

TESE DE  
DOUTORADO

Contribuições Recentes ao Estudo de Teorias  
de Gauge Planares

JOSÉ LUÍS BOLDO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 2000

# DEDICATÓRIA

Esta tese é dedicada aos meus pais:

*Claudino Luiz Boldo (in Memoriam) e Amábile Maria Mascarello Boldo.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus queridos pais Claudino (in Memoriam) e Amábile pelo apoio, exemplo e por se demonstrarem sempre acolhedores.

Aos meus irmãos e família *Plínio&Sígla* (e sobrinhos: Fernando, Marcelo e Roberto), *Gilda&Jânio*, *Carlos*, *Ivete&João* (e sobrinhos: Ricardo, Rodrigo e Fernanda) e *Ivanda*, com quem sempre posso contar.

Aos Professores e Funcionários do CBPF. Em especial a Míriam e a Rosângela por se demonstrarem muito prestativas.

A José A. Helayël-Neto por sua orientação, apoio e incentivo. Agradeço, também, pelos vários cursos por este ministrados no DCP, que foram cruciais ao desenvolvimento desta tese.

A Leonardo M. de Moraes, meu companheiro de trabalho ao longo deste período, por sua amizade, coleguismo e pelo trabalho conjunto.

A Nelson Panza por sua amizade, pelo trabalho conjunto, compartilhamento de idéias e pelas valiosas sugestões em várias situações.

A Oswaldo M. Del Cima por sua amizade, pelas sugestões sensatas e por sua valiosa colaboração na execução dos trabalhos.

A Marco A. De Andrade por sua amizade, pelos cursos e trabalho conjunto em Super-simetria.

A Cláudio A. G. Sasaki por sua amizade, simpatia, auxílio com o Maple, e por ter cedido seus arquivos (em LATEX) no formato apropriado para a escrita desta tese.

Ao Prof. Pimentel por sua amizade e por me ter indicado ao Prof. Helayël.

Ao Prof. Sebastião Dias (Tião) pelos cursos, pela amizade e companheirismo.

Aos meus colegas do DCP: André P. Firme, Guilherme, German, Guillermo, Rodolfo Casana, Ozemar, Roman, Leon, Cristine, Márcia, Mauro&Guida, Beatriz, Humberto, Manoel, Moisés Porfírio, Marco Aurélio, Patrick, Marcelo, Lenin, Álvaro Ferreira e Álvaro Nogueira.

A Anderson Ilha, Fagner D. de Araruna, Winder A. de Moura Melo e Daniel G. Sasaki, cuja convivência, amizade e companheirismo serão inesquecíveis.

À gauchada de S. Paulo e Vacaria: Gargamel e Tadeu; Cabral, Marcus Daniel, Maninho, Gringo, Betinho e Tutú, que estão sempre à espera dos amigos com o churrasco e o bom chimarrão.

Ao povo brasileiro, através do CNPq, pelo suporte financeiro.

## Resumo

Nesta tese, são apresentados e discutidos diferentes tópicos no âmbito das teorias de campos planares. Em particular, a questão da torção em modelos de gravitação pura e acoplada a férmions é abordada em conexão com o problema da geração dinâmica de massa. Por outro lado, considera-se a extensão de técnicas de supercampos a modelos com supersimetria explícita e espontaneamente quebrada em 3D, o que permite a introdução dos parâmetros de quebra a todas as ordens nos superpropagadores da teoria livre.

# Abstract

A number of different topics that regard planar field theories are presented and discussed in this thesis. Particular attention is devoted to the issue of torsion in pure gravity and gravity coupled to fermions; the dynamical mass generation mechanism is reassessed in this framework. Aside from these problems, one tackles here the techniques for extending superfields and superspace formalism in those cases where supersymmetry is explicitly and spontaneously broken. With our results, the breaking parameters are taken into account to all orders in the free superpropagators.

# Índice

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
Índice . . . . .	v
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Aspectos da Gravitação Topologicamente Massiva com Torção</b>	<b>5</b>
2.1 A Ação . . . . .	6
2.2 Os Propagadores . . . . .	8
2.3 Comentários Finais . . . . .	16
<b>3 Torção Dinâmica e Geração de Massa em Gravitação Planar</b>	<b>18</b>
3.1 Acoplamento com a Matéria: Espinores de Duas Componentes . . . . .	19
3.2 Acoplamento com a Matéria: Espinores de Quatro Componentes . . . . .	27
3.3 Conclusões . . . . .	29
<b>4 Geração de Massa para Campos-de-Gauge em Gravitação Planar com Torção</b>	<b>31</b>
4.1 Modelo para Torção em 3D via Redução Dimensional . . . . .	32
4.1.1 Considerações Iniciais do Modelo em 4D . . . . .	32
4.1.2 Redução Dimensional ( $4D \rightarrow 3D$ ) . . . . .	36
4.1.3 Quebra Espontânea de Simetria de Paridade . . . . .	38
4.1.4 Geração Dinâmica de Massa para $t_\mu$ . . . . .	39

4.2	Geração Dinâmica de Massa para o Campo de K-R . . . . .	41
4.3	Comentários Finais . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Formalismo de Supercampos em Modelos com Quebra de Supersimetria</b>	<b>46</b>
5.1	A Ação no Superespaço . . . . .	47
5.2	Os Projetores e Superpropagadores . . . . .	49
5.3	Considerações Finais . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Perspectivas Futuras</b>	<b>54</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de teorias de campos em dimensões espaço-temporais inferiores a quatro (4D) vem recebendo muita ênfase nas últimas quatro décadas. Os principais motivos que levaram à análise de modelos físicos em dimensões diferentes daquelas que descrevem o mundo real variam desde aspectos puramente pedagógicos até possíveis aplicações para descrever sistemas físicos reais [1], com rica fenomenologia advinda da Física da Matéria Condensada.

Inicialmente, o fenômeno de geração dinâmica de massa em teorias de gauge sem a ocorrência de quebra explícita da simetria local [2, 3, 4], foi considerado no espaço-tempo bidimensional e, posteriormente, generalizado para dimensões superiores. Da mesma forma, a teoria de Maxwell em três dimensões espaço-temporais (3D), minimamente acoplada a férmions massivos, resulta em um propagador do fóton corrigido com um pólo não-trivial: surge na ação efetiva um termo de massa topológica para o campo vetorial advindo de correções radiativas a *1-loop* [5, 6, 7, 8].

Outro aspecto peculiar de teorias de gauge tridimensionais provém do estudo das representações irredutíveis do grupo de Poincaré neste espaço-tempo [9]: levando em conta que o grau de liberdade de spin das representações massivas é estudado no referencial de repouso da partícula e que, neste caso, o sub-grupo que mantém invariante seu momento representativo,  $p^\mu = (m, \vec{0})$ , é o grupo de rotações no plano,  $SO(2) \sim U(1)$ , pode-se mostrar que aparecem representações correspondentes a partículas que obedecem a uma estatística arbitrária, ou seja, o spin pode assumir valores contínuos (anyons) [10], ao

contrário de 4D, onde o mesmo se restringe a valores inteiros ou semi-inteiros, já que o grupo de spin é o  $SO(3) \sim SU(2)$ . Em vista deste fato, foi proposto que um gás de anyons poderia ser um possível candidato a descrever a supercondutividade [11]. Neste modelo, a matéria aniônica é representada por férmions de duas componentes, interagindo com um campo de gauge estatístico, cuja dinâmica é governada por um termo de Chern-Simons, o que, por sua vez, viola a simetria de paridade; no entanto, são poucas as evidências de amostras supercondutoras com violação da paridade [12]. Outra restrição a este modelo é que o mesmo só poderá descrever um supercondutor a temperatura nula. A fim de contornar estes problemas, foram propostos modelos com preservação da simetria de paridade utilizando duas famílias de férmions de duas componentes com parâmetros de massa exibindo sinais opostos. Neste caso, a simetria de paridade é preservada e o modelo é, também, capaz de descrever um supercondutor a temperatura finita [13].

Além destes fatos, a possibilidade de se evitar as dificuldades matemáticas encontradas em teorias quadridimensionais têm também levado a uma análise mais detalhada de teorias em dimensões inferiores. Neste contexto, aparece a teoria da gravitação em 3D; é bem conhecido que, apesar da teoria de Einstein no espaço-tempo quadridimensional ser classicamente uma teoria satisfatória, sua formulação quântica apresenta um sério problema, a saber, a sua não-renormalizabilidade. Várias modificações já foram propostas na teoria, tal como a introdução de termos quadráticos na curvatura, os quais geralmente levam a uma perda da unitariedade da teoria [14]. Por outro lado, modelos para descrever a gravitação no espaço-tempo tridimensional vêm sendo amplamente discutidos ultimamente [15]. Apesar do fato da teoria de Einstein em 3D não apresentar graus de liberdade dinâmicos, a introdução do termo topológico de Chern-Simons resulta em um modo massivo e dinâmico para descrever o campo gravitacional, satisfazendo, além disto, às exigências de unitariedade e renormalizabilidade [16, 17].

Neste cenário, também surge a teoria de cordas como uma nova perspectiva de se encontrar uma solução para os problemas da gravitação quântica. Nesta teoria, o campo gravitacional não é somente descrito pelos graus de liberdade da métrica mas, também, por aqueles oriundos da torção; o tensor anti-simétrico de ordem três que aparece no Lagrangeano efetivo das cordas, no limite de baixas energias, é usualmente associado à torção [18]. Talvez, o aspecto mais interessante de considerar a gravitação com torção

deva-se ao fato de que este objeto matemático conecta o spin da matéria com a geometria do espaço-tempo.

O conceito de torção, definida como a parte anti-simétrica da conexão afim, foi introduzido por Cartan em 1922 [19]. Este observou que a torção poderia ser o objeto geométrico relacionado ao momento angular intrínseco da matéria. Posteriormente, com o conceito de spin, foi sugerido que o campo de torção poderia ser o mediador de uma interação de contato entre férmions, sem, contudo, se propagar no espaço livre. A partir disto, vários autores investigaram a possível relação entre torção e spin, na tentativa de estender a gravitação a nível microscópico [20].

Tendo em vista que o campo de torção parece ser indispensável para uma abordagem microscópica da gravitação, no Capítulo 2 complementaremos o estudo da gravitação topologicamente massiva, levando em conta os graus de liberdade da torção nesta teoria, além daqueles advindos da métrica [21]. No Capítulo 3, faremos um estudo de acoplamentos mínimo e não-mínimo da torção à matéria fermiônica e, a partir disto, discutiremos o mecanismo de geração dinâmica de massa para modelos com preservação (ou violação) da simetria de paridade [22]. A partir da redução dimensional de um modelo para torção minimamente acoplada à matéria fermiônica em 4D, apresentaremos, no Capítulo 4, um modelo de torção dinâmica em 3D com geração dinâmica de massa para os campos fermiônico e de gauge, provenientes do processo de redução dimensional. Também, estudaremos o mecanismo de geração dinâmica de massa para o campo de Kalb-Ramond em 3D, quando o mesmo é acoplado à matéria fermiônica.

Outro tópico que merece uma melhor compreensão no contexto das teorias de gauge planares refere-se ao estudo das quebras espontânea e explícita da supersimetria (su.sy.) em 3D. Um problema crucial da supersimetria, em conexão com uma sua possível correlação à fenomenologia das partículas fundamentais, são os seus mecanismos de quebra. Numa abordagem de superespaço, a quebra, qualquer que seja o seu mecanismo, reverte-se no aparecimento de termos que quebram explicitamente a supersimetria. Tal problema já foi detalhadamente abordado em modelos supersimétricos em 4 e em 2 dimensões espaço-temporais [23]. Dentro do espírito dos trabalhos recolhidos nesta tese, considerou-se oportuno estender o método dos superpropagadores com quebra de supersimetria a modelos em 3D, já que, em tal espaço-tempo, a discussão e a técnica de superespaço

em presença de termos de quebra da su.sy. ainda não haviam sido implementadas [24]. Assim, no Capítulo 5, propomos um estudo da super-QED<sub>3</sub> topologicamente massiva, introduzindo termos de quebra explícita e *soft* de supersimetria nos setores de matéria e de gauge. A seguir, formulamos um algoritmo geral para se obter superpropagadores no super-espaço em 3D. Finalmente, no Capítulo 6, concluimos, apresentando algumas perspectivas futuras relacionadas aos tópicos discutidos em cada capítulo.

## Capítulo 2

# Aspectos da Gravitação Topologicamente Massiva com Torção

Este capítulo tem por objetivo estudar algumas conseqüências ao introduzir-se os graus de liberdade da torção na gravitação topologicamente massiva em 3D, através da substituição dos símbolos de Christoffel pela conexão afim de Cartan. Do mesmo modo como na gravitação em 4D, em 3D o escalar de curvatura não induz termos cinéticos para as componentes da torção e, portanto, suas equações de movimento são puramente algébricas. Entretanto, verificaremos que os termos que proporcionam dinâmica para a torção são advindos do termo de Chern-Simons, bem como dos termos de curvatura de ordem superior. Inicialmente, encontraremos um conjunto completo de operadores de projeção de spin, bem como apresentaremos sua tabela multiplicativa; a partir disto, poderemos extrair os propagadores de vários modelos da gravitação em 3D, com os efeitos da torção levados em consideração. A seguir, partiremos na busca de formular uma teoria para gravitação com torção em 3D livre de *ghosts*, através da imposição de algumas restrições sobre os parâmetros do Lagrangeano. Um resultado interessante que surge de nossas discussões é a possibilidade de se formular uma teoria unitária da gravitação em 3D considerando

termos de curvatura de ordem superior<sup>1</sup>.

## 2.1 A Ação

Como ponto de partida, consideremos a gravitação topologicamente massiva em três dimensões:

$$S = \int d^3x \left[ \sqrt{g} (a_1 \mathcal{R} + a_2 \mathcal{R}^2 + a_3 \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu}) + a_4 \mathcal{L}_{cs} \right], \quad (2.1)$$

onde

$$\mathcal{L}_{cs} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa} \Gamma_{\kappa\lambda}{}^\rho (\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}{}^\lambda + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}{}^\sigma) \quad (2.2)$$

é o termo topológico de Chern-Simons.  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são coeficientes livres, enquanto  $a_4$  é o parâmetro relacionado com o termo de Chern-Simons. Note que, em três dimensões, termos proporcionais a  $\mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\lambda} \mathcal{R}^{\mu\nu\kappa\lambda}$  não são independentes, devido ao fato de que o tensor de Riemann ser proporcional ao tensor de Ricci (eles possuem o mesmo número de componentes independentes). Adotaremos a métrica de Minkowski como  $\eta_{\mu\nu} = (+ - -)$ , e o tensor de Ricci como  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\lambda\mu\nu}{}^\lambda$ . Vamos considerar o espaço-tempo na versão de Riemann-Cartan, onde a conexão afim não é simétrica nos dois primeiros índices e, também, não é completamente determinada pela métrica [20]. Logo, define-se o tensor de torção como a parte anti-simétrica da conexão afim:

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = 2\Gamma_{[\mu\nu]}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda. \quad (2.3)$$

Neste espaço-tempo, os coeficientes da conexão afim podem ser expressos em termos da métrica e da torção,

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}{}^\lambda, \quad (2.4)$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$  é o símbolo de Christoffel, que é completamente determinado pela métrica:

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}), \quad (2.5)$$

e

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu}{}^\lambda + T_{\mu\nu}{}^\lambda - T_{\nu\mu}{}^\lambda) \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se publicados no trabalho *Comments on Topologically Massive Gravity with Propagating Torsion*, *Class. Quantum Grav.*, **17** (2000) 813; em co-autoria com L.M. de Moraes e J.A. Helayël-Neto.

é o tensor de contorsão, que é anti-simétrico nos dois últimos índices. Em 3D, os 9 graus de liberdade do tensor de torção podem ser covariantemente parametrizados em termos de suas componentes irreduzíveis de acordo com o grupo  $SO(1,2)$ , isto é: seu traço,  $t_\mu \equiv T_{\mu\nu}{}^\nu$ , sua componente totalmente anti-simétrica,  $\varphi \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu\lambda}$ , e um tensor simétrico de ordem dois e de traço nulo,  $X_{\mu\nu}$ . A decomposição das componentes acima é realizada de acordo com a seguinte relação:

$$T_{\mu\nu\lambda} = \varphi\varepsilon_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2}(\eta_{\nu\lambda}t_\mu - \eta_{\mu\lambda}t_\nu) + \varepsilon_{\mu\nu\kappa}X^\kappa{}_\lambda. \quad (2.7)$$

Como nosso objetivo é obter o espectro de partículas da teoria através da análise dos propagadores livres, consideraremos a versão linearizada da teoria; adotamos a aproximação onde o campo métrico é expandido em torno da geometria do espaço plano de Minkowski, isto é:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \quad (2.8)$$

sendo  $\kappa$  é a constante de acoplamento gravitacional em 3D e  $h_{\mu\nu}$  representando o campo que descreverá o gráviton. A ação é invariante sob transformações gerais de coordenadas,

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x), \quad (2.9)$$

onde  $\xi_\mu$  é o parâmetro de gauge. Portanto, é necessário fixar esta invariância de gauge de modo a tornar o operador de onda do Lagrangeano não-singular. Isto é obtido adicionando o termo de *gauge-fixing* de De Donder no Lagrangeano original,

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\alpha} F_\mu F^\mu, \quad (2.10)$$

onde

$$F_\mu = \partial_\nu \left( h^\nu{}_\mu - \frac{1}{2} \delta^\nu{}_\mu h \right), \quad (2.11)$$

com  $h \equiv h^\mu{}_\mu$ . Nenhum outro termo de *gauge-fixing* é necessário, pois o campo de torção comporta-se como um tensor sob transformação geral de coordenadas. Primeiramente, vamos nos concentrar no estudo da gravitação topologicamente massiva sem levar em conta os termos de ordem superior na curvatura,  $\mathcal{R}^2$  e  $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ , ou seja, colocando  $a_2 = a_3 = 0$ . Neste caso, a ação a ser analisada é composta pelos termos de Einstein, Chern-Simons e *gauge-fixing*. Assim, decompondo o campo de torção em termos de suas componentes

irredutíveis (2.7), e usando a aproximação de campo fraco para a métrica, o setor bilinear do Lagrangeano é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{a_1 \kappa^2}{2} \left[ \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \square h + h \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda h^\lambda{}_\nu \right. \\
& + \frac{1}{\kappa^2} (-3\varphi^2 - t_\mu t^\mu + 2X_{\mu\nu} X^{\mu\nu}) \left. \right] \\
& + \frac{1}{2\alpha} \left[ -h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda h^\lambda{}_\nu + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{4} h \square h \right] \\
& + a_4 \left[ \frac{\kappa^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (h_\lambda{}^\kappa \square \partial_\mu h_{\kappa\nu} - h_\lambda{}^\kappa \partial_\mu \partial_\kappa \partial_\rho h^\rho{}_\nu) \right. \\
& - \frac{3\kappa}{2} (X^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + X^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - 2X^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda h^\lambda{}_\nu) \\
& \left. - \frac{1}{2} \varphi \partial_\mu t^\mu + \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} t_\nu \partial_\mu t_\lambda + X^{\mu\nu} \partial_\mu t_\nu - \varepsilon^{\mu\nu\lambda} X_\lambda{}^\kappa \partial_\mu X_{\kappa\nu} \right], \tag{2.12}
\end{aligned}$$

onde  $a_1$  tem dimensão de massa, enquanto o coeficiente do termo topológico,  $a_4$ , é adimensional. Posteriormente, iremos fixar os valores destes parâmetros de modo que a unitariedade e a causalidade da teoria sejam preservadas.

## 2.2 Os Propagadores

Reescrevendo o Lagrangeano (2.12) em uma forma mais conveniente, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \phi^\alpha \mathcal{O}_{\alpha\beta} \phi^\beta, \tag{2.13}$$

onde  $\phi^\alpha = (h^{\mu\nu}, X^{\mu\nu}, t^\mu, \varphi)$  e  $\mathcal{O}$  é o operador de onda, temos que os propagadores são dados por:

$$\langle 0 | T [\phi_\alpha(x) \phi_\beta(y)] | 0 \rangle = i (\mathcal{O}^{-1})_{\alpha\beta} \delta^3(x-y). \tag{2.14}$$

Para inverter o operador de onda, faremos uso do formalismo de operadores de projeção de spin introduzidos em [25, 26], além da inclusão de quatro novos operadores que provêm dos termos de Chern-Simons e da torção. Os operadores para tensores simétricos de ordem dois são dados por:

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} &= \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa} \theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda} \theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{2} \theta_{\mu\nu} \theta_{\kappa\lambda}, \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} &= \frac{1}{2} (\theta_{\mu\kappa} \omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda} \omega_{\nu\kappa} + \theta_{\nu\kappa} \omega_{\mu\lambda} + \theta_{\nu\lambda} \omega_{\mu\kappa}), \tag{2.15}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} &= \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} &= \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \\
P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\kappa\lambda}\omega_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

onde  $\theta_{\mu\nu}$  e  $\omega_{\mu\nu}$  são, respectivamente, projetores transversal e longitudinal para vetores. Os outros quatro operadores oriundos dos termos bilineares são

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= (\varepsilon_{\alpha\kappa\mu}\theta_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\alpha\lambda\mu}\theta_{\nu\kappa} + \varepsilon_{\alpha\kappa\nu}\theta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\alpha\lambda\nu}\theta_{\mu\kappa})\partial^\alpha, \\
R_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= (\varepsilon_{\alpha\kappa\mu}\omega_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\alpha\lambda\mu}\omega_{\nu\kappa} + \varepsilon_{\alpha\kappa\nu}\omega_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\alpha\lambda\nu}\omega_{\mu\kappa})\partial^\alpha, \\
A_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\kappa}\partial^\kappa, \\
E_{\mu\nu,\kappa} &= \eta_{\mu\kappa}\partial_\nu + \eta_{\nu\kappa}\partial_\mu;
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$A$ ,  $E$  e  $R$  aparecem exclusivamente devido à torção. Agora, apresentaremos as relações entre os operadores de projeção de spin. Os produtos entre os operadores de Barnes-Rivers usuais em 3D são dados por:

$$\begin{aligned}
P^{i-a}P^{j-b} &= \delta^{ij}\delta^{ab}P^{j-b}, \\
P^{i-ab}P^{j-cd} &= \delta^{ij}\delta^{bc}P^{j-a}, \\
P^{i-a}P^{j-bc} &= \delta^{ij}\delta^{ab}P^{j-ac}, \\
P^{i-ab}P^{j-c} &= \delta^{ij}\delta^{bc}P^{j-ac},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

e satisfazem a seguinte identidade tensorial:

$$\left(P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}\right)_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}). \tag{2.18}$$

Além disto, listamos abaixo algumas relações não-triviais envolvendo os novos projetores (2.16):

$$\begin{aligned}
SS &= -16\Box P^{(2)}, \\
RR &= -4\Box P^{(1)}, \\
SP^{(2)} &= S, \\
RP^{(1)} &= R.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Assim, o operador de onda pode ser decomposto em quatro setores, ou seja:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

onde os blocos  $M, N, P$  e  $Q$  são matrizes  $2 \times 2$ . Expandindo seus elementos não-triviais em termos dos operadores de projeção, obtemos:

$$\begin{aligned} (M_{11})_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= \frac{a_1\kappa^2\Box}{2}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} - \frac{\Box}{2\alpha}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} - \frac{(a_1\kappa^2\alpha + 1)\Box}{2\alpha}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}\Box}{4\alpha}(P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s\omega)} + P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega s)}) - \frac{\Box}{4\alpha}P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega)} + \frac{a_4\kappa^2\Box}{4}S_{\mu\nu,\kappa\lambda}, \\ (M_{12})_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= (M_{21})_{\mu\nu,\kappa\lambda} = -\frac{3a_4\kappa\Box}{2}(P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} - P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)}), \\ (M_{22})_{\mu\nu,\kappa\lambda} &= 2a_1(P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} + P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} + P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} + P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-\omega)}) - \frac{a_4}{2}(S_{\mu\nu,\kappa\lambda} + R_{\mu\nu,\kappa\lambda}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} (N_{21})_{\mu\nu,\kappa} &= \frac{a_4}{2}E_{\mu\nu,\kappa}, \\ (P_{12})_{\mu,\nu\kappa} &= -\frac{a_4}{2}E_{\mu,\nu\kappa}, \\ (Q_{11})_{\mu\nu} &= -a_1(\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}) + \frac{a_4}{2}A_{\mu\nu}, \\ (Q_{12})_{\mu} &= -(Q_{21})_{\mu} = \frac{a_4}{2}\partial_{\mu}, \\ (Q_{22}) &= -3a_1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Antes de calcular o inverso do operador  $\mathcal{O}$ , talvez seja interessante discutir alguns casos específicos. Como já foi ressaltado, verificamos que a teoria de Einstein para o campo gravitacional em 3D não é dinâmica; entretanto, a introdução do termo de massa topológica leva a uma teoria dinâmica com a propagação de um modo físico que descreve uma partícula de spin-2 (se tomarmos  $a_1 > 0$ ) [17]. Neste contexto, esperamos que o termo de Chern-Simons também proporcione dinâmica para as componentes da torção. Então, vamos restringir nossa análise adotando um Lagrangeano para a torção no espaço plano, com o intuito de se obter uma primeira idéia sobre o comportamento das componentes da torção do ponto de vista das teorias topológicas. Eliminando os termos envolvendo o campo gravitacional (devido a nossa escolha de considerar um espaço-tempo plano), obtemos a seguinte densidade de Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \frac{a_1}{2}(-3\varphi^2 - t_{\mu}t^{\mu} + 2X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_4}{4} (-2\varphi \partial_\mu t^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\lambda} t_\nu \partial_\mu t_\lambda \\
& + 4X^{\mu\nu} \partial_\mu t_\nu - 4\varepsilon^{\mu\nu\lambda} X_\lambda{}^\kappa \partial_\mu X_{\kappa\nu}).
\end{aligned}$$

Aqui, notamos que o escalar de curvatura,  $\mathcal{R}$ , fornece somente termos de massa para os campos, enquanto os termos cinéticos provém do setor de Chern-Simons. Além disso, vemos que o campo pseudo-escalar  $\varphi$  se comporta como um campo auxiliar e, portanto, pode ser eliminado por intermédio de sua equação de movimento, ou seja,

$$\varphi = -\frac{a_4}{6a_1} \partial_\mu t^\mu. \quad (2.24)$$

Inserindo (2.24) de volta em (2.23), obtemos um Lagrangeano escrito exclusivamente em termos dos campos  $t_\mu$  e  $X_{\mu\nu}$ . Usando a álgebra dos projetores de spin, os propagadores são obtidos facilmente. Suas formas explícitas no espaço dos *momenta* são dadas a seguir:

$$\begin{aligned}
\langle XX \rangle = i \left\{ -\frac{a_1}{2(a_4^2 p^2 - a_1^2)} P^{(2)} + \frac{1}{2a_1} (P^{(1)} + P^{(0-s)}) \right. \\
\left. - \frac{(a_4^2 p^2 - 12a_1^2)}{a_1(5a_4^2 p^2 + 12a_1^2)} P^{(0-\omega)} - \frac{a_4}{8(a_4^2 p^2 - a_1^2)} S + \frac{a_4}{8a_1^2} R \right\}, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\langle t_\mu t_\nu \rangle = \frac{i}{a_1} \theta_{\mu\nu} - \frac{ia_4}{2a_1^2} A_{\mu\nu} - \frac{12ia_1}{5a_4^2 p^2 + 12a_1^2} \omega_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

onde omitimos os índices no campo  $X_{\mu\nu}$  e nos projetores  $P_{\mu\nu,\kappa\lambda}$ ,  $S_{\mu\nu,\kappa\lambda}$  e  $R_{\mu\nu,\kappa\lambda}$ . Dos resultados acima, vemos que esta teoria contém um pólo massivo e não-taquiônico no setor de spin-2 de  $\langle X_{\mu\nu} X_{\kappa\lambda} \rangle$ . Por outro lado, (2.26) nos mostra que o campo  $t_\mu$  descreve a propagação de um modo longitudinal e taquiônico que não se acopla a correntes externas (transversas) conservadas. O mesmo se verifica para o propagador misto  $\langle X_{\mu\nu} t_\lambda \rangle$ , o qual não é apresentado acima. O próximo passo é verificar a unitariedade a *tree-level* da teoria. Isto será feito analisando o resíduo dos pólos dos propagadores saturados. A fonte com a qual iremos saturar o propagador  $\langle X_{\mu\nu} X_{\kappa\lambda} \rangle$  é compatível com as simetrias da teoria e pode ser expandida em termos de uma base completa, como segue:

$$\begin{aligned}
\tau_{\mu\nu}(p) = a(p) p_\mu p_\nu + b(p) p_{(\mu} \tilde{p}_{\nu)} + c(p) p_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} \\
+ d(p) \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu + e(p) \tilde{p}_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} + f(p) \varepsilon_{(\mu} \varepsilon_{\nu)}, \quad (2.27)
\end{aligned}$$

onde  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ ,  $\tilde{p}^\mu = (p^0, -\mathbf{p})$ , e  $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$  são vetores linearmente independentes. Eles satisfazem as seguintes condições:

$$p^\mu \tilde{p}_\mu = (p^0)^2 + \mathbf{p}^2 \neq 0, \quad (2.28)$$

$$p^\mu \varepsilon_\mu = 0, \quad (2.29)$$

$$\varepsilon^\mu \varepsilon_\mu = -1. \quad (2.30)$$

A amplitude de transição corrente-corrente no espaço dos *momenta* é dada pelo propagador livre saturado com as correntes externas:

$$\mathcal{A} = \tau^{*\mu\nu}(p) \langle X_{\mu\nu}(p) X_{\kappa\lambda}(p) \rangle \tau^{\kappa\lambda}(p). \quad (2.31)$$

Devido ao vínculo  $p_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$ , somente os projetores transversos  $P^{(2)}$ ,  $P^{(0-s)}$  e  $S$  podem dar contribuições não-nulas para a amplitude. Entretanto, quando tomamos a parte imaginária do resíduo da amplitude no pólo massivo,  $\mu^2 \equiv \left(\frac{a_1}{a_4}\right)^2$ , somente o setor de spin-2 do propagador irá contribuir. Com isto, obtemos o seguinte resultado:

$$Im(\mathcal{R}es\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \rightarrow \mu^2} -\frac{1}{2a_1} (|\tau_{\mu\nu}|^2 - \frac{1}{2} |\tau_\mu{}^\mu|^2). \quad (2.32)$$

Para pólos massivos, a análise pode ser feita no referencial de repouso. Neste caso,

$$p^\mu = (\mu, 0, 0), \quad (2.33)$$

$$\tilde{p}^\mu = (\mu, 0, 0),$$

$$\varepsilon^\mu = (0, \varepsilon).$$

Assim, expressando as fontes em termos desta base, (2.32) torna-se

$$Im(\mathcal{R}es\mathcal{A}) = -\frac{1}{4a_1} |f|^2. \quad (2.34)$$

Neste caso, ao contrário da teoria sem torção, o sinal do setor de Einstein deve ser negativo, ou seja:

$$a_1 = -\frac{1}{\kappa^2}, \quad (2.35)$$

de outro modo o pólo massivo se tornaria um *ghost*. Dos resultados (2.25) e (2.34), segue que o Lagrangeano (2.23) descreve a propagação de uma componente física da torção com spin-2 e massa  $\mu^2$ . De fato, como veremos a seguir, a componente de spin-2 da torção desempenha um papel central no estudo de teorias da gravitação em 3D no sentido de que somente esta componente pode afetar o setor de spin-2 do propagador do gráviton. Agora, retomaremos o nosso propósito anterior de inverter o operador de onda completo (2.20).

Primeiramente, optamos por inverter os setores  $M$  e  $Q$ , usando a álgebra dos projetores listados em (2.17-2.19). A seguir, devemos inverter  $(M - NQ^{-1}P)$  e  $(Q - PM^{-1}N)$ . Desta forma, os propagadores são classificados em quatro setores, isto é

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= (M - NQ^{-1}P)^{-1}, \\ Z &= -Q^{-1}PX, \\ W &= (Q - PM^{-1}N)^{-1}, \\ Y &= -M^{-1}NW, \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou explicitamente, em termos dos elementos de matriz  $iX_{11} = \langle hh \rangle, iX_{12} = \langle hX \rangle, \dots, iW_{22} = \langle \varphi\varphi \rangle$ . Os propagadores não-nulos, no espaço dos *momenta*, estão listados abaixo:

$$\begin{aligned} \langle hh \rangle &= i \left\{ -\frac{8a_1(5a_4^2p^2 + 4a_1^2)}{\kappa^2p^2(a_4^2p^2 - 4a_1^2)^2} P^{(2)} + \frac{2\alpha}{p^2} P^{(1)} \right. \\ &\quad - \frac{8a_1}{\kappa^2p^2(9a_4^2p^2 - 4a_1^2)} P^{(0-s)} \\ &\quad + \frac{4[\kappa^2\alpha(9a_4^2p^2 - 4a_1^2) - 4a_1]}{\kappa^2p^2(9a_4^2p^2 - 4a_1^2)} P^{(0-w)} \\ &\quad - \frac{8\sqrt{2}a_1}{\kappa^2p^2(9a_4^2p^2 - 4a_1^2)} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \\ &\quad \left. + \frac{2a_4(a_4^2p^2 + 8a_1^2)}{\kappa^2p^2(a_4^2p^2 - 4a_1^2)^2} S \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \langle Xh \rangle &= i \left\{ \frac{6a_4(a_4^2p^2 + 4a_1^2)}{\kappa(a_4^2p^2 - 4a_1^2)^2} P^{(2)} - \frac{6a_4}{\kappa(9a_4^2p^2 - 4a_1^2)} P^{(0-s)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\sqrt{2}a_4}{\kappa(9a_4^2p^2 - 4a_1^2)} P^{(0-sw)} - \frac{6a_4^2a_1}{\kappa(a_4^2p^2 - 4a_1^2)^2} S \right\}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \langle XX \rangle &= i \left\{ -\frac{2a_1(7a_4^2p^2 - 4a_1^2)}{(a_4^2p^2 - 4a_1^2)^2} P^{(2)} + \frac{1}{2a_1} P^{(1)} \right. \\ &\quad - \frac{2a_1}{(9a_4^2p^2 - 4a_1^2)} P^{(0-s)} - \frac{(a_4^2p^2 - 12a_1^2)}{2a_1(5a_4^2p^2 + 12a_1^2)} P^{(0-w)} \\ &\quad \left. + \frac{a_4(a_4^2p^2 + 2a_1^2)}{(a_4^2p^2 - 4a_1^2)^2} S + \frac{a_4}{8a_1^2} R \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\langle X_{\mu\nu} t_\kappa \rangle = \frac{a_4}{4a_1^2} (\theta_{\mu\kappa} p_\nu + \theta_{\nu\kappa} p_\mu) + \frac{6a_4}{5a_4^2 p^2 + 12a_1^2} \omega_{\mu\nu} p_\kappa, \quad (2.41)$$

$$\langle \varphi X_{\mu\nu} \rangle = i \frac{a_4 p^2 (a_4^2 p^2 - 2a_1^2)}{a_1^2 (5a_4^2 p^2 + 12a_1^2)} \omega_{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

$$\langle t_\mu t_\nu \rangle = \frac{i}{a_1} \theta_{\mu\nu} - \frac{ia_4}{2a_1^2} A_{\mu\nu} - \frac{12ia_1}{5a_4^2 p^2 + 12a_1^2} \omega_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

$$\langle t_\mu \varphi \rangle = \frac{2ia_4}{5a_4^2 p^2 + 12a_1^2} p_\mu, \quad (2.44)$$

$$\langle \varphi \varphi \rangle = -\frac{2i(a_4^2 p^2 + 2a_1^2)}{a_1 (5a_4^2 p^2 + 12a_1^2)}. \quad (2.45)$$

Após a inspeção dos pólos dos propagadores apresentados acima, podemos listar os seguintes resultados:

(i) um pólo duplo indesejável aparece em  $p^2 = \left(\frac{2a_1}{a_4}\right)^2$ , localizado no setor de spin-2 dos propagadores  $h_{\mu\nu} - X_{\kappa\lambda}$  (iremos contornar esta situação logo a seguir);

(ii) um pólo massivo aparece em  $p^2 = \left(\frac{2a_1}{3a_4}\right)^2$  no setor de spin-0 dos propagadores  $h_{\mu\nu} - X_{\kappa\lambda}$ ;

(iii) um pólo taquiônico aparece em  $p^2 = -\frac{12a_1^2}{5a_4^2}$  no setor longitudinal,  $P^{(0-w)}$ , dos propagadores  $X_{\mu\nu} - t_\kappa$  (entretanto isto não contribui para o resíduo da amplitude corrente-corrente sempre que as fontes forem transversas).

Agora, buscaremos os vínculos sobre os parâmetros da teoria de modo que a matriz dos resíduos no pólo seja positiva-definida. Usando (2.38-2.40), obtemos os seguinte resíduo do propagador saturado no pólo  $p^2 = \left(\frac{2a_1}{3a_4}\right)^2 \equiv m_1^2$ :

$$Im(\mathcal{R}es\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \rightarrow m_1^2} \begin{pmatrix} \tau^* & \sigma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8a_1}{p^2 \kappa^2} & -6a_4 \\ -6a_4 & -2a_1 \kappa^2 \end{pmatrix} P^{(0-s)} \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

onde redefinimos o campo  $X_{\mu\nu}$ ,  $X'_{\mu\nu} = \kappa X_{\mu\nu}$ , de modo que  $X_{\mu\nu}$  e  $h_{\mu\nu}$  possuam a mesma dimensão.  $\tau$  e  $\sigma$  são, respectivamente, as correntes externas associadas ao campo do gráviton e à torção. A matriz de resíduo acima possui um autovalor positivo (não é *ghost*), escolhendo  $a_1 < 0$ , o que corresponde a um modo físico de spin zero. Além disso, vemos que a inclusão da torção na teoria de Einstein-Hilbert-Chern-Simons, feita pela substituição do símbolo de Christoffel pela conexão de Cartan, leva a uma teoria que contém pólos de segunda ordem no setor de spin-2 dos propagadores, e a unitariedade é conseqüentemente violada [27]. A fim de contornar esta situação indesejável, propomos

a introdução dos termos quadráticos na curvatura no Lagrangeano original, isto é:  $a_2 \mathcal{R}^2$  e  $a_3 \mathcal{R}^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$ , bem como o seguinte termo de acoplamento,  $a_5 X^{\mu\nu} \widetilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$ , onde o til em  $\widetilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$  significa que estamos considerando somente a parte Riemanniana deste tensor. O significado deste último termo irá se tornar claro logo adiante. Por simplicidade, analisaremos somente o setor  $h_{\mu\nu} - X_{\kappa\lambda}$  do Lagrangeano, já que os outros setores não afetarão o setor de spin-2 dos propagadores. Portanto, temos como objetivo inverter somente o setor M do operador de onda, com a inclusão em seus elementos de matriz dos novos termos proporcionais a  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_5$ . Neste caso, o operador a ser analisado possui a seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

onde

$$\begin{aligned} M_{11} &= M_{11,0} + \frac{a_3}{2} \kappa^2 \square^2 P^{(2)} + \left( \frac{3}{2} a_3 + 4a_2 \right) \kappa^2 \square^2 P^{(0-s)}, \\ M_{12} &= M_{21} = M_{12,0} + \frac{a_3 \kappa}{4} \square S + \frac{a_5 \kappa}{4} \square \left( P^{(2)} - P^{(0-s)} \right), \\ M_{22} &= M_{22,0} - a_3 \square \left( 2P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + \frac{1}{2} P^{(0-w)} \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde os  $M'_{\dots,0}$ s são os elementos de matriz anteriores oriundos dos termos escalar de curvatura e Chern-Simons, listados em (2.21). Procedendo da mesma forma como em (2.36-2.40), poderemos obter os propagadores  $h_{\mu\nu} - X_{\kappa\lambda}$ . Agora, torna-se clara a importância do novo termo de acoplamento  $a_5 X^{\mu\nu} \widetilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$ : este possui a mesma estrutura que  $M_{12,0}$  em termos de operadores; logo, se fizermos  $a_5 = 6a_4$  e  $a_3 = 0$ , o campo de torção desacopla-se do campo gravitacional e, conseqüentemente, estes podem ser tratados independentemente. Por outro lado, se  $a_3 \neq 0$ ,  $a_5 = 6a_4$  e  $a_1 = 0$ , obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \langle hh \rangle &= i \left\{ \frac{2a_3}{p^2 \kappa^2 (9a_3^2 p^2 - 4a_4^2)} P^{(2)} + \frac{2\alpha}{p^2} P^{(1)} + \frac{2}{p^4 \kappa^2 (3a_3 + 8a_2)} P^{(0-s)} \right. \\ &\quad + \frac{4[\alpha(3a_3 + 8a_2) \kappa^2 p^2 + 1]}{p^4 \kappa^2 (3a_3 + 8a_2)} P^{(0-w)} \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}}{p^4 \kappa^2 (3a_3 + 8a_2)} \left( P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)} \right) - \frac{(3a_3^2 p^2 - 2a_4^2)}{2a_4 p^4 \kappa^2 (9a_3^2 p^2 - 4a_4^2)} S \right\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\langle Xh \rangle = -i \left\{ \frac{a_3^2}{a_4 \kappa (9a_3^2 p^2 - 4a_4^2)} P^{(2)} + \frac{a_3}{2p^2 \kappa (9a_3^2 p^2 - 4a_4^2)} S \right\}, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
\langle XX \rangle = i \left\{ \frac{2a_3}{(9a_3^2 p^2 - 4a_4^2)} P^{(2)} + \frac{a_3}{(a_3^2 p^2 - a_4^2)} P^{(1)} \right. \\
+ \frac{1}{a_3 p^2} P^{(0-s)} + \frac{2}{a_3 p^2} P^{(0-w)} \\
\left. + \frac{a_4}{2p^2(a_3^2 p^2 - a_4^2)} R - \frac{(3a_3^2 p^2 - 4a_4^2)}{a_4 p^2(9a_3^2 p^2 - 4a_4^2)} S \right\}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Usando (2.49-2.51), obtemos o seguinte resíduo para o operador saturado no pólo  $p^2 = \left(\frac{2a_4}{3a_3}\right)^2 \equiv m_2^2$ :

$$Im(\mathcal{R}es\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \begin{pmatrix} \tau^* & \sigma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2a_3}{p^2 \kappa^2} & -\frac{a_3^2}{a_4} \\ -\frac{a_3^2}{a_4} & 2a_3 \kappa^2 \end{pmatrix} P^{(2)} \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

De (2.52), obtemos a seguinte condição sobre os parâmetros do Lagrangeano de modo ao pólo massivo não corresponder a um *ghost*:

$$a_3 = a_4 \kappa^2, \quad a_4 > 0. \tag{2.53}$$

Também, enfatizamos que a matriz de resíduo (2.52) contém dois autovalores positivos, de tal forma que esta teoria decreve a propagação de um gráviton e de um quantum de torção, ambos de spin-2 e de mesma massa. Em relação ao pólo de massa nula nos propagadores do setor  $h_{\mu\nu} - X_{\kappa\lambda}$ , enfatizamos que o mesmo não é problemático: da mesma forma que no caso onde a torção não é considerada, este pólo não é dinâmico pois o mesmo fornece um resíduo nulo para a amplitude corrente-corrente. Desta forma, todas as excitações físicas que se propagam como graus de liberdade do setor gravitacional são massivas.

## 2.3 Comentários Finais

O principal objetivo de nossa investigação foi verificar que papel a torção pode assumir na gravitação em 3D em presença do termo de massa topológica. Entre as várias peculiaridades encontradas, citamos, por exemplo, o aparecimento de um pólo duplo (independente do gauge) no setor de spin-2 dos propagadores do gráviton e da torção, o qual destrói a unitariedade do modelo. Entretanto, verificamos que a unitariedade pode ser restaurada pela inclusão de termos de ordem superior na curvatura ( $\mathcal{R}^2$  e  $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ ), bem como um termo de acoplamento entre o tensor de Ricci e o campo de ordem dois da torção,  $X_{\mu\nu}$ ; o



pólo duplo é eliminado através de uma escolha apropriada dos parâmetros da teoria. Estudamos também a possibilidade de propagação da torção no espaço plano. Nesta situação, somente um pólo simples aparece no setor de spin-2 da teoria; a unitariedade é verificada a *tree-level*. Em 3D, os três diferentes setores de spin do tensor de torção possuem características bem distintas no que diz respeito à dinâmica destes graus de liberdade: no caso em que somente os termos de Einstein-Hilbert e de Chern-Simons estão presentes na ação, a componente escalar,  $\varphi$ , comporta-se como um campo auxiliar, enquanto no setor vetorial,  $t_\mu$ , somente a componente longitudinal se propaga e o setor de spin-2 de  $X_{\mu\nu}$  é dinâmico. Até aqui, estudamos o espectro de partículas na gravitação com torção em três dimensões, sem levar em consideração seu acoplamento à matéria fermiônica; este será o objeto de estudo do próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Torção Dinâmica e Geração de Massa em Gravitação Planar

Um dos fatores mais importantes no estudo das teorias de campo em três dimensões está relacionado às suas possíveis aplicações na descrição de modelos de Matéria Condensada a temperaturas finitas. Nestes modelos, a questão da preservação da simetria de paridade vem sendo investigada com muito interesse. Espinores de duas e quatro componentes têm sido adotados para descrever os campos de matéria nos casos de quebra e preservação da simetria de paridade, respectivamente. No primeiro caso (duas componentes), onde a realização da álgebra de Dirac é feita usando as matrizes de Pauli, obtemos uma teoria com férmions massivos que viola a simetria de paridade. Por outro lado, na representação de quatro componentes, cada espinor é equivalente a duas espécies de espinores de duas componentes, com parâmetros de massa de sinais opostos, de tal forma que a paridade é preservada.

Considerando um caso mais geral, onde o campo gravitacional não é desprezado, verificamos que a matéria fermiônica interage minimamente com a parte não-simétrica da conexão afim (torção). Em particular, em 3D, veremos que esta interação é do tipo Yukawa.

Em vista destes fatos, propomos neste capítulo uma análise mais detalhada da interação do campo gravitacional com a matéria fermiônica. Em particular, desejamos abordar o estudo da geração dinâmica de massa para estes férmions (de duas e quatro

componentes) que interagem com o campo gravitacional, considerado em uma situação tal que as excitações da torção dominam frente àquelas relacionadas com as da métrica. Na prática, isto significa que adotaremos um espaço tridimensional plano, no qual os graus de liberdade do campo de torção se propagam e interagem com os campos de matéria. Com este procedimento, podemos isolar as contribuições genuínas do campo de torção relacionadas com o problema de geração dinâmica de massa <sup>1</sup>.

### 3.1 Acoplamento com a Matéria: Espinores de Duas Componentes

Neste capítulo, estudaremos os acoplamentos mínimo e não-mínimo entre torção e matéria fermiônica. Nesta análise, consideraremos somente a componente pseudo-escalar da torção, pois, como veremos a seguir, somente esta componente acopla-se minimamente aos férmions. Isto significa que estamos supondo um regime no qual as componentes vetorial e tensorial da torção não são excitadas.

Como vimos no capítulo anterior, o Lagrangeano de Einstein-Cartan restringe a torção, bem como o gráviton, a serem campos não-dinâmicos em 3D. Entretanto, vimos também que podemos estender esta teoria, considerando termos de curvatura de ordem superior e, com isto, proporcionar dinâmica para a torção. Desta forma, torna-se uma questão relevante a discussão das implicações da hipótese da torção ser um campo que se propaga. Várias classes de Lagrangeanos para a torção podem ser obtidos através da substituição dos símbolos de Christoffel pela conexão afim de Cartan. Além disso, como estamos interessados principalmente na interação entre torção e férmions, consideraremos  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Isto significa dizer que nossa análise restringe-se a estudar os efeitos da torção no espaço plano, ou seja: as flutuações da métrica são consideradas fracas em comparação com as excitações da torção. Neste caso, os termos de curvatura podem ser expressos

---

<sup>1</sup>Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se publicados no trabalho *Propagating Torsion in 3D-Gravity and Dynamical Mass Generation*, Preprint hep-th/9905110; em co-autoria com J.A. Helayël-Neto e N. Panza

como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{\mu\nu}{}^\lambda \partial_\lambda \varphi - \eta_{\mu\nu} \varphi^2 \right), \\ R &= -\frac{3}{2} \varphi^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

então

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{3}{4} \varphi^4. \quad (3.2)$$

Destes resultados, vemos que a torção comporta-se como um campo que se propaga em modelos para gravitação do tipo  $R^2$ . Também, o potencial renormalizável mais geral na gravitação em 3D pode ser obtido via potências do escalar de curvatura, ou seja:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= a_n R^n, \quad n \leq 3 \\ &= a_1 \varphi^2 + a_2 \varphi^4 + a_3 \varphi^6. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Posteriormente, usaremos este potencial para discutir o mecanismo de quebra espontânea de simetria de paridade através de um valor esperado no vácuo, não-trivial, do campo pseudo-scalar,  $\varphi$ .

À primeira vista, o modo mais simples de se obter interações entre torção e campos relativísticos dá-se através da derivada covariante (acoplamento mínimo). Como vimos anteriormente, a conexão afim contém uma parte que depende da torção e, portanto, em cada derivada covariante do campo em consideração existe uma interação com a torção. Entretanto, no caso de alguns campos com spin não-trivial, este procedimento pode quebrar a invariância de gauge local da teoria. De fato, no caso do campo de gauge,  $A_\mu$ , o mesmo não pode interagir minimamente com a torção e, ao mesmo tempo, preservar a invariância de gauge local (o mesmo ocorre com o campo de gauge de Kalb-Ramond,  $B_{\mu\nu}$ , o qual será objeto de estudo do próximo capítulo). No caso da teoria escalar, a derivada covariante é igual à derivada simples e, portanto, campos escalares também não se acoplam minimamente à torção. Por outro lado, a exigência de que a equação de Dirac em um campo gravitacional preserve a invariância de Lorentz local resulta em uma interação direta entre torção e férmions. No espaço tempo de Riemann-Cartan, a ação de Dirac para um campo fermiônico massivo tem a seguinte forma

$$S_D = \int d^3x \sqrt{g} \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \right], \quad (3.4)$$

onde as derivadas covariantes dos campos espinoriais são dadas por:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{8} B_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] \psi, \quad (3.5)$$

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{8} B_\mu^{ab} \bar{\psi} [\gamma_a, \gamma_b];$$

os índices latinos referem-se às componentes do tipo *frame* (localmente planas).  $B_\mu^{ab}$  são as componentes da conexão de spin,

$$B_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab} + K_\mu^{ab}, \quad (3.6)$$

que é o campo de gauge do grupo de Lorentz local.  $\omega_\mu^{ab}$  é a parte Riemanniana da conexão de spin:

$$\omega_\mu^{ab} = e_{\mu c} \omega^{cab} = \frac{1}{2} e_{\mu c} (\Omega^{cab} + \Omega^{acb} - \Omega^{bac}), \quad (3.7)$$

onde  $\Omega_{cba} = e_c^\mu e_b^\nu (\partial_\mu e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\mu a})$  são os coeficientes de rotação (ver Ref. [20] para detalhes);  $e_\mu^a$  são as dreibeins. Os  $K_\mu^{ab}$  's, como no capítulo precedente, são as componentes do tensor de contorsão.

Primeiramente, iremos analisar o acoplamento de espinores de duas componentes com a gravitação. Neste caso, usaremos a seguinte representação para as matrizes de Dirac no espaço plano em 3D:

$$\gamma^0 = \sigma^3; \quad \gamma^1 = i\sigma^1; \quad \gamma^2 = i\sigma^2, \quad (3.8)$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. Estas satisfazem às seguintes relações:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbf{1}, \quad (3.9)$$

e

$$\gamma^a \gamma^b = \eta^{ab}\mathbf{1} - i\varepsilon^{abc}\gamma_c. \quad (3.10)$$

Após alguma álgebra, o Lagrangeano para o campo fermiônico minimamente acoplado à gravitação pode ser expresso como abaixo:

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (3.11)$$

onde  $\mathcal{L}_0$  é o Lagrangeano livre de Dirac,

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.12)$$

enquanto  $\mathcal{L}_I$  é o termo de interação,

$$\mathcal{L}_I = \frac{i}{4} K_{\mu\nu\lambda} \bar{\psi} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} \psi, \quad (3.13)$$

sendo  $\gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]}$  o produto totalmente anti-simétrico de três matrizes gama de Dirac. Usando a identidade  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} = -i3! \mathbf{1}$ , o termo de interação pode ser reescrito simplesmente como:

$$\mathcal{L}_I = \frac{3}{4} \varphi \bar{\psi} \psi. \quad (3.14)$$

Assim, vemos que somente a componente  $\varphi$  do campo de torção acopla-se minimamente aos férmions, sendo esta interação do tipo Yukawa.

Além do acoplamento mínimo apresentado acima, podemos considerar o seguinte acoplamento não-mínimo entre férmions e a gravitação:

$$S_{n-m} = \xi \int d^3x \sqrt{g} R \bar{\psi} \psi, \quad (3.15)$$

motivados pelo fato de que somente a excitação pseudo-scalar é levada em consideração no modelo que nos propomos a analisar.

Assim, de (3.4) e (3.15), obtemos o seguinte Lagrangeano de matéria em presença da torção:

$$\mathcal{L}_D = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \frac{3}{4} \eta \varphi \bar{\psi} \psi - \frac{3}{2} \xi \varphi^2 \bar{\psi} \psi, \quad (3.16)$$

onde os termos de interação vêm dos acoplamentos mínimo (se  $\eta = 1$ ) e não-mínimo, respectivamente.

Até agora, vimos que a torção aparece na teoria fermiônica como um campo algébrico; se adicionarmos somente o escalar de curvatura (3.1) à ação (3.4), o campo de torção pode ser eliminado através de sua equação de movimento, induzindo somente uma interação não-renormalizável do tipo  $(\bar{\psi} \psi)^2$ . Entretanto, como já havíamos ressaltado anteriormente, de (3.1) e (3.2), poderemos dar um caráter dinâmico à torção, se incluirmos estes termos de curvatura de ordem superior no Lagrangeano; logo, vamos considerar a seguinte ação:

$$S = S_D + S_R, \quad (3.17)$$

onde  $S_D$  é dada por (3.4) e (3.15), enquanto  $S_R$  é definida como:

$$S_R = \int d^3x \sqrt{g} \left[ aR + b \left( R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) \right]. \quad (3.18)$$

Portanto, consideramos o seguinte Lagrangeano para férmions e torção no espaço plano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2 \right) + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ & + \alpha \phi \bar{\psi} \psi - \beta \phi^2 \bar{\psi} \psi, \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo que redefinimos o campo  $\varphi \rightarrow \phi = \sqrt{b} \varphi$ , tal que  $\mu^2 = \frac{3a}{b}$ ,  $\alpha = \frac{3\eta}{4\sqrt{b}}$  e  $\beta = \frac{3\xi}{2b}$ . Note que devemos exigir que  $b > 0$  e  $a > 0$  para assegurar que  $\mu^2$  seja positivo e que  $\alpha$  seja real. Além disso, as dimensões canônicas dos campos e parâmetros são as seguintes:

$$[\phi] = \frac{1}{2}; \quad [\psi] = 1; \quad [\alpha] = \frac{1}{2}; \quad [\beta] = 0. \quad (3.20)$$

As transformações de paridade ( $\mathcal{P}$ ) para as coordenadas e campos são definidas como:

$$\begin{aligned} x^a & \rightarrow (x^0, -x^1, x^2), \\ \phi(x) & \rightarrow -\phi(x'), \\ \psi(x) & \rightarrow -i\gamma^1 \psi(x'). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Logo, vemos que o termo de massa fermiônica e o termo de acoplamento não-mínimo,  $\phi^2 \bar{\psi} \psi$ , não são invariantes sobre  $\mathcal{P}$ .

A seguir, poderemos extrair as regras de Feynman para a teoria considerada. Os propagadores para os campos escalares e espinoriais obtidos do setor bilinear da ação são dados por:

$$i\Delta_0(p) = \frac{i}{p^2 - \mu^2}, \quad iS_0(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \quad (3.22)$$

Além disso, os vértices do tipo férmion-torção são

$$V_\alpha(\psi, \phi) = i\alpha, \quad V_\beta(\psi, \phi) = -2i\beta. \quad (3.23)$$

De acordo com (3.20), podemos verificar que o vértice  $V_\alpha$  é super-renormalizável, enquanto  $V_\beta$  é renormalizável. De fato, o grau superficial de divergência dos gráficos primitivamente divergentes,  $\delta$ , diminui quando o número de vértices,  $V_\alpha$ , aumenta:

$$\delta = 3 - \frac{1}{2}N_\alpha - \frac{1}{2}E_\phi - E_\psi, \quad (3.24)$$

onde  $N_\alpha$  é o número de vértices  $V_\alpha$ , enquanto  $E_\phi$  e  $E_\psi$  são as linhas externas associadas a  $\phi$  e  $\psi$ , respectivamente.

A partir destes resultados, partiremos para os cálculos explícitos das correções de auto-energia para os propagadores *bare* e, a seguir, discutiremos o mecanismo de geração de massa para os campos não-massivos - nos casos de partirmos com  $m$  e (ou)  $\mu = 0$  - pela análise dos pólos dos propagadores corrigidos a 1-loop. O gráfico de auto-energia para o férmion, devido ao acoplamento de Yukawa, é dado por:

$$-i\Sigma_\alpha(p) = (i\alpha)^2 (i)^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} - \not{l} + m)}{[(p-l)^2 - m^2] (l^2 - \mu^2)}. \quad (3.25)$$

Como estamos interessados em identificar somente a parte da expressão acima responsável pela geração de massa, tomaremos o limite de momento externo tendendo para zero:

$$-i\Sigma_\alpha(0) = i \frac{\alpha^2 m}{4\pi (|m| + |\mu|)}. \quad (3.26)$$

Similarmente, a contribuição para a auto-energia do férmion advinda do seu acoplamento não-mínimo com a torção é:

$$-i\Sigma_\beta(p) = i \frac{\beta\mu}{2\pi}. \quad (3.27)$$

O propagador do férmion corrigido pelas inserções da auto-energia é dado por

$$\begin{aligned} iS &= iS_0 + iS_0 (-i\Sigma) iS_0 + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde

$$\Sigma = \Sigma_\alpha + \Sigma_\beta. \quad (3.29)$$

Os resultados acima mostram que se tivéssemos suposto que a torção fosse não-massiva<sup>2</sup> ( $\mu = 0$ ), a correção de auto-energia para o férmion (3.29) seria diferente de zero, e dada exclusivamente em termos da constante de acoplamento de Yukawa,  $\alpha$ . Entretanto, alertamos que este resultado não deve ser interpretado como uma geração dinâmica de massa para o férmion, já que não parece um procedimento consistente tomar o limite  $m \rightarrow 0$  após os cálculos perturbativos [8]; se tivéssemos considerado, já desde o início, uma teoria com férmions e torção não-massivos ( $m = \mu = 0$ ), teríamos encontrado:

$$-i\Sigma(p) = \frac{\alpha^2}{16} \frac{\not{p}}{\sqrt{p^2}}, \quad (3.30)$$

---

<sup>2</sup>Torção com massa nula resulta no mesmo problema infra-vermelho que aquele encontrado na QED<sub>3</sub>.



e, assim, não seria gerada massa dinamicamente para o férmion, o que está de acordo com a invariância de paridade de modelos com férmions não-massivos em 3D: uma anomalia de paridade não seria induzida perturbativamente em modelos com férmions. Resumindo, podemos afirmar que:

i- no caso de férmions não-massivos ( $m = 0$ ), ocorre o mecanismo de geração dinâmica de massa para os mesmos; o propagador fermiônico modificado desenvolve um pólo massivo em  $p^2 = \left(\frac{\beta\mu}{2\pi}\right)^2$ . Alertamos que esta massa para o férmion advém do acoplamento não-mínimo à torção, acoplamento este que quebra explicitamente a simetria de paridade. Por isto, não é sensato associar-se este mecanismo de geração de massa a uma anomalia de paridade;

ii- se tivéssemos considerado desde o início o caso de torção sem massa ( $\mu = 0$ ) e férmions massivos ( $m \neq 0$ ), obteríamos somente um deslocamento no pólo massivo:  $p^2 = \left(m - \frac{\alpha^2}{4\pi}\right)^2$ .

Da mesma forma, calculamos a correção de auto-energia para o campo de torção, ou seja:

$$\begin{aligned} i\Pi_\phi(p) &= -(i\alpha)^2 (i)^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr}[(l+m)(l-\not{p}+m)]}{(l^2-m^2)[(l-p)^2-m^2]}, \\ i\Pi_\phi(0) &= -i\frac{m\alpha^2}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Similarmente, o propagador para a torção, corrigido pelas inserções da auto-energia, é obtido somando a série

$$\begin{aligned} i\Delta &= i\Delta_0 + i\Delta_0 (i\Pi_\phi) i\Delta_0 + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu^2 + \Pi_\phi}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Novamente, temos uma correção de massa; desta vez, no pólo do propagador da torção. Deste último resultado, concluímos que o campo de torção será o mediador de uma interação de curto alcance entre férmions massivos. Em outras palavras, se considerarmos uma teoria onde a torção for inicialmente não-massiva ( $\mu = 0$ ), seu propagador corrigido a 1-loop exibirá um pólo em  $p^2 = \frac{m\alpha^2}{\pi}$ . Assim, devemos enfatizar que a geração de massa para a torção exige seu acoplamento a férmions massivos.

Finalizaremos esta seção fazendo uma breve discussão sobre a possibilidade de se gerar massa para o campo fermiônico usando o mecanismo de quebra espontânea de simetria de paridade do modelo.

Como vimos anteriormente, se tivéssemos partido de um modelo com simetria de paridade, ou seja, para férmions não-massivos e  $\beta = 0$ , não seria gerada massa dinamicamente para os férmions devido somente à interação de Yukawa. Por outro lado, reescrevendo o potencial (3.3) como:

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2!}\phi^2 + \frac{\zeta}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda}{6!}\phi^6, \quad (3.33)$$

poderemos estudar o mecanismo de quebra espontânea de simetria de paridade como um possível modo de se gerar massa para os férmions. Com este propósito, vamos considerar o seguinte Lagrangeano com simetria de paridade:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \alpha\phi\bar{\psi}\psi - V(\phi). \quad (3.34)$$

Os parâmetros  $\mu$ ,  $\zeta$  e  $\lambda$  devem ser escolhidos adequadamente, isto é:

$$\lambda > 0, \quad \zeta < 0 \quad e \quad \mu^2 \leq \frac{5}{8} \frac{\zeta^2}{\lambda}, \quad (3.35)$$

de modo que o potencial tenha limite inferior na energia e nos forneça um vácuo estável [28]. Seja  $\langle \phi \rangle = v$  o valor esperado no vácuo do campo  $\phi$ ; a condição de mínimo para o potencial é dada por:

$$\mu^2 + \frac{\zeta v^2}{3!} + \frac{\lambda v^4}{5!} = 0, \quad (3.36)$$

cuja solução é escolhida como:

$$v^2 = -\frac{\zeta}{2\lambda} + \left[ \left( \frac{\zeta}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.37)$$

Assim, consideramos

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + v, \quad (3.38)$$

tal que  $\tilde{\phi}$  possui valor esperado no vácuo nulo. Repassando esta parametrização para o Lagrangeano (3.34), seu setor bilinear lê-se:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + M^2 \tilde{\phi}^2 \right) + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \alpha v \bar{\psi}\psi, \quad (3.39)$$

onde  $M^2 < 0$ . Isto nos mostra que os férmions podem adquirir massa já a *tree-level* e, de acordo com a nossa discussão anterior, correções a *1-loop* provocariam simplesmente um deslocamento no pólo do propagador fermiônico.

Até aqui, consideramos alguns modelos onde a torção é acoplada a espinores de duas componentes com uma representação bidimensional usada para descrever a álgebra das matrizes-gama de Dirac. Como havíamos enfatizado, esta representação leva a uma teoria com quebra de simetria de paridade, no caso de férmions massivos, e somente haveria geração dinâmica de massa se levássemos em conta o acoplamento não-mínimo  $\phi^2 \bar{\psi}\psi$  que, por sua vez, também quebra explicitamente a simetria de paridade.

## 3.2 Acoplamento com a Matéria: Espinores de Quatro Componentes

Nesta seção, prosseguiremos nosso estudo de geração dinâmica de massa para férmions considerando uma representação (reduzível) 4x4 da álgebra de Dirac, onde o bilinear fermiônico, correspondendo ao termo de massa para este campo é agora par sobre transformação de paridade [13]. Nesta representação, as três matrizes-gama são tomadas como:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (3.40)$$

e as outras duas matrizes que anticomutam com  $\Gamma^0, \Gamma^1$  e  $\Gamma^2$  são

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Além disso, os espinores de quatro componentes podem ser decompostos como:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_+ & -\bar{\psi}_- \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

onde os subscritos  $\pm$  referem-se aos respectivos sinais de spin [28].

A exigência de que o termo cinético da equação de Dirac seja invariante por paridade fixa a forma do operador de paridade, quando este atua nos espinores de quatro

componentes, ou seja:

$$\mathcal{P} = \Gamma^5 \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^1 \\ -i\gamma^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Assim, usando (3.43), uma transformação de paridade sobre os espinores de duas componentes,  $\psi_{\pm}$ , toma a seguinte forma:

$$\psi_{\pm}(x) \rightarrow -i\gamma^1 \psi_{\mp}(x'), \quad (3.44)$$

e, conseqüentemente, o termo bilinear,

$$m\psi\bar{\psi} = m(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-), \quad (3.45)$$

é invariante por paridade e corresponde a um dublete de férmions de duas componentes com parâmetros de massa de sinais opostos.

Deste modo, nosso ponto de partida é a ação de Dirac para férmions de quatro componentes acoplados à torção:

$$S_D = \int d^3x \sqrt{g} \left[ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \Gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi) + \xi R \bar{\psi} \psi - m \bar{\psi} \psi \right], \quad (3.46)$$

onde

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{8} B_\mu^{ab} [\Gamma_a, \Gamma_b] \psi. \quad (3.47)$$

Em termos dos férmions de duas componentes, a ação acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} S_D = & \int d^3x \sqrt{g} \left[ \frac{i}{2} (\bar{\psi}_+ \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_+ - \mathcal{D}_\mu \bar{\psi}_+ \gamma^\mu \psi_+) \right. \\ & + \frac{i}{2} (\bar{\psi}_- \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_- - \mathcal{D}_\mu \bar{\psi}_- \gamma^\mu \psi_-) \\ & \left. + \xi R (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) - m (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Além da ação acima, consideraremos também termos cinéticos e de massa para a torção, oriundos da ação (3.18). Logo, o Lagrangeano total em um espaço plano é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2) + i\bar{\psi}_+ \gamma^\mu \partial_\mu \psi_+ + i\bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- \\ & + \alpha (\bar{\psi}_+ \psi_+ + \bar{\psi}_- \psi_-) \phi - \beta (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \phi^2 \\ & - m (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Com isto, podemos extrair os propagadores livres para os férmions de duas componentes:

$$iS_+(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad iS_-(p) = i \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2}, \quad (3.50)$$

e também os vértices de interação entre torção e férmions

$$\begin{aligned} V_\alpha(\psi_+, \phi) &= i\alpha, & V_\alpha(\psi_-, \phi) &= i\alpha, \\ V_\beta(\psi_+, \phi) &= -2i\beta, & V_\beta(\psi_-, \phi) &= 2i\beta. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Seguindo o mesmo procedimento como em (3.25-3.29), para o cálculo da auto-energia do férmion, obtemos as seguintes correções a 1-loop para os propagadores obtidos a *tree-level* (3.50):

$$-i\Sigma_\pm(0) = i \frac{\alpha^2 m}{4\pi(m + \mu)} \pm i \frac{\beta\mu}{2\pi}. \quad (3.52)$$

Agora sim, vemos que uma massa é gerada dinamicamente para férmions não-massivos a *tree-level* ( $m = 0$ ) devido ao acoplamento não-mínimo,  $\bar{\psi}\psi\phi^2$ , que, neste caso, é invariante por paridade. Sua contribuição à ação efetiva será um termo de massa da forma (3.45), com  $\bar{m} = -\frac{\beta\mu}{2\pi}$ , termo este que preserva a paridade.

### 3.3 Conclusões

A idéia central deste capítulo foi evidenciar o papel da torção na geração dinâmica de massa para férmions acoplados à gravitação em 3D. Usando o formalismo de spinores de duas componentes, e partindo de um modelo onde a paridade é preservada ( $m = \beta = 0$ ), concluimos que nenhuma massa é gerada dinamicamente para estes férmions. Neste caso, somente seria gerada massa usando o mecanismo de quebra espontânea de simetria, partindo de um potencial de ordem seis para a torção. Por outro lado, se partirmos de uma ação com  $m = 0$ , mas  $\beta \neq 0$  (caso onde há quebra de simetria de paridade), é gerada massa a 1-loop.

Outro fator interessante é que, no tratamento de quatro componentes, o acoplamento não-mínimo,  $\bar{\psi}\psi\phi^2$ , não quebra a invariância de paridade da teoria e um termo de massa (também invariante por paridade) é gerado dinamicamente a 1-loop. O fato dos férmions

de quatro componentes permitirem a geração dinâmica de massa a *1-loop*, e modificar substancialmente o resultado obtido com férmions de duas componentes, é que um dublete de férmions indica a presença de uma simetria global do tipo- $U(2)$  no setor fermiônico e esta introduz algum número quântico novo (*flavour*) responsável pela introdução de massa sem quebra de paridade.

## Capítulo 4

# Geração de Massa para Campos-de-Gauge em Gravitação Planar com Torção

Propostas de modelos com torção dinâmica acoplada à matéria e a campos de gauge têm sido amplamente discutidas nos últimos anos [29, 30, 31]. Recentemente, foram apresentadas algumas conseqüências fenomenológicas da hipótese de se considerar a torção como um campo que se propaga em 4D [31]. Por outro lado, vimos no capítulo anterior que, em modelos da gravitação em 3D, minimamente acoplada a férmions, a torção é representada por um campo pseudo-escalar que se acopla a estes férmions através de uma interação do tipo Yukawa. Verificamos, também, que esta interação desempenha um papel importante no que diz respeito ao mecanismo de geração dinâmica de massa [22].

Dando continuidade a este estudo, faremos uma análise a respeito da possibilidade de se gerar massa dinamicamente para campos de gauge, a partir do acoplamento do campo de torção à matéria fermiônica.

Na Seção 1, consideraremos um modelo bem estabelecido onde a torção propaga-se em um espaço-tempo plano quadridimensional acoplada à matéria fermiônica, compatível com as exigências de renormalizabilidade e unitariedade, de acordo com os resultados do trabalho da Ref. [31]. Adotando este modelo, mostraremos que termos cinéticos para a torção podem ser obtidos a partir de uma combinação adequada de termos quadráticos na

curvatura, ao invés de serem introduzidos arbitrariamente na ação. A seguir, realizaremos uma redução dimensional deste modelo para (1+2) dimensões e, a partir disto, estudaremos a dinâmica dos graus de liberdade da torção acoplados a um dublete de férmions que surgem em 3D como resultado do férmion carregado em 4D. Além disso, mostraremos que a simetria de paridade pode ser quebrada espontaneamente pelo campo pseudo-escalar da torção e, conseqüentemente, férmions adquirem massa já a *tree-level* (nível clássico). Finalizaremos esta primeira Seção mostrando que correções de *1-loop* produzem um termo de massa topológica para a componente pseudo-vetorial da torção, advinda do processo de redução dimensional para 3D.

Na Seção 2, discutiremos a interação entre um campo do tipo Kalb-Ramond (K-R) com férmions em 3D, a partir de um acoplamento não-mínimo. Uma peculiaridade deste espaço-tempo é a ausência de graus de liberdade on-shell para o campo de K-R. Entretanto, férmions acoplados à torção e ao campo de K-R induzem uma correção de auto-energia a *1-loop* à ação efetiva, tornando, desta forma, o campo de K-R massivo e dinâmico. Verificaremos a unitariedade a *1-loop*, e mostraremos que o grau de liberdade longitudinal excitado do campo de K-R não corresponde a um *ghost*. Alguns comentários a respeito de nossos resultados serão apresentados na Seção 3.

## 4.1 Modelo para Torção em 3D via Redução Dimensional

### 4.1.1 Considerações Iniciais do Modelo em 4D

Primeiramente, fixaremos as notações. Como nosso principal objetivo é estudar efeitos específicos da torção e seu acoplamento à matéria fermiônica, restringiremos nossa análise ao espaço plano ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ). Neste caso, a conexão afim é completamente especificada pelo tensor de torção:  $T_{\mu\nu}{}^{\kappa} = 2\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\kappa}$  e o símbolo de Christoffel é nulo.

Em quatro dimensões, o tensor de torção possui 24 graus de liberdade, que podem ser parametrizados pelas suas componentes irredutíveis, ou seja: um pseudo-vetor  $S^{\lambda} \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}T_{\mu\nu\kappa}$ , um vetor  $Z_{\mu} \equiv T_{\mu\nu}{}^{\nu}$  e um tensor de ordem-3,  $Q_{\mu\nu\kappa}$ , que satisfaz às seguintes



relações:

$$Q_{\mu\nu}{}^\nu = 0 \quad e \quad \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} Q_{\mu\nu\kappa} = 0. \quad (4.1)$$

Em nossa análise, levaremos em conta somente a componente pseudo-vetorial da torção,  $S^\mu$ , pois somente este modo de  $T_{\mu\nu}{}^\kappa$  acopla-se minimamente aos férmions. Assim, temos que:

$$T_{\mu\nu\kappa} = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} S^\lambda \quad e \quad \Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^\kappa{}_\lambda S^\lambda. \quad (4.2)$$

Como sabemos, o acoplamento da torção com o campo fermiônico dá-se através da derivada covariante sob transformações de Lorentz-local: no espaço-tempo na versão de Riemann-Cartan, a ação de Dirac para férmions massivos acoplados minimamente ao campo eletromagnético e à gravitação possui a seguinte forma:

$$S_F = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{i}{2} (\bar{\psi} \Gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \right], \quad (4.3)$$

onde a derivada covariante para o campo espinorial é dada por

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie A_\mu \psi + \frac{1}{8} B_\mu{}^{ab} [\Gamma_a, \Gamma_b] \psi, \quad (4.4)$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - ie A_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{8} B_\mu{}^{ab} \bar{\psi} [\Gamma_a, \Gamma_b].$$

A representação para as matrizes-gama é escolhida convenientemente, tendo em vista o processo de redução dimensional para 3D que realizaremos logo a seguir:

$$\Gamma^A = \begin{pmatrix} \gamma^A & 0 \\ 0 & -\gamma^A \end{pmatrix}, \quad A = 0, 1, 2, \quad (4.5)$$

sendo  $\gamma^0 = \sigma^3$ ,  $\gamma^1 = i\sigma^1$ ,  $\gamma^2 = i\sigma^2$ . As duas outras matrizes-gama que anticomutam com  $\Gamma^0$ ,  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^2$  são

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde  $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ ; com  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e a métrica dada por  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ .

Assim, de (4.3) e (4.4), obtemos o Lagrangeano para férmions não-massivos em presença dos campos eletromagnético e de torção em 4D:

$$\mathcal{L}_{4D} = i\bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \psi - e A_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi + \frac{3}{4} \eta S_\mu \bar{\psi} \Gamma^5 \Gamma^\mu \psi, \quad (4.7)$$

onde o termo de interação entre os campos fermiônico e da torção provêm do acoplamento mínimo (se  $\eta = 1$ ). É importante novamente salientar que somente a componente totalmente anti-simétrica da torção acopla-se minimamente aos campos de matéria.

É bem conhecido que o Lagrangeano usual de Einstein-Cartan ( $\sqrt{-g}R$ ) proporciona dinâmica somente para os graus de liberdade do campo gravitacional, enquanto a torção aparece como um campo algébrico:

$$S_E = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \tilde{R} + \frac{3}{2} S_\mu S^\mu \right], \quad (4.8)$$

onde  $\tilde{R}$  representa o escalar de curvatura Riemanniana, escrito em termos do símbolo de Christoffel, e  $\kappa$  é a constante gravitacional com dimensão de  $(\text{massa})^{-\frac{1}{2}}$ . Por outro lado, podemos proporcionar dinâmica para os graus de liberdade da torção se introduzirmos termos de curvatura do tipo- $R^2$  na ação. Na verdade, usando a conexão afim restrita (4.2), os termos de curvatura são expressos como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \partial^\kappa S^\lambda + \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} S^\kappa S_\kappa - S_\mu S_\nu), \\ R &= \frac{3}{2} S_\mu S^\mu, \end{aligned} \quad (4.9)$$

então

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu S_\nu \partial^\mu S^\nu - \partial_\mu S^\mu \partial_\nu S^\nu) + \frac{3}{4} S_\mu S^\mu S_\nu S^\nu. \quad (4.10)$$

Em particular, um termo cinético para o setor transverso do campo de torção é obtido combinando (4.9) e (4.10) da seguinte forma:

$$S_R = b \int d^4x \sqrt{-g} \left( R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) = -\frac{b}{4} \int d^4x S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

onde  $S^{\mu\nu} = \partial_\mu S_\nu - \partial_\nu S_\mu$ . De fato, (4.11) é a única escolha correta para o termo cinético; termos longitudinais do tipo  $(\partial_\mu S^\mu)^2$  não são admitidos pela exigência simultânea de renormalizabilidade e unitariedade da teoria (para maiores detalhes ver Refs. [29, 31]).

Desta forma, partiremos da seguinte ação:

$$S = S_F + S_R, \quad (4.12)$$

com  $S_F$  e  $S_R$  dados por (4.3) e (4.11), respectivamente. Logo, o Lagrangeano no espaço plano para os campos fermiônico, eletromagnético e da torção é dado por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \psi - e A_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi + \alpha S_\mu \bar{\psi} \Gamma^5 \Gamma^\mu \psi, \quad (4.13)$$

onde redefinimos o campo  $S_\mu \rightarrow \sqrt{b}S_\mu$  e  $\alpha = \frac{3\eta}{4\sqrt{b}}$  (aqui, devemos impor a condição  $b > 0$ , para assegurar que  $\alpha$  seja real). Note que as constantes de acoplamento  $e$  e  $\alpha$  são adimensionais.

Outro fator importante a ser analisado são as propriedades de simetria da teoria. Primeiramente, verificaremos a invariância do Lagrangeano sob transformações contínuas; de fato, (4.13) permanece invariante sob transformações de gauge usuais para os campos fermiônico e eletromagnético:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\Lambda(x)}\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-i\Lambda(x)}\bar{\psi}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Além disso, a teoria possui uma simetria quiral local adicional, onde o campo  $S_\mu$  se comporta como o correspondente campo de gauge:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\theta(x)\Gamma^5}\psi(x), \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}(x)e^{i\theta(x)\Gamma^5}, \\ S_\mu &\rightarrow S_\mu - \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\theta(x).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Aqui,  $\Lambda$  e  $\theta$  são funções de gauge do tipo escalar e pseudo-scalar, respectivamente. Ressaltamos que, ao contrário da transformação de gauge (4.14), (4.15) não mantém invariante o termo de massa fermiônica,  $\bar{\psi}\psi$ .

Em relação às transformações discretas, a transformação de paridade,  $\mathcal{P}$ , para as coordenadas e campos em 4D, isto é, as transformações:

$$\begin{aligned}x^\mu &\rightarrow x_\mu, \\ A^\mu &\rightarrow A_\mu, \\ S^\mu &\rightarrow -S_\mu, \\ \psi &\rightarrow \Gamma^0\psi,\end{aligned}\tag{4.16}$$

mantêm  $\mathcal{L}$  invariante. Observemos o caráter pseudo-vetorial de  $S^\mu$ , enquanto  $A^\mu$  comporta-se como um vetor sobre  $\mathcal{P}$ . Similarmente, o Lagrangeano permanece invariante sobre a

simetria de conjugação de  $C$  :

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi^c = C (\bar{\psi})^t, & C &= -\Gamma^2, \\ A^\mu &\rightarrow -A^\mu, \\ S^\mu &\rightarrow S^\mu.\end{aligned}\tag{4.17}$$

De (4.17), segue que não serão gerados perturbativamente novos termos de interação com um número ímpar de linhas externas para o fóton (este é o conteúdo do teorema de Furry). Assim, partindo do Lagrangeano (4.13), não se pode gerar funções de Green de dois pontos com termos mistos entre os campos de torção e do fóton, induzidas por férmions a nível de *1-loop*. Portanto, como nosso principal objetivo é o estudo de geração de massa para os campos fermiônico e de torção, de agora em diante não consideraremos o campo eletromagnético no cálculo de diagramas de auto-energia.

### 4.1.2 Redução Dimensional ( $4D \rightarrow 3D$ )

A redução dimensional é implementada adotando-se o ponto de vista de que todos os campos são independentes da coordenada  $x^3$ :

$$\partial_3(\text{qualquer campo}) = 0.\tag{4.18}$$

Este é o nosso *ansatz* de redução dimensional [32].

Além disso, a componente  $\mu = 3$  dos campos quadridimensionais comportam-se como escalares de  $SO(1,2)$ . Seguindo este procedimento, obtemos:

$$-\frac{1}{4}S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}S^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \rightarrow -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\tag{4.19}$$

onde definimos  $S^{\hat{\mu}} = (t^\mu, \phi)$ ; com  $\mu = 0, 1, 2$  e  $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3$ .

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu t_\nu - \partial_\nu t_\mu,$$

é o *field strength* de  $t^\mu$ .

Da mesma forma, a redução dimensional no setor fermiônico é realizada levando em consideração a representação redutível para as matrizes-gama, dada em (4.5) e (4.6). Com

isto, um espinor de quatro componentes de 4D decompõe-se em dois espinores de duas componentes em 3D, conforme abaixo:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} \quad e \quad \bar{\psi} = (\bar{\xi}, -\bar{\chi}). \quad (4.20)$$

De acordo com (4.19) e (4.20), o Lagrangeano reduzido para 3D pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3D} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + i\bar{\xi}\gamma^\mu\partial_\mu\xi + i\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi \\ & -i\alpha(\bar{\xi}\gamma^\mu\chi - \bar{\chi}\gamma^\mu\xi)t_\mu + \alpha(\bar{\xi}\xi + \bar{\chi}\chi)\phi. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como resultado da redução dimensional no setor bosônico, emerge um pseudo-vector,  $t_\mu$ , extra, além do conhecido pseudo-scalar,  $\phi$ , em 3D; ambos interagindo com o setor fermiônico da teoria. Também, notamos que a teoria usual em 3D pode ser reestabelecida tomando o limite  $\chi \rightarrow \xi$ .

Convém também ressaltar que, todas as simetrias da teoria permanecem preservadas após a redução dimensional. De fato, a simetria de gauge reduzida para os campos fermiônico e de torção

$$\begin{aligned} \xi & \rightarrow \xi \cos \theta - \chi \sin \theta, \\ \chi & \rightarrow \chi \cos \theta + \xi \sin \theta, \\ t_\mu & \rightarrow t_\mu - \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\beta(x), \\ \phi & \rightarrow \phi, \end{aligned} \quad (4.22)$$

mantêm  $\mathcal{L}_{3D}$  invariante.

Embora não seja manifesto, o campo  $t_\mu$  pode ser colocado em uma derivada covariante, se agruparmos os espinores  $\xi$  e  $\chi$  em um dublete de férmions em 3D:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

com

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu - i\alpha t_\mu Q)\Psi, \quad (4.24)$$

e

$$Q \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

O termo  $i\bar{\Psi}\gamma_{\mu}D^{\mu}\Psi$  reproduz os termos cinéticos para os espinores e de acoplamento entre  $\xi$  e  $\chi$  com  $t_{\mu}$ . Na verdade,  $t_{\mu}$  é o campo de gauge da simetria- $SO(2)$  em relação ao dublete de férmions:  $\phi$  é um singlete,  $\xi$  e  $\chi$  formam um dublete, enquanto  $t_{\mu}$  é o campo de gauge.

Em relação às simetrias discretas em 3D, a transformação de paridade para as coordenadas e campos é definida como:

$$\begin{aligned}
x^{\mu} &\rightarrow (x^0; -x^1, x^2), \\
t^{\mu} &\rightarrow (-t^0; t^1, -t^2), \\
\phi &\rightarrow -\phi, \\
\xi &\rightarrow -i\gamma^1\chi, \\
\chi &\rightarrow -i\gamma^1\xi,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

e também mantém  $\mathcal{L}_{3D}$  invariante. A mesma análise se verifica à simetria de conjugação de carga:

$$\begin{aligned}
\Phi &\rightarrow \bar{\Phi}, \text{ onde } \Phi \text{ significa } \phi \text{ e } t^{\mu}, \\
\Xi &\rightarrow \Xi^c = \sigma^1\Xi^*, \text{ onde } \Xi \text{ significa } \xi \text{ e } \chi.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Até agora, consideramos um modelo onde a torção é um campo de gauge dinâmico em 3D, oriundo da redução dimensional de um modelo bem conhecido em 4D. A seguir, iremos estudar o mecanismo de geração de massa para os campos da teoria.

### 4.1.3 Quebra Espontânea de Simetria de Paridade

Vamos considerar novamente o potencial renormalizável mais geral para o campo  $\phi$ , de acordo com as propriedades de simetria da teoria, isto é:

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2!}\phi^2 + \frac{\zeta}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda}{6!}\phi^6, \tag{4.28}$$

onde  $\phi$  é a componente pseudo-escalar da torção. Com isto, podemos estudar o mecanismo de quebra espontânea de simetria de paridade como um possível modo de se obter massa para o setor fermiônico da teoria. Quebra espontânea de simetria de paridade é um fenômeno já conhecido, em conexão com um tipo de defeito chamado *domain walls* [33].

Com este objetivo, vamos considerar o seguinte Lagrangeano invariante sob simetria de paridade:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{3D} - V(\phi). \quad (4.29)$$

Os parâmetros  $\mu$ ,  $\zeta$  e  $\lambda$  devem ser escolhidos adequadamente, de acordo com (3.35), de modo que o potencial possua limite inferior na energia e vácuos estáveis. Além disso, o valor esperado no vácuo do campo pseudo-escalar,  $\langle \phi \rangle = v$ , deve também satisfazer a condição (3.36), cuja solução é dada por (3.37).

Assim, consideramos

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + v, \quad (4.30)$$

tal que  $\tilde{\phi}$  possui valor esperado no vácuo nulo; repassando esta parametrização no Lagrangeano (4.29), obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} - M^2\tilde{\phi}^2\right) + i\bar{\xi}\gamma^\mu\partial_\mu\xi + i\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi \\ & -i\alpha\left(\bar{\xi}\gamma^\mu\chi - \bar{\chi}\gamma^\mu\xi\right)t_\mu + \alpha\left(\bar{\xi}\xi + \bar{\chi}\chi\right)\tilde{\phi} - m\left(\bar{\xi}\xi + \bar{\chi}\chi\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde  $m = -v$ . Ressaltamos que foram descartados de (4.31) termos de auto-interação para  $\phi$ , pois estes não se mostram relevantes em nossos cálculos.

#### 4.1.4 Geração Dinâmica de Massa para $t_\mu$

Em vista do vértice de interação do campo  $t_\mu$  com o setor fermiônico (massivo) do Lagrangeano (4.21), é possível gerar, por correções radiativas à ordem de 1-loop, um termo de massa topológica invariante de gauge para o campo pseudo-vetorial.

A fim de se obter o propagador livre para o campo  $t_\mu$ , introduziremos o seguinte termo de *gauge-fixing*:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\beta}(\partial_\mu t^\mu)^2. \quad (4.32)$$

Agora, podemos extrair as regras de Feynman da teoria. Os propagadores para os campos bosônicos e espinoriais, advindos do setor bilinear da ação, são dados por:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}\tilde{\phi} \rangle &= \frac{i}{p^2 - M^2}, \quad \langle t_\mu t_\nu \rangle = \frac{-i}{p^2}(\theta_{\mu\nu} + \beta\omega_{\mu\nu}), \\ \langle \chi\bar{\chi} \rangle &= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}, \quad \langle \xi\bar{\xi} \rangle = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Além disso, os vértices do tipo férmion-torção são dados por

$$V_{x\bar{\xi}} = \alpha\gamma^\mu, \quad V_{\bar{x}\xi} = -\alpha\gamma^\mu. \quad (4.34)$$

A partir de (4.33) e (4.34), podemos calcular as correções de ordem 1-loop para o propagador de  $t_\mu$ :

$$\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}_0^{-1} + \Pi, \quad (4.35)$$

com  $i\mathcal{D}_0^{\mu\nu} \equiv \langle t^\mu t^\nu \rangle$  e  $i\Pi_{\mu\nu}$  é o diagrama de polarização do vácuo para  $t_\mu$ :

$$i\Pi_{\mu\nu}(p) = -(\alpha)(-\alpha)(i)^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr}[\gamma_\mu(l+m)\gamma_\nu(l-p+m)]}{(l^2-m^2)[(l-p)^2-m^2]}. \quad (4.36)$$

Após algumas manipulações algébricas, e realizando a integração com relação ao momento livre do loop, obtemos o seguinte resultado:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \theta_{\mu\nu}\Pi^{(1)}(p) + mA_{\mu\nu}\Pi^{(2)}(p), \quad (4.37)$$

com

$$\Pi^{(1)}(p) = -\frac{\alpha^2}{16\pi} \left\{ \left( \sqrt{p^2} + \frac{4m^2}{\sqrt{p^2}} \right) \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}}}{1 - \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}}} \right] - 4|m|^2 \right\}, \quad (4.38)$$

e

$$\Pi^{(2)}(p) = -\frac{\alpha^2}{4\pi\sqrt{p^2}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}}}{1 - \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}}} \right]. \quad (4.39)$$

Como nossa análise restringe-se à geração de massa para os campos, estudaremos o comportamento assintótico de (4.38) e (4.39), expandindo estas expressões em torno do momento externo nulo ( $p^\mu \rightarrow 0$ ). Deste modo, obtemos

$$\Pi^{(1)}(p) \simeq -\frac{\alpha^2 p^2}{12\pi|m|}, \quad (4.40)$$

e

$$\Pi^{(2)}(p) \simeq -\frac{\alpha^2}{4\pi|m|}. \quad (4.41)$$

Substituindo estes resultados em (4.35) e calculando seu inverso, obtemos

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{-i}{p^2 - \Pi_T} \left[ \theta_{\mu\nu} - \frac{m\Pi^{(2)}}{p^2 \left(1 - \frac{\Pi^{(1)}}{p^2}\right)} A_{\mu\nu} \right] - \frac{i\lambda}{p^2} \omega_{\mu\nu}, \quad (4.42)$$



onde

$$\Pi_T(0) = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{4\pi}\right)^2}{1 + \frac{\alpha^2}{12\pi|m|}}. \quad (4.43)$$

Assim, vemos que um termo de massa topológica é gerado no setor transversal (invariante de gauge) do propagador corrigido a 1- *loop* do campo pseudo-vetorial.

## 4.2 Geração Dinâmica de Massa para o Campo de K-R

Seguindo o mesmo procedimento da Seção anterior, examinaremos o comportamento do campo anti-simétrico de K-R ( $B_{\mu\nu}$ ) em 3D e, além disso, estudaremos o mecanismo de geração dinâmica de massa para este campo, quando acoplado a um campo fermiônico.

A motivação para se estudar campos de gauge do tipo 2-forma em 3D pode ser justificada pelo interesse na investigação de vórtices supersimétricos auto-duais com momento magnético anômalo, como discutido nos trabalhos da Ref. [34].

Partiremos da ação livre para este campo:

$$S = \frac{1}{6} \int d^3x \sqrt{g} G_{\mu\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda}, \quad (4.44)$$

sendo  $G_{\mu\nu\lambda}$  o *field-strength*, que é dado em termos de  $B_{\mu\nu}$  como segue:

$$G_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}. \quad (4.45)$$

A ação é invariante sob a seguinte transformação de gauge:

$$\delta B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \zeta_\nu(x) - \partial_\nu \zeta_\mu(x), \quad (4.46)$$

onde  $\zeta_\mu$  é um vetor arbitrário. Com o propósito de se obter os propagadores livres da teoria, fixamos a invariância de gauge da teoria; escolhemos o seguinte termo de *gauge-fixing*,

$$S_{gf} = \beta \int d^3x \sqrt{g} \left( \eta^{\mu\nu\lambda} \tilde{\nabla}_\mu B_\lambda \right)^2, \quad (4.47)$$

onde  $\eta^{\mu\nu\lambda} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda}}{\sqrt{g}}$  e  $B_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}B^{\nu\lambda}$  é o dual de  $B_{\mu\nu}$ . O til sobre  $\nabla$  significa que estamos considerando somente a parte Riemanniana da conexão na derivada covariante.

É importante lembrar que, em 4D,  $B_{\mu\nu}$  tem somente um grau de liberdade on-shell e sua principal aplicação está relacionada com o mecanismo de geração de massa, com preservação da simetria de gauge, para o campo eletromagnético,  $A_\mu$ , através do termo topológico de acoplamento,  $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}B_{\kappa\lambda}$ . Entretanto, em 3D, o campo  $B_{\mu\nu}$  livre não possui graus de liberdade on-shell: este aparece somente, via propagadores, em linhas internas dos diagramas de Feynman que descrevem amplitudes físicas.

Então, seguindo nosso estudo de geração dinâmica de massa em teorias tridimensionais, propomo-nos a analisar o seguinte termo de interação (que preserva a simetria de gauge (4.46)) entre férmions e o campo  $B_{\mu\nu}$ :

$$S_I = \xi \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{\nabla}_\mu B_{\nu\lambda} \bar{\psi}\psi, \quad (4.48)$$

na tentativa de se obter um grau de liberdade on-shell dinâmico para o campo  $B_{\mu\nu}$ . Notemos que  $\xi$  possui dimensão de (massa) $^{-\frac{1}{2}}$  e, portanto, a renormalizabilidade da teoria é certamente perdida. Assim, devemos considerá-la como uma teoria efetiva a baixas energias. Munidos deste propósito, partiremos de um Lagrangeano no espaço-tempo plano que é dado pela soma de (3.17), (4.44), (4.47) e (4.48), ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu B^\mu)^2 + \beta (\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_\lambda)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2) + \alpha \phi \bar{\psi}\psi + \xi \partial_\mu B^\mu \bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde o setor bilinear do Lagrangeano fornece, além dos propagadores livres para os campos de torção e do férmion dados em (3.22), o seguinte propagador para o campo  $B_\mu$ :

$$iG_0^{\mu\nu}(p) = i \left\{ \frac{1}{2\beta p^2} \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2p^2} \omega^{\mu\nu} \right\}. \quad (4.50)$$

Convém ressaltar que, o campo de K-R é representado em (4.49) através de seu dual  $B_\mu$ .

Verificaremos a ausência de graus de liberdade on-shell para o campo vetorial de K-R não-massivo, saturando seu propagador com uma corrente externa,  $j^\mu$  que satisfaz à seguinte lei de conservação:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} p_\nu j_\lambda = 0. \quad (4.51)$$

Em 3D, a corrente vetorial mais geral possível pode ser expandida em termos de uma base particular,

$$j^\mu = ap^\mu + b\tilde{p}^\mu + c\varepsilon^\mu, \quad (4.52)$$

onde  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ ,  $\tilde{p}^\mu = (p^0, -\mathbf{p})$ , e  $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$ ;  $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ . Entretanto, (4.51) implica que  $b = c = 0$ . Assim, tomando a parte imaginária do resíduo (no pólo  $p^2 = 0$ ) da amplitude de transição,  $\mathcal{A} = j_\mu^*(p) G_0^{\mu\nu}(p) j_\nu(p)$ , obtemos

$$ImRes(\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{|a|^2}{2} p^2 = 0. \quad (4.53)$$

Deste resultado, verificamos que o pólo não-massivo não se propaga.

Retornando às regras de Feynman, o vértice torção-férmion é dado por (3.23), enquanto o vértice  $B_\mu - \psi$  é dado por:

$$V_\mu(B, \psi) = -\xi p_\mu. \quad (4.54)$$

Uma vez obtidas as regras de Feynman, podemos calcular as correções de auto-energia para o propagador completo.

Além das correções de auto-energia usuais para os propagadores da torção e do campo  $B_\mu$ , existe um gráfico misto de auto-energia que contém um campo  $\phi$  e um campo  $B_\mu$  como linhas externas. Em virtude disto, esta correção a 1-loop induz um acoplamento indireto entre  $B_\mu$  e  $\phi$  que, conseqüentemente, responde pela situação de geração dinâmica de massa.

Então, usando as regras de Feynman acima, chegamos aos seguintes resultados para os gráficos de auto-energia dos campos:

$$i\Pi_{\mu\nu} = i\frac{m\xi^2}{\pi} p^2 \omega_{\mu\nu}, \quad (4.55)$$

$$i\Pi_\mu = \frac{m\xi\alpha}{\pi} p_\mu, \quad (4.56)$$

onde  $i\Pi_{\mu\nu}$  e  $i\Pi_\mu$  são as correções a 1-loop de auto-energia para as funções de Green de dois pontos do tipo  $B_\mu - B_\nu$  e  $B_\mu - \phi$ , respectivamente (a auto-energia para o campo de torção é dada em (3.31)).

A contribuição da eq. (4.56) à ação efetiva dá-se através do termo finito de acoplamento,  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu B_{\nu\lambda} \phi$ , entre os campos. Como verificaremos logo abaixo, este termo não

destrói a unitariedade da teoria. Este resultado sugere-nos que um termo deste tipo já poderia ter sido introduzido a *tree-level*, e seu efeito teria sido somente o de gerar massa a *tree-level*.

Logo, a auto-energia do sistema total  $B_\mu - \phi$  pode ser convenientemente colocada em forma matricial, ou seja:

$$i\Pi^{(T)} = \begin{pmatrix} i\frac{m\xi^2}{\pi}p^2\omega_{\mu\nu} & \frac{m\xi\alpha}{2\pi}p_\mu \\ -\frac{m\xi\alpha}{2\pi}p_\nu & -i\frac{m\alpha^2}{\pi} \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Analogamente, o inverso do propagador do sistema é colocado na forma de matriz diagonal

$$\mathcal{D}_0^{-1} = \begin{pmatrix} (2\beta p^2\theta_{\mu\nu} + 2p^2\omega_{\mu\nu}) & 0 \\ 0 & (p^2 - \mu^2) \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Com isto, o inverso do propagador modificado é dado por:

$$\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}_0^{-1} + \Pi^{(T)}. \quad (4.59)$$

Repassando (4.57) e (4.58) em (4.59),  $\mathcal{D}^{-1}$  é dado por:

$$\mathcal{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\beta p^2\theta_{\mu\nu} + 2\left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi}\right)p^2\omega_{\mu\nu} & -\frac{im\xi\alpha}{2\pi}p_\mu \\ \frac{im\xi\alpha}{2\pi}p_\nu & p^2 - \mu^2 - \frac{m\alpha^2}{\pi} \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Os propagadores corrigidos, no espaço dos *momenta*, são obtidos tomando a inversa desta matriz. Assim, o propagador completo para o campo  $B_\mu$  é dado abaixo:

$$iG_{\mu\nu}(p) = i \left\{ \frac{1}{2\beta p^2}\theta_{\mu\nu} + \frac{(p^2 - \mu^2 - \frac{m\alpha^2}{\pi}) \left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi}\right)^{-1}}{2p^2(p^2 - M^2)}\omega_{\mu\nu} \right\}, \quad (4.61)$$

enquanto que o propagador do campo escalar é dado por:

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - M^2}, \quad (4.62)$$

onde

$$M^2 = \mu^2 + \frac{m\alpha^2}{\pi} + \frac{1}{2} \left( \frac{m\xi\alpha}{2\pi} \right)^2 \left( 1 + \frac{m\xi^2}{2\pi} \right)^{-1}. \quad (4.63)$$

Isto mostra-nos que o acoplamento mínimo da torção com a matéria fermiônica é fundamental para se obter um pólo massivo para o campo de gauge: se  $\alpha = 0$  ( $M^2 = \mu^2$ )

somente o pólo não-massivo aparecerá em (4.61). No caso de torção não-massiva, temos que

$$M^2 = \frac{m\alpha^2}{\pi} \left[ 1 + \frac{m\xi^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{m\xi^2}{2\pi} \right)^{-1} \right]. \quad (4.64)$$

Além disso, para a parte imaginária do resíduo tomado no pólo massivo, obtemos um resultado positivo, isto é:

$$Im\mathcal{R}es(\mathcal{A}) = \frac{|a|^2}{4} \frac{\left(\frac{m\xi\alpha}{2\pi}\right)^2}{\left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi}\right)^2} > 0,$$

o que assegura a propagação de um grau de liberdade físico. Portanto, o acoplamento indireto entre os campos de torção e o K-R em 3D, mediado pela matéria fermiônica, resulta no aparecimento de um pólo dinâmico para o setor físico (longitudinal) de  $B_\mu$ .

### 4.3 Comentários Finais

Em relação à primeira Seção deste capítulo, chamamos a atenção para o fato de que, uma vez que os campos fermiônicos adquiriram massa a *tree-level*, através da quebra espontânea de simetria de paridade, pode-se verificar que: além de ser gerada massa dinamicamente para o campo pseudo-vetorial,  $t_\mu$ , poderemos também induzir um termo de massa topológica para o campo eletromagnético, por correções de *1-loop*.

Também, é importante salientar que, uma vez que o campo de K-R é acoplado à gravitação em 3D via férmions, obtemos um resultado interessante no que diz respeito à geração dinâmica de massa a *1-loop* para a componente *longitudinal* deste campo: é induzido um pólo massivo e físico, resultante do acoplamento entre a torção e a matéria fermiônica, que também se acopla ao campo de gauge do tipo 2-forma.

Como conclusão geral de nosso estudo, podemos dizer que o campo de torção desempenha um papel fundamental no estudo da geração de massa para campos bosônicos em 3D.

# Capítulo 5

## Formalismo de Supercampos em Modelos com Quebra de Supersimetria

Recentemente, supersimetria em três dimensões vem sendo considerada em conexão com as teorias de Yang-Mills-Chern-Simons, as quais apresentam notáveis fatores em relação as suas propriedades no setor ultravioleta, ou seja, a finitude em todas as ordens em teoria de perturbação [35]. Também, com o surgimento das supermembranas, teorias supersimétricas tridimensionais vêm sendo investigadas com muito interesse [36].

Neste contexto, as super-regras de Feynman demonstram-se muito eficientes no tratamento perturbativo de supercampos; a análise do comportamento ultravioleta e cálculos a nível de loops, usando estas regras, apresentam-se muito mais compactas e elegantes [37, 38, 39].

No entanto, supersimetria não é uma simetria exata no mundo de baixas energias. A quebra (espontânea ou explícita) desta simetria [40, 23, 41, 42] deve ser averigüada por razões de se reproduzir a fenomenologia das interações eletrofracas na escala do  $M_Z$ - $M_W$ .

Neste capítulo<sup>1</sup>, formularemos um procedimento sistemático para se derivar super-

---

<sup>1</sup>Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se publicados no trabalho *Superpropagators for explicitly broken 3D-supersymmetric theories*, Phys. Lett., B468 (1999) 96; em co-autoria com L.P. Collato, M.A. De Andrade, O.M. Del Cima e J.A. Helayël-Neto.

propagadores em 3D, nos casos de quebra de supersimetria. Analisaremos o caso de quebra explícita, pois quebra espontânea pode sempre ser reformulada em termos de quebra explícita no superespaço: surgirão termos com dependência explícita na variável  $\theta$ , após os supercampos serem deslocados de seus valores esperados no vácuo. Consideraremos uma teoria com quebra explícita de supersimetria, onde um supercampo escalar complexo,  $\Phi$ , é minimamente acoplado a um supercampo de gauge espinorial real,  $\Gamma_\alpha$  [43].

## 5.1 A Ação no Superespaço

Um supercampo escalar complexo mais geral possível em 3D pode ser parametrizado em termos de seus campos componentes, através de uma expansão em série de Taylor na variável grassmaniana  $\theta$ , ou seja<sup>2</sup>:

$$\Phi(x; \theta) = A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x), \quad (5.1)$$

sendo  $A$  e  $\psi_\alpha$  campos escalar e espinorial de duas componentes, respectivamente, enquanto  $F$  é um campo auxiliar escalar complexo. Por outro lado, um campo de gauge supersimétrico em 3D pode ser representado por um supermultiplete espinorial real:

$$\Gamma_\alpha(x; \theta) = \chi_\alpha - \theta^\gamma (C_{\gamma\alpha} B - iV_{\gamma\alpha}) - \theta^2 (2\lambda_\alpha - i\partial^\gamma{}_\alpha \chi_\gamma), \quad (5.2)$$

sendo  $\chi^\alpha$  e  $\lambda^\alpha$  espinores (reais) de Majorana,  $B$  é um escalar real, enquanto  $V_\alpha{}^\beta = (\gamma^\alpha)_\alpha{}^\beta V_\alpha$  é o potencial de gauge. Além disto, definimos o supercampo *field-strength* invariante de gauge:

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta, \quad (5.3)$$

satisfazendo a condição  $D^\alpha W_\alpha = 0$ .

O acoplamento mínimo entre os supercampos de gauge e de matéria dá-se através da derivada covariante de gauge supersimétrica:

---

<sup>2</sup>As notações adotadas neste capítulo são idênticas as da ref. [43]: adota-se para a medida no superespaço  $dv = d^3x d^2\theta$ ; a representação para as matrizes  $\gamma$  é tomada como  $\gamma^\alpha = (\sigma_y, i\sigma_z, i\sigma_x)$ , onde  $\gamma^\alpha \equiv (\gamma^\alpha)_\alpha{}^\beta$  e  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\eta^{ab}$ , com a métrica sendo dada como  $\eta^{ab} = \text{diag}(-+++)$ ; os índices espinoriais são levantados e abaixados de acordo com a seguinte notação:  $\psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}$ ;  $\psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta$ , onde  $C = \sigma_y$ .

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \Phi &= D_\alpha \Phi - ig\Gamma_\alpha \Phi, \\ \nabla_\alpha \bar{\Phi} &= D_\alpha \bar{\Phi} + ig\Gamma_\alpha \bar{\Phi},\end{aligned}\tag{5.4}$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento.

Desta forma, partimos de uma ação que descreve uma teoria com termos de quebra explícita de supersimetria, de modo que um campo escalar complexo de matéria é minimamente acoplado a um supercampo de gauge em três dimensões:

$$S = S_m + S_g,\tag{5.5}$$

com

$$S_m = \int dv \left[ -\frac{1}{2} (1 + 2\theta^2 m_\psi) (\nabla^\alpha \bar{\Phi})(\nabla_\alpha \Phi) + (m + \theta^2 m_A^2) \bar{\Phi}\Phi \right],\tag{5.6}$$

e

$$S_g = \frac{1}{2} \int dv \left[ (1 - 2\theta^2 m_\lambda) W^\alpha W_\alpha + \mu \Gamma^\alpha W_\alpha \right],\tag{5.7}$$

sendo  $m$  e  $\mu$  os parâmetros de massa, enquanto  $m_\psi$ ,  $m_A^2$  e  $m_\lambda$  são os coeficientes relacionados aos termos de quebra de supersimetria nos setores de matéria e de gauge. Ressaltamos o fato de que não foi considerado o termo de quebra explícita de supersimetria relacionado ao setor de Chern-Simons,  $\theta^2 \Gamma^\alpha W_\alpha$ , pois este ocasionaria, também, uma quebra explícita da simetria de gauge. Além dos termos de quebra,  $S_m$  contém termos cinético e de massa para o supercampo de matéria e, além disso, seu acoplamento mínimo com o supercampo de gauge; enquanto  $S_g$  contém os termos cinético e de massa topológica para o supercampo de gauge.

As transformações dos supercampos escalar e espinorial que asseguram a invariância de gauge da ação da super-QED<sub>3</sub> topologicamente massiva, são as seguintes:

$$\delta\Phi = iK\Phi \quad \text{e} \quad \delta\Gamma_\alpha = \frac{1}{g}\nabla_\alpha K = \frac{1}{g}D_\alpha K,\tag{5.8}$$

onde  $K = K(x; \theta)$  é um supercampo escalar real. No entanto, a fim de obter os superpropagadores, fixaremos esta invariância de gauge; adicionamos à ação (5.5) o seguinte termo de *gauge-fixing*:

$$S_{gf} = \frac{1}{4\alpha} \int dv (D^\alpha \Gamma_\alpha) D^2 (D^\beta \Gamma_\beta).\tag{5.9}$$



## 5.2 Os Projetores e Superpropagadores

Os superpropagadores para os setores de matéria e de gauge serão obtidos tomando o inverso do operador de onda no superspaço<sup>3</sup>  $N = 1 - D = 3$ .

A parte bilinear da ação para os supercampos de matéria é dada como segue:

$$S_m^0 = \int dv \left[ -\frac{1}{2} (1 + 2\theta^2 m_\psi) (D^\alpha \bar{\Phi})(D_\alpha \Phi) + (m + \theta^2 m_A) \bar{\Phi} \Phi \right] \quad (5.10)$$

$$= \int dv \bar{\Phi} \mathcal{K} \Phi ,$$

onde o operador de onda,  $\mathcal{K}$ , é dado por:

$$\mathcal{K} = D^2 + m + m_\psi (2\theta^2 D^2 + \theta^\alpha D_\alpha) + m_A^2 \theta^2. \quad (5.11)$$

A fim de inverter este operador e, conseqüentemente, obter o superpropagador para o supercampo escalar, utilizaremos o formalismo de operadores de projeção; detalhada investigação leva-nos ao seguinte conjunto de operadores associados ao setor escalar:

$$P_1 = D^2, \quad P_2 = \theta^2, \quad P_3 = \theta^\alpha D_\alpha, \quad (5.12)$$

$$P_4 = \theta^2 D^2, \quad P_5 = i\partial_{\alpha\beta} \theta^\alpha D^\beta,$$

cuja álgebra é apresentada na TABELA I.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_1$	$\square$	$-1 + P_3 + P_4$	$2P_1 + P_5$	$-P_1 + \square P_2 - P_5$	$\square(-2 + P_3)$
$P_2$	$P_4$	0	0	0	0
$P_3$	$-P_5$	$2P_2$	$P_3 - 2P_4$	$2P_4$	$2\square P_2 + P_5$
$P_4$	$\square P_2$	$-P_2$	$2P_4$	$-P_4$	$-2\square P_2$
$P_5$	$-\square P_3$	0	$-2\square P_2 + P_5$	0	$\square(P_3 + 2P_4)$

TABELA I: Tabela multiplicativa satisfeita pelos projetores  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ . Os produtos obedecem à ordem linha versus coluna.

<sup>3</sup>Os produtos do tipo  $XY = Z$ , serão sempre assumidos a serem contraídos como  $X^{\alpha\gamma} Y_\gamma{}^\beta = Z^{\alpha\beta}$ .

Além disso, apresentamos algumas relações úteis:

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \theta_\beta\} &= C_{\alpha\beta}, \quad \{D_\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha^\beta, \quad \{D^\alpha, \theta_\beta\} = -\delta_\beta^\alpha, \\ [D^2, \theta_\alpha] &= D_\alpha, \quad [D_\alpha, \theta^2] = \theta_\alpha, \quad [D^2, \theta^2] = -1 + \theta^\alpha D_\alpha. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Assim, expressando  $\mathcal{K}$  em termos destes operadores, obtemos:

$$\mathcal{K} = mP_0 + P_1 + m_A^2 P_2 + m_\psi P_3 + 2m_\psi P_4, \quad (5.14)$$

onde  $P_0 \equiv 1$ .

Utilizando a álgebra da TABELA I, obtemos o superpropagador para o supercampo escalar:

$$\langle 0 | T[\bar{\Phi}(x_1, \theta_1) \Phi(x_2, \theta_2)] | 0 \rangle = i\mathcal{K}_{\theta_1}^{-1} \delta^3(x_1 - x_2) \delta(\theta_1 - \theta_2), \quad (5.15)$$

onde estamos adotando

$$\delta^3(x_1 - x_2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x_1 - x_2)}. \quad (5.16)$$

A forma explícita de (5.15), no espaço dos *momenta*, é dada por:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Phi}\Phi \rangle &= \frac{-i}{k^2 + m^2 + m_A^2} \left\{ mP_0 - P_1 - \frac{1}{k^2 + (m + m_\psi)^2} \right. \\ &\times \left[ [k^2(m_\psi^2 + mm_\psi) + m_A^2(m + m_\psi)^2 - m_A^2k^2] P_2 \right. \\ &+ [k^2m_\psi + m_A^2(m + m_\psi) - m(m_\psi^2 - mm_\psi)] (P_3 + 2P_4) \\ &\left. \left. + (m_A^2 - m_\psi^2 - mm_\psi) P_5 \right] \right\} \delta(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Analisando os pólos em  $k^2$ , torna-se evidente que os campos físicos escalar e fermiônico possuem suas massas deslocadas em relação ao valor degenerado,  $m^2$ , correspondente ao caso de supersimetria exata.

Os propagadores para os campos componentes podem ser extraídos sistematicamente, utilizando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \delta(\theta_1 - \theta_2) &= -(\theta_1 - \theta_2)^2, \\ \theta_1^2 \delta(\theta_1 - \theta_2) &= -\theta_1^2 \theta_2^2, \\ \theta_1^\alpha D_{1\alpha} \delta(\theta_1 - \theta_2) &= -2\theta_1^2 + \theta_1 \theta_2, \\ \theta_1^2 D_1^2 \delta(\theta_1 - \theta_2) &= \theta_1^2, \\ k_{\alpha\beta} \theta_1^\alpha D_1^\beta \delta(\theta_1 - \theta_2) &= k_{\alpha\beta} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta + 2k^2 \theta_1^2 \theta_2^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Desta forma, obtemos os seguintes propagadores não-nulos:

$$\begin{aligned}
\langle AA \rangle &= \frac{-i}{k^2 + m^2 + m_A^2}, \\
\langle FF \rangle &= \frac{i(k^2 + m_A^2)}{k^2 + m^2 + m_A^2}, \\
\langle AF \rangle &= \frac{im}{k^2 + m^2 + m_A^2}, \\
\langle \bar{\psi}^\alpha \psi^\beta \rangle &= -i \frac{k^{\alpha\beta} - (m + m_\psi) C^{\alpha\beta}}{k^2 + (m + m_\psi)^2},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

que coincidem com aqueles extraídos diretamente da ação (5.5), expressa em termos dos campos componentes.

Similarmente ao caso do setor de matéria, podemos encontrar o superpropagador para o supercampo de gauge. A soma da parte bilinear da ação (5.5), para o supercampo de gauge, mais o termo de *gauge-fixing*, (5.9), é dada por:

$$\begin{aligned}
S_g^0 &= \frac{1}{2} \int dv \left[ \frac{1}{4} (D^\beta D^\alpha \Gamma_\beta) (D^\gamma D_\alpha \Gamma_\gamma) + \frac{\mu}{2} \Gamma^\alpha (D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\alpha} (D^\alpha \Gamma_\alpha) (D^2 D^\beta \Gamma_\beta) - \frac{m_\lambda}{2} \theta^2 (D^\beta D^\alpha \Gamma_\beta) (D^\gamma D_\alpha \Gamma_\gamma) \right] \\
&= \int dv \Gamma_\alpha \mathcal{K}^{\alpha\beta} \Gamma_\beta,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

onde o operador de onda  $\mathcal{K}^{\alpha\beta}$  é dado como segue:

$$\mathcal{K}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha D^\beta D_\gamma + \frac{1}{\alpha} D^\alpha D^2 D^\beta + \mu D^\beta D^\alpha - m_\lambda D^\gamma D^\alpha \theta^2 D^\beta D_\gamma \right]. \tag{5.21}$$

Neste caso, a fim de se obter o inverso deste operador, devemos introduzir outros doze operadores de projeção no superespaço, oriundos do setor de gauge, os quais podem ser expressos em termos dos operadores  $P_i$ 's da seguinte forma:

$$R_a^{\alpha\beta} = iP_a \partial^{\alpha\beta} \quad e \quad S_a^{\alpha\beta} = P_a C^{\alpha\beta}, \tag{5.22}$$

onde  $a = 0, 1, \dots, 5$ . A álgebra para estes novos projetores é apresentada na TABELA II.

	$S_0$	$S_j$	$R_0$	$R_j$
$S_0$	$S_0$	$S_j$	$R_0$	$R_j$
$S_i$	$S_i$	$P_i \cdot P_j C^{\alpha\beta}$	$R_i$	$i \square P_i \cdot P_j \partial^{\alpha\beta}$
$R_0$	$R_0$	$R_j$	$\square S_0$	$\square S_j$
$R_i$	$R_i$	$i \square P_i \cdot P_j \partial^{\alpha\beta}$	$\square S_i$	$\square P_i \cdot P_j C^{\alpha\beta}$

TABELA II: Tabela multiplicativa satisfeita por  $R_a^{\alpha\beta}$  e  $S_a^{\alpha\beta}$ . A ordem de multiplicação é linha versus coluna.

Pode-se verificar que a álgebra da TABELA II é de fato fechada, utilizando as definições dadas em (5.22) e lembrando que  $P_i P_j \sim P_k$ ; onde  $i, j, k = 1, 2, \dots, 5$ . Assim, operador de onda  $\mathcal{K}^{\alpha\beta}$  pode ser convenientemente expresso como abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\alpha\beta} = & -\frac{1}{4} \left[ \frac{\alpha+1}{\alpha} \square S_0^{\alpha\beta} + (\mu + m_\lambda) S_1^{\alpha\beta} - 2m_\lambda \square S_2^{\alpha\beta} + m_\lambda S_5^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + (\mu + m_\lambda) R_0^{\alpha\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha} R_1^{\alpha\beta} - m_\lambda R_3^{\alpha\beta} - 2m_\lambda R_4^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Como sabemos, o superpropagador para o supercampo espinorial exibe a seguinte estrutura em termos dos projetores no superspaço:

$$\langle \Gamma^\alpha \Gamma^\beta \rangle = x_a S_a^{\alpha\beta} + y_a R_a^{\alpha\beta}, \quad (5.24)$$

onde os coeficientes  $x_a$  e  $y_a$  são (unicamente) determinados por um sistema de doze equações. Após longas manipulações puramente algébricas, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^\alpha \Gamma^\beta \rangle = & \frac{-i}{k^2 + (\mu + m_\lambda)^2} \left\{ (\alpha + 1) S_0^{\alpha\beta} + \frac{(\alpha - 1)}{k^2} R_1^{\alpha\beta} \right. \\ & + \frac{(\mu + m_\lambda)}{k^2} \left[ \alpha (\mu + m_\lambda) \left( S_0^{\alpha\beta} + \frac{1}{k^2} R_1^{\alpha\beta} \right) + S_1^{\alpha\beta} + R_0^{\alpha\beta} \right] \\ & + \frac{m_\lambda (2\mu + m_\lambda)}{(k^2 + \mu^2)} \left( S_3^{\alpha\beta} + 2S_4^{\alpha\beta} + 2R_2^{\alpha\beta} + \frac{1}{k^2} R_5^{\alpha\beta} \right) \\ & \left. + \frac{m_\lambda [k^2 - \mu (\mu + m_\lambda)]}{k^2 (k^2 + \mu^2)} \left( 2k^2 S_2^{\alpha\beta} + S_5^{\alpha\beta} - R_3^{\alpha\beta} - 2R_4^{\alpha\beta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Novamente, aparecem dois pólos simples massivos correspondendo as massas do bóson de gauge e do gaugino. Em termos dos campos componentes, o superpropagador acima se decompõe da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\langle \chi^\alpha \chi^\beta \rangle &= -i \frac{[\alpha (\mu + m_\lambda)^2 + (\alpha - 1) k^2] k^{\alpha\beta} + (\mu + m_\lambda) k^2 C^{\alpha\beta}}{k^4 [k^2 + (\mu + m_\lambda)^2]}, & (5.26) \\
\langle \lambda^\alpha \lambda^\beta \rangle &= -i \frac{(\mu + m_\lambda) k^{\alpha\beta} + k^2 C^{\alpha\beta}}{k^2 [k^2 + (\mu + m_\lambda)^2]}, \\
\langle \lambda^\alpha \chi^\beta \rangle &= -i \frac{k^{\alpha\beta} - (\mu + m_\lambda) C^{\alpha\beta}}{k^2 + (\mu + m_\lambda)^2}, \\
\langle BB \rangle &= \frac{i\alpha}{k^2}, \\
\langle V^a V^b \rangle &= \frac{-i}{k^2 + \mu^2} \left( \eta^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2} \right) - i\alpha \frac{k^a k^b}{k^4} - \frac{\mu}{k^2 (k^2 + \mu^2)} \varepsilon^{abc} k_c.
\end{aligned}$$

### 5.3 Considerações Finais

Usualmente, a introdução da quebra de supersimetria é feita mediante a idéia da inserção nos propagadores do caso exato; isto limita a inclusão dos parâmetros de quebra às ordens mais baixas nos mesmos. Com o nosso método de cálculo, uma vez obtidos os superpropagadores com os parâmetros de quebra somados a todas as ordens, temos à nossa disposição o suficiente para discutir, por exemplo, como os termos de quebra introduzidos a *tree-level* induzem correções radiativas a *1-loop* na ação efetiva.

É interessante notar que, se considerarmos uma função de vértice de dois pontos, com  $\Gamma_\alpha$  e  $\Gamma_\beta$  nas linhas externas e com superpropagadores de matéria formando o *loop*, os termos de quebra no setor de matéria induzem correções a *1-loop* para o termo de massa supersimétrico de Chern-Simons.

Além disso, enfatizamos que uma das vantagens de se trabalhar com estes complicados superpropagadores é que o estudo de correções radiativas a *1-loop* e renormalização torna-se muito mais sistemático, do que no caso de considerar os propagadores em campos componentes.

# Capítulo 6

## Perspectivas Futuras

Como ao final de cada capítulo apresentamos uma discussão dos resultados concernentes aos tópicos aí tratados, adiamos para este capítulo de conclusão a apresentação das possíveis perspectivas de continuação desta tese.

Assim, dando continuidade à linha de investigação da gravitação plana com torção, talvez seja uma proposta interessante averigüar a propriedade de renormalizabilidade das teorias da gravitação em 3D, considerando a conexão afim de Cartan, isto é, com torção presente; em vista das teorias de Chern-Simons serem finitas (no gauge de Landau) em 3D, torna-se interessante verificar se esta propriedade mantém-se (ou não) quando os graus de liberdade da torção são introduzidos. Nesta mesma direção, seria interessante averigüar se a gravitação de Einstein-Chern-Simons mantém-se renormalizável uma vez que a torção é levada em conta. Também, estenderemos esta análise para teorias de supergravidade em 3D, investigando a dinâmica da torção e de seu parceiro supersimétrico.

Como visto no Capítulo 2, a introdução da torção traz modificações substanciais no espectro da gravitação, tocando profundamente a unitariedade. O estudo da renormalização, por sua vez, também deixa de ser trivial em presença da torção. Justifica-se, portanto, uma reavaliação da discussão unitariedade x renormalizabilidade para a gravitação planar com torção dinâmica.

No contexto das teorias supersimétricas tridimensionais, permanece ainda em aberto o problema de se estabelecer um modelo  $N = 1 - D = 3$  do tipo O’Raifeartaigh [44], onde a quebra espontânea é realizada pelo termo-F. Em 4D, sabe-se que, com pelo menos três

supercampos quirais e com o auxílio da simetria-R, pode-se quebrar espontaneamente a supersimetria via termo-F. Em 3D, por razões puramente algébricas ligadas à forma do potencial escalar renormalizável e ausência da invariância-R, a quebra espontânea através do termo-F é muito mais sutil; na realidade, não existe na literatura nenhum modelo que a realize de modo manifesto. Uma vez tal quebra tenha sido produzida em um modelo concreto (e este é um interessante projeto), o método desenvolvido no Capítulo 5 encontrará um interessante ambiente de aplicação.

Finalizando, uma outra possibilidade a ser contemplada a partir desta tese refere-se à análise de soluções do tipo vórtice nos modelos de gauge estudados em presença da torção. Seria interessante compreender-se como o escalar de torção pode influenciar no processo de formação de vórtices magnéticos nos modelos onde ocorre a geração dinâmica de massa. Os vórtices em 3D com torção certamente irão nos dar interessantes informações sobre cordas cósmicas com torção em 4D. Esta é uma questão ainda em debate corrente.

# Referências

- [1] S. Deser, R. Jackiw and A. Templeton, *Ann.Phys.* **140** (1982) 372; *Phys.Rev.Lett.* **48** (1982) 975;
- [2] J. Schwinger, *Phys.Rev.* **128** (1962) 2425; M. Porrati and E.T. Tomboulis, *Nucl.Phys.* **B315** (1989) 615;
- [3] K. Harada, H. Kubota and I. Tsutsui, *Phys.Lett.* **B173** (1986) 77;
- [4] C.A.S. Almeida, M.A.C. Kneipp and M.W. de Oliveira, *Mod.Phys.Lett.* **A6** (1991) 1443; C.A.S. Almeida and M.W. de Oliveira, *Class.Quantum Grav.* **10** (1993) 1681;
- [5] A. Diaz, J.A. Helayël-Neto and A. William Smith, *Phys.Lett.* **B200** (1988) 515;
- [6] B.M. Pimentel, A.T. Suzuki and J.L. Tomazelli, *Int.J.Mod.Phys.* **A7** (1992) 5307; B.M. Pimentel and J.L. Tomazelli, *Prog.Theor.Phys.* **95** (1995) 1217; R. Delbourgo and A.B. Waites, *Phys.Lett.* **B300** (1993) 241; *Austral.J.Phys.* **47** (1994) 465;
- [7] J. Schonfeld, *Nucl.Phys.* **B185** (1981) 157;
- [8] O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, O. Piguet and M. Schweda, "No Parity Anomaly in Massless QED<sub>3</sub>", preprint TUW-99-08;
- [9] B. Binengar, *J.Math.Phys.* **23** (1982) 1511;
- [10] F. Wilczek, *Phys.Rev.Lett.* **48** (1982) 1144; *Phys.Rev.Lett.* **49** (1982) 957;
- [11] R.B Laughlin, *Phys.Rev.Lett.* **50** (1983) 1395; *Phys.Rev.Lett.* **60** (1988) 2677;
- [12] R. Iengo and K. Lechner, *Phys.Reports* **213C** (1992) 381;



- [13] T.W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabaldi and L.C.R. Wijewardhana, *Phys.Rev.* **D33** (1986) 3704; G.W. Semenoff and L.C.R. Wijewardhana, *Phys.Rev.Lett.* **63** (1989) 2633; R.D. Pisarski, *Phys.Rev.* **D29** (1984) 2423; R.D. Pisarski and S. Rao, *Phys.Rev.* **D32** (1985) 2081; N. Dorey and N.E. Mavromatos, *Phys.Lett.* **B266** (1991) 163; *Nucl.Phys.* **B386** (1992) 614;
- [14] S. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, *Phys.Rev.* **D21** (1980) 3269; S. Sezgin, *Phys.Rev.* **D24** (1981) 1677;
- [15] E. Witten, *Nucl.Phys.* **B311** (1988) 46;
- [16] B. Keszthelyi and G. Kleppe, *Phys.Lett.* **B281**(1992) 33; S. Deser and Z. Yang, *Class.Quantum Grav.* **7** (1990) 1603;
- [17] F.C.P. Nunes and G.O. Pires, *Phys.Lett.* **B301** (1993) 339;
- [18] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987;
- [19] E. Cartan, *C.R.Acad.Sci. (Paris)* **174** (1922) 593; *Ann.Ec.Norm.Sup.* **40** (1923) 325; **41** (1924) 1; **42** (1925) 17;
- [20] F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick and J.M. Nester, *Rev.Mod.Phys.* **48** (1976) 3641; F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke and Y. Ne'eman, *Phys.Rep.* **258** (1995) 1; I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publishing-Bristol (1992); V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific (1985); I.L. Shapiro, *Physical aspects of the space-time torsion*, text prepared for publication in *Phys. Rep.*;
- [21] J.L. Boldo, L.M. de Moraes and J.A. Helayël-Neto, *Class.Quantum Grav.* **17** (2000) 813;
- [22] J.L. Boldo, J.A. Helayël-Neto and N. Panza, hep-th/9905110 (submitted for publication in *Phys.Lett. B*);

- [23] J.A. Helayël-Neto, Phys.Lett. **B135** (1984) 78; F. Feruglio, J.A Helayël-Neto and F. Legovini, Nucl.Phys. **B249** (1985) 533; J.A Helayël-Neto, F.A.B.R. de Carvalho and A.W. Smith, Nucl.Phys. **B271** (1986) 175; Nucl.Phys. **B278** (1986) 309;
- [24] J.L. Boldo, L.P. Collato, M.A. De Andrade, O.M. Del Cima and J.A. Helayël-Neto, Phys.Lett. **B468** (1999) 96;
- [25] R.J. Rivers, Nuovo Cimento **34** (1964) 387;
- [26] R. Kuhfuss and J. Nitsch, GRG **18** (1986) 1207;
- [27] P. van Nieuwenhuizen, Nucl.Phys. **B60** (1973) 478;
- [28] O.M. Del Cima, M.A. De Andrade and J.A. Helayël-Neto, Il Nuovo Cimento **A111** (1998) 1145;
- [29] S.M. Carroll and G.B. Field, Phys.Rev. **D50** (1994) 3867;
- [30] M. Novello, Phys.Lett. **A59** (1976) 105; De Sabbata and M. Gasperini, Phys.Lett. **A77** (1980) 300; Phys.Lett. **A83** (1981) 115; R.T. Hammond, Phys.Rev. **D52** (1995) 6918;
- [31] A.S. Belyaev and I.L. Shapiro, Phys.Lett. **B425** (1998) 246; Nucl.Phys. **B543** (1999) 20;
- [32] L. Brink, J.H. Schwarz and J. Scherk, Nucl.Phys. **B121** (1977) 77;
- [33] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, Cosmic Strings and others Topological Deffects (Cambridge University Press, 1994);
- [34] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur and A.L.M.A. Nogueira; Int.J.Mod.Phys. **A14** (1999) 147, Int.J.Mod.Phys. **A14** (1999) 1721;
- [35] F. Ruiz Ruiz and P. van Nieuwenhuizen, Nucl.Phys. **B486** (1997) 443, hep-th/9609074; O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, J.A. Helayël-Neto and O. Piguet, J.High Energy Phys.(JHEP) **02** (1998) 002, hep-th/9711191; Lett.Math.Phys. **47** (1999) 265, math-ph/9904030;

- [36] O. Bergman, A. Hanany, A. Karch and B. Kol, *Branes and supersymmetry breaking in 3D gauge theories*, hep-th/9908075; K. Ohta, *Supersymmetric index and s-rule for type IIB branes*, hep-th/9908120;
- [37] A. Salam and J. Strathdee, Nucl.Phys. **B86** (1975) 142 and Fortsch.Phys. **26** (1978) 57;
- [38] W.E. Caswell and D. Zanon, Phys.Lett. **B100** (1981) 152; Nucl.Phys. **B182** (1981) 125;
- [39] M.T. Grisaru, M. Roček and W. Siegel, Nucl.Phys. **B183** (1981) 141;
- [40] L. Girardello and M.T. Grisaru, Nucl.Phys. **B194** (1982) 65;
- [41] S.J. Gates Jr. and H. Nishino, Phys.Lett. **B281** (1992) 72;
- [42] B.M. Zupnik, *Partial spontaneous breakdown of 3-dimensional  $N=2$  supersymmetry*, hep-th/9905108;
- [43] S.J. Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Roček and W. Siegel, “*Superspace: or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*”, Benjamin/Cummings (London-UK), 1983;
- [44] L.O’Raifeartaigh, Phys.Lett. **B56** (1975) 41; Nucl.Phys. **B89** (1975) 418.

# **“CONTRIBUIÇÕES RECENTES AO ESTUDO DE TEORIAS DE GAUGE PLANARES”**

***José Luis Boldo***

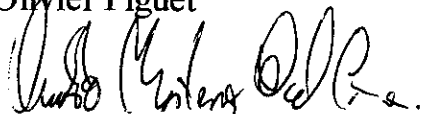
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



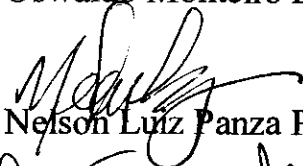
José Abdalla Helayël Neto – Presidente



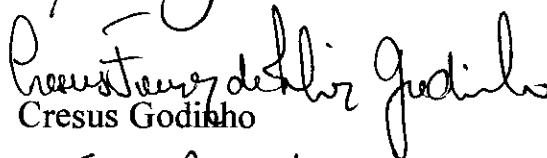
Olivier Piguet




Oswaldo Monteiro Del Cima



Nelson Luiz Panza Pereira da Silva



Cresus Godinho



Sebastião Alves Dias



Maria Beatriz Maia Porto - Suplente

Rio de Janeiro, 01 de fevereiro de 2001