

TESE DE
DOUTORADO

**Aspectos Peculiares das
Eletrodinâmicas de Maxwell e
Maxwell-Chern-Simons Planares**

WINDER ALEXANDER DE MOURA MELO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF.
RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 2001.

Dedicatória

À memória de

Hilda de Moura Santos (minha querida “Vó Hilda”),
José Geraldo dos Santos (meu querido “Tio Zé”: um eterno Jovem) e
Marcelo Gomes da Cruz (um rebelde. Sem causa?)

Agradecimentos

José Abdalla Helayël-Neto, professor e orientador durante todo este trabalho de tese. E, principalmente, pela sua grande amizade;

Minha Mãe (Deni), meu Pai (Joaquim), Irmãs (Deyse, Denise e Daisa) e Irmãos (Wallassy, Wesley e Wyllian). Esta Tese é de todos vocês, também!;

Minha Querida Fabiana, por todo Carinho e Amor a mim dedicados;

J.L. Boldo, Anderson, Fagner (Barão de Araruna), Claudio e Daniel (Sasaki's), pela amizade e companhia nos '*apartamentos da vida*';

Denise, Myriam, Daise, Renato, Sérgio (vulgo Místico) e Vitorio (& Eliane), por serem minhas primeiras (...e de sempre) "amizades cariocas";

A todos daqui do DCP: PG's, Secretárias e Professores. Pessoas que fazem deste Departamento um local tão agradável; bom até para estudar Física. Em especial, aqueles que muito me ensinaram, Física e latex: ALMA Nogueira, Leonardo, Casana, Ronaldo (Rodrigues), Guillermo, Boldo, Prof. Tião, Belich, Nelson (Panza), German e Oswaldo. À Carla, pelas "English lessons". Obrigado, também, ao pessoal da biblioteca, da CFC e da manutenção (Dona Regina, ...);

Craques irretocáveis do futebol do CBPF e *Galera* das cervejas;

Aos Mineiros e Mineiras de sempre: Tia Lourdes e família (“Carminha” & Jésus, Thiago, ...); Tia Madalena e família (Fernanda & Altair, as netinhas: Natane, Rafaela, Nátale e Sabrina,...); Tio Geraldo e família; Tia Gilda, Roberto, irmãos, irmãs e famílias; Tio “Nandinho” e família; Tio Adélio; Tios Júlio e “Zé Geraldo” e famílias. Também à Querida Tia Helena e à toda família (“Leninha” & “Tino” e familiares; “Letinha” & Manoel e familiares);

À turma lá de Sobrália, natos e/ou residentes: “Vovô” João, Tia Corina e familiares (“Nenzinha”, ...), Tia Elza & Tio “Chico” e toda família, à família do Tio “Chiquito”. Aos demais Tios e Tias e respectivas famílias: Alaíde, Antônio, Delfino, Divino, Edir, Edith, Goreth, Iracema, Irineu, “Lourdinha”, “Luizinho”, Maurício e Sebastião e “Zezinho”.

Pessoal de “Tarú”, pelas conversas agradáveis e por aquele “cafezinho”. Em especial, Dona Maria & “Seu” Alair e família (Sueli, Susi, Silmar, ...); Dona Maria & “Seu” Nelson, Elenice & Nelsinho e filhinha; Dona Maria & “Seu Bilú” e família (Irene, Rômulo,...); Família Malvar; Ronaldo; Édina & Adriano; Camila & Cristiano e filhinha; “Loni” & Selma e filhas. Também à “galera” do futebol, do volley, das pipas, das bolinhas de gude (...) e das *noitadas ébrias*;

Ao Povo Brasileiro, através do CNPq, pela Bolsa de Doutorado. *Que algum dia, este Povo transforme isto daqui numa Grande Nação.*

Resumo

Estudamos os modelos de Maxwell e Maxwell-Chern-Simons em $(2+1)$ dimensões. São obtidas expressões gerais para os potenciais e campos e alguns casos particulares são resolvidos explicitamente. Dificuldades de ordens conceitual e técnica surgem, todavia, ao tratar do problema de cargas aceleradas. A propagação de sinais eletromagnéticos também é estudada. Referente a isto, mostramos que, em ambos os modelos, tal propagação induz, naturalmente, a reverberação dos pulsos. Outro tema ao qual nos dedicamos, foi aquele que trata de monopolos tipo-Dirac em tais contextos. Neste espaço-tempo, tais objetos apresentam propriedades muito diferentes de seus correspondentes das 4 dimensões, como por exemplo, o fato de produzirem campo eletrostático de natureza tangencial. Estudamos, também, dois sistemas que contenham um exemplar de tais monopolos. O primeiro é constituído por uma carga elétrica usual sob a ação de tal campo, enquanto no segundo, há a presença extra de um campo magnético externo homogêneo. Vimos que a dinâmica de tal carga é de difícil resolução em ambos os sistemas. De fato, somente para o segundo dos sistemas acima, é que conseguimos, no limite de grandes distâncias, obter alguns resultados analíticos, os quais são bastante interessantes. Constata-se, por exemplo, que seu setor angular contribui para o espectro de energia, e de uma maneira muito peculiar, por exemplo, respondendo a variações discretas da coordenada angular. Discutimos, também, a possibilidade de formação de estados ligados neste sistema.

Abstract

Classical Maxwell and Maxwell-Chern-Simons (MCS) Electrodynamics in (2+1)D are studied in a great deal of details. General expressions for the potentials and fields are obtained for both models, and some particular cases are explicitly solved. Conceptual and technical difficulties arise, however, for accelerated charges. The propagation of electromagnetic signals is also studied and their reverberation is worked out and discussed. Furthermore, we show that a Dirac-like monopole yields a (static) tangential electric field. We also discuss some classical and quantum-mechanical consequences of the field created by such a monopole when acting upon a usual electric charge. In particular, we show that, at large distances, the dynamics of one single charged particle under the action of such a potential and a constant (external) magnetic field as well reduces to that of one central harmonic oscillator, presenting, however, an interesting angular sector which admits energy-eigenvalues. Among other peculiarities, both the radial and the angular sectors, present non-vanishing energy-eigenvalues for their lowest levels. Moreover, those associated to the angle are shown to respond to discrete shifts of such a variable. We also raise the question of the possibility of formation of bound states in this system.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução e Motivação	2
1 Eletrodinâmica Clássica de Maxwell em (2+1) Dimensões	9
1.1 Alguns aspectos gerais do modelo	10
1.2 O problema da radiação e a propagação de sinais eletromagnéticos	16
1.3 Conclusões Preliminares	27
2 Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons em (2+1) dimensões	29
2.1 Algumas propriedades básicas do modelo MCS	30
2.2 A questão da radiação e a propagação de sinais no modelo MCS	33
2.3 Conclusões Preliminares	39
3 Monopolos tipo-Dirac em (2+1) dimensões	41
3.1 Algumas propriedades básicas de tais monopolos	42
3.2 O sistema carga-monopolo: estudo clássico	47
3.3 O sistema qgB_0 quântico	51
3.4 Conclusões preliminares	57
Conclusões e Perspectivas	59

Lista de Figuras

1.1	Mostra-nos a transversalidade da radiação eletromagnética (ondas planas) em (3+1) e (2+1) dimensões.	11
1.2	Exibe um perfil dos suportes da função de Green retardada para o D'Alembertiano em (3+1) e (2+1) dimensões.	14
1.3	Como se dá a propagação de sinais eletromagnéticos em (3+1) e (2+1) dimensões. Aqui, a coordenada temporal está representada na horizontal.	24
1.4	Ilustra a superposição logarítmica de sinais eletromagnéticos, que ocorre em (2+1) dimensões. Aqui, exibimos $\Phi(t; x = 2, y = 0) X t$ para um único pulso (à esquerda) e o caso superposto (à direita)	25
2.1	Ilustra a propagação de ondas planas em (2+1) dimensões, nos modelos de Maxwell e Maxwell-Chern-Simons, respectivamente. Em particular, nota-se o caráter não-transversal da radiação no caso de MCS (à direita).	31
2.2	Ilustra o efeito do valor do parâmetro de massa sobre os sinais eletromagnéticos no ambiente de MCS. Nas figuras acima, tomamos $m = 1$ (à esquerda) e $m = 2$ (à direita) para o caso de um único sinal de $\Phi(t; x = 2, y = 0) X t$	39
3.1	Mostra-nos a natureza tangencial, representada pelas flechas, do campo elétrico produzido por g (na origem).	45
3.2	Trajetória típica, em coordenadas $x - y$, de uma carga elétrica sujeita somente ao campo elétrico tangencial. Aqui, escolhemos, $x(0) = 1$ e $y(0) = v_x(0) = v_y(0) = 0$, bem como, $qg/2\pi M = 1$	48

3.3 Aqui, é exibida uma trajetória típica, em coordenadas $x - y$, de uma carga elétrica sujeita à ação do campo elétrico tangencial, bem como, de um campo magnético homogêneo, perpendicular ao plano de órbita. Tomamos $x(0) = 1$ e $y(0) = v_x(0) = v_y(0) = 0$, bem como, $gq/2\pi M = qB_0/M = 1$ 50

*“Quem está impregnado de auto-estima deseja antes
viver um breve período no mais alto gozo,
a passar uma longa existência em indolente repouso;
prefere viver só um ano por um fim nobre,
a uma vasta vida por nada;
escolhe antes executar uma única ação grande e magnífica,
a fazer uma série de pequenas insignificâncias.”*

Aristóteles

*“Quando não se coloca o peso da vida na própria vida,
mas sim no “além”, no nada,
então retira-se da vida toda a sua importância....
A grande mentira da imortalidade pessoal destrói
toda razão, todo instinto natural.
Tudo que é benéfico, vital, promissor nos instintos,
suscita cada vez mais desconfiança.
Viver assim, de modo a esvaziar o sentido de viver,
isso tornou-se atualmente o “sentido” da vida.”*

F. Nietzsche

*“Violais as leis escritas, como tiranos,
eu as violo como um homem justo....
Violais vossas leis por loucura,
eu as violo por sabedoria.
Obedeço às vossas leis quando elas se aproximam da justiça
ou quando me parecem indiferentes.
Desobedeço-lhes quando são injustas.
Mas aquele que desobedesse assim à lei é melhor que a lei.”*

Sócrates

*“It is merely because the rose is round and pink
that it gives me more satisfaction than the gold
which could buy me the necessities of life,
or any number of slaves....
Somehow we feel that through a rose
the language of love reached our hearts.”*

R. Tagore

Introdução e Motivação

Há aproximadamente duas décadas, diversos modelos de campos definidos em $(2+1)$ dimensões espaço-temporais vêm recebendo atenção considerável [1, 2]. Tal interesse reside em, pelo menos, duas razões físicas. A primeira, é que o regime de altas temperaturas de teorias de campos definidas em $(3+1)$ dimensões pode ser interpretado a partir de seus correspondentes em $(2+1)$ dimensões à temperatura zero, onde determinados problemas podem ser melhor e mais facilmente estudados [3], no sentido de que a resolução matemática exata é, em alguns exemplos, possível. Além desta, há também, o fato de que modelos de campos $(2+1)$ -dimensionais terem se mostrado bastante relevantes em conexão com problemas no âmbito da Física da Matéria Condensada. Como exemplo, podemos citar as explicações teóricas para o Efeito Hall Quântico (“Quantum Hall Effect”, QHE), tanto na sua versão Inteira (IQHE) quanto na Fracionária (FQHE) [4]; bem como, as diversas tentativas para se descrever certos mecanismos relativos à Supercondutividade a Altas Temperaturas de tipo-II (“type-II High-Tc Superconductivity”) [5, 6, 7].

Em boa parte dos programas acima citados, aparece um elemento bastante interessante e peculiar das $(2+1)$ dimensões: o chamado termo de Chern-Simons, que dentre outras características, viola tanto a Paridade (P) quanto a Reversão Temporal (T).¹ De fato, este

¹Sendo, no entanto, invariante sob Conjugação de Carga (C), preservando, assim, a operação CPT. Além do mais, embora apareça naturalmente em $(2+1)$ dimensões, sua definição não se restringe a este espaço-tempo. Por exemplo, ele pode ser igualmente bem definido, digo, não ser um mero termo de superfície, em outras dimensões ímpares, como em $(10+1)D$. Por outro lado, uma de suas peculiaridades está, precisamente, no fato de tal termo ser intrínseco e restrito a espaços-tempo de dimensão ímpar, não aparecendo, assim, em

aparece naturalmente na descrição topológica do Efeito Hall Quântico [8], bem como, em modelos relativos à Supercondutividade a Altas Temperaturas, em especial, a denominada Supercondutividade Aniônica (“Anyonic Superconductivity”) [6].

Relativos a tal discussão, dois pontos devem ser enfatizados. O primeiro, é que a condutância Hall quebra, automaticamente, a Paridade, já que tal corrente possui uma direção preferencial, e daí, a razão do sucesso do termo de Chern-Simons quando aplicado à descrição topológica de tal fenômeno. Todavia, quadro bastante distinto se passa com a Supercondutividade, em cujo contexto, poucas são as evidências de amostras que, ao mesmo tempo, sejam supercondutoras e quebrem a Paridade. Tal fato, por sua vez, levou (e tem levado) à proposição de modelos que preservem tal simetria, e que possam ser úteis para explicar certas propriedades deste fenômeno. Dentre tais modelos, mencionamos aquele que acopla férmions massivos de 4-componentes (ou, equivalentemente, 2 famílias de 2 componentes, com sinais recíprocos para os termos de massa) a um campo de “gauge” estatístico, a_μ , denominada τ_3 -QED[7]. Neste modelo, o que ocorre, é que a violação de P e T advinda do termo de Chern-Simons é exatamente compensada por semelhante violação proveniente do termo que acopla a_μ aos férmions. Cancelamento semelhante também ocorre entre as duas famílias de férmions.

Como bem sabemos, quando o termo de Chern-Simons faz-se presente em um modelo (tanto Abelian quanto não-Abelian), diversas novidades interessantes podem emergir. Por exemplo, numa QED₃ com férmions sem massa, quando esta é suplementada pelo termo de Chern-Simons, pode-se mostrar que tal termo gera, a 1-loop, um “gap” de massa para os férmions, que viola P e T . Reciprocamente, correções radiativas (a 1-loop) numa QED₃ com férmions massivos (e ímpar sob P e T) levam, naturalmente, à uma teoria na qual aquele termo se faz presente [9].² [Um trabalho pioneiro nesta linha, é o chamado mecanismo de

(3+1)D, por exemplo. Neste sentido, resultados idênticos verificam-se para espaços-tempo Euclidianos.

²De fato, mostrou-se que este termo pode ser gerado, radiativamente, mesmo por férmions de massa nula. A assim denominada *quebra dinâmica de Paridade e Reversão Temporal* [11].

Schwinger[10], na QED₂]. Sabe-se, também, que o termo de Chern-Simons pode ser gerado através de um mecanismo de Higgs generalizado, pelo menos, no caso Abeliano [12].

Ainda neste sentido, mas tratando agora da gravitação, sabemos que a adição de tal termo à ação de Einstein-Hilbert, que inicialmente mostra-se trivial na ausência de matéria (já que o respectivo tensor de Ricci é nulo), conduz-nos a um grau-de-liberdade dinâmico de 'spin'₂ topologicamente massivo [2]. Neste âmbito, novidades adicionais têm surgido, por exemplo, quando da presença de torção acoplada à matéria fermiônica, bem como, ao campo de "gauge" [13].

Outro ponto muito interessante, e que tem atraído bastante atenção, é aquele relativo a objetos de natureza topológica, advindos, justamente, do caráter topologicamente não-trivial da ação de Chern-Simons, tanto no contexto Abeliano quanto no não-Abeliano. Aqui, podemos destacar todo o estudo sobre os denominados *vórtices topológicos* que vêm sendo realizados neste contexto. Sabemos, que tais objetos surgem como soluções não-perturbativas de determinados modelos que contenham a ação acima mencionada, e 'carregam', em geral, um fluxo de campo magnético [14]. Tal aspecto é, particularmente, relevante ao se tratar da estatística de partículas carregadas quando interagindo com tais vórtices. Neste caso, mostra-se que o objeto composto, carga-vórtice apresenta, em determinadas condições (temperatura nula, por exemplo), *estatística fracionária* [15]. Existe, também, a possibilidade de tais vórtices carregarem um fluxo elétrico não-nulo, desde que, o modelo do qual eles sejam provenientes contenha um setor responsável pelo mecanismo de Higgs [16]. Neste caso, os próprios vórtices apresentam estatística fracionária.

Na verdade, o estudo sobre a possibilidade de determinados objetos obedecerem a tal estatística foi, de certo modo, baseado no fato de sabermos que representações irreduzíveis (massivas) com 'spin' arbitrário apareciam naturalmente em (2+1) dimensões, devido ao fato do "little-group" correspondente ser Abeliano[17], $SO(2)$. Todavia, embora tenha-se estabelecido que objetos compostos, como carga-vórtice ou soluções solitônicas tipo-vórtice,

por exemplo, podem exibir tal peculiaridade, a construção de modelos Lagrangeanos que descrevam tais representações em interação, ainda é um ponto em aberto, haja visto que as tentativas até então conhecidas nos conduzem a alguns problemas, como por exemplo, a uma teoria não-local. Daí, a razão de pensarmos os ânions como objetos compostos (e assim, redutíveis) ou como soluções clássicas (solitônicas, por exemplo) e, além do mais, restringimos o estudo de sua dinâmica (com interação) a nível de mecânica quântica não-relativística.

Outra classe de objetos topológicos que destacamos são os monopolos tipo-Dirac, os quais, constituir-se-ão num dos temas de estudo da presente Tese (veja Capítulo 3, para mais detalhes). Dentre outras propriedades interessantes, fora mostrado que, quando cargas elétricas usuais (no ambiente de Maxwell-Chern-Simons) interagem com tais monopolos, então a preservação da simetria de “gauge” demanda, dentre outros resultados, a quantização do parâmetro de massa topológica [18]. [Resultado semelhante já era conhecido, àquela época e sem a necessidade de tais monopolos, para versões não-Abelianas, cujos grupos de “gauge” apresentavam o 3º grupo de homotopia não-trivial[2], $\Pi_3(G) \neq \{0\}$]. Algumas outras de suas propriedades, bem como diferenças importantes, quando comparados aos genuínos monopolos magnéticos das 4 dimensões, também serão estudadas ao longo do Capítulo 3.

Do que mencionamos acima, fica claro que modelos de campos definidos em dimensões mais baixas apresentam propriedades muito interessantes, tanto a nível clássico quanto quântico, dentre os quais, destacamos aqueles (2+1)-dimensionais. Desta forma, tais teorias não podem ser vistas, meramente, como casos limites de suas correspondentes em (3+1) dimensões. Com efeito, elas têm revelado características muito especiais, advindas das peculiaridades intrínsecas à dimensionalidade do espaço-tempo no qual são definidas.

Agora, com o intuito de situarmos, bem como, motivarmos o presente estudo, vamos nos ater aos dois modelos eletrodinâmicos mais simples que temos neste espaço-tempo. São eles: o modelo de Maxwell e de Maxwell-Chern-Simons Abelianos. Embora se tenha um conhecimento razoável de ambos, tanto no que se refere a aspectos clássicos quanto quânticos, é digno

de menção o fato de algumas questões fundamentais da eletrodinâmica clássica de tais modelos ainda permanecerem completamente em aberto. Dentre elas, estão as expressões gerais para os potenciais retardados de uma carga puntiforme (potenciais tipo-Liénard-Wiechert), bem como, uma fórmula tipo-Larmor, que relacione a potência irradiada por tal carga em função de sua aceleração e posição. [Foram estas, de fato, as questões principais que se impuseram, primordialmente, ao nosso trabalho, e a tentativa de respondê-las, tornou-se, para nós, um incentivo para todo o desenvolvimento ulterior de nossas atividades, cujos resultados serão, aqui, apresentados (bem como, serão brevemente publicados [19]).

Na verdade, embora tivéssemos tentado, por várias vezes, responder a estes pontos acima, não logramos nenhum êxito muito considerável. Ao contrário, ainda que sejam fundamentais, estes não se mostraram de resolução tão simples em $(2+1)$ dimensões. [De fato, veremos adiante, que a integração na variável de tempo-próprio, a qual, se realizada responderia a todas estas questões, é uma tarefa longe de poder ser considerada trivial para os presentes modelos (veja Seções 1.2 e 2.2 para detalhes)].

Por outro lado, para outros assuntos igualmente interessantes, foi possível obter explicações e respostas satisfatórias, e de maneira relativamente simples. Dentre os quais, estão as divergências explícitas, tanto nos potenciais quanto nos campos (clássicos), que aparecem como manifestações da divergência infra-vermelha do modelo de Maxwell. Outro ponto, refere-se à reverberação de sinais eletromagnéticos, cujos cálculos podem ser efetuados com relativa facilidade, bem como, serem passíveis de uma clara interpretação. Há, ainda, a questão dos monopolos tipo-Dirac em tais contextos. Neste caso, embora pudéssemos obter resultados bastante interessantes, por exemplo, aqueles concernentes à natureza topológica de tais objetos, vimos que complicações adicionais surgem ao tratarmos da dinâmica (tanto clássica quanto quântica) de uma carga usual em interação com um destes monopolos.

Apresentaremos, agora, a organização que seguiremos para a presente tese. O Capítulo 1 é dedicado ao estudo de certos aspectos clássicos do modelo de Maxwell (massa nula)

em $(2+1)$ dimensões. Na 1ª seção, o Lagrangeano é apresentado e, algumas de suas características básicas são discutidas. Obteremos, então, a função de Green correspondente ao D'Alembertiano $(2+1)$ -dimensional, bem como, discutiremos suas propriedades mais importantes. Seguindo-se, na Seção 1.2, lidaremos com a questão da produção de radiação eletromagnética por cargas pontuais, bem como, do fenômeno da reverberação de sinais, quando estes propagam-se através deste espaço-tempo. A este ponto, veremos que é justamente o fato da função de Green, acima mencionada, violar o Princípio de Huyghens que nos conduz, ao mesmo tempo, às dificuldades de se responder o problema da radiação produzida por cargas aceleradas, assim como, à reverberação de sinais. Por fim, faremos um breve resumo dos resultados obtidos até então.

A seguir, no Capítulo 2, dedicar-nos-emos ao modelo de Maxwell-Chern-Simons. Iniciaremos, na Seção 2.1, com a discussão de certos aspectos de tal modelo, dentre os quais, as novidades advindas da inclusão do termo de Chern-Simons ao Lagrangeano precedente. Passando-se à Seção 2.2, serão discutidas questões referentes à produção de radiação, bem como, à reverberação de sinais eletromagnéticos neste novo âmbito. Este 2º capítulo finalizar-se-á com uma breve exposição dos resultados aí obtidos.

Já no Capítulo 3, focalizaremos nossa atenção no estudo de monopolos tipo-Dirac nos modelos acima citados. Diferentemente do que se nota pela leitura dos dois primeiros capítulos, os quais possuem, entre si, diversas semelhanças, em estrutura e conexão, o presente capítulo pode parecer (e talvez o seja, de fato) bastante desconexo em relação aos precedentes. Sua inclusão nesta tese é justificada, no entanto, por resultados bastante interessantes que aí obteremos. Assim, na 1ª seção, ênfase é dada à introdução de um monopolo tipo-Dirac nos modelos em questão. Algumas de suas propriedades, como seu campo eletrostático tangencial, além de diferenças marcantes quando comparado a um genuíno monopolo magnético das $(3+1)$ dimensões são discutidas. Na Seção 3.2, faremos um estudo da dinâmica clássica de dois sistemas que contenham um exemplar de tais objetos. O primeiro, é composto por uma carga elétrica usual sujeita à ação do campo eletrostático de tal monopolo. Já o segun-

do, contém, também, um campo magnético externo e homogêneo, perpendicular ao plano de órbita. Em ambos os casos, uma resolução analítica para o problema dinâmico apresentou-se de difícil realização, tendo alguns “plots” numéricos indicado-nos, no entanto, que no segundo caso, a possibilidade de formação de estados ligados pode ser considerada (o que não ocorre no primeiro caso, haja visto que, lá, a carga tende, assintoticamente, a um movimento livre). Passar-nos-emos, na Seção 3.3, à uma análise quântica do segundo sistema acima. Embora o caso geral tenha-se mostrado de difícil resolução, veremos que, assintoticamente, alguns resultados analíticos podem ser obtidos. Dentre eles, destacamos que a dinâmica radial da carga reduz-se àquela de um oscilador harmônico central (com as funções de onda decaindo, exponencialmente, à medida que tal variável aumenta). Além do mais, veremos, também, que o setor angular responderá, agora, com autovalores para a energia total. Este último capítulo é finalizado com um sumário dos resultados nele alcançados.

A presente tese concluir-se-á com uma breve exposição das Conclusões básicas deste trabalho, bem como, de algumas Perspectivas de continuação dos estudos aqui apresentados.

Capítulo 1

Eletrodinâmica Clássica de Maxwell em $(2+1)$ Dimensões

Neste primeiro Capítulo, trataremos do modelo de Maxwell clássico em $(2+1)$ dimensões espaço-temporais. Começaremos por uma exposição de seus aspectos mais gerais, como seu Lagrangeano e suas equações de movimento, bem como, algumas de suas consequências. Ainda nesta primeira seção, obteremos as funções de Green (retardada e avançada) e as compararemos com suas correspondentes em 4 dimensões. Algumas diferenças e possíveis consequências são também levantadas. Na seção seguinte, trataremos de duas dessas consequências. Aí, veremos que o fato de tal radiação não ‘sentir’ a terceira dimensão espacial nos conduz a profundas mudanças quanto à questão da produção de radiação clássica por cargas pontuais, e também, da propagação de sinais eletromagnéticos neste âmbito. Por último, finalizaremos o presente capítulo expondo, brevemente, os resultados básicos obtidos até então.

1.1 Alguns aspectos gerais do modelo

Consideremos o Lagrangeano que descreve a Eletrodinâmica de Maxwell em (2+1) dimensões (MED₃):¹

$$\mathcal{L}_{MED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_{\mu}A^{\mu}. \quad (1.1)$$

A ação correspondente ao Lagrangeano acima permanecerá invariante sob transformações de “gauge” Abelianas locais, $A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\Lambda(x)$, conquanto a corrente externa seja conservada, isto é, $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$. Além do mais, com a definição usual para o tensor de intensidade de campo, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, temos que:

$$F_{\mu\nu} = \begin{cases} F_{0i} = \partial_t A_i - \partial_i \Phi = -(\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} \Phi)_i \equiv +(\vec{E})_i \\ F_{ij} = \epsilon_{ij} \partial_i A_j \rightarrow F_{12} \equiv B \end{cases}$$

Assim, vemos que, enquanto o campo elétrico preserva sua característica vetorial do Eletromagnetismo usual (digo, das (3+1) dimensões), o campo magnético apresenta-se, agora, como um pseudo-escalar e não mais como um pseudo-vetor. Tal ‘*assimetria*’ entre estes campos reflete, em última análise, a perda da dualidade entre os setores elétrico e magnético que tínhamos em 4 dimensões. De fato, definindo-se tal tensor como uma 2-forma, $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$, vê-se claramente que tal dualidade só é verificada em D=4, pois é somente aí que \mathbf{F} e seu dual (veja definição abaixo) têm o mesmo “rank” ou, em outras palavras, os campos elétrico e magnético têm natureza vetorial.

As equações de movimento e geométrica são facilmente obtidas e lêem-se:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu} \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} B = \partial_t \vec{E}^* + \vec{j}^* \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu} = 0 \rightarrow \partial_t B + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = 0. \quad (1.3)$$

¹Usaremos as seguintes convenções para o espaço-tempo de Minkowski tridimensional: $diag(\eta_{\mu\nu}) = (+, -, -)$, letras gregas μ, ν , etc = 0, 1, 2, enquanto que letras latinas rotulam as coordenadas do plano espacial, i, j , etc = 1, 2. O símbolo de Levi-Civita lê-se: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = +1$.

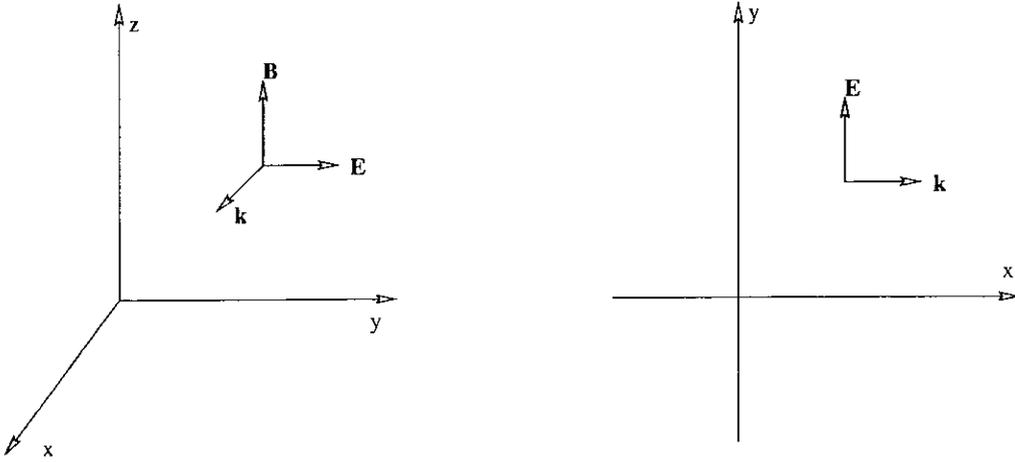


Figura 1.1: Mostra-nos a transversalidade da radiação eletromagnética (ondas planas) em (3+1) e (2+1) dimensões.

O tensor dual é definido como: $\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}F_{\nu\kappa} = (+B; -\vec{E}^*)$, enquanto um vetor dual, \vec{U}^* , tem componentes $(\vec{U}^*)_i = \epsilon_{ij}U_j$, ou explicitamente, $\vec{U}^* = (+U_y, -U_x)$. Claramente, segue-se que $\vec{U} \cdot \vec{U}^* = 0$.

Expandindo-se os campos em termos de ondas planas ($e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$) na ausência de cargas e correntes, vemos que, similarmente a (3+1) dimensões, também aqui a ‘luz’ é transversal, $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$. Note, contudo, que enquanto em (3+1) temos a tríade de vetores $\{\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}\}$ ortogonais entre si, em (2+1) temos somente o par $\{\vec{k}, \vec{E}\}$, já que o campo magnético tem natureza escalar. Por outro lado, como podemos ver de $\vec{k}B = -\omega\vec{E}^*$, todo o conteúdo de graus-de-liberdade (g.l.) físicos é determinado pelo conhecimento do pseudo-escalar B . [Uma ilustração de tal diferença é dada pela Figura 1.1].

Segue-se daí que, em (2+1) dimensões, a ‘luz’ tem caráter escalar, carregando apenas 1 g.l. físico. Tal conteúdo pode também ser obtido, lembrando-se que o campo de gauge, A_μ , que *a priori* teria 3 g.l. (“off-shell”) propaga apenas 1 g.l. físico (“on-shell”). A subtração dos outros 2 g.l. é promovida pela simetria de gauge e igualmente, pelas eqs. de movimento. Ainda, podemos verificar tal conteúdo físico lembrando-se que devido à dimensionalidade deste espaço-tempo, o tensor de curvatura pode ser escrito, na ausência de fontes

ou termos de massa, como $F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\kappa} \partial^\kappa \phi$, donde vemos facilmente, que $F_{\mu\nu}$ fica completamente determinado pelo potencial escalar ϕ .

Notemos, de passagem, que devido ao fato do dual de $F_{\mu\nu}$ ser agora um pseudo-vetor, \tilde{F}_μ , a identidade de Bianchi reduz-se a apenas uma equação (escalar, veja eq. (1.3)). Tal aspecto será muito importante quando formos discutir a questão de se introduzir monopolos tipo-Dirac nos modelos eletrodinâmicos neste espaço-tempo. Como veremos adiante, estes objetos são muito distintos dos genuínos monopolos magnéticos das 4 dimensões.

Vamos, agora, ater-nos à busca das soluções para o potencial de gauge, A_μ . A partir destas, poderemos não somente obter explicitamente os campos clássicos correspondentes, como também, discutir questões mais fundamentais, tais como a produção e a propagação da radiação eletromagnética no modelo em estudo. As equações dinâmicas para o potencial têm a forma usual (usando-se que $\partial_\mu A^\mu = 0$):

$$\square A_\mu(x) = j_\mu(x),$$

cujas soluções gerais podem ser obtidas via funções de Green (ou, alternativamente, pelo Método de Descenso (“Descent Method”) de Hadamard aplicado às soluções das (3+1) dimensões. Para mais detalhes, veja Ref. [20]):

$$A_{ret}^\mu(x) = \mathcal{A}_{out}^\mu(x) - \int d^{2+1}y G_{adv}^{2+1}(x-y) j_\mu(y), \quad (1.4)$$

onde \mathcal{A}_{out}^μ refere-se aos potenciais externos “incoming” ou “outgoing”, $\square \mathcal{A}^\mu = 0$. Já as funções de Green retardada e avançada são obtidas por meio de integrações de Fourier no espaço dos momentos:

$$\square_x G^{2+1}(x-y) = \delta^{2+1}(x-y) \Rightarrow \tilde{G}(k) = \frac{-1}{k^2},$$

e assim, temos:

$$G^{2+1}(x-y) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^{2+1}k \tilde{G}(k) e^{ik(x-y)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^{2+1}k \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2}.$$

Esta, após uma integração apropriada no plano imaginário k^0 toma a forma ($r = |\vec{x} - \vec{y}|$ e $\tau = x^0 - y^0$):

$$G_{adv}^{2+1}(x - y) = \frac{(\mp)\Theta(\pm\tau)}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kr) \sin(k\tau) dk. \quad (1.5)$$

Aqui, $J_0(z)$ é a função de Bessel de 1^o tipo e ordem 0 e, $\Theta(z)$ é a ‘função-degrau’ de Heaviside. Tal integral pode ser encontrada, por exemplo, na Ref.[21] (veja eq. 6.671-7 à página 731)². Finalmente, obtemos que:

$$G_{adv}^{2+1}(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Theta[(x^0 - y^0)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2]}{\sqrt{(x^0 - y^0)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2}} \Theta[\pm(x^0 - y^0)]. \quad (1.6)$$

Notemos uma propriedade importante da função de Green acima: ela tem suporte que se estende por todo o interior do cone-de-luz, incluindo sua borda, digo, $\forall(x - y)$ tal que $(x - y)^2 \geq 0$. Isto nos leva a concluir que tais funções não mais obedecem ao chamado Princípio de Huyghens, o qual demandaria que tal suporte se restringisse apenas à borda do cone-de-luz, $(x - y)^2 = 0$. Para esclarecermos isto melhor, bem como, anteciparmos algumas consequências interessantes de tal propriedade, faz-se necessário sua comparação com a sua correspondente das (3+1) dimensões:

$$G_{adv}^{3+1}(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \delta[(x^0 - y^0)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2] \Theta[\pm(x^0 - y^0)].$$

Uma análise da expressão acima mostra-nos claramente o papel da ‘função’- δ : ela *retem* somente as contribuições daqueles pontos para os quais $(x - y)^2 = 0$. Noutras palavras, seu

²A título de completudeza, apresenta-la-emos aqui:

$$\int_0^\infty J_0(kr) \sin(k\tau) dk = \begin{cases} (\tau^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 < r < \tau \\ 0 & 0 < \tau < r \end{cases}$$

Vê-se claramente, que a integral acima só é definida para $\tau, r > 0$. Isto nos leva então a ter mais atenção ao caso avançado: antes de efetuarmos a integral, propriamente dita, devemos fazer a seguinte mudança de variáveis $\tau \rightarrow -\tau$ (essencialmente, uma reversão temporal). Doutra maneira, seríamos levados a uma indefinição no resultado de G_{adv}^{2+1} . Note também que, ao fazermos a troca de variáveis acima, ganhamos um sinal *menos* extra na eq. (1.5).

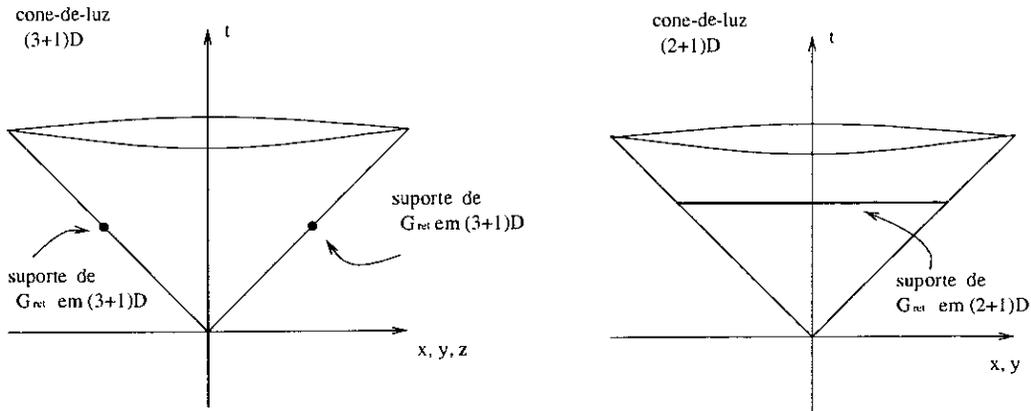


Figura 1.2: Exibe um perfil dos suportes da função de Green retardada para o D'Alembertiano em (3+1) e (2+1) dimensões.

suporte corresponde somente a pontos que estejam na borda do cone-de-luz (3+1) dimensional. Portanto, G^{3+1} satisfaz o Princípio de Huyghens. [Apresentamos uma ilustração a respeito do perfil de tais suportes na Figura 1.2. Apesar de não estar muito claro, o que acontece, de fato, é que enquanto G^{3+1} tem seu suporte restrito à superfície de uma casca esférica, S^2 , o de sua correspondente (2+1)-dimensional estende-se, também, por todo o interior de um disco, além da própria borda, S^1].

Uma situação física ajudar-nos-á a entender melhor tal papel. Para tanto, considere os potenciais e campos gerados, por exemplo, por uma carga puntiforme. Por simplicidade, fixemos nosso observador na origem ($y_\mu = 0$). Assim, o que a 'função'- δ faz é reter apenas as contribuições produzidas pela carga quando sua linha-de-universo tocar as bordas do cone-de-luz. Dizendo doutra forma, apenas informações (potenciais e campos) que viajem sobre tal borda é que serão detectadas pelo observador, e terão sempre a mesma velocidade, $v = c$.

Agora, voltemo-nos à G^{2+1} . Ora, se tal função tem suporte que se estende por todo o interior do cone-de-luz, então temos a possibilidade de que um observador, como descrito acima, possa em (2+1) dimensões, detectar informações que viajem com velocidade $< c$! Embora tal fato pareça estranho, haja visto que o modelo descreve um grau-de-liberdade físico sem massa, veremos adiante que isto é o que realmente acontece. Mais precisamen-

te, mostraremos que um pulso (sinal localizado ou puntiforme) eletromagnético se *reverbera* quando enviado a outro ponto espaço-temporal. De fato, mesmo para pontos próximos, um pulso enviado de um a outro desenvolverá uma *cauda* temporal e não mais poderá ser completamente absorvido num instante preciso de tempo. Tudo se passa, como se o próprio pulso se dividisse em porções ainda menores, as quais teriam velocidade de propagação variável, desde $v = c$ até $v = 0$ (uma daquelas partes manter-se-ia estática!).

Devemos notar que tal *reverberação* não aparece devido à presença de termos de *difusão* na equação diferencial em estudo, mas como uma peculiaridade intrínseca do próprio movimento livre dos sinais, conforme ditado por G^{2+1} . Outra consequência interessante que segue desta propriedade da função de Green, é a impossibilidade (até onde temos visto) de obtermos uma lei de radiação tipo-Larmor, mesmo quando se tratando de uma carga puntiforme. Estes pontos serão estudados na próxima seção.

Realmente, é sabido que, as funções de Green para o operador D'Alembertiano apresentam tais aspectos para todos os espaços-tempo de dimensão $(n + 1) = \text{ímpar}$: (2+1), (4+1), etc (veja discussão nas Refs.[22, 23, 24, 25, 26]). Para estes casos, os operadores (*pseudo*)*diferenciais* que satisfazem ao Princípio de Huyghens são[24]: $\square^{1/2}$ para (2+1), $\square^{1/2}$ e $\square^{3/2}$ para (4+1), até $\square^{(n-1)/2}$ para dimensões mais altas³. Particularmente a (2+1) dimensões, embora tal operador pseudo-diferencial seja não-local, fora mostrado que ele não viola a causalidade e, também, nos leva a um comutador de Pauli-Jordan que respeita a *micro-causalidade* [26]. Além do mais, ele é crucial no processo de bosonização de férmions de Dirac em (2+1) dimensões [27], bem como, fornece-nos um modelo tipo-QED₃ que apresenta alguns aspectos interessantes [28].

³Desta forma, por exemplo, em (2+1)dimensões teríamos $\square^{1/2} A_\mu(x) = 0$. Assim, a respectiva função de Green satisfaria a

$$\square_x^{1/2} G_{1/2}(x - y) = \delta^{2+1}(x - y) \implies G_{1/2}(k) = \frac{-1}{\sqrt{k_\mu k^\mu}}.$$

Agora, vamos nos ater aos pontos singulares das funções G^{2+1} . Tais singularidades aparecem naqueles pontos onde a linha-de-universo de uma partícula, por exemplo, intercepta a borda do cone-de-luz (2+1) dimensional: $(x - y)^2 \rightarrow 0_{\pm}$. No caso $(x - y)^2 \rightarrow 0_-$, tal partícula aproxima-se da borda, mas estando fora do cone, enquanto que $(x - y)^2 \rightarrow 0_+$ nos diz que tal aproximação é feita pelo interior do cone. Fica claro da integral (1.6) que G^{2+1} é nula para o primeiro caso (de fato, como G^{2+1} respeita a causalidade, ela anula-se para toda distância tipo-espaço, $(x - y)^2 < 0$). Já no caso subsequente, a integral (1.6) diverge. Para os demais pontos no interior do cone, tal integral nos conduzirá a resultados finitos.

Antes de passarmos a um estudo mais detalhado do modelo, propriamente dito, vejamos como as funções de Green obtidas acima comportam-se frente a certas simetrias discretas, digo, Paridade (P) e Reversão Temporal (T).⁴ Primeiramente, notemos que $\Theta[(x^0 - y^0)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2]$ é *par* sob ambas as operações. Já $\Theta[\pm(x^0 - y^0)]$ é *par* sob P , mas é *ímpar* sob T . Daí, concluímos que, assim como em (3+1) dimensões, as funções G_{ret}^{2+1} e G_{adv}^{2+1} são invariantes sob P , mas frente a T uma das funções é levada à outra, e vice-versa.

1.2 O problema da radiação e a propagação de sinais eletromagnéticos

Nesta seção, lidaremos basicamente com a produção e a propagação de sinais eletromagnéticos. Aqui, entenderemos por *radiação*, como sendo o fluxo não-nulo do vetor de Poynting, $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}^* \neq 0$, através de uma região (*'volume'*) bidimensional, Ω , limitada por uma superfície (contorno) $\partial\Omega$:

⁴No caso planar, a operação- P tem um significado bem diferente daquele que conhecemos das 3 dimensões espaciais. Obviamente, aqui a reflexão de um vetor é lida em relação a uma reta e não em relação a um plano. Assim, um vetor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ transforma-se em $\vec{x}_P = (-x_1, x_2)$ sob Paridade (escolhendo-se reflexão em relação ao eixo- x). Quanto a T , ela continua idêntica a (3+1) dimensões, $\tau \rightarrow -\tau$.

$$\vec{S}^*(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} B(\vec{r}) \vec{E}^*(\vec{r}). \quad (1.7)$$

Claramente, tal identificação vem do Teorema de Conservação da Energia:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} T_{00} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}^* \right) d\Omega = 0,$$

onde $T_{00} = \mathcal{H}$ e $T_{0i} \equiv \vec{S}_i^*$ são as componentes do tensor de energia-momento do campo eletromagnético, $T_{\mu\nu}$.

A este ponto, com o intuito de discutirmos a produção de radiação eletromagnética no modelo em questão, faz-se necessário que consideremos uma determinada configuração de cargas e correntes. A distribuição mais simples que podemos tomar é aquela devida a uma única carga elétrica que se move arbitrariamente pelo espaço-tempo descrevendo uma linha-de-universo, $z^\mu(s)$. A corrente assim obtida pode ser escrita da seguinte forma:

$$j^\mu(y) = q \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{z}^\mu(s) \delta^{2+1}(y - z(s)) ds,$$

sendo s o *tempo-próprio* e $\dot{z}^\mu(s) = dz^\mu(s)/ds$ a *velocidade-própria* da partícula.

Agora, considerando-se novamente a expressão para o potencial A_{ret}^μ , eq. (1.4), obtemos (após a integração imediata da coordenada y ; tomamos também $\mathcal{A}_{in}^\mu = 0$):

$$A_{ret}^\mu(x) = +\frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x^0 - z^0(s)) \frac{\Theta[(x - z(s))^2]}{\sqrt{(x - z(s))^2}} \dot{z}^\mu(s) ds. \quad (1.8)$$

Aqui, notamos uma primeira diferença entre as Eletrodinâmicas de Maxwell em (3+1) e (2+1) dimensões: para esta última, não é possível efetuar a integração na variável s para casos arbitrários, digo, movimento acelerado, por exemplo. Como é bem sabido, em (3+1)D tal integral é realizada diretamente porquê lá temos uma 'função'- δ no integrando, a qual leva a um valor não-nulo para a integral somente onde $[x - z(s)]^2 = 0$. Aqui, ao contrário, qualquer ponto que satisfaça a $[x - z(s)] \geq 0$ pode, a priori, contribuir para A_μ acima⁵.

⁵Problema análogo ao da carga puntiforme em (2+1) dimensões, seria aquele de se estudar os potenciais e campos gerados por um fio condutor fino, infinito e não-deformável, com densidade uniforme de carga,

Assim, é a ‘*violação*’ do Princípio de Huyghens por G^{2+1} , eq. (1.6), que nos conduz à impossibilidade acima. Desta forma, não nos é possível obter expressões análogas aos potenciais de Liénard-Whiechart das 4 dimensões. Concluimos daí, que para conhecermos as expressões para os potenciais em (2+1)D devemos antes de mais nada precisarmos qual o tipo de movimento descrito pela partícula carregada.

Vejamos, então, quais as soluções para os potenciais e campos produzidos pela partícula nos casos mais simples. Para o caso estático, $z^\mu(s) = (s; 0, 0)$; $\dot{z}^\mu(s) = (1; 0, 0)$, obtém-se facilmente:

$$A^\mu(x) = \begin{cases} A^0(\vec{r}, t) = -\frac{q}{2\pi} \ln |\vec{r}| + \frac{q}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\ln |\tau + \sqrt{\tau^2 - r^2}|) \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \begin{cases} F_{0i}(\vec{r}, t) = +\frac{q}{2\pi} \frac{r^i}{r^2} - \frac{q}{2\pi} r^i \lim_{\tau \rightarrow r^+} \left(\frac{\tau}{r^2 \sqrt{\tau^2 - r^2}} \right) \\ F_{ij}(\vec{r}, t) = 0 \end{cases}, \quad (1.10)$$

com $\tau = (x^0 - s)$.

Claramente, vemos que o segundo termo em cada uma das expressões acima é explicitamente divergente. Além do mais, devemos enfatizar que tais termos não apareceriam se calculássemos tais quantidades a partir da respectiva equação de Maxwell estática, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q\delta^2(\vec{r})$. Conforme veremos, tal ‘*contradição*’ é apenas aparente, e surge do fato de que, dada a natureza logarítmica do potencial, ele próprio diverge a grandes distâncias da carga. Assim, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q\delta^2(\vec{r})$ automaticamente subtrai tal divergência explícita. No entanto, ao fazermos isto, deixamos de lado a discussão a respeito do porquê de tais termos terem aparecido.

De fato, veremos a seguir, que o aparecimento daqueles termos explicitamente divergentes é uma manifestação direta da *divergência infra-vermelha* apresentada pelo modelo em em movimento arbitrário no espaço-tempo 4-dimensional. De fato, podemos considerar o presente problema como sendo uma seção (corte) planar do movimento deste fio.

questão⁶. Para isto, calculemos $A^0(\vec{r}, t)$ a partir de sua transformada de Fourier, $A^0(p)$:

$$A^0(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(p) e^{ipx} dp = -\frac{q}{(2\pi)^3} \int \frac{\delta(p^0)}{p^2} e^{ipx} dp = +\frac{q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(pr)}{p} dp.$$

Por sua vez, a última integral acima diverge explicitamente e, assim, não nos é diretamente acessível. Portanto, devemos calculá-la com algum cuidado. Isto pode ser feito através do procedimento abaixo:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(pr)}{p} dp \longrightarrow \lim_{\mu \rightarrow 0_+} \int_0^\infty \frac{p J_0(pr)}{p^2 + \mu^2} dp = \lim_{\mu \rightarrow 0_+} K_0(\mu r).$$

Agora, usando-se a expansão da função de Bessel modificada, $K_0(z)$, quando $z \rightarrow 0_+$ (denotada por \approx) temos que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0_+} K_0(\mu r) \approx \lim_{\mu \rightarrow 0_+} \left[-\ln\left(\frac{\mu r}{2}\right) \right] = -\ln|\vec{r}| - \lim_{\mu \rightarrow 0_+} \ln(\mu/2).$$

Desta forma, comparando-se a expressão acima com o resultado em (1.9), vemos que o termo explicitamente divergente em A^0 surge quando tentamos recuperar o modelo original, ou seja, quando efetuamos o limite de massa nula. [Em termos de suporte da função de Green, parece-nos plausível associar tal divergência à contribuição de G^{2+1} no ponto $(x - y)^2 = 0$, já que é justamente este ponto (sobre a borda do cone-de-luz) que estaria relacionado com o comportamento de massa nula (e daí, $v = c$) da teoria].

⁶É sabido que, teorias com massa nula apresentam tais divergências e que elas tendem a se tornar cada vez mais severas com a redução da dimensão do espaço-tempo no qual são definidas. Mais especificamente, isto quer dizer que, lidar com tais problemas em uma teoria de Maxwell definida em (2+1) é muito mais complicado (e delicado) do que com sua correspondente em (3+1) dimensões. Até onde sabemos, praticamente toda discussão a este respeito se restringe ao nível quântico. Assim, com a discussão aqui apresentada, pretendemos chamar a atenção para o fato de que, mesmo a nível clássico, tais divergências podem exibir algumas de suas consequências, pelo menos para certos casos. Por exemplo, em (1+1)D, tal divergência aparece ainda mais explicitamente, uma vez que lá o potencial escalar é ainda mais confinante, $A_0(\vec{r}) \approx |\vec{r}|$. Quanticamente, o que acontece é que tais divergências, assim como, algumas de suas consequências, não são tão facilmente resolvidas. Por exemplo, o caso não-Abeliano de teorias definidas nestes espaços-tempo de dimensão mais baixa, ainda que em presença de matéria massiva só fazem sentido para escolhas muito especiais do “gauge”[29].

Por outro lado, podemos mostrar que a divergência explícita é facilmente removida da expressão de $F_{ret}^{\mu\nu}$, desde que invertamos uma ordem de diferenciação e integração, conforme abaixo:

$$F_{0i}(\vec{r}, t) = -\frac{q}{2\pi} \partial_i \left(\int_0^\infty \frac{J_0(pr)}{p} dp \right) = \frac{q}{2\pi} \frac{r^i}{r} \int_0^\infty J_1(pr) dp = +\frac{q}{2\pi} \frac{r^i}{r^2}.$$

Mais genericamente, ao obter-se a expressão geral para $F_{\mu\nu}$ a partir de (1.4), $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta(x^0 - z^0) \Theta((x - z)^2)}{P^2 \sqrt{(x - z)^2}} \ddot{z}_{[\nu} (x - z)_{\mu]} P + \dot{z}_{[\nu} (x - z)_{\mu]} (1 - Q) ds, \quad (1.11)$$

podemos mostrar que o termo explicitamente divergente em (1.10) é automaticamente removido, calculando-se o campo elétrico a partir da expressão acima. Note, também, a anti-simetrização nos índices $\mu\nu$. Além do mais, temos definido: $P = (x - z)^\alpha \dot{z}_\alpha$ e $Q = (x - z)^\alpha \ddot{z}_\alpha$.

O próximo caso a ser resolvido é aquele da carga em movimento constante. Supondo-se que tal movimento se dê ao longo do eixo- x , obtemos facilmente (note que estamos omitindo o termo explicitamente divergente na solução de A_μ):

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \begin{cases} A^0 = \Phi(\vec{x}, t) = -\frac{q\gamma}{2\pi} \ln |\vec{R}| \\ A_x(\vec{x}, t) = -\frac{q\beta}{2\pi} \ln |\vec{R}| \\ A_y(\vec{x}, t) = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{F}^\mu(\vec{x}, t) = \begin{cases} \tilde{F}^0 = +B(\vec{x}, t) = \frac{q\beta\gamma}{2\pi} \ln |\vec{R}| \\ \tilde{F}^1 = -E_y(\vec{x}, t) = -\frac{q\gamma}{2\pi} \ln |\vec{R}| \\ \tilde{F}^2 = +E_x(\vec{x}, t) = +\frac{q}{2\pi} \ln |\vec{R}|, \end{cases}$$

com a distância retardada definida por $\vec{R} = (x - \beta t; y)$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Agora, a partícula produz um campo magnético não nulo, $B(\vec{x}, t) \neq 0$, devido ao seu movimento relativo ao observador. No entanto, como pode ser visto, não há formação de zonas de radiação mesmo neste caso, haja visto que $\vec{\nabla} \cdot (B \vec{E}^*) = 0$. Desta forma, assim como ocorre em (3+1)D, também aqui, apenas cargas aceleradas poderão irradiar. Daí, apenas

aqueles termos que dependem da aceleração em (1.11), $\ddot{z}^\mu(s)$, contribuirão para a produção de radiação, propriamente dita.

É justamente neste ponto que reside um de nossos grandes problemas ao lidar com a radiação clássica em $(2+1)$ dimensões. Conforme temos adiantado ao longo deste capítulo, devido à violação do Princípio de Huyghens por parte de G^{2+1} , segue-se que o suporte de tal função não é mais restrito à borda do cone-de-luz. Isto por sua vez, impossibilita-nos (até onde temos tentado) de efetuar a integração na variável s presente na eq. (1.11). Em consequência disto, ficamos impossibilitados de obter uma lei de radiação tipo-Larmor em $(2+1)D$. Noutras palavras, dado um movimento acelerado arbitrário de uma carga, não poderemos determinar como será a radiação produzida por ela: como dependerá da aceleração, como se comportará com a distância, etc. Assim, o que poderíamos fazer, seria considerarmos certos movimentos acelerados especiais e, a partir de (1.11), tentarmos obter, para estes casos, a potência irradiada.

Na verdade, dedicamos considerável atenção aos casos acelerados mais simples, que são o parabólico (aceleração constante e baixas velocidades)⁷ e hiperbólico (aceleração constante e regime relativístico). Os resultados a que chegamos não nos eram muito animadores: por exemplo, as integrais com as quais nos deparamos eram de resolução bastante complexa e, além do mais, pareciam divergir. Talvez, elas pudessem conduzir a resultados finitos, desde que os limites de integração na variável s levassem a um intervalo finito (algo que não conseguimos mostrar, explicitamente). Assim, o que temos tentado desde então, é obter algum

⁷É interessante sublinhar que mesmo em $(3+1)$ dimensões, há uma discussão se uma carga puntiforme em movimento hiperbólico de fato irradia. Enquanto alguns métodos afirmam que não [30], outros já nos dizem que sim, e que a quantidade irradiada é infinita[31]. Tais conclusões são válidas quando os cálculos são estendidos para todos os instantes de tempo. Por outro lado, como notado na Ref.[32], isto se apresenta como uma *ambigüidade* da eletrodinâmica clássica para este tipo de movimento: de fato, quando efetuamos os cálculos levando-se em conta apenas intervalos de tempo finitos, então todos os métodos nos conduzem aos resultados contemplados pela versão relativística da fórmula de Larmor, que relaciona a radiação com a aceleração da fonte em cada ponto do espaço-tempo.

método alternativo para a resolução (ainda que com certas simplificações) dos potenciais e campos em suas formas gerais, eqs. (1.8) e (1.11). [De passagem, devemos mencionar que cálculos semelhantes em uma ‘eletrodinâmica clássica massiva’ sofreriam de problemas análogos àqueles aqui encontrados. Assim, o conhecimento a respeito de tal teoria seria útil neste contexto].

Dediquemos um pouco mais de nossa atenção à esta questão. Para tanto, retornemos à expressão (1.11). Agora, uma vez que cargas em repouso ou em movimento uniforme não irradiam neste contexto, então somente aqueles termos proporcionais à aceleração, em (1.11), é que, efetivamente, contribuirão para uma lei tipo- Larmor. Note, todavia, que tais termos são proporcionais a integrais do tipo

$$\int_A^B \frac{ds}{\sqrt{(x - z(s))^2}},$$

sendo A e B os limites de integração que satisfazem à prescrição ditada pela função-degrau em (1.11). Assim, se nos restringirmos, por exemplo, a movimentos acelerados simples, então, $z(s) \approx s^2$. Para estes casos, a integração acima conduzir-nos-ia ao resultado de que, em (2+1) dimensões a radiação sem massa depende, dentre outros fatores, de $\ln|\vec{x}|$ (mais precisamente, algo como $\ln|x + f(A)| - \ln|x + g(B)|$, sendo $f(A)$ e $g(B)$ funções simples dos limites de integração, por exemplo, $f(A) = A/2$, etc). Tal resultado, se pudesse ser mais rigorosamente (e explicitamente) obtido poderia nos fornecer elementos para uma discussão a respeito de estados ligados a nível clássico, por exemplo, em determinadas regiões do espaço-tempo onde a lei tipo-Larmor anulasse. Todavia, não podemos fazer afirmações mais precisas no presente momento, haja visto que, resultados mais rigorosos são cruciais para tanto.

Embora não tenhamos obtido resultados explícitos a respeito de como cargas aceleradas irradiam no modelo em questão, existe pelo menos um outro ponto importante a ser discutido: aquele que trata de como os sinais eletromagnéticos se propagam em (2+1) dimensões. Como veremos adiante, neste espaço-tempo tal fenômeno se dá de maneira muito diferente

daquela que o conhecemos do eletromagnetismo em 4 dimensões, onde os cálculos são relativamente simples e podem ser efetuados analiticamente.

Primeiramente, relembremos alguns resultados básicos relacionados à propagação de sinais eletromagnéticos na teoria de Maxwell usual. Começemos pela seguinte configuração para uma carga elétrica: $\rho(\vec{y}, t') = q\delta^3(\vec{y})\Theta(t')$ (colocamos a carga puntiforme na origem, em $t = 0$ e mantemo-la lá para todos os tempos posteriores). É fácil calcular, por exemplo, o potencial escalar sentido por uma carga-teste num ponto $\vec{x} \neq 0$, devido à configuração acima:

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad \text{para } t \geq |\vec{x}|.$$

Como é bem sabido, tal expressão nos diz que o potencial começa a ser observado no ponto \vec{x} somente quando o tempo medido desde o instante inicial se iguala à distância da carga-teste à origem, $t = |\vec{x}|$. A partir de então, o potencial absorvido manterá sua amplitude inalterada, para qualquer $t \geq |\vec{x}|$: a *superposição linear de sinais*. Além do mais, é fácil ver que tal superposição é obtida a partir de sinais individuais (pulsos). Cada pulso é devido à seguinte configuração 'hipotética' de carga: $\rho(\vec{y}, t') = q\delta^3(\vec{y})\delta(t')$ (aqui, a carga puntiforme é colocada na origem em $t = 0$, e é imediatamente 'retirada'). O pulso de potencial lê-se:

$$\Phi(\vec{x}, t) = -\frac{q}{4\pi} \frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{|\vec{x}|},$$

a qual nos afirma que o sinal, produzido na origem em $t = 0$, é absorvido em \vec{x} exatamente no instante $t = |\vec{x}|$: o pulso preserva seu 'caráter puntiforme' ("*sharpness*") enquanto se propaga.

Vejamos, agora, como tal propagação se dá em (2+1) dimensões. Iniciemos pela configuração de carga 'hipotética', $\rho(\vec{y}, t') = q\delta^2(\vec{y})\delta(t')$. O potencial escalar gerado por tal configuração é facilmente obtido via eq. (1.8) e lê-se:

$$\Phi_{\text{pulso}}(\vec{x}, t) = +\frac{q}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \quad \text{para } t \geq |\vec{x}|. \quad (1.12)$$

Notemos que, contrariamente a (3+1)D, aqui a propagação de sinais eletromagnéticos é explicitamente tempo-dependente: a amplitude do potencial acima começa a ser percebida

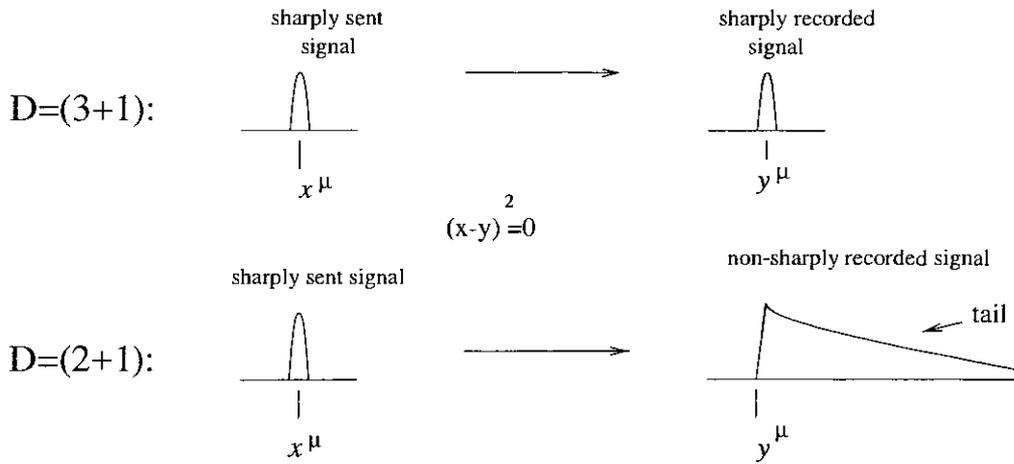


Figura 1.3: Como se dá a propagação de sinais eletromagnéticos em (3+1) e (2+1) dimensões. Aqui, a coordenada temporal está representada na horizontal.

intensamente no ponto de observação, \vec{x} , quando t é igual a $|\vec{x}|$, diminuindo sua intensidade à medida que o tempo decorre. [Uma ilustração de tal fenômeno é apresentado na Figura 1.3. Aí, a coordenada temporal está representada na horizontal. Assim, a *cauda* (“tail”) deixada pelo sinal será de caráter temporal]. Por outro lado, quando superpostos, tais pulsos nos conduzem ao seguinte potencial

$$\Phi_{\text{sup}}(\vec{x}, t) = +\frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}}{|\vec{x}|} \right) \quad \text{para } t \geq |\vec{x}|. \quad (1.13)$$

Esta é a *superposição logarítmica* de pulsos, que é aquela que ocorre na Eletrodinâmica de Maxwell em (2+1) dimensões (em lugar da linear das (3+1)D). Notemos uma peculiaridade interessante de tal superposição, que se dá no intervalo de tempo tal que $t \gtrsim |\vec{x}|$ (t igual ou ligeiramente maior que $|\vec{x}|$). Neste intervalo, vimos que o potencial de um pulso é bastante intenso, conforme eq. (1.12). Contrariamente, quando superpostos, o potencial resultante anula-se em $t = |\vec{x}|$ e tem uma amplitude reduzida para tempos ligeiramente maiores que $|\vec{x}|$, eq. (1.13). Portanto, tudo se passa como se, ao serem superpostos, os pulsos o fizessem de maneira totalmente destrutiva quando $t = |\vec{x}|$, sendo que, com o passar do tempo, uma superposição construtiva fosse sendo incorporada ao fenômeno, de modo que, para tempos suficientemente maiores que $|\vec{x}|$ os pulsos se superpussem construtivamente. Por fim, quando $t \rightarrow \infty$ a intensidade de um único pulso tende a zero, ao passo que sua

Figura 1.4: Ilustra a superposição logarítmica de sinais eletromagnéticos, que ocorre em (2+1) dimensões. Aqui, exibimos $\Phi(t; x = 2, y = 0) X t$ para um único pulso (à esquerda) e o caso superposto (à direita)

superposição nos conduz ao conhecido potencial logarítmico (estático) das (2+1) dimensões: $\Phi(\vec{x}) = -\frac{q}{2\pi} \ln |\vec{x}|$. [Uma ilustração de tal superposição é apresentada na Figura 1.4].

Retomemos a discussão a respeito da propagação tempo-dependente dos sinais eletromagnéticos em (2+1) dimensões. Enquanto em (3+1)D, um pulso eletromagnético produzido num determinado ponto do espaço-tempo, x^μ , pode ser detectado num instante posterior preciso, y^0 (conquanto que $(x^\mu - y^\mu)^2 = 0$), o mesmo não acontece no caso planar. Aí, embora possamos produzir um sinal puntiforme em x^μ (veja que na eq. (1.12), em $t = 0$, o sinal está precisamente na origem, $\vec{x} = 0$: um pulso), nós não mais poderemos observá-lo como tal. Agora, o próprio movimento (livre) do pulso impede que ele se propague como uma entidade puntiforme, ‘*espalhando-o*’ pelo espaço-tempo. De fato, suponhamos que queiramos detectá-lo no ponto \vec{y} . Se o fizéssemos em (3+1)D, como vimos, tal detecção se daria apenas e tão somente no instante $t = y^0$, tal que $(x^\mu - y^\mu)^2 = 0$. No entanto, estando em (2+1)D, necessitaremos de todos os instantes de tempo $t \geq y^0$ para absorvermos todo o sinal, que inicialmente se apresentava como um pulso! Tal fenômeno é denominado *reverberação* ou *difusão* de sinais.

Apesar de ser inerente à Eletrodinâmica de Maxwell em (2+1) dimensões, devido às propriedades das funções de Green previamente discutidas, tal fenômeno acontece com diversos

outros modelos e em diferentes dimensões. Se considerássemos uma Eletrodinâmica massiva tipo-Proca em (3+1)D, por exemplo, a propagação de sinais neste âmbito também se daria de maneira difusa. Além do mais, é sabido que determinadas teorias quando definidas em variedades curvas, a própria curvatura pode induzir o aparecimento de termos de difusão no propagador do campo dinâmico em questão[33].

Conclusões similares referentes a tal fenômeno já são conhecidas há algum tempo. Por exemplo, Courant e Hilbert [20, 22] já haviam chegado a tais conclusões para teorias D'Alembertianas definidas em espaço-tempos planos de dimensões $2n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Em sua análise, eles exploram também a conexão íntima entre a violação do Princípio de Huyghens e o aparecimento da reverberação em tais teorias

É instrutivo, também, apresentarmos e discutirmos as soluções para o campo elétrico devido às configurações de cargas consideradas acima. Elas são facilmente obtidas e lêem-se:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{2\pi} \frac{\vec{x}}{(t^2 - |\vec{x}|^2)^{3/2}} \quad t \geq |\vec{x}| \quad \text{único pulso,}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{2\pi} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \frac{t}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \quad t \geq |\vec{x}| \quad \text{pulsos superpostos.}$$

Neste caso, o campo elétrico de um único pulso e o caso superposto decaem com o passar do tempo. Todavia, enquanto a intensidade de um pulso anula-se para $t \rightarrow \infty$, quando superpostos, eles tendem a um valor finito: precisamente aquele do campo elétrico estático, obtido de $\Phi(\vec{x}) = -\frac{q}{2\pi} \ln |\vec{x}|$. Até onde vimos, esta é uma regra geral: ainda que reverberem, a superposição de pulsos nos conduz aos valores das grandezas estáticas quando tomamos $t \rightarrow \infty$.

Toda esta questão a respeito da difusão de sinais remete-nos a discutir a dinâmica clássica de uma distribuição de cargas no âmbito desta Eletrodinâmica. Tomemos o sistema mais simples, composto por duas cargas elétricas estáticas: Q , supostamente fixa à origem e uma teste, q , posta noutro ponto e passível de movimento. Agora, consideremos o campo elétrico

produzido por Q sobre q . Conforme nossa discussão precedente, embora ambas as cargas estejam inicialmente estáticas, o campo elétrico atuante sobre q não será independente do tempo. Noutras palavras, a força elétrica atuante em q será tempo-dependente, ainda que a carga que a produza esteja estática. Isto, sem dúvida, coloca complicações extras à Eletrodinâmica de uma distribuição de cargas e correntes àquelas que já conhecíamos das $(3+1)$ dimensões. O sistema considerado acima ilustra isto claramente: por exemplo, para calcularmos a energia cinética da carga q entre dois pontos espaço-temporais necessitaremos realizar não somente as integrações espaciais, como faríamos em $(3+1)D$, mas teremos também, que integrar na coordenada temporal. Portanto, não restam dúvidas de que tal fenômeno se coloca como uma distinção importante entre as Eletrodinâmicas de Maxwell definidas em $(3+1)$ e $(2+1)$ dimensões.

Por fim, gostaríamos de levantar uma última questão. Dado que o próprio movimento dos sinais induz o aparecimento da difusão e, entendendo que um fóton seja um pacote quanticamente localizado de tais sinais, nós nos perguntaríamos se o estado físico de um ‘fóton planar’ sentiria, de alguma maneira, a reverberação das entidades clássicas! Em caso negativo, que mecanismo quântico seria responsável por livrar-nos de tal fenômeno?

1.3 Conclusões Preliminares

Neste primeiro capítulo temos visto que, ao lidarmos com um modelo de Maxwell em $(2+1)$ dimensões, algumas diferenças notáveis ocorrem quando comparadas ao Eletromagnetismo usual das 4 dimensões. Uma delas é a questão da reverberação de sinais eletromagnéticos. Tal fenômeno, como vimos, associado ao movimento livre dos sinais impede que estes, ainda que produzidos e enviados como pulsos, não possam mais ser localizados no espaço-tempo. Outro ponto que também fora discutido ao longo deste capítulo é a imensa dificuldade que encontramos ao tentar responder a questão de como cargas elétricas irradiam em $(2+1)$ di-

mensões. De fato, tal questão ainda continua sem respostas conclusivas. Além do mais, temos visto que tais pontos estão intimamente relacionados à violação do Princípio de Huyghens por parte da função de Green correspondente ao D'Alembertiano $(2+1)$ -dimensional.

Capítulo 2

Eletrodinâmica de

Maxwell-Chern-Simons em $(2+1)$

dimensões

Neste capítulo, trataremos de alguns aspectos da Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons (MCS). Tal modelo é obtido do anterior pela introdução de um novo termo (Abeliano) de natureza topológica (digo, independente da métrica do espaço-tempo) que não tem contrapartida direta em $(3+1)$ dimensões: o chamado termo de Chern-Simons. Conforme veremos, a presença de tal termo leva-nos a diferenças profundas quando comparado ao caso estrito de Maxwell. Mesmo a nível clássico, como será visto adiante, este termo traz consigo diversas modificações em relação à teoria de massa nula, como um “gap” de massa para o ‘fóton planar’. Para tanto, seguiremos, basicamente, o caminho adotado no capítulo anterior: após apresentarmos e discutirmos algumas propriedades básicas deste novo modelo, passaremos a estudar alguns aspectos da radiação de cargas elétricas, bem como a propagação de sinais eletromagnéticos no modelo em questão. Por fim, revisaremos os resultados mais importantes obtidos ao longo deste capítulo, bem como, algumas de suas consequências.

2.1 Algumas propriedades básicas do modelo MCS

O presente modelo lê-se:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu A_\kappa + j_\mu A^\mu, \quad (2.1)$$

onde $\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa}A_\mu\partial_\nu A_\kappa = \frac{m}{2}A_\mu\tilde{F}^\mu$ é o termo de Chern-Simons (Abeliano). É fácil mostrar que tal termo é invariante sob as transformações de gauge Abelianas usuais¹, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x)$. Assim, a ação de MCS também permanece invariante sob tais transformações.

Dentre outras consequências interessantes do termo de Chern-Simons, é sabido que ele dá uma massa não-nula para o campo A_μ , precisamente igual a m . Daí, dependendo do sinal deste parâmetro ser positivo ou negativo, o ‘fóton planar’ terá “*spin*” igual a $+1$ ou -1 , respectivamente.² O que deve ser enfatizado, no entanto, é que o caráter escalar de tal campo é mantido: ainda que massivo, A_μ *propaga apenas um grau de liberdade físico*. Algumas outras propriedades serão discutidas no decorrer deste capítulo.

Os campos elétrico e magnético satisfazem a $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu + m\tilde{F}^\nu$, bem como, à identidade

¹De fato, sob as transformações de gauge usuais, este é levado em

$$-\frac{m}{2}\tilde{F}^\mu\partial_\mu\Lambda = \frac{m}{2}\left[\partial_\mu(\tilde{F}^\mu\Lambda) - \Lambda\partial_\mu\tilde{F}^\mu\right].$$

O primeiro termo entre colchetes é uma derivada total, que se anula pela aplicação do Teorema de Gauss ($\Lambda \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$); já o segundo, também se anula devido à identidade de Bianchi (ausência de monopolos tipo-Dirac).

²Devemos ser cautelosos ao falarmos de *spin* em $(2+1)$ dimensões. Na verdade, seu significado é muito diferente daquele que temos em $(3+1)D$, já que ele surge como um atributo do subgrupo de rotações espaciais do Grupo de Poincaré correspondente. Assim, enquanto em $(3+1)D$ tal subgrupo é tri-dimensional (tendo três geradores, que satisfazem à álgebra de $SO(3)$, e daí, a possibilidade de *spin* inteiro e semi-inteiro somente), em $(2+1)D$, temos apenas um plano de rotação e uma álgebra Abeliana que, a priori, admitiria *spin* arbitrário. Assim para o caso de partículas massivas em $(2+1)D$, seu “*spin*” é semelhante à helicidade de partículas sem massa das $(3+1)$ dimensões: apenas a polarização positiva ou negativa (no caso vetorial $+1$ ou -1) podem ser observadas. Boas discussões a respeito podem ser encontradas em [17].

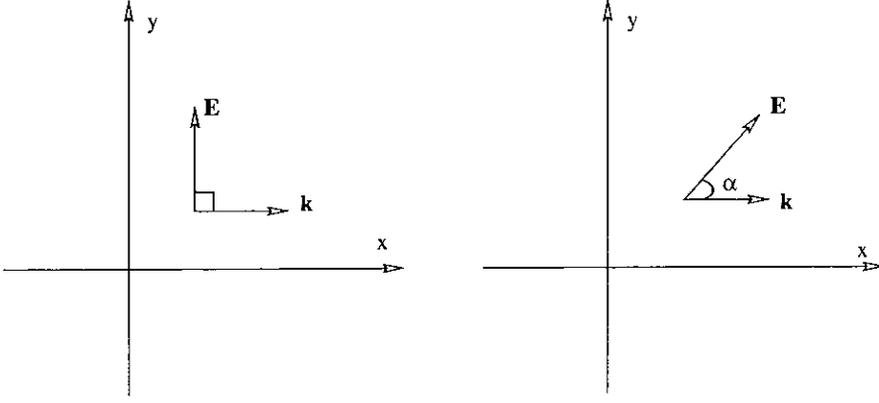


Figura 2.1: Ilustra a propagação de ondas planas em (2+1) dimensões, nos modelos de Maxwell e Maxwell-Chern-Simons, respectivamente. Em particular, nota-se o caráter não-transversal da radiação no caso de MCS (à direita).

de $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0$, donde seguem-se as seguintes equações:

$$\vec{\nabla} B = \partial_t \vec{E}^* + \vec{j}^* + m \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho + mB \quad \text{e} \quad \partial_t B + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = 0.$$

Aqui, vemos explicitamente, que a radiação eletromagnética no ambiente de Maxwell-Chern-Simons não é mais transversal, mesmo na ausência de fontes, uma vez que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \approx mB \neq 0$. [Tal característica é ilustrada pela Figura 2.1]. Tal aspecto será muito relevante quando lidarmos com a quantização de tal radiação, pois neste caso, não poderemos, por exemplo, trabalharmos num gauge transversal [34], $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Além do mais, é fácil ver que, em ausência de fontes, os campos \vec{E} e B satisfazem à equação de D'Alembert massiva.

Já o campo A_μ satisfaz a:

$$\left(\square \eta^{\mu\nu} - m \epsilon^{\mu\nu\kappa} \partial_\kappa - \frac{\alpha + 1}{\alpha} \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu(x) \equiv \mathcal{O}_x^{\mu\nu} A_\nu(x) = j^\mu(x),$$

na qual fora introduzido o termo de fixação de gauge, parametrizado por α . Assim, a função de Green para o operador \mathcal{O} satisfará a relação funcional usual: $\mathcal{O}_x^{\mu\nu} G_{\nu\kappa}^{MCS}(x-y) = \delta_\kappa^\mu \delta^{2+1}(x-y)$.

Agora, para obtermos $G_{\nu\kappa}^{MCS}$, usaremos o método de projetores, definidos no espaço dos momentos por:

$$\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \quad \omega^{\mu\nu} = +\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \quad S^{\mu\nu} = +i\epsilon^{\mu\nu\kappa} p_\kappa,$$

cujas relações de ortogonalização são:

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu}\Theta_{\nu\lambda} &= \Theta^\mu{}_\lambda, & \omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\lambda} &= \omega^{\mu\lambda}, & S^{\mu\nu}S_{\nu\lambda} &= p^2\Theta^\mu{}_\lambda, \\ \Theta^{\mu\nu}S_{\nu\lambda} &= S^\mu{}_\lambda, & \omega^{\mu\nu}\Theta_{\nu\lambda} &= \omega^{\mu\nu}S_{\nu\lambda} = 0.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $\mathcal{O}^{\mu\nu}(p) = -p^2\Theta^{\mu\nu} - mS^{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}p^2\omega^{\mu\nu}$, cuja inversa, $G_{\nu\kappa}^{MCS}$ é facilmente obtida como sendo:

$$G_{\nu\kappa}^{MCS}(p) = -\frac{\eta_{\nu\kappa}}{(p^2 - m^2)} + m\frac{S_{\nu\kappa}}{p^2(p^2 - m^2)} + \frac{[p^2 + \alpha(p^2 - m^2)]}{p^4(p^2 - m^2)}p_\nu p_\kappa. \quad (2.2)$$

Note que o último termo na expressão acima desaparece ao removermos o parâmetro α , bem como, ao levarmos em conta que a corrente é conservada. Assim, para a análise clássica, só restarão os dois primeiros termos. Portanto, observa-se que, devido ao termo de Chern-Simons temos também a presença de um pólo não-massivo (além do massivo) na função de Green resultante. Tal pólo, apesar de apresentar-se como sendo não-dinâmico, a nível quântico, tem algumas consequências físicas interessantes, como ser o responsável pelo longo alcance do potencial vetor, que decairá tipo r^{-1} no infinito. De fato, pode-se mostrar que, tal aspecto do potencial vetor é uma condição (topológica) básica para o aparecimento dos denominados vórtices topológicos em tal modelo. Voltaremos um pouco mais a esta questão adiante, quando calcularmos os potenciais e campos devido a uma carga estática e discutirmos seus comportamentos assintóticos.

Agora, vamos nos dedicar à função de Green, propriamente dita. Para obtermos G^{MCS} no espaço das coordenadas, precisaremos, de antemão, obter G^{mass} , que é a função de Green para o operador $(\square + m^2)$ em (2+1) dimensões³. Isto é feito de maneira similar àquela empregada para obter G^{2+1} , no capítulo anterior. Sua solução é:

$$G_{adv}^{mass}(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Theta[t^2 - r^2] \cos(m\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \Theta[\pm t], \quad (2.3)$$

³Observe que o termo proporcional a $S_{\mu\nu}$ em (2.2) pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\frac{1}{p^2(p^2 - m^2)} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2} \right),$$

donde segue-se que, para determinarmos G^{MCS} , necessitamos, de antemão, conhecermos G^{2+1} e G^{mass} .

com $t = (x^0 - y^0)$ e $r = |\vec{x} - \vec{y}|$. É fácil ver que, no limite $m \rightarrow 0_+$ a expressão acima se reduz à função de Green de massa nula, eq. (1.6). Portanto, o potencial A_μ lê-se (o campo homogêneo externo não está sendo escrito):

$$A^\mu(x) = \int d^{2+1}y \left[G^{mass}(x-y)\eta^{\mu\nu} + \frac{m}{m^2} (G^{mass}(x-y) - G^{2+1}(x-y)) \epsilon^{\mu\nu\kappa} \partial_\kappa \right] j_\nu(y), \quad (2.4)$$

onde a presença de G^{2+1} claramente confirma que, mesmo sendo massivo, o campo A_μ recebe contribuição de um setor sem massa. Agora, particularizando tal equação para o caso de uma carga puntiforme, obtemos:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) = & + \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \Theta(x^0 - z^0(s)) \Theta[(x-z)^2] \left\{ \frac{\cos(m\sqrt{(x-z)^2})}{\sqrt{(x-z)^2}} \dot{z}^\mu + \right. \\ & + \frac{m}{m^2} \epsilon^{\mu\nu\kappa} \left[\dot{z}_\nu(x-z)_\kappa \left(\frac{m \sin(m\sqrt{(x-z)^2})}{(\sqrt{(x-z)^2})^2} + \frac{\cos(m\sqrt{(x-z)^2}) - 1}{(\sqrt{(x-z)^2})^3} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \ddot{z}_\nu \dot{z}_\kappa \left(\frac{\cos(m\sqrt{(x-z)^2}) - 1}{\sqrt{(x-z)^2}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

com $(x-z)^2 = [(x^0 - z^0(s))^2 - |\vec{x} - \vec{z}(s)|^2]$. Nota-se que, outra novidade devida ao termo de Chern-Simons é a presença explícita de um termo proporcional à aceleração da carga na expressão para o potencial (o último termo na equação acima). Além do mais, observe que uma solução geral para o potencial acima é extremamente difícil de ser realizada. De fato, as integrações acima apresentam-se ainda mais complicadas de serem resolvidas que no caso do modelo anterior. Realmente, como veremos a seguir, toda a discussão a respeito de como cargas aceleradas irradiam no âmbito de MCS é um problema completamente aberto e, até onde temos estudado, de realização muito mais difícil que o caso de massa nula.

2.2 A questão da radiação e a propagação de sinais no modelo MCS

Começemos pela expressão para o tensor $F_{\mu\nu}$, que pode ser obtido da eq. (2.5), para o caso de uma única carga puntiforme em movimento arbitrário:

$$F^{\mu\nu}(x) = + \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left\{ \left(\frac{\cos(m\sqrt{(x-z)^2})}{\sqrt{(x-z)^2}} \right) \left(\frac{(x-z)^\mu \ddot{z}^\nu}{P} + \frac{(x-z)^\mu \dot{z}^\nu (Q-1)}{P^2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m}{m^2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} \left[\left(\delta_{\beta}^{\mu} \dot{z}_{\alpha} + \frac{(x-z)^{\mu} (x-z)_{\beta} \ddot{z}_{\alpha} - \dot{z}^{\mu} (x-z)_{\beta} \dot{z}_{\alpha}}{P} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{(1-Q)(x-z)^{\mu} (x-z)_{\beta} \dot{z}_{\alpha}}{P^2} \right) \left(\frac{m \sin(m\sqrt{(x-z)^2})}{(\sqrt{(x-z)^2})^2} + \frac{\cos(m\sqrt{(x-z)^2}) - 1}{(\sqrt{(x-z)^2})^3} \right) + \\
& + \left. \left(\frac{\cos(m\sqrt{(x-z)^2}) - 1}{\sqrt{(x-z)^2}} \right) \left(\frac{(1-Q)(x-z)^{\mu} \dot{z}_{\beta} \ddot{z}_{\alpha}}{P^2} - \frac{\dot{z}^{\mu} \dot{z}_{\beta} \ddot{z}_{\alpha}}{P} + \frac{(x-z)^{\mu} \dot{z}_{\beta} d^3 z_{\alpha}}{P ds^3} \right) \right] \\
& - \mu \leftrightarrow \nu \} \Theta(x^0 - z^0) \Theta[(x-z)^2] ds. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

com P e Q já definidos anteriormente (veja o parágrafo que se segue à eq. (1.11), no capítulo anterior). Note, também, a antisimetriação em $\mu\nu$ representada por $\mu \leftrightarrow \nu$.

Observe a presença de um termo acima que, explicitamente, depende da derivada temporal da aceleração da carga, $d^3 z/ds^3$ (o último acima): um termo tipo “back-reaction”. Além do mais, note que aqueles termos proporcionais à aceleração (ou a sua derivada), que são os termos que efetivamente contribuiriam para o fluxo de energia, podem ser divididos em duas categorias: os que se comportam como $\int ds/R(s)$ e aqueles tipo $\int ds \cos(mR(s))/\bar{R}(s)$. Enquanto os primeiros, conforme já discutimos no capítulo anterior, podem nos conduzir a uma lei de potência tipo-Larmor que dependeria de $\ln r$, o mesmo parece não acontecer com os últimos: devido à presença explícita do parâmetro de massa, tal potência deverá apresentar um comportamento mais usual, digo, decrescente com a distância. Toda esta discussão esbarra, obviamente, em nossa impossibilidade (pelo menos até onde temos tentado) de obter a expressão geral para tal fluxo. Mesmo os casos mais simples foram tentados, tendo sido infrutíferas nossas tentativas. Isto, no entanto, não invalida a questão levantada. Ao contrário, pensamos que toda a dificuldade encontrada sirva como argumento para a continuidade do trabalho, dado que, várias questões importantes ainda encontram-se completamente sem resposta.

Embora não tenhamos conseguido maiores informações com respeito à emissão de radiação, propriamente dita, é interessante discutir algumas consequências trazidas pelo termo de Chern-Simons, quando comparamos MCS com o modelo de massa nula. Para isto, calcule-

mos os potenciais e campos devido a um carga puntiforme estática. Tais resultados são de fácil obtenção e lêem-se: ⁴

$$A^\mu(x) = \begin{cases} \Phi(\vec{x}) = +\frac{q}{2\pi} K_0(m|\vec{x}|) \\ A^i(\vec{x}) = -\frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \frac{\epsilon^{ij} x^j}{|\vec{x}|} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} - m K_1(m|\vec{x}|) \right) \end{cases}, \quad (2.7)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \begin{cases} E^i(\vec{x}) = -\frac{q}{2\pi} \frac{m x^i}{|\vec{x}|} K_1(m|\vec{x}|) \\ B(\vec{x}) = +\frac{q}{2\pi} m K_0(m|\vec{x}|) = m\Phi(\vec{x}) \end{cases}. \quad (2.8)$$

Agora, vemos que A_μ adquire um comportamento assintótico melhor, quando comparado ao caso de massa nula: $A_\mu \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ (lembre-se que, a grandes distâncias, K_0 e K_1 comportam-se, a grosso modo, como $e^{-|m\vec{x}|}/\sqrt{|m\vec{x}|}$). Além do mais, devido ao pólo de massa nula em (2.2), o potencial vetor ainda é de alcance infinito. Dado que tal pólo seja não-dinâmico, pode-se mostrar então que, assintoticamente, tal potencial reduz-se a um termo de puro-gauge. Isto, por sua vez, é crucial para o aparecimento dos denominados vórtices (magnéticos) topológicos em tal contexto.

Por outro lado, como tais quantidades comportam-se a pequenas distâncias? Para responder a tal pergunta, relembremos que, para $|z| \ll 1$ verifica-se que $K_0(z) \approx -\ln(z/2)$ e $K_1(z) \approx z^{-1}$. Assim, vemos que quando chegamos muito próximo à carga, tanto Φ quanto B divergem com $\ln|m\vec{x}|$ ao passo que \vec{E} o faz com $|\vec{x}|^{-1}$. Já o potencial vetor, por sua vez, vai a zero a curtíssimas distâncias: sua componente genuinamente massiva, aquela proporcional a K_1 , é exatamente cancelada pela contribuição proveniente do pólo não-massivo! Daí, com excessão do campo B , todas as outras quantidades recobrem o caso de massa nula quando $r \rightarrow 0$ (ainda que dependam do parâmetro m).

Além do mais, o fato de $B \approx \ln|m\vec{x}|$ quando $|\vec{x}| \rightarrow 0$ implica que uma carga no contex-

⁴Os seguintes resultados serão úteis:

$$\int_{|\vec{x}|}^{\infty} \frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\cos(mu)}{\sqrt{u^2 + |\vec{x}|^2}} du = K_0(m|\vec{x}|) \quad \text{e} \quad \partial_z K_0(f(z)) = -f'(z)K_1(z),$$

sendo $K_0(m|\vec{x}|)$ e $K_1(z)$ as funções de Bessel modificadas de 2º-tipo e de ordens 0 e 1, respectivamente, e $m|\vec{x}| > 0$. Tal integral pode ser encontrada, por exemplo, na Ref.[21] (página 419, eq. 3.754-2).

to de MCS é um objeto mais rico que uma carga elétrica usual: juntamente com o campo elétrico (massivo) ela também produz um ‘tubo’ (na verdade, uma seção planar perpendicular a ele) de fluxo de campo magnético: um vórtice (topológico) magnético, de largura m^{-1} e intensidade q/m (necessitando que, fisicamente, m seja suficientemente grande). Segue-se, tamb’em, do fato de $B \neq 0$ a curtas distâncias a possibilidade para a estatística fracionária exibida por tais ‘cargas’ (veja Refs. [14, 15]).

No entanto, dado que agora temos $B \neq 0$, poder-se-ia indagar sobre a emissão de radiação eletromagnética por tais ‘cargas’, mesmo a nível estático, dado que o vetor de Poynting seja, agora, não-nulo, $\vec{S}^*(x) = B(x)\vec{E}^*(x) \neq 0$, a distâncias finitas. A resposta é negativa! De fato, pode-se ver, facilmente, que ao tomarmos $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}^*$, tal quantidade anula-se, identicamente. Tal nulidade segue-se devido à operação-* atuando em \vec{E} . A mesma verificação se dá para o caso de movimento uniforme, $v = cte$. Portanto, assim como no caso sem massa (tanto em (2+1) quanto em (3+1) dimensões, como bem sabemos) também aqui, o fenômeno de radiação devido às cargas deva estar intimamente relacionada à aceleração das mesmas.

Antes de passarmos à questão de como os sinais eletromagnéticos se propagam neste novo contexto, vamos discutir como o sinal do parâmetro de massa, $m > 0$ ou $m < 0$, alteraria os potenciais e campos. Primeiramente, devemos lembrar que as funções $K_0(z)$ e $K_1(z)$ não são matematicamente bem definidas sob $z \rightarrow -z$. Assim, devemos remeter-nos às expressões gerais, eqs. (2.3) e (2.5). Claramente, nota-se que G^{mass} é invariante sob $m \rightarrow -m$, de forma que o único efeito do sinal da massa virá do fator m/m^2 . Além do mais, dado que no caso estático a corrente lê-se $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (q\delta^2(y), \vec{0})$, obtém-se que: Φ é *par* sob tal troca, já que $A^0 = \Phi(\vec{x}, t) = -\int G^{mass}\rho(y)dy$ (o que poderia ser diretamente obtido de (2.7) tomando-se K_0 como sendo uma função *par*); já as componentes espaciais, A^i , são *ímpares*, uma vez que $A^i(\vec{x}, t) = +\frac{m}{m^2}(G^{2+1} - G^{mass})\epsilon^{i0j}\partial_j\rho(y)$ (neste contexto, tomaríamos K_1 como sendo *ímpar*). Portanto, enquanto Φ é invariante sob $m \rightarrow -m$, A^i muda de sinal sob troca de “spin”. Similarmente, enquanto \vec{E} é par, B é ímpar sob tal mudança.

Do que fora exposto acima, podemos concluir que o sinal do parâmetro de massa (ou a polarização do ‘spin planar’) é relevante já a nível clássico. Tal sinal é particularmente relevante quando lidamos com a expressão para a força de Lorentz, $\mathcal{F}^\mu = qF^{\mu\nu}v_\nu$, pois seu setor espacial atua como $M\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + B\vec{v}^*)$, com $\vec{v}^* = (v_y\hat{x} - v_x\hat{y})$, donde vemos que o sinal do termo de Chern-Simons (implícito nas expressões para \vec{E} e B) determinaria o caráter ‘atrativo’ ou ‘repulsivo’ do escalar magnético. Tal caráter é sentido pela partícula (de massa M), devido ao acoplamento deste campo com sua velocidade.

A partir de agora, concentremos nossa atenção à propagação de sinais no contexto de Maxwell-Chern-Simons. Começaremos, pela análise do caso de um único pulso, que é produzido pela seguinte configuração: $\rho(\vec{y}, y^0) = q\delta^2(\vec{y})\delta(y^0)$. Os potenciais, num dado ponto $|\vec{x}| > 0$, são dados por ($t \geq |\vec{x}|$):

$$\Phi(\vec{x}, t) = +\frac{q}{2\pi} \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} A^i(\vec{x}, t) &= -\frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \epsilon^{ij} \partial_j \left(\frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \right) = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \epsilon^{ij} x_j \left(\frac{m \sin(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} + \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^3} \right), \end{aligned}$$

enquanto os campos lêem-se (note que o primeiro termo para \vec{E} é longitudinal, enquanto o segundo é transversal):

$$\begin{aligned} E^i(\vec{x}, t) &= \frac{q}{2\pi} \partial_i \left(\frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \right) + \frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \epsilon^{ij} \partial_i \partial_j \left(\frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \right) \\ &= +\frac{qx^i}{2\pi} \left[\frac{m \sin(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} + \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^3} \right] + \frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \frac{\epsilon^{ij} x_j t}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^3} \times \\ &\times \left[\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}) \left(m^2 - \frac{3}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} \right) + \frac{3m \sin(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} - \frac{3}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} \right] \\ B(\vec{x}, t) &= -\frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \nabla_x^2 \left(\frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \right) = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \frac{1}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} \left[m \sin(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}) \left(2 + \frac{3|\vec{x}|^2}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \left(2 - m^2 |\vec{x}|^2 + \frac{3|\vec{x}|^2}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}} \left(1 + \frac{3|\vec{x}|^2}{(\sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})^2} \right) \Big].$$

Vê-se que, embora comportando-se de uma maneira diferente quando comparado ao caso de massa nula, o pulso é intenso para $t \gtrsim |\vec{x}|$, decaindo sua intensidade de uma maneira bastante característica, até anular-se, neste ponto $|\vec{x}|$, quando $t \rightarrow \infty$. Noutras palavras, a ‘cauda’ (temporal) desenvolvida pelo movimento do pulso é sentida neste ponto durante um longo tempo.

Já para o caso superposto, devido à configuração $\rho(\vec{y}, y^0) = q\delta^2(\vec{y})\Theta(y^0)$, é dado por ($t \geq |\vec{x}|$):

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int_{|\vec{x}|}^t \Phi(\vec{x}, \tau) d\tau = + \frac{q}{2\pi} \int_{|\vec{x}|}^t \frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} d\tau, \quad (2.10)$$

$$A^i(\vec{x}, t) = - \frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \epsilon^{ij} \int_{|\vec{x}|}^t \partial_j \left(\frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} \right),$$

para as componentes do potencial, e:

$$E^i(\vec{x}, t) = E_L^i + E_T^i = + \frac{q}{2\pi} \int_{|\vec{x}|}^t \partial^i \left(\frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} \right) d\tau + \\ + \frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \epsilon^{ij} \int_{|\vec{x}|}^t \partial_t \partial_j \left(\frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} \right) d\tau,$$

$$B(\vec{x}, t) = - \frac{q}{2\pi} \frac{m}{m^2} \int_{|\vec{x}|}^t \nabla^2 \left(\frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}) - 1}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} \right) d\tau,$$

para os campos.

Outra novidade que aparece devido à massa, é que a superposição de pulsos não pode ser, analiticamente, obtida para tempos finitos: realmente, as integrais acima só são conhecidas para $t \rightarrow \infty$. Neste caso, obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|}^t d\tau \frac{\cos(m\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2})}{\sqrt{\tau^2 - |\vec{x}|^2}} = K_0(m|\vec{x}|).$$

Tal resultado permite-nos resolver, neste limite, todas as integrais acima. Fazendo-se isto, obtemos, para todas as quantidades, seus valores estáticos, expressões (2.7) e (2.8). Por

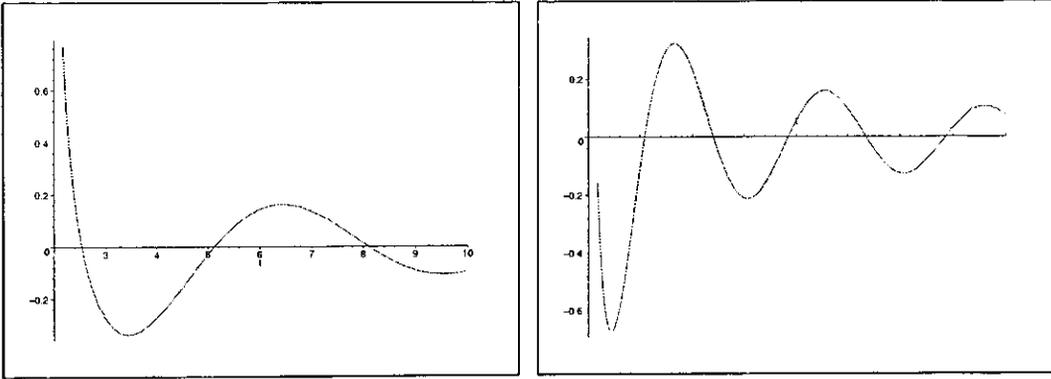


Figura 2.2: Ilustra o efeito do valor do parâmetro de massa sobre os sinais eletromagnéticos no ambiente de MCS. Nas figuras acima, tomamos $m = 1$ (à esquerda) e $m = 2$ (à direita) para o caso de um único sinal de $\Phi(t; x = 2, y = 0) X t$.

exemplo, no caso do campo elétrico, vê-se que somente sua componente longitudinal sobrevive quando $t \rightarrow 0$.

Além do mais, toda discussão desenvolvida no capítulo anterior que diz respeito à eletrodinâmica de uma distribuição de cargas, também aplica-se aqui, mas de modo ainda mais peculiar, dado as novas dificuldades impostas pelo termo de massa. [Uma ilustração do comportamento de um sinal frente a mudanças no valor de m é apresentado na Figura 2.2. Basicamente, seu valor está associado à oscilação do potencial produzido pelo sinal: quanto maior a massa, maior será a oscilação na coordenada temporal (horizontal)].

2.3 Conclusões Preliminares

Ao longo deste segundo capítulo, temos estudado alguns aspectos clássicos da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons. Particularmente, dedicamos atenção às questões da produção de radiação e de como sinais eletromagnéticos propagam-se neste âmbito. Quanto à uma lei tipo-Larmor para a potência irradiada, vimos que aqui, as dificuldades são ainda maiores que no caso sem massa. Já com relação à propagação de sinais, verificamos que fenômeno

semelhante ao caso de puro Maxwell também ocorre aqui: os pulsos eletromagnéticos se reverberam quando enviados de um ponto a outro do espaço-tempo (de modo ainda mais peculiar, devido ao caráter massivo da radiação).

Capítulo 3

Monopolos tipo-Dirac em (2+1) dimensões

Neste capítulo, vamos nos dedicar a outra questão interessante no âmbito de modelos eletrodinâmicos Abelianos definidos em (2+1) dimensões, que são os monopolos tipo-Dirac. Tal nomenclatura será justificada no decorrer do capítulo. De antemão, adiantamos que apesar de surgirem como os genuínos monopolos magnéticos de Dirac em (3+1)D através da quebra da identidade de Bianchi, a dimensionalidade espaço-temporal incorpora-lhes algumas diferenças fundamentais em relação aos últimos. Uma das diferenças interessantes é que, agora, tais objetos não podem mais ser tomados como puramente magnéticos, mas devem carregar também, uma componente elétrica. [De fato, o que mostraremos é que, o campo magnético é intrinsecamente tempo-dependente, indo a zero quando tomamos o limite estático para os campos]. Além do mais, neste limite, o campo elétrico apresenta-se como sendo tangencial. Tal campo requer, por sua vez, um potencial (escalar) não-central proporcional à “função-ângulo”: $\Phi(r, \varphi) \approx \varphi$, donde vê-se, claramente, a natureza topológica de tais objetos. Após discutirmos algumas de suas propriedades básicas, passaremos ao estudo de alguns sistemas físicos que contenham um representante de tais objetos interagindo com uma carga elétrica usual. Aí, serão analisados aspectos clássicos e quânticos de tal sistema, bem como, discutidas algumas dificuldades técnicas encontradas ao estudá-lo. Ao fim do capítulo, exporemos,

brevemente, os resultados nele obtidos.

3.1 Algumas propriedades básicas de tais monopolos

Começemos pela identidade de Bianchi, $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = \partial_t B - \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = 0$, escrita em termos do potencial A_μ :

$$\int_t dt \int_{xy} d^2x \left(\epsilon_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t} \right] A_j(\vec{x}, t) - \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \Phi(\vec{x}, t) \right) = 0; \quad (3.1)$$

que depende, *a priori*, das variáveis espaciais, x, y , e do tempo, t . Os comutadores que aparecem na expressão acima nos dizem que tal identidade será verificada sempre que Φ for uma função regular de x e y , bem como, \vec{A} for também regular, no espaço e no tempo. Desta forma, a introdução de um monopolo tipo-Dirac, através da ‘quebra’ de tal identidade, necessitará que o potencial A_μ possua uma forma não-regular¹. Noutras palavras, será justamente na singularidade exibida pelo potencial que residirá a possibilidade para o surgimento do monopolo tipo-Dirac[35]. Iniciemos a introdução de tal objeto, pela quebra da identidade em questão, da seguinte forma:

$$\int_t dt \int_{xy} d^2x \left(\epsilon_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t} \right] A_j(\vec{x}, t) - \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \Phi(\vec{x}, t) \right) = g \int_t \left(\int_{xy} d^2x \delta^2(\vec{x}) \right) \delta(t) dt. \quad (3.2)$$

Notemos que, devido à presença de $\delta(t)$, o monopolo acima é um ponto não no espaço, mas no espaço-tempo. Por outro lado, sabemos que o genuíno monopolo magnético de Dirac, de (3+1)D, apresenta-se como um ponto no 3D-espaço, desenvolvendo assim, uma linha-de-universo no espaço-tempo: sua 4-corrente. Tal diferença vem do fato de que, enquanto em (3+1)D a identidade de Bianchi é vetorial, $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, nos dando a Lei de Faraday e a Lei de Gauss magnetostática, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, em (2+1)D, tal identidade reduz-se a uma relação escalar, $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = \partial_t B - \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = 0$, a qual não admite que o monopolo produza, agora, uma corrente.

¹É justamente por esta razão que o chamaremos tipo-Dirac, haja visto que, em (3+1) dimensões os genuínos monopolos magnéticos são introduzidos, *à mão*, de forma idêntica, digo, através da quebra de tal identidade num ponto específico.

Segue daí que, a introdução de monopolos e correntes magnéticas como elementos restauradores da *dualidade* eletromagnética (em presença de cargas e correntes elétricas) só faz sentido em (3+1) dimensões, onde tanto $F_{\mu\nu}$ quanto seu dual, \tilde{F} , têm o mesmo ‘rank’. Desta forma, em (2+1)D, não é o monopolo, mas sua ‘*string*’ (que agora se reduz a um ponto espacial) é que terá a mesma dimensão de uma carga elétrica usual. Noutras palavras, a relação $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = g\delta^2(\vec{x})$ deve ser vista como uma equação de localização da “string”, e não do monopolo, propriamente dito. Discussões mais detalhadas sobre tal assunto, inclusive com generalizações para dimensões arbitrárias, podem ser encontradas nas Refs. [18, 36].

Embora a presença de tais objetos possa ser feito diretamente no modelo de Maxwell, o mesmo não acontece para o caso de Maxwell-Chern-Simons. Aqui, tal introdução não pode ser realizada de uma maneira tão direta, uma vez que, a invariância de gauge do modelo requer, necessariamente, que a identidade de Bianchi seja satisfeita, como já mencionamos anteriormente (veja 1ª nota-de-rodapé do Capítulo 2). Esta incompatibilidade pode ser contornada se admitirmos que o aparecimento do monopolo induza, por sua vez, uma *corrente elétrica extra*, que ao somar-se à original, restabelece a invariância acima citada. Noutras palavras, ao quebrarmos a identidade de Bianchi quebramos também a conservação da corrente elétrica original. Assim, esta nova componente surge para nos fornecer uma *corrente elétrica total* conservada (para mais detalhes, consulte a Ref. [18]).

Alternativamente, podemos considerar que a configuração de monopolo seja introduzida num “background” de matéria descrita pela corrente elétrica. Neste sentido, o estudo de um modelo com simetria Abelian tipo $U(1) \otimes U(1)$ definido em (3+1)D, com “linking” entre os fatores realizado através de um termo de massa topológico, mostrou que a presença consistente de monopolos magnéticos exigia uma condição de quantização na qual se fariam presentes, dentre outros, o parâmetro de massa [37].

Nesta linha de discussão, é mostrado na Ref.[18] que a presença de um monopolo tipo-Dirac no modelo MCS conduz à quantização do parâmetro de massa deste modelo (mais

precisamente, obtém-se que: $2mg^2 = 2\pi\hbar n$, onde $2mg$ é a *carga induzida* pelo monopolo e n é inteiro). Fato semelhante já era conhecido para teorias não-Abelianas (na ausência de tais monopolos) que apresentavam o 3º grupo de homotopia não-trivial [2], $\Pi_3(G) \neq \{0\}$ (sendo G o grupo de simetria interna).

Agora, voltemos à expressão (3.2). Primeiramente, observe que uma solução geral para o potencial A_μ (e daí, \vec{F}_μ) não é fácil de ser obtida no caso dinâmico, digo, tempo-dependente. Então, procuraremos soluções mais simples para tal relação. Escolhamos, por exemplo, as soluções no limite estático. Neste caso, (3.2) reduz-se a (em forma diferencial):

$$[\partial_x, \partial_y]\Phi_g(\vec{x}) = -g\delta^2(\vec{x}). \quad (3.3)$$

Note-se que, ao tomarmos o limite estático para o potencial, fatorizamos, automaticamente, a integral $\delta(t)dt$ no lado direito de (3.2). Ao fazermos isto, localizamos nosso objeto na origem espacial. Observe, no entanto, que tal objeto localizado é a ‘string’ do monopolo e não ele próprio. [Claramente, sua localização é arbitrária, podendo ser escolhido qualquer outro ponto (assim como acontece com a ‘string’ do monopolo de Dirac original)].

Retornemos, agora, à expressão (3.3). Basicamente, o que temos a fazer é obter uma ‘função’ (no sentido generalizado) que seja a inversa funcional do operador diferencial $[\partial_x, \partial_y]$. Se lembrarmos alguns resultados básicos sobre formas diferenciais, veremos que tal ‘função’ é justamente a “função-ângulo” definida no plano $x - y$, isto é:²

$$[\partial_x, \partial_y] \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi\delta(x)\delta(y). \quad (3.4)$$

²De fato, desenvolvendo-se $[\partial_x, \partial_y](\arctan(y/x))$, obtemos

$$[\partial_x, \partial_y](\arctan(y/x)) = \partial_x \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \partial_y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

o qual, é idêntico ao resultado obtido ao desenvolvermos $\vec{\nabla}^2 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \vec{\nabla}^2 \ln|\vec{r}|$. Daí, segue-se a relação (3.4).

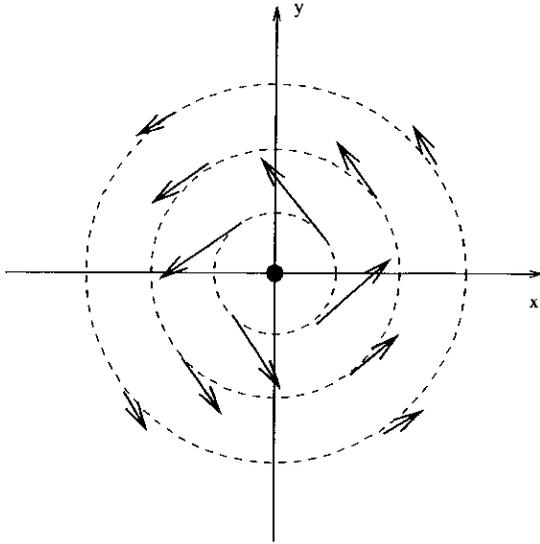


Figura 3.1: Mostra-nos a natureza tangencial, representada pelas flechas, do campo elétrico produzido por g (na origem).

Portanto, se tomarmos o potencial escalar como sendo (r, φ são definidas da maneira usual: $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$)

$$\Phi_g(x, y) = -\frac{g}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \implies \Phi_g(r, \varphi) = -\frac{g}{2\pi} \varphi, \quad (3.5)$$

a expressão (3.3) é satisfeita identicamente. O campo elétrico, por sua vez, lê-se:

$$\vec{E}_g(x, y) = +\frac{g}{2\pi} \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{x^2 + y^2} \implies \vec{E}_g(r, \varphi) = +\frac{g}{2\pi} \frac{\hat{e}_\varphi}{r}, \quad (3.6)$$

o qual apresenta uma propriedade bastante peculiar: seu caráter vetorial apresenta-se na direção tangencial e não na radial, como comumente encontramos.³ [Até onde vimos, este caráter tangencial, para campos devidos a objetos tipo-Dirac, ocorre somente em (2+1)

³Estritamente falando, tal campo elétrico não produz uma genuína força de Newton sobre outra carga (usual, ou peculiar), já que o próprio campo que a produz possui natureza tangencial. Além do mais, notemos que se tomarmos $\oint_C \vec{\nabla} \wedge q \vec{E}_g$, tal que o percurso C envolva g , então tal integral é não-nula. Tal fato implica, por sua vez, que estamos tratando de uma força de natureza não-conservativa. Na verdade, tal natureza é compartilhada também pela força magnética devida aos genuínos monopolos de Dirac das (3+1) dimensões. Assim, parece-nos que a característica não-conservativa está associada não exclusivamente aos monopolos das (2+1) dimensões, mas ao fato de tais forças advirem, em última análise, de potenciais com estrutura singular.

dimensões. Na figura 3.1 ilustramos tal peculiaridade]. É interessante notarmos que, um vórtice magnético puntiforme é caracterizado por um potencial vetor, \vec{A} , com estrutura idêntica a \vec{E}_g , digo, proporcional ao termo \hat{e}_φ/r . Assim, podemos identificar uma espécie de ‘dualidade’ entre estes objetos: o vórtice seria obtido do monopolo (mais precisamente, de sua “string”) pelo intercâmbio do campo elétrico e da carga deste pelo potencial vetor e o fluxo magnético do primeiro, respectivamente.

Como sabemos, a “função-ângulo” tem uma semi-reta de indefinição, quando considerada no plano. Noutras palavras, devido ao fato de não ser univocamente definida (“single-valued”), ela só pode ser globalmente definida no plano, se retirarmos dele um determinado *ramo*, como por exemplo, $[0, +\infty)$.⁴ Desta forma, já que o potencial escalar é escrito em termo de tal “função”, também ele sofreria de tal singularidade. No entanto, é fisicamente plausível considerá-lo como sendo unívoco, no seguinte sentido:

$$\Phi(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi + 2\pi n),$$

com n inteiro. Tal propriedade remove a singularidade discutida acima. No entanto, ainda permanece outra: quando $r \rightarrow 0$, o ângulo torna-se indefinido! Tal indefinição não pode ser removida apropriadamente. De fato, ela deve ser identificada como sendo a “string” do monopolo, assim como se faz com a linha de indefinição do potencial vetor no caso de genuínos monopolos magnéticos em (3+1) dimensões. Isto confirma o que havíamos falado anteriormente, com respeito ao limite estático da expressão $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = g\delta^2(\vec{x})$ ser uma equação que localiza a “string”, e não o monopolo.

Embora tal localização pareça afirmar que g seja puramente uma carga elétrica de natureza peculiar, devido ao fato de gerar apenas campo elétrico, devemos enfatizar que isto não é bem assim. O que ocorre é que, no caso estático, ao requerermos que a radiação emitida

⁴Para que pudéssemos considerá-la, genuinamente, uma função, ela deveria ser pensada como a parte imaginária da função logaritmo no contexto de superfícies de Riemann, onde ela tornar-se-ia unívoca. Por outro lado, pensada como uma 1-forma, tal “função” constitui-se no exemplo mais simples de uma 1-forma fechada que não é exata, $d^2\varphi \neq 0$.

seja nula, $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_g^* d^2x = \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_g^* B_g) d^2x = 0$, segue-se que o campo magnético emitido por g , B_g , também deve anular-se. [Note que tal requerimento, $B_g = 0$, está intimamente relacionado ao caráter tangencial de \vec{E}_g , uma vez que \vec{E}_g^* torna-se radial, e daí $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g^* \neq 0$].

Estas são algumas propriedades básicas de monopolos tipo-Dirac em (2+1) dimensões. A seguir, estudaremos algumas consequências físicas do campo elétrico produzido por tais objetos quando atuando numa carga elétrica usual, com movimento confinado a um plano.

3.2 O sistema carga-monopolo: estudo clássico

Com o intuito de estudarmos algumas propriedades do potencial (e do campo elétrico) gerado por g , quando atuando numa carga, consideremos um sistema simples, composto por uma carga elétrica, q de massa M , sujeita ao potencial escalar (ou melhor, a \vec{E}_g) estudado acima. As eqs. de movimento para a partícula carregada são facilmente obtidas, e lêem-se:⁵

$$\frac{2\pi M}{gq} \ddot{x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{and} \quad \frac{2\pi M}{gq} \ddot{y} = +\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (3.7)$$

ou, em coordenadas (r, φ) :

$$\frac{2\pi M}{gq} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{2\pi M}{gq} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 1. \quad (3.8)$$

Segue-se, imediatamente, por exemplo da eq. (3.8), que o ‘momento angular’ da partícula não é conservado, de fato, tem-se que $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = gq/2\pi M$. Isto já era esperado, haja visto que a carga está sob a ação de um potencial não-central. Como uma primeira consequência desta não-conservação, nota-se que o sistema apresenta-se extremamente acoplado, o que nos conduz a uma impossibilidade, até onde temos visto, na resolução analítica das eqs. de movimento acima. Assim sendo, maiores informações sobre o sistema demandará auxílio numérico. [Na Figura 3.2 é mostrada uma trajetória desta carga. Devido à ação do campo

⁵Relembremos a expressão para a força de Lorentz em (2+1) dimensões: $\mathcal{F}^\mu = qF^{\mu\nu}v_\nu$, onde $F^{\mu\nu}$ é o campo eletromagnético externo (particularmente aqui, com componentes \vec{E}_g e B_g) e v_ν é a velocidade (2+1)-dimensional da partícula. As componentes espaciais, por sua vez, tomam a forma: $M\vec{\ddot{r}} = q(\vec{E} + B\vec{v}^*)$, sendo $\vec{v}^* = v_y\hat{x} - v_x\hat{y} = v_\varphi\hat{e}_r - v_r\hat{e}_\varphi$ o dual da velocidade.

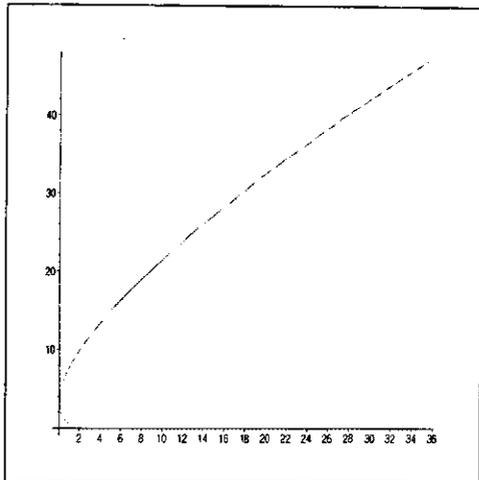


Figura 3.2: Trajetória típica, em coordenadas $x - y$, de uma carga elétrica sujeita somente ao campo elétrico tangencial. Aqui, escolhemos, $x(0) = 1$ e $y(0) = v_x(0) = v_y(0) = 0$, bem como, $qg/2\pi M = 1$.

elétrico tangencial ser repulsiva, vemos que a partícula é, rapidamente, expulsa da origem, onde se localiza a “string” do monopolo, g].

Um sistema ulterior, que merecerá um pouco mais de nossa atenção, é aquele no qual a carga q está, também, sob a ação de um campo magnético externo homogêneo, B_0 . Para ser mais claro, estamos pensando, agora, num sistema dinâmico planar composto por uma carga q (um elétron, por exemplo) sujeita àquele campo tangencial anterior, bem como, a um campo magnético perpendicular a este plano de movimento (passaremos a designar este novo sistema por qgB_0). A novidade é que, escolhendo-se o campo magnético de maneira apropriada, podemos ter mais controle sobre a ‘fuga’ da partícula. Neste sentido, é como se B_0 contribuísse com uma ‘força atrativa’, tendendo, ao contrário da força gerada por g , a dirigir q para a origem. Isto abre-nos, também, a possibilidade de estudarmos algumas características quânticas deste sistema, o que não era possível para o caso anterior: lá, a partícula não poderia apresentar estados ligados, pois sua energia cinética poderia crescer indefinidamente.

O estudo de sistemas quânticos com dinâmica planar, similares, sob certos aspectos, ao que ora apresentamos, têm-se mostrados relevantes, por exemplo, para uma melhor descrição de certos fenômenos físicos no âmbito da Matéria Condensada. Um exemplo, é dado pelo Efeito Hall Quântico (tanto Inteiro quanto Fracionário [4]). Diversos outros casos poderiam ser enumerados, como as tentativas de se entender determinados mecanismos no contexto da Supercondutividade a Altas Temperaturas (“High-Tc Superconductivity”) por meio de modelos de campos que possuam dinâmica planar [5, 6, 7].

Sistemas realísticos que apresentam tal dinâmica, podem ser obtidos a baixíssimas temperaturas (em torno ou abaixo de $1K$) e com campo magnético suficientemente intenso ($\geq 10T$) perpendicular a uma ‘lâmina’ muito fina, por exemplo, na interface entre dois semicondutores (sistemas estes, muito típicos no contexto experimental do Efeito Hall Quântico [38]). Dadas tais condições, o movimento dos elétrons se dá como se a terceira dimensão espacial (ditada pela direção do campo magnético) fosse ‘congelada’, e daí, justifica-se a expressão ‘dinâmica planar’. Tal campo magnético, por sua vez, pode ser realizado tomando-se um potencial vetor ‘confinado’ ao plano de movimento, como abaixo (o escolhemos como sendo $x - y$):

$$\vec{A} = \vec{A}_1 = B_0 x \hat{j}, \quad \vec{A} = \vec{A}_2 = -B_0 y \hat{i}, \quad (3.9)$$

(“gauges” de Landau) ou ainda (“gauge” simétrico)

$$\vec{A} = \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2} = \frac{B_0}{2} (x \hat{j} - y \hat{i}). \quad (3.10)$$

As equações de movimento para q neste novo contexto são modificadas em relação a (3.7-3.8), devido à presença do campo magnético. Agora, elas tomam as seguintes formas (eqs. em r, φ seguem-se imediatamente):

$$\frac{M}{q} \ddot{x} = -\frac{g}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + B_0 \dot{y} \quad \text{e} \quad \frac{M}{q} \ddot{y} = +\frac{g}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - B_0 \dot{x}, \quad (3.11)$$

Ou em termos de variáveis holomórficas: $\eta = x + iy$ e $\eta^* = x - iy$, obtemos:

$$2M(\ddot{\eta}\eta^* + \dot{\eta}\dot{\eta}^*) + iqB_0(\dot{\eta}\eta^* - \eta\dot{\eta}^*) = 0 \quad \text{e} \quad 4\pi M(\ddot{\eta}\eta^* + \dot{\eta}\dot{\eta}^*) + iqg \frac{(\dot{\eta}\eta^* - \eta\dot{\eta}^*)}{\eta\eta^*} = 0.$$

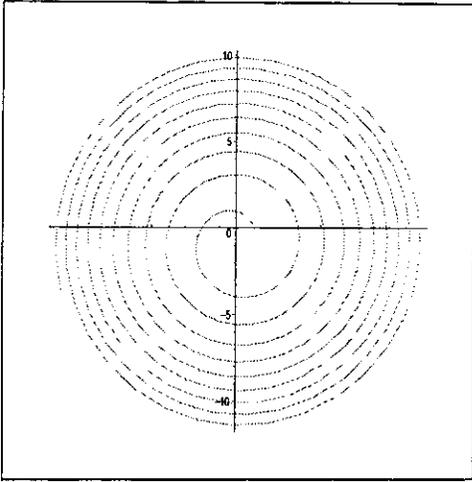


Figura 3.3: Aqui, é exibida uma trajetória típica, em coordenadas $x - y$, de uma carga elétrica sujeita à ação do campo elétrico tangencial, bem como, de um campo magnético homogêneo, perpendicular ao plano de órbita. Tomamos $x(0) = 1$ e $y(0) = v_x(0) = v_y(0) = 0$, bem como, $gq/2\pi M = qB_0/M = 1$.

Diversas tentativas foram feitas para se resolver as eqs. acima, mas nenhuma delas se mostraram frutíferas. Por outro lado, resoluções numéricas têm mostrado que o campo magnético ‘tende a compensar’ o efeito repulsivo de \vec{E}_g , de forma que, agora, a partícula escapa da origem mais lentamente. [Na Figura 3.3, é mostrada uma trajetória típica da carga para este caso]. Aí, observa-se que a partícula descreve um movimento tipo espiral e, ainda que escapando da origem, o faz de forma que dois ‘braços’ consecutivos de sua trajetória tendem a diminuir a distância entre eles à medida que se afastam da origem. Assintoticamente, para $r \rightarrow \infty$, parece-nos que a partícula tende a descrever uma órbita fechada. De fato, tomando-se $r \rightarrow \infty$ nas eqs. (3.11), vê-se que o sistema reduz-se àquele de uma carga num campo magnético, somente, cujas soluções levam a $[x(t) + y(t)]^2 = cte$, que seria uma órbita circular fechada. [Veremos, na próxima seção, que a nível quântico a dinâmica (em coordenadas r, φ) de tal partícula reduz-se, para grandes distâncias, àquela de um oscilador harmônico na coordenada radial, suplementado por um setor bastante interessante na componente angular].

Apesar de termos obtido apenas resultados numéricos, até o momento, há pelo menos

um analítico que emerge facilmente das eqs. diferenciais acima: em ambos os casos, $B = 0$ ou $B \neq 0$, a velocidade da carga q é limitada pelo valor do ângulo conforme a relação

$$(\vec{v})^2(t) = \frac{qg}{m\pi}\varphi(t) + (\vec{v}_0)^2. \quad (3.12)$$

Tal expressão impõe, então, um limite para a energia cinética da partícula (já que $T = M\vec{v}^2/2$). No entanto, devemos enfatizar que o número de voltas realizadas pela partícula em torno da origem deve ser levado em conta, ou seja, na expressão acima, $\varphi(t)$ (que por depender de t , dependerá, assim, das condições do problema em questão) mediria o ângulo total descrito por q . [Na seção que se segue, veremos que há um análogo quântico para tal relação (lá, obtida para grandes distâncias): os autovalores de energia, associados à coordenada angular variam quando a partícula realiza uma rotação completa, digo $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$].

3.3 O sistema qgB_0 quântico

Nesta seção, dedicar-nos-emos a uma análise quântica do sistema carga-monopolo-campo magnético no regime não-relativístico. Começaremos pela apresentação do Hamiltoniano para a carga q . A seguir, algumas de suas propriedades, como sua não-invariância sob rotações, serão discutidas. Passar-nos-emos, em seguida, ao estudo do problema de autovalor, o qual apresenta-se bastante complicado, justamente, devido ao fato do Hamiltoniano não comutar com o momento angular. No entanto, ainda que tal complicação não possa ser contornada em geral, pelo menos até onde temos tentado (veja, todavia Ref. [40]), o que se mostra facilmente, é que a grandes distâncias o Hamiltoniano apresenta-se separado em suas componentes dependentes de r e de φ somente, H_r e H_φ , respectivamente. Neste limite, por sua vez, vê-se que a dinâmica radial se reduz a de um oscilador harmônico central. Há, todavia, sua componente angular, H_φ , a qual, por não comutar com H_r , também contribui com autovalores (E_l^φ) para a energia total do sistema. Dentre outras propriedades, veremos que tais autovalores sentem, naturalmente, “shifts” da coordenada angular de uma maneira bastante peculiar: quando $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi l$, então $E_n^\varphi \rightarrow E_n^\varphi + \omega_c \hbar l / 2$, com l inteiro e $\omega_c = qB_0/m$

sendo a *frequência de cíclotron*.

O Hamiltoniano para o presente sistema é obtido de

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV$$

tomando-se \vec{A} dado por (3.9) ou (3.10), bem como, $V = \Phi(x, y) = -(g/2) \arctan(y/x)$.⁶ Para a análise que será desenvolvida aqui, particularmente, para facilitar a discussão a respeito da não-conservação do momento angular e algumas de suas consequências, será mais conveniente escrever o Hamiltoniano acima em coordenadas r, φ , assim como, \vec{A} no “gauge” simétrico, conforme abaixo:

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_r}{r} + \frac{(qB_0)^2 r^2}{4} \right] + \frac{1}{2m} \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{qB_0}{2m} p_\varphi - \frac{gq}{2\pi} \varphi, \quad (3.13)$$

com r e φ já definidos e $\vec{p} = p_r \hat{e}_r + \frac{p_\varphi}{r} \hat{e}_\varphi$, donde segue-se que $p_r \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$ e $p_\varphi \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Da expressão acima, vê-se claramente que H é explicitamente ângulo-dependente, e daí, variante sob rotações; reciprocamente, o operador de momento angular, $J = p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$, não é conservado, $[J, H] = +i\hbar gq/2\pi \neq 0$.

Embora outros Hamiltonianos não-centrais venham sendo estudados e mostrado-se relevantes em Física (veja, por exemplo [41]), uma diferença importante entre eles e aquele que ora é apresentado, é que este último não é *separável*. De fato, até onde temos visto e, independentemente do sistema de coordenadas utilizado, as equações dinâmicas apresentam um acoplamento bastante intrincado entre as variáveis, o que tem dificultado, em muito, nossas tentativas em resolvê-lo analiticamente para distâncias arbitrárias. [Talvez, algum sistema de coordenadas bastante particular, obtido através de transformações não-usuais, pudesse levar-nos a tal separação. Restaria saber se tais transformações seriam plausíveis, e se os resultados assim obtidos poderiam ser, de alguma maneira razoável, interpretados fisicamente].

⁶Notemos, de passagem, que este potencial permanece invariante sob transformações gerais de escala, $x \rightarrow f(x, y)x$ e $y \rightarrow f(x, y)y$, embora o mesmo não se passe com H , mesmo para escolhas mais simples de f .

Do Hamiltoniano (3.13) e das relações de comutação fundamentais:

$$[r, \varphi] = [p_r, p_\varphi] = 0 \quad \text{e} \quad [r, p_r] = [\varphi, p_\varphi] = +i\hbar,$$

fica claro que a não-separabilidade discutida acima aparece como consequência da não-conservação do momento angular. Por outro lado, este setor angular seria separável se ele apresentasse, por exemplo, a seguinte forma $(J^2 + aJ + b\varphi)/r^2$. Visto desta maneira, é a ausência do fator $1/r^2$ nos termos J e φ que nos impede de realizar tal separação de variáveis.

Portanto, encarando-se H como sendo intrinsecamente não-separável, o problema de autovalor, $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, apresenta-se de difícil resolução.⁷ Assim sendo, os métodos numéricos apresentam-se como um auxílio considerável em direção a tal resolução. Aqui, no entanto, vamos nos dedicar à tentativa de se obter alguns resultados analíticos para tal problema, ainda que estes tenham um domínio de validade restrito (quanto à distância, por exemplo) ou sejam bastante qualitativos. Assim, restringir-nos-emos aos limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Conforme veremos, em tais casos alguns resultados bastante interessantes podem ser obtidos. Além do mais, o conhecimento das formas das funções-de-onda nestes limites podem vir a ser bastante úteis, por exemplo, auxiliando métodos numéricos.

i) $r \rightarrow 0$: na seção precedente, vimos que, quando a carga q se aproxima da origem, ela experimenta uma força elétrica tangencial (e repulsiva) muito intensa. Portanto, já que, quando $r \rightarrow 0$ tal força diverge, então é de se esperar que q nunca possa atingir a origem (noutras palavras, colidir com a “string”, g). Neste sentido, a origem funciona como uma *obstrução topológica* à dinâmica de q . Desta forma, seu movimento dá-se no plano punturado, digo, $\mathcal{R}^2 - \{0\}$. Este fato nos conduz ao seguinte requerimento:

$$|\psi(r = 0, \varphi)\rangle \equiv 0, \tag{3.14}$$

⁷De fato, a presença dos termos proporcionais a φ e r (ou potências de r) impede-nos de obter uma solução analítica para o problema, por exemplo, em termos de funções hipergeométricas [42]. Isto não implica, de forma alguma que tal solução analítica não possa ser obtida por meio de outros tipos de funções ou métodos.

que seria o análogo planar do chamado ‘*veto de Dirac*’ para o caso de um elétron movendo-se no campo de um monopolo magnético no 3-espaco: o elétron nunca poderia interceptar a “string” associada ao monopolo [35].

Por outro lado, já que o requerimento acima só nos impõe condição sobre as funções-de-onda na origem, então deveríamos determinar como ele é alcançado, ou seja, quão rápido tais funções anulam-se quando $r \rightarrow 0$. Todavia, contrariamente ao que ocorre quando $r \rightarrow \infty$ (veja discussão abaixo), neste limite, o Hamiltoniano original não mais se apresenta separável. Isto acontece porque, a curtas distâncias, o termo que acopla as variáveis, p_φ^2/r^2 , é um daqueles que determinam a dinâmica total da partícula. Assim, até onde temos estudado, a resolução do problema em questão em torno da origem demanda a utilização de métodos numéricos (veja, no entanto, [40]).

Passemos-nos, agora, ao caso $r \rightarrow \infty$:

ii) $r \rightarrow \infty$: supondo-se que os momentos canônicos mantêm-se finitos neste limite, obtemos:

$$H(r, \varphi)_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{q^2 B_0^2 r^2}{4}) + \frac{q B_0}{2m} p_\varphi - \frac{gq}{2\pi} \varphi, \quad (3.15)$$

no qual as variáveis aparecem automaticamente separadas, digo, $H_{r \rightarrow \infty} = H_{r \rightarrow \infty}^r + H_{r \rightarrow \infty}^\varphi$. Portanto, neste limite temos que ($r \rightarrow \infty$ está implícito nas expressões a seguir):

$$(H|\psi(r, \varphi) \rangle) = (E_n|\psi(r, \varphi) \rangle) \implies (H^r + H^\varphi)|R(r)\chi(\varphi)\rangle = ((E^r + E^\varphi)|R\chi \rangle),$$

a qual nos conduz a:

$$H^r R_k(r) = E_k^r R_k(r) \quad \text{e} \quad H^\varphi \chi_l(\varphi) = E_l^\varphi \chi_l(\varphi),$$

que quando escritas na representação do espaço de configuração, dão-nos:

$$\hbar^2 \frac{d^2}{dr^2} R + (2mE^r - \frac{q^2 B_0^2 r^2}{4}) R = 0, \quad (3.16)$$

$$i\hbar \frac{d}{d\varphi} \chi + (\epsilon^\varphi + \beta\varphi) \chi = 0, \quad (3.17)$$

com $\beta = +mg/\pi B_0$ e $\epsilon^\varphi = 2mE^\varphi/qB_0$.

A primeira eq. acima é aquela que descreve a dinâmica de um oscilador harmônico central, cujas soluções podem ser escritas em termos de polinômios de Hermite, H_n , na forma:

$$R_k(u) = R_0 e^{-u^2/2} H_k(u),$$

com $u = qB_0/2r$ e k inteiro não-negativo, a priori. Os autovalores correspondentes lêem-se $E_k^r = \hbar\omega_c(k + 1/2)$, sendo $\omega_c = qB_0/m$ a *frequência de ciclotron*. No entanto, devido ao requerimento (3.14), somente os polinômios ímpares, digo k ímpar, passam a ser admissíveis. Daí, segue-se que o menor autovalor radial para a energia é não-nulo: $E_{min}^r = E_1^r = \hbar\omega_c$.

Já o setor angular, por sua vez, apresenta uma forma bastante peculiar. De fato, resolvendo-se a eq. (3.17) obtém-se as seguintes soluções

$$\chi_l(\varphi) = \chi_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\beta\varphi}{2} + \epsilon_l^\varphi \right) \varphi \right], \quad (3.18)$$

nas quais, além do fator usual na exponencial, proporcional a φ , aparece também, um fator tipo φ^2 . Como primeira observação, devemos enfatizar que tal termo não pode ser removido das soluções, por exemplo, por uma transformação de gauge. Ao contrário, pensamos que ele deva ser entendido como uma consequência natural da presença do potencial tipo- φ no Hamiltoniano em questão.

Observemos, também, que a função χ acima tem periodicidade igual a $2\pi(\beta\pi + \epsilon_l^\varphi)\hbar^{-1}$, ou seja, quando $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, então χ é suplementada por tal fator em sua fase. Daí, segue-se que, para que χ seja unívoca ("single-valued"), isto é, contínua, então devemos impor que:

$$2\pi(\beta\pi + \epsilon_l^\varphi) = 2\pi l\hbar \implies E_l^\varphi = E_0^\varphi + \frac{\omega_c}{2} l\hbar, \quad (3.19)$$

onde $E_0^\varphi = -gq/2$ e $\omega_c = qB_0/m$. Note que, E_0^φ é um valor clássico, digo, não há em sua definição a presença de \hbar . Embora ele apareça, naturalmente, quando tomamos $l = 0$ acima, sua origem não nos parece, até o momento, muito clara, justamente por ele ser uma

quantidade clássica, ditada pelos valores das cargas g e q , exclusivamente.

O parâmetro l , por sua vez, será identificado com o número de voltas que a carga q efetua em torno da origem (ou melhor, em torno de g), medindo assim, o ‘*ângulo total*’ descrito por q (por exemplo, no sentido anti-horário). Daí, segue-se que l deve ser tomado como um inteiro não-negativo (os negativos estariam, desta maneira, associados ao sentido horário).

Assim, a relação (3.19) acima pode ser interpretada como se os autovalores de energia associados à coordenada angular sentissem se o ângulo descrito pela carga q estaria entre 0 e 2π , 2π e 4π , e assim por diante. Noutras palavras, sempre que φ é variada de 2π , os autovalores associados a ela respondem a tal mudança, aumentando seus valores conforme (3.19). [Tal resultado pode ser entendido como a contrapartida quântica ao resultado clássico expresso pela eq. (3.12)]. Dada que esta interpretação seja plausível, então, E_0^φ pode ser, naturalmente, identificado com uma energia angular mínima, intrinsecamente associada à q . Mais precisamente, seria uma energia associada à primeira órbita angular (ainda incompleta, o que implica em $l = 0$) de q em torno de g , que não deveria, de fato, ser nula, haja visto o movimento sob o potencial angular desenvolvido por tal carga.

A este ponto, poderíamos ser tentados a aplicar o operador J nas funções $|\psi_{kl}\rangle$ acima, conforme segue-se:

$$J|\psi_{kl}\rangle = (\beta\varphi + \epsilon_l^\varphi)|\psi_{kl}\rangle = [\beta(\varphi - \pi) + l\hbar]|\psi_{kl}\rangle,$$

e daí, concluirmos que $|\psi_{kl}\rangle$ apresenta autovalores contínuos para o momento angular. Todavia, tal procedimento não é legítimo, uma vez que $|\psi_{kl}\rangle$ não são autofunções de J (lembremo-nos que $[H, J \neq 0]$). Realmente, temos visto que somente as componentes H_r e H_φ (para $r \rightarrow \infty$) podem ser, simultaneamente diagonalizados na base $\{|\psi_{kl}\rangle\}$.

Relembremos que os resultados obtidos acima são estritamente válidos somente para aqueles limites previamente especificados.

Numa primeira análise a respeito dos resultados obtidos nos casos limites acima, poderíamos ser levados a concluir que o sistema apresentasse estados ligados. Isto, porque além da partícula ser repelida da origem, vimos também que sua dinâmica assintótica reduz-se àquela de um oscilador harmônico central (cujas funções de onda decaem exponencialmente para grandes distâncias). Todavia, ainda que tais indícios sejam verdadeiros, a formação de tais estados ainda necessita ser formalmente demonstrada. Tal demonstração passará, necessariamente, pela resolução (senão analítica, pelo menos por uma detalhada análise numérica) do problema dinâmico em questão. [Neste sentido, o sistema ora apresentado, assemelha-se ao problema que considera uma fonte espalhadora (“scatter”) tipo δ -Dirac[43], em lugar de g . Sua resolução mostrou que, mesmo considerando-se tal potencial como sendo repulsivo, estados ligados podem ser formados⁸. Tal problema foi importante, por exemplo, no contexto do Efeito Hall Quântico].

3.4 Conclusões preliminares

Dedicamo-nos, ao longo deste capítulo, à questão dos monopolos tipo-Dirac nos modelos em estudo. Devido à dimensionalidade específica deste espaço-tempo, vimos que tais objetos apresentam diferenças marcantes quando comparados a seus correspondentes das (3+1) dimensões. Por exemplo, no limite estático, eles produzem apenas campo elétrico, com a peculiaridade de ter natureza tangencial. Estudamos, também, dois sistemas contendo um exemplar de tais monopolos. O primeiro, é composto por uma carga elétrica usual sob a ação do campo daquele. Já, no segundo, temos também, a presença de um campo magnético

⁸Para o caso de elétrons movendo-se apenas sob a ação de um campo magnético, mostra-se que a dinâmica quântica reduz-se àquela de um oscilador harmônico numa direção, digo x , enquanto na coordenada y , teríamos aquela de uma partícula livre. Daí, o porque de necessitarmos de um potencial (escalar) extra ao potencial \vec{A} para termos estados ligados. No entanto, no contexto de Teoria de Campos, duas espécies de férmions podem ser combinados num único espinor de 4 componentes de forma que, na presença de um campo magnético externo, condensados de férmions podem ser formados[44]. Todavia, tais condensados são muito sensíveis a efeitos térmicos, desaparecendo à temperatura finita [45].

externo homogêneo e perpendicular ao plano de movimento. Constatamos que a dinâmica, tanto clássica quanto quântica, de tal carga é de resolução bastante difícil, em ambos os sistemas, para o caso geral. De fato, somente a grandes distâncias é que foi possível obter alguns resultados analíticos para a dinâmica quântica do segundo dos sistemas acima. Aí, mostramos que devido ao fato do potencial ser ângulo-dependente, o setor angular do Hamiltoniano assintótico possui algumas propriedades interessantes, como por exemplo, a de contribuir para o espectro de energia. Vimos, também, que seus autovalores correspondentes respondem a variações discretas da coordenada angular. Além do mais, o espectro total de energia do sistema, neste limite de grandes distâncias, é tal que o estado de menor energia possua um valor intrinsecamente não-nulo. São levantadas, também, algumas questões relativas à formação de estados ligados em tal sistema.

Conclusões e Perspectivas

Vimos, ao longo do presente trabalho, que a *dimensionalidade-(2+1)* do espaço-tempo traz consigo diversos efeitos sobre uma teoria, quando esta é comparada a sua versão (3+1)-dimensional. Tal fato é ilustrado, explicitamente, pelo modelo de Maxwell, o qual exhibe, agora, algumas propriedades que não tínhamos em 4 dimensões, como por exemplo, a difusão de sinais eletromagnéticos e o problema referente à produção de radiação por cargas aceleradas (ponto este, que ainda carece de respostas satisfatórias). Além destes efeitos, de ordem mais dinâmica, a dimensionalidade acima referida produz, também, “mudanças” nas características geométricas de tal modelo, modificando, por exemplo, a estrutura da identidade de Bianchi. Dentre outros pontos, vê-se que os monopolos tipo-Dirac, agora introduzidos, possuem propriedades muito distintas de seus análogos das 4 dimensões. Embora tenhamos exemplificado os efeitos da dimensionalidade do espaço-tempo com este caso particular, o que se verifica é que, quadros semelhantes ocorrem com diversos outros modelos e em diferentes espaços-tempo.

Como perspectivas de continuação do trabalho ora apresentado, podemos mencionar os seguintes assuntos, aos quais pretendemos nos dedicar em futuro próximo. Inicialmente, como extensão natural de parte de nossos resultados (principalmente aqueles expostos nos Capítulos 1 e 2), um tema a ser abordado é a quantização da radiação eletromagnética livre em ambos os modelos. Na verdade, tal estudo está em progresso e resultados preliminares têm mostrado que o Princípio de Huyghens é violado, também, a nível quântico: basicamente, obtivemos que $[A_\mu(x^\alpha), A_\nu(y^\beta)]_{x^0 \neq y^0} \neq 0$ para todo intervalo que seja tipo-luz ou tipo-tempo, digo, $(x - y)^2 \geq 0$; (maiores detalhes aparecerão na Ref. [34]). Correlacionado

a isto, poderíamos estudar, também, como ficariam os coeficientes A e B de Einstein para as emissões espontânea e estimulada de radiação, seguindo-nos, por exemplo, pelo método desenvolvido por Dirac [39]. Dentre outras perguntas a serem respondidas, será que tais coeficientes sentiriam a dimensionalidade deste espaço-tempo e/ou algum efeito do termo de Chern-Simons?

Outra questão, refere-se à resolução analítica (ou, caso não seja possível, pelo menos uma detalhada análise numérica) da dinâmica quântica do sistema qgB_0 para distâncias arbitrárias. Neste sentido, iniciamos uma colaboração com o Prof. Peter Haberler (Universidade de Viena), o qual nos informou, em comunicação privada, que tal problema é passível de resolução analítica. Resultados concernentes a este assunto deverão aparecer na Ref.[40]. Tal resolução poderia conduzir-nos, dentre outros resultados, ao espectro de energia e às auto-funções correspondentes aos estados ligados. Ainda não nos parece claro, mas pode acontecer que tais resultados possam vir a ser relevantes, por exemplo, em conexão com algum problema de Matéria Condensada, por exemplo, em sistemas nos quais estes monopolos fossem considerados como impurezas.

Há, ainda, a questão da extensão dos resultados obtidos, referentes aos monopolos tipo-Dirac, para a versão não-Abeliana de tais modelos (neste caso, monopolos tipo- t' Hooft-Polyakov, conquanto que tenhamos um setor para a implementação do mecanismo de Higgs), tema este, aparentemente pouco explorado na literatura [36, 46].

Bibliografia

- [1] W. Siegel, Nucl. Phys. B156(1979)135; J. Schonfeld, Nucl. Phys. B185(1981)157. Algumas referências mais recentes são : R. Jackiw' Lectures Notes, em Proc. V Escola Jorge A. Swieca , Campos do Jordão, Brasil (SBF, 1989); G. Dunne, "*Aspects of Chern-Simons theory*", "Lectures given at Les Houches Summer School'98", disponível em hep-th/9902115; A. Lerda, "*Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*" (Lectures Notes in Physics, Springer International, Berlin, 1992); R. Iengo and K. Lechner, Phys. Rep. 213(1992)179.
- [2] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) 140(1982)372; Phys. Rev. Lett. 48(1982)975.
- [3] S. Weinberg, em "*Understanding the Constitutents of Matter*" (A. Zichichi eds., Plenum, NY, 1978); A. Linde, Rep. Prog. Phys. 42(1979)389; D. Gross, R. Pisarski and L. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53(1981)43.
- [4] A primeira descrição teórica para o caso Inteiro apareceu em R. Laughlin, Phys. Rev. B23(1981)5632; veja também: B. Halperin, Phys. Rev. B25(1982)2185. Já para o caso Fracionário, veja: R. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50(1983)1395; *ibid* Phys. Rev. B27(1983)3383. Referências adicionais podem ser consultadas em: K. Ishikawa, Phys. Rev. Lett. 53(1984)1615; Phys. Rev. D31(1985)1432; K. Ishikawa and T. Matsuyama, Nucl. Phys. B280[FS18](1987)523; T. Matsuyama, Prog. Th. Phys. 77(1987)711; Para referências mais recentes, consulte: H. Aoki, Rep. Progr. Phys 50(1987)655; R. Prange and S. Girvin, *The quantum Hall effect*, (Springer, NY, 1990); G. Morandi, "*Quantum Hall*

- Effect*", Bibliopolis, Naples (1988); ; A. Cabo and D. Oliva, Phys. Lett. A146(1990)75; S. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B6 (1992)25. Veja também A. Lerda e R. Iengo and K. Lechner, Ref.[1].
- [5] J. Bednorz and A. Müller, Z. Phys. B64(1986)89; A. Fetter, C. Hanna and R. Laughlin, Phys. Rev. B39(1989)9679; Y-H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. Halperin, Int. J. Mod. Phys. B3(1989)1001.
- [6] R. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 60(1988)2677; *ibid* Science 242(1988)525.
- [7] J. Bowick, D. Karabali and L. Wijewardhana, Nucl. Phys. B271(1986)417; S. Randjbar, A. Salam and J. Strathdee, Nucl. Phys. B340(1990)403; Int. J. Mod. Phys. B5(1991)845; N. Dorey and N. Mavromatos, Phys. Lett. B266(1991)163; Nucl. Phys. B386(1992)614; O. Del Cima, M. Andrade and J.A. Helayël-Neto, Il Nuovo Cimento 111A(1998)1145; O. Del Cima, Tese de Doutorado, CBPF (1997).
- [8] Veja, por exemplo, G. Morandi ou R. Prange and S. Girvin na Ref. [4].
- [9] Y-C. Kao and M. Suzuki, Phys. Rev. D31(1985)2137; M. Bernstein and T. Lee, Phys. Rev. D32(1985)1020; T. Lee, Phys. Lett. 171B(1986)247; S. Coleman and B. Hill, Phys. Lett. B159(1985)184.
- [10] J. Schwinger, Phys. Rev. 128(1962)2425.
- [11] A. Redlich, Phys. Rev. Lett. 52(1984)18.
- [12] S. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B193(1987)253.
- [13] J.L. Boldo, L.M. de Moraes and J.A. Helayël-Neto, Class. Quantum Gravity 17(2000)813; J.L. Boldo, N. Panza and J.A. Helayël-Neto, "*Propagating Torsion in 3D-Gravity and Dynamical Mass Generation*", hep-th/9905110 (submetido à Phys. Lett. B).
- [14] A. Linde, na Ref.[3]; R. Jackiw, Ann. Phys. 201(1990)83. Veja também A. Lerda e R. Iengo and K. Lechner, Ref. [1].

- [15] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48(1982)1144; *ibid* 49(1982)957; R. Jackiw and A. Redlich, Phys. Rev. Lett. 50(1983)555.
- [16] S. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B174 (1986)420; C. Kumar and A. Khare, Phys. Lett. B178(1986)395; H. de Vega and F. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. 56(1986)2564. Soluções de multi-vórtices no modelo de Chern-Simons-Higgs Abeliano apareceram em: J. Hong, Y. Kim and P. Pac, Phys. Rev. Lett. 64(1990)2230; R. Jackiw and E. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 64(1990)2234; enquanto o caso não-Abeliano apareceu em: L. Cugliandolo, G. Lozano, L. Manias and F. Schaposnik, Mod. Phys. Lett. A6 (1991)479.
- [17] B. Binengar, J. Math. Phys. 23(1982)1511. veja, também: J. Leinaas and J. Myrheim, II Nuovo Cim. 37B(1977)1; S. Deser and R. Jackiw, Phys. Lett. B263 (1991)431
- [18] M. Henneaux and C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. 56(1986)689.
- [19] Winder A. Moura-Melo and J.A. Helayël-Neto, “*Comments on Dirac-like Monopoles, Maxwell and Maxwell-Chern-Simons Electrodynamics in $D=(2+1)$* ”, hep-th/0004143 (Phys. Rev. D (2001), em fase de publicação).
- [20] R. Courant and D. Hilbert, “*Methods of Mathematical Physics*”, vol. 2 (Interscience Publishers, N.Y., 1962), veja, em particular, págs. 202-206 e 686-698.
- [21] I. Gradshteyn and R. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*” (Academic Press, Orlando, 1980).
- [22] R. Courant and D. Hilbert, na Ref. [20]. Veja os tópicos relacionados ao Princípio de Huyghens e propagação de sinais, em particular, as págs. 202-206, 695-698 e 760-766.
- [23] B. Baker and E. Copson, “*The Mathematical Theory of Huygens’ Principle*” (Oxford Univ. Press, London, 1953).
- [24] J.J. Giambiagi, Il Nuovo Cim. *Noti brevi* 104A (1991)1841; C. Bollini and J.J. Giambiagi, J. Math. Phys. 34(1993)610.
- [25] D. Barci, C. Bollini, L. Oxman and M. Rocca, Int. J. Theor. Phys. 37(1998)3015.

- [26] R. Amaral and E. Marino, J. Phys. A25(1992)5183.
- [27] E. Marino, Phys. Lett. B263(1991)63.
- [28] E. Marino, Nucl. Phys. B408(1993)[FS] 551.
- [29] A. Das, comunicação privada.
- [30] W. Pauli, “*Theory of Relativity*”, páginas 74-76 e 92-94, (Dover Edition, New York, 1981); A. Singal, Gen. Rel. Grav. 27(1995)953; *ibid* 29(1997)1371.
- [31] T. Fulton and F. Röhrlich, Ann. Phys. (NY) 9(1960)499; F. Röhrlich, “*Classical Charged Particles*” (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1965).
- [32] S. Parrot, Gen. Rel. Grav. 29(1997)1463.
- [33] L. Sokolowski, F. Occhionero, M. Litterio and L. Amendola, Ann. Phys. (NY) 225(1993)1.
- [34] W.A. Moura-Melo and J.A. Helayël-Neto, trabalho em progresso.
- [35] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London, A133(1931)60.
- [36] R. Pisarski, Phys. Rev. D34(1986)3851.
- [37] W. A. Moura-Melo, N. Panza and J.A. Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. A14 (1999)3949; *ibid*, em Proc. XVIII Braz. Nat. Meet. Particles and Fields (1997)146 (editado pela SBF); Winder A. Moura-Melo, Tese de Mestrado (CBPF, 1997).
- [38] Veja, por exemplo, H. Aoki, Ref. [4].
- [39] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. 114(1927)243; *ibid* 710.
- [40] Recentemente, o Professor Peter Haberler (Universidade de Viena) comunicou-nos que tal Hamiltoniano é passível de resolução analítica, pelo menos, no que se refere à obtenção de soluções particulares para as equações diferenciais acopladas em questão.

Resultados assim obtidos deverão ser futuramente publicados. P. Haberler, J.A. He-
layël-Neto and W.A. Moura-Melo, trabalho em progresso.

- [41] K.Fujikawa, Nucl. Phys. B484(1997)495; B. Mandal, “*Path Integral Solution of Non-central Potential*”, quant-ph/9906028. Veja também, Referências relevantes aí citadas.
- [42] A. Erdélyi *et al*, “*Higher Transcendental Functions*”, Vol. I (Bateman’ Project) Mc Graw-Hill (NY) (1953), págs. 232-237.
- [43] R. Prange, Phys. Rev. B23(1981)4802. Veja também o Capítulo 5 de G. Morandi, na Ref.[4], bem como, P. Giacconi and R. Soldati, J. Phys. A33(2000)5193.
- [44] K. Klimenko, Z. Phys. C54(1992)323; V. Gusynin, V. Miransky and I. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. 73(1994)3499.
- [45] A. Das and M. Hott, Phys. Rev. D53(1996)2252.
- [46] I. Affleck, J. Harvey, L. Palla and G. Semenoff, Nucl. Phys. B328(1989)575; J. Edelstein and F. Schaposnik, Nucl. Phys. B425(1994)137.

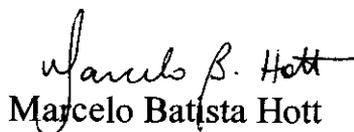
**“ASPECTOS PECULIARES DAS ELETRODINÂMICAS
DE MAXWELL E MAXWELL-CHERN-SIMONS
PLANARES”**

Winder Alexander de Moura Melo

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



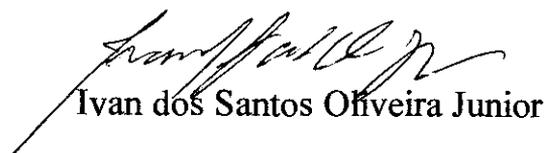
José Abdalla Helayël Neto – Presidente



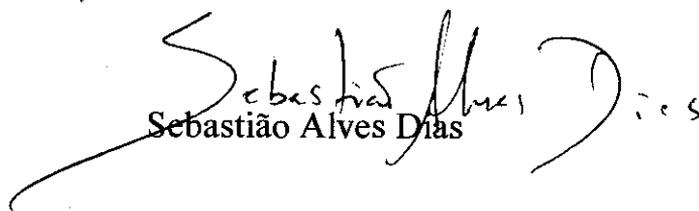
Marcelo Batista Hott



Sergio Martins de Souza



Ivan dos Santos Oliveira Junior



Sebastião Alves Dias

Rio de Janeiro, 02 de fevereiro de 2001