CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

NOVAS PROPOSTAS DE POTENCIAIS ESCALARES SUPERSIMÉTRICOS EM 2 DIMENSÕES

TESE DE MESTRADO

VALTER GOMES LIMA

RIO DE JANEIRO-RJ, DEZEMBRO DE 2001

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos

Alessandra de Castro Lima

Danielle de Castro Lima

Igor de Castro Lima

RESUMO

Apresentamos uma revisão breve do formalismo lagrangeano para um campo escalar real e da supersimetria em mecânica clássica e em mecânica quântica não-relativística. Partindo da teoria de campos bidimensionais (1+1 dimensões), no limite estático, encontramos uma equação diferencial de segunda ordem, formalmente análoga à equação de Schrödinger independente do tempo, cujos estados ligados são deduzidos. A partir da equação de estabilidade de um potencial não polinomial construimos um novo potencial solúvel exatamente em teoria de campos em 1+1 dimensões.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS

*Ao meu co-orientador, prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto, por sua orientação, pelos seus ensinamentos, sugestões, críticas, apoio e dedicação a este trabalho, que foram imprescindíveis para a realização desta tese, além de sua constante preocupação na formação de futuros mestres e doutores deste Centro.

*Ao prof. Rafael de Lima Rodrigues, meu orientador, que através de uma saudável convivência diária, aliada à sua paciência e sabedoria, me possibilitou escrever esta tese no tempo previsto e, principalmente, por ter indicado o tema e todas as referecências citadas nesta dissertação.

* Ao Prof. Anibal Caride pelo apoio e incentivos durante a realização deste mestrado.

* À Rosângela e Elizete, pela presteza e agradável convivência no CCP.

*À Sra. Myrian e aos demais funcionários da CFC pela atenção dispensada ao longo do Curso de Mestrado.

* Ao prof. Edison Luis da Graça por todas as discussões esclarecedoras, apoio e amizade.

* Ao prof. Dr. Alexander Smith, pelos seus ensinamentos de eletromagnetismo e mecânica estatística e as várias discussões sobre a importância da Física de Partículas e Campos.

* Ao prof. Cláudio Maia Porto por sua atenção dispensada a mim, na discussão de alguns resultados deste trabalho.

* Aos professores Rubens, Belvedere e Maria T. Tomaz, ambos do IF/UFF, por suas importantes discussões sobre os conceitos Físicos envolvidos nesta dissertação de mestrado.

* Ao prof. Edson pelo seu apoio à minha liberação, para a conclusão do mestrado.

* Aos amigos: Ernesto Sá Pinheiro, Marco A. dos Santos, Hugo dos Santos M. Pinheiro, Marco A. de Andrade, Ion Vancea, Lênin, Cresus, Cristine, Bernardino, Manoel, Gilmar, André, Guilherme, Wesley, Boldo e Leonardo.

* A Manuella Rodrigues, esposa do prof. Rafael, por ter colaborado parcialmente na digitação desta tese.

* A todos os funcionários da Biblioteca e CAT, que sempre estão prontos a nos ajudar.

INTRODUÇÃO

Nesta tese, apresentamos uma aplicação à teoria de campos [1,2] sob o ponto de vista clássico no espaço-tempo 2-dimensional da relatividade especial de Einstein. Consideramos somente o caso da teoria de campos governada por apenas um único campo escalar real, o qual descreve partículas bosônicas de carga elétrica nula. O campo escalar complexo que descreve partículas bosônicas carregadas não será investigado. Os objetivos principais são a construção de novos potenciais de campos escalares e a dedução de uma equação diferencial de segunda ordem, formalmente análoga à equação de Schrödinger independente do tempo (equação de Schrödinger para estados estacionários) e a análise das soluções solitônicas em teoria de campos no espaço-tempo bidimensional [(1+1)D] (uma dimensão espacial e uma temporal), ou seja, $\phi = \phi(x,t)$. Tais configurações podem ser topologicamente estáveis ou instáveis [3]. Em (1+1)D, as soluções estáticas, não singulares, classicamente estáveis e de energia finita $\phi_k(x)$, da equação de movimento são denominadas sólitons ou kinks [4–8]. Quando esse tipo de sóliton estiver em um setor topológico instável ele é camado de lump ou bounce. No entanto, não há uma única definição para sólitons, em geral, eles são soluções de equações diferenciais não lineares estáticas [9].

Para facilitar o entendimento desta dissertação por leitores de outras áreas de pesquisas Físicas, consideramos alguns detalhes de nossa aplicação.

Agora destacamos a motivação para se estudar teoria quântica de campos (TQC) em (1+1)D. Recentemente vem sendo bastante aplicado na Física conceitos e métodos de topologia. As considerações de natureza topológica ganharam notoriedade pela sua utilização na demonstração da existência e estabilidade de soluções clássicas de modelos de teoria de campos.

As configurações solitônicas, que recebem a denominação particular de kink quando utilizam-se modelos bidimensionais (espaço-tempo em 1+1 dimensões) são os objetos principais de investigação. Nesta tese, por comodidade, estamos usando o sistema de unidades natural bastante utilizado em teoria de campos, ou seja, $\hbar = c = 1$.

Um exemplo freqüentemente citado na literaura científica é o da existência de correntes topológicas em modelos (1+1)-dimensionais que se conservam independentemente das equações de movimento (equações de campo). Uma corrente desse tipo não é uma corrente de Noether usual*. De fato, a densidade de corrente e a densidade de carga está inserida no seguinte bivetor definido no espaço-tempo, em 1+1 dimensões:

$$j_T^{\mu} = (j^0, j_x) = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x), \quad (\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1, \mu, \nu = 0, 1), \tag{1}$$

onde $j^0 = \rho$ representa a densidade de carga e $j_1 = j_x$ representa a componente da densidade de corrente unidimensional, $\vec{j}$. Neste caso, vemos que a carga total associada seria:

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \dot{j}_T^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\varepsilon^{01}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_{|x=+\infty} - \phi_{|x=-\infty}. \tag{2}$$

Logo, a carga depende exclusivamente do comportamento assintótico da configuração estática $\phi(x)$, isto é, do valor do campo escalar estático $\phi(x)$ no infinito. Neste caso, vemos que se o potencial tem somente um estado de vácuo a carga topológica é nula e o respectivo setor será denominado de setor não topológico. Quando um potencial tiver mais de um estado de vácuo diz-se que o sistema possui uma topologia não trivial.

Sólitons são também muito importantes na investigação de equação de onda não-linear, como por exemplo, as equações de Korteweg-de Vries e a equação de Schrödinger não-linear [10].

Os modelos bidimensionais não são apenas um laboratório matemático e conceitual para a Física Teórica. Realmente, esses modelos são menos complexos do que os modelos de potenciais em 2+1 ou em 3+1 dimensões. Especificamente, consideramos o potencial de poço duplo, o qual possui dois estados de vácuo degenerados e uma simetria discreta. Para resolvermos a equação de movimento, no limite estático, usamos a condição de Bogomol'nyi, que transforma o problema de se resolver uma equação diferencial de segunda ordem em uma equação diferencial de primeira ordem [11]. Tais teorias de campos bidimensionais possuem

---

*Na seção 2.2 do capítulo 2, consideramos uma aplicação do teorema da Noether muitas aplicações. Uma delas refere-se a propriedade de condutividade em polímeros lineares como o poliacetileno [12]. As soluções solitônicas em geral ocorrem em modelos de potenciais com quebra espontânea de simetria.

Recentemente, em um trabalho realizado no CBPF, partindo dos potenciais hiperbólicos de Morse e de Scarf II foram construídos novos modelos de potenciais escalares em teorias de campos e indicaram o procedimento de correções quânticas da massa dos respectivos kinks [33].

Registramos também que o operador de flutuação aparece em Mecânica Estatística via o formalismo de integrais de trajetória de uma partícula em **D** dimensões [35].

Iniciamos esta dissertaçã de mestrado fazendo uma revisão dos vários aspectos da supersimetria em mecânica quântica não relativística [13,14].

Na primeira parte desta tese, construimos novos potenciais escalares via a supersimetria (SUSY) em mecânica clássica. Esta unifica as coordenadas bosônica $x(t)$ e fermiônica $\psi(t)$ em um superespaço caracterizado pela introdução de uma variável grassmanniana Θ não mensurável [17,18]. A descrição da mecânica clássica supersimétrica em termos de supercoordenada é baseada nas notas de aula do curso de supersimetria N=1 e N=2 do Prof. Helayel [19] e nos trabalhos do Prof. Rafael et al. [20–22]. Consideramos os casos da SUSY N=1 e N=2, investigando sob a ótica do tratamento clássico a SUSY N=1 e consideramos sob ambos pontos de vista clássico e quântico a SUSY N=2.

A conexão da supersimetria em mecânica quântica (SUSY MQ) [20,23] com os sólitons topológicos e não-topológicos em termos de potenciais escalares para o caso de um único campo escalar real tem sido abordado na literatura [24–29]. Esta conexão nos possibilou a construção de um novo potencial escalar não polinomial com configuração clássica estática exata [41].

Recentemente a SUSY QM tem sido destaque em livros-texto, abordando a conexão do método de fatorização em mecânica quântica na descrição de Schrödinger [30] e a SUSY MQ [31]. Utilizamos também um trabalho de revisão da SUSY MQ escrito pelo Prof. Rafael [32].

Esta tese está organizada da seguinte maneira: os capítulos 1 e 2 contêm alguns tópicos de revisões e novas propostas. No capítulo 1, consideramos uma introdução a supersimetria em mecânica quântica, abordando os conceitos de superespaço, supercoordenada, superação, superpotencial e a quebra espontânea da SUSY MQ. Neste capítulo, a construção de osciladores anarmônicos via a SUSY N=1 constitui uma nova abordagem [22]. No capítulo 2, resolvemos a equação de estabilidade para os modos normais associados ao kink do potencial de poço duplo, a qual é formalmente análoga à equação de Schrödinger [40], cuja relação com a supersimetria em mecânica quântica é analisada. No capítulo 3, investigamos uma equação de estabilidade que fornece um potencial contendo kink topológico e um potencial não-polinomial com uma configuração de campo estático não topológico. No capítulo 4, apresentamos nossas conclusões e as perspectivas futuras.

Capítulo 1

FORMULAÇÃO EM SUPERCOORDENADA PARA A MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA

Neste capítulo apresentamos uma introdução à supersimetria em mecância clássica (MC)e a supersimetria em mecânica quântica (MQ). Consideraremos a supersimetria numa forma mais simples, usando apenas um grau de liberdade.

Neste capítulo, faremos uma abordagem sobre as transformações no super-espaço, mostrando as leis de transformação infinitesimal da supercoordenada e de suas componentes (denominadas de coordenadas bosônica e fermiônica, no espaço-tempo 1-dimensional D=(0+1) = 1). Veremos que efetuando-se uma variação infinitesimal na coordenada bosônica, geramos a coordenada fermiônica e vice-versa. Esta abordagem é feita utilizando a regra da derivada à esquerda. Distinguiremos a propriedade da supersimetria em que a ação é invariante frente às transformações de translação no superespaço ($\delta S = 0$), notando que o mesmo não ocorre com a lagrangeana ($\delta L \neq 0$).

Na construção de uma teoria SUSY $N > 1$, denominada de SUSY estendida, para cada coordenada espacial comutante, representando os graus de liberdade do sistema, associamos uma coordenada de natureza anti-comutante, ou seja, usa-se várias variáveis anticomutantes, as quais são conhecidas como variáveis grassmannianas [15]. No entanto, construiremos somente a SUSY N=1 e SUSY N=2 para uma partícula não-relativística no espaço de configuração.

Recentemente foi considerado o caso da SUSY N=2, nos contextos da MC e da MQ, dando uma breve revisão do método de quantização com vínculos no superespaço [20]. As etapas a serem adotadas na construção da SUSY MC são as mesmas consideradas na supersimetrização de uma teoria quântica de campos nos espaços-tempo 4-dimensionais da relatividade especial (D = (3+1), três coordenadas de posição e uma coordenada temporal), (D = (2+1), duas coordenadas de posição e uma coordenada temporal) e (D = (1+1), uma coordenada de posição e uma coordenada temporal) [16]. Estamos nos referindo as seguintes etapas: superespaço, supertranslação, supercoordenada, derivada covariante SUSY e a super-ação. Em teoria de campos a SUSY N=1 é descrita pela associação de uma grandeza grassmanniana a cada quadrivetor de posição da partícula.

1.1 SUSY N=1 com Supercoordenada Comutante: partícula livre

A SUSY N=1 é descrita pela introdução de uma única variável grassmanniana real Θ, onde toda a dinâmica será colocada no tempo t. Neste caso, têm-se dois graus de liberdade. A coordenada generalizada comutante (grandeza bosônica) será representada por $x(t)$ e a coordenada generalizada anti-comutante (grandeza fermiônica) será representada por $\lambda(t)$. A nova coordenada real definida no superespaço será denominada de supercoordenada.

Investigaremos a superpartícula não relativística usando o formalismo lagrangeano no superespaço, evidenciando o fato de que a SUSY N=1 gera termos de potenciais de osciladores anarmônicos, para o caso em que envolve termos de potencial de interação de uma supercoordenada comutante com uma supercoordenada anticomutante [17–21].

Translação no Superespaço

Consideraremos a supersimetria N=1 com ambas variáveis comutante e anticomutante no superespaço

$$\rightarrow (t;\Theta), \quad \Theta^2 = 0,$$

onde t e Θ atuam, respectivamente, como elementos par e ímpar da álgebra de Grassmann. A coordenada anticomutante, Θ, parametrizará todos os pontos do superespaço, mas toda a dinâmica será colocada na coordenada temporal, t. A SUSY MC é gerada por uma transformação de translação no superespaço,

$$\begin{aligned} \Theta \rightarrow \Theta' &= \Theta + \epsilon \Rightarrow \delta\Theta = \Theta' - \Theta = \epsilon \\ t \rightarrow t' &= t + i\epsilon\Theta \Rightarrow \delta t = t' - t = i\epsilon\Theta, \end{aligned} \tag{3}$$

onde Θ e ϵ são variáveis grassmannianas reais,

$$[\Theta, \epsilon]_+ = \Theta\epsilon + \epsilon\Theta = 0 \Rightarrow (\Theta\epsilon)^* = (\epsilon^*\Theta^*) = (\epsilon\Theta) = -(\Theta\epsilon). \tag{4}$$

Esta operação asterisco do produto de duas variáveis grassmannianas (anticomutantes), nos assegura que tal produto é um imaginário puro e, por isso, coloca-se o $i = \sqrt{-1}$ em (3) para garantir caráter real do tempo. A SUSY é implementada de modo a deixar o elemento de linha invariante.

$$dt + i\Theta d\Theta = \text{invariante}, \tag{5}$$

onde introduz-se o i para tornar o elemento de linha real.

Supercoordenada Comutante

A supercoordenada para $N = 1$, é expandida em uma série de Taylor em termos das coordenadas par $x(t)$ e ímpar $\lambda(t)$

$$\phi \equiv \phi(t; \Theta) = x(t) + i\Theta\lambda(t). \tag{6}$$

Note que o primeiro termo é exatamente a coordenada ordinária real e comutante $x(t)$ e, como o próximo termo, deve ser linear em Θ, pois $\Theta^2 = 0$. Neste caso, a parte dependente do tempo multiplicando Θ é necessariamente uma variável grassmanniana $\lambda(t)$, o que requer a introdução do i para garantir que a supercoordenada $\phi(t; \Theta)$ seja real†.

Há a necessidade de definirmos a regra de derivação com respeito a uma variável grassmanniana, isto é, a derivada variacional de Grassmann. Aqui usaremos a regra de derivada à esquerda, ou seja, sendo $f(\Theta_1, \Theta_2)$ uma função de duas variáveis anticomutantes, a regra da derivada à esquerda é a seguinte:

$$\delta f = \delta\Theta_1 \frac{\partial f}{\partial \Theta_1} + \delta\Theta_2 \frac{\partial f}{\partial \Theta_2}, \tag{7}$$

onde $\delta\Theta_1$ e $\delta\Theta_2$ aparecem do lado esquerdo das derivadas parciais. Neste caso, temos:

$$\frac{\partial \Theta_1 \Theta_2}{\partial \Theta_1} = \Theta_2, \qquad \frac{\partial \Theta_2 \Theta_1}{\partial \Theta_1} = -\Theta_2. \tag{8}$$

---

†Conforme veremos mais adiante.

Uma transformação infinitesimal da supercoordenada que obedece à lei de transformação SUSY dada por (3) nos fornece

$$\delta\phi(t;\Theta) = \phi(t';\Theta') - \phi(t;\Theta) = (\partial_t\phi)\delta t + \delta\Theta(\partial_\Theta\phi) = i\epsilon\Theta\dot{x}(t) + i\epsilon\lambda(t), \tag{9}$$

onde usamos as variações dadas em (3). Por outro lado, fazendo uma variação infinitesimal de (6), isto é, $\delta\phi(t;\Theta) = \delta x(t) + i\Theta\delta\lambda(t)$, e comparando-a com(9), obtemos a seguinte lei de transformação SUSY para as componentes da supercoordenada:

$$\delta x(t) = i\epsilon\lambda(t), \qquad \delta\lambda(t) = \epsilon\dot{x}(t). \tag{10}$$

Isto nos assegura, que efetuando-se uma variação na componente par, obtém-se a componente ímpar e vice-versa, ou seja, a SUSY mistura as coordenadas par e ímpar. Note-se que a lei de transformação infinitesimal da SUSY pode ser escrita em termos da supercoordenada $\phi(t;\Theta)$,

$$\delta\phi(t;\Theta) = i\epsilon[Q, \phi(t;\Theta)]_- = i\epsilon Q\phi(t;\Theta), \qquad Q = -i\partial_\Theta + \Theta\partial_t, \tag{11}$$

onde $\partial_\Theta \equiv \frac{\partial}{\partial\Theta}$, $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$.

Portanto, toda a coordenada que satisfaz a equação (11) será interpretada como sendo uma supercoordenada. Note que se a igualdade não se verificar, ϕ não será uma supercoordenada. O operador diferencial Q, denominado de supercarga, é uma representação do gerador da translação no superespaço. De fato, uma translação finita pode ser obtida facilmente de (11), a qual tem uma forma análoga à translação no espaço ordinário,

$$\Lambda(\epsilon)\phi(t;\Theta)\Lambda^{-1}(\epsilon) = \phi(t';\Theta'), \qquad \Lambda(\epsilon) = \exp(\epsilon Q), \quad \Lambda^{-1}(\epsilon) = \Lambda(-\epsilon), \tag{12}$$

com o operador Q fazendo o papel semelhante ao operador de momento linear.

Derivada Covariante

Agora construiremos a derivada covariante (com respeito a Θ) que preserva a supersimetria da super-ação, isto é, veremos que a derivada em relação a Θ $(\partial_\Theta\Phi)$ não se transforma como uma supercoordenada. Logo, é necessário construir uma derivada covariante. A SUSY possui realmente uma característica bastante peculiar, pois como o parâmetro anticomutante ϵ é constante, vemos que a SUSY é uma simetria global. Em geral, são as simetrias locais que requerem uma derivada covariante. Por exemplo, a teoria de calibre $U(1)$ com simetria local requer derivadas covariantes. Mas, devido ao fato de que $\partial_\Theta \phi(t;\Theta)$ não é uma super-coordenada, a SUSY vai requerer uma derivada covariante para escrevermos a super-ação de modo consistente. Para se demonstrar este fato usa-se (11), de modo que:

$$\delta \partial_\Theta \phi(t;\Theta) = \partial_\Theta \delta \phi(t;\Theta) = -i\epsilon \dot{x}(t) \neq i\epsilon Q \partial_\Theta \phi(t;\Theta) = -i\epsilon \Theta \dot{\lambda}. \tag{13}$$

Por outro lado, fazendo-se uma variação infinitesimal da derivada parcial temporal obtém-se:

$$\delta \partial_t \phi(t;\Theta) = i\epsilon Q \partial_t \phi(t;\Theta). \tag{14}$$

Logo, conclui-se que $\partial_t \phi$ obedece à lei de transformação SUSY e, portanto, é uma supercoordenada. A derivada covariante da SUSY MC é construída de modo a satisfazer a anticomutatividade com Q, isto é, $[D_\Theta, Q]_+ = 0$. É fácil de se verificar que uma representação para a derivada covariante pode ser realizada por:

$$D_\Theta = \partial_\Theta - i\Theta\partial_t \Leftrightarrow \delta D_\Theta \phi(t;\Theta) = i\epsilon Q D_\Theta \phi(t;\Theta). \tag{15}$$

Outra propriedade interessante, que ocorre também quando se realiza o gerador da SUSY (Q) em termos de coordenadas espaciais ou representação de configuração, é o fato de que o anticomutador do operador Q com ele mesmo nos fornece a hamiltoniana SUSY:

$$[Q,Q]_+ = -2i\partial_t = -2H, \quad Q^2 = -H, \quad (SUSY)^2 \propto H, \tag{16}$$

ou seja, duas transformações SUSY sucessivas nos fornecem a hamiltoniana.

Antes de construirmos a lagrangeana da superpartícula, introduziremos as integrais de Berezin [15] para uma variável anticomutante:

$$\int d\Theta\Theta = 1 = \partial_\Theta \Theta, \qquad \int d\Theta = 0 = \partial_\Theta 1. \tag{17}$$

Agora estamos em condições de analisar a superpartícula livre em uma dimensão. Veremos que a SUSY é uma simetria da super-ação, mas não deixa a lagrangeana invariante.

Super-ação

Uma super-ação para a superpartícula livre pode ser escrita como uma integral dupla

$$\begin{aligned} S &= \frac{im}{2}\int\int dtd\Theta\dot{\phi}(D_\Theta\phi) \\ &= \frac{im}{2}\int\int dtd\Theta\{i\lambda\dot{x} + \Theta\lambda\dot{\lambda} - i\Theta\dot{x}^2\lambda(t)\} \\ &= \frac{im}{2}\int dt\{i\lambda(t)\dot{x}\int d\Theta + \lambda(t)\dot{\lambda}(t)\int d\Theta\Theta - i\dot{x}^2\int d\Theta\Theta\} \\ &\equiv \int dtL_c, \end{aligned} \tag{18}$$

onde m é a massa da partícula. Após integrarmos na variável Θ, obtém-se a seguinte lagrangeana da superpartícula:

$$L_c = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{im}{2}\lambda(t)\dot{\lambda}(t), \tag{19}$$

onde o primeiro termo é a energia cinética associada à coordenada par e o segundo termo é a energia cinética associada à coordenada ímpar, o qual é formalmente análogo ao termo cinético da densidade lagrangeana de Dirac em teoria de campos.

Note que a lagrangeana é não-invariante pois sua variação dá uma derivada total e, portanto, é não-nula, a qual pode ser obtida a partir do método das projeções, observando que a derivada covariante é igual a supercarga quando $\Theta = 0$, ou seja, $D_\Theta\mid_{\Theta=0}= Q_\Theta\mid_{\Theta=0}$:

$$\delta S = \frac{im}{2}\int dtd\Theta\delta\{\dot{\phi}(D_\Theta\phi)\} \Rightarrow \delta L = \frac{m}{2}\epsilon\frac{d}{dt}\dot{\phi}(D_\Theta\phi)_{|\Theta=0} = \frac{im}{2}\epsilon\frac{d}{dt}\{\lambda\dot{x}\} \neq 0. \tag{20}$$

Como a lagrangeana é uma derivada total, vemos que $\delta S = 0$, isto é, a super-ação é invariante frente a transformação SUSY N=1. Note que para a SUSY $N = 1$ e, dispondo de uma única coordenada comutante ϕ, não podemos introduzir um termo de potencial $V(\phi)$ na super-ação, por isso levaria a uma não invariância ($\delta S \neq 0$). Há também mais dois problemas de inconsistência [21]. Primeiro, salientamos que a super-ação S atua como um elemento par da álgebra de Grassmann, por isso qualquer termo adicional deverá ser um elemento par desta álgebra. De fato, analisando os termos presentes na super-ação, vemos que o elemento de linha tem um $d\Theta$ e um dt que são, respectivamente, ímpar e par. Como a supercoordenada é par, logo o potencial $V(\phi)$ também deve ser par, o qual atuando com o elemento de linha $dtd\Theta$ se torna ímpar, o que deixaria a super-ação como sendo ímpar e, por sua vez, isto não é admissível. O outro problema de inconsistência pode ser constatado através de uma análise dimensional. No sistema de unidade natural a super-ação deve ser adimensional. Em tal sistema de unidade, o tempo e a componente $x(t)$ (par) da supercoordenada têm dimensão de $[massa]^{-1}$, de modo que, a partir da supertranslação, vemos que Θ terá dimensão de $[massa]^{-\frac{1}{2}}$. Por conseguinte, a supercoordenada ϕ tem dimensão de $[massa]^{-1}$ e $\dot{\phi}$ é adimensional, por isso introduzindo o termo de potencial $V(\phi)$ obteríamos uma super-ação de dimensão inconsistente.

Em síntese, como a super-ação tem que ser par e o elemento de linha $dtd\theta$ posto na construção desta é ímpar, portanto, vemos que não é possível a introdução de uma energia potencial $V(\phi)$, pois tal termo de potencial levaria a uma super-ação de dimensão não consistente, ou seja, a super-ação se tornaria também ímpar. Portanto, quando tivermos uma única supercoordenada comutante ϕ, a SUSY N=1 existe somente para a superpartícula livre.

Devemos salientar que a super-ação sempre deve ser par, mas a lagrangeana eventualmente pode ser ímpar.

Agora, ainda no caso da SUSY N=1, vamos considerar duas supercoordenadas, uma comutante (par) e a outra anticomutante (ímpar), possibilitando a construção de um oscilador supersimétrico generalizado, contendo termos de potencial não-harmônico [22].

1.2 Supercoordenada Anticomutante: osciladores anarmônicos

Agora vamos introduzir uma supercoordenada anticomutante $\Psi(t;\Theta)$ em termos das componentes bosônica $q(t)$ e fermiônica $\psi(t)$ com SUSY N =1,

$$\Psi(t;\Theta) = \psi(t) + \Theta q(t) \Rightarrow \delta\Psi(t;\Theta) = \delta\psi(t) + \Theta\delta q(t), \tag{21}$$

onde $\Psi(t;\Theta)$ é a-number, Θ é a-number, $\psi(t)$ é a-number e $q(t)$-c-number.

Fazendo uma variação de $\Psi(t;\Theta)$, expandindo em série de Taylor, obtemos:

$$\delta\Psi(t;\Theta) = \Psi(t';\Theta') - \Psi(t;\Theta) = i\epsilon\Theta[\dot{\psi} + \Theta\dot{q}(t)] + \epsilon q(t) = i\epsilon\Theta\dot{\psi}(t)\epsilon q(t). \tag{22}$$

Comparando (21) com (22), obtemos a seguinte lei de transformação para as componentes da supercoordenada anticomutante:

$$\delta\psi(t) = \epsilon q(t), \qquad \delta q(t) = -\epsilon\dot{\psi}(t). \tag{23}$$

Note que a componente em Θ nos dá uma derivada total $\dot{\psi}$ ou $\dot{x}$.

De (21) e (22), vemos que a lei de transformação infinitesimal da SUSY pode ser escrita em termos da supercoordenada $\Psi(t;\Theta)$.

$$\delta\Psi(t;\Theta) = i\epsilon Q\Psi(t;\Theta), \qquad Q = (-i)(\partial_\Theta + i\Theta\partial_t), \qquad \partial_\Theta \equiv \frac{\partial}{\partial\Theta}, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}. \tag{24}$$

Observando a expressão (24) podemos notar que obtemos algo análogo a Eq. (11) e o gerador da SUSY N=1 é o mesmo para o caso da supercoordenada comutante.

Assim como no caso da supercoordenada comutante, a SUSY necessita de uma derivada covariante para escrevermos a super-ação de modo consistente. Note que:

$$\delta(\partial_\Theta\Psi) \neq \epsilon Q(\partial_\Theta\Psi). \tag{25}$$

Uma supercoordenada é um tensor em SUSY. Definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\equiv \phi(t;\Theta)\Psi(t;\Theta) = s(t) + \Theta\gamma(t) \\ s(t) &= x(t)\psi(t), \quad \gamma(t) = x(t)q(t) + i\lambda(t)\psi(t), \end{aligned} \tag{26}$$

onde $s(t)$ é a-number e $\gamma(t)$ é c-number, satisfazendo as seguintes transformação infinitesimal

$$\begin{aligned} \delta s &= \delta x\psi + x\delta\psi = \epsilon(xq + i\lambda\psi) \\ \delta\gamma(t) &= (\delta x)\psi + x\delta\psi + i(\delta\lambda)\psi \\ &= -i\epsilon\frac{d(x\psi)}{dt}, \end{aligned} \tag{27}$$

veremos, a seguir, que $\mathcal{S}$ será o integrando de uma super-ação correspondente a um termo de interação. Qual a lagrangeana da superpartícula em termos de uma supercoordenada anticomutante? Essa é a questão que abordaremos agora. O padrão de comportamento de uma transformação em SUSY, nos fornece como proposta na teoria a componente, em Θ, mais alta que é uma derivada total de alguma coisa, e a super-ação sendo a integral dessa derivada. Portanto, uma boa candidata a lagrangeana SUSY é sempre a componente mais alta da transformação da supercoordenada.

Dado uma supercoordenada comutante ϕ, então ϕ^2, ϕ^3, etc. serão também supercoordenadas. Se tomarmos suas derivadas com respeito as coordenadas do super-espaço serão supercoordenadas?

Como as supercoodenadas são tensores, devemos usar a lei de transformação para saber a resposta a esta questão.

$$\delta \partial_t \Psi = i\epsilon Q \partial_t \Psi. \tag{28}$$

Portanto, $\partial_t \Psi$ obedece à lei de transformação SUSY, logo, $\partial_t \Psi$ é uma supercoordenada. No entanto, $\partial_\Theta \Psi$ não obedece à lei de transformação SUSY (28).

Uma super-ação para a supercoordenada anticomutante pode ser escrita como,

$$S_a = \frac{im}{2} \int\int dt d\Theta \Psi (D_\Theta \Psi) = \frac{1}{2} \int\int dt d\Theta \frac{im}{2} [q\psi + \Theta(q^2 + i\psi\dot{\psi})] \equiv \int dt L_a \tag{29}$$

e após integrarmos na variável Θ, encontramos a seguinte lagrangeana:

$$L_a = \frac{1}{2}(q^2 + i\psi\dot{\psi}), \tag{30}$$

onde o primeiro termo nos assegura que não existe a energia cinética associada à coordenada par da supercoordenada anticomutante e o segundo termo é a energia cinética associada à coordenada ímpar, para uma partícula livre. Neste caso, dizemos que a coordenada par q não tem dinâmica. Veremos que ela nos permite obter termos de potenciais de osciladores e, por sua vez, é chamada de coordenada auxiliar.

Uma ação total envolvendo ambas supercoordenadas comutantante e anticomutante mais os termos de interação é possível para uma lagrangeana total, a saber,

$$L_T = L_c + L_a + L_{int}, \tag{31}$$

cuja ação total incluindo os termos de interação se dá por:

$$S_T = \int\int dtd\Theta \left(\frac{im}{2}\dot{\phi}D_\Theta\phi + \frac{im}{2}\Psi D_\theta\Psi - \sqrt{k}\phi\Psi\right). \tag{32}$$

Analisando o termo de interação,

$$S_{int} = \alpha\int\int dtd\Theta\phi\Psi, \tag{33}$$

através da análise dimensional vemos que a dimensão da constante α é dada por: $[\alpha] = (massa)^2$.

Portanto, a partir de (19), (30) e (33), obtemos a seguinte lagrangeana total:

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}m\lambda\dot{\lambda} + \frac{1}{2}(q^2 + i\psi\dot{\psi}) + \sqrt{k}xq + i\sqrt{k}\lambda\psi \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{i}{2}m\lambda\dot{\lambda} + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} + i\sqrt{k}\lambda\psi, \end{aligned} \tag{34}$$

onde $q = -\alpha x = -\sqrt{k}x$, o que será justificado devido ao fato de não existir termos envolvendo $\dot{q}$. Logo, q é uma coordenada sem dinâmica alguma. Neste caso, a equação de Euler-Lagrange para q nos permite, em geral, expressar q em termos de um polinômio para a coordenada par x. A equação de Euler-Lagrange, para a componente auxiliar q :

$$\frac{\partial L_T}{\partial q} = \frac{\partial L_c}{\partial q} + \frac{\partial L_a}{\partial q} + \frac{\partial L_{int}}{\partial q} = 0, \tag{35}$$

portanto,

$$q = -\alpha x. \tag{36}$$

A hamiltoniana canônica em termos das componentes das supercoordenadas seria dada por:

$$H_c = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \dot{\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) + \dot{\psi}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - L, \tag{37}$$

onde a partir da lagrangeana total, obtemos o momento canônico conjugado a componente x :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = -\frac{i}{2}m\lambda, \quad p_\psi = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2}\psi.$$

Na hamiltoniana acima temos termos cinéticos ligados a coordenada bosônica (x) e fermiônica (λ) e uma variável anticomuatante ψ. A parte de auto-interação bosônica nos fornece um termo de potencial quadrático e termos de potencial de quarta ordem em x, caracterizando um oscilador anarmônico.

Neste estágio, gostaríamos de registrar como obtemos a constante de acoplamento k. Na verdade, impondo que

$$\frac{\alpha^2 m^2}{2}x^2 = \frac{m^2 k}{2}x^2,$$

obtemos: $\alpha^2 = k$.

Sabemos que D_Θ satisfaz a regra de Leibniz, e sejam X_1 e X_2 supercoordenadas, tal que $X_1 X_2$, também é uma supercoordenada, então sua derivada será

$$D_\Theta(X_1 X_2) = D_\Theta(X_1)X_2 \pm X_1 D_\Theta(X_2), \tag{38}$$

onde o sinal será positivo se X_1 for c-number e negativo se X_1 for a-number.

Registramos também que a componente mais alta, em Θ, de qualquer supercoordenada, CS, satisfaz a seguinte variação: $\delta(SC) \sim \frac{d}{dt}(\cdots)$.

Agora consideraremos uma generalização do termo de interação da SUSY N=1, o qual será dado por um potencial em termos da supercoordenada

$$X(t;\Theta) = x(t) + i\Theta(t)\lambda(t) \equiv \phi(t;\Theta). \tag{39}$$

Um termo de interação seria dado por:

$$L_{intG} = g\phi^n\Psi = g[qx^n(t) + inx^{n-1}\lambda\psi], \tag{40}$$

onde g é a constante de acoplamento, $\phi^n = x^n(t) + inx^{n-1}\Theta\lambda$. Após utilizarmos a equação de movimento para a componente par de Ψ, obtemos $q = -\sqrt{k} - gx^n, \quad n \geq 2$. Note que na lagrangeana de interação acima temos o acoplamento da componente bosônica x com a componente fermiônica λ. Além do mais, para $n = 2$ obtemos o termo de potencial de um oscilador anarmônico com auto-interação de quarta ordem:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - g[\sqrt{k}x^3(t) + gx^4 + 2ix\lambda\psi]. \tag{41}$$

No entanto, podemos ter uma super-ação generalizada dada por:

$$S_G = \frac{im}{2}\int\int dt d\Theta[\dot{X}(D_\Theta X) + \frac{1}{2}\Psi D_\Theta \Psi + V(X)\Psi]_{|\Theta}. \tag{42}$$

Para efetivarmos os cálculos usando o método das projeções notamos que $d\Theta \sim \frac{\partial}{\partial\Theta}$ e $dt \neq \frac{\partial}{\partial t}$ e, por sua vez, obtemos:

$$\int\int dt d\Theta = \int dt \partial_\Theta = \int dt D_{|\Theta=0}.$$

Analisando o termo da supercoordenada comutante, temos:

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{im}{2}\int\int dt d\Theta \dot{X}(D_\Theta X)_{|\Theta=0} \\
&= \frac{im}{2}\int dt D_\Theta[\dot{X} D_\Theta X]_{|\Theta=0} \\
&= \frac{im}{2}\int dt[(D_\Theta \dot{X})(D_\Theta X) + \dot{X}(D^2_\Theta X)]_{|\Theta=0} \\
&= \int \left(\frac{im}{2}\dot{\lambda}\lambda + \frac{m}{2}\dot{x}^2\right) dt,
\end{aligned}$$

onde

$$D_\Theta X_{|\Theta=0} = \lambda, \quad D_\Theta X\dot{X}_{|\Theta=0} = \dot{\lambda}, \quad \dot{X}_{|\Theta=0} = \dot{x}, \quad D_\Theta \dot{X}_{|\Theta=0} = i\dot{\lambda}$$

e

$$D^2 X_{|\Theta=0} = -i\partial_t X_{|\Theta=0} = -i\dot{x}.$$

ii) Considerando a supercoordenada anticomutante dada por $\Psi = \psi(t) + \Theta A(t)$, temos:

$$\begin{aligned}
\int\int dt d\Theta \frac{1}{2}\Psi D_\Theta \Psi &= \int dt D_\Theta[\frac{1}{2}\Psi D_\Theta \Psi]_{|\Theta=0} \\
&= \int dt \frac{1}{2}[D_\Theta \Psi D_\Theta \Psi - \Psi D^2_\Theta \Psi]_{|\Theta=0}
\end{aligned}$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}A^2 + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi}\right) dt.$$

iii) Termo de interação:

$$\int\int dt d\Theta U(X)\Psi = \int dt D_\Theta [U(X)\Psi]_{|\Theta=0}$$
$$= \int dt [D_\Theta U(X)\Psi + U D_\Theta \Psi]_{|\Theta=0}$$
$$= \int (V'(X)\lambda\Psi + U(X)A),$$

onde

$$D_\Theta U_{|\Theta=0} = U'(X) D_\Theta X_{|\Theta=0} = iU'(x)\lambda, \quad D_\Theta \Psi_{|\Theta=0} = A.$$

A lagrangeana generalizada da SUSY N=1, torna-se:

$$\begin{aligned} L_G &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}A^2 + \frac{im}{2}\lambda\dot{\lambda} + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} + U(x)A + iU'(x)\lambda\psi \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}U^2(x) + \frac{i}{2}m\lambda\dot{\lambda} + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} + iU'(x)\lambda\psi, \end{aligned} \tag{43}$$

onde temos utilizado a equação de Euler-Lagrange, para eliminarmos a coordenada auxiliar $A = -U(x)$.

Para gerarmos o potencial de um oscilador armônico, basta considerarmos apenas o seguinte superpotencial linear: $U(x) = \mu + \alpha x$, o qual nos fornece a lagrangeana dada pela Eq. (34). Se for considerado um potencial $U(X) = \mu + \alpha X + \frac{\beta}{2}X^2$, podemos obter termos de potencial anarmônico, onde μ, α e β são constantes a serem ajustadas.

1.3 SUSY N=2 em Mecânica Clássica

Agora faremos uma breve revisão da supersimetria estendida para o caso $N = 2$ [20], cujo o elemento de linha é dado por

$$dt - i\Theta_1 d\Theta_1 - i\Theta_2 d\Theta_2 = \text{ invariante}, (\text{Jacobiano} = 1), \tag{44}$$

o qual é invariante sob as seguintes transformações de translação no super-espaço:

$$\Theta_1 \to \Theta_1' = \Theta_1 + \epsilon_1, \quad \Theta_2 \to \Theta_2' = \Theta_2 + \epsilon_2, \quad t \to t' = t + i\epsilon_1\Theta_1 + i\epsilon_2\Theta_2, \tag{45}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são grandezas anticomutantes (grassmannianas) e constantes reais.

As variáveis de Grassmann reais possuem as seguintes propriedades:

$$[\Theta_i, \Theta_j]_+ = \Theta_i\Theta_j + \Theta_j\Theta_i = 0 \Rightarrow (\Theta_1)^2 = 0 = (\Theta_2)^2. \tag{46}$$

É mais conveniente definirmos as coordenadas grassmannianas complexas Θ e $\bar{\Theta}$ (o conjugado complexo de Θ) em termos das variáveis anticomutantes reais, $\Theta_i (i = 1, 2)$ e os parâmetros (constantes) grassmannianos ϵ_i,

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_1 + i\Theta_2, \\ \bar{\Theta} &= \Theta_1 - i\Theta_2, \\ \epsilon &= \epsilon_1 + i\epsilon_2, \\ \bar{\epsilon} &= \epsilon_1 - i\epsilon_2, \end{aligned} \tag{47}$$

a transformação SUSY N=2 torna-se:

$$\begin{aligned} \Theta &\to \Theta' = \Theta + \epsilon \\ \bar{\Theta} &\to \bar{\Theta}' = \bar{\Theta} + \bar{\epsilon} \\ t &\to t' = t + i\bar{\epsilon}\Theta + i\epsilon\bar{\Theta}. \end{aligned} \tag{48}$$

Neste caso, obtêm-se as seguintes relações de anti-comutações:

$$[\partial_\Theta, \Theta]_+ = 1, \quad [\partial_{\bar{\Theta}}, \bar{\Theta}]_+ = 1, \quad \Theta^2 = 0. \tag{49}$$

A expansão de Taylor para a supercoordenada escalar real de natureza comutante, em termos de Θ e $\bar{\Theta}$, pode ser escrita como:

$$\Phi(t; \Theta, \bar{\Theta}) = x(t) + \Theta\lambda(t) - \bar{\Theta}\bar{\lambda} + \Theta\bar{\Theta}A(t). \tag{50}$$

Fazendo uma análise dimensional, obtemos:

$$[\Phi] = [x] = massa^{-1}, \quad [\lambda] = [\bar{\lambda}] = [\Theta] = massa^{-\frac{1}{2}},$$

$$[\Theta\bar{\Theta}] = massa^{-1}, \qquad [A] = 1.$$

Usando a regra de derivada a esquerda, obtemos a seguinte lei de transformação infinitesimal desta supercoordenada:

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \Phi(t';\Theta',\bar{\Theta}') - \Phi(t;\Theta,\bar{\Theta}) \\ &= \partial_t\Phi\delta t + \partial_\Theta\Phi\delta\Theta + \partial_{\bar{\Theta}}\Phi\delta\bar{\Theta} \\ &= (i\epsilon Q + i\bar{\epsilon}\bar{Q})\Phi, \end{aligned} \tag{51}$$

onde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ e os geradores da SUSY N=2,

$$\begin{aligned} Q &\equiv -i\partial_\Theta + \bar{\Theta}\partial_t \Rightarrow Q^2 = 0 \\ \bar{Q} &\equiv -i\partial_{\bar{\Theta}} + \Theta\partial_t \Rightarrow \bar{Q}^2 = 0 \\ \frac{1}{2}\ [\ Q, \bar{Q}]_+ &= -i\frac{\partial}{\partial t} = -H. \end{aligned} \tag{52}$$

Note que a supercarga $\bar{Q}$ não é o complexo conjugado da supercarga Q. Portanto, temos as leis de transformação para as componentes bosônicas (pares) $(x(t); A)$ e fermiônicas (ímpares) $(\lambda(t), \bar{\lambda}(t))$ dadas por:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \epsilon\lambda(t) - \bar{\epsilon}\bar{\lambda}(t) \\ \delta\lambda(t) &= -\bar{\epsilon}A(t) - i\bar{\epsilon}\dot{x}(t) \\ \delta\bar{\lambda}(t) &= \epsilon A(t) - i\epsilon\dot{x}(t) \\ \delta A &= i\epsilon\dot{\lambda}(t) + i\bar{\epsilon}\dot{\bar{\lambda}}(t), \end{aligned} \tag{53}$$

as quais misturam-se como no caso da SUSY N=1. Obtemos estas leis de transformação comparando a lei SUSY em sua forma infinitesimal, dada pela equação (51), com a variação $(\delta\Phi)$ obtida diretamente da supercoordenada.

Quais as derivadas covariantes da SUSY N=2? Para responder a essa questão devemos considerar de maneira análoga ao caso da SUSY N=1, que tais derivadas anticomutam com as supercargas. Portanto,

$$[D,Q]_+ = [D,\bar{Q}]_+ = 0 \Rightarrow D \equiv \partial_\Theta - i\bar{\Theta}\partial_t \tag{54}$$

$$[\bar{D},Q]_+ = [\bar{D},\bar{Q}]_+ = 0 \Rightarrow \bar{D} \equiv \partial_{\bar{\Theta}} + i\Theta\partial_t, \tag{55}$$

onde $\partial_{\bar{\Theta}} = \bar{\partial_\Theta}$. Os geradores das supertranslações satisfazem a seguinte álgebra:

$$[D,D]_+ = 2D = 0, \quad [\bar{D},\bar{D}]_+ = 0, \quad \frac{1}{2}[D,\bar{D}]_+ = -i\frac{\partial}{\partial t} = -H. \tag{56}$$

Agora podemos escrever a super-ação mais geral com SUSY N=2:

$$S[\Phi] = \int\int\int dt d\Theta d\bar{\Theta}\{\frac{1}{2}m(\bar{D}\Phi)(D\Phi) - U(\Phi)\}, \tag{57}$$

onde D é a derivada covariante e temos efetivado as integrais sobre as variáveis de Grassmann.

Agora expandimos o superpotencial em série de Taylor e mantemos até a primeira ordem em $\Theta\bar{\Theta}$ (porque somente estes termos irão contribuir nas integrais de Berezin):

$$\begin{aligned} U(\Phi) &= \Phi U'(\Phi) + \frac{\Phi^2}{2}U''(\Phi) + \cdots \\ &= A\Theta\bar{\Theta}U'(\Phi) + \frac{1}{2}\lambda\bar{\lambda}\bar{\Theta}\Theta U'' + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\lambda\Theta\bar{\Theta}U'' + \cdots \\ &= \Theta\bar{\Theta}\{-AU' + \bar{\lambda}\lambda U''\} + \cdots, \end{aligned} \tag{58}$$

onde as derivadas (U' e U'') são tomadas a $\Theta = 0 = \bar{\Theta}$. após efetuarmos as integrais de Berezin, obtemos:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mA^2 + +im\bar{\lambda}\dot{\lambda} + U''(x)\lambda\bar{\lambda} + U'(x)A\right), \tag{59}$$

A componente bosônica A não é uma variável dinâmica, podendo ser eliminada via a Eq. de movimento:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\partial_t A} - \frac{\partial L}{\partial A} = mA + U'(x) = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{m}U'(x). \tag{60}$$

Eliminando a coordenada auxiliar A, obtemos a segunte lagrangeana:

$$L_{SUSY N=2} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + im\bar{\lambda}\dot{\lambda} + U''(x)\lambda\bar{\lambda} - \frac{1}{2m}\left(U'(x)\right)^2. \tag{61}$$

Esta lagrangeana é a mesma obtida através da regra de derivada à direita [20]. Ela descreve uma partícula supersimétrica não-relativística, onde $x = x(t)$ é a variável bosônica, $\lambda = \lambda(t)$ é a variável fermiônica, $\bar{\lambda} = \lambda^\dagger$ e $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda(t)}{dt}$. Note que $\lambda, \bar{\lambda}$ e $\dot{\lambda}$ não são operadores, mas são variáveis clássicas fermiônicas satisfazendo à álgebra de Grassmann.

Escolhendo o superpotencial

$$U(\Phi) = \frac{1}{2}\alpha\Phi^2 \Rightarrow U(x) = U(\Phi)_{|\Theta=0} = \frac{1}{2}\alpha x^2 \Rightarrow U'(x) = \alpha x. \tag{62}$$

Lembrando-se que $U(x) = U(\Phi)_{|\Theta=0}$ não é um potencial físico, mas $U'(x)$ tem o característica física. Logo, a energia potencial é dada por:

$$V(x) = \frac{1}{2m}\left(U'(x)\right)^2 = \frac{k^2}{2}x^2, \quad k = \frac{\alpha}{\sqrt{m}}.$$

No termo $U''(x)\lambda\bar{\lambda}$, temos que $U''(x)$ faz o papel da massa Física do sistema. Realmante, o acoplamento de férmions aos bósons feita pelo termo $U''(x)\lambda\bar{\lambda}$, identifica $U''(x)$ como a constante de acoplamento, ou seja, a massa. Este resultado estende-se as teorias de campo e o potencial de Yukawa, acopla os férmions aos escalares através da segunda derivada do superpotencial. Assim, a segunda derivada é quem controla as massas fermiônicas, num modelo de matéria com SUSY (spin $\frac{1}{2}$ interagindo com Higgs).

A hamiltoniana canônica da SUSY N=2

$$H_c = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\lambda}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \lambda)} + \dot{\bar{\lambda}}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \bar{\lambda})} - L = \frac{1}{2}\left\{p^2 + \left(U'(x)\right)^2 + U''(x)[\bar{\lambda}, \lambda]_-\right\}, \tag{63}$$

nos leva ao modelo SUSY de Witten [20].

Como na SUSY N=1 e na SUSY N=2 temos vínculos, a quantização canônica pode ser implementada via o método de Dirac, o qual tem sido analisado na literatura [18,20,32].

1.4 SUSY N=2 em MQ: formulação matricial de Witten

As relações algébricas da supersimetria em mecânica quântica adquirem as seguintes formas:

$$Q_+^2 = Q_-^2 = 0, \qquad [Q_+, Q_-]_+ = H \tag{64}$$

$$[Q_\pm, H]_- = 0, \tag{65}$$

onde $Q_\pm$ são as supercargas e H o hamiltoniano supersimétrico. Realmente $[Q_\pm, H]_- = 0$ é uma consequência direta da primeira equação em (64) e expressa a invariância da supercarga, gerando a supersimetria. Na superálgebra de Lie são incorporadas as relações de comutação e anticomutação e de fato com um novo tipo de simetria denominada de supersimetria (SUSY), isto é, uma simetria que converte uma autofunção bosônica em uma autofunção fermiônica e vice-versa.

Definindo

$$A^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i p_x + W(x)) = (A^{\pm})^{\dagger}, \tag{66}$$

onde, $W = W(x)$, é chamado de superpotencial, é uma função arbitrária da coordenada de posição x e o momento canonicamente conjugado $p_x = -i\frac{d}{dx}$. Neste caso, obtemos o modelo SUSY de Witten [23,14], onde as supercargas

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

fornecem o hamiltoniano SUSY H matricial 2x2 dado por

$$\begin{aligned} H = [Q_+, Q_-]_+ &= \frac{1}{2}\left(p_x^2 + W^2(x) - \sigma_3 W'(x)\right) \\ &= \begin{pmatrix} A^+A^- & 0 \\ 0 & A^-A^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{68}$$

onde a linha em $W(x)$ significa a derivada em relação a x e σ_3 é a matriz diagonal de Pauli. Note que a super-hamiltoniana canônica dada pela Eq. (63) na versão quantizada é equivalente ao operador hamiltoniano supersimétrico dado pela Eq. (68), quando $W = U'$ e $[\bar{\lambda}, \lambda]_= - \sigma_3$. Esta discussão da quantização canônica tem sido considerada em [20,32].

Os companheiros SUSY são hamiltonianos de Schrödinger, os quais possuem as seguintes formas explícitas:

$$H_{-}= A^{+}A^{-} = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + W^2(x) + W'(x)\right)$$
$$H_{+}= A^{-}A^{+} = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + W^2(x) - W'(x)\right). \tag{69}$$

Justifica-se o termo superpotencial com a seguinte analogia: o termo quadrático, $W^2(x)$, na primeira Eq. (68), significa a interação bóson-bóson e o terceiro termo dessa Eq. significa a interação férmion-bóson.

Note que se escolhermos $W(x) = -\omega x$ obteríamos o modelo hamiltoniano do oscilador SUSY unidimensional.

A equação de autovalor para o hamiltoniano SUSY, torna-se:

$$H|\phi_{\pm}^{(n)} >= E_{SUSY}^{(n)}|\phi_{\pm}^{(n)} >, \tag{70}$$

onde

$$|\phi_{-}^{(n)} >= \begin{pmatrix} \psi_{-}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\phi_{+}^{(n)} >= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{+}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

As equações de autovalor para os companheiros SUSY são dadas por:

$$H_{\pm}\psi_{\pm}^{(n)} = E_{\pm}^{(n)}\psi_{\pm}^{(n)}. \tag{72}$$

Agora vamos considerar uma análise da quebra espontânea da SUSY. A partir da condição de aniquilação obtemos a autofunção do estado fundamental de H_{-}:

$$A^{-}\psi_{-}^{(0)} = 0 \Rightarrow \psi_{-}^{(0)} \propto exp\left(\int^{x} W(q)dq\right). \tag{73}$$

Logo, a autofunção do estado fundamental de H_{+} seria dada por

$$A^{+}\psi_{+}^{(0)} = 0 \Rightarrow \psi_{+}^{(0)} \propto exp\left(-\int^{x} W(q)dq\right) \propto \frac{1}{\psi^{(0)}{}_{-}}. \tag{74}$$

Note que

$$Q_{-}\psi_{-}^{(0)}\chi_{-} = 0, \qquad |\phi_{-}^{(0)} >\equiv \psi_{-}^{(0)}\chi_{-} \propto exp\left(\int^{x} W(q)dq\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

e

$$Q_+\psi_+^{(0)}\chi_+ = 0, \qquad |\phi_+^{(0)}>\equiv \psi_+^{(0)}\chi_+ \propto \exp\left(-\int^x W(q)dq\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

com $|\phi_- >$ e $|\phi_+ >$ de (75) e (76) sendo ambos aniquilados pelo hamiltoniano SUSY (68), com $Q_-\chi_+ = 0$ e $Q_+\chi_- = 0$.

Quando em modelos supersimétricos ocorrer a quebra espontânea da SUSY em mecânica quântica, o vácuo deixa de ser invariante SUSY, ou seja,

$$T(\epsilon,\bar{\epsilon})|\phi_-^{(0)}> \neq |\phi_-^{(0)}>, \quad T(\epsilon,\bar{\epsilon}) = e^{i(\bar{\epsilon}Q_- + Q_+\epsilon)}, \tag{77}$$

onde o operador unitário T atuando na autofunção do estado fundamental resulta em outra autofunção. Isto se dá precisamente quando $E_{SUSY}^{(0)} \neq 0$. Para um potencial que é uma função positiva dependente exclusivamente da posição da partícula, se pelo menos um mínimo estiver com valor zero o potencial não apresenta quebra espontânea de SUSY. Se ocorrer de somente uma das soluções $|\phi_- >$ ou $|\phi_+ >$ for normalizável, logo, o hamiltoniano SUSY (68) terá uma energia zero associado a respectiva solução normalizável. Neste caso, a SUSY é manifesta. Se as duas soluções $|\phi_- >$ e $|\phi_+ >$ não são normalizáveis, necessariamente, se busca outra solução normalizável associada a um autovalor de energia positivo, para o estado fundamental. Neste caso, teremos a quebra espontânea da SUSY.

Note que o comportamento assintótico do superpotencial nos garante se $|\phi_-^{(0)} >$ ou $|\phi_+^{(0)} >$, sejam normalizáveis. De fato, para que isso aconteça é necessário e suficiente a seguinte condição sobre a topologia do superpotencial:

$$\int_0^x W(y)dy \to -\infty, \quad x \to \pm\infty. \tag{78}$$

O nível de energia associado ao autoket do estado fundamental sempre será não-degenerado em modelos de Witten com SUSY manifesta. Este fato pode ser melhor entendido se observarmos que a partir das definições de $A^{\pm}$, obtém-se uma relação entre as soluções das seguintes condições de aniquilação $A^-\psi_-^{(0)}(x) = 0$ e $A^+\psi_+^{(0)}(x) = 0$:

$$\psi_-^{(0)}(x)\psi_+^{(0)}(x) = C, \tag{79}$$

onde C é uma constante real. Portanto, se a solução $\psi_-^{(0)}(x)$ for normalizável, então $\psi_+^{(0)}(x)$ será não normalizável e vice-versa [20,32].

Admitindo que $\psi_-^{(0)}(x)$ seja normalizável, temos o seguinte mapeamento entre as autofunções e os autovalores de energia:

$$\tilde{\psi}_-^{(n+1)}(x) \propto A^+\tilde{\psi}_+^{(n)}(x), \qquad \tilde{\psi}_-^{(0)}(x) = \psi_-^{(0)}(x), \quad E_-^{(n+1)} = E_+^{(n)}. \tag{80}$$

Se a solução $\psi_+^{(0)}(x)$ for normalizável, teríamos:

$$\tilde{\psi}_+^{(n+1)}(x) \propto A^-\tilde{\psi}_-^{(n)}(x), \qquad E_+^{(n+1)} = E_-^{(n)}. \tag{81}$$

A terceira possibilidade é ambas soluções das condições de aniquilação serem não normalizáveis, fornecendo um mapeamento completamente isoespectrais.

Finalizamos esta subseção da SUSY QM sobre a seguinte questão: qual a autofunção do primeiro estado excitado de H_-? A resposta está no mapeamento acima. Realmente, se $\psi_-^{(0)}(x)$ for normalizável podemos calcular a autofunção do primeiro estado excitado de H_- a partir do estado fundamental de H_+, ou seja,

$$\tilde{\psi}_-^{(1)}(x) \propto A^+\tilde{\psi}_+^{(0)}(x).$$

Note que $\tilde{\psi}_+^{(0)}(x) \neq \frac{1}{\psi_-^{(0)}(x)}$, ou seja, o operador A^+ não aniquila a autofunção do estado fundamental de H_+.

Uma aplicação bastante interessante da realização da álgebra graduada de Lie da supersimetria acontece quando analisamos a equação de estabilidade de configurações de campos estáticos em 2-dimensões [24,26,28], a qual será objeto de estudo no capítulo 3 desta tese.

Capítulo 2

CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTABILIDADE DE SÓLITONS EM 1+1 DIMENSÕES

Em teoria de campos bidimensionais, definimos o kink como uma solução estática, não singular e de energia finita da equação de movimento do campo.

A densidade lagrangeana $\mathcal{L}$ no espaço-tempo bidimensional (1+1)D para um campo escalar real $\phi = \phi(t, x)$, é dada por:

$$\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{82}$$

com $\mu = 0, 1$. Esta densidade de lagrangeana também pode ser escrita na forma não covariante, lembrando-se que temos uma soma nos índices repetidos:

$$\mathcal{L}\left(\phi, \dot{\phi}, \phi'\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 - \phi'^2\right) - V(\phi). \tag{83}$$

onde o ponto significa uma derivada parcial em relação ao tempo e o apóstrofo, derivada parcial em relação a coordenada de posição x.

A equação de movimento para o campo ϕ,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{d}{d\phi}V(\phi) = 0, \tag{84}$$

no limite estático ($\dot{\phi} = 0-$ derivada do campo em relação ao tempo é nula), torna-se:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{d\phi}V. \tag{85}$$

Esta equação diferencial de segunda ordem pode ser não-linear dependendo exclusivamente da forma do potencial. Desde que o potencial pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}U^2(\phi) \tag{86}$$

e multiplicando a Eq. (85) por ϕ', obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\phi'^2}{2} - \frac{U^2(\phi)}{2}\right] = 0, \tag{87}$$

onde estamos usando a regra da cadeia. Integrando esta equação, obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem denominada, na literatura, de condição de Bogomol'nyi para a energia mínima do kink (sinal negativo) ou anti-kink (sinal positivo), ou seja

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm U(\phi) = \pm\sqrt{2V(\phi)}. \tag{88}$$

Neste estágio, devemos destacar que a solução desta equação resolve também a equação de movimento que, no limite estático é uma equação diferencial de segunda ordem nas coordenadas de posição. Isso simplifica bastante as repectivas deduções do kink associado a certo potencial (1+1)-dimensional. Neste caso, ao invés de se resolver uma equação diferencial de segunda ordem resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem. Para verificar se a solução da equação diferencial de primeira ordem é também solução da equação de movimento, basta o derivar a condição de Bogomol'nyi em relação a x e, usando a regra da cadeia, restaurará a equação de movimento.

Integrando a condição de Bogomol'nyi, obtemos:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\tilde{\phi}}{U(\tilde{\phi})}, \tag{89}$$

onde x_0 será o centro do kink (sinal negativo) e do anti-kink (sinal positivo).

A seguir veremos que a SUSY MQ pode ser aplicada para a equação de estabilidade de sólitons em 1+1 dimensões.

2.1 Os Modos Normais do Kink do Modelo de Potencial de Poço Duplo

Considere a densidade de lagrangeana para um campo escalar real $\phi(x,t)$ em(1+1)-dimensões no sistema ($c = 1 = \hbar$), para o caso do potencial de poço duplo em (1+1)D, cujo potencial é dado por [4]:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow U(\phi) = \sqrt{\lambda}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right), \tag{90}$$

onde λ é um parâmetro real que é chamado de constante de acoplamento. O termo quadrático em ϕ, em geral, é interpretado como termo de massa ($V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ como, por exemplo, na lagrangeana de Klein-Gordon). Note, contudo, que o sinal desse termo, no potencial de poço duplo, é negativo. Portanto, a priori, m não pode ser encarado como massa, mas como parâmetro.

De acordo com o cálculo diferencial, para encontrarmos os valores de máximo e mínimo do potencial, devemos derivar $V(\phi)$ em relação a ϕ e igualar a zero, de modo que obtemos:

$$V'(\phi) = \frac{d}{d\phi}V(\phi) = 2\lambda\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)\phi = 0, \tag{91}$$

isto é,

$$\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \phi_{v_1} = +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \phi_{v_2} = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tag{92}$$

ou

$$\phi_{v_3} = 0. \tag{93}$$

Note que somente dois desses três valores para o vácuo do potencial de poço duplo são raizes da equação (90), isto é, $V(\phi_{v1}) = V(\phi_{v2}) = 0$. De fato em geral, o potencial se anula nos estados clássicos de menor energia, o que nos permite deduzir imediatamente os valores do campo no vácuo. A derivada segunda de $V(\phi)$ nos diz se os pontos encontrados são de máximo ou mínimo, então, derivando novamente em relação a ϕ, temos:

$$V''(\phi) = 6\phi^2\lambda - 2m^2. \tag{94}$$

Portanto, obtemos:

$$V''(\phi_{v_1}) > 0, \qquad V''(\phi_{v_2}) > 0 \qquad \text{e} \qquad V''(\phi_{v_3}) < 0. \tag{95}$$

Neste caso, a densidade de energia potencial tem dois mínimos degenerados, que são os estados de vácuo[‡], quando $\phi = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$. Por outro lado, como $V''(\phi_{v_3}) < 0$, então o potencial tem um máximo em $\phi = 0$. Note que, impondo $V(\phi) = 0$ obteríamos os estados de vácuos. De fato, em teoria de clássica de campos, o campo de menor energia é aquele que anula o potencial. Agora, estamos em condições de esboçarmos a curva da energia potencial, o qual está na figura I, no final deste trabalho.

[‡]Em teoria de campos, o estado de menor energia é denominado de vácuo.

O cálculo da solução solitônica. Substituindo o potencial de poço duplo (90) na condição de Bogomol'nyi (88), com a constante de acoplamento (λ) não nula, o kink (sinal positivo) ou o anti-kink (sinal negativo) pode ser explicitado da seguinte forma:

$$\phi_k(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} tgh[m(x-a)], \tag{96}$$

onde a é a constante de integração que representa o centro do kink, isto é, o kink é centrado no ponto $x = a$. Na teoria clássica, a pode ser feito igual a zero. O gráfico do kink está plotado na figura II, no final deste trabalho.

No modelo de potencial considerado aqui existem quatro setores topológicos, gerando dois espaços Γ_1 e Γ_2 contendo os estados de vácuos ϕ_1 e ϕ_2 e dois espaços Γ_3 e Γ_4 contendo o kink e o antikink. A união dos dois espaços $\{\Gamma_1 : \phi \to \phi_1$ quando $x \to \pm\infty\}$ U $\{\Gamma_2 : \phi \to \phi_2$ quando $x \to \pm\infty\}$ U $\{\Gamma_3 : \phi \to \phi_1$ quando $x \to \infty$ e $\phi \to \phi_2$ quando $x \to -\infty\}$ U $\{\Gamma_4 : \phi \to \phi_2$ quando $x \to \infty$ e $\phi \to \phi_1$ quando $x \to -\infty\}$, fornece o conjunto de todas as configurações de campos de energia finita em um tempo fixo. Realmente, assumindo que o kink está centrado na origem, isto é fazendo $a = 0$ na Eq.(96), a densidade de energia do kink do potencial de poço duplo

$$E(x) = \frac{1}{2}\phi_k'^2 + V(\phi_k) = \frac{m^4}{\lambda} sech^4(mx) \tag{97}$$

nos fornece uma energia finita e localizada, a massa do kink, também chamada de massa clássica da pseudopartícula:

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)dx = \frac{4m^3}{3\lambda}, \tag{98}$$

onde usamos a seguinte integral indefinida $\int sech^4(y)dy = tgh(y) - \frac{1}{3}tgh^3(y)$. Note que a massa do kink cresce indefinidamente quando λ se aproxima de zero. Logo, não podemos efetivar a teoria de perturbação na constante de acoplamento λ. O kink é, essencialmente, um fenômeno não-perturbativo. No entanto, a estabilidade clássica do kink está assegurada considerando pequenas perturbações ao redor da solução estática, cujo procedimento nos fornece o operador de flutuação, ou seja,

$$\phi(x,t) = \phi(x) + \eta(x,t), \tag{99}$$

onde $\phi(x)$ é a solução estática que representa o kink e $\eta(x,t)$ é uma flutuação em torno desta solução. Para linearizar a equação de movimento, a flutuação é considerada em ordem mais baixa, isto é, até a ordem linear. Assim, substituindo a equação (99) na equação de Euler-Lagrange, após expandirmos o potencial em série de Taylor até a primeira ordem em η, obtemos:

$$\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}|_{\phi(x)}\eta(x,t) = 0. \tag{100}$$

Sabemos que a solução clássica $\phi(x)$ é estática, o que nos permite escrever

$$G(x) \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}|_{\phi=\phi(x)}, \tag{101}$$

sem dependência explícita do tempo.

Agora, expandindo a flutuação em termos de modos normais, podemos reescrevê-la na forma

$$\eta(x,t) = \sum_n \epsilon_n \eta_n(x) e^{i\omega_n t}, \tag{102}$$

onde ϵ_n é escolhido de modo a deixar η_n real. Neste caso, obtemos:

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + G(x)\right\}\eta_n(x) = {\omega_n}^2\eta_n(x) \tag{103}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{O}_F\eta_n(x) &= {\omega_n}^2\eta_n(x) \\ \hat{O}_F &= -\frac{d^2}{dx^2} + G(x). \end{aligned} \tag{104}$$

Note que $\hat{O}_F$ é um operador de flutuação do tipo do hamiltoniano que aparece em mecânica quântica não-relativísitica. Devemos destacar que estamos fazendo uma abordagem clássica, mas obtemos os estados excitados governados formalmente por uma equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula no potencial $G(x)$.

Substituindo a expressão da solução kink dado pela Eq. (96), obtemos a energia potencial da pseudo-partícula,

$$G(x) = m^2[4 - 6sech^2(mx)], \tag{105}$$

a qual nos fornece a seguinte equação de flutuação:

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + m^2[4 - 6sech^2(mx)]\right\}\eta_n(x) = \omega_n^2\eta_n(x). \tag{106}$$

Na referência [40], encontramos uma equação de Schrödinger para uma energia potencial que generaliza o termo de potencial desta equação de estabilidade. Fazendo a mudança de variáveis $z = mx \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} = m^2\frac{d^2}{dz^2}$. Portanto, comparando a nova equação na nova variável deduzida de (106) com a equação diferencial de segunda ordem (12.3.22) da referência [40],

$$\left\{-\frac{d^2}{dz^2} + vcosh(2\mu) + vsenh(2\mu)tgh(z) - v\cosh^2(\mu)sech^2(z) - \epsilon\right\}\psi = 0, \tag{107}$$

obtemos as seguintes correspondências:

i) $\psi = \eta_n(x)$,

ii) $-\epsilon + v\cosh 2\mu = 4 - \frac{\omega_n^2}{m^2}$,

iii) $v\cosh^2(\mu) = 6$,

iv) $senh(2\mu) = 0$,

onde o lado esquerdo pertence à equação da referência [40] e o lado direito foi obtido de nossa equação.

Os autovalores (ϵ) da equação de Schrödinger da referência [40], página 1653, são dados por

$$\epsilon = v\cosh(2\mu) - \left[\sqrt{v\cosh^2(\mu) + \frac{1}{4}} - (n + \frac{1}{2})\right]^2 - \frac{v^2senh^2(2\mu)}{\left[\sqrt{v\cosh^2(\mu) + \frac{1}{4}} - (n + \frac{1}{2})\right]^2}, \tag{108}$$

onde $n = 0, 1, ..., < \left[\sqrt{v\cosh^2(\mu) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}vsenh(2\mu)}\right]$. Conseqüentemente os modos normais da equação de estabilidade do kink estão associados aos seguintes autovalores:

$$\omega_n^2 = \left\{4 - \left[\sqrt{6 + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}m^2, \tag{109}$$

onde $n = 0, 1, \cdots, < \sqrt{6+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} = 2$. Logo, temos somente dois estados ligados: o estado fundamental com o autovalor $\omega_0^2 = 0$ associado à autofunção normalizável $\eta_0(x) = c_0 sech^2(mx)$ e um estado excitado com o autovalor $\omega_1^2 = 3m^2$ associado à autofunção também normalizável $\eta_1(x) = c_1 senh(mx) sech^2(mx)$. Obviamente, notamos que os modos normais satisfazem a condição que garante a estabilidade linear do kink do potencial de poço duplo, a saber ${\omega_n}^2 \geq 0$.

As constantes de normalização são determinadas por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\eta_i^2 = 1, \quad (i = 0, 1) \Rightarrow c_0 = \left(\frac{\sqrt{3m}}{2}\right), \quad c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)^{1/2}.$$

Note que impomos a condição de normalização sobre as autofunções η_i, mas se essas integrais fossem divergentes as soluções da equação de estabilidade não seriam aceitas fisicamente.

Agora consideraremos a fatorização para o operador de flutuação em termos do produto de dois operadores diferenciais mutuamente adjuntos e construiremos o companheiro supersimétrico da técnica algébrica de supersimetria em mecânica quântica [23,20,32]. A equação de estabilidade acima, nos fornece um par de potenciais da SUSY QM:

$$\begin{aligned} V_-(x) &= W^2(x) + W'(x) = 2m^2\left[3tgh^2(mx) - 1\right] \\ V_+(x) &= W^2(x) - W'(x) = 2m^2\left[tgh^2(mx) + 1\right]. \end{aligned} \tag{110}$$

O superpotencial que satisfaz a ambas equações de Riccati acima é dado por

$$W(x) = -2mtgh(mx), \tag{111}$$

o qual fornece a seguinte autofunção do estado fundamental de $\hat{O}_{F-} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x)$ pertencente ao modo zero e no contexto da SUSY recebe a denominação de modo zero bosônico:

$$\eta_-^{(0)}(x) = e^{\int W(y)dy} \propto sech^2(mx) = \eta_0(x). \tag{112}$$

Além do mais, vemos que $V_-(x) = G(x)$. Observamos também que $\frac{1}{\eta_0(x)}$ é não normalizável e, por sua vez, o autovalor nulo $\omega_+ = 0$ não pertence ao companheiro SUSY de $\hat{O}_{F-}$. Note que a equação $\hat{O}_{F+}\eta_+ = \omega_+\eta_+$ tem autovalor contínuo.

2.2 A Condição de Energia Mínima do Kink

Considerando uma translação do quadrivetor posição, obtém-se a seguinte variação do campo escalar ϕ:

$$\delta\phi = \phi(x+\epsilon) - \phi(x) = \epsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi \tag{113}$$

onde expandimos $\phi(x+\epsilon)$ em série de Taylor. Analogamente, obtém-se:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{L}. \tag{114}$$

Note que usando o tensor-métrico podemos escrever esta variação em termos do quadrivetor infinitesimal covariante ϵ_{ν}, ou seja, $\delta\mathcal{L} = \epsilon_{\nu}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\mathcal{L}$, o que nos permite comparar com a equação da variação da densidade de lagrangeana. Portanto,

$$\partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \tag{115}$$

onde $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia simétrico pela troca dos índices, o qual é dado por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\partial^{\nu}\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{116}$$

Fazendo $\nu = 0$, obtemos:

$$\partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu 0} = 0, \tag{117}$$

onde

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \tag{118}$$

é a densidade de energia do campo ϕ. Logo, a equação (117) representa a conservação de energia contínua do campo, o que está de acordo com o teorema de Noether. No caso em 1+1 dimensões, a componente temporal do tensor densidade de momento-energia, torna-se: $\mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \phi'^2\right) + V(\phi)$. Para o potencial de poço duplo o tensor momento-energia, no limite estático, torna-se:

$$\mathcal{T}^{00}_{kink} = \frac{m^4}{\lambda} sech^4(mx) = E(x). \tag{119}$$

Sabemos que a energia total do kink é exatamente a integral da densidade de energia no limite estático. Agora vamos mostrar que esse valor da energia corresponde ao valor mínimo da energia de acordo com a condição de Bogomol'nyi. De fato, a energia total para o kink, no limite estático, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\phi'^2(x) + U^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{(\phi'(x) + U)^2 - 2\phi'(x)U\right\} dx. \end{aligned} \tag{120}$$

Portanto, a energia mínima acontece quando $\phi'(x) = -U$, que é exatamente a condição de energia mínima de Bogomol'nyi [11].

$$\begin{aligned} E_{min} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\phi'^2(x) + \frac{1}{2}U^2\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi' U dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\Gamma(\phi(x)) = T, \end{aligned} \tag{121}$$

onde

$$T = \Gamma_{|x\to\infty} - \Gamma_{|x\to-\infty}$$

e a função $\Gamma(x)$ satisfaz a seguinte condição:

$$\frac{d\Gamma}{d\phi} = U(\phi).$$

A função gama associada ao modelo de potencial de poço duplo é dada por:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{3}\phi^3 - \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}}\phi,$$

a qual representa o superpotencial de modelo supersimétrico em teoria de campos escalares com potência até a quarta ordem.

Em geral temos a seguinte inequação para energia total e a energia de Bogomol'nyi:

$$E \geq |T|.$$

Note que T é exatamente o valor da energia mínima que nesse caso coincide com a energia total pois a solução kink foi calculada usando a condição de Bogomol'nyi. Portanto, a carga topológica definida na introdução corresponde ao valor da energia mínima do kink. Neste caso, vemos também que a energia mínima depende somente do comportamento assintótico do kink em $\pm\infty$. Este fato caracteriza a configuração estática como um kink topológico ou defeito topológico. Realmente, o kink proporciona um defeito topológico, de acordo com a figura 2, ele interpola os dois estados de vácuo do potencial de poço duplo.

Por outro lado, fazendo $\mu = 0$ e $\nu = i$, obtém-se a lei de conservação da densidade de momento linear do campo. Num trabalho didático foi mostrado a relação entre o tensor de momento-energia métrico e o canônico [34].

Capítulo 3
EQUAÇÃO DE ESTABILIDADE E NOVOS POTENCIAIS

Até aqui vimos que a estabilidade clássica da solução estática é investigada considerando pequenas perturbações em torno dela e expandindo os termos de flutuações dos modos normais.

Neste capítulo, construimos novos potenciais a partir de um esquema em que um potencial isoespectral é inserido na equação de estabilidade. Consideramos o seguinte potencial não-polinomial

$$\begin{aligned} V(x;\alpha,\beta) &= m^2\left[3tgh^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)-1\right] \\ &+ 2m^2\beta\left\{sech^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\left[2tgh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)+\frac{\beta}{2}sech^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\chi\right]\chi\right\}, \\ \chi = \chi(x;\alpha,\beta) &= \left\{\alpha+\beta\left[tgh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)-\frac{1}{3}tgh^3\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\right]\right\}^{-1}, \end{aligned} \tag{122}$$

onde α e β são parâmetros constantes. Este potencial não polinominal na equação de estabilidade satisfaz a condição ${\omega_n}^2 \geq 0$, cujo o estado fundamental associado ao modo zero ($\omega_0^2 = 0$) é dado por

$$\eta^{(0)}(x;\alpha,\beta) = N\chi(x;\alpha,\beta))sech^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right), \tag{123}$$

onde N é a constante de normalização. Note que se $|\alpha| > \frac{2\beta}{3}$, esta autofunção do estado fundamental é não-singular. Este estado fundamental foi construído independentemente por dois autores [24,28], quando $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3m}{\sqrt{2}}}$. Esta autofunção bosônica será o modo zero da equação de estabilidade, a qual é relacionada com as configurações estáticas por

$$\eta^{(0)}(x;\alpha,\beta) = \frac{d}{dx}\phi_c(x). \tag{124}$$

Deste modo, a priori, encontramos a configuração clássica estática pela primeira integração. Assim, de acordo com a condição de Bogomol'nyi

$$V(\phi;\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\eta^{(0)}(x(\phi);\alpha,\beta)\right)^2, \tag{125}$$

podemos construir uma classe de potenciais escalares $V(\phi) = V(\phi;\alpha,\beta)$ que possuem soluções exatas.

Realmente, neste capítulo, podemos encontrar várias configurações estáticas de campo, porém consideramos, aqui, somente dois casos:

Caso (i): $\beta = 0$ e $\alpha = 2N\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3m}}$

Neste caso, $\chi(x) \to \frac{1}{\alpha}$, assim de acordo com as Eqs. (122), (123), (124) e (125) obtemos, de imediato, a autofunção do operador bosônico associada ao modo zero:

$$\eta_{1-}^{(0)}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3m}{\sqrt{2}}}sech^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right), \tag{126}$$

para o seguinte potencial

$$V_{1-}(x) = m^2\left[3tgh^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right]. \tag{127}$$

Observe que os dois operadores de flutuação tipo-Schrödinger associados com potenciais não polinominais positivos semi-definidos ($V(x;\alpha,\beta)$ e $V_{1-}(x)$) são completamente isoespectrais. Entretanto, suas fatorizações tem sido implementada para superpotenciais distintos. De fato ao mesmo tempo, em que a equação de Riccati

$$V_{1-}(x) = W_1^2(x) + W_1'(x), \quad W_1'(x) = \frac{d}{dx}W(x), \tag{128}$$

tem uma solução particular dada por

$$W_1(x) = -\sqrt{2}mtgh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right), \tag{129}$$

gerando

$$\eta_{1-}^{(0)}(x) = e^{\int W_1(y)dy} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3m}{\sqrt{2}}}sech^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right),$$

dado pela equação (126), vemos que a Eq. de Riccati

$$V_{0-} = V(x;\alpha,\beta) = W_0^2(x) + W_0'(x) \tag{130}$$

possui uma solução particular dada por $W_0(x) = \frac{d}{dx}\ell n\left(\eta_0(x;\alpha,\beta)\right)$, onde $\eta_0(x;\alpha,\beta)$ é a autofunção dada pela Eq. (123).

O potencial companheiro supersimétrico de V_{1-} é dado por

$$V_{1+}(x) = W_1^2(x) - W_1'(x) = m^2\left[tgh^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right) + 1\right]. \tag{131}$$

Neste caso, o par de potenciais $V_{1\pm}$ possui SUSY exata.

A partir da substituição da Eq. (126) na Eq. (124), reobtemos o bem conhecido kink do potencial de poço duplo,

$$\phi_k(x) = \int \eta_{1-}^{(0)}(y)dy = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right). \tag{132}$$

Fixando um valor para a coordenada de posição em termos do kink, isto é, $x = x(\phi_k)$, usando a Eq. (125) encontramos o modelo de potencial ϕ^4:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{133}$$

o qual possui uma simetria discreta e apresenta uma quebra espontânea de simetria.

Agora, vale apenas salientar que este potencial é diferente daquele do capítulo anterior somente no coeficiente fora dos parênteses, isto é, $\frac{\lambda}{4} \to \frac{\lambda}{2}$. Ambos potenciais possuem os mesmos valores para o estado vácuo, ou seja, $V(\phi_v) = 0$. No entanto, essa pequena diferença vai gerar uma mudança nos argumentos dos respectivos kinks, $\frac{mx}{\sqrt{2}} \to mx$.

A massa do kink é finita. Neste caso, a configuração clássica pode ter uma representação de uma partícula estável. Os gráficos do potencial e do kink estão nas figuras I e II. Observe que ambas funções do campo e das coordenadas espaciais, são bem definidas admitindo derivadas de ordens superiores.

Case (ii): $\alpha = 0$.

Neste caso, de acordo com as Eqs. (122), (123), (124) e (125) obtemos o seguinte potencial não polinomial, dentro da região de singularidade associada a autofunção do estado fudamental (123).

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{\lambda}{2}\left(1 + 3e^{-\gamma\phi}\right)\left(1 - \frac{2}{3}e^{\gamma\phi}\right)^2, \tag{134}$$

onde $\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e λ é uma constante adimensional. Note que o novo potencial em 1+1 dimensões é sempre positivo.

O estado de vácuo $\tilde{\phi}_v$ é dado por

$$\tilde{\phi}_v = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell n(\frac{3}{2}), \quad \tilde{V}(\tilde{\phi}_v) = 0. \tag{135}$$

Este potencial não polinomial não tem uma simetria discreta quando $\phi \to -\phi$ e além do mais ele não é invariante por translações. Como existe somente um estado de vácuo, consequentemente, o vácuo é não topológico.

Integrando a condição de Bogomo'nyi (88) ou (89) com o sinal negativo, para o potencial não polinomial (134) encontramos a seguinte configuração clássica:

$$\tilde{\phi}_c(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell n\left(\frac{tanh^2\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{1 - \frac{1}{3}tanh^2\left(\sqrt{\lambda}x\right)}\right), \tag{136}$$

onde a constante de integração é escolhida como sendo nula, isto é, $a = 0$. Observe que esta configuração estática satisfaz a Eq. (124) e a seguinte condição de contorno $\tilde{\phi}_c(x) \to \tilde{\phi}_v$ quando $x \to \pm\infty$. Os gráficos do potencial não polinominal e sua solução estática estão nas figuras II e IV. Contudo, na figura IV estamos plotando a configuração do campo estático somente para a região em que ela é bem comportada sem singularidade.

A densidade de energia pertencente a esta solução estática para o potencial não polinomial é dada por

$$E(x) \propto \left\{ sinh^2\left(\sqrt{2}mx\right)\left[1 - \frac{1}{3}tanh^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\right]^2 \right\}^{-1}, \tag{137}$$

com a energia total indefinida devido as singularidades. Aqui, estamos usando a relação explícita entre a configuração estática e a coordenada espacial unidimensional.

3.1 Quebra Espontânea da SUSY

Nesta subseção consideramos o operador de flutuação no contexto da supersimetria em mecânica quântica (SUSY QM). Escolhendo os parceiros supersimétricos construídos a partir da equação de estabilidade. Em SUSY $N = 2$ definimos o seguinte operador diferencial de primeira ordem:

$$A_2^{\pm} = \pm\frac{d}{dx} + W_2(x), \qquad A_2^{+} = \left(A_2^{-}\right)^{\dagger}. \tag{138}$$

O operador tipo hamiltoniano de Schrödinger do setor bosônico é dado por

$$F_{2-} \equiv A_2^{+}A_2^{-} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{2-}(x), \quad V_{2-}(x) = \tilde{V}''_{|\phi=\phi_c}. \tag{139}$$

Assim, em termos do superpotencial obtemos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$V_{2-}(x) = W_2^2(x) + W_2'(x) \equiv V(x; 0, \beta) \tag{140}$$

onde a linha significa a derivada em relação a x e $V(x; 0, \beta)$ é dado pela Eq. (122)A solução desta equação de Riccati fornece o seguinte superpotencial:

$$W_2(x) = -\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{tanh^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right) + 3}{tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\left[3 - tanh^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\right]}. \tag{141}$$

Este superpotential fornecerá uma solução não normalizavél. Note que esta solução particular da equação diferencial de Riccati tem o seguinte comportamento assintótico : $W_2(x) \rightarrow -\sqrt{2}m$ quando $x \rightarrow \infty$ e $W_2(x) \rightarrow \sqrt{2}m$ quando $x \rightarrow -\infty$. O companheiro supersimétrico de o F_{2-} é dado por

$$
\begin{aligned}
F_{2+} &= A_2^- A_2^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + V_+(x) \\
V_{2+}(x) &= W_2^2(x) - W_2'(x) = m^2 \left\{ 1 + tanh^2 \left(\frac{m}{\sqrt{2}} x \right) \right\} = V_{1+}.
\end{aligned}
\tag{142}
$$

Note que este termo de potencial é exatamente aquele do companheiro SUSY do caso (i), onde ele formou um par de potenciais com SUSY manifesta. No entanto, aqui veremos que esses operadores de flutuação são isoespectrais e consiste do par hamiltoniano tipo-Schrödinger do modelo de Witten com SUSY quebrada [23].

Outra observação interessante está na condição de invariância de forma [14], a qual não é satisfeita para $V_\pm$ das equações (140) e (142), isto é $V_{2+}(x; a_2) \neq V_{2-}(x; a_1) + R$, onde a_1, a_2 e R são constantes. Se a igualdade fosse satisfeita diríamos que o par $V_{2\pm}$ seria invariante de forma.

As equações de autovalor para o companheiro supersimétrico $F_{2\mp}$ são dadas por

$$
F_{2\pm} \eta_{2\pm}^{(n)}(x) = \omega_{2\pm}^{(n)} \eta_{2\pm}^{(n)}(x), \quad \omega_{2-}^{(n)} = \omega_n^2, \quad \omega_0^2 = 0. \tag{143}
$$

A autofunção do modo zero bosônico ($\omega_0^2 = 0$) satisfaz a condição de aniquilação

$$
A_2^- \eta_{2-}^{(0)} = 0 \Rightarrow \eta_{2-}^{(0)}(x) = e^{\int^x W_2(y) dy} \propto \frac{1}{sinh\left(\sqrt{2} m x\right) \left[2 + sech^2 \left(\frac{m}{\sqrt{2}} x \right) \right]}, \tag{144}
$$

a qual não é normalizável, e deste modo o operador de flutuação do setor bosônico não tem o modo zero. Pois, neste caso a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\eta_{2-}^{(0)}(x) \right)^2 dx$ é indefinida. Este resultado está de acordo com a Eq. (123), para $\alpha = 0$. Além disso vemos que $\eta_{2-}^{(0)}(x) = \frac{d}{dx} \tilde{\phi}_c(x)$, onde $\tilde{\phi}_c(x)$ é dado pela Eq. (136) e representa a configuração estática do potencial não polinomial. O setor fermiônico do operador de flutuação também não tem o modo zero tendo em vista que,

$$
A^+ \eta_{2+}^{(0)} = 0 \Rightarrow \eta_{2+}^{(0)} \propto sinh\left(\sqrt{2} m x\right) \left[2 + sech^2 \left(\frac{m}{\sqrt{2}} x \right) \right], \tag{145}
$$

não é normalizável. Neste caso temos uma quebra da SUSY. De fato, é fácil verificar que

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\eta_{2+}^{(0)}(x) \right)^2 dx \to \infty.
$$

Os autovalores $\omega_{2\pm}^{(n)}$ e as autofunções $\eta_{2\pm}^{(n)}$ tem soluções exatas correspondentes a um potencial geral [40]. Os autovalores de F_{2+} são autovalores de F_{2-}, isto é

$$\omega_{-}^{(n)} = \omega_{+}^{(n)} > 0.$$

Deste modo os estados fundamentais e os estados excitados de ambos $F_{2\pm}$ tem energia não nula, o que garante a quebra espontânea da SUSY.

3.2 Estabilidade Linear Clássica de Potenciais Positivos

Agora faremos uma análise da estabilidade linear para um potencial genérico que envolve o potencial do poço duplo. De fato, mostraremos que a estabilidade linear do kink é sempre garantida quando o potencial for positivo, ou seja, da forma dada por $V(\phi) = \frac{1}{2}U^2(\phi)$. Definindo

$$\begin{aligned} A = \phi'(x)\left(-\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\phi'(x)} &\Rightarrow A = -\frac{d}{dx} + F(x) \\ F(x) = \frac{d}{dx}\ell n\left(\phi'(x)\right) &= \frac{\phi''}{\phi'}, \end{aligned} \tag{146}$$

é um bom exercício mostrar que o operador hamiltoniano de flutuação tipo-Schrödinger da equação de estabilidade pode ser escrito em termos de dois operadores diferenciais de primeira ordem, isto é,

$$\hat{O}_F = A^{\dagger}A = -\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_k), \tag{147}$$

onde as duas linhas em V significam derivada de segunda ordem em relação a ϕ tomando valores em $\phi = \phi_k(x)$. Em particular, no caso do potencial de poço duplo, vemos que $V''(\phi_k)$ é dado pela Eq. (105).

Agora, como os operadores $A^{\pm}$ são mutuamente adjuntos é fácil de mostrar que $\omega^2 \geq 0$, ou seja, o valor esperado de ω^2 é dado por:

$$\omega^2 =< \eta|A^{\dagger}A|\eta >= (A|\eta > |)^2 \geq 0. \tag{148}$$

Portanto, provamos a estabilidade linear clássica para qualquer potencial positivo.

Além do mais, note que o modo zero satisfaz a seguinte condição de aniquilação:

$$A\eta_0(x) = 0 \Rightarrow \frac{d\eta_0}{dx} = F(x) \Rightarrow \eta_0 \propto \frac{d\phi}{dx}.$$

Esta relação entre a autofunção do modo zero e a solução estática evidencia o princípio de invariância translacional do kink.

A fatorização para o operador de flutuação em termos do produto de dois operadores diferenciais mutuamente adjuntos está na forma de um companheiro supersimétrico da técnica algébrica de supersimetria em mecânica quântica [20,23,32]. Realmente, no caso do potencial de poço duplo deduzido neste capítulo, vimos que o par de potenciais $V_{1\pm}(x)$ dado pelas Eqs. (127) e (131) ou $V_{\pm}$, dado pela Eq. (110) formam modelos supersimétricos com SUSY manifesta.

Capítulo 4

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta tese, encontramos uma representação da quebra espontânea da Supersimetria em Mecânca Quântica (SUSY MQ) para a equação de estabilidade de sólitons.

Iniciamos fazendo uma introdução da SUSY em mecânica clássica, unificando as coordenadas bosônica $x(t)$ e fermiônica $\psi(t)$ em um superespaço caracterizado pela introdução de uma variável grassmanniana Θ não mensurável [17,18]. Abordamos a SUSY $N = 1$ e $N = 2$ [20,21]. A partir da SUSY N=1 em mecânica clássica construimos novos osciladores anarmônicos [22]. Os demais tópicos do capítulo 1 contém uma revisão.

Na segunda parte desta tese, mostramos uma introdução do aparato matemático necessário para aplicações da análise de estabilidade de sólitons em 1+1 dimensões a partir da auto-interação de um campo escalar real. Abordamos os vários aspectos da estrutura matemática da equação de autovalor para o operador de flutuação. Usamos o sistema de unidades natural, ou seja, $\hbar = c = 1$.

Analisamos os sólitons clássicos e as ondas solitárias, onde discutimos as soluções kinks (sólitons em 1+1 dimensões). Não há uma única definição para sólitons. De um modo geral, os sólitons são soluções de equações diferenciais não lineares na forma de ondas solitárias. Sólitons genuínos são ondas solitárias que mantêm sua forma mesmo após colisões [5,9].

Entretanto, existe uma definição precisa para o kink. Em 1+1 dimensões, as soluções estáticas, não singulares, classicamente estáveis e de energia finita, da equação de movimento são denominadas de kinks [4–6]. Vimos que o kink satisfaz a uma equação diferencial de segunda ordem, obtida diretamente da equação de Euler-Lagrange, a qual foi transformada numa equação diferencial de primeira ordem, denominada de condição de Bogomol'nyi. A solução da condição de Bogomol'nyi é também solução da equação de movimento do kink.

Nesta tese, construímos também o tensor momento-energia associado ao kink do potencial de poço duplo. Recentemente foi abordada a relação entre o tensor de momento-energia métrico e o canônico [34]. Especificamente, consideramos as soluções analíticas para o kink $\phi_k(x)$ do potencial de poço duplo. Usando o cálculo diferencial e integral mostramos que esse potencial tem dois estados de vácuo degenerados e um estado de energia máxima.

Em seguida, resolvemos a equação de estabilidade do kink, a qual é formalmente análoga à equação de Schrödinger unidimensional que corresponde à primeira quantização, encontramos as soluções dos modos normais, o modo de translação e investigamos a estabilidade do kink. Usando a referência [40], mostramos que o operador de flutuação para a equação de estabilidade do kink do potencial de poço duplo tem somente dois estados normalizados associados aos autovalores nulo e positivo, os quais garantem a estabilidade linear clássica.

Mostramos também que, no caso de modelos de potenciais que dependem de um único campo, a estabilidade linear clássica estará sempre garantida desde que a energia potencial seja uma função positiva, ou seja, $V(\phi) = \frac{1}{2}U^2(\phi)$. Esta forma de potencial possibilita a aplicação da técnica algébrica de supersimetria em mecânica quântica [20,29] na solução da respectiva equação de estabilidade.

Investigamos a estabilidade clássica de um novo modelo de potencial não polinomial com sua configuração estática sendo uma solução exata da equação de movimento, com energia infinita.

Entretanto, a energia finita clássica aparece na solução estática no modelo de simetria, por exemplo, no potencial de poço duplo dado pela Eq. (133). O kink do modelo de potencial de poço duplo tem dois zeros degenerados correspondendo aos estados de vácuo ϕ_1 e ϕ_2. Neste caso o kink topológico interpola suavemente e monotonicamente entre ϕ_1 e ϕ_2, de acordo com as figuras I e II. Mas o nosso potencial escalar não polinomial tem uma solução singular, a qual não pode ser considerada um kink.

O nosso potencial não polinomial não tem simetria de reflexão $\phi \rightarrow -\phi$, nem por translação, tampouco modo bosônico igual a zero ou parceiro supersimétrico, pois as correspondentes autosoluções não são normalizáveis. Portanto, o esquema considerado nesta tese, para construirmos novos modelos de potenciais de campo nem sempre tem configuração estática fisicamente aceitável [41].

Perspectivas Futuras. Abordaremos uma aplicação da SUSY, que tem sido destaque na literatura científica para o caso de sistemas relativísticos com dois campos escalares reais acoplados, sob ambos pontos de vistas do superpotencial em teoria de campos [37] e em mecânica quântica [36]. Daremos ênfase a análise da equação de estabilidade das configurações de campos estáticos contendo uma topologia não trivial desses sistemas.

De fato, recentemente tem sido realizado alguns trabalhos sobre a conexão de setores topológicos de paredes de domínio de dois campos reais acoplados produzindo junções que aparecem em modelos de potencial de dois campos escalares reais acoplados com simetria Z(3) [38,39].

Continuaremos também a nossa investigação na linha de pesquisa desta tese, em busca de outros modelos de potenciais escalares em termos de um único campo escalar real. Recentemente, aplicamos a SUSY MQ para a equação de estabilidade do potencial de poço duplo invertido [42].

Finalizamos esta dissertação de mestrado, registrando que os polarons podem ser utilizados também via SUSY para gerar novos potenciais iso-espectrais. Os polarons tem sido abordado como uma combinação linear de duas soluções estáticas: o kink e o anti-kink [43].

Para os leitores interessados em um artigo de revisão sobre as propriedades básicas da álgebra não comutativa de Grassmann e sua relação com sistemas fermiônicos, escrito em português, consultar a Ref. [44].

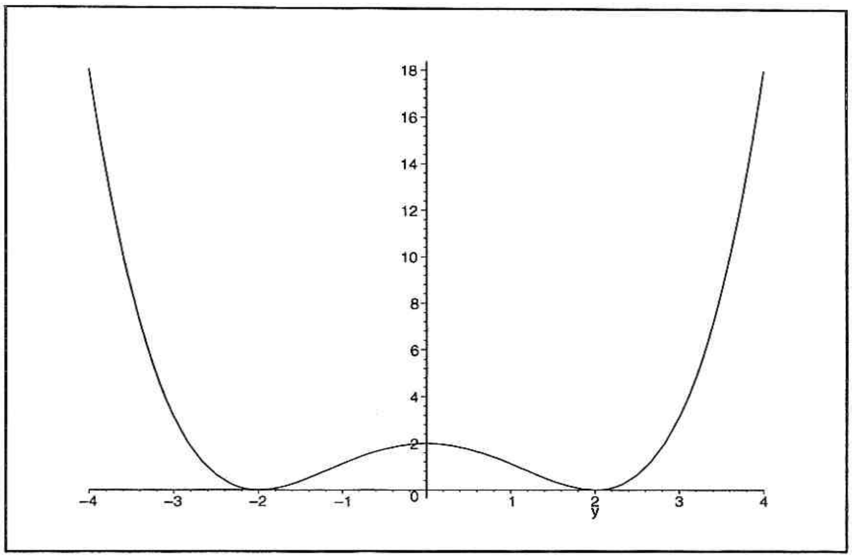

FIG. 1. Gráfico da energia potencial $V(y) = \frac{1}{8}\left(y^2 - 4\right)^2$, para $\lambda = \frac{1}{4}$, $m = 1$. O eixo vertical representa o potencial e o eixo horizontal representa o campo escalar .

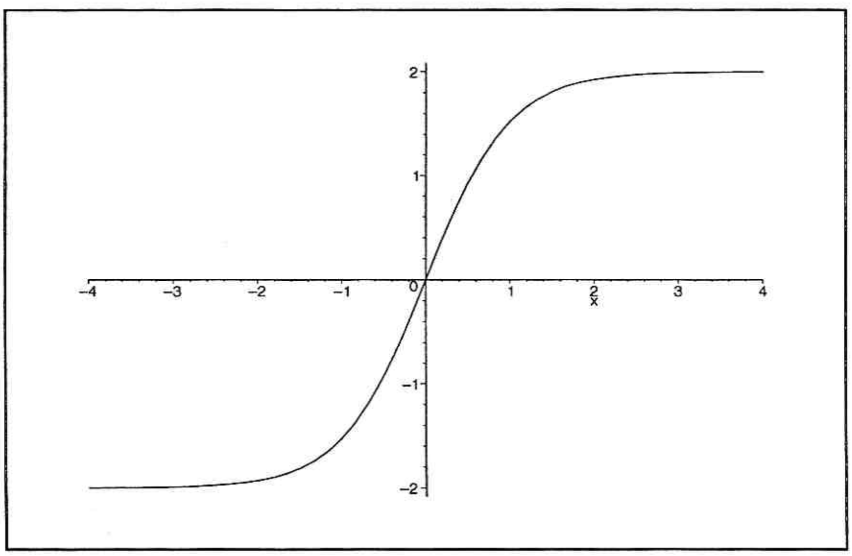

FIG. 2. Gráfico do Kink do potencial de poço duplo, para $\lambda = \frac{1}{4}$, $m = 1$. Nesta figura, o eixo vertical represnta o kink e o eixo horizontal representa a coordenada de posiçção.

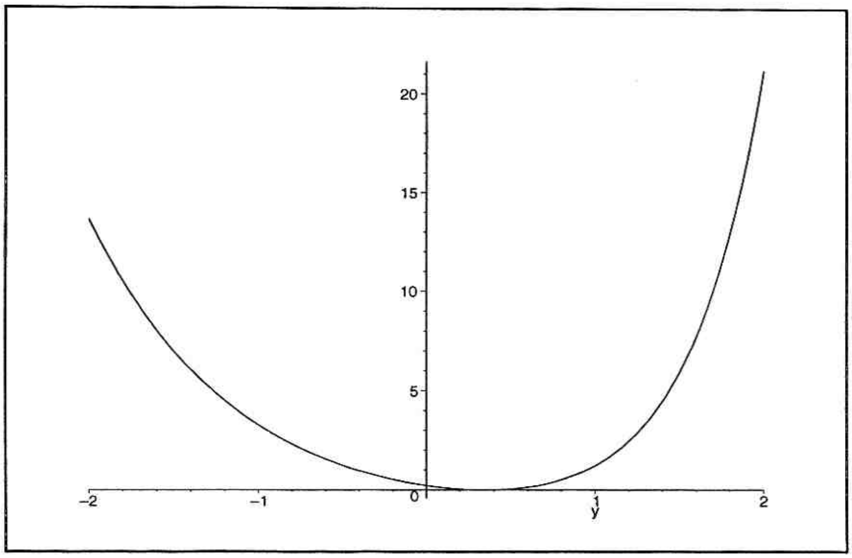

FIG. 3. Potencial não-polinomial, para $\lambda = 1, \quad m = 1$.

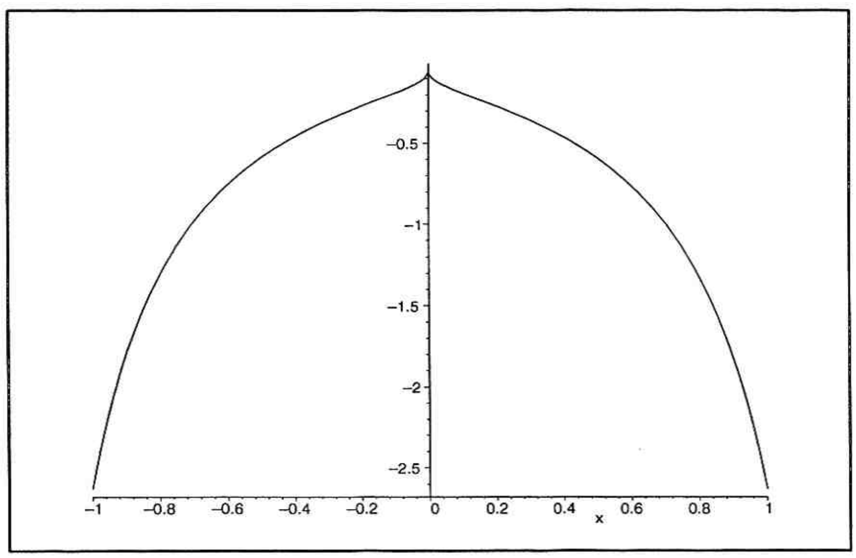

FIG. 4. Configuração estática associada ao potencial não-polinomial para $\lambda = 1, \quad m = 1$. No entanto, conforme a Eq. (136) a curva não é definida na origem.

REFERENCES

[1] P. Ramond, **Field Theory: A Modern Primer**, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.

[2] J. Barcelos Neto, **Introdução (mais conceitual que matemática) à teoria de campos**, notas de aula de um mini-curso ministrado durante a *46ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC)*, julho/94, realizada em Vitória-ES.

[3] V. L. Vieira Baltar, J. Llambías and L. Masperi, *Phys. Rev.* **D44**, 1214 (1991).

[4] R. Rajaraman, **Solitons and Instantons**, (North-Holland, Amsterdam, 1982), p. 20-21; S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, London, (1985), p. 190-191.

[5] S. Coleman, **Aspects of Symmetry**, Cambridge University Press, London, (1985).

[6] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam and A. Stern, **Classical Topology and Quantum States**, (World Scientific, Singapore, 1991), p. 104-106.

[7] E. J. Weinberg, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **42**, 177 (1992).

[8] V. G. de Lima, José L. Strapasson e Rafael de Lima Rodrigues, "O operador de Flutuação de Kink," preprint *Notas de Física,* CBPF-NF-035/01, maio/2001.

[9] P. G. Drazin and R. S. Johnson, **Solitons: an introduction**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1993). Neste livro, o leitor pode encontrar uma introdução da teoria de sóliton com várias aplicações em engenharia elétrica.

[10] G. L. Lamb, **Elements of Soliton Theory**, Wiley, New York, 1980; R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, **Solitons and Nonlinear Wave Equations**, Academic Press, London, 1982.

[11] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 489 (1976).

[12] C. A. Aragão de Carvalho, **Aplicação de Teoria de Campos na Física da Matéria Condensada**, *Notas de aula do mini-curso ministrado na Primeira Escola de Pós-Graduação em Física do Nordeste, João Pessoa, 1987.* RLR, o último autor deste trabalho participou como ouvinte deste curso.

[13] M. Bernstein e L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1933, (1984); V. A. Kostelecky e M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2285, (1984); *Phys. Rev.* **A32**, 1293, 3243, (1985).

[14] L. E. Gendenshtein e I. V. Krive, *Sov. Phys. Usp* **28**, 645, (1985); A. Lahiri, P. K. Roy e B. Bagchi, *Int. J. Mod. Phys.* **A5**, 1383, (1990); F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep.* **251**, 267 (1995).

[15] F. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).

[16] A. Salam e J. Strathdee, Nucl. Phys., **B76**, 477,(1974); *Phys. Rev.* **D11**, 1521, (1975).

[17] P. Salomonson e J. W. van Holten, *Nucl. Phys.* **B196**, 509, (1982); F. Cooper e B. Freedman, *Ann. Phys. (N. Y.)* **146**, 262, (1983); F. Ravndal, *Proc. CERN School of Physics*, (Geneva:CERN) página 300, (1984); D. Lancaster, *IL Nuovo Cimento* **79A**, 28 (1984).

[18] J. Barcelos-Neto e Ashok Das, *Phys. Rev.* **D33**,2863, (1986); J. Barcelos-Neto, Ashok Das e W. Scherer, *Acta Phys. Pol.* **B18**, 267, (1987); J. Barcelos-Neto e Wilson de Oliveira, it Int. J. of Mod. Phys. **12A**, 5209 (1997).

[19] J. A. Helayel-Neto, *Notas de aula do mini-curso de Intodução à Supersimetria,* ministrado no CBPF e recentemente em Vitória-ES.

[20] R. L. Rodrigues e A. N. Vaidya, *Rev. Bras. de Ensino de Física,* **19**, 374, 1997.

[21] R. L. Rodrigues, W. Pires de Almeida e I. Fonseca Neto, *Supersymmetric classical mechanics: Free case,* preprint "Notas de Física," CBPF-NF-039/01, junho/2001.

[22] V. G. Lima, W. Pires de Almeida, E. A. Brito da Silva e R. L. Rodrigues, *Unarmonic*

Oscillator via SUSY N=1 in classical mechanics, preprint em preparação.

[23] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B185**, 513 (1981); C. V. Sukumar *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 2917 (1985);D. L. Pursey, *Phys. Rev.* **D33**, 1047 (1986); D. L. Pursey, *Phys. Rev.* **D33**, 2267 (1986).

[24] C. N. Kumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 5397 (1987).

[25] J. Casahorran and S. Nam, *Int. J. Mod. Phys.* **A6**, 5467 (1991); C. V. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 2297 (1986); J. Hruby, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 1807 (1989); L. J. Boya. and J. Casahorran, *Ann. Phys. (N. Y.)* **196**, 361 (1989).

[26] R. de Lima Rodrigues in Proceedings (in Portuguese) of the *XIV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Caxambu-MG, Brazil, p. 410-413 (1993).

[27] Q. Wang, U. P. Sukhatme and W.-Y. Keung, *Mod. Phys. Lett.* **A5**, 525 (1990); D. S. Kulshreshtha, J.-Q. Liang and H. J. W. Müller-Kirsten, *Ann. Phys. (N. Y.)* **225**, 191 (1993).

[28] R. de Lima Rodrigues *Mod. Phys. Lett.* **A10**, 1309 (1995).

[29] W.-Y. Keung, U. P. Sukhatme, Q. Wang and T. D. Imbo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L987 (1989); G. Junker and P. Roy, *Ann. of Phys.* **256**, 302 (1997); P. Barbosa da Silva Filho, R. de Lima Rodrigues, A. N. Vaidya, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 2395 (1999).

[30] R. de Lima Rodrigues, **Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger**, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **19**, 68 (1997).

[31] O. L. de Lange e R. E. Raab, *Operator Methods in QM,* Oxiford Science Publications; R. W. Robonit, **Quantum Mechanics**, Oxford University Press, 1nd edition, New York (1997).

[32] R. de Lima Rodrigues, "The Quantum Mechanics SUSY Algebra: an Introductory Review", *in preparation* preprint "Notas de Física," CBPF-NF, Novembro/2001.

[33] G. H. Flores and N. F. Svaiter, preprint *Notas de Física,* CBPF-NF-014/01, julho/2001, hep-th/01017043.

[34] H. Fleming, *Rev. Bras. de Ens. de Física,* **16**, 48, (1994).

[35] C. A. A. de Carvalho, R. M. Cavalcanti, E. S. Fraga e S. E. Jorás, *Phys. Rev.* **E61**, 6392 (2000).

[36] R. de Lima Rodrigues, P. B. da Silva Filho e A. N. Vaidya, *Phys. Rev.* **D58**, 125023 (1998) e referências contidas neste artigo.

[37] M. Shifman, *Phys. Rev.* **D57**, 1258 (1997).

[38] S. M. Carrol, S. Hellerman e M. Trodden, *Phys. Rev.* **D61**, 065001 (2000).

[39] D. Bazeia e F. A. Brito, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1094 (2000).

[40] P. M. Morse and H. Feshbach, **Methods of Mathematical Physics, Vol. II**, McGraw-Hill Book, New York, p. 1650 (1953).

[41] V. G. de Lima, V. S. Santos e R. de Lima Rodrigues, *On the scalar potential models from the isospectral potential class* preprint "Notas de Física," CBPF-NF-059/01, outubro/2001.

[42] José L. Strapasson, V. G. de Lima, e R. de Lima Rodrigues, "Configurações topológicas para o potencial de poço duplo invertido," *XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos,* de 22 a 26 de outubro de 2001, São Lourenço-MG.

[43] C. Aragão de Carvalho, C. A. Bonato and G. B. Costamilan, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L1153 (1989).

[44] C. E. I. Carneiro e M. T. Thomaz, *Rev. Bras. de Ens. de Física,* **22**, 474, (2000).

"Novas propostas de potenciais escalares supersimétricos em duas dimensões"

Valter Gomes Lima

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Física, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Rafael de Lima Rodrigues – Coorientador/ UFPB

Marco Antonio de Andrade – Univ. Católica de Petrópolis

Nelson Pinto Neto – CBPF

Suplente: Alexandre William Smith – CBPF

Rio de Janeiro 13 de dezembro de 2001