3, ...)$, também será associado com uma integral de loop finita. Sendo assim, para determinar a funcão f que fará a teoria finita, precisamos apenas considerar os gráficos que envolvam $\Gamma^{(1)}$.

Um procedimento simples de "power counting" nos mostra que se $f(\mu, p) \approx p^4$ quando $p \to \infty$, então todas as integrais de loop serão finitas. Portanto se escolhermos

$$f(\mu, p) = 1 - (\mu/m^2)p^2 + (\mu/m)^4 p^4 \tag{4.36}$$

as integrais ficarão regularizadas e a forma analítica da função $f(p)$ permitirá fazer uma rotação de Wick no plano de energia, para que possamos calcular a integral de um loop, como veremos. De qualquer forma, o resultado final não dependerá da forma explícita de f. As únicas condições essenciais que são exigidas para esta função são uma dependência pelo menos quártica nos momenta; $\lim_{\mu\to 0} f(\mu, p) = 1$ e uma estrutura analítica que não introduza novas singularidades na passagem do espaço Euclideano ao espaço de Minkovski.

Como já foi dito acima (seção 4.2), o cálculo a um loop da ação fermiônica efetiva irá gerar um termo de Chern-Simons, que corresponderá, por sua vez, ao tensor de polarização da teoria. Para encontrar a expressão da integral de loop associada, consideramos o funcional gerador das funções de Green:

$$e^{iW} = \langle T[\exp(iA_I)] \rangle \tag{4.37}$$

onde A_I é a parte da ação que contém as interações. O gráfico que buscamos será gerado pelo terceiro termo da expansão formal da exponencial na eq. (4.37):

$$W^{(2)} = \left\langle T[(iA_I)^2/2] \right\rangle \tag{4.38}$$

onde precisaremos considerar apenas o vértice $\Gamma^{(1)}$ (que contém apenas um campo A_μ)

na expressão de A_I. Desta forma teremos:

$$A_I = -2i \int d^3x \, \overline{\left\{ \bar{\Psi}(x+\varepsilon) \frac{\gamma \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \left[i \int_{-1}^{1} dt \; \varepsilon \cdot A(x + \varepsilon t) \right] \Psi(x - \varepsilon) \right\}} \tag{4.39}$$

Usando esta equação juntamente com o teorema de Wick, poderemos escrever $W^{(2)}$ como:

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 \, d^3x_2 \; \mathrm{Tr} \overline{\Big\{ \left(-2i \frac{\gamma \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \right) \left[\int_{-1}^{1} dt_1 \; \varepsilon \cdot A(x_1 + \varepsilon t_1) \right]} \times \\ & \overline{\left\langle \bar{\Psi}(x_1 + \varepsilon) \Psi(x_2 - \varepsilon) \right\rangle \left(-2i \frac{\gamma \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \right) \left[\int_{-1}^{1} dt_2 \; \varepsilon \cdot A(x_2 + \varepsilon t_2) \right]} \times \\ & \overline{\left\langle \bar{\Psi}(x_2 + \varepsilon) \Psi(x_1 - \varepsilon) \right\rangle} \Big\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde $\left\langle \bar{\Psi}(x_1 + \varepsilon) \Psi(x_2 - \varepsilon) \right\rangle$ e $\left\langle \bar{\Psi}(x_2 + \epsilon) \Psi(x_1 - \varepsilon) \right\rangle$ representam propagadores fermiônicos livres, escritos no espaço de coordenadas. Um cálculo explícito das médias indicadas na equação acima permite escrever, no espaço dos momenta:

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \; A^\mu(q) \Pi_{\mu\nu}(q) A^\nu(-q) \tag{4.41}$$

sendo o tensor de polarização do vácuo dado por

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= -\mathrm{Tr} \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-1/2}^{1/2} dt_1 dt_2 \; \left[\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\frac{\not{u}}{f(\mu, u^2)} \right) \frac{\not{p} + m f(\mu, p^2)}{p^2 - m^2 f^2(\mu, p^2)} f(\mu, p^2) \right] \times \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(\frac{\not{v}}{f(\mu, v^2)} \right) \frac{\not{p} + \not{q} + m f\left(\mu, (p-q)^2\right)}{(p-q)^2 - m^2 f^2\left(\mu, (p-q)^2\right)} f\left(\mu, (p-q)^2\right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.42}$$

onde u, v são os vetores

$$u_\nu \equiv p_\nu - q_\nu t_1 \tag{4.43}$$

$$v_\nu \equiv p_\nu - q_\nu + q_\nu t_2 \tag{4.44}$$

O tensor de polarização do vácuo dado na eq. (4.42) pode ser dividido em uma parte simétrica e outra antisimétrica. A parte simétrica vem dos termos que conservam a paridade na ação efetiva e é independente da regularização; uma expressão desta parte pode ser encontrada em várias referências [68]. Por outro lado, a parte antisimétrica é relacionada aos termos que quebram a paridade. Em geral, esta parte depende da regularização, sendo esta dependência indicada através do coeficiente induzido de Chern-Simons, obtido de

$$\sigma = \frac{1}{2} \lim_{q^2 \to 0} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{q^\rho}{q^2} \Pi^{\mu\nu} \left(q^2\right) \tag{4.45}$$

Agora, usando eqs. (4.42) e (4.45), calculando o traço sobre os graus de liberdade de spin, calculando os integrais em t e avaliando o limite para pequenos momenta, podemos achar a expressão regularizada do coeficiente de Chern-Simons induzido

$$\sigma_{(\mu)} = mF(m, \mu) \tag{4.46}$$

onde

$$F(m, \mu) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4\mu p^2(1 - 2\mu^3 p^2/m^2)/m^2 + 3}{f(\mu, p^2)[p^2 - m^2 f^2(\mu, p^2)]^2} \tag{4.47}$$

A equação (4.47) é finita para valores finitos de μ. Então, usando a eq. (4.33), podemos tomar o limite $\mu \to 0$ no integrando da eq. (4.47) e efetuar a integral de sobre os momenta. Obteremos então

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{|m|}{m} \tag{4.48}$$

É importante a nota que este resultado não depende da forma explícita da função $f(\mu, p^2)$. O cálculo que realizamos baseia-se fundamentalmete em duas propriedades: a grandes momenta $f(\mu, p^2)$ cresce rápido o bastante para tornar finita a teoria regularizada, e $\lim_{\mu \to 0} f(\mu, p^2) = 1$.

Um ponto importante neste procedimento é que levamos o limite $\mu \to 0$ no integrando da eq. (4.47). Este procedimento é correto porque, como mencionamos antes, a eq. (4.47) é *finita*, o que já não ocorre no caso de uma *verdadeira anomalia*[67]. Por exemplo, no caso da anomalia quiral em $(3+1)d$, as integrais que contribuem para a anomalia são divergentes, não sendo então possível trocar a ordem do limite $\mu \to 0$ com a integração. No caso que estamos considerando, as contribuições para o coeficiente de Chern-Simons são finitas tanto no regime ultravioleta quanto no infra-vermelho.

Podemos ver que nosso resultado coincide com o método de regularização dimensional, e com o método de Pauli-Villards quando considerados pares de massas reguladoras com sinais opostos. Uma vantagem de nosso resultado é que ele está livre de qualquer ambigüidade, como as que surgem nos casos anteriormente citados. As ambigüidades do método de regularização dimensional aparecem quando tenta-se prolongar analiticamente o tensor antisimétrico $\epsilon_{\mu\nu\rho}$, com óbvias dificuldades. Já no caso de Pauli- Villars, as dificuldades aparecem devido ao fato de que as massas usadas para regular as divergências introduzem quebras adicionais de paridade. Mesmo no caso de um número par de massas com sinais opostos ($q = 0$), existem problemas com a simetria de gauge, que deve ser restaurada com contratermos, ordem a ordem na teoria de perturbações.

Uma observação importante a ser notada é que nosso resultado não coincide com o resultado obtido usando regularização ζ − function. A origem desta divergência pode ser explicada da seguinte maneira: este tipo de regularização respeita explicitamente a invariância de gauge "grande", entendendo-se por esta expressão a invariância frente a transformações de gauge que tem um "winding number" não trivial na direção temporal compactificada em S_1. Este tratamento é importante quando a teoria é definida em temperatura finita. Aparentemente, não é possivel manter a invariância frente a transformações de gauge "grandes" e a conservação da paridade ao mesmo tempo. Desta forma, aparece um tipo de anomalia de paridade nesta descrição.

Temos então que quando se define o modelo, tem-se que escolher a quantidade que deve ser conservada. Do ponto de vista das nossas motivações, como já explicamos, a definição natural do modelo é a exigência de que a quebra de paridade não seja alterada pela regularização.

É claro que outras definições não podem ser descartadas do ponto de vista teórico, dependendo do sistema físico particular. No caso discutido neste trabalho (temperatura zero), o espaço subjecente é R^3, não existindo então problemas com a invariância de gauge, dado que em nosso sistema não existem transformações de gauge com topologia não trivial.

Uma situação diferente ocorre quando consideramos férmions não massivos. Neste caso o sistema não apresenta "gaps" de energia, o que leva a uma ambigüidade na definição da teoria. Tal ambigüidade reflete-se no cálculo perturbativo, onde surgem divergências no infra-vermelho. Obviamente, se estamos interessados no estudo das propriedades de quebra de paridade na teoria não podemos usar um regulador de massa infra-vermelho, já que esta massa quebra explicitamente a paridade. Infelizmente, o método de point-splitting desenvolvido nesta seção também não é satisfatório para o caso de férmions não massivos, já que ele não regula a divergência infra-vermelha.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese foram estudadas técnicas funcionais (de integral de caminho) que permitem descrever sistemas fermiônicos em duas dimensões espaciais em termos de campos bosônicos.

No capítulo 2 observamos que devido às particularidades do grupo de rotações no plano, as estatísticas fermiônicas e bosônicas não são as únicas permitidas. De fato, o conceito de anyons ou campos com estatística arbitrária está relacionado ao fato de que em duas dimensões é possível passar de uma estatística à outra adiabaticamente, considerando fluxos magnéticos ligados às posições das partículas. Desta forma é possível descrever um sistema de férmions através de um sistema bosônico acoplado a um campo de gauge de Chern-Simons. Este campo de gauge implementa o vínculo que liga a posição de cada partícula a um número impar de quanta de fluxo magnético, o que permite a mudança de estatística, de fermiônica para bosônica. Como exemplo, estudamos o caso de férmions interagentes sem spin sob a influência de um campo magnético forte perpendicular ao plano. A transformação deste sistema num sistema de bósons acoplados a um campo de Chern-Simons, leva à teoria conhecida como a de Chern-Simons-Landau-Ginsburg para o Efeito Hall Quântico Fracionário. Neste contexto estudamos a resposta electromagnética deste sistema, estabelecendo que a condutividade transversa é quantizada para qualquer tipo de distribuição de impurezas no sistema. Este resultado era conhecido para o Efeito Hall Quântico Inteiro e para uma distribuição de impurezas localizada (tipo delta de Dirac). Neste trabalho generalizamos o resultado para o Efeito Hall Quântico Fracionário e para uma distribuição de impurezas arbitrária.

No capítulo três estudamos outra técnica de bosonização em $(2+1)d$ que, a princípio, é independente da primeira apresentada. Esta técnica baseia-se essencialmente numa equivalência entre funções de correlação de correntes. Mostramos que qualquer teoria fermiônica em $(2+1)d$ que contenha apenas interação de correntes pode ser reescrita como uma teoria de gauge, independentemente do tipo de interação de correntes que ela possua. A bosonização das correntes fermiônicas em $(2+1)d$ é realizada mediante o mapeamento

$$J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \rightarrow J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho \tag{5.1}$$

enquanto que a teoria de gauge associada à teoria fermiônica pode ser construída a partir da seguinte correspondência:

$$K_F[\psi] + S_I[J^F_\mu] \rightarrow K_B[A_\mu] + S_I[\epsilon\partial A] \tag{5.2}$$

onde K_F, o termo cinético dos férmions, é mapeado na ação bosônica K_B, cuja exponencial é a transformada de Fourier transversa do determinante fermiônico.

Uma observação importante é que a parte de interação da teoria bosônica tem a mesma forma daquela existente na teoria original fermiônica, quando escrita em termos de correntes. A única diferença é a expressão explícita da corrente, que é dada pela eq. (5.1). Isto significa que a regra de bosonização das correntes é exata e universal, já que não depende da forma específica do termo de interação. Também mostramos, ao longo do capítulo (3), que estas regras podem ser aplicadas tanto a teorias relativísticas quanto não-relativísticas. Neste sentido, podemos dizer que a covariância de Lorentz não é uma simetria importante, no que diz respeito ao procedimento de bosonização funcional. O que realmente importa no processo descrito é a invariância de gauge. Isto ficou evidenciado no caso de férmions com relação de disperção não linear, onde tivemos que impor algumas restrições sobre a forma da ação de interação, devido ao fato de que, neste caso, a corrente de Noëther não é invariante de gauge local.

Devido ao papel central que o determinante fermiônico desempenha no processo de bosonização, dedicamos o capítulo (4) ao estudo deste objeto. Em particular, após apresentar um resumo de suas propriedades conhecidas, nos concentramos nas ambigüidades que surgem no cálculo do coeficiente de Chern-Simons induzido. Observamos que para uma determinação unívoca deste coeficiente é necessário estabelecer algum critério físico no processo de sua determinação. Isto ocorre porque o coeficiente de Chern-Simons está associado a um observável físico que é a condutividade transversa. Portanto, como acontece com qualquer observável, sua determinação não poderia ter ambigüidades devidas ao processo de regularização.

Tanto no nosso caso quanto na maioria dos modelos usados na área da matéria condensada, um critério físico que pode ser suficiente para definir um modelo é o grau de quebra de paridade que ele deve ter. Se assumirmos que no nível lagrangeano o modelo fica definido por esta quantidade, então o método de regularização utilizado não deve produzir quebras adicionais de simetria de paridade. Para que este critério possa ser considerado bom do ponto de vista físico, os observáveis calculados não devem depender do método de regularização utilizado (desde que este não introduza novas quebras de paridade). Neste trabalho propomos que o método de regularização que melhor se ajusta a estas características é o chamado método de "point-splitting". Ele já foi utilizado com sucesso na descrição da anomalia quiral em teorias de gauge em $(3+1)d$. Este método possui várias vantagens não apresentadas por outros métodos conhecidos, brevemente descritos no capítulo (4). Em particular, a regularização de point-splitting pode ser implementada no nível lagrangeano, respeitando as simetrias de translação, de Lorentz, de gauge, e além disso não introduzindo nenhuma quebra adicional de paridade. Desenvolvemos o cálculo em detalhe do coeficiente de Chern-Simons e achamos que ele é dado pelo valor $\sigma = \frac{1}{4\pi}$, sem ambigüidades na sua determinação. Em unidades usuais, este valor corresponde a meio "quantum de condutividade" $\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2}{h}$.

Os resultados encontrados nesta tese mostram uma claro avanço na compreensão de teorias fermiônicas em $(2+1)d$. Porém, muitas perguntas ainda ficam sem resposta e serão o guia para futuros trabalhos. Vimos que para completar o processo de bosonização de correntes é necessário o cálculo da transformada de Fourier transversa do determinante fermiônico. Até o presente, ainda se está longe de calcular este termo exatamente. O máximo que sabemos é sua estrutura topológica quando os momenta envolvidos são muito menores que a massa dos férmions, que determina um gap no espectro de energias e portanto fixa uma escala de comparação. O caso não massivo é ainda mais obscuro, já que a ausência de gap no espectro de energias invalida qualquer tratamento perturbativo. Foi sugerido em vários trabalhos a presença de uma "anomalia de paridade" a massa zero. O efeito médio desta anomalia seria introduzir um termo de Chern-Simons na ação bosonizada. Isto geraria espontaneamente uma escala na qual, a princípio, poderia se tentar algum tratamento pertubativo. Lamentavelmente, não é claro para nós a física que há por trás desta possível anomalia, já que neste caso não dispomos de métodos confiáveis de regularização. O método de point-spliting proposto nesta tese funciona muito bem no casso massivo. Já para o caso de massa zero, ele apresenta divergências infravermelhas as quais, a princípio, não são controladas de forma trivial.

Podemos fazer ainda algumas considerações gerais com respeito à forma da ação bosonizada, em seus aspectos topológicos e de invariância de gauge. Conforme dissemos, no capítulo (2) é mostrado que a invariância de gauge exerce um papel preponderante em relação à invariância de Lorentz, na obtenção da ação bosonizada K_B pelo processo de bosonização funcional. Vimos também, no capítulo (3), que esta ação bosonizada possui uma forma geral que é invariante topológica (forma de Chern-Simons). Estes dois fatos nos sugerem que a melhor maneira de se escrever uma expressão para a ação bosonizada seria em termos de objetos que sejam topológicos e invariantes de gauge, como os loops de Wilson, por exemplo. Numa teoria de Chern-Simons, o valor médio no vácuo destes objetos constituem uma medida natural de invariantes topológicos [69]. Até o momento no entanto, este tipo de abordagem constitui um problema em aberto.

Outro aspecto concernente à bosonização funcional que consideramos importante e que não tem sido devidamente explorado, é a aplicação desta técnica aos sistemas não-abelianos. Na ref. [70], por exemplo, mostra-se que, a princípio, seria possível bosonizar um sistema de férmions auto-interagentes com simetria $SU(N)$ em $(2+1)d$, desde que seja considerado apenas o regime de baixas energias. De modo semelhante ao que ocorreu nos casos aqui considerados, a teoria bosonizada equivalente seria relacionada a uma teoria de Yang-Mills-Chern-Simons não abeliana, sendo idêntica a esta no caso de pequenos valores da constante de acoplamento. No entanto, não é claro neste caso qual seria a regra de bosonização das correntes, dado o seu caráter não-abeliano. Estudos mais gerais das propriedades de bosonização não-abeliana não foram ainda implementados em dimensão superior a $(1+1)d$. Em particular não é obvia a existência de um mapeamento universal como no caso abeliano.

Outro aspecto muito importante que deveria ser estudado em profundidade são as propriedades de dualidade destes sistemas. As principais perguntas a responder são se efetivamente os graus de liberdade fermiônicos da teoria estão relacionados com excitações topológicas da teoria bosonizada, e se ainda neste caso, os regimes perturbativo e não-perturbativo podem ser conectados por este tipo de transformação. Um começo destes estudos pode ser achado nas refs. [95] e [96], mas é claro que ainda resta muito caminho a percorrer.

Apêndice A

Anyons e o Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF)

Faremos aqui uma rápida apresentação das propriedades físicas de sistemas que apresentam Efeito Hall Quântico Inteiro e Fracionário e apresentaremos também alguns conceitos atualmente conhecidos relacionados a estes efeitos. Será suposto que sejam conhecidos alguns conceitos básicos sobre anyons, que podem ser vistos no capítulo (1). Um estudo detalhado sobre o Efeito Hall Quântico pode ser encontrado por exemplo na referência [71].

Consideremos inicialmente um sistema de elétrons (carga elétrica e) num plano, sujeitos à ação de um campo magnético de intensidade B_0 perpendicular ao plano e a um campo elétrico "longitudinal" E_L, no plano dos elétrons. Este campo irá gerar uma corrente longitudinal J_L que por sua vez sofrerá a ação de uma resistência longitudinal R_L.

Como sabemos da eletrodinâmica clássica, será gerada no plano do sistema uma corrente "transversa" J_H, perpendicular a J_L, e que será associada a uma resistência transversa R_H. Definindo eixos cartesianos nas direções longitudinal e transversa, poderemos escrever (no limite clássico) as correntes na forma geral $J_i = \sigma_{ij} E_j$, sendo σ a *matriz de condutividade* do sistema. No limite clássico esperamos que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, e que $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$, ambos variando com o inverso de B_0. No entanto, em 1980 estas quantidades foram medidas [72] no limite de baixas temperaturas (0-2 K^o) e campos magéticos intensos (1-20 $Tesla$), tendo sido observado que $\sigma_{xy} = -\sigma_{xy}$ tornava-se constante em torno de determinados valores de $1/B_0$, de maneira que o gráfico $\sigma_{xy} \times B_0^{-1}$ assemelhava-se à uma escada, com platôs em torno de múltiplos inteiros do *fator de preenchimento*

$$\nu = \frac{2\pi\rho}{eB_0} = \frac{\rho}{\rho_B} \tag{A.1}$$

sendo ρ a densidade de carga, e $\rho_B = eB_0/2\pi$ a degenerescência dos níveis de Landau. O termo σ_{xy} é usualmente chamado de *condutividade Hall* do sistema. Por outro lado, verificou-se também que a resistência longitudinal R_L se anulava nos platôs, assumindo picos de intensidade constante entre eles. Podemos dizer que estas são as principais características do Efeito Hall Quântico Inteiro (EHQI). O comportamento de σ_{xy} pode ser explicado observando que valores inteiros do fator de preenchimento correspondem a um número inteiro de níveis de Landau preenchidos, havendo um "gap" de energia entre eles. Desta maneira o sistema torna-se estável para ν inteiro, e nestes valores pode-se reproduzir teoricamente os valores medidos de σ_{xy}. Já o comportamento de R_L pode ser explicado supondo-se que impurezas e imperfeições nas amostras usadas geram estados localizados do sistema, os quais não permitem a condução de corrente. Supondo que a densidade de estados (em função da energia) tenha picos em torno de estado não-localizados (condutores), e que estes estados sejam estáveis (número inteiro de níveis de Landau preenchidos) chega-se ao comportamento observado da resistência longitudinal.

Em 1984 o EHQ foi testado em amostras mais limpas e com campos magnéticos mais intensos [27], tendo sido observado que os platôs verificados no EHQI, passavam a ocorrer também para valores fracionários do fator de preenchimento, o que caracteriza o Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF). Este efeito não pode ser explicado com base nos argumentos usados para explicar o EHQI, sendo necessário, para explicá-lo, levar em conta interações entre elétrons, que são desprezadas na descrição do EHQI. Atualmente há varias descrições teóricas possíveis para o EHQF (todas aproximadas), sendo as seguintes, a nosso ver, as mais importantes *para esta tese*: (a) a função de onda de Laughlin [73]; (b) a generalização de Jain [74]; (c) o modelo de Chern-Simons-Landau-Ginzburg (CSLG) [28, 29], e o modelo de férmions compostos [75, 76].

As descrições baseadas nas aproximações (a) e (b) são usualmente chamadas de aproximações de campo médio, onde se propõe uma função de onda para o estado fundamental do sistema. A proposta de Laughlin foi

$$\Psi(z_1,\ z_2,\ ...z_N) = \prod_{i<j}^{N}(z_i - z_j)^n \exp\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_k|^2}{4l^2}\right) \tag{A.2}$$

para a função de onda associada a um fator de preenchimento $\nu = 1/n$, sendo n um inteiro ímpar, $z_k = x_k + iy_k$ indica a posição da k'ésima partícula no plano complexo e l é o raio de cíclotron para cada partícula. A função de onda de Laughlin foi muito bem sucedida na explicações tanto do espectro dos modos coletivos do sistema [77] quanto da sua incompressibilidade. Mais tarde Halperin [78] mostrou que a função de onda de Laughlin representava quasipartículas de carga e estatística fracionárias, sendo portanto anyons. Desta maneira poderia-se associar partículas ligadas a fluxos magnéticos ao estado descrito pela função de onda de Laughlin.

A complementação proposta por Jain consistiu em reescrever a função de onda de Laughlin de modo que se evidenciasse a presença de *férmions* ligados a um número par de quanta de fluxo magnético (*retendo portanto sua estatística*). Desta maneira, Jain pode explicar a exitência de "Estados Hierárquicos" [79, 80], associados aos diversos fatores de preenchimento encontrados no EHQF.

Analogamente ao que foi feito por Jain, pode-se mostrar [81] que fazendo uma transformação de gauge na funcao de onda de Laughlin, esta passa a representar um sistema bosônico. Isto já poderia ser esperado, visto que a funcao de onda em questão está relacionada a anyons. Pode-se dizer que este fato está na origem da proposta do modelo CSLG para o EHQF. Tal aproximação é mais completa do que as propostas por Jain ou por Laughlin, pois evidencia certas simetrias do problema e prediz resultados experimentais não previstos nas propostas anteriores [71]. A idéia básica desta proposta é mapear o sistema de elétrons interagentes sob a ação de um campo magnético externo num sistema de bósons com uma interação de gauge adicional, representada pelo termo de Chern-Simons. Este mapeamento é feito a nível microscópico, fazendo-se uma transformação unitária na Hamiltoniana e na função de onda que descreve o sistema. Como resultado, cada férmion passa a ser associado a um bóson acoplado a um número ímpar de quanta de fluxo magnético. A estatística do sistema é então mudada de bosônica para fermiônica. O fluxo magnético associado a cada bóson é produzido pelo campo de gauge estatístico e desta maneira cada bóson sofrerá o efeito não só do campo magnético externo, mas também do campo estatístico. Nesta construção o fator de preenchimento

$$\nu = \frac{1}{2k+1} \tag{A.3}$$

é especial, pois neste caso o campo estatístico cancela o campo magnético externo (em média), de modo que se anula o campo médio total que atua os bósons, e estes podem então formar um condensado de Bose-Einstein. Deste modo o sistema ficará estável para um fator de preenchimento da forma (A.3). Além disso, o efeito Meissner no condensado estável implica numa densidade de partículas uniforme, e portanto o sistema será incompressível, como pode ser verificado experimentalmente.

Analogamente ao que é feito no modelo CSLG para o EHQF, os elétrons do sistema que apresenta o EHQF também podem ser representados por outro tipo de férmions, acoplados, cada um, a um número par de quanta de fluxo magnético (mantendo portanto a estatística fermiônica). Esta é a base da proposta do modelo de férmions compostos para o EHQF.

Apêndice B

Transformações $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ de férmions em $(2+1)d$

As propriedades de transformação do campo fermiônico em $(2+1)d$ pelas transformações $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ são diferentes daquelas apresentadas por estes campos num espaço-tempo quadridimensional, apesar de serem obtidas de maneira análoga. O estudo das transformações $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ em $(3+1)d$ é feito em vários livros-texto, e adotaremos aqui a notação usual do caso em $(3+1)d$. Seguiremos a notação da referência [88].

B.1 Transformação $\mathcal{P}$ - paridade

Sejam $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ os dois versores num espaço euclideano bidimensional. Há três inversões espaciais distintas possíveis, definidas como:

$$I_\alpha \hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_j (I_\alpha)^j_i \qquad \alpha = 1,\ 2,\ s. \tag{B.1}$$

sendo

$$I_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

Vemos que I_1 corresponde a uma inversão do eixo "1", I_2 indica uma inversão do eixo "2" e I_s representará as duas inversões feitas simultaneamente. Como podemos mostrar facilmente, as transformações induzidas por I_α preservam os módulos dos vetores no plano: se $\mathbf{x}$ é um vetor arbitrário no plano e $\mathbf{x}' = I_\alpha \mathbf{x}$, então $|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|$. Como sabemos, as rotações em duas dimensões espaciais também possuem tal propriedade. De um modo geral, o grupo das rotações bidimensionais, SO(2), consiste em todas as transformações que têm determinante unitário. Observando então as eqs. (B.2) vemos que I_s tem determinante unitário, enquanto que I_1 e I_2 têm determinante -1. Portanto I_s é um membro do grupo SO(2) e corresponde a uma rotação (de um ângulo π). I_1 e I_2, por sua vez, não podem ser consideradas como rotações. A transformação de paridade em $(2+1)d$ será então definida como uma inversão de um dos eixos espaciais (não importa qual), correspondendo a uma reflexão especular em relação ao outro eixo. Notemos que não se trata de uma rotação. Aqui tomaremos I_1 como sendo a definição de um transformação de paridade. Isto implica em que neste tipo de transformação deveremos ter, por exemplo,

$$x_0 \overset{\mathcal{P}}{\to} x_0 \tag{B.3}$$

$$x_1 \overset{\mathcal{P}}{\to} -x_1 \tag{B.4}$$

$$x_2 \xrightarrow{\mathcal{P}} x_2 \tag{B.5}$$

Observando então o termo cinético da lagrangeana de Dirac ($\bar{\Psi}\partial\!\!\!/\Psi$) e observando a definição adotada para as matrizes γ no capítulo (2), vemos que a transformação de paridade implica em que

$$\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \Psi_{\mathcal{P}} = -i\gamma_1\Psi \tag{B.6}$$

Desta equação, vemos que o termo de massa fermiônica mudará de sinal por uma transformação de paridade, enquanto que o termo cinético permanecerá invariável. Portanto podemos escrever

$$\bar{\Psi}\left(\partial\!\!\!/ + m\right)\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\Psi}\left(\partial\!\!\!/ - m\right)\Psi \tag{B.7}$$

B.2 Transformação $\mathcal{C}$ - conjugação de carga

Por definição a conjugação de carga troca partículas por anti-partículas, e no caso de férmions isto equivale à seguinte transformação de espinores [88]:

$$\Psi(x) \xrightarrow{\mathcal{C}} \Psi_{\mathcal{C}}(x) = C\gamma_0\Psi^*(x) \tag{B.8}$$

sendo C a matriz de conjugação de carga, que tem a propriedade de produzir matrizes γ transpostas:

$$(\gamma_\mu)^T = -C^{-1}\gamma_\mu C \tag{B.9}$$

e satisfaz as seguintes relações:

$$C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C \tag{B.10}$$

Seguindo a notação que escolhemos para as matrizes γ no capítulo (2), podemos escolher

$$C = -i\gamma_2 \tag{B.11}$$

O fato de corresponder a uma troca de partículas por anti-partículas, implica em que a conjugação de carga deixa invariável a densidade de lagrangeana do campo fermiônico:

$$\bar{\Psi}\left(\not{\partial} + m\right)\Psi \xrightarrow{\mathcal{C}} \bar{\Psi}\left(\not{\partial} + m\right)\Psi \tag{B.12}$$

B.3 Transformação $\mathcal{T}$ - inversão temporal

Em problemas de física estatística ou matéria condensada, o tempo não surge como uma variável explícita, como ocorre na teoria quântica de campos. Podemos no entanto definir uma "inversão temporal" nos casos em que trabalhamos com a variável de integração t, ou seja, nos casos onde consideramos um espaço pseudo-euclideano com $(2+1)$ dimensões. As transformações serão dadas por

$$t \xrightarrow{\mathcal{T}} -t \tag{B.13}$$

$$x_1 \xrightarrow{\mathcal{T}} x_1 \tag{B.14}$$

$$x_2 \xrightarrow{\mathcal{T}} x_2 \tag{B.15}$$

Usando raciocínio análogo ao que foi usado no caso da transformação de paridade (eqs. (B.3) a (B.5)), vemos que a inversão temporal pode ser implementada, em termos de operadores de campo, como

$$\Psi \xrightarrow{\mathcal{T}} -i\gamma_2\Psi \tag{B.16}$$

Deste modo o termo de massa fermiônica mudará de sinal numa inversão temporal, enquanto que o termo cinético permanecerá invariável.

B.4 Considerações finais sobre transformações $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$

No caso relativístico considerado nos capítulos 2 e 3 o campo de gauge A_μ, que surgiu na bosonização final do modelo, podia ser visto como um campo externo, sem dinâmica própria definida na ação bosonizada. O mesmo se pode dizer da fonte externa s_μ, que foi acoplada à corrente fermiônica para gerar o funcional gerador $Z[s]$ (cf. eq. (3.2)). Isto implica em que aqueles campos não são afetados quando as transformações definidas acima forem realizadas no plano. Por outro lado, vimos que o termo de massa do campo fermiônico muda de sinal numa transformação de paridade, e permanece invariante sob uma transformação de carga. Por outro lado, vimos que no caso de um sistema fermiônico livre, a equação que define o funcional gerador (eq. (3.2)) pode ser reescrita como

$$Z[s] = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\; e^{\bar{\Psi}(\not\partial + i\not s + m)\Psi} = e^{\mathrm{Tr}\ln(\not\partial + i\not s + m)} = e^{-T[s]} \tag{B.17}$$

Do que foi dito acima, podemos escrever

$$\bar{\Psi}\,(\not\partial + i\,\not s + m)\,\Psi \;\;\stackrel{\mathcal{P}}{\to}\;\; \bar{\Psi}\,(\not\partial + i\,\not s - m)\,\Psi \tag{B.18}$$

$$\bar{\Psi}\,(\not\partial + i\,\not s + m)\,\Psi \;\;\stackrel{\mathcal{C}}{\to}\;\; \bar{\Psi}\,(\not\partial + i\,\not s + m)\,\Psi \tag{B.19}$$

Vemos assim que o sistema considerado na eq. (B.17) não apresenta invariância frente à transformação de paridade. Dizemos que existe uma *quebra de paridade* no modelo, e o termo responsável por esta quebra é o termo de massa $m\bar{\Psi}\Psi$. Esperamos então que o modelo bosonizado equivalente também apresente quebra de paridade, e que o termo que viole esta simetria seja relacionado à massa fermiônica, uma vez que o modelo final deve ser fisicamente equivalente ao modelo original. Este foi justamente o resultado obtido por nós, quando consideramos o caso de massas muito grandes e encontramos que a um loop, a ação fermiônica efetiva era dada por

$$\mathrm{Tr}\ln(\not{\partial} + i \not{s} + m)|_{m\to\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\frac{m}{|m|}\int d^3x \; \epsilon_{\mu\nu\rho} s_\mu \partial_\nu s_\rho \qquad \text{(B.20)}$$

O fato de s_μ ser um campo externo e o lado direito da equação acima ser proporcional à massa fermiônica nos indica que o termo obtido acima transforma-se por paridade da mesma forma que $m\bar{\Psi}\Psi$, o que significa que quando consideramos as transformações de paridade, a teoria final (bosonizada) apresenta as mesmas propriedades de transformação que a teoria fermiônica original, ou seja, tanto a teoria fermiônica quanto a teoria bosonizada apresentam quebra de paridade. Além disso, a quebra de paridade que surge no modelo bosonizado final é do mesmo tipo daquela que existe no modelo fermiônico original, podendo ambas serem vistas como provenientes de uma troca de sinal do parâmetro de massa, m, numa transformação de paridade.

Bibliografia

[1] E. Fradkin, "*Field Theories of Condensed Matter Systems*", Addison-Wesley Publishing Company, Frontiers in Physics, 82, 1991.

[2] D. G. Barci, C. A. A. de Carvalho and L. Moriconi, Phys. Rev **B50**, 4648 (1994).

[3] F. Bloch Helv. Acta **7**, 385 (1934)

[4] S. Tomonaga, Progr. of Theor. Phys. **5**, 544 (1950).

[5] E. Lieb and D. Mattis, J. Math. Phsy. **6**304 (1965).

[6] S. Coleman, Phys. Rev. **D11**, 2088 (1975);

[7] A. Luther and I. Peshel, Phys. Rev. **B12**, 3908 (1975).

[8] S. Mandelstand, Phys. Rev. **D11**, 3026 (1975).

[9] L. E. Oxman, E. R. Mucciolo, I. V. Krive, Phys. Rev. **B61**, 4603 (2000); I. V. Krive, A. S. Rozhavsky, E. R. Mucciolo, L. E. Oxman, Phys. Rev. **B61**, 12835 (2000).

[10] L. Balents, M. P. A. Fisher and C. Nayak, Int. J. Mod. Phys. **B12**, 10, 1038 (1998).

[11] A. Luther, Phys. Rev. **B19**, 320 (1979).

[12] F. D. M. Haldane, "Luttinger's Theorem and Bosonization of the Fermi Surface", Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXXI, Ed. by, R. A. Broglia and J. R. Schrieffer, North-Holland (1994).

[13] E. Fradkin and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. Letters **72**(10), 1393 (1994).

[14] E. Fradkin and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. **B49** (16), 10877 (1994).

[15] P. Kopietz, J. Phys-Cond. Mat. **8** 10483 (1996); Z. Phys. **B 100**, 561 (1996); P. Kopietz and K. Schonhammer, Z. Phys. **B100**, 259 (1996); P. Kopietz, Phys. Rev. **B 53**, 12761 (1996).

[16] P. Kopietz, J. Hermisson and K. Schonhammer, Phys. Rev **B 52**, 10877 (1995); P. Kopietz, Int. J. Mod. Phys. **B 10**, 2111 (1996).

[17] P. Kopietz and G. E. Castilla, Phys. Rev. Lett **76**, 4777 (1996); L. Bartosch and P. Kopietz, Phys. Rev **B 59**, 5377 (1999).

[18] E. C. Marino, Phys. Lett. **B263**, 63 (1991).

[19] E. Fradkin and F. A. Schaposnik, Phys. Lett. **B338**, 253 (1994).

[20] D. G. Barci, L. E. Oxman and S. P. Sorella, Phys. Rev. **D59**, 105012 (1999).

[21] Daniel G. Barci and L. E. Oxman, Nucl. Phys. **B580**, 721, 2000.

[22] "Functional Bosonization of 2D Strongly Correlated Fermions", D. G. Barci, Cesar A. Linhares, J. F. Medeiros Neto and A. F. de Queiroz, Int. J. Mod. Phys. **A**, 2000. Aceito para sua publicação, preprint cond-mat/9907193.

[23] Sumathi Rao, "*Lectures at the VII SERC school at Physical Research Laboratory*", Ahmedabad, 1991 (hep-th/9209066).

[24] D. G. Barci, E. V. Corrêa Silva and J. F. Medeiros Neto, Phys. Rev. **B58** (16), 10921 (1998).

[25] J. M. Leinaas and J. Myrrheim, Il Nuovo Cimento, **37**, 1 (1977).

[26] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).

[27] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).

[28] S. C. Zhang, H. Hansson and S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **62**, 82 (1989); **62**, 980 (1989)(E).

[29] D. H. Lee and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **66**, 1220 (1991).

[30] R. Prange, Phys. Rev. **B23**, 4802 (1981).

[31] R. M. Cavalcanti and C. A. A. Carvalho, J. Phys. **A**: Math. Gen. **31** 2391 (1998)

[32] "Estudo da Resposta Electromagnética da Teoria de Chern-Simons-Landau-Ginsburg para o Efeito Hall Quântico Fracionário", Eduardo Vasquez Correa Silva, Tese de doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, CBPF, Agosto, 1999.

[33] W. Kohon, Phys. Rev. **123**, 1242, (1961).

[34] S. C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. **B6**, 25 (1992); "*The Chern-Simons-Landau-Ginzburg Theory of the Fractional Quantum Hall Effect*", In "Kathmandu 1991, Proceedings, Current topics in condensed matter and particle physics" 118, In "Trieste 1992, Proceedings, Low-dimensional quantum field theories for condensed matter physicists" 191.

[35] A. Lopez and E. Fradkin, Phys. Rev. **B44**, 5246, (1991); Phys. Rev. Lett. **69**, 2126, (1992).

[36] C. Kalling, B. Halperin, Phys. Rev. **B30**, 5655, (1984).

[37] D. Boyanovsky. *Int. J. Mod. Phys.* **A7**(1992)5917.

[38] D. G. Barci, C. D. Fosco and L. E. Oxman, Phys. Lett. **B375**, 267 (1996).

[39] V. J. Emery, E. Fradkin and S. A. Kivelson, Nature **393**, 550 (1998); Eduardo Fradkin and Steven A. Kivelson, Phys. Rev. **B59**, 8065 (1999).

[40] C. M. Naón, C. Von-Reinchenbach and M. L. Trobo, Nucl. Phys. **B435**, 567 (1995); Nucl. Phys. **B485**, 665 (1997).

[41] M. V. Manias, C. M. Naón and M. L. Trobo, Phys. Lett. **B416**, 157 (1998); Nucl. Phys. **B525**, 721 (1998).

[42] k. Li and C. M. Naón, J. Phys. A-Math. Gen. **31**, 7929 (1998);

[43] D. G. Barci and C. M. Naón, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 1169 (1998).

[44] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950); J. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).

[45] D. Mattis and E. Lieb, J. Math. Phys. 6, 304 (1965).

[46] B. Sutherland, J. Math. Phys. **12**, 246 (1971); Phys. Rev. **A4**, 2019 (1971).

[47] A. F. de Queiroz, "*Bosonização de Correntes de Sistemas Fermiônicos Fortemente Correlacionados em Duas Dimensões Espaciais*", Tese de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, agosto de 1999.

[48] Y. B. Kim, P. A. Lee, X. G. Wen, *et al.*, Phys. Rev. **B51** (16), 10779 (1995).

[49] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, "*Generalized functions*", Volume I (Academic Press, 1964).

[50] B. I. Halperin, Patrick A. Lee and Nicholas Read, Phys. Rev. **B47** (12), 7312 (1993).

[51] D. G. Barci, J. F. Medeiros Neto, L. E. Oxman and S. P. Sorella *"The point-splitting regularization of* $(2+1)d$ *parity breaking models"*. Submetido para sua publicao. Preprint hep-th/0011154.

[52] Y-C. Kao and M. Suzuki, Phys. Rev. **D31**, 2137 (1985).

[53] M. Bernstein and T. Lee, Phys. Rev. **D32**, 1020 (1985).

[54] S. Coleman and B. Hill, Phys. Lett. **B159**, 184 (1985).

[55] K. Ishikawa and T. Matsuyama, Nuc. Phys. **B280** [FS18], 523 (1987).

[56] H. So, Prog. Theor. Phys. **73**, 528 (1985); **74**, 585 (1985).

[57] L. Moriconi, Phys. Rev. **D44**, 2950, 1991.

[58] D. G. Barci, V. E. R. Lemes, C. Linhares de Jesus, M. B. D. Silva Maia Porto, S. P. Sorella and L. C. Q. Vilar, Nucl. Phys. **B524**, 765 (1998).

[59] C. D. Fosco, C. Nunez and F. Schaposnik, Ann. Phys. **271** (1), 31 (1999).

[60] R. E. Gamboa Saravi, G. L. Rossini and F. A. Schaposnik, Int. J. of Mod. Phys. **A11** (1996) 2643.

[61] R. E. Gamboa Saravi, M. A. Muschietti, F. A. Schaposnik and J. E. Solomim, J. Math. Phys. **26**, 2045 (1985).

[62] N. Reldich, Phys. Rev. Lett **52**(1984),18; Phys. Rev. **D29** (1984), 2366.

[63] L. R. Baboukhadia, A. A. Khelashvili and N. A. Kiknadze, Physics of Atomic Nuclei, **58**(9), 1619, 1995.

[64] A. Coste and M. Lüscher; Nucl. Phys. **B323** (1989) 631.

[65] Gerald V. Dunne, Lectures at the 1998 Les Houches summer School, hep-th/9902115.

[66] E. Fradkin and S. Kivelson, Nucl. Phys. **B474**, 543 (1996).

[67] C. Bechi and G.Velo, Nucl. Phys. **B52** (1972) 529.

[68] R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981); S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140** (1), 372 (1982); S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).

[69] E. Witten, Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351.

[70] N. Bralić, E. Fradkin, M. V. Manías and F. Schaposnik, Phys. Lett. **B338**, 253 (1994).

[71] R. Prange and S. Girvin, "*The Quantum Hall Effect*", Springer-Verlag, New York (1990).

[72] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).

[73] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).

[74] J. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).

[75] J. K. Jain, Phys. Rev. **B41**, 7653 (1990); Adv. Phys. **41**, 105 (1992).

[76] A. Lopez and E. Fradkin, Phys. Rev. **B44**, 5246 (1991); Phys. Rev. Lett. **69**, 2126 (1992).

[77] S. Girvin, A. MacDonald and P. Platzman, Phys. Rev. Lett. **54**, 581 (1985); Phys. Rev. **B33**, 2481 (1986).

[78] B. I. Halperin, Helv. Phys. Acta **56**, 75 (1983).

[79] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1982).

[80] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).

[81] S. Girvin and A. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **58**, 1252 (1987).

[82] F.Schaposnik, Phys. Lett. **B356**, 39 (1995).

[83] A. Niemi and G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **23**, 2077 (1983).

[84] A. N. Redlich, Phys. Rev. **D29**, 2366 (1984).

[85] A. Coste and M. Lüscher, Nucl. Phys. **b323**, 631 (1989).

[86] K. D. Rothe, Phys. Rev. **D48**, 1871 (1993).

[87] M. Chaichian, W. F. Chen and H. C. Lee, **hep-th/9703219**.

[88] Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer, 1996.

[89] R. E. G. Saravi, G. L. Rossini and F. A. Schaposnik, Int. J. Mod. Phys. **A11**, (15) 2643 (1996).

[90] T. Matsuyama, Prog. Theor. Phys. 77 (1987), 03.

[91] K. Ishikawa, Phys. Rev. Lett. **53**, 1615 (1984); Phys. Rev. **D31**, 1432 (1985).

[92] R. Jackiw, Phys. Rev. **D29**, 2375 (1984).

[93] A. N. Redlich, Phys. Rev. Lett. **52**, 18 (1984); Phys. Rev. **D29**, 2366 (1984); A. J. Niemi and M. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **51**, 2077 (1983); **54**, 873 (1985); Phys. Rev. **D30**, 809 (1984).

[94] T. Lee, Phys. Lett. **B171**, 247 (1986).

[95] D. G. Barci and L. E. Oxman, Mod. Phys. Lett. **A12**, 493 (1997).

[96] "Dual description of U(1) charged fields in (2+1) dimensions", C. D. Fosco, V. E. R. Lemes, L. E. Oxman, S. P. Sorella, O. S. Ventura, preprint, hep-th/0009154, 2000.

"ASPECTOS DE BOSONIZAÇÃO FUNCIONAL EM (2+1)D"

João Felipe de Medeiros Neto

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Daniel Gustavo Barci – Presidente

Sebastião Alves Dias – Coorientador

Eduardo Mucciolo – PUC/RJ

Luca Moriconi – UFRJ

José Abdalla Helayel Neto – CBPF

Nami Fux Svaiter - CBPF

Suplente: Francesco Toppan – CBPF

Rio de Janeiro, 12 de janeiro de 2001