

TESE DE
DOUTORADO

**COSMOLOGIA QUÂNTICA DE
TEORIAS ESCALAR-TENSORIAIS
NA INTERPRETAÇÃO
DE BOHM-de BROGLIE**

Alexandre da Fonseca Velasco

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO DE 2000**

Dedicatória

À minha mãe.

Agradecimentos

São tantas as pessoas a quem eu tenho que agradecer, que certamente faltarão alguns nomes importantes. Quero, desde já, me desculpar por esta falta.

Ao meu orientador Nelson Pinto Neto, pela sua competência e empenho na minha orientação e também pelo excelente relacionamento que tivemos todos estes anos (durante o mestrado e o doutorado), o qual, apesar de ter sido basicamente profissional, fez com que hoje eu o considere como um grande amigo.

Aos pesquisadores do CBPF, que são os principais responsáveis pelo nível de excelência desta instituição. De modo especial a Ivano Damião Soares por ter me orientado com competência e dedicação no início do meu doutoramento e também a Mário Novello que, sendo chefe do nosso grupo de cosmologia, soube promover muito bem, com seu entusiasmo e dedicação, a união do grupo, principalmente através dos “pequenos seminários”.

A minha mãe que, com muito amor e sacrifício, me deu todo o apoio familiar que eu necessitei.

Aos meus parentes e amigos, pelo interesse e preocupação com o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas do CBPF pelo companheirismo e por toda a ajuda que me deram. De modo particular a Martha Christina Motta da Silva pela revisão do texto desta tese.

Aos colegas da sala 509-B pelas discussões de profundas questões que, frequentemente, iam além do âmbito da física.

Aos colegas do Grupo de Cosmologia e dos “pequenos seminários”, por tornarem a

nossa maneira de fazer pesquisa ainda mais prazerosa do que já era.

Aos funcionários do CBPF pela atenção e boa vontade com que nos atendem. De modo especial a Míriam Coutinho que, com seu carinho e sua alegria, faz com que nós todos nos sintamos como pertencentes a uma grande família.

Ao CNPq pela bolsa concedida.

A Deus por tudo.

Resumo

Cosmologia quântica de Teorias Escalar-Tensoriais na Interpretação de Bohm-de Broglie

Neste trabalho nós estudamos cosmologia quântica em teorias escalar-tensoriais com acoplamento mínimo e não-mínimo, do ponto de vista da interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica. Quantização em mini-superespaços destas teorias levam a uma equação diferencial parcial que é não-separável. Através de uma transformação conforme nós podemos remodelar a equação de Wheeler-De Witt numa forma integrável que corresponde ao caso de acoplamento mínimo, cuja solução geral é conhecida. Realizando uma transformação conforme inversa na solução assim encontrada, nós podemos construir a correspondente solução no sistema original e então estudar o limite clássico de algumas soluções particulares deste modelo quântico. Enquanto no referencial de Einstein o limite clássico destas soluções ocorre para fatores de escala pequenos, no referencial de Jordan tal limite acontece para valores pequenos do campo escalar não-minimamente acoplado à gravidade, o que inclui fatores de escala grandes. Nós consideramos também modelos de mini-superespaço constituídos de geometrias de Bianchi-I com um campo escalar não massivo livre minimamente acoplado. As soluções clássicas são sempre singulares e sempre anisotrópicas, uma vez que elas comecem desta forma. Na quantização do sistema mostramos que há uma quantidade de estados quânticos cujas correspondentes trajetórias Bohmianas podem ser não-singulares e/ou apresentarem fases isotrópicas grandes devido aos efeitos gravitacionais quânticos, mesmo que elas comecem anisotrópicas. Estas últimas conclusões são válidas mesmo na ausência do campo escalar.

Summary

Quantum Cosmology for Scalar-Tensor Theories in the Interpretation of Bohm-de Broglie

In this work we study quantum cosmology in scalar-tensor theories with minimal and non-minimal coupling from the point of view of the Bohm-de Broglie interpretation of quantum mechanics. Quantization in the minisuperspace of non-minimal scalar-tensor theories leads to a partial differential equation which is non-separable. Through a conformal transformation we can recast the Wheeler-De Witt equation in an integrable form, which corresponds to the minimal coupling case, whose general solution is known. Performing the inverse conformal transformation in the solution so found, we can construct the corresponding solution in the original frame and then study the classical limit of some particular solutions of this quantum model. While in the Einstein frame the classical limit of these solutions occurs for small scale factors, in the Jordan frame it happens for small values of the scalar field non-minimally coupled to gravity, which includes large scale factors. We also consider minisuperspace models constituted of Bianchi-I geometries with a free massless scalar field minimally coupled. The classical solutions are always singular and always anisotropic once they begin anisotropic. In quantizing the system we show that there are plenty of quantum states whose corresponding Bohmian trajectories may be non-singular and/or presenting large isotropic phases, even if they begin anisotropic, due to quantum gravitational effects. These last conclusions are valid even in the absence of the scalar field.

Índice

Índice	vi
Introdução	1
1 Aplicação da Interpretação Causal na Cosmologia Quântica	4
1.1 A Interpretação Causal da Mecânica Quântica	5
1.2 Aplicação da Interpretação Causal à Cosmologia Quântica	9
2 Singularidades e o Limite Clássico em Cosmologia Quântica com Cam- pos Escalares	13
2.1 O Modelo Clássico	14
2.2 Soluções Quânticas no Mini-Superespaço	16
2.3 A Aproximação WKB	20
2.4 Interpretação Causal	23
3 Cosmologias Quânticas em Teorias Escalar-Tensoriais com Acoplamento Não Mínimo	28
3.1 Teorias Escalar-Tensoriais	30
3.2 Soluções Quânticas no Mini-superespaço	35
3.3 As Trajetórias Bohmianas Quânticas	40

4	Isotropização Quântica do Universo	59
4.1	O Modelo de Mini-Superespaço Clássico	61
4.2	Quantização do Modelo Clássico	63
A	Quantização Canônica e Mini-Superespaços	77
	Referências	83

Convenções

- Índices Gregos variam de 0 a 3.
- Índices Latinos variam de 1 a 3.
- Métrica do espaço-tempo: $g^{\mu\nu}$.
- Métrica do tri-espaço: h^{ij} .
- $g = \det g_{\mu\nu}$.
- $h = \det h_{ij}$.
- Assinatura da métrica: $(-, +, +, +)$.
- $\hbar = 1$.
- $c = 1$.
- Derivada simples de um vetor: $V^\mu{}_{,\nu} = \frac{dV^\mu}{dx^\nu}$.
- Derivada covariante de um vetor: $V^\mu{}_{;\nu} = V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma$.
- Derivada covariante de um vetor no tri-espaço: $V^i{}_{|j} = V^i{}_{,j} + {}^{(3)}\Gamma^i_{jl} V^l$.
- Conexões: $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} (g_{\rho\nu,\sigma} + g_{\nu\sigma,\rho} - g_{\rho\sigma,\nu})$.
- Conexões no tri-espaço: ${}^{(3)}\Gamma^i_{kl} = h^{ij} (h_{kj,l} + h_{jl,k} - h_{kl,j})$.

Lista de Figuras

- Figura 1 - Comportamento de $\alpha(a)$ para $p = 1$, $A_\alpha = 1$ e $B_\alpha = 0$. — Página 20.
- Figura 2 - Sistema de equações planares (4.22) e (4.23) para $\sigma = d - 1$. Páginas 67-68.
- Figura 3 - Sistema de equações planares (4.36) e (4.37) para $\sigma = 100$, $d = -1$ e $c = 2$. Página 72.
- Figura 4 - Sistema de equações planares (4.36) e (4.37) para $\sigma = 100$, $d = 1$ e $c = 2$. Página 73.

Introdução

Duas questões principais podem ser colocadas em cosmologia:

1. O universo é eterno ou ele teve um início e, neste último caso, este início foi dado por uma singularidade inicial?
2. Por que o universo é marcadamente homogêneo e isotrópico, com desvios muito pequenos de seu estado altamente simétrico?

A resposta dada pela Relatividade Geral (RG) clássica para essa primeira questão, indicada pelos teoremas de singularidades [1], sugere que o universo tenha tido um início singular. Como as singularidades estão fora do domínio de qualquer teoria física, esta resposta invalida qualquer descrição dos primeiros instantes do universo em termos físicos. Por outro lado, pode-se pensar que a RG e/ou qualquer outra teoria de campo de matéria deve ser mudada diante de situações extremas de energia, densidade e curvatura muito altas perto da singularidade, tornando as suposições físicas dos teoremas de singularidade inválidas perto deste ponto. Um bom ponto de vista (que não é o único) é pensar que efeitos gravitacionais quânticos se tornam importantes diante dessas condições extremas¹, eliminando as singularidades que aparecem classicamente [7], similarmente ao que acontece com o átomo. Dever-se-ia, então, construir uma teoria quântica da gravitação e aplicá-la à cosmologia. O problema é que não há nenhuma teoria quântica da gravitação

¹No contexto da interpretação de Bohm-de Broglie (ver capítulo 1) da mecânica quântica aplicada a modelos de mini-superespaço, isto foi mostrado nas referências [2] - [6].

bem estabelecida. Além disso, uma teoria quântica, quando aplicada à cosmologia, pode apresentar profundos problemas conceituais. Como se pode aplicar a interpretação probabilística padrão de Copenhagen a um sistema único? Quem são os observadores do universo inteiro? Este não é um problema da gravitação quântica, pois não há nenhum problema com o conceito de um conjunto de buracos negros, nem com o de um domínio clássico fora dele, mas da teoria quântica aplicada ao cosmos.

Para completar, em mecânica quântica, o tempo é tratado como um parâmetro de evolução externo e não como um observável (operador Hermitiano), e, na cosmologia quântica de um universo fechado, não há lugar para um parâmetro externo. Neste caso, qual variável interna dará o sentido de evolução dos estados quânticos? Por conta disso, o que será adotado em todo este trabalho será uma interpretação não-probabilística para a cosmologia quântica, que contorna os problemas de medida, porque ela é uma interpretação ontológica da mecânica quântica: não é necessário ter um aparato de medida nem um domínio clássico para se recuperar a realidade física; ela está lá *ab initio*. Essa é a interpretação causal da mecânica quântica [8, 9], que será apresentada e discutida em mais detalhes no capítulo 1. Esse mesmo capítulo tratará da sua aplicação à cosmologia quântica e a modelos de minisuperespaços.

No capítulo 2 serão discutidos também resultados da literatura relativos a singularidades e limite clássico em cosmologia quântica com campos escalares. De fato, o caso estudado envolve o acoplamento mínimo da gravitação com dois campos escalares. Ele é aplicado ao modelo de mini-superespaço de Friedmann-Robertson-Walker e analisado tanto do ponto de vista da interpretação probabilística quanto do da interpretação causal. Nas duas interpretações, as suas soluções irão apresentar comportamento clássico quando o fator de escala do universo for pequeno e, por isso, as singularidades não são evitadas.

Alguns desses resultados do capítulo 2 serão utilizados no capítulo 3, onde será apresentado um trabalho original sobre cosmologias quânticas em teorias escalar-tensoriais com acoplamento não-mínimo. Neste se mostrará que o fato bem conhecido de uma trans-

formação conforme permitir que soluções clássicas e quânticas de modelos com campo escalar acoplado não-minimamente à gravidade (referencial de Jordan) sejam mapeadas para o chamado referencial de Einstein, onde o campo escalar é minimamente acoplado ao setor gravitacional, também é válido na presença de um segundo campo escalar. Há muitos artigos [10]-[13] que discutem a não equivalência física entre a teoria no referencial de Jordan (caso de acoplamento não-mínimo) e a teoria no referencial de Einstein (caso de acoplamento mínimo) no nível clássico. Nesse capítulo 3 este problema será estudado no nível quântico. Será mostrado que, apesar da existência de um mapeamento matemático relacionando as soluções quânticas da equação de Wheeler-De Witt nos referenciais de Jordan e de Einstein, as características quânticas das teorias nos dois referenciais são diferentes, especialmente no que concerne aos seus limites clássicos. Por isso, através do mapeamento tanto dessas soluções quanto das trajetórias Bohmianas, será possível comparar os resultados do caso de acoplamento mínimo com o de acoplamento não-mínimo. Será visto que, neste último, as trajetórias Bohmianas podem coincidir com as soluções clássicas para valores grandes do fator de escala enquanto que, no primeiro caso, isto não é possível para as funções de onda estudadas.

Com relação à segunda das grandes questões em cosmologia, ela será tratada de forma original no capítulo 4, também do ponto de vista da interpretação ontológica da cosmologia quântica. O objetivo é verificar se efeitos quânticos podem ao menos criar fases isotrópicas em modelos anisotrópicos que, classicamente, nunca isotropizam. Como será visto, os efeitos quânticos podem não somente criar fases isotrópicas como também podem isotropizar o modelo para sempre, para uma grande variedade de estados quânticos. Outros autores também estudaram este problema — principalmente tomando modelos de Bianchi-IX — adotando outras interpretações da cosmologia quântica e chegaram a resultados similares [14] - [18]. Os resultados desses dois últimos capítulos serão discutidos ao final da tese, no capítulo de conclusão.

Chapter 1

Aplicação da Interpretação Causal na Cosmologia Quântica

Neste capítulo serão discutidos os aspectos básicos e fundamentais da interpretação causal da mecânica quântica, visando especificamente a sua aplicação à cosmologia quântica, o que será feito em todos os demais capítulos. A discussão inicial dessa interpretação será feita na primeira seção. Em seguida (seção 1.2), será discutida a sua aplicação à cosmologia quântica de uma forma geral e mostrado como o problema da dificuldade técnica proveniente da quantização de todo o campo gravitacional pode ser contornado pela adoção de modelos de mini-superespaço (ver Apêndice A), que restringem o campo gravitacional e o de matéria a serem homogêneos. Nesses modelos, apenas um número finito de graus de liberdade são considerados, os outros são congelados, aliviando consideravelmente os problemas técnicos pois reduz-se a equação quântica da RG (equação de Wheeler-De Witt) de uma equação envolvendo derivadas funcionais para uma equação envolvendo apenas derivadas parciais.

Nos próximos capítulos serão vistos exemplos da aplicação dessa interpretação à cosmologia quântica, adotando-se modelos de mini-superespaço do tipo Bianchi I e também de Friedmann-Robertson-Walker.

1.1 A Interpretação Causal da Mecânica Quântica

É bem conhecida a experiência da difração de elétrons em fenda dupla, onde a figura remanescente da interferência das ondas é construída progressivamente por uma série de eventos individuais na qual um elétron por vez é enviado através da fenda, indo de encontro ao anteparo de detecção.

O que faz os elétrons se agregarem desta forma? Existe alguma força agindo sobre cada elétron individualmente quando ele passa através do dispositivo, que o impele a alcançar determinadas regiões ao invés de outras? Na interpretação probabilística da mecânica quântica, este fenômeno é entendido do ponto de vista de uma dualidade onda-partícula como sendo, principalmente, o aspecto ondulatório do elétron o responsável pelo resultado final de uma figura de interferência, enquanto que o seu aspecto corpuscular é o responsável pela distribuição preliminar nitidamente pontual, até que um número substancial de elétrons já permita vislumbrar uma predominância de pontos de colisão em determinadas regiões. O que ocorre nessa interpretação é que, até que o elétron atinja o anteparo, o que se sabe dele é apenas que a função de onda que representa o seu estado quântico tem uma densidade de probabilidade de atingir o anteparo num ponto ou noutro. Qual ponto o elétron atingirá é um resultado totalmente imprevisível. Não há mais o conceito de trajetória. A única resposta é que o destino de um elétron, tomado individualmente, está entregue totalmente ao acaso. Como reter, então, a conjectura, no coração do paradigma clássico, de que a matéria tem forma e substância, independentemente de ser ou não observada?

Foi sugerida por Louis de Broglie em 1927, e desenvolvida dentro de uma teoria física por David Bohm, em 1952, uma idéia que, desde então, foi universalmente ignorada. Uma nova interpretação da mecânica quântica onde, na descrição do elétron, o corpúsculo clássico é mantido, mas suplementado por um novo tipo de campo físico matematicamente descrito pela função de onda de Schrödinger. Nesta interpretação, a composição onda e

partícula evolui continuamente seguindo leis determinísticas, e — o mais interessante — resgatando o conceito de trajetória.

O objetivo da teoria de Bohm-de Broglie não é uma tentativa de recuo à física clássica. Sua meta é a descrição completa de uma situação real individual como existente, independentemente dos aspectos observacionais. O que surge é uma teoria altamente não-clássica, onde as partes de um sistema maior estão sujeitas à organização pelo todo. A seguir é feito um resumo de suas idéias básicas antes de aplicá-la à cosmologia quântica.

Considere, inicialmente, a equação de Schrödinger, na representação de coordenadas, para uma partícula não relativística com a Hamiltoniana $H = p^2/2m + V(x)$:

$$i \hbar \frac{d\Psi}{dt}(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \Psi(x, t). \quad (1.1)$$

A função de onda será escrita como $\Psi = R \exp(iS/\hbar)$, e será substituída na equação (1.1). A equação resultante pode ser dividida nas suas partes real e imaginária, dando origem, respectivamente, às seguintes equações:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Fazendo-se a identificação $p = \nabla S$, nota-se que a equação (1.2) pode ser vista como uma equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula sujeita a um termo de potencial extra $-\hbar^2 \nabla^2 R/2mR$. Já a equação (1.3), na interpretação probabilística usual, é entendida como uma equação de continuidade para a densidade de probabilidade R^2 de se encontrar a partícula na posição x , no instante t . Nesta interpretação, toda a informação física sobre o sistema está contida em R^2 , a fase total S da função de onda é completamente irrelevante e nada é dito sobre a sua evolução.

A interpretação ontológica da mecânica quântica, ao contrário da de Copenhagen, é baseada nas duas equações, (1.2) e (1.3). Seus postulados básicos são:

(i) Um sistema físico individual é compreendido por uma onda se propagando no espaço e no tempo junto com uma partícula pontual que se move continuamente, guiada pela onda.

(ii) A onda é matematicamente descrita por $\Psi(\vec{x}, t)$, uma solução para a equação de Schrödinger.

(iii) O movimento da partícula é obtido como a solução $\vec{x}(t)$ para a equação

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \nabla S(\vec{x}, t)|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}, \quad (1.4)$$

onde S é a fase de Ψ . Para se resolver esta equação, é preciso especificar a condição inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Esta especificação constitui a única informação extra introduzida pela teoria que não está contida em $\Psi(\vec{x}, t)$ (a velocidade inicial é fixada uma vez que se conheça S).

Estes três postulados já constituem uma teoria do movimento consistente. Para assegurar a compatibilidade dos movimentos de um conjunto de partículas com os resultados da mecânica quântica, estabelece-se um quarto postulado:

(iv) A probabilidade de que uma partícula num conjunto se localize inicialmente entre os pontos \vec{x}_0 e $\vec{x}_0 + d\vec{x}_0$, no instante $t = 0$, é dada por

$$R^2(\vec{x}_0, t = 0) d^3x_0, \quad (1.5)$$

onde $R^2 = |\Psi|^2$. A equação (1.3) garante que a probabilidade de a partícula estar entre \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ num tempo t genérico será dada por $R^2(\vec{x}, t) d^3x$.

Considerem-se também os seguintes comentários:

(a) A equação (1.2) pode, agora, ser interpretada como uma equação tipo Hamilton-Jacobi para uma partícula submetida a um potencial externo, que é o potencial clássico mais um novo potencial quântico

$$Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (1.6)$$

Por isso, a trajetória da partícula $x(t)$ satisfaz a equação de movimento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla V - \nabla Q. \quad (1.7)$$

(b) Mesmo em regiões onde Ψ é muito pequeno, o potencial quântico, que é o responsável pelos efeitos quânticos, pode ter um valor muito alto. Como se pode ver da equação (1.6), ele depende somente da forma de Ψ , não de seu valor absoluto, e de condições de borda inerentes às especificações do aparato físico, já que a função de onda depende destas. Este fato demonstra o caráter não local e contextual do potencial quântico. Isto é muito importante porque as desigualdades de Bell, junto com os experimentos de Aspect, mostram que, em geral, uma teoria quântica deve ser ou não local ou não ontológica. Como a interpretação de Bohm é ontológica, espera-se que ela seja não local, como de fato ela é.

(c) Essa interpretação pode ser aplicada à situação de um sistema único. Neste caso, a equação (1.3) é justamente uma equação para determinar a função R , que forma o potencial quântico (equação (1.6)) que, por sua vez, agirá sobre a partícula via equação (1.7). A função R^2 não precisa ser interpretada como uma densidade de probabilidade e, por isso, não precisa ser normalizada. A interpretação de R^2 como uma densidade de probabilidade é apropriada somente no caso mencionado no item (iv) acima. A interpretação ontológica não é, em essência, uma interpretação probabilística.

(d) O limite clássico é muito simples: tem-se somente que encontrar as condições para que se tenha $Q = 0$.

(e) Não há nenhuma necessidade de se ter um domínio clássico, porque esta interpretação é ontológica. Em uma medida real, a função de onda é uma superposição de ramos que não se interceptam [19]. Por isso não se vêem, numa medida, superposições do ponteiro do aparelho. A partícula entrará num dos ramos e será influenciada pelo único potencial quântico obtido da única função de onda não nula definida neste ramo. Dependendo do ramo escolhido pela partícula — o que depende das suas condições iniciais das

quais só conhecemos sua distribuição de probabilidade — um resultado da medida será selecionado com probabilidade idêntica à da mecânica quântica usual. Os ramos vazios são indetectáveis [9]. O colapso não é real, mas aparente. A equação de Schrödinger é sempre válida.

A generalização desta interpretação para campos quânticos ainda está em andamento. Por exemplo, a interpretação causal da eletrodinâmica quântica está descrita na referência [7]. Apesar disso, como ela é uma interpretação que não requer domínio clássico e que pode ser aplicada a um sistema único, pode-se pensar que seja relevante examinar o que ela pode dizer sobre cosmologia quântica.

1.2 Aplicação da Interpretação Causal à Cosmologia Quântica

Nesta seção será tratado inicialmente o caso de cosmologias regidas pela teoria da Relatividade Geral. Nos próximos capítulos trataremos também do caso de outras teorias cosmológicas (teorias escalar-tensoriais).

Conforme é visto no Apêndice A, a Hamiltoniana da Relatividade Geral sem matéria é dada por:

$$H_{RG} = \int d^3x \left(N \mathcal{H} + N_j \mathcal{H}^j \right), \quad (1.8)$$

onde

$$\mathcal{H} = G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \hbar^{1/2} {}^{(3)}R, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{H}^j = -2 \Pi^{ij}{}_{|j}. \quad (1.10)$$

O momentum Π_{ij} canonicamente conjugado à métrica das hipersuperfícies tipo espaço que folheiam o espaço-tempo é

$$\Pi_{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{h}^{ij}} = -h^{1/2} (K_{ij} - h_{ij} K), \quad (1.11)$$

com

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} (\dot{h}_{ij} - N_{j|i} - N_{i|j}) \quad (1.12)$$

e

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}), \quad (1.13)$$

que é chamada de métrica de DeWitt [20]. A quantidade ${}^{(3)}R$ é a curvatura intrínseca da hipersuperfície e h é o determinante de h_{ij} . A função lapso N e a função deslocamento N_j são os multiplicadores de Lagrange do vínculo super-Hamiltoniano \mathcal{H} e do vínculo super-momentum \mathcal{H}^j , respectivamente.

Seguindo o procedimento de Dirac para a quantização, esses vínculos tornam-se condições impostas sobre os possíveis estados do sistema quântico, produzindo as seguintes equações (ver Apêndice A):

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta h^{ij}}(h^{ab}) \right)^{ij} = 0, \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{G^{ijkl}}{l_{pl}^2} \frac{\delta}{\delta h^{ij}} \frac{\delta}{\delta h^{kl}} + h^{1/2} {}^{(3)}R \right) \Psi(h^{ab}) = 0 \quad (1.15)$$

(aqui é feito $\hbar = c = 1$) e l_{pl} é o comprimento de Planck.

A primeira equação significa simplesmente que o valor da função de onda não muda se as métricas das hipersuperfícies tipo espaço mudarem por uma transformação de coordenadas. A segunda é a equação de Wheeler-DeWitt, que determina a evolução temporal da função de onda.

Seguindo agora os passos descritos na primeira seção para se adotar a interpretação ontológica, substitui-se $\Psi = R \exp(iS/\hbar)$ na equação de Wheeler-DeWitt (1.15). A equação

resultante pode ser dividida nas suas partes real e imaginária dando origem, respectivamente, às seguintes equações:

$$G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} - h^{1/2} {}^{(3)}R(h_{ij}) + h^{1/2} Q(h_{ij}) = 0, \quad (1.16)$$

$$G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(R^2 \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) = 0, \quad (1.17)$$

onde o potencial quântico é dado por:

$$Q = -\frac{h^{-1/2}}{R} G_{ijkl} \frac{\delta^2 R}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}}, \quad (1.18)$$

cuja forma exata depende do ordenamento.

O passo seguinte é assumir que

$$\Pi_{ij} = -h^{1/2} (K_{ij} - h_{ij} K) = \frac{\delta S}{\delta h^{ij}}, \quad (1.19)$$

relembrando que

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} (\dot{h}_{ij} - N_{j|i} - N_{i|j}). \quad (1.20)$$

Como K_{ij} é essencialmente a derivada temporal de h_{ij} , a equação (1.19) dá a evolução temporal de h_{ij} .

No caso de modelos homogêneos, que serão os únicos tratados nesta tese, o vínculo supermomentum \mathcal{H}^i é identicamente zero, e a função deslocamento N_i pode ser posta nula na equação (1.8) sem que se perca nenhuma das equações de Einstein. A Hamiltoniana (1.8) é reduzida a

$$H_{RG} = N(t) \mathcal{H}(p^\alpha(t), q_\alpha(t)), \quad (1.21)$$

onde $p^\alpha(t)$ e $q_\alpha(t)$ representam os graus de liberdade homogêneos oriundos de $\Pi^{ij}(x, t)$ e $h_{ij}(x, t)$ (e também, se for o caso, dos graus de liberdade da matéria). As equações (1.16) a (1.19) reduzem-se a:

$$f_{\alpha\beta}(q_\mu) \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \frac{\partial S}{\partial q_\beta} + U(q_\mu) + Q(q_\mu) = 0, \quad (1.22)$$

$$Q(q_\mu) = -\frac{1}{R} f_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 R}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}, \quad (1.23)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} = f_{\alpha\beta} \frac{1}{N} \frac{\partial q^\beta}{\partial t}, \quad (1.24)$$

onde $f_{\alpha\beta}(q_\mu)$ e $U(q_\mu)$ são as particularizações do mini-superespaço de G_{ijkl} e de $-h^{1/2} {}^{(3)}R(h_{ij})$ respectivamente. As equações são invariantes por reparametrização temporal. Não há problema do tempo no mini-superespaço: qualquer escolha de N dá o mesmo resultado físico. Isto, no entanto, não é verdade no superespaço [21].

No capítulo 2 será visto um exemplo do que foi discutido aqui, só que para cosmologia com campos escalares aplicada a um modelo de mini-superespaço (Friedmann-Robertson-Walker).

Chapter 2

Singularidades e o Limite Clássico em Cosmologia Quântica com Campos Escalares

Dando sequência ao capítulo 1, onde foi introduzida ao leitor a interpretação causal da mecânica quântica e a sua aplicação à cosmologia quântica no contexto da Teoria da Relatividade Geral, será feito o mesmo neste capítulo, porém para cosmologias com campos escalares. O caso a ser estudado envolve o acoplamento mínimo da gravitação com dois campos escalares. Ele pode ser visto como uma ação efetiva a nível de árvore da teoria de cordas, onde o segundo campo escalar vem do campo de Kalb-Rammond [22], ou também pode ser entendido como modelos tipo Brans-Dicke generalizados, que podem ser derivados da compactificação de teorias multidimensionais com campos de calibre externos [23]. Na primeira seção será descrito o modelo de mini-superespaço (Friedmann-Robertson-Walker) clássico, apresentando as suas soluções gerais clássicas. Na seção 2.2 este modelo será quantizado, sendo obtida sua correspondente equação de Wheeler-DeWitt e a sua solução geral. Na seção 2.3, as superposições Gaussianas das soluções WKB serão construídas prevendo um universo clássico para pequenos valores do fator de escala porque elas

possuem seus picos [24] em torno das trajetórias clássicas, nessa região. Na seção 2.4 será adotada a interpretação causal para investigar o problema da singularidade, confirmando o resultado da seção anterior, pois muitas das soluções irão apresentar comportamento clássico quando o fator de escala for pequeno e comportamento quântico quando o fator de escala se tornar grande. Estes resultados são válidos para determinadas funções de onda. Na referência [25] são exibidas funções de onda onde as singularidades são evitadas por efeitos quânticos e o limite clássico é atingido para grandes fatores de escala.

2.1 O Modelo Clássico

Considera-se a Lagrangiana geral

$$L = \sqrt{-g} \left(\phi R - \omega \frac{\phi_{,\rho} \phi^{,\rho}}{\phi} - \frac{\chi_{,\rho} \chi^{,\rho}}{\phi} \right), \quad (2.1)$$

onde ω é uma constante de acoplamento. Ela possui uma interação não-trivial entre os campos escalares ϕ e χ . Ela entrará na ação efetiva de corda se for feito $\omega = -1$, ou ainda nas teorias de Kaluza-Klein quando $\omega = \frac{(1-d)}{d}$, onde d é o número de dimensões tipo-espaço compactas internas. Se for realizada uma transformação conforme em (2.1), tal que $g_{\mu\nu} = \phi^{-1} \bar{g}^{\mu\nu}$, obtém-se a Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} \left[R - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \frac{\phi_{,\rho} \phi^{,\rho}}{\phi^2} - \frac{\chi_{,\rho} \chi^{,\rho}}{\phi^2} \right], \quad (2.2)$$

onde as barras já foram eliminadas de $\bar{g}^{\mu\nu}$.

As equações de campo para esta Lagrangiana são:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{\left(\omega + \frac{3}{2} \right)}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\rho} \phi^{,\rho} \right) \\ &+ \frac{1}{\phi^2} \left(\chi_{,\mu} \chi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \chi_{,\rho} \chi^{,\rho} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\square\phi - \frac{\phi^{\rho\rho}\phi_{,\rho}}{\phi} + \frac{\chi_{,\rho}\chi^{\rho}}{\left(\omega + \frac{3}{2}\right)\phi} = 0, \quad (2.4)$$

$$\square\chi - 2\frac{\chi_{,\rho}\phi^{\rho}}{\phi} = 0. \quad (2.5)$$

Considerando a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{a(t)^2}{1 + (\epsilon/4)r^2} \left\{ dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\tau^2 \right] \right\}, \quad (2.6)$$

onde no fator de escala é feita a substituição $l_{pl} a \rightarrow a$ e a curvatura espacial assume os valores 0, 1 e -1 ; as equações de movimento para $N = 1$ são:

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3\epsilon}{a^2} = \frac{(\omega + 3/2)}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\chi}}{\phi}\right)^2, \quad (2.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \frac{\dot{\chi}^2}{(\omega + 3/2)\phi} = 0, \quad (2.8)$$

$$\ddot{\chi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} - 2\frac{\dot{\phi}}{\phi}\dot{\chi} = 0. \quad (2.9)$$

Aqui interessará somente o caso $\epsilon = 1$.

Considerando as equações (2.7) — (2.9), e reparametrizando a coordenada tempo como $dt = a^3 d\theta$, pode-se encontrar as seguintes soluções:

$$\chi = A + \frac{C}{B} \left(\omega + \frac{3}{2}\right) \operatorname{tgh} \left[\frac{C(\theta + D)}{(\omega + 3/2)} \right], \quad (2.10)$$

$$\phi = \frac{C}{B} \frac{1}{\cosh \left[C(\theta + D) / \sqrt{(\omega + 3/2)} \right]}, \quad (2.11)$$

$$a = \frac{\sqrt{C}}{6^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{\cosh \left[\sqrt{\frac{2}{3}} |C| (\theta + E) \right]}}, \quad (2.12)$$

onde A , B , C , D e E são constantes de integração. O universo se expande de uma singularidade inicial até um tamanho máximo e, então, se contrai até uma singularidade final ($a \propto t^{1/3}$, para a pequeno).

Para $A = 0$, $B = C$, $D = E$ e $\omega = 0$, encontram-se as seguintes relações implícitas entre a , ϕ e χ :

$$\phi(a) = \frac{1}{|C|} \sqrt{6} a^2, \quad (2.13)$$

$$a(\chi) = \sqrt{|C|} \left(\frac{1}{6} - \frac{\chi^2}{9} \right)^{1/4}, \quad (2.14)$$

$$\phi(\chi) = \sqrt{1 - \frac{2}{3} \chi^2}. \quad (2.15)$$

2.2 Soluções Quânticas no Mini-Superespaço

Introduzindo a métrica (2.6) na Lagrangiana (2.2), esta se torna

$$L = \frac{12 a \dot{a}^2}{N} - (3 + 2\omega) \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{N \phi^2} - 2 \frac{a^3 \dot{\chi}^2}{N \phi^2} - 12 N a. \quad (2.16)$$

Os seus momentos conjugados são:

$$\pi_a = 24 \frac{a \dot{a}}{N}, \quad (2.17)$$

$$\pi_\phi = -2 (3 + 2\omega) \frac{a^3 \dot{\phi}}{N \phi^2}, \quad (2.18)$$

$$\pi_\chi = -4 \frac{a^3 \dot{\chi}}{N \phi^2}. \quad (2.19)$$

A Hamiltoniana será

$$H = N \left[\frac{\pi_a^2}{48 a} - \frac{\phi^2 \pi_\phi^2}{4 (3 + 2\omega) a^3} - \frac{\phi^2 \pi_\chi^2}{8 a^3} + 12 a \right] \equiv N \mathcal{H}, \quad (2.20)$$

onde tem-se o vínculo de primeira classe $\mathcal{H} \approx 0$.

Seguindo o procedimento de Dirac para a quantização, a versão operador de \mathcal{H} atuará sobre os estados quânticos ψ , resultando na equação de Wheeler-DeWitt

$$\hat{\mathcal{H}} \psi = 0, \quad (2.21)$$

onde foram feitas as substituições

$$\pi_a^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a}, \quad (2.22)$$

$$\pi_\phi^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{q}{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (2.23)$$

$$\pi_\chi^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \quad (2.24)$$

na expressão

$$\frac{a^2 \pi_a^2}{12} - \frac{\phi^2 \pi_\phi^2}{(3 + 2\omega)} - \frac{\phi^2 \pi_\chi^2}{2} + 48 a^4 \quad (2.25)$$

e onde p e q são fatores de ordenamento, cujos valores determinam de que modo estavam ordenadas as variáveis. Por exemplo, temos os seguintes ordenamentos:

$$a^2 \pi_a^2 \rightarrow -a^2 \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} \quad \text{para } p = 0, \quad (2.26)$$

$$a \pi_a a \pi_a \rightarrow -a \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial}{\partial a} \right) \quad \text{para } p = 1, \quad (2.27)$$

$$a \pi_a^2 a \rightarrow -a \frac{\partial^2}{\partial a^2} (a) \quad \text{para } p = 2. \quad (2.28)$$

Foi feito também $\hbar = c = 1$. A equação de Wheeler-DeWitt toma, então, a forma

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{12} \left[\partial_a^2 \psi + \frac{p}{a} \partial_a \psi \right] - \frac{\phi^2}{(3+2\omega)} \left[\partial_\phi^2 \psi + \frac{q}{\phi} \partial_\phi \psi \right] - \frac{\phi^2}{2} \partial_\chi^2 \psi \\ & = V_\psi(a) \psi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $V_\psi(a) = 48 a^4$.

Usando agora o método de separação de variáveis, escrevendo $\psi(a, \phi, \chi) = \Phi(a, \theta) \lambda(\chi)$, a equação (2.29) se separa em outras duas:

$$\partial_\chi^2 \lambda = -8 K_1 \lambda, \quad (2.30)$$

$$\frac{a^2}{12} \left[\partial_a^2 \Phi + \frac{p}{a} \partial_a \Phi \right] - \frac{\phi^2}{(3+2\omega)} \left[\partial_\phi^2 \Phi + \frac{q}{\phi} \partial_\phi \Phi \right] = V_\Phi(a, \phi) \Phi, \quad (2.31)$$

com $V_\Phi(a, \phi) = 48 a^4 - 4 K_1 \phi^2$ e K_1 sendo uma constante de integração. Usando, mais uma vez, o método de separação de variáveis, escrevendo $\Phi(a, \phi) = \alpha(a) \beta(\phi)$, obtêm-se duas equações ordinárias:

$$\partial_a^2 \alpha + \frac{p}{\alpha} \partial_a \alpha = V_\alpha(a) \alpha, \quad (2.32)$$

$$\partial_\phi^2 \beta + \frac{q}{\phi} \partial_\phi \beta = V_\beta(\phi) \beta, \quad (2.33)$$

com

$$V_\alpha(a) = 12 \left(48 a^2 - \frac{K_2}{a^2} \right), \quad (2.34)$$

$$V_\beta(\phi) = (3+2\omega) \left(4 K_1 - \frac{K_2}{\phi^2} \right), \quad (2.35)$$

onde K_2 é uma outra constante de integração.

As soluções para α , β e λ são

$$\alpha(a) = a^{(1-p)/2} \left[A_\alpha I_n (12 a^2) + B_\alpha K_n (12 a^2) \right], \quad (2.36)$$

com

$$n = \frac{\sqrt{(p-1)^2 - 48 K_2}}{4};$$

$$\begin{aligned} \beta(\phi) = & \phi^{(1-q)/2} \left[A_\beta I_m \left(2 \sqrt{(3+2\omega) K_1} \phi \right) + \right. \\ & \left. + B_\beta K_m \left(2 \sqrt{(3+2\omega) K_1} \phi \right) \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

com

$$m = \frac{\sqrt{(q-1)^2 - 4 (3+2\omega) K_2}}{2};$$

$$\lambda(\chi) = A_\lambda e^{i\sqrt{8K_1}\chi} + B_\lambda e^{-i\sqrt{8K_1}\chi}. \quad (2.38)$$

Os coeficientes A 's e B 's são constantes.

A solução geral da equação de Wheeler-DeWitt é

$$\psi(a, \phi, \chi) = \int A(K_1, K_2) \alpha_{K_2}(a) \beta_{K_1, K_2}(\phi) \lambda_{K_1}(\chi) dK_1 dK_2. \quad (2.39)$$

Se a ordem das funções de Bessel modificadas é imaginária, então α pode ter um comportamento oscilatório, mas somente para pequenos valores de a . Para valores grandes de a , ela cresce ou decresce. Isto sugere que a fase clássica possa ocorrer somente para pequenos valores de a . Este comportamento é exibido na figura 1.

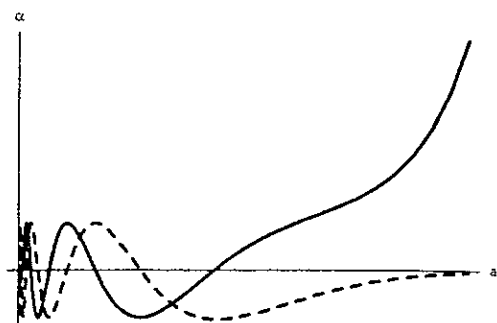


Figura 1: *Comportamento de $\alpha(a)$ para $p = 1$, $K_2 = 1$, $A_\alpha = 1$ e $B_\alpha = 0$. A parte real é representada pela linha contínua, enquanto a parte imaginária é representada pela linha pontilhada.*

2.3 A Aproximação WKB

A aproximação WKB é um método de se tentar obter uma transição das soluções quânticas para as clássicas. O procedimento consiste em reescrever a função de onda como

$$\Psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \quad (2.40)$$

substituir na equação de Wheeler-DeWitt e em realizar uma expansão em S em ordens de \hbar

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots \quad (2.41)$$

A solução clássica deve ser recuperada através da construção de um pacote de onda de S_0

$$\Psi = \int A(K_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0\right) dK_0, \quad (2.42)$$

onde K_0 é uma constante de integração e $A(K_0)$ é uma função Gaussiana.

Considerando $S = S(a, \phi, \chi)$, o cálculo de suas derivadas em a dá:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S_0}{\partial a} \Psi + i \frac{\partial S_1}{\partial a} \Psi + \dots, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} &= \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S_0}{\partial a^2} \Psi - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right)^2 \Psi - \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right) \left(\frac{\partial S_1}{\partial a}\right) \Psi + \\ &+ i \frac{\partial^2 S_1}{\partial a^2} \Psi - \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial S_1}{\partial a}\right) \left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right) \Psi - \left(\frac{\partial S_1}{\partial a}\right)^2 \Psi + \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

As derivadas em ϕ e χ dão expressões semelhantes. Substituindo, então, na equação de Wheeler-DeWitt e separando em equações para ordens diferentes de \hbar , obtém-se

$$\frac{a^2}{12} \left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right)^2 - \frac{\phi^2}{3+2\omega} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \chi}\right)^2 + V_\Psi(a) = 0, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{12} \left[i \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial a^2}\right) - 2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right) \left(\frac{\partial S_1}{\partial a}\right) + \frac{ip}{a} \left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right) \right] - \\ &- \frac{\phi^2}{3+2\omega} \left[i \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial \phi^2}\right) - 2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi}\right) \left(\frac{\partial S_1}{\partial \phi}\right) + \frac{iq}{\phi} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi}\right) \right] + \\ &+ \frac{\phi^2}{2} \left[i \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial \chi^2}\right) - 2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial \chi}\right) \left(\frac{\partial S_1}{\partial \chi}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo a separação de variáveis $S_0(a, \phi, \chi) = S_0(a) + S_0(\phi) + S_0(\chi)$, obtêm-se as seguintes equações:

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial a}(a)\right)^2 = 12 \left(\frac{\mathcal{K}_0}{a^2} - 48 a^2\right), \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi}(\phi)\right)^2 = (3 + 2\omega) \left(\frac{\mathcal{K}_0}{\phi^2} - K_0\right), \quad (2.48)$$

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial \chi}(\chi)\right)^2 = 2 K_0, \quad (2.49)$$

onde \mathcal{K}_0 e K_0 são constantes de separação.

As soluções das equações são

$$\begin{aligned} S_0(a) = & \pm \left[\sqrt{3(\mathcal{K}_0 - 48a^4)} - \right. \\ & \left. - \sqrt{3\mathcal{K}_0} \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{K}_0 - 48a^4}{\mathcal{K}_0}} \right) \right] + A_0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} S_0(\phi) = & \pm \left[\sqrt{(3 + 2\omega)(\mathcal{K}_0 - K_0\phi^2)} - \right. \\ & \left. - \sqrt{(3 + 2\omega)\mathcal{K}_0} \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{K}_0 - K_0\phi^2}{\mathcal{K}_0}} \right) \right] + B_0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$S_0(\chi) = \pm \sqrt{2K_0} \chi + C_0, \quad (2.52)$$

onde A_0 , B_0 e C_0 são constantes de integração. Pode-se encontrar as soluções para S_1 também, mas elas não são importantes para a construção do pacote de onda nesta aproximação. Nota-se, primeiramente, que $\mathcal{K}_0 > 0$ leva a um comportamento oscilatório para $\exp[(1/\hbar) S_0(a)]$. Por outro lado, se $(3 + 2\omega)\mathcal{K}_0 > 0$, mantendo $\mathcal{K}_0 > 0$, então $\exp[(1/\hbar) S_0(\phi)]$ é oscilatório para qualquer valor de ϕ quando $K_0 < 0$, ou somente para

valores pequenos de ϕ quando $K_0 > 0$. Se $(3 + 2\omega) K_0 < 0$, então $\exp[(1/\hbar) S_0(\phi)]$ tem um comportamento exponencial para qualquer valor de ϕ quando $K_0 < 0$ ou somente para pequenos valores de ϕ quando $K_0 > 0$.

Considera-se, agora, a superposição dada por

$$\Psi(a, \phi, \chi) = \int \int A(K_0, \mathcal{K}_0) \exp[(1/\hbar) S_0(a, \phi, \chi, K_0, \mathcal{K}_0)] dK_0 d\mathcal{K}_0, \quad (2.53)$$

onde $A(K_0, \mathcal{K}_0)$ é uma função Gaussiana bidimensional centrada em $\bar{K}_0 > 0$ e $\bar{\mathcal{K}}_0 > 0$, com larguras σ_1 e σ_2 , respectivamente. Observando a equação (2.50) pode-se ver que $S(a)$ torna-se muito grande quando a torna-se muito pequeno. Por isso, na integral (2.53), interferências construtivas acontecem somente se

$$\left(\frac{\partial S_0(a, \phi, \chi)}{\partial K_0} \Big|_{K_0=\bar{K}_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0(a, \phi, \chi)}{\partial \mathcal{K}_0} \Big|_{\mathcal{K}_0=\bar{\mathcal{K}}_0} \right)^2 = 0. \quad (2.54)$$

As relações implícitas entre as variáveis a , ϕ e χ que vêm da equação (2.54) são as mesmas das equações (2.13) — (2.15). O limite clássico é então recuperado somente para valores pequenos de a .

2.4 Interpretação Causal

Agora as soluções quânticas (2.36) — (2.39) serão analisadas do ponto de vista da interpretação causal da mecânica quântica e os resultados serão comparados com os obtidos na seção anterior. Considere em (2.39) os seguintes valores fixados: $p = q = 1$, $\omega = 0$, $K_1 = -1/12$, $K \equiv K_2$, $A_\alpha = A_\beta = 0$, $B_\alpha = B_\beta = A_\lambda = B_\lambda = 1$ e $A(K_1, K_2) = \frac{3}{2} \delta \left(K_1 + \frac{1}{12} \right) \text{tg} \left(\pi \sqrt{3K_2} \right)$. De acordo com um resultado da referência [26], obtém-se

$$\Psi(x, \phi, \chi) = \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) \int_0^\infty \frac{3}{2} \text{tgh} \left(\pi \sqrt{3K} \right) \mathcal{K}_{i\sqrt{3K}}(x) \mathcal{K}_{i\sqrt{3K}}(i\phi) dK =$$

$$= \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x\phi}{x^2 + \phi^2}} e^{-x} \exp \left\{ i \left[\frac{\pi}{4} - \phi - \phi \operatorname{arctg} \left(\frac{\phi}{x} \right) \right] \right\} \quad (2.55)$$

definindo

$$x = 12 a^2 \quad (2.56)$$

. Considerando-se a função de onda na forma $\Psi = R \exp [(i/\hbar) S]$ e dadas as expressões dos momenta (2.17) — (2.19), as trajetórias quânticas podem ser calculadas (ver a equação (1.24) do Capítulo 1) das seguintes equações (no *gauge* $N = 1$):

$$\pi_a = 24 a \dot{a} = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{2\sqrt{12} x \phi}{x^2 + \phi^2}, \quad (2.57)$$

$$\pi_\phi = -6 \frac{a^3 \dot{\phi}}{\phi^2} = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{x^2 + \phi^2 + x}{x^2 + \phi^2}, \quad (2.58)$$

$$\pi_\chi = -\frac{4 a^3 \dot{\chi}}{\phi^2} = \frac{\partial S}{\partial \chi} = 0, \quad (2.59)$$

pois

$$S = \frac{\pi}{4} - \phi - \phi \operatorname{arctg} \left(\frac{\phi}{x} \right) \quad (2.60)$$

(onde foi considerado $\hbar = 1$).

As soluções são

$$a = \frac{1}{\sqrt{12}} \left[\ln \left(\frac{c}{\sqrt{1 + 4\eta^2}} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.61)$$

$$\phi = -\frac{1}{2\eta} \ln \left(\frac{c}{\sqrt{1 + 4\eta^2}} \right) = -6 \frac{a^2}{\eta}, \quad (2.62)$$

$$\chi = \text{constante}, \quad (2.63)$$

onde $\eta = \int (dt/a)$ é o tempo conforme e c é uma constante de integração. Para pequenos valores de a , quando η se aproxima de $\pm (c^2 - 1)/2$, essas funções tendem a

$$a(t) \propto t^{1/3}, \quad (2.64)$$

$$\phi(t) \propto t^{2/3} \propto a^2, \quad (2.65)$$

$$\chi = \text{constante}, \quad (2.66)$$

que é exatamente o comportamento clássico para $\omega = 0$. Quando a não é pequeno, as trajetórias não são como as clássicas, como pode ser visto da comparação das equações (2.61) — (2.63) com as equações (2.10) — (2.12). Este fato pode ser entendido a partir da inspeção do potencial quântico Q que aparece na equação tipo Hamilton-Jacobi

$$-\frac{a^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 + \frac{\phi^2}{3+2\omega} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 - 48 a^4 + Q = 0, \quad (2.67)$$

obtida através da substituição de $\Psi = R e^{iS}$ na equação de Wheeler-DeWitt (2.29). A sua expressão é

$$Q = \frac{1}{R} \left[\frac{a^2}{12} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{\phi^2}{3+2\omega} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} + \frac{q}{\phi} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) \right] - \frac{\phi^2}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \chi^2}. \quad (2.68)$$

Para este problema particular, onde a expressão do módulo de Ψ é

$$R = \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x\phi}{x^2 + \phi^2}} e^{-x}, \quad (2.69)$$

tem-se

$$Q = \frac{1}{3} \frac{(x^4 - 2\phi^2 x + \phi^4)}{x^2 + \phi^2}. \quad (2.70)$$

Para pequenos valores de a tem-se $Q \propto a^2$; por isso, neste domínio, os seguintes termos cinéticos dominam:

$$K_a = \frac{a^2 \pi_a^2}{12} = \frac{a^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{x^2 \phi^2}{(x^2 + \phi^2)^2} \propto \text{constante}, \quad (2.71)$$

$$K_\phi = -\frac{\phi^2 \pi_\phi^2}{3} = -\frac{\phi^2}{3} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = -\frac{\phi^2}{3} \left(\frac{x^2 + \phi^2 + x}{x^2 + \phi^2} \right)^2 \propto \text{constante}, \quad (2.72)$$

tornando o potencial quântico desprezível quando comparado com eles. Por outro lado, quando $\eta \rightarrow 0$, a tende ao seu valor máximo ($a \rightarrow a_{max}$) e ϕ cresce indefinidamente ($\phi \rightarrow \infty$). O potencial quântico $Q \propto \phi^2$ diverge, enquanto que o potencial clássico e os termos cinéticos se comportam como

$$K_a \propto \frac{1}{\phi^2}, \quad (2.73)$$

$$K_\phi \propto \phi^2, \quad (2.74)$$

$$V_{cl} \propto a^4. \quad (2.75)$$

Por isso, agora neste outro domínio, o potencial quântico — junto com K_ϕ — torna-se o termo mais importante na equação (2.67). Este comportamento do potencial quântico explica porque as trajetórias são clássicas para valores pequenos de a e quânticas para valores grandes deste.

Nesse mesmo trabalho (referência [5]) mostra-se que outras escolhas de diferentes valores para as quantidades p , q , ω , K_1 , A_α , A_β , B_λ , B_α , B_β , A_λ e $A(K_1, K_2)$ podem levar a um resultado equivalente quanto ao domínio quântico.

É importante comentar que o resultado desta última seção, onde foi adotada a interpretação causal da mecânica quântica, é qualitativamente equivalente ao da seção anterior, onde, adotando a interpretação probabilística da mecânica quântica, foi mostrado que as superposições Gaussianas das funções de onda da aproximação WKB têm seus picos centrados nas trajetórias clássicas no espaço das configurações, mas somente para valores

pequenos de a . Estes resultados contrariam o senso comum de que os efeitos quânticos só seriam dominantes nas fases microscópicas, o que os tornam surpreendentes (veja entre tanto referência [25] para outras funções de onda). Isto mostra que a condição de limite clássico para grandes fatores de escala depende da escolha do estado quântico do universo. Resultados semelhantes a estes bem como outros mais satisfatórios foram obtidos em um trabalho original desta tese, que será apresentado no capítulo 3. Alguns resultados e algumas etapas de cálculo deste capítulo 2 serão utilizados neste trabalho (capítulo 3), que tratará da aplicação da interpretação causal a teorias escalar-tensoriais com acoplamento não-mínimo.

æ

Chapter 3

Cosmologias Quânticas em Teorias Escalar-Tensoriais com Acoplamento Não Mínimo

No capítulo anterior foram apresentados alguns resultados de um trabalho recente [5], onde foi estudada a quantização em mini-superespaço de teorias escalar-tensoriais com acoplamento mínimo. Nesse trabalho é discutida a presença de singularidades no nível quântico, o limite clássico, a questão do tempo e problemas de interpretação. Foi mostrado também que a interpretação causal da mecânica quântica produz um limite clássico que está de acordo com considerações semiclássicas. A solução geral da equação de Wheeler-DeWitt foi encontrada e, para algumas soluções exatas particulares, mostrou-se que, ao contrário da crença comum, o limite clássico ocorreu para fatores de escala pequenos e, por isso, as singularidades clássicas não foram evitadas por efeitos quânticos. Nessas soluções, os efeitos quânticos tornaram-se importantes somente para valores grandes do fator de escala.

Neste capítulo são estudados esses problemas, no mesmo contexto da quantização em mini-superespaços, porém de teorias escalar-tensoriais com acoplamento não-mínimo.

Como foi mencionado anteriormente, estas teorias são derivadas da ação efetiva das teorias de cordas [27], e das teorias de Kaluza-Klein compactificadas para quatro dimensões [23, 28]. Em ambos os casos, o modelo resultante tem um acoplamento não-mínimo entre a gravidade e um ou mais campos escalares. A nível clássico, os modelos efetivos considerados aqui são indexados pela constante de acoplamento ω , que — a princípio — pode assumir valores no intervalo $-\frac{3}{2} < \omega < \infty$, como na teoria de Brans-Dicke. Os modelos que são estudados aqui diferem da usual teoria de Brans-Dicke pela presença de um segundo campo escalar minimamente acoplado à gravidade, mas com um acoplamento não-trivial com o campo escalar usual da teoria de Brans-Dicke. Para a ação efetiva de cordas, $\omega = -1$, enquanto que para teorias de Kaluza-Klein compactificadas, $\omega = -\frac{(d-1)}{d}$, onde $n = 4 + d$ é a dimensão do espaço-tempo.

O mini-superespaço que será considerado é tri-dimensional: os graus de liberdade são o fator de escala e dois campos escalares. As seções espaciais do modelo de Friedmann são tomadas com curvatura positiva. Para $\omega < 0$, as soluções clássicas representam universos com raios mínimos (mas que não são necessariamente livres de singularidade), enquanto que — para $\omega > 0$ — o cenário cosmológico é qualitativamente como os cenários cosmológicos de Friedmann tradicionais. Para $\omega = 0$, onde o campo escalar não-minimamente acoplado não tem nenhuma dinâmica, tem-se um universo oscilante onde o fator de escala nunca vai a zero. É um modelo livre de singularidades. Quando se quantiza tais teorias, chega-se a uma equação de Wheeler-DeWitt que é, em contraste com o caso de acoplamento mínimo, não separável e muito difícil de resolver. Contudo, é bem conhecido que uma transformação conforme permite que soluções clássicas e quânticas de modelos com um campo escalar acoplado não-minimamente à gravidade (referencial de Jordan) sejam mapeadas para o chamado referencial de Einstein, onde o campo escalar é minimamente acoplado ao setor gravitacional (ver [29] para o caso onde $\omega = -\frac{3}{2}$). Aqui, neste trabalho, foi possível mostrar que esse resultado é válido também na presença de um segundo campo escalar, e para qualquer valor de ω . Por isso, as soluções da equação de

Wheeler-DeWitt encontradas em [5] no referencial de Einstein podem ser mapeadas para as soluções da equação mais complicada de Wheeler-DeWitt no referencial de Jordan. A solução geral da equação de Wheeler-DeWitt no referencial de Jordan obtida deste modo é uma generalização daquela obtida em [30] para o caso de um campo escalar. Aqui será mostrado também que as trajetórias Bohmianas correspondentes às soluções quânticas no referencial de Einstein podem ser diretamente mapeadas para as trajetórias Bohmianas relativas às soluções quânticas no referencial de Jordan. De posse destes resultados, é possível comparar as características do caso de acoplamento mínimo com as do caso de acoplamento não mínimo. É o que será feito no decorrer deste capítulo. Na primeira seção serão exibidas as teorias clássicas com as suas correspondentes soluções clássicas; na segunda seção será mostrado o mapeamento conforme da equação de Wheeler-DeWitt em mini-superespaço do referencial de Jordan para o de Einstein, de onde serão determinadas as soluções no caso do acoplamento não mínimo. Na terceira seção, a equivalência conforme das trajetórias Bohmianas é também determinada e seus limites clássicos são comparados e discutidos. As conclusões serão apresentadas ao final dessa última seção.

3.1 Teorias Escalar-Tensoriais

Na ausência da matéria comum, a densidade lagrangeana mais geral que se pode escrever para teorias escalar-tensoriais é

$$L = \sqrt{-g} \left(f(\phi) R - \omega(\phi) \frac{\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}}{\phi} + V(\phi) \right), \quad (3.1)$$

onde $f(\phi)$ e $\omega(\phi)$ são funções arbitrárias do campo escalar, enquanto que $V(\phi)$ é um termo de potencial. Em geral, o termo de potencial deve ser adicionado à mão, embora em alguns casos a escolha possa ser ditada por considerações microscópicas. A teoria de Brans-Dicke [31] é representada pelo caso especial onde $f(\phi) = \phi$ e $\omega(\phi) = \text{constante}$. Geralmente, na teoria de Brans-Dicke, o termo de potencial é colocado igual a zero.

Uma vasta classe de teorias escalar-tensoriais é representada por uma densidade lagrangeana do tipo

$$L = \sqrt{-g} \left(\phi R - \omega \frac{\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}}{\phi} - \frac{\chi_{;\rho} \chi^{;\rho}}{\phi} \right). \quad (3.2)$$

Esta densidade lagrangeana é a mesma que a de Brans-Dicke, mas ela tem um campo escalar adicional, que se acopla não trivialmente com o campo ϕ de Brans-Dicke. Tal lagrangeana efetiva aparece em cosmologia de cordas com campo de Kalb-Rammond ($\omega = -1$) e em teorias multidimensionais onde gravidade é acoplada a campos de *gauge* externos (não geométricos) no espaço-tempo de dimensão mais alta $n = 4+d$ ($\omega = -\frac{d-1}{d}$).

Aplicando o princípio variacional para as quantidades $g^{\mu\nu}$, ϕ e χ , encontram-se as correspondentes equações de campo para esta Lagrangeana:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho} \right) + \\ &+ \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square\phi) + \frac{1}{\phi^2} \left(\chi_{;\mu} \chi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \chi_{;\rho} \chi^{;\rho} \right); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\square\phi + \frac{2}{(3+2\omega)} \frac{\chi_{;\rho} \chi^{;\rho}}{\phi} = 0, \quad (3.4)$$

$$\square\chi - \frac{\phi_{;\rho}}{\phi} \chi^{;\rho} = 0. \quad (3.5)$$

Agora, nas equações de campo (3.3) - (3.5) será inserida a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 + (\epsilon/4) r^2} \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.6)$$

onde a é o fator de escala do universo e $K \equiv (\epsilon/4) = 0, 1, -1$ representa a constante de curvatura da seção espacial. O fator N é a função lapso, que será feita igual a 1 nesta

seção mas será reconsiderada na próxima seção. Para esta métrica, as únicas componentes não nulas do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ são:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad (3.7)$$

$$R_{ii} = \frac{1}{a^2(t)} \left(a(t) \ddot{a}(t) + 2 \dot{a}^2 + 2K \right) g_{ii}, \quad (3.8)$$

onde o índice i varia de 1 a 3 e não há soma em i . Sabendo também que as componentes Γ_{ii}^0 da conexão são dadas por

$$\Gamma_{ii}^0 = g_{ii} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (3.9)$$

e supondo que ϕ e χ só dependam do tempo (campos homogêneos), pode-se calcular $\square\phi$ e $\square\chi$:

$$\begin{aligned} \square\phi &= \phi_{;\rho}{}^{;\rho} = g^{\mu\rho} \phi_{,\rho;\mu} \\ &= g^{\mu\rho} \phi_{,\rho;\mu} - g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} \phi_{,\sigma} \\ &= g^{00} \ddot{\phi} - g^{ii} \Gamma_{ii}^0 \dot{\phi} \\ &= \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

e, da mesma forma,

$$\square\chi = \ddot{\chi} + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\chi}. \quad (3.11)$$

As equações de campo resultantes são:

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{K}{a^2} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\chi}}{\phi} \right)^2, \quad (3.12)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{2}{3+2\omega} \frac{\dot{\chi}^2}{\phi} = 0, \quad (3.13)$$

$$\ddot{\chi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\chi} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \dot{\chi} = 0. \quad (3.14)$$

Os pontos significam derivadas com respeito ao tempo cósmico t . Para resolver as equações (3.12) - (3.14), é mais fácil reparametrizar a coordenada tempo como $dt = a^3 d\theta$, θ sendo — em geral — uma nova coordenada tempo muito conveniente quando a gravidade está acoplada a campos escalares. Em termos de θ , obtêm-se as equações de movimento,

$$3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + 3K a^4 = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 3 \frac{a'}{a} \frac{\phi'}{\phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi'}{\phi} \right)^2; \quad (3.15)$$

$$\phi'' + \frac{2}{3 + 2\omega} \frac{\chi'^2}{\phi} = 0; \quad (3.16)$$

$$\chi'' - \frac{\phi'}{\phi} \chi' = 0. \quad (3.17)$$

As linhas denotam agora derivada com respeito a θ .

A solução para a equação (3.17) é direta e se escreve

$$\chi' = C \phi, \quad (3.18)$$

onde C é uma constante de integração. Inserindo (3.18) na (3.16) obtém-se uma equação de oscilador harmônico para ϕ com a solução

$$\phi = D \text{sen}(\lambda \theta), \quad (3.19)$$

com D sendo outra constante de integração e

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{3 + 2\omega}} C.$$

Agora retorna-se à equação (3.15). Nela são inseridas as soluções (3.18) e (3.19). Redefinindo o fator de escala $a = \phi^{-1/2} b$, pode-se integrar a equação resultante para b . Esta redefinição é a mesma que transforma a Lagrangeana original escrita no referencial

de Jordan na Lagrangeana equivalente, escrita no referencial de Einstein, cujas soluções cosmológicas para a seção espacial fechada já foram obtidas previamente [5]. A solução final para o fator de escala é:

$$a = \sqrt{\frac{2Cr \operatorname{tg}^\alpha(\lambda\theta/2)}{\sqrt{6} \operatorname{sen}(\lambda\theta) \left[1 + r^2 \operatorname{tg}^{2\alpha}\left(\frac{1}{2}\lambda\theta\right)\right]}}, \quad (3.20)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2}{3}\omega}$$

e r uma constante de integração. Quando $\omega > 0$ (3.20) representa um universo que tem uma fase de expansão, vindo de uma singularidade, alcançando um valor máximo para a , e então colapsando novamente para uma singularidade. Para $\omega < 0$, o cenário é completamente diferente: o universo tem inicialmente uma fase de contração, vindo de $a \rightarrow \infty$, alcança um mínimo e, então, entra numa fase de expansão até $a \rightarrow \infty$. Este universo com raio mínimo é livre de singularidades quando $-\frac{3}{2} < \omega < -\frac{4}{3}$, com períodos deflacionários e inflacionários, quando $a \rightarrow \infty$ (no caso onde $\omega = -\frac{4}{3}$, esta inflação é exponencial), caso contrário há singularidades quando $a \rightarrow \infty$. Quando $\omega > 0$, todas as condições de energia são satisfeitas, enquanto que, no segundo caso, a condição de energia forte é sempre violada e as condições de energia fraca podem ser violadas em algumas regiões específicas. No limite $\theta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \pi/\lambda$, a solução para a toma a forma

$$a \propto t^{\frac{\alpha-1}{3\alpha-1}}, \quad \phi \propto t^{2/(3\alpha-1)}, \quad \chi \propto \text{constante}, \quad (3.21)$$

com

$$t \propto \theta^{(3\alpha-1)/2} \quad \text{quando } \theta \rightarrow 0$$

ou

$$t \propto (\pi - \lambda\theta)^{(3\alpha-1)/2} \quad \text{quando } \theta \rightarrow \pi/\lambda.$$

Para $\omega > 0$ não há nenhuma fase inflacionária. No caso $-\frac{3}{2} < \omega < -\frac{4}{3}$ ($0 < \alpha < \frac{1}{3}$), $\theta \rightarrow 0$ implica $t \rightarrow -\infty$, enquanto que em todos os outros casos $\theta \rightarrow 0$ implica

$t \rightarrow 0$.

As soluções com *big-crunch* seguido de um *big bang* ($\omega > 0$) e aquelas com raio mínimo ($\omega < 0$), são separadas pelo caso particular onde $\omega = 0$, para o qual o fator de escala oscila entre um valor máximo e um valor mínimo, tomando a forma

$$a = \sqrt{\frac{C r}{\sqrt{6} [\cos^2(\lambda\theta/2) + r^2 \sin^2(\lambda\theta/2)]}}. \quad (3.22)$$

Esta é uma solução não singular. No caso particular onde $r = 1$, o fator de escala é constante. É um universo estático, mesmo com os campos escalares evoluindo no tempo.

Vale lembrar as correspondentes soluções para o caso de acoplamento mínimo, que são dadas no capítulo 2 (equações (2.10) - (2.12)). Elas podem ser obtidas ao se realizar a transformação conforme $a = \phi^{-1/2} b$, resultando em:

$$b = \sqrt{\lambda_1 \operatorname{sech}(2\lambda_1 \epsilon)}, \quad (3.23)$$

$$\phi = D \operatorname{sech}\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} \epsilon\right), \quad (3.24)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha D \operatorname{tgh}\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} \epsilon\right) + \chi_0, \quad (3.25)$$

com $d\theta = \phi d\epsilon$, $\lambda_1 \equiv CD/\sqrt{6}$ e χ_0 é uma constante de integração. Perto das singularidades, as soluções acima — no referencial de Einstein — comportam-se como $b \propto \tau^{1/3}$, $\phi \propto \tau^{(2/3)\alpha}$ e $\chi \propto \text{constante}$, onde τ é o tempo próprio naquele referencial,

$$\tau = \phi^{1/2} dt.$$

3.2 Soluções Quânticas no Mini-superspaço

Inserindo-se agora a métrica (3.6) na Lagrangeana (3.2), depois de uma integração por partes, obtém-se a expressão

$$L = \frac{1}{N} \left(12 a \dot{a}^2 + 12 a^2 \dot{a} \dot{\phi} - 2\omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} a^3 - 2 \frac{\dot{\chi}}{\phi} a^3 \right) - 12 K N a \phi. \quad (3.26)$$

Os momenta conjugados a a , ϕ e χ são

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 12 \frac{a^2 \phi}{N} \left(2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right), \quad (3.27)$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 4 \frac{a^3}{N} \left(3 \frac{\dot{a}}{a} - \omega \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right), \quad (3.28)$$

$$\pi_\chi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = -4 \frac{a^3}{N \phi} \dot{\chi}, \quad (3.29)$$

A função lapso N é um multiplicador de Lagrange, cuja variação leva a uma equação de vínculo. As equações (3.27) - (3.29) invertidas dão

$$\dot{a} = -\frac{N}{12(2\omega + 3)} \left(\frac{\omega \pi_a}{a \phi} + 3 \frac{\pi_\phi}{a^2} \right), \quad (3.30)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{N}{4(2\omega + 3)} \left(\frac{\pi_a}{a^2} - 2 \frac{\phi \pi_\phi}{a^3} \right), \quad (3.31)$$

$$\dot{\chi} = \frac{N \phi \pi_\chi}{4 a^3}. \quad (3.32)$$

A Hamiltoniana canônica pode ser construída a partir de

$$H = \dot{a} \pi_a + \dot{\phi} \pi_\phi + \dot{\chi} \pi_\chi - L, \quad (3.33)$$

assumindo então a forma

$$H = N \mathcal{H}, \quad (3.34)$$

com

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\omega}{24(3+2\omega)} \frac{\pi_a^2}{a\phi} + \frac{1}{4(3+2\omega)} \frac{\pi_a \pi_\phi}{a^2} - \frac{1}{4(3+2\omega)} \frac{\phi}{a^3} \pi_\phi^2 - \frac{\phi}{8a^3} \pi_\chi^2 + 12 K \phi a \right). \quad (3.35)$$

Como a função N é um multiplicador de Lagrange, tem-se então o vínculo $\mathcal{H} \approx 0$. De acordo com o procedimento de Dirac para a quantização, deve-se agora aplicar sobre os estados quânticos a versão operatorial de \mathcal{H} :

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi = 0, \quad (3.36)$$

onde Ψ é a função de onda que representa o estado quântico do sistema.

Fazendo-se as substituições $\pi_a = -i \partial_a$, $\pi_\phi = -i \partial_\phi$ e $\pi_\chi = -i \partial_\chi$ na expressão explícita de \mathcal{H} , obtém-se a expressão explícita do operador $\hat{\mathcal{H}}$ que — quando inserido na equação acima — resulta na seguinte equação diferencial para $\Psi = \Psi(a, \phi, \chi)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\omega}{6} \frac{a^2}{(2\omega+3)} \left(\partial_a^2 + \frac{p}{a} \partial_a \right) + \frac{a\phi}{(2\omega+3)} \partial_a \partial_\phi - \right. \\ & \left. - \frac{\phi^2}{(2\omega+3)} \left(\partial_\phi^2 + \frac{q}{\phi} \partial_\phi \right) - \frac{\phi^2}{2} \partial_\chi^2 \right\} \Psi = \\ & = 48 K a^4 \phi^2 \Psi, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde p e q são os fatores de ordenamento.

A equação (3.37) tem derivadas de segunda ordem misturadas nas variáveis a e ϕ ; ao mesmo tempo, o potencial no lado direito mistura estas mesmas variáveis. Desta forma, a equação (3.37) não pode ser resolvida através do método de separação de variáveis. No entanto, nós podemos redefinir as variáveis a e ϕ , escrevendo

$$a = \phi^{-1/2} b, \quad \phi' = \phi, \quad \chi' = \chi. \quad (3.38)$$

Esta transformação é a versão no mini-superespaço da transformação que leva a Lagrangeana (3.2), expressa no sistema de Jordan, para uma nova Lagrangeana onde a gravitação é minimamente acoplada a dois campos escalares. Inserindo a transformação (3.38) na equação (3.37), obtém-se uma nova equação para as variáveis dinâmicas b e ϕ :

$$\left\{ \frac{b^2}{12} \left(\partial_b^2 + \frac{p'}{b} \partial_b \right) - \frac{\phi^2}{3+2\omega} \left(\partial_\phi^2 + \frac{q'}{\phi} \partial_\phi \right) - \frac{\phi^2}{2} \partial_\chi^2 \right\} \Psi = 48 b^4 \Psi. \quad (3.39)$$

Os novos fatores de ordenamento p' e q' estão relacionados aos anteriores, p e q , pelas expressões

$$p' = \frac{12}{3+2\omega} \left(\frac{\omega}{6} p + \frac{3}{4} - \frac{q}{2} \right), \quad q' = q. \quad (3.40)$$

Quando $p = q = 1$, então $p' = q' = 1$. Desta transformação, pode-se deduzir que a equação de Wheeler-DeWitt para um acoplamento mínimo do campo escalar com a gravidade pode ser mapeada para uma versão de acoplamento não mínimo deste modelo. O mapeamento conforme matemático a nível clássico é preservado no nível quântico. Além disso, o fator de ordenamento é preservado somente quando $p = q = 1$ porque, neste caso, o operador diferencial na equação de Wheeler-DeWitt é o D'Alembertiano, o qual é covariante mediante redefinições gerais de campo.

A equação (3.39) já foi estudada na literatura [5] e apresentada no capítulo 2 (equação (2.29)). As soluções foram encontradas usando o método de separação de variáveis. Para se obter as soluções da equação (3.37) (que está no referencial de Jordan), deve-se empregar a transformação (3.38) nas soluções assim encontradas. Elas são dadas por $\Psi(b, \phi, \chi) = \rho(b) \beta(\phi) \gamma(\chi)$, onde tem-se (equações (2.36)-(2.38)):

$$\rho(b = a \phi^{1/2}) = a^{(1-p')/2} \left[A_\rho I_n (12 a^2 \phi) + B_\rho K_n (12 a^2 \phi) \right], \quad (3.41)$$

$$n = \frac{1}{4} \sqrt{\{p' - 1\}^2 - 48 K_2},$$

$$\beta(\phi) = \phi^{(1-q')/2} \left[A_\beta I_m \left(2\sqrt{(3+2\omega) K_1} \phi \right) + B_\beta K_m \left(2\sqrt{(3+2\omega) K_1} \phi \right) \right], \quad (3.42)$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{(q' - 1)^2 - 4(3+2\omega) K_2},$$

$$\gamma(\chi) = A_\gamma \exp \left(i\sqrt{8 K_1} \chi \right) + B_\gamma \exp \left(-i\sqrt{8 K_1} \chi \right). \quad (3.43)$$

Nestas expressões, K_1 e K_2 são duas constantes de separação e os coeficientes A 's e B 's são constantes. A solução geral pode ser escrita como (equação (2.39))

$$\Psi = \int A(K_1, K_2) \rho_{K_1}(a, \phi) \beta_{K_1, K_2}(\phi) \gamma_{K_1}(\chi) dK_1 dK_2. \quad (3.44)$$

Neste ponto pode-se discutir o limite semi-clássico usando a aproximação WKB. A fase da função de onda WKB é a solução da equação de Hamilton-Jacobi clássica no referencial de Jordan, que pode ser obtida fazendo-se um mapeamento conforme da solução da equação de Hamilton-Jacobi no referencial de Einstein (equações (2.45)-(2.49)), produzindo

$$S_0(a, \phi, \zeta) = S_0(a, \phi) + S_0(\phi) + S_0(\zeta),$$

dada por (2.50)-(2.52)

$$S_0(a, \phi) = \pm \left[\sqrt{3(\mathcal{K}_0 - 48\phi^2 a^4)} - \sqrt{3\mathcal{K}_0} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{K}_0 - 48\phi^2 a^4}{\mathcal{K}_0}} \right) \right] + A_0, \quad (3.45)$$

$$S_0(\phi) = \pm \left[\sqrt{(3+2\omega)(\mathcal{K}_0 - K_0\phi^2)} - \sqrt{(3+2\omega)\mathcal{K}_0} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{K}_0 - K_0\phi^2}{\mathcal{K}_0}} \right) \right] + B_0, \quad (3.46)$$

$$S_0(\zeta) = \pm\sqrt{2K_0}\zeta + C_0, \quad (3.47)$$

onde A_0 , B_0 e C_0 são constantes de integração, e \mathcal{K}_0 e K_0 são constantes de separação. Considera-se a superposição WKB dada por

$$\Psi(a, \phi, \zeta) = \int \int A(K_0, \mathcal{K}_0) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_0(a, \phi, \zeta, K_0, \mathcal{K}_0) \right] dK_0 d\mathcal{K}_0. \quad (3.48)$$

Pode-se ver que, se $\mathcal{K}_0 > 0$, a função de onda oscilará muito rapidamente para ϕ próximo a zero. Neste caso, a interferência construtiva é garantida pela condição (2.54)

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial K_0}(a, \phi, \zeta) \Big|_{\mathcal{K}_0=\bar{\mathcal{K}}_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial \mathcal{K}_0}(a, \phi, \zeta) \Big|_{\mathcal{K}_0=\bar{\mathcal{K}}_0} \right)^2 = 0. \quad (3.49)$$

As relações implícitas vindas de (3.49) são as mesmas que as equações clássicas (3.18) - (3.20) escritas numa forma implícita. Por isso, o limite clássico é obtido para ϕ próximo a zero, não importando o valor de a .

3.3 As Trajetórias Bohmianas Quânticas

Nesta seção serão aplicadas as regras da interpretação causal para as funções de onda obtidas na seção anterior. Conforme visto no capítulo 4, estas regras — aplicadas a este caso de um modelo de mini-superespaço homogêneo (e escolhendo o *gauge* $N = 1$) — determinam que as trajetórias Bohmianas possam ser obtidas por integração das relações

$$\pi_a = \partial_a S, \quad (3.50)$$

$$\pi_\phi = \partial_\phi S, \quad (3.51)$$

$$\pi_\chi = \partial_\chi S, \quad (3.52)$$

que são as seguintes equações diferenciais:

$$24 a \dot{a} \phi + 12 a^2 \dot{\phi} = \partial_a S, \quad (3.53)$$

$$12 a^2 \dot{a} - 4\omega \frac{\dot{\phi}}{\phi} a^3 = \partial_\phi S, \quad (3.54)$$

$$-4 \frac{a^3}{\phi} \dot{\chi} = \partial_\chi S. \quad (3.55)$$

Empregando as transformações conformes (3.38) e lembrando que $dt = \phi^{-1/2} d\tau$, onde τ é o tempo próprio no referencial de Einstein, obtêm-se as equações diferenciais

$$24 b b' = \partial_b S, \quad (3.56)$$

$$-2 (3 + 2\omega) b^3 \frac{\phi'}{\phi^2} = \partial_\phi S, \quad (3.57)$$

$$-4 \frac{b^3}{\phi^2} \chi' = \partial_\chi S, \quad (3.58)$$

As linhas aqui denotam derivada com respeito ao tempo próprio no referencial de Einstein. As relações (3.56), (3.57) e (3.58) são as mesmas que foram obtidas no capítulo 2 para o caso de um acoplamento mínimo entre a gravidade e o campo escalar (equações (2.57)-(2.59)).

Inserindo na equação de Wheeler-DeWitt a expressão $\Psi = R \exp(i S/\hbar)$, encontra-se a correspondente equação de Hamilton-Jacobi que, para o caso de acoplamento não mínimo, se escreve

$$\begin{aligned} & - \frac{\omega a^2}{6 (2\omega + 3)} (\partial_a S)^2 - \frac{a \phi}{2\omega + 3} (\partial_a S) (\partial_\phi S) + \\ & + \frac{\phi^2}{2\omega + 3} (\partial_\phi S)^2 + \frac{\phi^2}{2} (\partial_\zeta S)^2 + Q + V_{cl} = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde

$$V_{cl} = -48 K a^4 \phi^2, \quad (3.60)$$

$$Q = \frac{1}{R} \left[\frac{\omega a^2}{6(2\omega + 3)} \left(\partial_a^2 R + \frac{p}{a} \partial_a R \right) + \frac{a\phi}{2\omega + 3} \partial_{\phi a}^2 R - \frac{\phi^2}{2\omega + 3} \left(\partial_\phi^2 R + \frac{q}{\phi} \partial_\phi R \right) - \frac{\phi^2}{2} \partial_\zeta^2 R \right], \quad (3.61)$$

que são os potenciais clássico e quântico.

As transformações (3.38) mapeiam as equações (3.59) e os potenciais (3.60) e (3.61) nos correspondentes equação de Hamilton-Jacobi, potencial clássico e potencial quântico do caso de acoplamento mínimo [5]. Isto completa a equivalência conforme (do ponto de vista matemático) entre acoplamento mínimo e não mínimo a nível quântico na interpretação causal.

No capítulo 2 foram obtidas as trajetórias Bohmianas pela integração das equações (3.56) - (3.58) para algumas soluções exatas da equação de Wheeler-DeWitt e foi visto que o limite clássico é reobtido quando o fator de escala é pequeno. Com estes resultados pode-se obter as trajetórias de Bohm usando as transformações conformes (3.38) e investigando a presença de singularidades e o limite clássico destas soluções no caso de acoplamento não mínimo. Primeiramente deve-se lembrar das expressões conectando o fator de escala e o tempo próprio nos casos de acoplamentos mínimo e não mínimo: $a = b\phi^{-1/2}$ e $t = \int \phi^{-1/2} d\tau$. O limite clássico no caso de acoplamento mínimo é

$$b \approx \tau^{1/3}, \quad \phi \approx \tau^{2/3\alpha}, \quad \chi = \text{constante}. \quad (3.62)$$

Usando a transformação conforme, obtém-se o limite clássico para o acoplamento não mínimo:

$$a \propto t^{(\alpha-1)/(3\alpha-1)}, \quad \phi \propto t^{2/(3\alpha-1)}, \quad \chi = \text{constante}, \quad (3.63)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2}{3}\omega},$$

que foi obtido diretamente das soluções clássicas no referencial de Jordan e mostrado na equação (3.21). No referencial de Einstein, o comportamento qualitativo do fator de escala é o mesmo, não importando o valor de ω , enquanto que no referencial de Jordan seu comportamento depende crucialmente do valor de ω , conforme foi visto na seção 3.1. Para analisar todas estas possibilidades no nível quântico, serão estudados 4 exemplos. As soluções obtidas nos casos I - III foram extraídas de [26]. Todas as quatro soluções satisfazem as condições de Hawking-Page [32], ou seja, de serem regulares quando o fator de escala se aproxima de zero e de decair exponencialmente quando o fator de escala se torna grande. A questão sobre a normalizabilidade depende da definição de produto interno que seja adotada, que é uma questão aberta em cosmologia quântica [33]. Se for tomado o produto interno de [29] (o qual não é análogo à mecânica quântica convencional porque ele envolve uma integração sobre uma variável que desempenha o papel do tempo no mini-superespaço), então estas funções de onda são normalizáveis somente através da restrição de ϕ e χ serem positivos (exceto para o caso III abaixo). No caso I abaixo, a restrição de ϕ positivo pode ser relaxada no referencial de Einstein. Note que, dentro da interpretação probabilística condicional, não há nenhuma necessidade de se ter uma função de onda normalizável. O mesmo é verdade na interpretação causal, onde se pode extrair informação da função de onda usando as relações guia (1.24). Para mais detalhes nesse assunto ver [21].

Caso I: $\omega = \frac{9}{2}$ ($\omega > 0$), que produz $\alpha = 2$. Escolhe-se

$$A(K_1, K_2) = \frac{3}{2} \delta \left(K_1 - \frac{1}{48} \exp \left(\frac{i}{3} \pi \right) \right) \sinh(\pi \nu),$$

com $\nu \equiv \sqrt{3K_2}$, $A_\rho = A_\beta = B_\gamma = 0$, e $p' = q' = 1$ na equação (3.44).

(a) Caso de acoplamento mínimo: Neste caso a função de onda, equação (3.44), assume a forma

$$\Psi = \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{\phi}{\sqrt{y}} \exp\left(-y - \frac{\phi^2}{16y} - \frac{\chi}{2\sqrt{6}}\right) \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\phi^2}{16y} + \frac{\chi}{2\sqrt{2}}\right)\right), \quad (3.64)$$

onde $y \equiv 12b^2$.

A fase da função de onda é

$$S = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\phi^2}{192b^2} + \frac{\chi}{2\sqrt{2}}\right), \quad (3.65)$$

e, portanto, as equações (3.56) - (3.58) para este caso tornam-se

$$24bb' = \frac{\sqrt{3}}{96\hbar} \frac{\phi^2}{b^3}, \quad (3.66)$$

$$-24 \frac{b^3 \phi'}{\phi^2} = -\frac{\sqrt{3}}{96\hbar} \frac{\phi}{b^2}, \quad (3.67)$$

$$-4 \frac{b^3}{\phi^2} \chi' = \frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}. \quad (3.68)$$

Obtêm-se então as seguintes expressões para as trajetórias Bohmianas:

$$b \propto \tau^{1/3} \quad \text{ou} \quad y \propto \tau^{2/3}, \quad (3.69)$$

$$\phi \propto \tau^{1/3}, \quad (3.70)$$

$$\chi \propto \tau^{2/3} + \chi_0. \quad (3.71)$$

Elas coincidem com as trajetórias clássicas para τ , b e ϕ sendo muito pequenos (ver equação (3.62)), mas são diferentes quando estas condições não são satisfeitas (ver equações (3.18) - (3.20)).

O módulo da função de onda é

$$R = \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{\phi}{b} \exp\left(-12b^2 - \frac{1}{192} \frac{\phi^2}{b^2} - \frac{\chi}{2\sqrt{6}}\right). \quad (3.72)$$

Esta expressão de R é usada para calcular o potencial quântico (1.23), cuja expressão neste caso é dada por

$$\begin{aligned}
 Q = & \frac{1}{R} \left[\frac{b^2}{12} \left(\partial_b^2 R + \frac{p'}{b} \partial_b R \right) - \right. \\
 & - \frac{\phi^2}{(2\omega + 3)} \left(\partial_\phi^2 R + \frac{q'}{\phi} \partial_\phi R \right) - \\
 & \left. - \frac{\phi^2}{2} \partial_\chi^2 R \right], \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

onde os fatores de ordenamento usados são $p' = q' = 1$. A expressão final do potencial quântico é

$$Q = \frac{1}{3} y^2 - \frac{1}{16} \phi^2. \tag{3.74}$$

enquanto que o potencial clássico é

$$V_{cl} = -48 b^4 = -\frac{1}{3} y^2. \tag{3.75}$$

Os termos cinéticos são:

$$K_b = -\frac{b^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right)^2 \propto \frac{\phi^4}{y^2}, \tag{3.76}$$

$$K_\phi = \frac{\phi^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \propto \frac{\phi^4}{y^2}, \tag{3.77}$$

$$K_\chi = \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 \propto \phi^2. \tag{3.78}$$

Pode ser visto das expressões anteriores que, para valores pequenos de τ , os termos cinéticos K_b e K_ϕ dominam enquanto que, para valores grandes de τ , os potenciais quântico e clássico (Q e V_{cl}) dominam ($Q/V_{cl} \approx 1$). Em outras palavras, os efeitos

quânticos são desprezíveis para valores pequenos de b e ϕ , mas tornam-se importantes no caso contrário.

(b) Caso de Acoplamento Não Mínimo: Para se obter a função de onda deste caso, deve-se simplesmente fazer a substituição $b = a \phi^{1/2}$, produzindo

$$\Psi = \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \sqrt{\frac{\phi}{x}} \exp\left(-x\phi - \frac{\phi}{16x} - \frac{\chi}{2\sqrt{6}}\right) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\phi}{16x} + \frac{\chi}{2\sqrt{2}}\right)\right], \quad (3.79)$$

onde $x = 12a^2$. A fase da função de onda é

$$S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\phi}{192a^2} + \frac{\chi}{2\sqrt{2}}. \quad (3.80)$$

As trajetórias Bohmianas podem ser calculadas resolvendo-se diretamente as equações (3.53) - (3.55) que, neste caso, tornam-se

$$24a\dot{a}\phi + 12a^2\dot{\phi} = \frac{\sqrt{3}}{96} \frac{\phi}{a^3}, \quad (3.81)$$

$$12a^2\dot{a} - 18\frac{\dot{\phi}}{\phi}a^3 = -\frac{\sqrt{3}}{192a^2}, \quad (3.82)$$

$$-4\frac{a^3}{\phi}\dot{\phi} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (3.83)$$

ou fazendo o mapeamento conforme $x = y/\phi$, $\phi = \phi$, $\chi = \chi$ nas soluções do caso de acoplamento mínimo. Obtêm-se as seguintes expressões para as trajetórias Bohmianas:

$$a \propto t^{1/5} \quad \text{ou} \quad x \propto t^{2/5}, \quad (3.84)$$

$$\phi \propto t^{2/5}, \quad (3.85)$$

$$\chi \propto t^{4/5} + \chi_0. \quad (3.86)$$

Elas coincidem com as trajetórias clássicas para t , a , ϕ muito pequenos (ver equação (3.63)), mas elas são diferentes quando estas condições não são satisfeitas.

O módulo da função de onda é

$$R = \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{\sqrt{\phi}}{a} \exp\left(-12 a^2 \phi - \frac{1}{192} \frac{\phi}{a^2} - \frac{\chi}{2\sqrt{6}}\right). \quad (3.87)$$

Esta expressão de R é usada para calcular o potencial quântico (3.61) cuja expressão, neste caso, é dada por

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{R} \left[\frac{\omega a^2}{6(2\omega + 3)} \left(\partial_a^2 R + \frac{1}{a} \partial_a R \right) + \right. \\ & + \frac{a\phi}{(2\omega + 3)} \partial_{\phi a}^2 R - \frac{\phi^2}{(2\omega + 3)} \left(\partial_\phi^2 R + \frac{1}{\phi} \partial_\phi R \right) - \\ & \left. - \frac{\phi^2}{2} \partial_x^2 R \right], \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde os fatores de ordenamento usados foram $p = q = 1$. A expressão final do potencial quântico é

$$Q = \frac{1}{3} x^2 \phi^2 - \frac{1}{16} \phi^2, \quad (3.89)$$

enquanto que o potencial clássico é

$$V_{cl} = -\frac{1}{3} x^2 \phi^2. \quad (3.90)$$

Os termos cinéticos são:

$$K_a = -\frac{a^2}{16} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 \propto \frac{\phi^2}{x^2}, \quad (3.91)$$

$$K_\phi = \frac{\phi^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \propto \frac{\phi^2}{x^2}, \quad (3.92)$$

$$K_{a\phi} = -\frac{a\phi^2}{12} \frac{\partial S}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial \phi} \propto \frac{\phi^2}{x^2}, \quad (3.93)$$

$$K_\chi = \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 \propto \phi^2. \quad (3.94)$$

Pode ser visto das expressões anteriores que, para valores pequenos de t , os termos cinéticos K_a , K_ϕ e $K_{a\phi}$ dominam, enquanto que, para valores grandes de t , os potenciais quântico e clássico (Q e V_d) dominam ($Q/V_d \approx 1$). Em outras palavras, os efeitos quânticos são desprezíveis para valores pequenos de a e ϕ , mas tornam-se importantes no caso contrário.

Caso II: $\omega = 0$, que resulta em $\alpha = 1$.

Embora neste caso não haja nenhuma dinâmica para ϕ , a solução particular que será tomada tem propriedades interessantes que serão vistas. Será escolhido

$$A(K_1, K_2) = \frac{3}{2} \delta \left(K_1 + \frac{1}{12} \right) \text{tg}(\pi \nu),$$

com $\nu \equiv \sqrt{3K_2}$, $A_\rho = A_\beta = 0$, $A_\gamma = B_\gamma = 1$ e $p' = q' = 1$ na equação (3.44).

(a) O Caso de Acoplamento Mínimo: Neste caso, a função de onda (equação (3.44)) assume a forma

$$\Psi = \frac{1}{2} \pi \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) \sqrt{\frac{y\phi}{y^2 + \phi^2}} e^{-y} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - \phi - \text{arctg} \left(\frac{\phi}{y} \right) \right) \right]. \quad (3.95)$$

Este é exatamente o mesmo caso particular apresentado no capítulo 2. As equações (3.56)-(3.58) para este caso são dadas pelas equações (2.57)-(2.59). Obtêm-se então as seguintes expressões para as trajetórias Bohmianas (equações (2.61)-(2.63):

$$b = \frac{1}{\sqrt{12}} \left[\ln \left(\frac{C}{\sqrt{1+4\eta^2}} \right) \right]^{1/2}, \quad (3.96)$$

$$\phi = -\frac{1}{2\eta} \ln \left(\frac{C}{\sqrt{1+4\eta^2}} \right) = -6 \frac{b^2}{\eta}, \quad (3.97)$$

$$\chi = \text{constante}, \quad (3.98)$$

onde $\eta = \int d\tau/b$ é o tempo conforme e C é uma constante de integração. Para pequenos valores de b , quando então η se aproxima de $\pm(\sqrt{C^2 - 1}/2)$, estas funções tendem a (equações (2.64)-(2.66))

$$b(\tau) \propto \tau^{1/3}, \quad (3.99)$$

$$\phi(\tau) \propto \tau^{2/3} \propto b^2, \quad (3.100)$$

$$\chi = \text{constante}, \quad (3.101)$$

que é exatamente o comportamento clássico para $\omega = 0$. Quando b não é pequeno, as trajetórias não são clássicas. Isto pode ser explicado pelo comportamento do potencial quântico, que é dado pela equação (2.70)

$$Q = \frac{1}{3} \frac{(y^4 - 2\phi^2 y - \phi^4)}{y^2 + \phi^2}. \quad (3.102)$$

O potencial clássico é o mesmo do caso anterior (equação (3.75)) e os termos cinéticos são dados pelas equações (2.71)-(2.72)

$$K_b = -\frac{b^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right)^2 = -\frac{1}{3} \frac{144b^4 \phi^2}{(144b^4 + \phi^2)} = -\frac{1}{3} \frac{y^2 \phi^2}{(y^2 + \phi^2)^2}, \quad (3.103)$$

$$K_\phi = \frac{\phi^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = \frac{1}{3} \phi^2 \frac{(144b^4 + \phi^2 + 12b^2)^2}{(144b^4 + \phi^2)^2} = \frac{\phi^2}{3} \frac{(y^2 + \phi^2 + y)^2}{(y^2 + \phi^2)^2}, \quad (3.104)$$

$$K_\chi = \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 = 0. \quad (3.105)$$

Quando b é pequeno, $\phi \propto b^2$, tal como y . Portanto, neste caso, os termos cinéticos dominam. Por outro lado, quando $\eta \rightarrow 0$, b tende ao seu valor máximo ($b \rightarrow b_{max}$), e ϕ cresce indefinidamente ($\phi \rightarrow \infty$). Neste outro caso, o potencial quântico diverge

$$Q \propto \phi^2, \quad (3.106)$$

enquanto que o potencial clássico e os termos cinéticos se comportam como

$$K_b \propto \frac{1}{\phi^2}, \quad (3.107)$$

$$K_\phi \propto \phi^2, \quad (3.108)$$

$$V_{cl} \propto b^4, \quad (3.109)$$

e então agora é o potencial quântico, junto com K_ϕ , que domina.

(b) O Caso do Acoplamento Não-Mínimo: Uma transformação conforme na solução (3.95) produz

$$\Psi = \frac{1}{2} \pi \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} e^{-x\phi} \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} - \phi - \arctg \left(\frac{1}{x} \right) \right) \right]. \quad (3.110)$$

A fase dessa função de onda é

$$S = \left(\frac{\pi}{4} - \phi - \arctg \left(\frac{1}{12a^2} \right) \right), \quad (3.111)$$

e, portanto, as equações (3.53) - (3.55) para este caso tornam-se

$$24 a \dot{a} \phi + 12 a^2 \dot{\phi} = 24 \frac{a}{144 a^4 + 1}, \quad (3.112)$$

$$12 a^2 \dot{a} - 4 \omega \frac{\dot{\phi}}{\phi} a^3 = -1, \quad (3.113)$$

$$-4 \frac{a^3 \dot{\chi}}{\phi} = 0. \quad (3.114)$$

As trajetórias Bohmianas podem ser calculadas resolvendo diretamente estas equações ou fazendo o mapeamento conforme $x = y/\phi$, $\phi = \phi$, $\chi = \chi$ nas soluções do caso de acoplamento mínimo, obtendo-se as seguintes expressões para elas:

$$a = \left(-\frac{t}{4}\right)^{1/3}, \quad (3.115)$$

$$\phi = -\frac{1}{3(-2t)^{2/3}} \ln \left(\frac{C}{\sqrt{1+9(-2t)^{4/3}}} \right), \quad (3.116)$$

$$\chi = \text{constante}. \quad (3.117)$$

Elas têm uma singularidade inicial e são completamente diferentes das trajetórias clássicas que — neste caso — são oscilatórias e sem singularidades. A peculiaridade desta solução é que ela é um exemplo de que efeitos quânticos podem criar uma singularidade onde não havia nenhuma. Inserindo-se o módulo da função de onda

$$R = \frac{1}{2} \pi \cosh \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} e^{-x\phi} \quad (3.118)$$

na equação (3.88), encontra-se a expressão final do potencial quântico

$$Q = \frac{1}{3} \frac{(\phi^2 x^4 - 2\phi^2 x - \phi^2)}{x^2 + 1}. \quad (3.119)$$

Este, quando comparado com o potencial clássico e os termos cinéticos

$$V_{cl} = -\frac{1}{3} x^2 \phi^2, \quad (3.120)$$

$$K_a = 0, \quad (3.121)$$

$$K_\phi = \frac{1}{3} \phi^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \propto \phi^2, \quad (3.122)$$

$$K_{a\phi} = -\frac{1}{3} a \phi^2 \frac{\partial S}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial \phi} \propto \frac{x \phi}{1+x^2}, \quad (3.123)$$

$$K_\chi = \frac{1}{2} \phi^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 = 0, \quad (3.124)$$

leva à constatação de que, neste exemplo, não há nenhum limite clássico pois quando t é pequeno Q e K_ϕ dominam, enquanto que para t grande Q e V_{cl} dominam¹.

Caso III: $\omega = -\frac{9}{8}$ ($-\frac{4}{3} < \omega < 0$), que resulta em $\alpha = 1/2$. Será escolhido

$$A(K_1, K_2) = \frac{3}{2} \delta \left(K_1 - \frac{1}{3} \exp \left(\frac{i}{3} \pi \right) \right) \text{sen} \left(\frac{1}{2} \pi \nu \right),$$

com $\nu \equiv \sqrt{3 K_2}$, $A_\rho = A_\beta = B_\gamma = 0$, e $p' = q' = 1$ na equação (3.44).

(a) O Caso de Acoplamento Mínimo: Neste caso, a função de onda assume a forma

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{y}{\sqrt{\phi}} \exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\phi + \frac{y^2}{8\phi} \right) - \frac{2\chi}{\sqrt{6}} \right] \\ &\cdot \exp \left[i \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\phi}{2} + \frac{y^2}{16\phi} + 2\chi \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

A fase da função de onda é

$$S = \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\phi}{2} + \frac{9b^4}{\phi} + 2\chi \right), \quad (3.126)$$

e, portanto, as equações (3.56) - (3.58), para este caso, tornam-se

¹Nota-se que, na verdade, Q e K_ϕ se cancelam quando t é pequeno, tornando o termo cinético $K_{a\phi}$ o mais importante. Isto não significa um limite clássico, pois houve a importante participação do potencial quântico Q no cancelamento do termo cinético K_ϕ , que classicamente deveria ser o dominante neste limite para t .

$$24 b b' = 36 \frac{b^3}{\phi}, \quad (3.127)$$

$$\frac{3}{2} \frac{b^3 \phi'}{\phi^2} = \frac{1}{2} + \frac{9 b^4}{\phi^2}, \quad (3.128)$$

$$-4 \frac{b^3}{\phi^2} \chi' = 2, \quad (3.129)$$

ou ainda, considerando-se $d\tau = b^3 d\epsilon$, as equações podem ser reescritas como

$$\frac{\partial b}{\partial \epsilon} = \frac{3}{2} \frac{b^5}{\phi}, \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = \frac{1}{3} \phi^2 + 6 b^4, \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{2} \phi^2. \quad (3.132)$$

Obtêm-se, então, as seguintes expressões para as trajetórias Bohmianas:

$$b = \lambda_1 \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda_1^2 \epsilon)}, \quad (3.133)$$

$$\phi = -6 \lambda_1^2 \operatorname{cosech}(2 \lambda_1^2 \epsilon), \quad (3.134)$$

$$\chi = 9 \lambda_1^2 \operatorname{cotgh}(2 \lambda_1^2 \epsilon) + \chi_0, \quad (3.135)$$

onde λ_1 e χ_0 são constantes de integração. Elas coincidem com as trajetórias clássicas para ϵ muito grande e b , ϕ muito pequenos, apresentando o mesmo comportamento das equações (3.62), mas elas diferem destas quando essas condições não são satisfeitas.

O módulo da função de onda é

$$R = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \left(12 \frac{b^2}{\sqrt{\phi}} \right) \exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\phi + 18 b^4 \right) - \frac{2\chi}{\sqrt{6}} \right], \quad (3.136)$$

que, inserida na expressão (3.73) do potencial quântico, dá como resultado final

$$Q = \frac{1}{4} y^2 - \frac{4}{3} \phi^2. \quad (3.137)$$

O potencial clássico é o mesmo dos casos anteriores (equação (3.75)) e os termos cinéticos são:

$$K_b = -\frac{b^2}{12} \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right)^2 \propto -\frac{b^8}{\phi^2}, \quad (3.138)$$

$$K_\phi = \frac{4\phi^2}{3} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\phi^2 + 36 b^4 + 328 \frac{b^2}{\phi^2} \right), \quad (3.139)$$

$$K_\chi = \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 \propto \phi^2. \quad (3.140)$$

Pode ser visto destas equações que, para valores de ϵ grandes, K_b e K_ϕ dominam, enquanto que, para $\epsilon \ll 1$, Q , K_ϕ e K_χ dominam. Efeitos quânticos são desprezíveis para valores pequenos de b e ϕ mas, do contrário, eles tornam-se importantes.

(b) O Caso de Acoplamento Não-Mínimo: Para se obter a função de onda deste caso, deve-se simplesmente fazer a substituição $b = a \phi^{1/2}$, produzindo

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} x \sqrt{\phi} \exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\phi + \frac{x^2 \phi}{8} \right) - \frac{2\chi}{\sqrt{6}} \right] \\ &\cdot \exp \left[i \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\phi}{2} + \frac{x^2 \phi}{16} + 2\chi \right) \right], \end{aligned} \quad (3.141)$$

onde $x = 12 a^2$. A fase da função de onda é

$$S = -\frac{\pi}{12} - \frac{\phi}{2} + \frac{x^2 \phi}{16} + 2\chi. \quad (3.142)$$

As trajetórias Bohmianas podem ser calculadas resolvendo-se diretamente as equações (3.53) - (3.55) que, neste caso, tornam-se

$$24 a \dot{a} \phi + 12 a^2 \dot{\phi} = 36 a^3 \phi, \quad (3.143)$$

$$12 a^2 \dot{a} - \frac{9}{2} \frac{\dot{\phi}}{\phi} a^3 = -\frac{1}{2} + 9 a^4, \quad (3.144)$$

$$-\frac{4 a^3 \dot{\chi}}{\phi} = 2, \quad (3.145)$$

que podem, considerando-se $d\tau = b^3 d\epsilon$, ser reescritas como

$$\frac{\partial a}{\partial \epsilon} = -\frac{3}{2} a^5 \phi - \frac{1}{6} a \phi, \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = 6 a^4 \phi^2 + \frac{1}{3} \phi^2, \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{2} \phi^2. \quad (3.148)$$

Obtêm-se, então, as seguintes expressões para as trajetórias Bohmianas:

$$a = \sqrt{\frac{1}{3} \sinh(\lambda_1^2 \epsilon)}, \quad (3.149)$$

$$\phi = -6 \lambda_1^2 \operatorname{cosech}(2 \lambda_1^2 \epsilon), \quad (3.150)$$

$$\chi = 9 \lambda_1^2 \operatorname{cotgh}(2 \lambda_1^2 \epsilon) + \chi_0. \quad (3.151)$$

Elas coincidem com as trajetórias clássicas para ϵ e a muito grandes e ϕ muito pequeno.

Definindo $t_\infty \equiv t (\epsilon = \infty)$, seus comportamentos no limite $t \rightarrow t_\infty$ são

$$a \propto (t_\infty - t)^{-1} \quad \text{ou} \quad x \propto (t_\infty - t)^{-2}, \quad (3.152)$$

$$\phi \propto (t_\infty - t)^4, \quad (3.153)$$

$$\chi \propto \chi_0, \quad (3.154)$$

que coincidem com as equações (3.63) para $\alpha = 1/2$. Entretanto elas diferem das equações (3.63) quando estas condições não são satisfeitas. De fato, quando ϵ e t são muito pequenos, elas são

$$a \propto t^{1/3} \quad \text{ou} \quad x \propto t^{2/3}, \quad (3.155)$$

$$\phi \propto t^{-2/3}, \quad (3.156)$$

$$\chi \propto t^{-2/3}, \quad (3.157)$$

que não é o comportamento clássico. Note que uma das singularidades da solução clássica é mudada para um *big bang* ou um *big crunch*.

O módulo da função de onda é

$$R = \frac{12}{\sqrt{2}} \pi^{3/2} a^2 \sqrt{\phi} \exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} (\phi + 18 a^4 \phi) - \frac{2\chi}{\sqrt{6}} \right] \quad (3.158)$$

que, inserido na expressão (3.88) do potencial quântico, dá como resultado

$$Q = \frac{1}{4} x^2 \phi^2 - \frac{4}{3} \phi^2, \quad (3.159)$$

enquanto que o potencial clássico é

$$V_{cl} = -\frac{1}{3} x^2 \phi^2. \quad (3.160)$$

Os termos cinéticos são

$$K_a = -\frac{a^2}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 \propto -\phi^2 x^4, \quad (3.161)$$

$$K_\phi = \frac{4}{3} \phi^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 = \frac{\phi^2}{3} \left(1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 \right), \quad (3.162)$$

$$K_{a\phi} = -\frac{4}{3} a \phi \frac{\partial S}{\partial a} \frac{\partial S}{\partial \phi} \propto \frac{\phi^2 x^2}{6} \left(1 - \frac{1}{8} x^2 \right), \quad (3.163)$$

$$K_\chi = \frac{\phi^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 \propto \phi^2. \quad (3.164)$$

Pode ser visto das expressões acima que, para $t \rightarrow t_\infty$, K_a , K_ϕ e $K_{a\phi}$ são dominantes, enquanto que, para t pequeno, Q , K_ϕ e K_χ dominam. Os efeitos quânticos são desprezíveis para a grande e ϕ pequeno, caso contrário eles se tornam importantes.

Caso IV: $-\frac{3}{2} < \omega \leq -\frac{4}{3}$, que produz $\alpha \leq \frac{1}{3}$. Neste caso, não se tomam superposições, mas as próprias funções de onda (3.41) - (3.43). Serão escolhidos $B_\rho = B_\beta = B_\gamma = 0$ e $p' = q' = 1$, produzindo

$$\Psi = I_n(x\phi) I_m \left(2 \sqrt{(3+2\omega) K_1 \phi} \right) \exp \left(i \sqrt{8 K_1 \chi} \right), \quad (3.165)$$

com $n = i\nu$ e $m = i \sqrt{(3+2\omega) K_2}$. Para valores pequenos de ϕ , pode-se aproximar as funções de Bessel para

$$\Psi = C_0 \exp \left[i \left(\nu \ln(x\phi) + \mu \ln \left(2 \sqrt{(3+2\omega) K_1 \phi} \right) + \sqrt{8 K_1 \chi} \right) \right]. \quad (3.166)$$

Como C_0 é uma constante, o potencial quântico é nulo e as trajetórias Bohmianas são as clássicas neste limite. Pode-se verificar isto inserindo a fase das funções de onda acima nas equações (3.53) - (3.55), obtendo-se

$$a \propto t^{(\alpha+1)/(3\alpha-1)}, \quad \phi \propto t^{2/(3\alpha-1)}, \quad (3.167)$$

com $\alpha = \sqrt{1 + \frac{2}{3}\omega}$ como antes. Note que, mesmo nos casos onde a torna-se grande, o produto $x\phi \propto t^{2\alpha/(3\alpha-1)}$ é sempre pequeno, justificando essa aproximação. Pode-se ver que o limite clássico acontece para pequenos ϕ , mas ele pode acontecer também para a grande.

Conclui-se portanto que, para as soluções quânticas estudadas neste trabalho, as trajetórias Bohmianas no referencial de Jordan mostram o mesmo comportamento que as soluções clássicas sempre que o campo escalar acoplado não-minimamente à gravidade é pequeno (com a exceção do caso muito particular $\omega = 0$), o que coincide com valores pequenos do fator de escala a quando $\omega > 0$, e valores grandes de a quando $-\frac{3}{2} < \omega < 0$. Os efeitos quânticos surgem nas condições exatamente opostas a essas: quando o campo escalar não é pequeno, o que significa, para valores grandes de a quando $\omega > 0$, e para valores pequenos de a quando $-\frac{3}{2} < \omega < 0$. Por isso, em contraste com o caso de acoplamento mínimo, as trajetórias Bohmianas podem coincidir com as soluções clássicas para valores grandes de a . Há ainda o caso muito particular de $\omega = 0$, onde a solução clássica no sistema de Jordan é não singular e periódica e que, num exemplo estudado, a correspondente trajetória Bohmiana sempre tem comportamento quântico, mesmo quando o campo escalar se torna pequeno. O mais interessante é que essa solução quântica apresenta uma singularidade inicial, mostrando que, dependendo do estado quântico do sistema, os efeitos quânticos, ao invés de evitar, podem criar singularidades onde classicamente não havia nenhuma.

Chapter 4

Isotropização Quântica do Universo

No capítulo anterior foi apresentado um trabalho onde a interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica aplicada a um modelo de mini-superespaço permitiu abordar a questão da singularidade ou da eternidade do universo. Neste trabalho [34], agora, ela será utilizada para abordar uma segunda questão; do porque do universo ser marcadamente homogêneo e isotrópico, com desvios muito pequenos de seu estado altamente simétrico. O objetivo é investigar se efeitos quânticos podem isotropizar um modelo cosmológico anisotrópico, produzindo um mecanismo alternativo para a isotropização do universo. A estratégia é pegar modelos anisotrópicos clássicos que nunca isotropizem¹, quantizá-los e examinar se efeitos quânticos podem ao menos criar fases isotrópicas. Como será visto aqui, os efeitos quânticos podem não somente criar fases isotrópicas, como também podem isotropizar os modelos para sempre, para uma vasta variedade de estados quânticos. Outros autores também estudaram este problema, principalmente tomando modelos Bianchi IX, adotando outras interpretações da cosmologia quântica, e eles chegaram a resultados similares [14]- [18].

Os modelos matemáticos que serão tomados aqui são modelos Bianchi-I com e sem matéria. Para o caso sem matéria, um dos graus de liberdade anisotrópico é suprimido,

¹Existem casos de modelos clássicos anisotrópicos que isotropizam [35]e [36].

terminando por ficar com um modelo de mini-superespaço bidimensional. As soluções clássicas desse caso são todas singulares e sempre anisotrópicas, com a trivial exceção do espaço-tempo chato. Na quantização desse sistema conclui-se que as soluções da equação de Wheeler-DeWitt podem ser escritas em termos de superposições de soluções de ondas planas. Tomando-se superposições Gaussianas, mostra-se que há trajetórias Bohmianas representando universos que se expandem de uma singularidade inicial e outras representando universos não-singulares com raio mínimo, ambos com fases isotrópicas durante o curso de suas evoluções. Há também soluções Bohmianas periódicas não-singulares com fases isotrópicas periódicas e soluções com raio mínimo não-singulares que nunca isotropizam. Para o caso com matéria, toma-se um campo escalar acoplado minimamente com constante de acoplamento arbitrária ω . O mini-superespaço é quadridimensional. As soluções clássicas são mais uma vez singulares e, uma vez que comecem anisotrópicas, elas continuam anisotrópicas para sempre. Na quantização do sistema, chega-se a uma equação de Wheeler-DeWitt que corresponde a uma equação de Klein-Gordon sem massa em quatro dimensões. É mostrado aqui que há uma quantidade de soluções de onda esférica cujas trajetórias Bohmianas representam universos em expansão que se isotropizam permanentemente depois de algum período, muitas das quais são também não-singulares. Superposições Gaussianas também apresentam esta característica.

Este capítulo é organizado da seguinte maneira: na primeira seção são apresentados os modelos de mini-superespaço que serão investigados e suas soluções clássicas. Na segunda seção, quantizam-se estes modelos para dois casos diferentes, dividindo a seção em parte A e parte B. Na parte A é considerado o caso do modelo vazio, enquanto que na parte B é considerado o caso do modelo com campo escalar. Nas duas partes são obtidas as suas correspondentes equações de Wheeler-DeWitt e soluções quânticas gerais. Nelas também são apresentados os resultados referentes à isotropização quântica dessas soluções através da investigação das trajetórias Bohmianas que se obtêm delas.

4.1 O Modelo de Mini-Superespaço Clássico

Seja a Lagrangeana

$$L = \sqrt{-g} e^{-\phi} (R - \omega \phi_{;\rho} \phi^{;\rho}). \quad (4.1)$$

Para $\omega = -1$ tem-se a teoria de cordas efetiva sem o campo de Kalb-Rammond. Para $\omega = -\frac{3}{2}$ tem-se um campo escalar conformalmente acoplado. Fazendo uma transformação conforme $g_{\mu\nu} = e^{\phi} \bar{g}_{\mu\nu}$ obtém-se

$$L = \sqrt{-g} (R - C_{\omega} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho}), \quad (4.2)$$

onde as barras foram omitidas e $C_{\omega} = \left(\omega + \frac{3}{2}\right)$. Os casos de interesse correspondem a $C_{\omega} > 0$.

A parte gravitacional do modelo de mini-superespaço que será estudado neste trabalho é dada pelo elemento de linha tipo Bianchi I homogêneo e anisotrópico

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2(t) dt^2 + \exp [2\beta_0(t) + 2\beta_+(t) + 2\sqrt{3}\beta_-(t)] dx^2 + \\ &+ \exp [2\beta_0(t) + 2\beta_+(t) - 2\sqrt{3}\beta_-(t)] dy^2 + \\ &+ \exp [2\beta_0(t) - 4\beta_+(t)] dz^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Este elemento de linha será isotrópico se e somente se $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ forem constantes [1]. Inserindo a equação (4.3) na ação $S = \int L d^4x$, dada pela Lagrangeana (4.2), supondo que o campo escalar ϕ dependa somente do tempo, descartando os termos de superfície e fazendo uma transformação de Legendre, obtém-se a seguinte Hamiltoniana clássica de mini-superespaço

$$H = \frac{N}{24 \exp(3\beta_0)} \left(-p_0^2 + p_+^2 + p_-^2 + p_{\phi}^2 \right), \quad (4.4)$$

onde (p_0, p_+, p_-, p_ϕ) são canonicamente conjugados a $(\beta_0, \beta_+, \beta_-, \phi)$, respectivamente, tendo sido feita a redefinição trivial $\phi \rightarrow \sqrt{C_\omega/6} \phi$.

Pode-se escrever esta Hamiltoniana numa forma compacta definindo $y^\mu = (\beta_0, \beta_+, \beta_-, \phi)$ e seus momentos canônicos $p_\mu = (p_0, p_+, p_-, p_\phi)$ para assim obter

$$H = \frac{N}{24 \exp(3 y_0)} \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (4.5)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski com assinatura $(-, +, +, +)$. As equações de movimento são: a equação de vínculo obtida pela derivação da Hamiltoniana com respeito à função lapso N

$$\mathcal{H} := \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0, \quad (4.6)$$

e as equações de Hamilton

$$\dot{y}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} = \frac{N}{12 \exp(3 y_0)} \eta^{\mu\nu} p_\nu, \quad (4.7)$$

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^\mu} = 0. \quad (4.8)$$

A solução destas equações no *gauge* $N = 12 \exp(3 y_0)$ é

$$y^\mu = \eta^\mu p_\nu t + C^\mu, \quad (4.9)$$

onde os momentos p_ν são constantes, de acordo com as equações de movimento (4.8) e C^μ são constantes de integração. Pode-se ver que a única maneira de se obter isotropia nas soluções é fazendo $p_1 = p_+ = 0$ e $p_2 = p_- = 0$, que produz soluções que são sempre isotrópicas — as usuais soluções de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com um campo escalar. Por isso não há nenhuma solução anisotrópica neste modelo que possa classicamente tonar-se isotrópica durante o curso de sua evolução. Uma vez que seja anisotrópica a solução assim permanecerá para sempre. Se for suprimido o grau de liberdade ϕ , a única

solução isotrópica é o espaço-tempo chato porque, neste caso, o vínculo (4.6) força a que se tenha $p_0 = 0$.

Para se discutir o aparecimento de singularidades necessita-se do quadrado do tensor de Weyl $W^2 := W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu}$. Ele é

$$W^2 = \frac{1}{432} e^{-12\beta_0} \left(-2 p_0 p_+^3 + 6 p_0 p_-^2 p_+ + p_+^4 + 2 p_+^2 p_-^2 + p_+^4 + p_0^2 p_+^2 + p_0^2 p_-^2 \right). \quad (4.10)$$

Por isso, o quadrado do tensor é proporcional a $\exp(-12\beta_0)$ porque os p 's são constantes (ver equações (4.8)), e a singularidade ocorre em $t \rightarrow -\infty$. A singularidade clássica pode ser evitada somente se $p_0 = 0$. Mas, então, devido à equação (2.6), ter-se-ia também $p_i = 0$, o que corresponde ao caso trivial do espaço-tempo chato. Portanto, a única solução clássica que é não-singular é a solução trivial de espaço-tempo chato.

4.2 Quantização do Modelo Clássico

O procedimento de quantização de Dirac leva à equação de Wheeler-DeWitt através da imposição da condição

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi = 0, \quad (4.11)$$

sobre os estados quânticos, com $\hat{\mathcal{H}}$ definido como na equação (4.6) (assumindo-se o fator de ordenamento covariante), onde devem ser feitas as seguintes substituições:

$$p_\mu \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \quad (4.12)$$

A equação (4.11) torna-se

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \Psi(y^\rho) = 0. \quad (4.13)$$

A- O Modelo Vazio

Num primeiro caso mais simples congelam-se dois graus de liberdade: o grau de liberdade da matéria $y^3 = \phi = 0$, suprimindo-se o campo escalar, e também um dos graus de liberdade anisotrópicos, $y^2 = \beta_- = 0$. Obtém-se uma equação de Klein-Gordon bidimensional

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\beta_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta_+^2}\right) \Psi = 0, \quad (4.14)$$

cuja solução geral é

$$\Psi(\beta_0, \beta_+) = \int \{F(k) \exp[i k (\beta_0 + \beta_+)] + G(k) \exp[i k (\beta_0 - \beta_+)]\} dk, \quad (4.15)$$

onde $F(k)$ e $G(k)$ são funções arbitrárias de k .

Tomando-se superposições Gaussianas

$$F(k) = G(-k) = \exp\left[-\frac{(k-d)^2}{\sigma^2}\right], \quad (4.16)$$

a função de onda torna-se

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \sigma \sqrt{\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{(\beta_0 + \beta_+)^2 \sigma^2}{4}\right] \exp[i d (\beta_0 + \beta_+)] + \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{(\beta_0 - \beta_+)^2 \sigma^2}{4}\right] \exp[-i d (\beta_0 - \beta_+)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde σ e d são constantes. Para o caso onde

$$F(k) = G(k) = \exp\left[-\frac{(k+d)^2}{\sigma^2}\right], \quad (4.18)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \sigma \sqrt{\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{(\beta_0 + \beta_+)^2 \sigma^2}{4}\right] \exp[-i d (\beta_0 + \beta_+)] + \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{(\beta_0 - \beta_+)^2 \sigma^2}{4}\right] \exp[-i d (\beta_0 - \beta_+)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para se calcular as trajetórias de Bohm correspondentes à solução (4.17), deve-se tomar a fase S_1 desta, inseri-la nas equações conhecidas como relações guia (equação (1.24))

$$\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}(q^\alpha) = \frac{f_{\alpha\beta}}{N} \frac{\partial q^\beta}{\partial t}, \quad (4.20)$$

onde $f_{\alpha\beta}$ são particularizações do mini-superespaço da métrica de DeWitt, S será a fase S_1 de Ψ_1 e q^α os graus de liberdade $y^\mu = (\beta_0, \beta_+)$. Aqui, se for usado o calibre

$$N = 12 \exp(3 y_0),$$

estas equações tornam-se

$$p_\mu = \frac{\partial S_1}{\partial y^\mu} = \eta_{\mu\nu} \dot{y}^\nu, \quad (4.21)$$

ou seja, obtemos o seguinte sistema de equações planares:

$$\dot{\beta}_0 = \frac{\beta_+ \sigma^2 \sin(2d\beta_0) + 2d \sinh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2)}{2 [\cos(2d\beta_0) + \cosh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2)]}, \quad (4.22)$$

$$\dot{\beta}_+ = \frac{-\beta_0 \sigma^2 \sin(2d\beta_0) + 2d \cos(2d\beta_0) + 2d \cosh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2)}{2 [\cos(2d\beta_0) + \cosh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2)]}. \quad (4.23)$$

A linha $\beta_0 = 0$ divide o espaço de configurações em duas regiões simétricas. A linha $\beta_+ = 0$ contém todos os pontos singulares do sistema, que são pontos de sela ou centros. Os pontos de sela aparecem quando o denominador das equações acima, que é proporcional à norma da função de onda, é zero. Eles ocorrem quando $\beta_+ = 0$ e $\cos(2d\beta_0) = -1$, ou $\beta_0 = (2n + 1)\pi/2d$, n sendo um inteiro, e tendo um espaçamento de π/d entre cada. Os centros aparecem quando os numeradores são zero. Eles são dados por $\beta_+ = 0$ e $\beta_0 = 2d [\cotg(d\beta_0)]/\sigma^2$. Eles são intercalados com os pontos de sela. Quando $|\beta_0| \rightarrow \infty$, estes pontos tendem a $n\pi/d$, e suas separações não podem exceder π/d . Como pode ser visto das equações (4.22) e (4.23), as soluções clássicas (4.9) são reobtidas quando

$|\beta_0| \rightarrow \infty$ ou $|\beta_+| \rightarrow \infty$, quando os β 's tornam-se proporcionais a t . O potencial quântico dado genericamente pela equação

$$Q(q^\mu) = -\frac{1}{2R} f^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 R}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}, \quad (4.24)$$

e que aqui se escreve como

$$\begin{aligned} Q(\beta_0, \beta_+) &= -\frac{1}{2R} \left(-\frac{\partial^2 R}{\partial \beta_0^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \beta_+^2} \right) = \\ &= \left\{ \left[\beta_+ \sigma^2 \sin(2d\beta_0) + 2d \sinh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2) \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\beta_0 \sigma^2 \sin(2d\beta_0) - 2d \cos(2d\beta_0) - 2d \cosh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2) \right]^2 \right\} / \\ &\quad / \left\{ 8 \left[\cos(2d\beta_0) + \cosh(\beta_0 \beta_+ \sigma^2) \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

torna-se desprezível neste limite.

Este sistema planar é mostrado na figura 2 para $\sigma = d = 1$. Pode-se ver muitas diferentes possibilidades, dependendo das condições iniciais. Perto dos centros (pontos de centros) pode-se ter universos oscilantes sem singularidades e com fases isotrópicas periódicas, com amplitude de oscilação de ordem 1. Para valores negativos de β_0 , o universo surge classicamente de uma singularidade, mas efeitos quânticos tornam-se importantes, forçando-o a recolapsar para outra singularidade, retornando ao comportamento clássico perto dela. Fases isotrópicas podem acontecer perto do seu tamanho máximo. Para valores positivos de β_0 , o universo contrai classicamente, mas — quando β_0 é pequeno o bastante — efeitos quânticos tornam-se importantes, criando uma fase inflacionária que evita a singularidade. O universo contrai a um tamanho mínimo e, depois de alcançado este ponto, ele expande para sempre, retornando ao limite clássico quando β_0 torna-se suficientemente grande. Neste caso, fases isotrópicas podem acontecer quando o universo está perto de seu tamanho mínimo. Em ambos os casos vê-se que fases isotrópicas acontecem somente quando efeitos quânticos são importantes. Pode-se ver que, para β_0 negativo, tem-se limite clássico para fator de escala pequeno, enquanto que, para β_0 positivo, tem-se

limite clássico para fator de escala grande. Estes modelos com $d = 1$ têm as suas fases isotrópicas com duração muito curta. Somente para $|d| \ll 1$ a fase isotrópica pode ser larga o bastante porque, como foi dito acima, a separação dos pontos singulares tende a π/d .

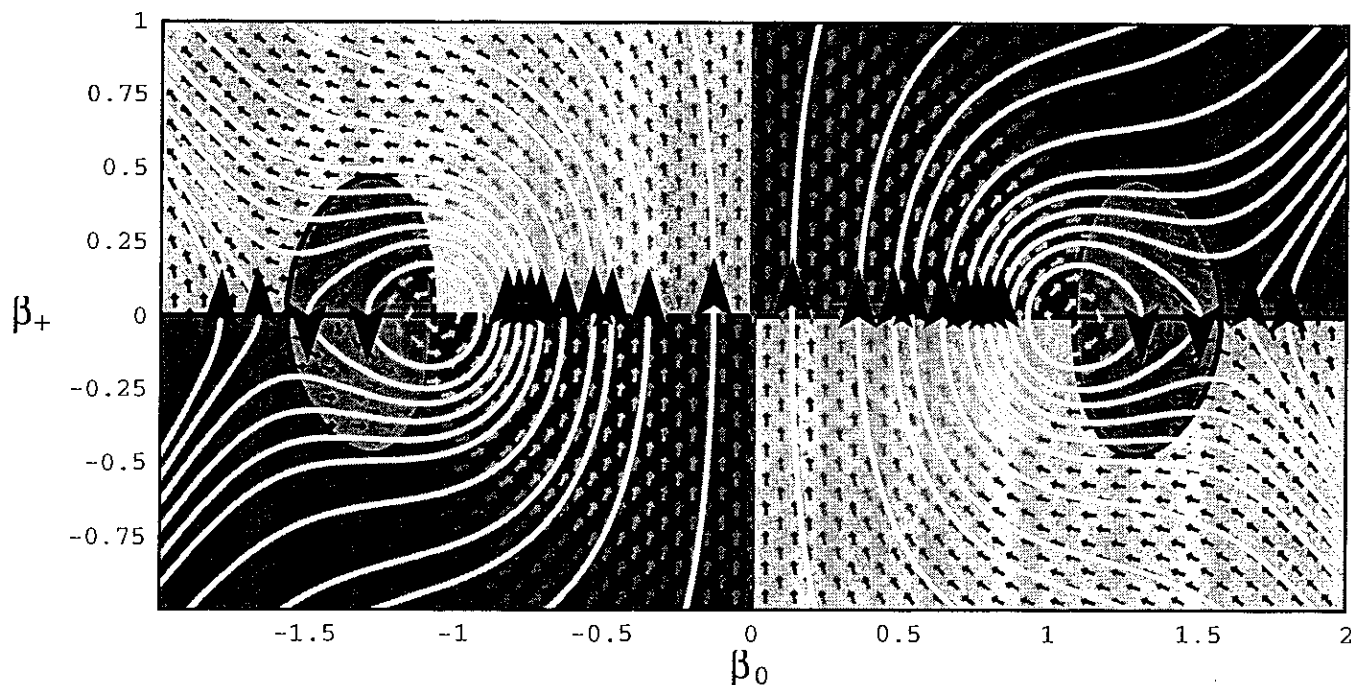


Figura 2: Sistema de equações planares (4.22) e (4.23) para $\sigma = d = 1$, que usa a interpretação de Bohm-de Broglie com a função de onda Ψ_1 , equação (4.17). Cada flecha do campo vetorial tem uma graduação de tonalidade de acordo com o seu comprimento real; preto representando vetores pequenos e branco os grandes. As quatro tonalidades de cinza mostram as regiões onde o campo vetorial é apontado para noroeste, nordeste, sudeste e sudoeste. As curvas pretas são as curvas de vetores sem inclinação que separam estas regiões. As trajetórias são as curvas brancas com flechas direcionais.

Para a função de onda Ψ_2 , a análise é a mesma, só que devemos trocar β_0 com β_+ na figura 2. Neste caso, tem-se também soluções periódicas, mas as outras são univer-

sois anisotrópicos surgindo classicamente de uma singularidade, experimentando efeitos quânticos no meio de sua expansão quando eles se tornam aproximadamente isotrópicos e retomam seus comportamentos clássicos para valores grandes de β_0 . Dependendo das condições iniciais, a fase anisotrópica pode ser arbitrariamente grande. Não há nenhuma possibilidade adicional.

B- O Modelo com Campo Escalar

No caso geral do modelo de mini-superespaço quadridimensional, são investigadas soluções de onda esférica da equação (4.13). Elas são

$$\Psi_3 = \frac{1}{y} [f(y^0 + y) + g(y^0 - y)], \quad (4.26)$$

onde $y \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y^i)^2}$.

Um exemplo particular é a superposição Gaussiana de soluções de onda plana da equação (4.13),

$$\begin{aligned} \Psi_4(y^\mu) = & \int \left\{ F(\vec{k}) \exp \left[i \left(|\vec{k}| y^0 + \vec{k} \cdot \vec{y} \right) \right] + \right. \\ & \left. + G(\vec{k}) \exp \left[i \left(|\vec{k}| y^0 - \vec{k} \cdot \vec{y} \right) \right] \right\} d^3k, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $\vec{k} \equiv (k_1, k_2, k_3)$, $\vec{y} \equiv (y^1, y^2, y^3)$, $|\vec{k}| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^3 (k_i)^2}$, com $F(\vec{k})$ e $G(\vec{k})$ dados por

$$F(\vec{k}) = G(\vec{k}) = \exp \left[-\frac{(|\vec{k}| - d)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (4.28)$$

Depois de realizar a integração na equação (4.27) obtém-se [26]

$$\begin{aligned} \Psi_4(y^0, y) = & \frac{i\pi^{3/2}}{y} \left\{ \left[2d\sigma + i(y^0 - y)\sigma^3 \right] \exp \left[(y^0 - y) \left(id - (y^0 - y) \frac{\sigma^2}{4} \right) \right] \right. \\ & \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(-\frac{d}{\sigma} - i(y^0 - y) \frac{\sigma}{2} \right) \right] - \\ & \left. - \left[2d\sigma + i(y^0 + y)\sigma^3 \right] \exp \left[(y^0 + y) \left(id - (y^0 + y) \frac{\sigma^2}{4} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\left. \left[1 - \operatorname{erf} \left(-\frac{d}{\sigma} - i \left(y^0 + y \right) \frac{\sigma}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4.29)$$

onde

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

A função de onda Ψ_4 é uma solução esférica com a forma da equação (4.26) com $g = -f$. Para simplificar Ψ_4 , será tomado o limite $\sigma^2 \gg d$ na equação (4.29), produzindo [26]

$$\Psi_4(y^0, y) = \frac{1}{y} [f(y^0 + y) - f(y^0 - y)], \quad (4.30)$$

com

$$f(z) \approx -\frac{16\pi d}{\sigma^2 z^3} + i2\pi \left(\frac{2}{z^2} + \sigma^2 \right). \quad (4.31)$$

Serão estudadas as soluções de onda esférica (4.26) da equação (4.13). As relações guia são:

$$p_0 = \partial_0 S = I_m \left(\frac{\partial_0 \Psi_3}{\Psi_3} \right) = -\dot{y}^0, \quad (4.32)$$

$$p_i = \partial_i S = I_m \left(\frac{\partial_i \Psi_3}{\Psi_3} \right) = \dot{y}^i, \quad (4.33)$$

onde S é a fase da função de onda. Em termos de f e g , as equações acima são

$$\dot{y}^0 = -I_m \left(\frac{f'(y^0 + y) + g'(y^0 - y)}{f(y^0 + y) + g(y^0 - y)} \right), \quad (4.34)$$

$$\dot{y}^i = \frac{y^i}{y} I_m \left(\frac{f'(y^0 + y) - g'(y^0 - y)}{f(y^0 + y) + g(y^0 - y)} \right), \quad (4.35)$$

onde a linha significa derivada com respeito ao argumento das funções f e g , e $I_m(z)$ é a parte imaginária do número complexo z .

Da equação (4.35) obtém-se que

$$\frac{dy^i}{dy^j} = \frac{y^i}{y^j},$$

o que implica que $y^i(t) = C_j^i y^j(t)$, sem nenhuma soma em j , onde os C_j^i são constantes, $C_j^i = 1/C_i^j$ e $C_1^1 = C_2^2 = C_3^3 = 1$. Por isto, à parte alguma constante multiplicativa positiva, o conhecimento de um dos y^i significa o conhecimento de todos os y^i . Conseqüentemente, pode-se reduzir as quatro equações (4.34) e (4.35) a um sistema planar escrevendo $y = C |y^3|$, com $C > 1$, e trabalhando somente com y^0 e y^3 , por exemplo. O sistema planar se escreve

$$\dot{y}^0 = -I_m \left(\frac{f'(y^0 + C |y^3|) + g'(y^0 - C |y^3|)}{f(y^0 + C |y^3|) + g(y^0 - C |y^3|)} \right), \quad (4.36)$$

$$\dot{y}^3 = \frac{\text{sinal}(y^3)}{C} I_m \left(\frac{f'(y^0 + C |y^3|) - g'(y^0 - C |y^3|)}{f(y^0 + C |y^3|) + g(y^0 - C |y^3|)} \right). \quad (4.37)$$

Note que, se $f = g$, y^3 estabiliza a $y^3 = 0$ porque $\dot{y}^3 = 0$ — assim como todas as outras derivadas temporais de y^3 — são zero nesta linha. Como $y^i(t) = C_j^i y^j(t)$, todos os $y^i(t)$ tornam-se zero, e o modelo cosmológico se isotropiza para sempre, uma vez que y^3 alcance esta linha. Obviamente pode-se encontrar soluções onde y^3 nunca alcança esta linha, mas, neste caso, deve haver alguma região onde $\dot{y}^3 = 0$, o que implica $\dot{y}^i = 0$, e esta é uma região isotrópica. Conseqüentemente, modelos cosmológicos anisotrópicos quânticos com $f = g$ sempre têm uma fase isotrópica, que pode se tornar permanente em muitos casos. Como um exemplo concreto, toma-se a Gaussian Ψ_4 dada na equação (4.29). É uma solução de onda esférica da equação de Wheeler-DeWitt (4.13) com $f = -g$ e, por isso, ela não tem necessariamente fases isotrópicas como descrito acima para o caso $f = g$. A figura 3 mostra este sistema para $d/\sigma^2 = -10^{-4}$ e $C = 2$. Na região $|\phi| \gg |\beta_0|$ tem-se períodos de expansão isotrópica porque $\phi = \text{constante}$ implica $\beta_{\pm} = \text{constante}$. Dependendo do valor de $|\phi|$, esta fase isotrópica pode ser arbitrariamente longa. Essas trajetórias são periódicas e sem singularidades. Devido aos efeitos quânticos, nenhuma trajetória cruza o

ponto $\beta_0 = \phi = 0$. A figura 4 mostra as trajetórias Bohmianas para a função de onda dada na equação (4.29), agora com $d/\sigma^2 = 10^{-4}$ e $C = 2$. Eles têm alguns comportamentos qualitativos diferentes do caso precedente. As fases isotrópicas, agora em contração, não são mais periódicas. Elas são partes de universos que contraem anisotropicamente do infinito, experimentam um período de isotropia, e contraem anisotropicamente para uma singularidade. A figura 3 mostra que nenhuma trajetória cruza o ponto $\beta_0 = \phi = 0$.

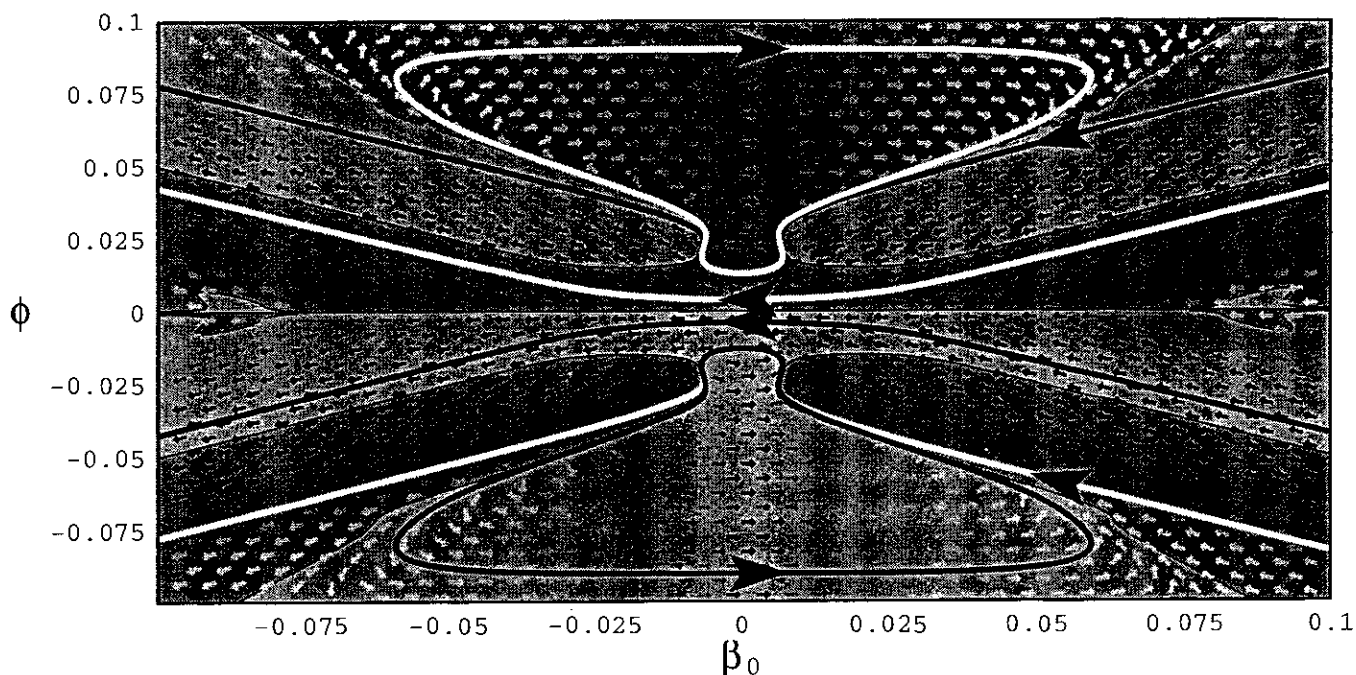


Figura 3: Sistema de equações planares (4.36) e (4.37) para $\sigma = 100$, $d = -1$ e $C = 2$, que usa a interpretação de Bohm-de Broglie com a função de onda Ψ_4 dada na equação (4.29). Cada flecha do campo vetorial tem um grau de tonalidade de acordo com o seu comprimento real; preto representando vetores pequenos e branco os grandes. A tonalidade escura de cinza mostra regiões onde a derivada do campo vetorial aponta no sentido horário (a tonalidade suave de cinza significa o oposto), e este sombreado permite que se veja as regiões com períodos arbitrariamente longos de expansão isotrópica correspondentes a universos periódicos sem singularidades. Há também curvas pretas ou brancas com flechas direcionais correspondentes a universos contraindo do infinito para

uma singularidade. Devido a efeitos quânticos, as trajetórias não cruzam a origem.

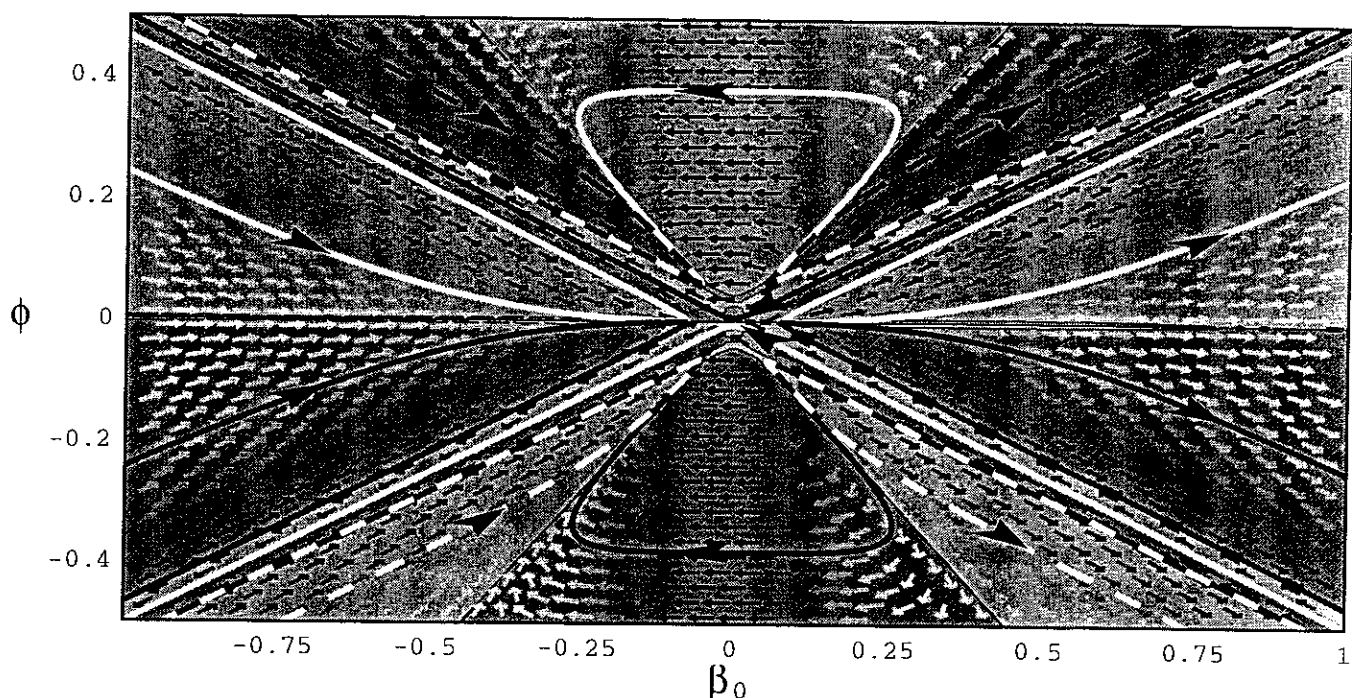


Figura 4: Sistema de equações planares (4.36) e (4.37) para $\sigma = 100$, $d = 1$ e $C = 2$, que usa a interpretação de Bohm-de Broglie com a função de onda Ψ_A dada na equação (4.29). Cada flecha do campo vetorial tem uma graduação de tonalidade de acordo com o seu comprimento real; preto representando vetores pequenos e branco os grandes. A tonalidade escura de cinza mostram regiões onde a derivada do campo vetorial aponta no sentido horário (a tonalidade suave de cinza significa o oposto), e este sombreado permite que se veja as regiões com períodos arbitrariamente longos de contração isotrópica. As trajetórias são as curvas pretas ou brancas com flechas direcionais; elas não cruzam a origem devido a efeitos quânticos.

Para se extrair alguma informação analítica das figuras 3 e 4, será apresentado o sistema planar obtido das relações guia, correspondendo à função de onda (4.29) na apro-

ximação (4.31).

$$\dot{\beta}_0 = \frac{2d}{\sigma^2} \frac{(3\beta_0^4 + 6C^2\beta_0^2\phi^2 - C^4\phi^4)}{\beta_0^2(\beta_0^2 - C^2\phi^2)^2 + \frac{4d^2}{\sigma^4}(3\beta_0^2 + C^2\phi^2)^2}, \quad (4.38)$$

$$\dot{\phi} = \frac{16d\beta_0^3\phi}{\sigma^2} / \left(\beta_0^2(\beta_0^2 - C^2\phi^2)^2 + \frac{4d^2}{\sigma^4}(3\beta_0^2 + C^2\phi^2)^2 \right), \quad (4.39)$$

onde foi reestabelecido $y^0 = \beta_0$ e $y^3 = \phi$. Esta aproximação não é confiável na linha $\beta_0 = \pm C\phi$ do gráfico. Como pode ser visto imediatamente destas equações, $\beta_{\pm} = \text{constante}$ sempre que $|\phi| \gg |\beta_0|$, e o sinal de d define a direção das trajetórias.

Pode-se concluir, portanto, que — adotando a interpretação de Bohm-de Broglie — os efeitos quânticos podem gerar um mecanismo eficiente para a isotropização de modelos cosmológicos que, classicamente, nunca isotropizam. No caso aqui estudado — modelos de Bianchi I no vazio ou preenchido com um campo escalar sem massa livre — viu-se que tais modelos podem apresentar fases isotrópicas arbitrariamente longas no curso de suas evoluções se efeitos quânticos forem levados em conta, sem a necessidade de se introduzir qualquer fase inflacionária clássica.

Conclusão

A possibilidade de se evitar as singularidades clássicas através de efeitos quânticos e a previsão do comportamento clássico do universo, por serem alguns dos objetivos mais importantes da cosmologia quântica, vêm sendo estudados por diferentes métodos na literatura. Em [5], conforme é apresentado no capítulo 2, foi proposto usar as trajetórias Bohmianas para se estudar estas questões e foi verificado que, no contexto das teorias escalar-tensoriais provenientes das teorias de corda e Kaluza-Klein, reescrita no referencial de Einstein, as suas conclusões estavam de acordo com aquelas da aproximação semi-clássica usual. Os resultados obtidos para algumas soluções exatas da equação de Wheeler-DeWitt indicam que o universo é clássico quando o seu fator de escala é pequeno (comparável à escala de Planck) e, neste caso, as singularidades não podem ser evitadas. Este resultado mostra que a ocorrência do limite clássico para grandes fatores de escala depende fortemente do estado quântico do universo, podendo até constituir-se como um critério de escolha para os possíveis estados quânticos cosmológicos. De fato, na referência [25], outras escolhas de estado quântico para o mesmo modelo físico apresentam limite clássico para grandes fatores de escala e efeitos quânticos evitando a singularidade quando este é pequeno.

Aqui neste trabalho (capítulo 3), essa análise foi estendida para teorias escalar-tensoriais acopladas não-minimamente. A equivalência conforme entre os referenciais de Jordan e de Einstein nos níveis clássico e quântico foi estabelecida tanto para as trajetórias Bohmianas quanto para o potencial quântico. Tendo as soluções exatas particulares da equação de Wheeler-DeWitt no referencial de Einstein, pôde-se obter as correspondentes soluções

no referencial de Jordan. As trajetórias Bohmianas no referencial de Jordan apresentam comportamento clássico sempre que o campo escalar não-minimamente acoplado com a gravidade é pequeno, o que coincide com valores pequenos do fator de escala a quando $\omega > 0$ e com valores grandes de a quando $-3/2 < \omega < 0$. Os efeitos quânticos surgem nas condições exatamente opostas a essas: quando o campo escalar não é pequeno, o que significa, para valores grandes de a quando $\omega > 0$ e para valores pequenos de a quando $-3/2 < \omega < 0$. Por isso, em contraste com o caso de acoplamento mínimo, as trajetórias Bohmianas podem coincidir com as soluções clássicas para valores grandes de a , mesmo utilizando estados quânticos correspondentes àqueles que apresentam o comportamento inesperado do caso com acoplamento mínimo. Há, ainda, o caso muito particular de $\omega = 0$, onde a solução clássica no sistema de Jordan é não singular e periódica e que — num exemplo estudado — a correspondente trajetória Bohmiana sempre tem comportamento quântico, mesmo quando o campo escalar se torna pequeno. O mais interessante é que essa solução quântica apresenta uma singularidade inicial, mostrando que, dependendo do estado quântico do sistema, os efeitos quânticos — ao invés de evitar — podem criar singularidades onde classicamente não havia nenhuma.

Esses resultados mostram que as propriedades quânticas das soluções em mini-superespaços podem ser bastante diferentes no referencial de Einstein e de Jordan, embora elas possam estar interligadas por uma transformação conforme. Estes referenciais não têm o mesmo conteúdo físico a nível quântico, e a equivalência é manifesta somente do ponto de vista matemático. Os limites clássicos nos dois referenciais são diferentes. Esses resultados expressam também a importância da escolha de condições de contorno para a equação de Wheeler-DeWitt. Por isso o interesse em investigar outras soluções dessa mesma equação de Wheeler-DeWitt que não possam ser expressas em termos de funções elementares, mas que apresentem resultados mais atraentes, tais como ausência de singularidades e um limite clássico para valores grandes do fator de escala a e inflação. A possibilidade estudada na referência [25] foi a de considerar superposições Gaussianas

das funções de Bessel (equações (3.41) - (3.43)) obtidas como solução da equação de Wheeler-DeWitt e depois estudá-las numericamente. Como as superposições Gaussianas misturam índices positivos e negativos das funções de Bessel (aqui só se fez superposição com um único sinal para os índices porque esses eram os que podiam ser expressos em termos de funções elementares) e como esses índices estão conectados com a expansão e contração, foi possível obter soluções quânticas não singulares em ambos os referenciais. Nessa referência a presente análise foi estendida a qualquer valor de curvatura das seções espaciais.

No capítulo 4, onde a interpretação de Bohm-de Broglie foi utilizada com o objetivo de se investigar se os efeitos quânticos poderiam isotropizar um modelo cosmológico anisotrópico, foi verificado que, de fato, os efeitos quânticos podem gerar um mecanismo alternativo eficiente para a isotropização de tais modelos. Modelos anisotrópicos clássicos que nunca isotropizam podem apresentar longas fases isotrópicas durante o curso de suas evoluções, sem necessidade de se introduzir alguma fase inflacionária clássica, se efeitos quânticos forem levados em conta. Os modelos estudados foram modelos de Bianchi I no espaço vazio ou preenchido com um campo escalar sem massa livre.

Há questões e desenvolvimentos que deveriam ser abordados dentro deste esquema: a dependência dos resultados acima das condições de contorno da equação de Wheeler-DeWitt, sua generalização para outros modelos de Bianchi e as condições para as quais os efeitos quânticos podem também induzir homogeneidade em modelos cosmológicos que são classicamente inhomogêneos. Esta última questão é a mais interessante, porém a mais complicada, porque a implementação da interpretação de Bohm-de Broglie para modelos cosmológicos inhomogêneos é mais sutil e intrincada [21]. Estas são questões que podem ser objeto de futuras investigações.

Appendix A

Quantização Canônica e Mini-Superespaços

Neste apêndice a quantização canônica será discutida para o caso da Teoria da Relatividade Geral (T.R.G.) sem matéria. O seu método consiste em colocar a teoria clássica na forma Hamiltoniana, identificando seus pares de variáveis canônicas (coordenadas e momenta canônicos) e seus vínculos de primeira classe [37] (a T.R.G. é um sistema com vínculos de primeira classe somente). Em seguida associa-se estes pares de variáveis canônicas a operadores quânticos e seus parênteses de Poisson a comutadores destes operadores. A função de onda deve ser aniquilada pela expressão operatorial dos vínculos de primeira classe.

A ação cuja variação leva às equações de Einstein é a de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (\text{A.1})$$

Conforme é discutido na referência [38] (ver também [39]), para que se inicie a formulação Hamiltoniana desta teoria é necessário antes que se escreva esta ação na sua forma ADM (separação 3 + 1). Ela então se escreve:

$$\begin{aligned}
S = & \int d^4x h^{1/2} \left[-2 h^{ij} \dot{K}_{ij} - \dot{h}^{ij} K_{ij} + \right. \\
& + N \left({}^3R + K^2 - K_{ij} K^{ij} \right) - 2 N^i \left(K^j{}_{;i} - \delta^j{}_i K \right)_{;j} - \\
& \left. - 2 \left(N_{;i} - K_{ij} N^j \right)^{;i} \right], \tag{A.2}
\end{aligned}$$

onde, conforme é mostrado em [38], h_{ij} é o tensor métrico do tri-espaco, K_{ij} o tensor de curvatura extrínseca do mesmo, N é a função lapso e N_i é o vetor deslocamento. Integrando-se por partes e adicionando o termo de superfície $\int_S d^3x h^{1/2} K$, ela passa a ser escrita como

$$S = \int d^4x N h^{1/2} \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right), \tag{A.3}$$

lembrando que

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \left(\dot{h}_{ij} - N_{j|i} - N_{i|j} \right). \tag{A.4}$$

Para dar início à formulação Hamiltoniana deve-se primeiramente calcular os momenta canonicamente conjugados às variáveis independentes h_{ij} , N e N_i . Eles são:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0, \tag{A.5}$$

$$\pi^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_i} = 0, \tag{A.6}$$

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = h^{1/2} \left(h^{ij} K - K^{ij} \right). \tag{A.7}$$

Através destas relações não é possível expressar todas as “velocidades” em função das variáveis canônicas e de seus momenta canonicamente conjugados, como deveria ser feito num sistema regular (sem vínculos). Obtêm-se somente os vínculos primários apresentados abaixo:

$$\pi \approx 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\pi^i \approx 0, \quad (\text{A.9})$$

A Hamiltoniana canônica será:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{RG} &= \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_{RG} = \\ &= -2 N \pi^{ij} K_{ij} + 2 \pi^{ij} N_{i|j} - \\ &\quad - N h^{1/2} {}^{(3)}R - N h^{1/2} K^{ij} K_{ij} + N h^{1/2} K^2 = \\ &= -N h^{1/2} K^2 + N h^{1/2} K^{ij} K_{ij} - N h^{1/2} {}^{(3)}R - 2 N_i \pi^{ij}{}_{|j}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde foi usada a expressão (A.4) em \dot{h}_{ij} e “jogado fora” o termo de derivada total $(2 \pi^{ij} N_i)_{|j}$, já que este é nulo em

$$H_{RG} = \int d^3x \mathcal{H}_{RG}, \quad (\text{A.11})$$

no caso de espaço compacto, como são os considerados aqui. Ela pode ainda ser escrita como:

$$\mathcal{H}_{RG} = N \left(G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - h^{-1/2} {}^{(3)}R \right) + N_i \left(-2 \pi^{ij}{}_{|j} \right), \quad (\text{A.12})$$

onde

$$G_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}). \quad (\text{A.13})$$

De acordo com o método de Dirac, a condição de consistência dos vínculos primários (A.8) e (A.9) leva aos vínculos secundários

$$H_0 \equiv G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - h^{-1/2} {}^{(3)}R \approx 0, \quad (\text{A.14})$$

$$H^i \equiv -2 \pi^{ij} |_{,j} \approx 0. \quad (\text{A.15})$$

O primeiro vínculo é conhecido como superhamiltoniana e o segundo como supermomentum. Eles estão presentes devido à invariância da TRG mediante transformações de coordenadas espaço-temporais. Pode-se mostrar [20] que os vínculos (A.13) e (A.14) são de primeira classe.

A partir de agora pode-se proceder à quantização canônica da teoria fazendo a substituição das variáveis canônicas h_{ij} e π^{ij} nas equações pelos operadores a elas associados

$$h_{ij} \longrightarrow \hat{h}_{ij}, \quad (\text{A.16})$$

$$\pi^{ij} \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial h_{ij}}. \quad (\text{A.17})$$

Desta forma, a versão quântica da equação (A.14) torna-se

$$\left(G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + h^{1/2} {}^{(3)}R \right) \Psi(h_{ij}) = 0, \quad (\text{A.18})$$

que é a equação diferencial funcional conhecida como equação de Wheeler-DeWitt, e que será a responsável pela dinâmica da função de onda Ψ . Note que esta é apenas uma das possíveis representações dessa equação. Nela, G_{ijkl} pode ser interpretada como uma métrica do espaço das métricas h_{ij} (superespaço). A versão quântica do vínculo (A.15) implica que o funcional de onda é invariante por transformações espaciais de coordenadas.

A equação de Wheeler-DeWitt é uma equação difícil de se resolver tal como ela se apresenta em (A.18); no entanto, grande parte da dificuldade matemática pode ser reduzida quando a teoria é aplicada a modelos de mini-superespaço [40], que são definidos originalmente como modelos cosmológicos com somente uns poucos componentes métricos, cada

um dos quais compostos de alguma função conhecida das variáveis espaciais, multiplicada por funções dinâmicas do tempo somente. No caso de modelos homogêneos (que são os tratados nesta tese), o vínculo supermomentum H^i é identicamente nulo e a Hamiltoniana (A.12) se reduz a

$$\mathcal{H}_{RG} = N(t) H_0(p^\alpha(t), q_\alpha(t)), \quad (\text{A.19})$$

onde $p^\alpha(t)$ e $q_\alpha(t)$ representam os graus de liberdade homogêneos provenientes de $\pi^{ij}(x, t)$ e $h_{ij}(x, t)$. A equação (A.18) torna-se

$$\left(f_{\alpha\beta}(q_\mu) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\beta} + U(q_\mu) \right) \Psi(q_\mu) = 0, \quad (\text{A.20})$$

onde $f_{\alpha\beta}$ e $U(q_\mu)$ são as particularizações do mini-superespaço de G_{ijkl} e de $h^{1/2} {}^{(3)}R(h_{ij})$, respectivamente. O problema, agora, se reduziu portanto a simplesmente resolver uma equação diferencial do tipo da (A.20).

Um exemplo concreto de modelo de mini-superespaço é o de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 + (\epsilon/4) r^2} \left\{ dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\varphi^2] \right\}, \quad (\text{A.21})$$

para o caso $\epsilon = 1$.

A Lagrangeana da ação de Einstein-Hilbert, neste caso, torna-se

$$L = \frac{12 a \dot{a}^2}{N} - 12 N a. \quad (\text{A.22})$$

Seu momentum canonicamente conjugado a a é

$$\pi_a = \frac{24 a \dot{a}}{N}, \quad (\text{A.23})$$

e a sua Hamiltoniana torna-se

Bibliography

- [1] S.W.Hawking e G.F.R.Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [2] J.A.de Barros e N.Pinto-Neto, “*The Causal Interpretation of Quantum Mechanics and the Singularity Problem and Time Issue in Quantum Cosmology*”, Int.J.of Mod.Phys. **D7**, 201 (1998).
- [3] J.A.de Barros, N.Pinto-Neto e M.A.Sagioro-Leal, “*The Causal Interpretation of Dust and Radiation Fluid Non-Singular Quantum Cosmologies*”, Phys.Lett. **A241**, 229 (1998).
- [4] J.A.de Barros, N.Pinto-Neto e M.A.Sagioro-Leal, “*The Causal Interpretation of Conformally Coupled Scalar Field Quantum Cosmology*”, General Relativity and Gravitation **32**, 15 (2000).
- [5] R.Colistete Jr., J.C.Fabris e N.Pinto-Neto, “*Singularities and the Classical Limit in Quantum Cosmology with Scalar Fields*”, Phys.Rev. **D 57**, 4707 (1998).
- [6] J.C.Fabris, N.Pinto-Neto e A.F.Velasco, “*Quantum Cosmology in Scalar-Tensor Theories with Non-Minimal Coupling*”, Class. Quantum Grav. **16**, 3807 (1999).
- [7] P.N.Kaloyeron, “*The Causal Interpretation of the Electromagnetic Field*”, Phys.Rep. **244**, 287 (1994).

- [19] B.S.De Witt em "*The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*", eds. B.S.De Witt e N.Graham (Princeton University Press, Princeton) (1973).
- [20] B.S.De Witt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*". Phys.Rev. **D 160**, 1113 (1967).
- [21] E.S.Santini, "*Geometrodinâmica Quântica na Interpretação de Bohm-de Broglie*". Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Rio de Janeiro, 2000; N.Pinto-Neto e E.S.Santini, "*Must Quantum Spacetimes be Euclidean?*" Phys.Rev. **D 59**, 123 517 (1999).
- [22] R.Easther e K.Maeda, "*Tree-Level String Cosmology*", Phys.Rev. **D 53**, 4247 (1996).
- [23] F.G.Alvarenga e J.C.Fabris, "*Primordial Cosmology with a Contraction Phase*", Class.Quantum Grav. **12**, L69 (1995).
- [24] J.J.Halliwell, "*Correlations in the Wave Function of the Universe*". Phys.Rev. **D 36**, 3626 (1987).
- [25] R.Colistete Jr., J.C.Fabris e N.Pinto-Neto, "*Gaussian Superpositions in the Scalar-Tensor Quantum Cosmological Models*", Phys.Rev. **D 62**, 083 507 (2000).
- [26] I.S.GradshTEyn e I.M.Ryzhik, "*Table of Integrals, Series and Products*", (Academic, New York, 1980).
- [27] J.D.Barrow e K.E.Kunze, "*String Cosmology*", Chaos Soliton Fract. **10** (2-3), 257 (1999).
- [28] T.Appelquist, A.Chodos e P.G.O.Freund, "*Modern Kaluza-Klein Theories*", (Addison-Wesley, New York, 1987).

- [29] D.N.Page, “*Minisuperspaces with Conformally and Minimally Coupled Scalar Fields*”, J.Math.Phys. **32**, 3427 (1991).
- [30] L.O.Pimentel e C.Mora, “*Quantum Cosmology and Wormholes in Some Scalar-Tensor Theories*”, Mod.Phys.Lett. **A 15**: (5) 333 (2000).
- [31] C.Brans e R.H.Dicke, “*Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*”. Phys.Rev. **124**, 925, (1961).
- [32] S.W.Hawking e D.N.Page, “*Spectrum of Wormholes*”, Phys.Rev. **D 42**, 2655, (1990).
- [33] K.Kuchar, “*Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*”, eds. C.J.Isham, R.Penrose e D.W.Sciama (Clarendon, Oxford, 1981).
- [34] R.Colistete Jr., N. Pinto-Neto e A.F. Velasco, “*The Quantum Isotropization of the Universe*”, Phys. Letters A 277: (4-5) 194-204 dezembro 2000.
- [35] S.L.S. Duque, “*Transição de Fase Auto-Induzida pela Gravitação*”. Tese de mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Rio de Janeiro, 1989.
- [36] L.R. de Freitas, M. Novello, “*Reminiscences of the Primordial Anisotropic Era of our Universe*”, Gravitation and Cosmology. Rússia, V. 3, n. 1, 48-50, 1997.
- [37] P.A.M.Dirac, “*Lectures in Quantum Mechanics*”, (Yeshiva University Press, New York, 1962).
- [38] A.F.Velasco, “*Formalismo de Primeira Ordem e Suas Aplicações para a Quantização Canônica da Gravitação*”. Tese de Mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Rio de Janeiro, 1990.
- [39] C.W.Misner, K.S.Thorne e J.A.Wheeler, “*Gravitation*”. (W.H.Freeman and Company, New York, 1973).

- [40] M.P.Ryan, notas do curso ministrado durante a “*Vith Brazilian School of Cosmology and Gravitation*”, Itacuruçá, Rio de Janeiro (1989).

æ

“Cosmologia Quântica de Teorias Escalar-Tensorias na Interpretação de Bohm-de Broglie”

Alexandre da Fonseca Velasco

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Nelson Pinto Neto – Presidente/CBPF

Julio Cesar Fabris – UFES

Nivaldo Agostinho Lemos – UFF

Ívano Damião Soares - CBPF

Mário Novello - CBPF

Suplente: José Martins Salim- CBPF

Rio de Janeiro, 24 de novembro de 2000