

Tese de Doutorado

02/00

Um Teorema de Não-Renormalização para o *Linking Number* em Três Dimensões

Daniel Guilherme Gomes Sasaki

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUÍAS FÍSICAS
Rio de Janeiro, Fevereiro de 2000

*À minha Lu,
princípio e fim.*

PREFÁCIO

Para elaboração desta tese foram utilizados os trabalhos abaixo citados:

- C. A. G. Sasaki, D. G. G. Sasaki e S. P. Sorella, *Nonlinear Vector Susy for the Three Dimensional Topological Massive Yang-Mills Theory*, *Mod. Phys. Lett.* **A14**, (1999) 391;
- V. E. R. Lemes, C. A. Linhares, D. G. G. Sasaki, S. P. Sorella e L. C. Q. Vilar, *Perturbing Topological Field Theories*, *Phys. Rev.* **D60**, (1999) 065008;

Agradecimentos

Ao Professor Silvio Sorella, pela coragem em assumir o risco e acreditar que era possível fazer um bom trabalho em tão pouco tempo, pela eficiente orientação que agilizou a aquisição de conhecimentos e a realização de tarefas e pelo entusiasmo que demonstra pela pesquisa.

Ao Professor e irmão Cláudio Sasaki, pela inspiração e pela fiel condução nos primeiros passos de um novo caminho.

Ao Professor Anibal Caride, pela força em um momento crucial de decisão.

Aos pesquisadores e amigos Luiz Cláudio, Vitor Lemes e Ozemar Ventura, pela acolhida fraternal e por terem mostrado na prática como se desenvolve um bom trabalho em equipe.

À minha família, simplesmente por tudo que ela significa na minha vida.

Ao Vitor L. Bastos de Jesus, pela sólida amizade e confiança e pelo profícuo compartilhamento de idéias, projetos e oportunidades.

Aos amigos Winder Moura Melo e José Luis Boldo, pela inesquecível convivência que sempre sentirei saudades.

Aos companheiros de jornada e amigos do DCP.

A Rosângela Castro e Elisabeth dos Anjos, pela proeza de combinar eficiência e simpatia a frente da secretaria do DCP.

A todos aqueles que contribuíram e contribuem para tornar o CBPF um lugar extraordinário, que considero como a minha segunda casa.

À Myriam Simões Coutinho, pela paciência e pelo carinho que teve durante este longo período no CBPF.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

A teoria de Chern-Simons abeliana é perturbada pela introdução de termos de interação que dependem da curvatura. Efetuamos o cálculo da função de correlação perturbada $\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu \oint_{C_2} dy^\nu A_\nu \rangle_{S_{eff}}$, onde C_1 e C_2 , são duas curvas suaves e fechadas, que não possuem intersecção entre si. O cálculo dos diagramas é realizado até quatro *loops*, mostrando que a função de correlação não é afetada pelas correções quânticas. Este resultado endossa a estabilidade do *linking number* com respeito a perturbações locais e invariantes de gauge, que podem ser adicionadas ao termo de Chern-Simons puro.

Abstract

The abelian Chern-Simons theory is perturbed by introducing local gauge-invariant interaction terms depending on the curvature. The computation of the correlation function $\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu \oint_{C_2} dy^\nu A_\nu \rangle_{S_{eff}}$ for two smooth closed nonintersecting curves C_1, C_2 is reported up to four loops and is shown to be unaffected by radiative corrections. This result ensures the stability of the linking number of C_1 and C_2 with respect to the local and gauge invariants perturbations which may be added to the pure Chern-Simons action.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Índice	iv
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Introdução	1
1 O <i>Loop</i> de Wilson e suas Aplicações	7
1.1 O <i>Loop</i> de Wilson Clássico e suas Propriedades	9
1.2 O <i>Loop</i> de Wilson Quântico e o Confinamento	14
1.2.1 Confinamento na QCD	15
1.2.2 Confinamento no Modelo de Maxwell	17
1.2.3 Confinamento no Modelo de Yang-Mills	21
1.2.4 Confinamento no Modelo de Maxwell-Chern-Simons	23
1.3 Invariantes Topológicos	24
2 Aspectos Gerais das Teorias de Gauge em $(2 + 1)D$ na Presença do Termo de Chern-Simons	31
2.1 A Teoria de Chern-Simons e suas Propriedades	32
2.1.1 Maxwell-Chern-Simons Abeliano	33
2.1.2 Maxwell-Chern-Simons Não-Abeliano	35

2.2	Cálculo de Alguns Invariantes Topológicos na Teoria de Chern-Simons	
	Abeliana	39
2.2.1	Primeira Configuração Geométrica: Círculo e Reta	42
2.2.2	Segunda Configuração Geométrica: Dois Círculos	49
3	O Termo de Chern-Simons e suas Perturbações	52
3.1	Expansão Perturbativa e Diagramas de Feynman	53
	Conclusão	66
	Bibliografia	69

Lista de Figuras

1-1	As linhas de universo do par quark-antiquark.	16
1-2	Contorno retangular parametrizado.	18
1-3	O Hopf Link.	25
1-4	Cruzamentos orientados de links.	26
1-5	O linking number de curvas orientadas.	27
2-1	Círculo de raio R centrado na origem.	40
2-2	Reta vertical cruzando o círculo.	43
2-3	Reta inclinada cruzando o círculo.	45
2-4	Reta vertical passando por fora do círculo.	48
3-1	Diagrama a 2-loops.	57
3-2	Diagrama a 3-loops.	61
3-3	Primeiro diagrama a 4-loops.	62
3-4	Segundo diagrama a 4-loops.	63

Introdução

Atualmente, as chamadas teorias de campo topológicas representam um importante ramo de investigação em teoria quântica de campos [1]. Entendemos por teorias topológicas, uma classe de modelos físicos com a peculiaridade de que os seus observáveis, não dependem da métrica do espaço, sendo denominados de invariantes topológicos.

Os invariantes topológicos podem ser entendidos como um certo tipo de grandezas, definidas sobre uma variedade e que possuem a propriedade de permanecerem constantes, quando a variedade é submetida a transformações contínuas, como deformações.

Os invariantes topológicos foram introduzidos em teoria de campos em 1988, através dos trabalhos de E. Witten [2], que calculou diversos invariantes topológicos conhecidos e também desconhecidos pelos matemáticos. Os resultados que Witten chegou, foram obtidos através do cálculo do valor esperado no vácuo do *loop* de Wilson, usando a ação de Chern-Simons.

Nos últimos anos, os invariantes topológicos têm sido aplicados em diversos sistemas dentro e fora da física. Podemos citar, como exemplos, os estudos sobre cadeias de polímeros [3][4][5], a pesquisa da estrutura helicoidal da molécula de DNA [6][7][8] e os modelos de transição de fase na formação do universo primitivo, em cosmologia [9].

Em particular, destacamos as aplicações à matéria condensada, onde esses objetos aparecem nos modelos teóricos que descrevem fenômenos como o efeito Hall quântico fracionário, em conexão com a teoria de Chern-Simons [10]

Dentre os objetos topológicos, estamos interessados nos chamados *links*. Os *links* são formados pelo entrelaçamento de duas ou mais curvas, mas sem que haja intersecção. O *link* mais popular é Hopf *link* [11], que é constituído por duas curvas suaves e fechadas,

em que uma delas cruza a outra apenas uma vez, como dois anéis presos entre si.

Para todo *link*, existe associado um *linking number*, que é um invariante topológico que expressa o número de voltas que uma curva faz sobre a outra. O *linking number* é representado por $\chi(C_1, C_2)$, onde C_1 e C_2 são curvas fechadas e suaves. O seu valor é sempre um número inteiro.

A relação entre o *linking number* e os modelos físicos é estabelecida através da teoria de Chern-Simons pura. Em virtude da forma específica do propagador desta teoria, o *linking number* é equivalente à expressão [12]:

$$\chi(C_1, C_2) = \left\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu \oint_{C_2} A_\nu dy^\nu \right\rangle_{S_{CS}}$$

onde x e y são pontos pertencentes as curvas C_1 e C_2 , respectivamente e S_{CS} é ação de Chern-Simons abeliana, no espaço Euclideano [13]:

$$S_{CS} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \right).$$

A relação para $\chi(C_1, C_2)$ representa exatamente o cálculo do valor esperado no vácuo de duas integrais de caminho, para a ação de Chern-Simons. Essas integrais de contorno constituem variáveis de *loop*, semelhantes ao *loop* de Wilson.

Na década de 70, Wilson [14] definiu a variável de *loop*, dada por:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = Tr \left\{ P \left[\exp \left(\int_C dx^\mu A_\mu \right) \right] \right\},$$

onde Tr é o traço, P é o *path-ordering* ao longo da curva C fechada e A_μ é o campo de gauge.

Wilson mostrou que $\langle \mathcal{W}(C) \rangle$ servia como um parâmetro de ordem, que fazia a distinção entre as fases confinantes e não confinantes de quarks, na QCD.

A grandeza $\langle \mathcal{W}(C) \rangle$, que ficou conhecida como *loop* de Wilson, despertou um grande interesse nos anos seguintes.

Nas teorias não-abelianas, o *loop* de Wilson passou a ser visto como mais adequado

para descrever a teoria do que as próprias matrizes do campo de gauge convencional A_μ . A razão é que o campo A_μ varia sob transformações de gauge e carrega graus de liberdade espúrios. Em contraste, o *loop* de Wilson é invariante de gauge.

Havia, então, a esperança de que o *loop* de Wilson pudesse substituir o campo de gauge, como a variável fundamental da teoria e que, por sua vez, os seus valores esperados no vácuo, ocupassem o lugar das tradicionais funções de Green.

Então, seguiram-se várias tentativas de deduzir as equações de movimento, para o *loop* de Wilson [15][16][17][18]. Este programa, contudo, não foi bem sucedido, em virtude das chamadas equações de movimento de Migdal-Makeenko, para o *loop* de Wilson, revelarem-se singulares [19].

Decorridos cerca de dez anos, o *loop* de Wilson voltou a chamar atenção dos físicos, agora no contexto das teorias topológicas, devido aos trabalhos de Witten, comentados acima.

Certamente a teoria topológica mais conhecida é a teoria de Chern-Simons em três dimensões [13]. O seu interesse está associado, particularmente, a aplicações de teoria de campos em matéria condensada.

Contudo, o termo de Chern-Simons raramente aparece isolado, pois as suas soluções não correspondem a excitações físicas, já que o seu tensor energia-momentum é nulo.

Por exemplo, quando acoplado a campos de matéria, ele descreve os anyons, partículas de estatística fracionária, em modelos que descrevem o efeito Hall quântico [20][21][22][23].

Freqüentemente, o termo de Chern-Simons também aparece junto a outros termos que dependem da curvatura ou mesmo junto a uma série infinita de termos que dependem de potências na curvatura, formando uma ação efetiva, como no caso da bosonização de férmions massivos a temperatura zero. [24][25][26][27][28][29].

Esses termos podem ser vistos como perturbações na ação de Chern-Simons pura. Dentre eles, o termo de Maxwell é o mais simples e comum que aparece acoplado à teoria de Chern-Simons.

Entretanto, quando adicionamos o termo de Maxwell, temos uma nova teoria, denominada Maxwell-Chern-Simons [30]. Ela constitui a principal representante das chamadas

teorias de gauge com massa topológica, que possuem propriedades bastante interessantes.

De fato, a introdução do termo de Maxwell, altera de forma contundente o propagador da teoria de Chern-Simons pura, acarretando no surgimento de uma excitação massiva. A presença desta massa topológica dá origem ao chamado *screening* da carga, que significa uma blindagem da carga devido à polarização do vácuo. O potencial de interação fica mais fraco e apresenta um decaimento exponencial que depende da massa [31].

Visto por outro ângulo, sabemos que a teoria de Maxwell pura é confinante em três dimensões, pois o seu potencial apresenta um comportamento logarítmico com a distância entre as cargas [32]. Assim, se colocarmos o termo de Chern-Simons teremos uma drástica alteração do potencial devido ao *screening* da carga. Em outras palavras, o termo de Chern-Simons tem o efeito de deconfinar a teoria.

Infelizmente, a introdução do termo de Maxwell na teoria de Chern-Simons afeta uma de suas principais características, que é a sua relação com os invariantes topológicos. O *link* que já discutimos acima, não é mais um invariante topológico, na presença do termo de Maxwell.

Afim de ilustrar este fato, no segundo capítulo desta tese, calculamos $\chi(C_1, C_2)$ para a teoria de Maxwell-Chern-Simons, no caso particular de uma configuração geométrica mais simples, composta de uma reta vertical cruzando um círculo.

Mostramos, nessa situação, que o resultado topológico é perdido. Em seu lugar aparece uma função de Bessel modificada de segundo tipo, cujo comportamento a longas distâncias revela uma exponencial decrescente.

A razão de tal modificação é exatamente porque o termo de Maxwell altera a estrutura da teoria original e por isso não se caracteriza como uma perturbação autêntica.

Em outras palavras, sabemos que isoladamente, o termo de Chern-Simons possui propriedades topológicas, porém é mais comum que ele apareça em teorias, acoplado a outros termos que dependem de curvatura e que, portanto, não são topológicos.

Neste sentido, algumas questões são imediatamente suscitadas: o *link* continuará a apresentar características topológicas quando acoplado a termos perturbativos, que dependem da métrica? A introdução de uma perturbação irá fazer com que o *link* perca

estas propriedades, como ocorreu quando foi acrescentado o termo de Maxwell? Como serão os diagramas de Feynman oriundos da expansão de Wick? Que correções irão aparecer no cálculo do *linking number*, em decorrência da perturbação?

As respostas dessas perguntas são o objetivo da presente dissertação de Doutorado.

Esta tese está organizada do seguinte modo:

No capítulo 1, começamos com um histórico sobre a introdução e o desenvolvimento do conceito do *loop* de Wilson em teoria de campos. Na primeira seção, apresentamos o *loop* de Wilson clássico e as suas propriedades, destacando a invariância de gauge. Depois, fazemos uma grande seção, onde discutimos a aplicação do *loop* de Wilson como parâmetro de ordem para o confinamento, originalmente no contexto da QCD, e depois em diversas outras teorias, dentre as quais, o modelo de Maxwell, o modelo de Yang-Mills e o modelo de Maxwell-Chern-Simons. Na última seção, definimos objetos matemáticos denominados invariantes topológicos, exibimos algumas de suas características e relacionamos o cálculo desses invariantes topológicos com a teoria de Chern-Simons, através do valor esperado no vácuo de variáveis semelhantes ao *loop* de Wilson.

No capítulo 2, comentamos as aplicações da teoria de Chern-Simons em diversas áreas da física, notadamente em fenômenos de matéria condensada como o efeito Hall, a supercondutividade e a superfluidez. Na primeira seção, discutimos em detalhes a teoria de Chern-Simons, acoplada ao termo de Maxwell, mostrando o surgimento de excitações com massa topológica. No caso não-abeliano, demonstramos a quantização topológica da massa como consequência da invariância de gauge. Na segunda seção, efetuamos os cálculos de $\chi(C_1, C_2)$ na teoria de Chern-Simons pura para duas configurações geométricas simples e constatamos o seu caráter topológico. Depois reproduzimos os mesmos cálculos, usando porém, a ação de Maxwell-Chern-Simons e mostramos claramente como a introdução do termo de Maxwell altera os resultados do Chern-Simons puro.

No capítulo 3, fazemos um breve comentário sobre os tipos de perturbação que podem ser adicionados à teoria de Chern-Simons. Na única seção, que constitui o principal resultado da tese, calculamos o *linking number* para ação de Chern-Simons perturbada por termos não topológicos, que dependem da curvatura. Primeiramente, efetuamos

as contrações elementares da teoria e depois aplicamos o teorema de Wick, obtendo uma expansão diagramática. Encontramos todos os diagramas topologicamente distintos até 4-*loops* e efetuamos as contas das correspondentes integrais de Feynman. Ao final, provamos que as correções quânticas são nulas e portanto, não afetam o *linking number*.

Capítulo 1

O *Loop* de Wilson e suas Aplicações

Em 1974, K. Wilson publicou um trabalho [14] onde apresentava uma nova variável que fornecia um critério para o confinamento, no contexto da QCD.

Segundo Wilson, o potencial de interação entre dois quarks estáticos, podia ser obtido através de um fator de fase que discernia entre duas fases distintas da teoria: uma confinante e outra não-confinante. Este parâmetro ficou conhecido como *loop de Wilson quântico*.

Entretanto, fatores de fase semelhantes ao apresentado por Wilson, já haviam aparecido em trabalhos anteriores.

Em 1962, Mandelstam [33] demonstrou que em uma teoria Lagrangeana, como a do campo escalar complexo, o mecanismo de restauração da invariância de gauge através da introdução da derivada covariante, era equivalente a se fazer uma transformação nos campos da forma:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi(x, \Gamma) = \phi(x) \exp\left(\int_{-\infty}^x A_\mu dx^\mu\right), \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi^*(x, \Gamma) = \phi^*(x) \exp\left(\int_{-\infty}^x A_\mu dx^\mu\right),\end{aligned}$$

onde a integração é feita por um caminho aberto Γ , mantendo-se o ponto x fixo.

O campo transformado depende agora da posição e do caminho Γ e é invariante frente a transformações de gauge usuais.

Em um trabalho posterior, Mandelstam [34] generalizou as suas idéias para o caso não-abeliano procurando estabelecer uma forma para as equações de movimento.

No final dos anos 50, Bohm e Aharonov [35] mostraram o efeito que hoje leva o nome deles. O efeito Bohm-Aharonov foi confirmado experimentalmente por Chambers [36], através de um aparato idêntico ao da experiência das franjas de Young, onde colocou-se um dispositivo semelhante a um solenóide.

O solenóide é colocado entre as fendas, de modo que ele fique em uma região no qual o elétron não penetra. O tensor $F_{\mu\nu}$ é nulo em toda região fora do solenóide. Contudo, o campo A_μ é um gauge puro e portanto não nulo nesta região.

Como a função de onda do elétron depende do potencial vetor A_μ , ela sofre uma mudança na sua fase, dada pela integral de contorno

$$\Delta\alpha = \int_C A_\mu dx^\mu,$$

onde C é uma curva fechada formada por dois possíveis caminhos do elétron.

No mesmo ano em que Wilson apresentou o seu trabalho, Yang [37] desenvolveu o formalismo integral dos campos de gauge, no qual o operador

$$\mathcal{W}(C) = Tr \left\{ P \left[\exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right) \right] \right\}, \quad (1.1)$$

desempenhava papel fundamental. No ano seguinte, Wu e Yang [38] estenderam o seu formalismo para o caso não-abeliano e apontaram que o fator de fase (1.1) já era conhecido pelos matemáticos pelo nome de operador de transporte paralelo.

Durante a década de 70, o *loop* de Wilson foi bastante estudado, porque como ele era por si só invariante de gauge, acreditava-se que ele pudesse tornar-se a variável dinâmica das teorias não-abelianas, ao invés do próprio campo de gauge A_μ . Além disso, o *loop* de Wilson proporcionava um parâmetro natural para a determinação do confinamento.

Em 1978, Gervais e Neveu [15], Nambu [16], Polyakov [17] e Virasoro [18], seguindo a mesma linha dos trabalhos de Mandelstam [33][34], analisaram o comportamento do operador $\mathcal{W}(C)$ sob variações no contorno fechado C , isto é, consideraram as derivadas

funcionais de $\mathcal{W}(C)$ com relação a curva C para uma dado campo A_μ fixo e obtiveram a forma geral das equações de movimento para o *loop* de Wilson.

Em 1979, Migdal e Makeenko [19] propuseram a formulação das teorias de gauge no espaço de contornos. Neste trabalho, eles substituíram as transformações de gauge, termo de fixação de gauge e ghosts por funcionais escalares invariantes de gauge $\mathcal{W}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ onde C 's são contornos contínuos e fechados e expressaram as equações de movimento de Yang-Mills em termos desses funcionais.

Infelizmente, as equações de Migdal-Makeenko mostraram-se singulares, o que, de certa forma, arrefeceu o ânimo, em relação ao *loop* de Wilson.

Curiosamente, no final da década de 80, o *loop* de Wilson apareceria como um elo de ligação entre a topologia e a teoria de campos. De fato, nos trabalhos de Witten [2], foi executado o cálculo de várias quantidades conhecidas pelos matemáticos como invariantes topológicos, utilizando, como ferramenta básica, o *loop* de Wilson para a ação de Chern-Simons.

Assim, abriu-se as portas de uma promissora área de pesquisa: as teorias topológicas.

Na primeira seção deste capítulo, daremos a definição da versão clássica do *loop* de Wilson e deduziremos as suas propriedades, como, por exemplo, a invariância de gauge. Na segunda seção, estabeleceremos a conexão entre o *loop* de Wilson quântico e o confinamento. A seguir, discutiremos em subseções separadas, um critério de confinamento e as suas condições, para diversos modelos físicos, através do *loop* de Wilson. Na última seção, iremos fazer uma introdução aos objetos ditos invariantes topológicos e exibiremos a sua relação com a teoria de Chern-Simons.

1.1 O *Loop* de Wilson Clássico e suas Propriedades

Considere uma variedade, por exemplo o espaço-tempo quadridimensional, onde atua um grupo de gauge com geradores T^a ($a = 1, \dots, n$). Defini-se o *loop* de Wilson clássico, como o fator de fase $\mathcal{W}(C)$ obtido da exponenciação do elemento do grupo, integrado

no caminho fechado, suave e simples C :

$$\mathcal{W}(C) \equiv \text{Tr} \left\{ P \left[\exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right) \right] \right\}, \quad (1.2)$$

onde Tr é o traço, P representa o *path ordering*, isto é, o ordenamento ao longo da curva e $A_\mu = A_\mu^a T^a$.

Como o *loop* de Wilson foi definido no contexto da QCD, a expressão apresentada acima já é a sua versão não-abeliana.

A finalidade do traço e do *path ordering* é assegurar a invariância de gauge do *loop* de Wilson não-abeliano. No caso abeliano, eles são dispensáveis e o *loop* de Wilson é dado por:

$$\mathcal{W}(C) \equiv \exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right). \quad (1.3)$$

De fato, a transformação de gauge abeliana é:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.4)$$

Portanto, colocando (1.4) em (1.3),

$$\mathcal{W}(C) \rightarrow \mathcal{W}(C) \exp \left(\int_C \partial_\mu \alpha(x) dx^\mu \right).$$

Como caminho C é fechado, o argumento da exponencial na equação acima obviamente se cancela, acarretando a simetria de gauge para o *loop* de Wilson abeliano.

No caso não-abeliano, afim de compreender como se estabelece o *path ordering*, precisamos recordar o ordenamento temporal. A fórmula de Dyson para a exponencial de um operador bosônico é:

$$T \left[\exp \left(-i \int_{t_a}^{t_b} A(t) dt \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_a}^{t_b} dt_1 \int_{t_a}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_a}^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n),$$

onde subdividimos o eixo do tempo em N pedaços iguais, tal que:

$$\begin{aligned} t_n &= t_a + n\Delta t, \\ \Delta t &= \frac{t_b - t_a}{N}, \\ n &= 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

e tomamos o limite quando n tende a infinito.

Para obter o *path ordering* efetuamos o procedimento análogo. Partimos de uma curva suave, simples e inicialmente aberta Γ , parametrizada por:

$$\begin{aligned} s &= [0, 1], \\ x^\mu &= x^\mu(s), \\ x^\mu(0) &= a, \\ x^\mu(1) &= b. \end{aligned}$$

Agora, a expressão (1.2) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Gamma) &\equiv P \left[\exp \left(\int_{\Gamma} A_\mu dx^\mu \right) \right] = P \left[\exp \left\{ \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds}(s) A_\mu[x(s)] \right\} \right] \\ &= P \left[\exp \left\{ \int_0^1 ds A(s) \right\} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n A(s_1) A(s_2) \dots A(s_n), \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde

$$A(s) = \frac{dx^\mu}{ds}(s) A_\mu[x(s)].$$

Repare que $\mathcal{W}(\Gamma)$ possui a propriedade associativa:

$$\mathcal{W}(\Gamma_{abc}) = \mathcal{W}(\Gamma_{ab}) \mathcal{W}(\Gamma_{bc}), \tag{1.6}$$

onde os caminhos ab e bc são segmentos de abc .

Além disso, para um caminho infinitesimal de a até $a + dx$ o fator de fase se aproxima da identidade do grupo de gauge:

$$\mathcal{W}(\Gamma_{a+dx}) = I + A_\mu(x) dx^\mu. \quad (1.7)$$

Vamos analisar agora o comportamento de $\mathcal{W}(\Gamma)$, sob uma transformação de gauge não-abeliana, dada por:

$$A_\mu(x) \rightarrow U^{-1}(x) A_\mu(x) U(x) + U^{-1}(x) \partial_\mu U^{-1}(x), \quad (1.8)$$

onde

$$U(x) = \exp[i\theta^a(x) T^a].$$

Levando-se em conta as relações (1.6) e (1.7), a expressão $\mathcal{W}(\Gamma)$ (1.5) pode ser escrita como:

$$\mathcal{W}(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N+1} \left[1 + A^\mu(x_{n-1}) \Delta x_\mu^n \right], \quad (1.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta x_\mu^n &= x_\mu^n - x_\mu^{n-1}, \\ x_\mu^0 &= a, \\ x_\mu^{N+1} &= b. \end{aligned}$$

Substituindo (1.8) em (1.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Gamma) &\rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N+1} \left[1 + U^{-1}(x_{n-1}) A^\mu(x_{n-1}) U(x_{n-1}) \Delta x_\mu^n + \right. \\ &\quad \left. U^{-1}(x_{n-1}) \partial_{x_{n-1}}^\mu U(x_{n-1}) \Delta x_\mu^n \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + U^{-1}(a) A^\mu(a) U(a) (x^1 - a)_\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. U^{-1}(a) \partial_a^\mu U(a) (x^1 - a)_\mu \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[1 + U^{-1}(x_1) A^\mu(x_1) U(x_1) (x^2 - x^1)_\mu + \right. \\
& \left. U^{-1}(x_1) \partial_{x_1}^\mu U(x_1) (x^2 - x^1)_\mu \right] \times \dots \\
& \times \dots \left[1 + U^{-1}(x_N) A^\mu(x_N) U(x_N) (b - x^N)_\mu + \right. \\
& \left. U^{-1}(x_N) \partial_{x_N}^\mu U(x_N) (b - x^N)_\mu \right] U^{-1}(b) U(b) \Big\},
\end{aligned}$$

onde foi introduzido o termo

$$U^{-1}(b) U(b) = 1,$$

ao final da expressão.

Rearranjando os termos da expressão acima, conseguimos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\Gamma) \rightarrow & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ U^{-1}(a) \left[1 + A^\mu(a) (x^1 - a)_\mu + \right. \right. \\
& \left. \left. (\partial_a^\mu U(a)) U^{-1}(a) (x^1 - a)_\mu \right] U(a) \times \right. \\
& \times U^{-1}(x_1) \left[1 + A^\mu(x_1) (x^2 - x^1)_\mu + \right. \\
& \left. (\partial_{x_1}^\mu U(x_1)) U^{-1}(x_1) (x^2 - x^1)_\mu \right] U(x_1) \times \dots \\
& \times \dots U^{-1}(x_{N-1}) \left[1 + A^\mu(x_{N-1}) (x^N - x^{N-1})_\mu + \right. \\
& \left. (\partial_{x_{N-1}}^\mu U(x_{N-1})) U^{-1}(x_{N-1}) (x^N - x^{N-1})_\mu \right] U(x_{N-1}) \times \\
& \times U^{-1}(x_N) \left[1 + A^\mu(x_N) (b - x^N)_\mu + \right. \\
& \left. (\partial_{x_N}^\mu U(x_N)) U^{-1}(x_N) (b - x^N)_\mu \right] U(x_N) U^{-1}(b) U(b) \Big\}. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
U(a) U^{-1}(x_1) &= U(a) U^{-1}(a + \Delta x_\mu^1) \\
&= U(a) \left[U^{-1}(a) + (\partial^\mu U^{-1}(a)) \Delta x_\mu^1 \right] \\
&= 1 + U(a) (\partial^\mu U^{-1}(a)) \Delta x_\mu^1 \quad (1.11)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} UU^{-1} &= 1, \\ U(\partial^\mu U^{-1}) &= -(\partial^\mu U)U^{-1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Assim, substituindo (1.12) em (1.11),

$$U(a)U^{-1}(x_1) = 1 - (\partial_a^\mu U)U^{-1}(a)\Delta x_\mu^1. \tag{1.13}$$

A relação (1.13), pode ser estendida para qualquer x_N e x_{N-1} .

Finalmente, utilizando (1.13) em (1.10), obtemos em primeira ordem:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Gamma) \rightarrow & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ U^{-1}(a) \left[1 + A^\mu(a)(x^1 - a)_\mu \right] \right. \\ & \times \left[1 + A^\mu(x_1)(x^2 - x^1)_\mu \right] \times \dots \\ & \times \dots \left[1 + A^\mu(x_{N-1})(x^N - x^{N-1})_\mu \right] \times \dots \\ & \left. \dots \times \left[1 + A^\mu(x_N)(b - x^N)_\mu \right] U(b) \right\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}(\Gamma) \rightarrow U^{-1}(a)\mathcal{W}(\Gamma)U(b).$$

Se a curva for aberta, $\mathcal{W}(\Gamma)$ não é invariante de gauge. Porém, se a curva for fechada, então:

$$\mathcal{W}(C) \rightarrow U^{-1}(a)\mathcal{W}(\Gamma)U(a).$$

Tomando-se o traço da expressão acima, o *loop* de Wilson obviamente torna-se invariante de gauge.

1.2 O *Loop* de Wilson Quântico e o Confinamento

O *loop* de Wilson quântico corresponde ao valor esperado no vácuo do *loop* de Wilson clássico. Como já comentamos, o *loop* de Wilson quântico fornece um critério para o

confinamento dos quarks na QCD.

Contudo, este procedimento pode ser generalizado para outras teorias e assim determinar que tipos de modelos físicos apresentarão confinamento e em que circunstâncias ele ocorrerá.

Fisicamente, o confinamento pode ser caracterizado pelo comportamento do potencial estático de interação entre duas cargas. Portanto, se este potencial aumenta com a separação das cargas, o sistema é confinado. Por outro lado, se o potencial diminui com a separação das cargas, o sistema encontra-se na fase não-confinante.

A idéia de Wilson foi expressar o potencial estático de interação das cargas através de um funcional, que depois, ficou conhecido como *loop* de Wilson. Atualmente, o *loop* de Wilson é o parâmetro de ordem mais comum das teorias de gauge na rede.

Apesar disso, o uso do *loop* de Wilson como critério para o confinamento possui limitações: os campos de matéria não podem estar presentes, pois neste caso, pares dinâmicos de cargas seriam criados quando tentássemos separar as cargas, impedindo a associação do *loop* de Wilson ao potencial estático.

A seguir, iremos expor diversos modelos, onde aplica-se o *loop* de Wilson para determinar se a teoria apresenta fases confinantes.

1.2.1 Confinamento na QCD

O cálculo do *loop* na QCD, feito por Wilson, foi realizado na rede. A sua reprodução não é o objetivo desta seção. Aqui, nos resumiremos à exposição das conclusões de Wilson acerca do confinamento na QCD.

Em seu trabalho original, Wilson [14] calculou a amplitude de probabilidade entre os estados de vácuo inicial e final, para a criação de um par quark-antiquark estático, separados a uma distância X e no tempo $T = 0$ e a sua destruição no tempo $T \rightarrow \infty$.

As linhas de universo do par quark-antiquark consistem no retângulo abaixo:

No caso estático, esta amplitude coincide com o potencial de interação. Conseqüentemente, o potencial pode ser expresso em termos do *loop* de Wilson, através da seguinte

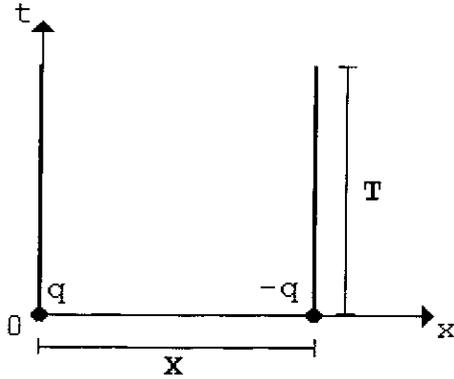


Figura 1-1: As linhas de universo do par quark-antiquark.

relação [14]:

$$V(X) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle \mathcal{W}(C) \rangle, \quad (1.14)$$

onde

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \left\langle \text{Tr} \left\{ P \left[\exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right) \right] \right\} \right\rangle$$

e C é a curva fechada apresentada na Fig.1-1.

Da equação (1.14), vemos que:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp[-TV(X)].$$

Então, se o potencial for confinante, do tipo:

$$V(X) = cX,$$

onde c é uma constante e X é a separação espacial das cargas, o *loop* de Wilson vai fornecer algo como:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp[-cTX] = \exp[-kA],$$

onde A é a área do contorno e k é uma constante. Este resultado é conhecido como lei

da área do *loop* de Wilson.

Por outro lado, se o potencial for não-confinante, do tipo:

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V(X) = c,$$

onde c é uma constante, o *loop* de Wilson dará:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp[-kP],$$

onde P é o perímetro e k é uma constante.

1.2.2 Confinamento no Modelo de Maxwell

É um fato conhecido que o modelo de Maxwell em $(3+1)$ -dimensões tem um potencial estático de interação do tipo Coulombiano e portanto, não há confinamento. Contudo, em outras dimensões, isto não é verdade.

Consideremos, inicialmente, o modelo de Maxwell em um espaço-temporal Euclideano de quatro dimensões:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right),$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Afim de calcularmos o *loop* de Wilson, devemos acrescentar à ação, o termo de fixação de gauge:

$$S_{GF} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right].$$

Escolhendo o gauge de Feynman ($\alpha = 1$), o valor esperado do *loop* de Wilson abeliano (1.3) será dado por:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \int DA \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \square A_\mu \right) \exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right). \quad (1.15)$$

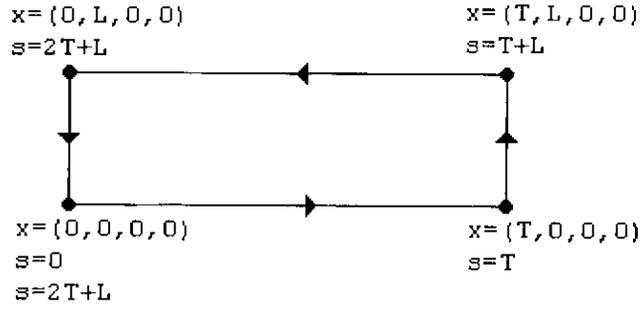


Figura 1-2: Contorno retangular parametrizado.

Definindo uma corrente

$$j_\mu = iQ \int_C ds \frac{dy_\mu(s)}{ds} \delta^4[x - y(s)],$$

onde Q é a carga e substituindo em (1.15), obtemos:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \int dA \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \square A_\mu + \int d^4x A^\mu j_\mu \right). \quad (1.16)$$

Agora, redefinimos

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + iQ \int_C ds \frac{dy_\nu(s)}{ds} D_{\mu\nu}[x - y(s)], \quad (1.17)$$

onde

$$D_{\mu\nu}(x - y) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta_{\mu\nu}}{(x - y)^2} \quad (1.18)$$

é o propagador do fóton no gauge de Feynman e C é uma curva retangular parametrizada conforme a Fig.1-2.

Introduzindo (1.17) em (1.16), temos:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \int dA \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \square A_\mu - iQ \int_C ds \frac{dx_\mu(s)}{ds} A^\mu + iQ \int_C ds \frac{dx_\mu(s)}{ds} A^\mu \right\}$$

$$-\frac{Q^2}{2} \int_C ds' \frac{dy_\mu(s')}{ds'} ds \frac{dx_\nu(s)}{ds} D_{\mu\nu} [x(s) - x(s')].$$

Realizando a integração funcional, encontramos:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp \left\{ -\frac{Q^2}{2} \int_C ds_\nu \int_C ds'_\mu D_{\mu\nu} [x(s) - x(s')] \right\}. \quad (1.19)$$

Substituindo (1.18) em (1.19), chegamos a:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp \left\{ -\frac{Q^2}{8\pi^2} \int_C ds_\mu \int_C ds'_\mu \frac{1}{[x(s) - x(s')]^2} \right\}.$$

Para efetuar a integral que aparece no argumento da exponencial, tomamos apenas os segmentos do retângulo com sentidos opostos na Fig.1-2. Os segmentos de mesmo sentido fornecem os termos de auto-interação, que não afetam o potencial.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp \left\{ -\frac{Q^2}{4\pi^2} \left[\int_0^T ds \int_{T+X}^{2T+X} ds' \frac{1}{X^2 + (2T + X - s' - s)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \int_T^{T+X} ds \int_{2T+X}^{2T+2X} ds' \frac{1}{T^2 + (3T + 2X - s' - s)^2} \right] \right\}. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Para $T \rightarrow \infty$ a segunda contribuição de (1.20) se anula. Colocamos $s' \rightarrow 2T + X - s'$, no primeiro termo de (1.20).

Então,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}(C) \rangle &= \exp \left\{ -\frac{Q^2}{4\pi^2} \left[\int_0^T ds \int_0^T ds' \frac{1}{X^2 + (s - s')^2} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{Q^2}{4\pi^2} \left[\int_0^T ds \int_{-s}^{T-s} dy \frac{1}{X^2 + y^2} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{Q^2}{4\pi^2} \int_0^T ds \left[\arctan \left(\frac{T-s}{X} \right) + \arctan \left(\frac{s}{X} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{Q^2}{2\pi^2} \frac{1}{X} \left[\int_0^T ds \arctan \left(\frac{s}{X} \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{Q^2}{2\pi^2} \left[\frac{T}{X} \arctan \left(\frac{T}{X} \right) + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{T^2 + X^2}{X^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, o potencial entre duas cargas estáticas é:

$$\begin{aligned}
 V(X) &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left[\exp \left\{ \frac{Q^2}{2\pi^2} \left[\frac{T}{X} \arctan \left(\frac{T}{X} \right) - \frac{1}{2\pi^2} \ln \left(\frac{T^2 + X^2}{X^2} \right) \right] \right\} \right] \\
 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{Q^2}{2\pi^2} \frac{T}{X} \frac{\pi}{2} \\
 &= -\frac{Q^2}{4\pi} \frac{1}{X},
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

que é exatamente o potencial de Coulomb do eletromagnetismo.

Naturalmente, também gostaríamos de conhecer o potencial em dimensões inferiores a quatro. Em [39], Abud, Bollini e Giambiagi desenvolveram um interessante procedimento para o cálculo do *loop* de Wilson em uma dimensão arbitrária. Inicialmente, as contas foram feitas utilizando um círculo como contorno. Após alguns passos, realiza-se uma deformação de modo a transformar o contorno circular em uma elipse e identifica-se os semi-eixos da elipse com os parâmetros X e T , ilustrados na Fig.1-1. Como o potencial é obtido no limite quando T tende a infinito, o método é equivalente ao cálculo para o contorno retangular.

A expressão geral do potencial estático em uma dimensão arbitrária n , que eles chegaram foi [39]:

$$V(X) = Q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right) \Gamma(n-1)}{2^n \pi^{\frac{(n-3)}{2}} \Gamma\left(\frac{6-n}{2}\right)} X^{3-n}, \tag{1.22}$$

onde Γ é a função gama e X é a distância entre as cargas.

Para $n = 2$,

$$V(X) = Q^2 \frac{\pi X}{4}.$$

Confirmamos portanto, o fato conhecido que o eletromagnetismo confina em duas dimensões.

Quando $n = 3$, a equação (1.22) parece estar em desacordo com os resultados estabelecidos, pois a primeira vista o potencial em três dimensões não dependeria da distância X e, além disso, seria singular pela presença do termo $\Gamma(0)$.

Segundo Polyakov [40], esta divergência pode ser eliminada com uma renormalização

do *loop* de Wilson, obtida através da introdução de um fator exponencial, dado por:

$$\langle \mathcal{W}_R(C) \rangle = \exp\left(-c \frac{L}{a}\right) \langle \mathcal{W}(C) \rangle$$

onde L é o comprimento do *loop*, a é o *cut-off* que parametriza a divergência e c é uma constante.

Este fator é interpretado como a renormalização da massa da partícula movendo-se ao longo da trajetória C .

Levando-se em conta o fator de renormalização, obtém-se um potencial renormalizado [32]:

$$V_R(X) = Q^2 \frac{\ln X}{2\sqrt{\pi}} + K,$$

onde K é uma constante.

Vemos que, o potencial eletromagnético em três dimensões tem um comportamento logarítmico, que também é considerado confinante.

Finalmente, para $n = 4$,

$$V(X) = -\frac{Q^2}{4X}.$$

O resultado acima é, a menos de uma constante, igual a lei de Coulomb obtida com o cálculo do potencial (1.21), para o contorno retangular.

1.2.3 Confinamento no Modelo de Yang-Mills

A ação de Yang-Mills em quatro dimensões é:

$$S = \int DA \exp \left[\int d^4x \left(-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right) \right],$$

onde g é a constante de acoplamento.

Então, o *loop* de Wilson não-abeliano (1.2) torna-se:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \int DADcD\bar{c} \exp \left[-\frac{1}{4g^2} \int d^4x \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right)^2 - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right. \\ \left. - \partial_\mu \bar{c}^a \left(\partial_\mu c^a - f^{abc} A_\mu^b c^c \right) \right] Tr \left\{ P \left[\exp \left(\int_C A_\mu dx^\mu \right) \right] \right\},$$

já com o termo de fixação de gauge e o termo de *ghosts* c e \bar{c} .

Ao contrário do modelo de Maxwell, a exponencial no *loop* de Wilson para a ação de Yang-Mills, não é Gaussiana e somente pode ser calculada perturbativamente. Contudo, esta expansão perturbativa dá origem a gráficos com divergências logarítmicas em ordem superior $O(g^4)$, que afetam a constante de acoplamento g quando são renormalizados. Conseqüentemente, estes gráficos precisam ser levados em conta ao se obter a expressão para o *loop* de Wilson.

Sendo assim, o *loop* de Wilson toma uma forma do tipo:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = N + g^2 \mathcal{W}_1 + g^4 \mathcal{W}_2 + \dots$$

onde N é uma constante de normalização.

A realização do cálculo do *loop* de Wilson até ordem g^4 , foi feito em detalhes por diversos autores [40][41][42][43], que obtiveram ao final, uma expressão análoga ao modelo de Maxwell:

$$\langle \mathcal{W}(C) \rangle = \exp \left\{ g_R^2 \left[\int_C dx^\mu \int_C dy^\nu D_{\mu\nu}(x-y) \right] \right\},$$

onde $D_{\mu\nu}(x-y)$ é o propagador do campo de gauge no espaço Euclideo. No caso particular do grupo $SU(2)$, a constante de acoplamento renormalizada g_R é dada por:

$$g_R^2 = \frac{g^2}{1 - \beta_0 \ln X},$$

onde

$$\beta_0 = \frac{11}{24\pi^2}$$

tal que

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 + \dots$$

é a função beta de Callan-Symanzik para o grupo $SU(2)$ [44][45].

Logo, a expressão obtida para o potencial estático é:

$$V(X) = -\frac{g^2}{4X} \frac{1}{1 - \beta_0 \ln X}.$$

Repare que agora, quando $X \rightarrow \infty$, o potencial tende a zero mais rapidamente do que a lei de Coulomb e portanto não há confinamento. Este efeito está relacionado à liberdade assintótica das teorias de gauge não-abelianas [46][47].

Na verdade, este resultado não é surpreendente pois estamos trabalhando no regime perturbativo da teoria, isto é, para valores pequenos da constante de acoplamento g e portanto é natural que não apareça o confinamento.

Entretanto, no regime de *strong coupling*, onde os cálculos apenas podem ser feitos na rede, Wilson [14] mostrou que a teoria de Yang-Mills tem uma fase confinante. Ao calcular o *loop* de Wilson para esta teoria, verificou-se que ela apresenta o comportamento das áreas, que já foi discutido na primeira subseção, para a QCD.

1.2.4 Confinamento no Modelo de Maxwell-Chern-Simons

O modelo de Maxwell-Chern-Simons [30] consiste em acoplar ao termo de Maxwell, o chamado termo de Chern-Simons [13], que é um termo topológico, isto é, que não depende da métrica. Por isso, também é chamada de teoria de Maxwell com massa topológica.

Nesta seção, nos restringiremos ao cálculo do *loop* de Wilson deste modelo, para o caso abeliano. O termo de Chern-Simons e as suas características serão apresentados em mais detalhes no capítulo 2.

A ação de Maxwell-Chern-Simons é definida em três dimensões, sendo expressa como [30]:

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4m} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \right), \quad (1.23)$$

onde m é a massa topológica e $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ o tensor de Levi-Civita.

Observa-se que a teoria de Chern-Simons pura pode ser recuperada como o limite a massa infinita $m \rightarrow \infty$ da teoria com massa topológica (1.23). Esta propriedade também é válida a nível quântico para a ação efetiva 1PI [48] e para o valor esperado no vácuo do *loop* de Wilson [49].

O resultado para o potencial estático nesta teoria é [31]:

$$V(X) = -\frac{1}{2\pi} K_0(mX),$$

onde m é a massa topológica e K_0 é a função de Bessel modificada de segundo tipo.

A função de Bessel modificada tem um comportamento exponencial a longas distâncias:

$$K_0(mX) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2mX}} \exp(-mX)$$

Este comportamento sinaliza o chamado *screening* da carga. A carga fica blindada pela polarização do vácuo e tem o seu potencial de interação diminuído.

Como o potencial estático na teoria de Maxwell em três dimensões tem um comportamento logarítmico, então se compararmos com o potencial estático para a teoria de Maxwell-Chern-Simons, que se comporta como uma exponencial decrescente a longas distâncias, veremos claramente que a adição do termo de Chern-Simons tem o efeito de deconfinar a teoria.

1.3 Invariantes Topológicos

A topologia é o ramo da matemática que estuda as características do espaço em larga escala. Em outras palavras, o que importa para a topologia é analisar uma variedade como um todo, sem se preocupar com as propriedades locais. Do ponto de vista topológico, uma esfera e um torus são objetos distintos pois um não pode ser deformado no outro, isto é, não pode-se passar de um para o outro através de transformações contínuas. Entretanto, o mesmo torus e uma xícara, por exemplo, são topologicamente idênticos.

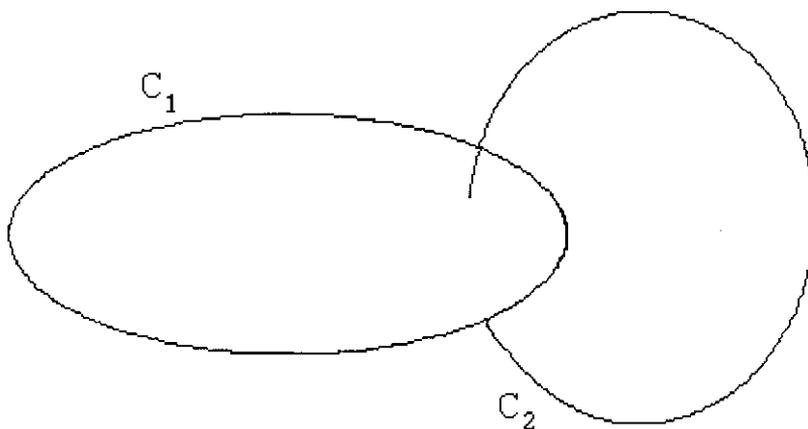


Figura 1-3: O Hopf Link.

Os invariantes topológicos são características típicas, cujos valores permanecem inalterados se submetemos a variedade à deformações contínuas. Os invariantes topológicos assumem outros valores apenas se for alterada a topologia da variedade.

Os invariantes topológicos têm sido aplicados nos últimos anos, nas mais variadas áreas: em química, no estudo de entrelaçamento de cadeia de polímeros [3][4][5]; em biologia, nos trabalhos sobre a estrutura helicoidal da molécula de DNA [6][7][8] e em cosmologia, na explicação de defeitos topológicos tipo corda em transições de fase no universo primitivo [9].

Em matéria condensada, foi sugerido que a condutividade Hall fracionária seria um invariante topológico expresso em termos de *windings numbers* [10].

Uns dos invariantes topológicos mais conhecidos são os *links*. Um *link* é uma subvariedade do \mathbb{R}^3 que é difeomórfica à união disjunta de círculos. Os círculos são chamados de componentes do *link*. O mais popular *link*, e que será objeto de estudo da presente tese, é o chamado Hopf *link* [11], representado por duas curvas suaves e fechadas que se cruzam, mas que não possuem intersecção (Fig.1-3).

Associado a cada *link*, defini-se uma magnitude denominada *linking number* χ , para as curvas fechadas C_1 e C_2 . O *linking number* representa o número de vezes que uma

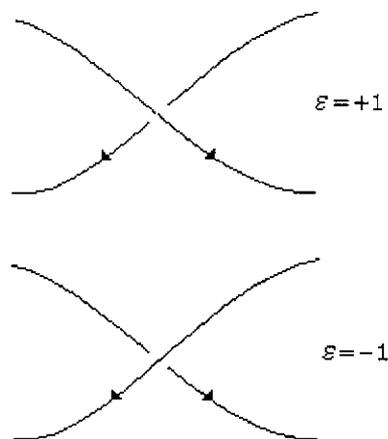


Figura 1-4: Cruzamentos orientados de links.

curva se enrola na outra e é claramente um invariante topológico [50][51][12].

Para definirmos mais precisamente o *linking number*, é preciso antes do conceito de cruzamento de dois *links* orientados. Um cruzamento entre dois *links* orientados pode ser *right-handed* ou *left-handed* (Fig.1-4). Atribuí-se um sinal $\varepsilon = +1$, caso o cruzamento seja *right-handed* e um sinal oposto $\varepsilon = -1$, se for *left-handed*.

O *linking number*, portanto, pode ser caracterizado através da projeção sobre um plano, do cruzamento entre as duas curvas orientadas e é formalmente definido como:

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in C_1 \cap C_2} \varepsilon(p), \quad (1.24)$$

onde $C_1 \cap C_2$ denota o conjunto de cruzamentos entre as curvas.

Como consequência de sua definição, o *linking number* assume valores sempre no conjunto dos inteiros Z .

Tecnicamente, o *linking number* é metade da soma de todos os índices de intersecção entre as curvas. Variedades com diferentes *linking number* não são equivalentes (Fig.1-5).

A relação entre o *linking number* e a física foi estabelecida por Gauss, que descobriu durante as suas investigações sobre eletromagnetismo uma representação integral para o

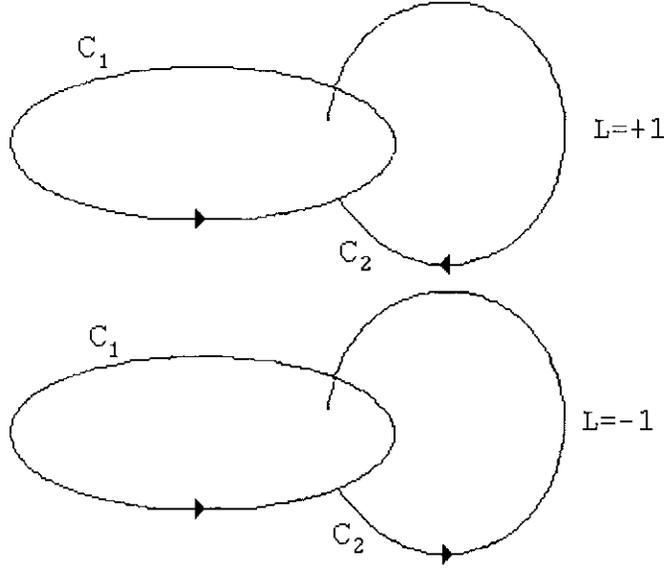


Figura 1-5: O linking number de curvas orientadas.

linking number, dada por:

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} (x^\rho - y^\rho)}{|x - y|^3}, \quad (1.25)$$

onde as curvas C_1 e C_2 não se interceptam. No caso das curvas coincidirem, teremos então o chamado *writhing number* $w(C)$, que não é mais um invariante topológico, pois depende da geometria da curva [12][50][51].

Para demonstrar a equivalência entre as representações (1.24) e (1.25), reescrevemos esta última expressão, como:

$$\begin{aligned} \chi(C_1, C_2) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \omega_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

onde

$$\omega_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \left(\frac{1}{|x - y|} \right).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_S d\sigma^{\mu\nu} (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) = \int_C dx^\mu \omega_\mu. \quad (1.27)$$

Colocando (1.27) em (1.26), temos:

$$\begin{aligned} \chi(C_1, C_2) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \int_{S_2} d\sigma^{\nu\gamma} (\partial_\nu \omega_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \omega_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \int_{S_2} d\sigma^{\nu\gamma} \left[\partial_\nu \varepsilon_{\mu\gamma\rho} \partial^\rho \left(\frac{1}{|x-y|} \right) - \partial_\gamma \varepsilon_{\mu\gamma\rho} \partial^\rho \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.28)$$

onde S_2 é qualquer superfície aberta que tenha C_2 por borda.

Mas, sabemos que

$$\partial_\nu \varepsilon_{\mu\gamma\rho} - \partial_\mu \varepsilon_{\gamma\rho\nu} + \partial_\gamma \varepsilon_{\rho\nu\mu} - \partial_\rho \varepsilon_{\nu\mu\gamma} = 0,$$

ou, rearranjando os termos,

$$\partial_\nu \varepsilon_{\mu\gamma\rho} - \partial_\gamma \varepsilon_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \varepsilon_{\gamma\rho\nu} + \partial_\rho \varepsilon_{\nu\mu\gamma}. \quad (1.29)$$

Substituindo (1.29) em (1.28), achamos:

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \int_{S_2} d\sigma^{\nu\gamma} [\varepsilon_{\nu\mu\gamma} \partial_\rho - \varepsilon_{\gamma\rho\nu} \partial_\mu] \partial^\rho \left(\frac{1}{|x-y|} \right).$$

Na expressão acima, o segundo termo entre colchetes é nulo, pois trata-se de uma derivada total sobre uma curva fechada.

Então,

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \int_{S_2} d\sigma^{\nu\gamma} \varepsilon_{\nu\mu\gamma} \partial^2 \left(\frac{1}{|x-y|} \right). \quad (1.30)$$

Porém,

$$\partial^2 \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \partial_\rho \partial^\rho \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = -4\pi \delta^3(x-y).$$

Logo, (1.30) torna-se:

$$\chi(C_1, C_2) = \oint_{C_1} dx^\mu \int_{S_2} d\sigma^{\nu\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\gamma} \delta^3(x - y) = N,$$

onde $N \in \mathbb{Z}$.

Devido a presença da função delta, apenas quando a curva, parametrizada pela variável x , corta a superfície, cujo contorno é parametrizado por y , a integral $\chi(C_1, C_2)$ é diferente de zero e, portanto, fornece o número de voltas N que uma curva faz sobre a outra.

Em 1988, a conexão entre invariantes topológicos e a teoria quântica de campos foi estabelecida, através de um conjunto de artigos publicados por Witten [2]. Neles, Witten estudou de maneira sistemática os *links*, relacionando-os aos valores esperados no vácuo do *loop* de Wilson, para a ação de Chern-Simons. Assim, Witten conseguiu calcular diversos *links* que haviam sido recentemente descobertos pelos matemáticos e os seus trabalhos deram origem a uma série de publicações subsequentes, relacionando teoria quântica de campos e topologia, em três dimensões [1][2].

Afim de compreendermos melhor essas idéias, recordemos que a ação de Chern-Simons pura abeliana é:

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \right).$$

O valor esperado no vácuo para os campos, no gauge de Landau ($\alpha = 0$) é:

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle_{SCS} = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x - y)^\rho}{|x - y|^3}. \quad (1.31)$$

Assim, vemos claramente que (1.31) é o integrando da expressão (1.25).

Logo, se considerarmos agora, o valor esperado no vácuo de duas variáveis como os *loops* de Wilson, mas sem a exponencial, dado por:

$$\chi_{CS} = \left\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu(x) \oint_{C_2} dy^\nu A_\nu(y) \right\rangle_{SCS},$$

teremos exatamente o *linking number*.

Concluindo, mostramos exemplos de grandezas denominadas invariantes topológicos e a sua relação com a teoria de Chern-Simons. Esta conexão é estabelecida através de variáveis semelhantes ao *loop* de Wilson. Estas variáveis diferem do *loop* de Wilson apenas pela ausência da exponencial, pois no caso abeliano, isto não compromete a invariância de gauge das integrais de caminho.

Então, calculamos o valor esperado no vácuo destas variáveis de *loop*, usando o propagador para a teoria de Chern-Simons. Em virtude da forma peculiar deste propagador, podemos via o teorema de Stokes, reduzir o integrando a uma função delta de Dirac. Assim, obtemos um resultado topológico, isto é, que não depende do formato das curvas.

É importante frisar, que os trabalhos de Witten acima citados abriram o caminho para o cálculo de invariantes topológicos conhecidos e também para invariantes topológicos até então desconhecidos pelos matemáticos.

Capítulo 2

Aspectos Gerais das Teorias de Gauge em $(2 + 1) D$ na Presença do Termo de Chern-Simons

O estudo das teorias de gauge em $(2 + 1)$ -dimensões foi inicialmente motivado pela sua relação com o regime a altas temperaturas das teorias de gauge em $(3 + 1)$ -dimensões [52][53]. A expansão diagramática de uma teoria envolvendo campos de matéria e de gauge no limite de altas temperaturas, coincide com uma teoria apenas bosônica, sem férmions, em um espaço Euclideano com uma dimensão menor.

Contudo, o principal interesse nestas teorias é a possibilidade, apenas presente em espaços de dimensão ímpar, de introduzir no Lagrangeano, o termo de Chern-Simons.

Na chamada física planar, modelos em duas dimensões espaciais, o termo de Chern-Simons está relacionado a diversos sistemas não triviais [54].

Em matéria condensada, por exemplo, o termo de Chern-Simons acoplado a campos de matéria é a base para a descrição dos anyons, partículas de estatística intermediária entre bósons e férmions. Neste caso, o efeito do termo de Chern-Simons é ligar uma linha de fluxo magnético às partículas carregadas. Esta propriedade, junto com a transmutação estatística, explica o aparecimento do termo de Chern-Simons nos modelos para efeito Hall quântico fracionário [20][21][22][23].

Também em relação ao efeito Hall fracionário, como já foi comentado no capítulo anterior, existe um trabalho no qual a condutividade Hall seria expressa como um invariante topológico, relacionado ao termo de Chern-Simons [10].

Ainda na física do estado sólido, o termo de Chern-Simons aparece em modelos de supercondutividade [55] e em sistemas que apresentam superfluidez, como no caso do ${}^3\text{He}$ [56].

Uma outra notável aplicação do termo de Chern-Simons surge quando este é acoplado ao termo de Maxwell. Esta teoria é denominada teoria de gauge com massa topológica. De fato, o resultado é um surpreendente novo modo de geração de massa para o campo de gauge, sem a necessidade do mecanismo de Higgs [30]. Além disso, a introdução do termo de Chern-Simons à ação de Maxwell dá origem ao chamado *screening* da carga e ao deconfinamento da teoria em três dimensões [31].

No contexto da bosonização, é um fato bem estabelecido que o cálculo do determinante fermiônico para férmions massivos em três dimensões a temperatura zero, no regime de baixas energias, fornece um série infinita, onde o termo predominante é o termo de Chern-Simons, seguido por potências do tensor $F_{\mu\nu}$ e suas derivadas [24][25][26][27][28][29].

Neste capítulo, começamos com um resumo da teoria de Chern-Simons e suas propriedades. Na seção seguinte, calculamos invariantes topológicos para algumas configurações geométricas, no caso da teoria de Chern-Simons abeliana pura e investigamos que tipo de alterações surgem nos mesmos cálculos, ao introduzirmos o termo de Maxwell na ação de Chern-Simons.

2.1 A Teoria de Chern-Simons e suas Propriedades

O termo de Chern-Simons é dito topológico pois ele não depende da métrica do espaço. O cálculo do respectivo tensor energia e momentum dá zero, indicando que ele não está associado a qualquer excitação.

O termo de Chern-Simons também só aparece em dimensões ímpares, pois em dimensões pares os índices simplesmente não casam. Porém, somente em três dimensões,

o Lagrangeano é quadrático no campo de gauge.

Ressaltamos, contudo, que também existe uma outra classe de modelos topológicos, conhecidos como modelos BF, os quais podem ser definidos em qualquer dimensão e que possuem um termo quadrático na sua ação.

O termo de Chern-Simons pode aparecer tanto na versão abeliana quanto na não-abeliana. Em ambos os casos, por exibir isoladamente soluções triviais, o apresentaremos acoplado com o termo de Maxwell.

2.1.1 Maxwell-Chern-Simons Abeliano

A ação abeliana de Maxwell-Chern-Simons no espaço Euclidiano é:

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \right), \quad (2.1)$$

onde m é a chamada massa topológica.

As equações de movimento são:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = 0.$$

Sob a transformação de gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Omega(x),$$

a ação (2.1) muda por uma derivada total:

$$\delta S = \int d^3x \left[\partial_\alpha \left(\frac{m}{4} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} \Omega \right) \right].$$

Considerando que os campos se anulam no infinito, este termo de superfície pode ser eliminado.

A presença do termo de Chern-Simons dá origem a uma massa topológica ao campo de gauge. A maneira mais direta de verificar isto, é definir o pseudovetor campo dual:

$$\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}.$$

Note que o campo dual é invariante de gauge e transverso, isto é satisfaz $\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0$.

Assim, a equação do movimento em termos do campo dual, é dada por:

$$(\square + m^2) \tilde{F}^\mu = 0. \quad (2.2)$$

Um outro modo de entender a origem da excitação de gauge massiva é calcular o propagador utilizando um termo de fixação de gauge covariante:

$$S_{GF} = \int d^3x \left[-\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\nu)^2 \right].$$

Invertendo a parte quadrática, obtemos o propagador Euclideano, no espaço dos momentos:

$$D_{\mu\nu}(p) = i \left[-m^2 \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2 (p^2 + m^2)} + \frac{m}{p^2 (p^2 + m^2)} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \right] + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2}. \quad (2.3)$$

Claramente identificamos o campo de gauge massivo¹, via pólo em $p^2 = -m^2$.

A simetria discreta de paridade é diferente em três dimensões. Usualmente a transformação de paridade é a reflexão $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ das coordenadas espaciais. Contudo, no plano, tal transformação é equivalente a uma rotação (esta transformação de Lorentz tem $\det(\Omega) = (-1)^2 = 1$ ao invés de $\det(\Omega) = (-1)^3 = -1$).

Então, a transformação imprópria discreta de paridade \mathcal{P} deve ser tomada como uma reflexão apenas em uma das coordenadas espaciais, a qual podemos escolher:

¹Esta relação não corresponde, em absoluto, a uma partícula de massa imaginária. Lembramos que, neste caso, o propagador refere-se ao espaço-tempo Euclideano e que as excitações físicas são definidas apenas no espaço de Minkowski. A passagem do espaço de Minkowski para o espaço Euclideano é feita através da rotação de Wick, que é uma transformação algébrica dada por $x_0 \rightarrow -ix_4$ e $p_0 \rightarrow ip_4$, em um espaço de quatro dimensões.

$$\begin{aligned}
x^0 &\rightarrow x^0, \\
x^1 &\rightarrow -x^1, \\
x^2 &\rightarrow x^2.
\end{aligned}$$

O campo de gauge se transforma da mesma forma acima, acarretando que o termo cinético de Maxwell é invariante sob \mathcal{P} , porém o termo de Chern-Simons muda de sinal:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}A_\rho = \varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \rightarrow -\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho.$$

Como foi mencionado, o cálculo do determinante fermiônico em $(2+1)$ -dimensões a 1 -loop, fornece um termo dominante de massa topológica, o que quebra explicitamente a simetria de paridade. Esta quebra reflete o fato de que o termo de massa para os férmions, presente na ação original, já não é invariante sob paridade.

2.1.2 Maxwell-Chern-Simons Não-Abeliano

A ação não-abeliana de Maxwell-Chern-Simons no espaço Euclideano é:

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{m}{2g^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}A_\rho - \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho \right) \right]. \quad (2.4)$$

onde g é a constante de acoplamento.

O campo de gauge A_μ toma valores em uma representação finito-dimensional de $SU(n)$, dada por:

$$\begin{aligned}
A_\mu &= A_\mu^a T^a, \\
F_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],
\end{aligned}$$

onde T^a são os geradores de $SU(n)$, para $a = 1..dim(SUN(n))$, satisfazendo as relações

de comutação $[T^a, T^b] = f^{abc}T^c$ e a normalização $Tr(T^a T^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab}$.

As equações de movimento são:

$$D_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\varepsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot].$$

Mais uma vez definimos o campo dual:

$$\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho},$$

que satisfaz a identidade de Bianchi:

$$D_\mu \tilde{F}^\mu = 0.$$

O dual de (2.5) é:

$$D_\mu \tilde{F}_\nu - D_\nu \tilde{F}_\mu - mF_{\mu\nu} = 0.$$

Aplicando, na equação acima uma outra derivada covariante, e com a ajuda de (2.5) e da identidade de Ricci

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu},$$

obtemos

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\tilde{F}_\nu = \varepsilon_{\nu\alpha\beta}[\tilde{F}^\alpha, \tilde{F}^\beta],$$

que é o análogo não-abeliano de (2.2).

Sob transformação de gauge finita:

$$A_\mu(x) \rightarrow U^{-1}(x)A_\mu(x)U(x) + U^{-1}(x)\partial_\mu U(x),$$

a ação muda por:

$$\delta S = \frac{m}{g^2} \int d^3x \left\{ \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu \left[A_\alpha (\partial_\nu U) U^{-1} \right] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{m}{3g^2} \int d^3x \left\{ \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \text{Tr} \left[(\partial_\alpha U) U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} \right] \right\} \right\}. \quad (2.6)$$

Consideramos apenas transformações de gauge que tendem a identidade no infinito espaço-temporal:

$$U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} I. \quad (2.7)$$

Esta restrição é feita para evitar divergências em (2.6). O primeiro termo de (2.6) pode ser encarado como uma integral de superfície dependente de A_α e a sua contribuição é nula devido ao campo de gauge tender a zero no infinito, levando-se em conta a identidade (2.7).

O último termo em (2.6) pode também ser convertido em uma integral de superfície através de uma parametrização. No caso particular do grupo $SU(2)$, a parametrização é:

$$U(x) = \exp[i\sigma^a \theta^a(x)]. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) no último termo de (2.6), obtemos:

$$\delta S = \frac{m}{g^2} 8\pi^2 w(U), \quad (2.9)$$

onde

$$w(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \text{Tr} \left[(\partial_\alpha U) U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} (\partial_\nu U) U^{-1} \right] \\ = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{abc} \partial_\alpha \left[\theta^a (\partial_\mu \theta^b) (\partial_\nu \theta^c) \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin(2\theta)}{2\theta} \right) \right].$$

A expressão $w(U)$ é reconhecida como o *winding number* da transformação de gauge [57][58][59]. O *winding number* representa o número de vezes que um mapeamento se

enrola sobre si próprio.

Conseqüentemente, a integral de superfície acima não é zero, mas toma valores inteiros que caracterizam as classes de equivalência homotópicas as quais o grupo de gauge U pertence.

Portanto, concluímos que a ação não é invariante de gauge. Contudo, os observáveis da teoria, onde a ação sempre aparece no argumento da exponencial, precisam ser invariantes de gauge.

Assim, a quantidade que aparece em (2.9) deve ser um múltiplo inteiro de 2π , para que esta variação seja tolerada ao calcularmos os observáveis da teoria.

Em outras palavras, a invariância de gauge acarreta a quantização topológica da razão adimensional entre a massa e o quadrado da constante de acoplamento:

$$\begin{aligned}4\pi \frac{m}{g^2} &= n, \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Matematicamente, isto ocorre devido ao grupo de homotopia dos grupos não-abelianos, para os quais o *winding number* torna-se um invariante topológico.

Por exemplo, no caso específico do grupo $SU(2)$, o *winding number* é um elemento do grupo de homotopia $\Pi_3[SU(2)] = Z$, onde Z é o conjunto dos números inteiros. Esta não-trivialidade do mapeamento leva à quantização topológica dos parâmetros do Lagrangeano.

Por outro lado, para o grupo abeliano $U(1)$, seu grupo de homotopia é trivial, isto é, $\Pi_3[U(1)] = 0$, o que implica no cancelamento do último termo em (2.6) e não existe o mecanismo de quantização topológica.

2.2 Cálculo de Alguns Invariantes Topológicos na Teoria de Chern-Simons Abeliana

Vimos na capítulo 1, que existe uma importante conexão entre os invariantes topológicos tipo *link* com a teoria de Chern-Simons. O objetivo desta seção é verificar explicitamente para alguns tipos particulares de configuração geométrica, o resultado topológico apresentado no capítulo anterior. Então, poderemos compreender completamente que modificações surgem quando, posteriormente, introduzirmos o termo de Maxwell.

As contas aqui reproduzidas, são parte de um trabalho em desenvolvimento [60], que visa o cálculo analítico de variáveis de *link* em teorias de Chern-Simons, na presença do termo de Maxwell.

Em virtude dos cálculos no caso de Maxwell-Chern-Simons ficarem muito complicados, escolhemos duas configurações geométricas bem simples, a saber: uma reta vertical atravessando um círculo e dois círculos entrelaçados.

Antes, contudo, começamos desenvolvendo um procedimento, onde obtemos uma expressão para a integral

$$\chi(C_1, C_2) = \int_{C_1} dx^\mu \int_{C_2} dy^\nu \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle, \quad (2.10)$$

em termos de funções que dependem das curvas. Em seguida calculamos essas funções quando uma ou ambas as curvas são circulares. Depois, em subseções distintas, aplicamos a expressão (2.10), para as duas configurações geométricas acima citadas.

Em cada subseção, efetuamos os cálculos usando primeiramente o propagador de Chern-Simons e depois o propagador de Maxwell-Chern-Simons. Comparando os resultados obtidos, mostramos, em ambas configurações, como a adição do termo de Maxwell destrói o resultado topológico do Chern-Simons puro.

Utilizando a transformada de Fourier do propagador:

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} D_{\mu\nu}(p) \exp[ip(x-y)],$$

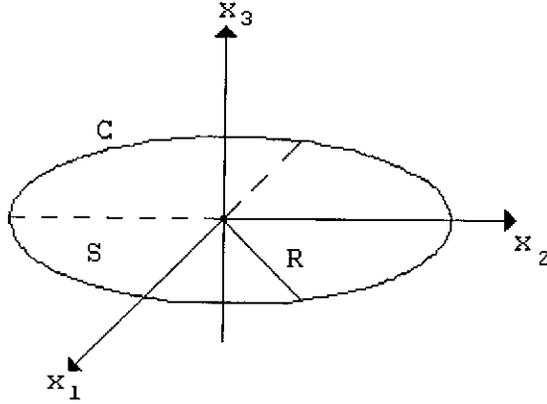


Figura 2-1: Círculo de raio R centrado na origem.

podemos reescrever (2.10) como:

$$\chi(C_1, C_2) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} D_{\mu\nu}(p) f_{C_1}^\mu(p) f_{C_2}^\nu(p), \quad (2.11)$$

onde

$$f_C^\mu(p) = \int_C dx^\mu \exp(ipx) \quad (2.12)$$

é a transformada de Fourier da curva.

Em particular, para curvas fechadas obtemos:

$$p_\mu f_C^\mu(p) = i \oint_C dx^\mu \partial_\mu \exp(ipx) = 0. \quad (2.13)$$

Vamos calcular $f_C^\mu(p)$ no caso da uma circunferência de raio R e centrada na origem, ilustrada na Fig.2-1. Obviamente, $f_C^\mu(p)$ é independente do momentum ortogonal ao plano $x_1 x_2$.

Escolhendo,

$$\begin{aligned} \bar{p}^\mu &= (p_1, p_2, 0), \\ \bar{p}_T^\mu &= (0, 0, p_3), \end{aligned} \quad (2.14)$$

tal que

$$p^\mu = \bar{p}^\mu + \bar{p}_T^\mu,$$

temos que

$$f_C^\mu(p) = f_C^\mu(\bar{p}). \quad (2.15)$$

Além disso, a partir de (2.13) e (2.14) é claro que:

$$f_C^3(\bar{p}) = 0$$

e

$$\bar{p}^\mu f_C^\mu(\bar{p}) = 0.$$

As duas relações acima podem ser combinadas de modo a obter a expressão:

$$f_C^\mu(\bar{p}) = \varepsilon^{3\mu\nu} \bar{p}_\nu f(\bar{p}), \quad (2.16)$$

onde

$$f(\bar{p}) = \frac{\varepsilon_{3\mu\sigma} \bar{p}^\sigma}{\bar{p}^2} f_C^\mu(\bar{p}). \quad (2.17)$$

Assim, para obtermos $f_C^\mu(p)$ precisamos primeiro calcular $f(\bar{p})$. Substituindo (2.12) em (2.17), achamos:

$$\begin{aligned} f(\bar{p}) &= \frac{\varepsilon_{3\mu\sigma} \bar{p}^\sigma}{\bar{p}^2} \oint_C dx^\mu \exp(i\bar{p}x) \\ &= \frac{i}{\bar{p}^2} \oint_C dx^\mu \varepsilon_{\mu 3\sigma} \partial^\sigma \exp(i\bar{p}x). \end{aligned}$$

Usando o teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} f(\bar{p}) &= \frac{i}{\bar{p}^2} \int_S d^2\sigma \varepsilon^{3\alpha\mu} \varepsilon_{\mu 3\sigma} \partial_\alpha \partial^\sigma [\exp(i\bar{p}x)] \\ &= \frac{i}{\bar{p}^2} \int_S d^2\sigma \left(\delta_3^3 \delta_\sigma^\alpha - \delta_\sigma^3 \delta_3^\alpha \right) \partial_\alpha \partial^\sigma [\exp(i\bar{p}x)] \\ &= \frac{i}{\bar{p}^2} \int_S d^2\sigma \partial^2 [\exp(i\bar{p}x)] \end{aligned}$$

$$= -i \int_S d^2\sigma [\exp(i\bar{p}x)].$$

onde S é a superfície plana delimitada pelo círculo C da Fig.2-1.

Já que a integral de superfície acima será calculada para um círculo, é mais conveniente a escolha de coordenadas polares, de modo que:

$$\begin{aligned} f(\bar{p}) &= -i \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi [\exp(i\bar{p}\rho \cos \varphi)] \\ &= -i \int_0^R \rho d\rho \left\{ \int_0^\pi d\varphi [\exp(i\bar{p}\rho \cos \varphi)] + \int_0^\pi d\varphi \exp[-(i\bar{p}\rho \cos \varphi)] \right\} \\ &= -i \int_0^R \rho d\rho \{ \pi [J_0(\bar{p}\rho) + J_0(-\bar{p}\rho)] \}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $J_0(\bar{p}\rho)$ é a função de Bessel.

Como a função de Bessel $J_0(x)$ é uma função simétrica, então (2.18) torna-se:

$$f(\bar{p}) = -2\pi i \int_0^R \rho d\rho [J_0(\bar{p}\rho)].$$

A integral acima está tabelada no livro do Gradhsteyn [61], (fórmula 6561 – 5). Logo,

$$f(\bar{p}) = -2\pi i \frac{R}{\bar{p}} J_1(\bar{p}R). \quad (2.19)$$

Finalmente, substituindo (2.15) e (2.19) em (2.16), encontramos:

$$f_C^\mu(p) = -i\varepsilon^{3\mu\sigma} \frac{\bar{p}_\sigma}{\bar{p}} 2\pi R J_1(\bar{p}R), \quad (2.20)$$

onde $J_1(\bar{p}R)$ é outra função de Bessel.

2.2.1 Primeira Configuração Geométrica: Círculo e Reta

Escolhemos como primeira configuração geométrica, uma reta vertical separada por uma distância d do centro de um círculo de raio R , de acordo com a Fig.2-2.

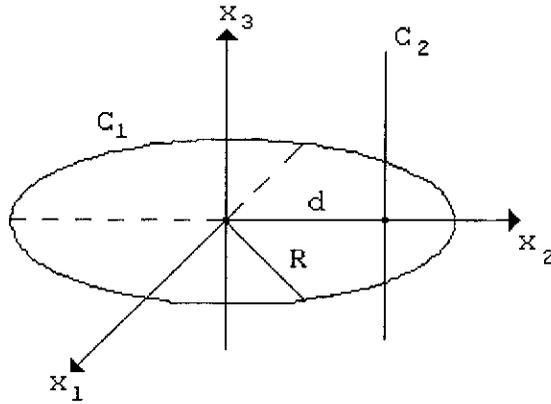


Figura 2-2: Reta vertical cruzando o círculo.

Pelo cálculo do *linking number* no capítulo anterior, já sabemos que nesta configuração

$$\chi(C_1, C_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } d < R \\ 0, & \text{se } d > R \end{cases},$$

onde C_1 é o círculo e C_2 é a reta vertical da Fig.2-2.

Da expressão (2.20), tiramos que:

$$f_{C_1}^\mu(p) = -i\varepsilon^{3\mu\sigma} \frac{\bar{p}_\sigma}{\bar{p}} 2\pi R J_1(\bar{p}R) \quad (2.21)$$

A reta C_2 é parametrizada por:

$$C_2 = \{x_1 = 0, x_2 = d \text{ e } x_3 = x_3\}.$$

Logo, de (2.12), obtemos:

$$\begin{aligned} f_{C_2}^\nu(p) &= \int_{C_2} dx^\nu \exp[i(p_2 x_2 + p_3 x_3)] = \int dx^3 \exp(ip_3 x_3 + ip_2 d) \\ &= 2\pi \delta^{3\nu} \delta(p_3) \exp(ip_2 d). \end{aligned} \quad (2.22)$$

No caso do modelo de Chern-Simons puro, adotando o gauge de Landau ($\alpha = 0$), o

propagador Euclideano é:

$$D_{\mu\nu}(p) = -i \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2}. \quad (2.23)$$

Então, introduzindo (2.21), (2.22) e (2.23) em (2.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_{CS} &= - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2} \right] \left[\varepsilon^{3\mu\sigma} \frac{\bar{p}_\sigma}{\bar{p}} 2\pi R J_1(\bar{p}R) \right] \left[2\pi \delta^{3\nu} \delta(p_3) \exp(-ip_2 d) \right] \\ &= - \frac{R}{2\pi} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{\varepsilon_{\mu 3 \rho} \varepsilon^{3\mu\sigma} p^\rho}{p^2 \bar{p}} \bar{p}_\sigma \delta(p_3) \right] J_1(\bar{p}R) \exp(-ip_2 d) \\ &= \frac{R}{2\pi} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{p^\sigma \bar{p}_\sigma}{p^2 \bar{p}} \delta(p_3) \right] J_1(\bar{p}R) \exp(-ip_2 d) \\ &= \frac{R}{2\pi} \int d^2 \bar{p} \left[\frac{\bar{p}^2}{\bar{p}^2 \bar{p}} \right] J_1(\bar{p}R) \exp(-ip_2 d) \\ &= \frac{R}{2\pi} \int_0^\infty \bar{p} d\bar{p} \left[\frac{1}{\bar{p}} J_1(\bar{p}R) \right] \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-i\bar{p}d \cos \varphi) \\ &= R \int_0^\infty d\bar{p} J_1(\bar{p}R) J_0(\bar{p}d). \end{aligned} \quad (2.24)$$

A integral acima encontra-se em [61], (fórmula 6512 – 3), portanto:

$$\chi_{CS} = \begin{cases} 1, & \text{se } d < R \\ 0, & \text{se } d > R \end{cases},$$

como era esperado.

Vemos que χ_{CS} é independente da posição da reta. Para mostrar que este resultado é realmente topológico e não depende nem da inclinação da reta, vamos supor uma outra configuração exibida na Fig.2-3.

Agora, C_2 é uma reta inclinada de um ângulo θ e parametrizada por:

$$C_2 = \{x_1 = 0 \text{ e } x_2 = d + \theta x_3\}.$$

Assim, de (2.12), temos:

$$f_{C_2}^1 = 0,$$

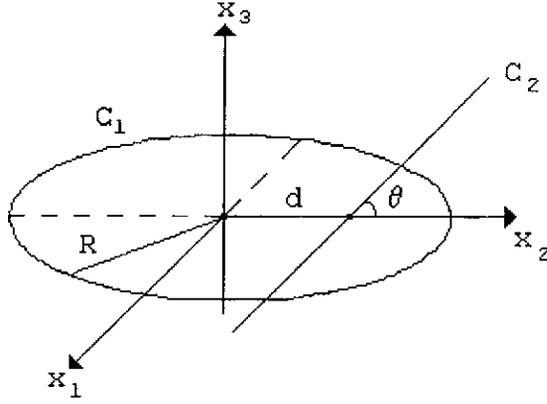


Figura 2-3: Reta inclinada cruzando o círculo.

$$\begin{aligned}
 f_{C_2}^2 &= \int dx^2 \exp [i (p_2 x_2 + p_3 x_3)] = \theta \int dx^3 \exp [i x_3 (p_3 + \theta p_2) + i p_2 d] \\
 &= 2\pi \theta \delta (p_3 + \theta p_2) \exp [i p_2 d], \\
 f_{C_2}^3 &= \int dx^3 \exp [i p_2 x_2 + i p_3 x_3] = 2\pi \delta (p_3 + \theta p_2) \exp (i p_2 d).
 \end{aligned}$$

Essas componentes podem ser expressadas em uma única fórmula, por:

$$f_{C_2}^\nu = 2\pi \delta (p_3 + \theta p_2) (\theta \delta^{\nu 2} + \delta^{\nu 3}) \exp (i p_2 d). \quad (2.25)$$

Como apenas a curva C_2 mudou, repetimos o procedimento para o caso da reta vertical e substituímos (2.21), (2.25) e (2.23) em (2.11):

$$\begin{aligned}
 \chi_{CS} &= - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2} \varepsilon^{3\mu\sigma} \frac{\bar{p}_\sigma}{\bar{p}} \right] [2\pi R J_1 (\bar{p}R)] [2\pi \delta (p_3 + \theta p_2) (\theta \delta^{\nu 2} + \delta^{\nu 3}) \exp (-i p_2 d)] \\
 &= - \frac{R}{2\pi} \int d^3 \mathbf{p} \left[\varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{3\mu\sigma} (\theta \delta^{\nu 2} + \delta^{\nu 3}) \frac{p^\rho \bar{p}_\sigma}{p^2 \bar{p}} \delta (p_3 + \theta p_2) \right] J_1 (\bar{p}R) \exp (-i p_2 d) \\
 &= \frac{R}{2\pi} \int d^3 \mathbf{p} \left[(\delta_\nu^3 \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^3 \delta_\nu^\sigma) (\theta \delta^{\nu 2} + \delta^{\nu 3}) \frac{p^\rho \bar{p}_\sigma}{p^2 \bar{p}} \delta (p_3 + \theta p_2) \right] J_1 (\bar{p}R) \exp (-i p_2 d) \\
 &= \frac{R}{2\pi} \int d^3 \mathbf{p} \left[(\delta_\rho^\sigma - \theta \delta_\rho^3 \delta_2^\sigma - \delta_\rho^3 \delta_3^\sigma) \frac{p^\rho \bar{p}_\sigma}{p^2 \bar{p}} \delta (p_3 + \theta p_2) \right] J_1 (\bar{p}R) \exp (-i p_2 d) \\
 &= \frac{R}{2\pi} \int d^3 \mathbf{p} \left[\frac{(\bar{p}^2 - \theta p_3 p_2 - p_3 \bar{p}_3)}{p^2 \bar{p}} \delta (p_3 + \theta p_2) \right] J_1 (\bar{p}R) \exp (-i p_2 d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R}{2\pi} \int d^2\bar{p} \left[\frac{(\bar{p}^2 + \theta^2 p_2^2)}{(\bar{p}^2 + \theta^2 p_2^2)} \bar{p} \right] J_1(\bar{p}R) \exp(-ip_2d) \\
&= \frac{R}{2\pi} \int d^2\bar{p} \frac{1}{\bar{p}} J_1(\bar{p}R) \exp(-ip_2d)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Verificamos, que a expressão (2.26) não depende, de fato, da inclinação θ da reta.

Agora, vamos partir para a investigação dos efeitos da introdução do termo de Maxwell no cálculo acima reproduzido. Consideremos a configuração geométrica do círculo e da reta vertical. Neste caso, a única alteração que surge vem do propagador da teoria. No gauge de Landau ($\alpha = 0$), o propagador de Maxwell-Chern-Simons (2.3) torna-se:

$$D_{\mu\nu}(p) = i \left[-m^2 \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2(p^2 + m^2)} + \frac{m}{p^2(p^2 + m^2)} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \right]. \tag{2.27}$$

Assim, colocando (2.21), (2.22) e (2.27) em (2.11), achamos:

$$\begin{aligned}
\chi_{MCS} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[-\frac{m^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2(p^2 + m^2)} + \frac{m g_{\mu\nu}}{p^2 + m^2} \right] \varepsilon^{3\mu\sigma} \frac{\bar{p}_\sigma}{\bar{p}} (2\pi)^2 R J_1(\bar{p}R) \delta^{3\nu} \delta(p_3) \exp(-ip_2d) \\
&= \frac{R}{2\pi} \int d^3\mathbf{p} \left[-\frac{m^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{3\mu\sigma} \delta^{3\nu} p^\rho \bar{p}_\sigma}{p^2(p^2 + m^2) \bar{p}} + \frac{m \varepsilon^{3\mu\sigma} \delta^{3\nu} g_{\mu\nu} \bar{p}_\sigma}{p^2 + m^2 \bar{p}} \right] J_1(\bar{p}R) \delta(p_3) \exp(-ip_2d) \\
&= \frac{R}{2\pi} \int d^3\mathbf{p} \left[m^2 \frac{(\delta_3^3 \delta_\rho^\sigma - \delta_\rho^3 \delta_3^\sigma) p^\rho \bar{p}_\sigma}{p^2(p^2 + m^2) \bar{p}} \right] J_1(\bar{p}R) \delta(p_3) \exp(-ip_2d) \\
&= \frac{R}{2\pi} \int d^3\mathbf{p} \left[\frac{m^2}{(p^2 + m^2) p^2 \bar{p}} \right] J_1(\bar{p}R) \delta(p_3) \exp(-ip_2d) \\
&= \frac{R}{2\pi} \int d^3\mathbf{p} \left[\frac{m^2}{(\bar{p}^2 + m^2) \bar{p}^2 \bar{p}} \right] J_1(\bar{p}R) \delta(p_3) \exp(-ip_2d) \\
&= \frac{R}{2\pi} \int_0^\infty \bar{p} d\bar{p} \left[\frac{m^2}{(\bar{p}^2 + m^2) \bar{p}} J_1(\bar{p}R) \right] \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-i\bar{p}d \cos \varphi) \\
&= R \int_0^\infty d\bar{p} \frac{m^2}{(\bar{p}^2 + m^2)} J_1(\bar{p}R) J_0(\bar{p}d).
\end{aligned}$$

Em resumo, os resultados obtidos foram:

$$\chi_{CS} = R \int_0^\infty d\bar{p} J_1(\bar{p}R) J_0(\bar{p}d) \tag{2.28}$$

e

$$\chi_{MCS} = R \int_0^\infty d\bar{p} \frac{m^2}{m^2 + \bar{p}^2} J_1(\bar{p}R) J_0(\bar{p}d) \quad (2.29)$$

Se compararmos a expressão χ_{CS} para a teoria de Chern-Simons pura, com a expressão χ_{MCS} , para a teoria de Maxwell-Chern-Simons, iremos constatar que o efeito da adição do termo de Maxwell é o surgimento de uma função do momentum e da massa, no integrando.

Infelizmente, essa alteração cai em uma integral que não encontra-se tabelada. Ao contrário de (2.28), que fornece um resultado topológico, a integral (2.29) depende da distância d e da massa m e só pode ser calculada em alguns casos particulares.

No caso de $d = 0$, a equação (2.29) fica:

$$\begin{aligned} \chi_{MCS} &= R \int_0^\infty d\bar{p} \frac{m^2}{m^2 + \bar{p}^2} J_1(\bar{p}R) \\ &= mR \int_0^\infty dy \frac{1}{1 + y^2} J_1(y mR) \\ &= (mR)^2 \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + (mR)^2} J_1(x). \end{aligned}$$

Usando o programa Mathematica V4.2, achamos:

$$\begin{aligned} \chi_{MCS} &= (mR)^2 \frac{1}{(mR)^3} \left[mR - (mR)^2 K_1(mR) \right] \\ &= 1 - (mR) K_1(mR), \end{aligned}$$

onde $K_1(mR)$ é a função de Bessel modificada de segundo tipo.

Lembremos que, neste caso, o resultado de (2.28) é:

$$\chi_{CS} = 1.$$

No limite de *large-mass* $mR \gg 1$, o programa Maple V5.2 fornece:

$$\chi_{MCS} = 1 + \sqrt{2\pi} \exp(-mR) \left[-\frac{1}{2} \sqrt{mR} - \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{mR}} + \frac{15}{256} \frac{1}{(mR)^{3/2}} + \dots \right].$$

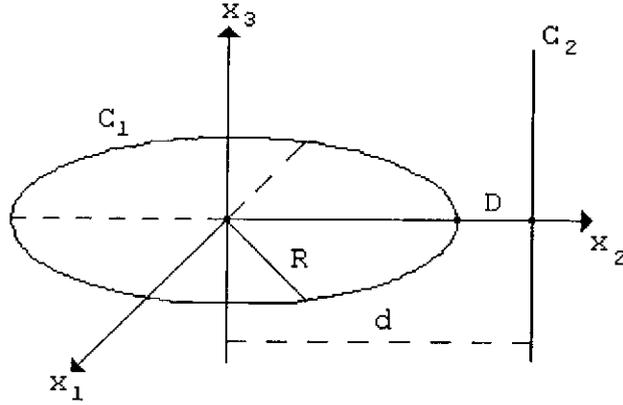


Figura 2-4: Reta vertical passando por fora do círculo.

Então, concluímos que o resultado topológico é perdido, no limite de *large-mass*, por um fator exponencial decrescente que vai a zero muito rápido.

No caso $d > R$, então

$$d = D + R,$$

onde D é a distância mínima entre C_1 e C_2 , como na Fig.2-4.

A equação (2.29) agora é:

$$\begin{aligned} \chi_{MCS} &= R \int_0^\infty dy \frac{m^2}{m^2 + y^2} J_1(yR) J_0(yd) \\ &= mR \int_0^\infty dx \frac{1}{1 + x^2} J_1(xmR) J_0(xmd). \end{aligned} \quad (2.30)$$

De acordo com [61], (fórmula 6.577 – 2), a integral (2.30) é:

$$\begin{aligned} \chi_{MCS} &= mR I_1(mR) K_0(md) \\ &= mR I_1(mR) K_0(mR + mD), \end{aligned}$$

onde I_1 é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e K_0 é outra função de Bessel modificada de segundo tipo.

O comportamento assintótico destas funções é:

$$\begin{aligned} I_1 &\rightarrow \exp(mR), \\ K_0 &\rightarrow \exp[-(mR + mD)]. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que essas duas funções multiplicadas vão decair exponencialmente com um fator que depende da massa m . Novamente, o resultado topológico é perdido.

2.2.2 Segunda Configuração Geométrica: Dois Círculos

Quando a configuração geométrica é composta de dois círculos, temos de distinguir os casos de círculos que se enrolam um no outro sem se cruzar, o Hopf *link*, do caso dos círculos superpostos, o *self-link*.

O Hopf *link* foi discutido no capítulo anterior e mostrou-se que o seu cálculo utilizando o propagador de Chern-Simons puro é um invariante topológico, o *linking number*, que fornece o número de voltas que uma curva faz na outra.

Ao adicionarmos o termo de Maxwell, assim como para a configuração do círculo e da reta, iremos perder o caráter topológico e encontraremos uma integral que não é tabelada e que nem mesmo é determinada, em qualquer limite [60].

Sendo assim, não existe na literatura, resultado analítico do cálculo do Hopf *link* para a teoria de Maxwell-Chern-Simons.

Entretanto, no caso do *self-link*, o seu cálculo é bem conhecido tanto para Chern-Simons puro, quanto para Maxwell-Chern-Simons.

Na teoria de Chern-Simons pura, o valor de χ_{CS} (2.10) para o *self-link* não fornece automaticamente um invariante topológico e torna-se necessário efetuar uma regularização². Porém, o resultado depende do esquema de regularização adotado. Alguns autores [62][63][64], obtiveram o chamado *self-linking number* da curva. O *self-linking*

²Na verdade é realizado o chamado procedimento de *framing*, que consiste deslocar uma das curvas superpostas através de um vetor, transformando-as em uma fita.

number é um invariante topológico que fornece o número de vezes que uma curva se enrola em torno de si própria.

Contudo, usando outro esquema de regularização proposto em [65], obtém-se o *writhing number*, que não é um invariante topológico.

Em [49] provou-se que o *writhing number* pode ser convertido no *self-linking number* através de uma renormalização finita.

Na referência [32] o *self-link* já foi calculado para a teoria de Maxwell-Chern-Simons. Todavia, o cálculo do *self-link*, que iremos apresentar para este modelo, está baseado em um método desenvolvido em uma recente série de artigos [66][67][68][69].

Nestes trabalhos, mostrou-se que a teoria com massa topológica, na presença do termo de Chern-Simons, pode ser posta na forma de uma ação de Chern-Simons pura, através de uma redefinição local, não-linear e invariante de gauge, dada por:

$$\widehat{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \vartheta_\mu^n(x),$$

onde os quatro primeiros coeficientes da série são

$$\begin{aligned} \vartheta_\mu^1(x) &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} \\ \vartheta_\mu^2(x) &= -\frac{1}{8} \partial^\nu F_{\mu\nu} \\ \vartheta_\mu^3(x) &= -\frac{1}{32} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^2 F^{\nu\rho} \\ \vartheta_\mu^4(x) &= \frac{5}{128} \partial^2 \partial^\nu F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Então, o campo redefinido tem a forma de uma expansão na massa topológica e constitui uma importante ferramenta no cálculo dos observáveis, na região de baixas energias (*large-mass*).

Utilizando este procedimento, o *self-link* para a teoria de Maxwell-Chern-Simons foi calculado no limite de *large-mass*, considerando C um contorno circular.

O resultado foi [69]:

$$\chi_{MCS} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(mR)^{2n+1}} \frac{1}{n+1} \frac{\Gamma\left(\frac{5+2n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)} \right],$$

onde R é o raio do círculo, m é a massa topológica e Γ é a função gama.

Então, constatamos mais uma vez que o resultado topológico é perdido, porém neste caso aparece uma expansão a *large-mass*, ao invés de um termo exponencial.

O limite à massa pequena, corresponde exatamente ao modelo de Maxwell puro em três dimensões [69], que, como já vimos no capítulo anterior, dá uma contribuição divergente.

Em resumo, verificamos explicitamente para duas configurações geométricas diferentes, que o termo de Chern-Simons está relacionado a invariantes topológicos. Vimos de que modo exatamente esta relação é devida ao propagador de Chern-Simons, ao obtermos para χ_{CS} uma integral do produto de duas funções de Bessel (2.24) e cujo resultado é um número inteiro.

Depois, mostramos que a introdução do termo de Maxwell interfere no resultado topológico, na medida que altera o propagador da teoria. Então, usando o propagador de Maxwell-Chern-Simons, exibimos uma expressão para χ_{MCS} (2.29), onde torna-se claro que modificações aparecem na integral de χ_{CS} , quando adicionamos o termo de Maxwell.

Finalmente, efetuamos a integração de χ_{MCS} e entendemos que, a perda do caráter topológico, é caracterizada, no caso do círculo e da reta, pelo aparecimento de um fator exponencial decrescente e para dois círculos superpostos, por uma série infinita que depende do inverso da massa.

Capítulo 3

O Termo de Chern-Simons e suas Perturbações

Nos capítulos anteriores, vimos que o *linking number* é um invariante topológico que fornece o número de vezes que uma curva se enrola na outra.

Além disso, mostramos que o *linking number* está relacionado a teoria de Chern-Simons. De fato, ele pode ser obtido quando calculamos o valor esperado no vácuo das variáveis de *loop*, para ação de Chern-Simons pura.

Sendo assim, desejamos verificar se o *linking number* ainda é um invariante topológico, quando adicionamos termos perturbativos à ação de Chern-Simons

O primeiro termo perturbativo que escolheríamos seria o termo de Maxwell. Entretanto, este termo não pode ser considerado uma perturbação genuína. Vimos no capítulo 2, que a sua introdução altera drasticamente a estrutura do propagador, tendo como consequência a modificação do caráter topológico do valor esperado das variáveis de *loop*.

Portanto, devemos procurar por termos perturbativos que sejam de ordem superior ao termo de Maxwell e calcular os diagramas de Feynman para o *linking number* perturbado.

Entretanto, existe um fator complicador que diz respeito a renormalizabilidade da teoria perturbada. Um termo perturbativo de ordem superior ao termo de Maxwell, já não é renormalizável por *power-counting*.

Sendo assim, as possíveis contribuições ao *linking number*, advindas do cálculo dos

diagramas, seriam divergentes, *a priori*. Isto acabaria definitivamente com o resultado finito e topológico, que existe no caso do Chern-Simons puro. Contudo, vamos provar que o resultado topológico não é de fato, alterado pela perturbação.

Neste capítulo, definiremos a ação de Chern-Simons efetiva, contendo um termo perturbativo. Depois, exibiremos as contrações básicas para realizarmos a expansão de Wick. A seguir, mostraremos todos os diagramas topologicamente distintos a 2, 3 e 4-*loops* e analisaremos, separadamente, as suas expressões. Finalmente, concluiremos que as correções quânticas ao *linking number*, são na verdade, nulas.

No trabalho [70] estão reproduzidos todos os cálculos deste capítulo, que corresponde ao cerne da presente dissertação.

3.1 Expansão Perturbativa e Diagramas de Feynman

Usando a ação de Chern-Simons perturbada, queremos calcular o *linking number*, expresso por:

$$\chi_{eff} = \left\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu \oint_{C_2} dy^\nu A_\nu \right\rangle_{S_{eff}}, \quad (3.1)$$

onde S_{eff} é ação de Chern-Simons em presença de um termo perturbativo.

De acordo com o capítulo anterior, a ação de Chern-Simons abeliana pura é:

$$S_{CS} = \frac{1}{4} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho). \quad (3.2)$$

Agora, vamos acrescentar à esta ação, um termo perturbativo na curvatura. Como já comentamos, um termo tipo Maxwell ¹ está excluído e, portanto, devemos procurar um termo de ordem maior.

Na busca deste termo perturbativo, é conveniente simplificarmos a notação e evitar-

¹Um termo tipo Maxwell é qualquer termo invariante de gauge, que dependa de maneira quadrática da curvatura. Por exemplo, F^2 , $F\partial^2 F$,...

mos a proliferação desnecessária de índices. Então, definimos o vetor dual:

$$\tilde{F}^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}.$$

Em termos do vetor dual, o candidato natural à perturbação é:

$$S_{pert} = \int d^3x \varepsilon_{\mu\nu\rho} \tilde{F}^\mu \tilde{F}^\nu \tilde{F}^\rho.$$

Porém, ao substituirmos o vetor dual, verificamos que a perturbação acima é identicamente nula, quando realizamos a contração dos índices.

Assim, propomos uma perturbação de ordem maior, dada por:

$$S_{pert} = \int d^3x : \tilde{F}^\mu \tilde{F}_\mu \tilde{F}^\nu \tilde{F}_\nu :, \quad (3.3)$$

onde usamos o produto normal ordenado, para eliminarmos os diagramas tipo *tadpole*, na expansão perturbativa.

Como trata-se do caso abeliano, o ordenamento normal é compatível com a invariância de gauge. Isto pode ser constatado, pelo fato de que as próprias partes $F_{\mu\nu}^{(+)}$, de frequência positiva e $F_{\mu\nu}^{(-)}$, de frequência negativa, do tensor $F_{\mu\nu}$ são, isoladamente, invariantes de gauge.

Substituindo (3.3) em (3.2) e escolhendo o gauge de Landau, obtemos:

$$S_{eff} = \int d^3x \left[\frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho + b \partial_\mu A^\mu + \frac{\tau}{4!} : \tilde{F}^\mu \tilde{F}_\mu \tilde{F}^\nu \tilde{F}_\nu : \right] \quad (3.4)$$

onde o parâmetro τ tem dimensão de massa negativa, refletindo o caráter não-renormalizável da perturbação. O campo b é o multiplicador de Lagrange que implementa o gauge de Landau.

Contudo, antes precisamos calcular algumas contrações elementares, que serão necessárias para realizarmos a expansão diagramática.

A primeira contração é entre os campos de gauge, que fornece o propagador de Chern-

Simons, no espaço de configurações.

Sabemos, que o propagador de Chern-Simons no espaço dos momenta é:

$$D_{\mu\nu}(p) = -i \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-i \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2} \right] \exp[ip(x-y)] \\ &= -\varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\exp[ip(x-y)]}{p^2} \\ &= \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A segunda contração é entre o campo de gauge e o vetor dual, dada por:

$$\langle A_\mu(x) \tilde{F}_\nu(y) \rangle = \frac{1}{2} \langle A_\mu(x) \varepsilon_{\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}(y) \rangle = \varepsilon_{\nu\alpha\beta} \partial_y^\alpha \langle A_\mu(x) A^\beta(y) \rangle. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) em (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(x) \tilde{F}_\nu(y) \rangle &= \varepsilon_{\nu\alpha\beta} \partial_y^\alpha \left[\frac{\varepsilon_\mu^{\beta\rho}}{4\pi} \partial_x^\rho \frac{1}{|x-y|} \right] \\ &= -\varepsilon_{\nu\alpha\beta} \varepsilon_\mu^{\beta\rho} \partial^\alpha \partial_\rho \frac{1}{4\pi |x-y|} \\ &= (g_{\nu\mu} \delta_\alpha^\rho - g_{\mu\alpha} \delta_\nu^\rho) \partial^\alpha \partial_\rho \frac{1}{4\pi |x-y|} \\ &= g_{\mu\nu} \partial^2 \frac{1}{4\pi |x-y|} - \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{4\pi |x-y|} \\ &= g_{\mu\nu} \delta^3(x-y) - \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{4\pi |x-y|}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde usamos

$$\partial^2 \frac{1}{|x-y|} = -4\pi \delta^3(x-y). \quad (3.8)$$

A terceira contração é entre os vetores duais, que fornece:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{F}_\mu(x) \tilde{F}_\nu(y) \rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \langle F^{\alpha\beta}(x) F^{\rho\lambda}(y) \rangle \\ &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \partial_x^\alpha \partial_y^\rho \langle A^\beta(x) A^\lambda(y) \rangle.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Introduzindo (3.5) em (3.9), achamos:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{F}_\mu(x) \tilde{F}_\nu(y) \rangle &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \partial_x^\alpha \partial_y^\rho \left(\varepsilon^{\beta\lambda\gamma} \partial_\gamma \frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \\ &= - \left(\delta_\mu^\lambda \delta_\alpha^\gamma - \delta_\alpha^\lambda \delta_\mu^\gamma \right) \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \partial^\alpha \partial^\rho \partial_\gamma \frac{1}{4\pi|x-y|} \\ &= -\varepsilon_{\nu\rho\mu} \partial^\rho \partial^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{4\pi|x-y|} + \varepsilon_{\nu\rho\alpha} \partial^\rho \partial^\alpha \partial_\mu \frac{1}{4\pi|x-y|}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Como o último termo de (3.10) é nulo devido a contração de índices e usando novamente (3.8), chegamos a:

$$\langle \tilde{F}_\mu(x) \tilde{F}_\nu(y) \rangle = -\varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \delta^3(x-y).\quad (3.11)$$

De posse dessas contrações, podemos dar início a expansão perturbativa. Então, aplicamos o teorema de Wick ao valor esperado das variáveis de *loop* (3.1), para a ação efetiva expressa em (3.4).

A expansão até segunda ordem em τ , fornece:

$$\begin{aligned}\chi_{eff}^{(2)} &= \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \left\{ \frac{\tau^2}{(4!)^2} \frac{1}{2!} \times \right. \\ &\quad \left. \langle A_\mu(x) A_\nu(y) : \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}_\alpha(z_1) \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}_\beta(z_1) :: \tilde{F}^\gamma(z_2) \tilde{F}_\gamma(z_2) \tilde{F}^\rho(z_2) \tilde{F}_\rho(z_2) : \rangle \right\} \\ &= \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \left\{ \frac{\tau^2}{(24)^2} \frac{8 \times 4}{2} \times \langle A_\mu(x) \tilde{F}^\alpha(z_1) \rangle \langle A_\nu(y) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. \langle : \tilde{F}_\alpha(z_1) \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}_\beta(z_1) :: \tilde{F}_\gamma(z_2) \tilde{F}^\rho(z_2) \tilde{F}_\rho(z_2) : \rangle \right\} \\ &= \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \left\{ \frac{16\tau^2}{(24)^2} \times \langle A_\mu(x) \tilde{F}_\alpha(z_1) \rangle \langle A_\nu(y) \tilde{F}_\gamma(z_2) \rangle \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \langle : \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}_\beta(z_1) :: \tilde{F}^\rho(z_2) \tilde{F}_\rho(z_2) : \rangle \right\}\end{aligned}$$

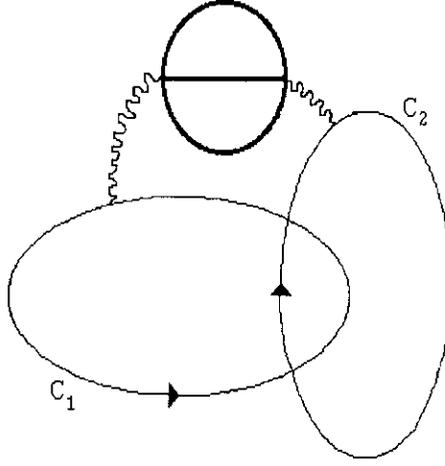


Figura 3-1: Diagrama a 2-loops.

$$+2 \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\rho(z_2) \rangle \langle : \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}_\beta(z_1) :: \tilde{F}^\gamma(z_2) \tilde{F}_\rho(z_2) : \rangle \rangle \Big\}.$$

Efetuada as últimas contrações, encontramos a expressão:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}^{(2)} = & \frac{\tau^2}{36} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \left\{ \langle A_\mu(x) \tilde{F}_\alpha(z_1) \rangle \langle A_\nu(y) \tilde{F}_\gamma(z_2) \rangle \times \right. \\ & \langle \tilde{F}_\beta(z_1) \tilde{F}_\rho(z_2) \rangle \times \left[2 \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \langle \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}^\rho(z_2) \rangle \right. \\ & \left. \left. + 4 \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\rho(z_2) \rangle \langle \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando as curvas C_1 e C_2 , dois círculos entrelaçados, então o diagrama de Feynman que corresponde a (3.12) é o diagrama a 2-loops, ilustrado na Fig.3-1.

Na Fig.3-1, as linhas onduladas significam contrações do tipo $\langle A\tilde{F} \rangle$ e as linhas grossas são contrações do tipo $\langle \tilde{F}\tilde{F} \rangle$.

Portanto, reduzimos a integral $\chi_{eff}^{(2)}$ em termos das contrações elementares conhecidas. Agora, vamos analisar, por exemplo, o segundo termo da expressão (3.12).

Fazendo uso de (3.7) e (3.11), obtemos:

$$\begin{aligned}
& -4 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \left[g_{\mu\alpha} \delta^3(x - z_1) + \partial_\mu \partial_\alpha \frac{1}{4\pi |x - z_1|} \right] \\
& \times \left[g_{\nu\gamma} \delta^3(y - z_2) + \partial_\nu \partial_\gamma \frac{1}{4\pi |y - z_2|} \right] \left[\varepsilon_{\beta\rho\lambda} \partial^\lambda \delta^3(z_1 - z_2) \right] \\
& \times \left[\varepsilon^{\alpha\rho\tau} \partial_\tau \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\varepsilon^{\beta\gamma\sigma} \partial_\sigma \delta^3(z_1 - z_2) \right]. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Os termos contendo ∂_μ e ∂_ν não contribuem, pois eles são derivadas totais sobre curvas fechadas. Então (3.13) torna-se:

$$\begin{aligned}
& 4 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \left[\delta^3(x - z_1) \delta^3(y - z_2) \right] \\
& \times \left[\varepsilon_{\beta\rho\lambda} \partial^\lambda \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\varepsilon_\mu^{\rho\tau} \partial_\tau \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\varepsilon^{\beta\sigma} \partial_\sigma \delta^3(z_1 - z_2) \right]. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Muito embora, apareçam em (3.14) produtos de funções delta com o mesmo argumento, pode-se mostrar que esta expressão anula-se, através de duas maneiras.

A primeira é um argumento heurístico que se baseia na possibilidade de podermos sempre escolher a ordem para realizar as integrações das funções delta. Fazemos uma seleção cuidadosa da ordem das integrações, de tal modo que terminamos com produtos de $\delta^3(x - y)$, ao invés de $\delta^3(0)$.

No caso de (3.14), bastaria que calculássemos primeiro a integral de $\delta^3(x - z_1)$ e depois a integral de $\delta^3(y - z_2)$ e então cairíamos numa expressão do tipo:

$$4 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \left[\varepsilon_{\beta\rho\lambda} \partial^\lambda \delta(x - y) \right] \left[\varepsilon_\mu^{\rho\tau} \partial_\tau \delta(x - y) \right] \left[\varepsilon^{\beta\sigma} \partial_\sigma \delta^3(x - y) \right].$$

A expressão acima é claramente nula, pois como estamos considerando o *linking number*, as curvas nunca se interceptam e portanto $(x - y)$ nunca coincidem.

Embora este procedimento não seja muito rigoroso, ressaltamos que esta possibilidade existe e que pode ser aplicada em todos os diagramas de ordem superior.

A segunda maneira consiste em um tratamento formal de regularização das deltas com argumentos coincidentes, semelhante ao procedimento de point-splitting, usado por

Polyakov e dado por [65]:

$$\delta_\varepsilon^3(z_1 - z_2) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{3/2}} \exp\left[-(z_1 - z_2)^2/2\varepsilon\right]$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon^3(z_1 - z_2) = \delta^3(z_1 - z_2). \quad (3.15)$$

Mais precisamente, quando tivermos uma integração com um produto de n deltas de mesmo argumento, iremos regularizar $n - 1$ deltas, através de:

$$\delta^n(z_1 - z_2) = \delta_\varepsilon^{n-1}(z_1 - z_2) \delta(z_1 - z_2).$$

Assim, colocando (3.15) em (3.14), teremos uma versão regularizada:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3z_1 \int d^3z_2 \left[\delta^3(x - z_1) \delta^3(y - z_2) \right] \\ & \times \left[\varepsilon_{\beta\rho\lambda} \partial^\lambda \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\varepsilon_\mu^{\rho\tau} \partial_\tau \delta_\varepsilon^3(z_1 - z_2) \right] \left[\varepsilon^{\beta\sigma} \partial_\sigma \delta_\varepsilon^3(z_1 - z_2) \right]. \end{aligned}$$

onde o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ deve ser tomado após realizarmos todos os cálculos.

Integrando as deltas com argumentos diferentes e antes de tomarmos o limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, chegamos a expressão final:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \left[\varepsilon_{\beta\rho\lambda} \partial^\lambda \delta^3(x - y) \right] \left[\varepsilon_\mu^{\rho\tau} \partial_\tau \delta_\varepsilon^3(x - y) \right] \left[\varepsilon^{\beta\sigma} \partial_\sigma \delta_\varepsilon^3(x - y) \right] = 0$$

visto que $(x - y)$ nunca se anula.

Analogamente, o primeiro termo de (3.12) pode ser tratado de modo semelhante e fornece também o mesmo resultado nulo.

Logo, o diagrama a 2 -loops anula-se por inteiro e portanto não contribui para a função de correlação perturbada (3.1), isto é,

$$\chi_{eff}^{(2)} = 0. \quad (3.16)$$

Antes de prosseguirmos, é conveniente discutirmos com um pouco mais de atenção, o mecanismo que nos levou a conclusão de que o diagrama a *2-loops* não interfere no resultado topológico.

Da estrutura desse diagrama, observamos que os campos de gauge $A_\mu(x)$ e $A_\nu(y)$, pertencentes aos círculos C_1 e C_2 , respectivamente, sempre estarão contraídos com os \tilde{F} 's presentes no termo de interação. Portanto, além das contrações do tipo $\langle \tilde{F}\tilde{F} \rangle$, as correspondentes integrais de Feynman sempre irão conter duas contrações do tipo $\langle A\tilde{F} \rangle$.

Contudo, devemos observar que na equação (3.7), que corresponde ao caso das contrações do tipo $\langle A\tilde{F} \rangle$, o segundo termo tem um dos índices de Lorentz das derivadas, idêntico ao índice vetorial do campo de gauge pertencente a uma das curvas. Logo, teremos uma derivada total com respeito a variável que parametriza uma curva fechada, implicando no cancelamento deste termo.

Conseqüentemente, todas as contrações de Wick que vão entrar nas integrais de Feynman, serão basicamente o produto de funções delta e de suas derivadas, algumas com o mesmo argumento. Então, introduzimos uma regularização adequada dessas deltas e integramos a expressão. Finalmente, obtém-se uma delta $\delta^3(x-y)$, que anula todo o resultado, pois lembramos que x e y pertencem a curvas distintas, que não têm intersecção.

Como veremos adiante, este mecanismo pode ocorrer em ordens superiores de *loops* e com isto assegurar para o *linking number*, a independência do parâmetro de interação τ e a manutenção de seu caráter topológico.

Podemos generalizar este raciocínio também para diagramas provenientes de qualquer perturbação do tipo $\int d^3x F^n$, pois a mesma estrutura básica de contrações será mantida.

Vamos agora analisar as contribuições de ordem superior, partindo diretamente de seus gráficos. A contribuição seguinte é o diagrama a *3-loops*, que está mostrado na Fig.3-2.

A menos de um fator de simetria global, um exemplo típico de uma contração da Fig.3-2 é a integral:

$$\chi_{eff}^{(3)} = \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3z_1 \int d^3z_2 \int d^3z_3 \left[\langle A_\mu(x) \tilde{F}_\alpha(z_1) \rangle \langle A_\nu(y) \tilde{F}_\gamma(z_2) \rangle \times \right.$$

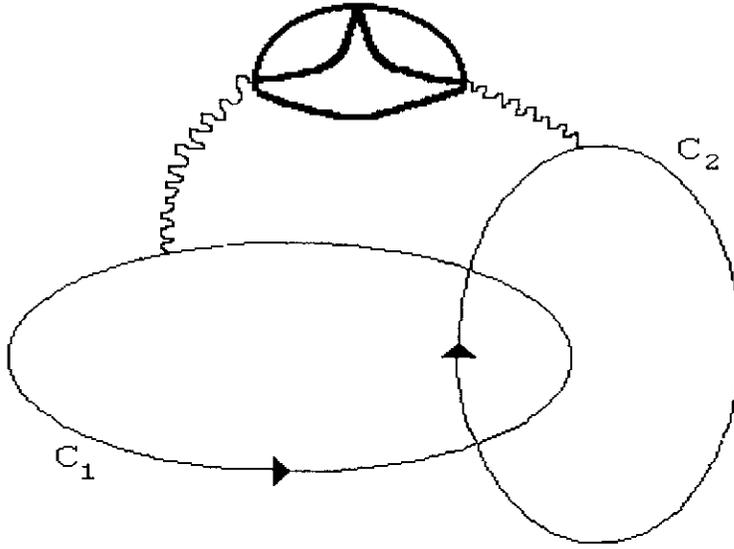


Figura 3-2: Diagrama a 3-loops.

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \langle \tilde{F}_\beta(z_1) \tilde{F}_\sigma(z_3) \rangle \langle \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}^\lambda(z_3) \rangle \times \\ & \langle \tilde{F}_\rho(z_2) \tilde{F}_\lambda(z_3) \rangle \langle \tilde{F}^\rho(z_2) \tilde{F}^\sigma(z_3) \rangle \Big]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Introduzindo (3.7) e (3.11) em (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}^{(3)} = & \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \int d^3 z_3 \left[g_{\mu\alpha} \delta^3(x - z_1) g_{\nu\gamma} \delta^3(y - z_2) \right] \\ & \times \left[\tilde{\partial}^{\alpha\gamma} \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\tilde{\partial}_{\beta\sigma} \delta^3(z_1 - z_3) \right] \left[\tilde{\partial}^{\beta\lambda} \delta^3(z_1 - z_3) \right] \\ & \times \left[\tilde{\partial}_{\rho\lambda} \delta^3(z_2 - z_3) \right] \left[\tilde{\partial}^{\rho\sigma} \delta^3(z_2 - z_3) \right], \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\partial}_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho$$

é a definição do operador derivada transversa, utilizado para deixar a notação mais compacta.

Assim, regularizando as deltas de mesmo argumento, segundo o procedimento já

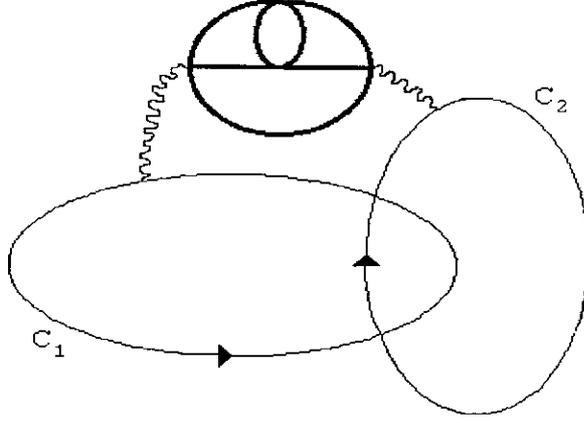


Figura 3-3: Primeiro diagrama a 4-loops.

realizado para o diagrama a 2-loops, e realizando as integrações em z_1 e z_2 , temos:

$$\chi_{eff}^{(3)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_3 \left[\tilde{\partial}_{\mu\nu} \delta^3(x-y) \right] \left[\tilde{\partial}_{\beta\sigma} \delta^3(x-z_3) \right] \times \left[\tilde{\partial}^{\beta\lambda} \delta_\epsilon^3(x-z_3) \right] \left[\tilde{\partial}_{\rho\lambda} \delta^3(y-z_3) \right] \left[\tilde{\partial}^{\rho\sigma} \delta_\epsilon^3(y-z_3) \right] = 0. \quad (3.18)$$

Concluimos então, que não há contribuição não nula ao *linking number* até 3-loops.

Finalmente, para 4-loops, existem dois tipos de diagramas. O primeiro deles está na Fig.3-3.

Uma integral correspondente ao diagrama da Fig.3-3 fornece:

$$\chi_{eff}^{(4a)} = \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \int d^3 z_3 \int d^3 z_4 \left[\langle A_\mu(x) \tilde{F}_\alpha(z_1) \rangle \langle A_\nu(y) \tilde{F}_\gamma(z_2) \rangle \times \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \langle \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}^\lambda(z_3) \rangle \langle \tilde{F}_\beta(z_1) \tilde{F}_\sigma(z_4) \rangle \langle \tilde{F}^\rho(z_2) \tilde{F}^\sigma(z_4) \rangle \times \langle \tilde{F}_\rho(z_2) \tilde{F}_\lambda(z_3) \rangle \langle \tilde{F}^\theta(z_3) \tilde{F}^\omega(z_4) \rangle \langle \tilde{F}_\theta(z_3) \tilde{F}_\omega(z_4) \rangle \right].$$

Substituindo as contrações (3.7) e (3.11), temos:

$$\chi_{eff}^{(4a)} = \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \int d^3 z_3 \int d^3 z_4 \left[g_{\mu\alpha} \delta^3(x-z_1) g_{\nu\gamma} \delta^3(y-z_2) \right]$$

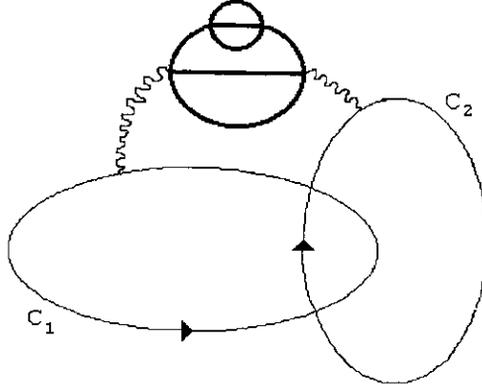


Figura 3-4: Segundo diagrama a 4-loops.

$$\begin{aligned} & \times [\tilde{\partial}^{\alpha\gamma}\delta^3(z_1 - z_2)] [\tilde{\partial}^{\beta\lambda}\delta^3(z_1 - z_3)] [\tilde{\partial}_{\beta\sigma}\delta^3(z_1 - z_4)] [\tilde{\partial}^{\rho\sigma}\delta^3(z_2 - z_4)] \\ & \times [\tilde{\partial}_{\rho\lambda}\delta^3(z_2 - z_3)] [\tilde{\partial}^{\theta\omega}\delta^3(z_3 - z_4)] [\tilde{\partial}_{\theta\omega}\delta^3(z_3 - z_4)]. \end{aligned}$$

Após regularizarmos e efetuarmos as integrações, esta expressão se reduz a:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}^{(4a)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_3 \int d^3 z_4 [\tilde{\partial}_{\mu\nu}\delta^3(x - y)] [\tilde{\partial}^{\beta\lambda}\delta^3(x - z_3)] \\ & \times [\tilde{\partial}_{\beta\sigma}\delta^3(x - z_4)] [\tilde{\partial}^{\rho\sigma}\delta^3(y - z_4)] [\tilde{\partial}_{\rho\lambda}\delta^3(y - z_3)] \\ & \times [\tilde{\partial}^{\theta\omega}\delta^3(z_3 - z_4)] [\tilde{\partial}_{\theta\omega}\delta_\epsilon^3(z_3 - z_4)] = 0. \end{aligned}$$

Novamente, obtemos um resultado nulo para mais um diagrama.

Só resta calcular o segundo diagrama topologicamente distinto a 4-loops, que está ilustrado na Fig.3-4.

Para o diagrama da Fig.3-4, uma possível integral de Feynman é:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}^{(4b)} &= \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \int d^3 z_3 \int d^3 z_4 [\langle A_\mu(x) \tilde{F}_\alpha(z_1) \rangle \langle A_\nu(y) \tilde{F}_\gamma(z_2) \rangle \times \\ & \langle \tilde{F}^\alpha(z_1) \tilde{F}^\gamma(z_2) \rangle \langle \tilde{F}^\beta(z_1) \tilde{F}^\rho(z_2) \rangle \langle \tilde{F}_\beta(z_1) \tilde{F}_\lambda(z_3) \rangle \langle \tilde{F}_\rho(z_2) \tilde{F}_\sigma(z_4) \rangle \times \\ & \langle \tilde{F}^\lambda(z_3) \tilde{F}^\sigma(z_4) \rangle \langle \tilde{F}^\theta(z_3) \tilde{F}^\omega(z_4) \rangle \langle \tilde{F}_\theta(z_3) \tilde{F}_\omega(z_4) \rangle]. \end{aligned}$$

Mais uma vez, colocando as contrações (3.7) e (3.11), encontramos:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}^{(4b)} &= \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 \int d^3 z_3 \int d^3 z_4 \left[g_{\mu\alpha} \delta^3(x - z_1) g_{\nu\gamma} \delta^3(y - z_2) \right] \\ &\quad \times \left[\tilde{\partial}^{\alpha\gamma} \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\tilde{\partial}^{\beta\rho} \delta^3(z_1 - z_2) \right] \left[\tilde{\partial}_{\beta\lambda} \delta^3(z_1 - z_3) \right] \left[\tilde{\partial}_{\rho\sigma} \delta^3(z_2 - z_4) \right] \\ &\quad \times \left[\tilde{\partial}^{\lambda\sigma} \delta^3(z_3 - z_4) \right] \left[\tilde{\partial}^{\theta\omega} \delta^3(z_3 - z_4) \right] \left[\tilde{\partial}_{\theta\omega} \delta^3(z_3 - z_4) \right]. \end{aligned}$$

Usando a regularização e integrando, chegamos a:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}^{(4b)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \int d^3 z_3 \int d^3 z_4 \left[\tilde{\partial}_{\mu\nu} \delta_\epsilon^3(x - y) \right] \left[\tilde{\partial}^{\beta\rho} \delta_\epsilon^3(x - y) \right] \\ &\quad \times \left[\tilde{\partial}_{\beta\lambda} \delta^3(x - z_3) \right] \left[\tilde{\partial}_{\rho\sigma} \delta^3(y - z_4) \right] \left[\tilde{\partial}^{\lambda\sigma} \delta^3(z_3 - z_4) \right] \\ &\quad \times \left[\tilde{\partial}^{\theta\omega} \delta_\epsilon^3(z_3 - z_4) \right] \left[\tilde{\partial}_{\theta\omega} \delta_\epsilon^3(z_3 - z_4) \right] = 0. \end{aligned}$$

Assim, todos os termos dos diagramas apresentados aqui, contém uma $\delta^3(x - y)$ (ou suas derivadas), e, portanto, se anulam.

Podemos nos convencer que este mecanismo aplica-se a qualquer ordem de perturbação, pois pela construção dos diagramas, observamos que as respectivas integrais de Feynman sempre irão conter contrações que irão acarretar em produtos de funções deltas. Depois do procedimento de regularização das deltas, as integrais podem ser efetuadas, resultando em uma $\delta^3(x - y)$. Como as variáveis x e y nunca coincidem, a expressão como um todo se anula.

Enfim, concluímos que:

$$\begin{aligned} \chi_{eff} &= \left\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu \oint_{C_2} dy^\nu A_\nu \right\rangle_{S_{eff}} \\ &= \left\langle \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu \oint_{C_2} dy^\nu A_\nu \right\rangle_{S_{CS}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Isto é, a função de correlação perturbada das variáveis de *loop* continua fornecendo o *linking number* e portanto ainda é um invariante topológico.

Recentemente, em um trabalho [71] que utiliza o mesmo procedimento apresentado

nesta tese, o cálculo perturbativo do *linking number* foi generalizado para modelos topológicos do tipo BF , em dimensões arbitrárias.

Resumindo, mostramos que a função de correlação (3.19) não é afetada pelas correções quânticas, sendo portanto, independente da constante de acoplamento τ , que não é renormalizável por *power-counting*. O *linking number* mantém ainda o seu caráter topológico, mesmo com a introdução de termos perturbativos não topológicos, que dependem da curvatura.

Embora tenhamos usado um termo de perturbação tipo $\int d^3x F^4$, o mesmo resultado pode ser alcançado para qualquer interação local do tipo $\int d^3x F^n$, pois sempre cairemos na mesma estrutura de contrações, que dão origem às funções delta.

Este resultado pode ser interpretado como uma espécie de propriedade de não renormalizabilidade do *linking number*. Esta propriedade reflete a estabilidade do *linking number*, com respeito a qualquer perturbação local invariante de gauge.

Conclusão

Nesta tese, investigamos o chamado *linking number*, que é um invariante topológico no qual representa o número de vezes que uma curva contínua, fechada e suave se enrola em outra, sem que haja intersecção das mesmas.

Até então, já era um fato conhecido, que o *linking number* está relacionado a teoria de Chern-Simons pura através do cálculo do valor esperado no vácuo de variáveis de *loop*, semelhantes ao *loop* de Wilson.

A contribuição original deste trabalho consiste em realizar o cálculo do *linking number* para ação de Chern-Simons, acoplada a termos não topológicos e verificar quais as alterações que irão surgir, em virtude deste acoplamento.

Neste sentido, as conclusões as quais chegamos, podem ser sumarizadas em três itens, a saber:

- Sabe-se que a introdução do termo de Maxwell à ação de Chern-Simons, altera profundamente o propagador da teoria e, por consequência, várias de suas propriedades. Em particular, estamos interessados nos efeitos causados ao *linking number*, em virtude do termo de Maxwell.

Devido ao cálculo das integrais, para o caso do *link*, ficar extremamente complexo, escolhemos duas configurações geométricas mais simples: um círculo e uma reta vertical e dois círculos coincidentes. Para essas configurações, obtemos expressões que mostram explicitamente quais as alterações que surgem em relação ao cálculo usando o Chern-Simons puro.

Quando tomamos o comportamento a longas distâncias, para a primeira confi-

guração, obtemos um termo exponencial decrescente na massa e para a segunda configuração, achamos uma expansão a *large-mass*. Em ambos os casos, o caráter topológico original é modificado.

- A despeito de sua importância, o termo de Maxwell não constitui uma perturbação legítima, pois altera a forma do propagador da teoria. Sendo assim, existem outros termos que são realmente perturbativos e que dependem da curvatura em ordem superior do que o termo de Maxwell.

O primeiro destes termos perturbativos não nulo é o termo $\int d^3x F^4$, que não é renormalizável por *power-counting*. Acoplando esta perturbação ao termo de Chern-Simons, efetuamos o cálculo do valor esperado no vácuo das variáveis de *loop* e obtemos a sua expansão diagramática.

Realizamos as contas dos diagramas a 2, 3 e 4-*loops* e obtemos em todos eles, contribuições nulas para a função de correlação perturbada.

Este procedimento permanece válido para uma interação mais geral do tipo $\int d^3x F^n$, pois os correspondentes gráficos de Feynman continuarão sendo formados pelas mesmas contrações básicas, que reduzem as contas a integrais de produtos de funções delta.

Portanto, provamos que o *linking number* permanece inalterado, mesmo quando adicionamos termos perturbativos não topológicos, o que não acontecia quando tínhamos o acoplamento somente com o termo de Maxwell.

Além disso, este resultado reflete uma propriedade de não renormalizabilidade do *linking number*, a medida que a presença de uma perturbação não renormalizável não contribui para o resultado, que permanece finito e também topológico.

- Em um artigo subsequente [71], o resultado topológico do cálculo perturbativo do *linking number*, foi estendido para uma dimensão genérica, para teorias topológicas do tipo *BF*. Este novo trabalho endossou a estabilidade do *linking number* frente a perturbações locais e invariantes de gauge.

- Embora tenhamos considerado o *linking number* para a teoria de Maxwell-Chern-Simons, na realidade só fizemos, para esta teoria, os cálculos envolvendo configurações geométricas mais simples como, por exemplo, o círculo e a reta vertical.

De fato, no caso de dois círculos entrelaçados, caímos em integrais muito complicadas, cujos resultados, *a priori*, só podem ser alcançados numericamente. Na verdade, não se conhece nem mesmo uma expansão assintótica para estas integrais, que viabilizem o seu cálculo analítico.

Neste contexto, a busca de uma expressão analítica para o *linking number* na teoria com massa topológica ainda é uma questão em aberto, que deixamos como perspectiva de um trabalho futuro.

Bibliografia

- [1] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski e G. Thompson, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.
- [2] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988) 353; *Comm. Math. Phys.* **118** (1988) 411; *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 351.
- [3] S. F. Edwards, *Proc. Phys. Soc.* **91** (1967) 513; *J. Phys. A: Math. Gen.* **1** (1968) 15.
- [4] M. D Frank-Kamenetski e A. V. Vologodski, *Sov. Phys. Usp.* **24**, Número 8 (1981) 679.
- [5] F. Ferrari e I. Lazzizzera, *Phys. Lett.* **B444** (1998) 167.
- [6] F. Brock-Fuller, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **68** (1971) 815; *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **75** (1978) 3557.
- [7] F. H. C. Crick, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **73** (1976) 2639.
- [8] W. R. Bauer, F. H. C. Crick e J. H. White, *Sci. Amer.* **243** (1980) 118.
- [9] M. B. Hindmarsh e T. W. B. Kibble, *Rep. Prog. Phys.* **58** (1995) 477.
- [10] T. Asselmeyer e R. Keiper, *Annalen Phys.* **4** (1995) 739.
- [11] L. H. Kauffman, *On Knots*, Princeton. Univ. Press, Princeton, 1987.
- [12] E. Guadagnini, *The Link Invariants of the Chern-Simons Field Theory*, De Gruyter, Berlin and New York, 1993.

- [13] S. S. Chern e J. Simons, *Ann. Math.* **99** (1974) 48.
- [14] K. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445.
- [15] J. L. Gervais e A. Neveu, *Phys. Lett.* **B80** (1979) 255.
- [16] Y. Nambu, *Phys. Lett.* **B80** (1979) 372.
- [17] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B82** (1979) 247.
- [18] M. A. Virasoro, *Phys. Lett.* **B82** (1979) 436.
- [19] Y. M. Makeenko e A. A. Migdal, *Phys. Lett.* **B88** (1979) 135; A. A. Migdal, *Ann. Phys.* **126** (1980) 279.
- [20] S. C. Zhang, T. H. Hansson e S. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 82.
- [21] J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 199.
- [22] S. C. Zhang, *Int. J. Mod. Phys. B* **6** (1992) 25.
- [23] G. Murthy e R. Shankar, *Field Theory of the Fractional Quantum Hall Effect-I*, cond-mat/9802244.
- [24] E. C. Marino, *Phys. Lett.* **B263** (1991) 63.
- [25] E. Fradkin e F. A. Schaposnik, *Phys. Lett.* **B338** (1994) 253.
- [26] F. A. Schaposnik, *Phys. Lett.* **B356** (1995) 39.
- [27] C. P. Burgess, C. A. Lutken e F. Quevedo, *Phys. Lett.* **B336** (1994) 18.
- [28] D. G. Barci, C. D. Fosco e L. E. Oxman, *Phys. Lett.* **B375** (1996) 267.
- [29] R. Barnejee e E. C. Marino, *Nucl. Phys.* **B507** (1997) 501.
- [30] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.
- [31] R. D. Pisarski e S. Rao, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 2081.

- [32] Luiz Boanerges Peixoto Jr., *Cálculos Perturbativos com o loop de Wilson*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, 1984.
- [33] S. Mandelstam, *Ann. Phys.* **19** (1962) 1.
- [34] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **175** (1968) 1580
- [35] D. Bohm e Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485.
- [36] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* **5** (1960) 3.
- [37] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) 445.
- [38] T. T. Wu e C. N. Yang, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 3845.
- [39] M. Abud, C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, *Nucl. Phys.* **B204** (1982) 109.
- [40] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B164** (1979) 171.
- [41] V. S. Dotsenko e S. N. Vergeles, *Nucl. Phys.* **B169** (1980) 527.
- [42] R. A. Brandt, F. Neri e M. Sato, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 879.
- [43] R. M. Marinho Jr. e Luiz Boanerges Peixoto Jr., *Nuovo Cimento* **A97** (1987) 148.
- [44] C. Callan, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1541.
- [45] K. Symanzki, *Comm. Math. Phys.* **18** (1970) 227.
- [46] D. Gross e F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 980.
- [47] H. D. Politzer, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 2174; H. D. Politzer, *Phys. Rep.* **C14** (1974) 129.
- [48] G. Giavarini, C. P. Martin e F. Ruiz Ruiz, *Nucl. Phys.* **B381** (1992) 222.
- [49] G. Giavarini, C. P. Martin e F. Ruiz Ruiz, *Nucl. Phys.* **B412** (1994) 731.
- [50] C. H. Tze, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A3** (1988) 1959.

- [51] C. H. Tze e S. Nam, *Ann. Phys.* **193** (1989) 419.
- [52] D. Gross, R. Pisarski e L. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 43.
- [53] T. Appelquist e R. Pisarski, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 2291.
- [54] G. V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, Les Houches Lectures, 1998.
- [55] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990.
- [56] J. Goryo e K. Ishikawa, *Phys.Lett.* **A246** (1998) 549.
- [57] R. Jackiw e C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 172.
- [58] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 661.
- [59] S. Deser, M. Duff e C. Isham, *Phys. Lett.* **B93** (1980) 419.
- [60] S. P. Sorella e outros, *trabalho em desenvolvimento*.
- [61] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press Inc, 1980.
- [62] G. Calugareanu, *Rev. Math Pure Appl.* **4** (1959) 5; *Czech. Math. Jour.* **11** (1961) 588.
- [63] W. F. Pohl, *Jour. Math. Mech.* **17** (1968) 693.
- [64] J. H. White, *Am. Journ. Math.* **91** (1969).
- [65] A. M Polyakov, *Mod. Phys. Lett.* **A3** (1988) 325.
- [66] V. E. R. Lemes, C. Linhares de Jesus, C. A. G. Sasaki, S. P. Sorella, L. C. Q. Vilar e O. S. Ventura, *Phys. Lett.* **B418** (1998) 324.
- [67] V. E. R. Lemes, C. Linhares de Jesus, S. P. Sorella, L. C. Q. Vilar e O. S. Ventura, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 045010.

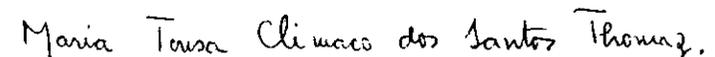
- [68] C. A. G. Sasaki, D. G. G. Sasaki e S. P. Sorella, *Mod. Phys. Lett. A* **14** (1999) 391.
- [69] V. E. R. Lemes, C. A. Linhares, S. P. Sorella e L. C. Q. Vilar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 2469.
- [70] V. E. R. Lemes, C. A. Linhares, D. G. G. Sasaki, S. P. Sorella e L. C. Q. Vilar, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 065008.
- [71] V. E. R. Lemes, S. P. Sorella, A. Tanzini, O. S. Ventura, L. C. Q. Vilar, *Linking Observables in Perturbed Topological Field Theories*, hep-th/9910069. Aceito para publicação no *Phys. Lett. B*.

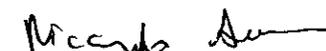
**“UM TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO PARA O
LINKING NUMBER EM TRÊS DIMENSÕES”**

Daniel Guilherme Gomes Sasaki

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Silvio Paolo Sorella - Presidente


Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomás


Ricardo Machado de Amorim


José Abdalla Helayël-Neto

Nami Fux Svaiter


Francesco Toppan - Suplente

Rio de Janeiro, 04 de fevereiro de 2000