

TESE DE DOUTORADO

Um Princípio Variacional para Ações em Espaços Simpléticos Simétricos

Pedro Paulo de Magalhães Rios

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Rio de Janeiro / 2000

*“A ciência moderna é matemática.
A questão decisiva é: o que significa matemática?
Ta matemata: As coisas das quais tomamos cognição,
como o que já sabemos serem de antemão.
Aquilo a respeito das coisas que nós realmente já sabemos.
Portanto, não nos apropriamos delas primeiramente,
mas, de certa forma, trazemo-nas já conosco.”*

M. Heidegger

Agradecimentos

Ao Prof. Alfredo Ozorio de Almeida,
pela motivação e orientação fundamental,
ao Prof. Gijs Tuynman,
pela colaboração e auxílio técnico e
ao Prof. Jair Köiller,
pelo incentivo e ajuda generosa.
Ao CNPq pelo suporte financeiro.
Aos meus pais por tudo e,
sobretudo, à minha esposa
Maria Teresa Furtado,
pelo apoio perseverante e imprescindível.

Índice

1	Introdução	1
2	Coordenadas Centrais em Espaços Planos	6
3	Grupoides Centrais	7
4	A Equação Central	21
5	Ações Centrais	31
6	Composição de Ações Centrais	44
7	Composições Múltiplas	53
8	O Princípio Variacional Central	60
9	Evolução Temporal de Ações Centrais	67
10	Conclusão	70
	Appêndice	72
	Referências	87

Resumo

Apresentamos uma definição geral de funções geratrizes, ou ações, que são funções reais em espaços simpléticos simétricos. Mostramos como estas geram transformações canônica finitas e discutimos as condições sob as quais isto é possível. Mostramos como elas se compõem e como elas estão relacionadas com as funções geratrizes infinitesimais, as hamiltonianas, via um princípio variacional geometricamente simples que determina as trajetórias clássicas. Finalmente discutimos a evolução temporal destas ações.

Abstract

We present a general definition of generating functions, or actions, which are real functions on symmetric symplectic spaces. We show how they generate finite canonical transformations and discuss the conditions under which this is possible. We show how they compose and how they are related to the infinitesimal generating functions, the hamiltonians, via a geometrically simple variational principle which determines the classical trajectories. Finally, we discuss the temporal evolution of these actions.

1 Introdução

As leis de Newton foram estabelecidas três séculos atrás. Sua base é a Lei de Inércia (Galileo-Descartes), que coloca o movimento retilíneo uniforme como a forma natural (ou livre) de movimento e representa o marco inicial do domínio matemático sobre os fenômenos físicos gerais (do movimento especialmente) em contrapartida à antiga teoria ptolomaica, restrita aos astros do sistema solar, e à física aristotélica, de caráter não matemático [1]. Num certo sentido, a segunda lei é quase tautológica da primeira, ao afirmar que, se o movimento não é livre, então é forçado (não livre), significando que deve haver uma “força” agindo sobre o objeto em movimento, a qual é definida como proporcional à não-naturalidade do movimento, qual seja, sua aceleração. Tal lei pode ser tomada, então, como a definição desta constante de proporcionalidade ou, equivalentemente, do conceito de “quantidade de movimento”, ou momento. Este último toma uma maior importância na medida em que se compreende (terceira lei) que o seu total é constante para todo sistema isolado (livre), embora, mais uma vez, seja bastante sutil de se determinar se a definição de sistemas isolados é independente ou tautológica. Vistas por si próprias, as três leis não parecem dizer muito mais a respeito de qualquer sistema, que a primeira lei somente. Mas, uma vez que formas matemáticas específicas são inferidas para as forças que agem ou interagem no sistema, começa a se desenrolar, então, todo o domínio da dinâmica clássica e, em consequência, muito da ciência física, como a conhecemos.

Porém, a compreensão da importância de se tomar em consideração as expressões matemáticas específicas para as “forças” em questão, a fim de se estabelecer formulações matemáticas auto-consistentes da dinâmica clássica, foi sendo desenvolvida paulatinamente. Ademais, as maneiras pelas quais tais “expressões” seriam formuladas foram se modificando progressivamente. Contemporâneo de Newton, foi Leibniz quem primeiramente anteviu a necessidade das formulações analíticas em substituição aos métodos essencialmente geométricos estabelecidos no *Principia*. O co-inventor do cálculo preferia lidar com os conceitos de “vis-viva” (energia cinética) e “função trabalho” (energia potencial) para a análise do movimento. O fato de que estas são funções escalares, o que a primeira vista impediria uma descrição completa de sistemas com vários graus de liberdade, foi compen-

sado pela descoberta de Maupertuis e Euler de que elas eram suficientes para formulação de um princípio geral que contém toda a informação dinâmica dos mais complexos sistemas, o princípio variacional, no qual a ação de cada desenvolvimento potencial de um sistema é mínima (estacionária) no seu desenvolvimento factual (a trajetória clássica do sistema). Assim, Lagrange desenvolveu o cálculo de variações o qual possibilitou uma melhor formulação deste princípio, cuja consequência direta foi o surgimento de um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem para descrever a dinâmica de um sistema de n graus de liberdade, as equações de Lagrange.

Posteriormente, Hamilton transformou estas n equações de segunda ordem em $2n$ equações de primeira ordem ao re-introduzir a importância fundamental do conceito de momento, dando ao princípio variacional e suas conseqüentes equações seu caráter mais preciso e “canônico”. Neste formalismo, portanto, os conceitos de posição e momento foram colocados em pé de igualdade, definindo o que hoje é conhecido como espaço de fase, cujas propriedades específicas podem ser identificadas no conceito de variedade simplética. Nesta, a dinâmica é determinada por qualquer função real diferenciável, através de um conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem, conhecido como as equações de Hamilton, cujas soluções para tempos finitos (trajetórias clássicas) coincidem com as soluções dos princípios variacionais apropriadamente definidos. Finalmente, foi Jacobi quem desenvolveu a teoria das transformações que preservam estas “equações canônicas”, as transformações canônicas, e quem melhor identificou no conceito de ação estacionária seu caráter de função geratriz de uma transformação canônica para tempos finitos, o que possibilitou ainda o surgimento de uma nova equação a derivadas parciais para descrever a dinâmica de um sistema genérico, a equação de Hamilton-Jacobi [2].

Agora, esta definição abstrata do espaço de fase, acima, como uma variedade diferencial munida de uma 2-forma fechada não degenerada w , proporciona amplas generalizações do formalismo hamiltoniano, como apresentado em livros texto [3]. Nestes, porém, o espaço de fase é usualmente tratado, primeiramente, como um espaço euclidiano \mathbb{R}^{2n} , com coordenadas $\{(p_i, q_i)\}$ tal que $w = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ e a função hamiltoniana $h(p_i, q_i)$ gera as equações de movimento $\dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i}$. Mas, enquanto as equações de Hamilton podem ser escritas na forma geral $dh + \vec{x} \rfloor w = 0$ para qualquer variedade

simplética, outras propriedades importantes e já familiares do formalismo canônico da mecânica clássica não são sempre extensíveis a espaços curvos de maneiras óbvias. Ademais, embora o teorema de Darboux permita que usemos coordenadas locais (p, q) em variedades simpléticas gerais, estas não são sempre as mais convenientes de se usar (considere a esfera, por exemplo). É desejável, portanto, que tenhamos formalismos que levem em consideração a geometria específica do espaço de fase, explicitamente.

Por outro lado, a importância de considerarmos geometrias não triviais pode na verdade ser vista de várias perspectivas diferentes. Embora a Lei de Inércia coloque a geometria euclideana num status privilegiado, uma vez que um sistema esteja sujeito a vínculos ou restrições não triviais, seu espaço de fase próprio deixa de ter uma geometria trivial, genericamente [3,4]. Similarmente, para um sistema que seja invariante por uma dada ação de grupo (chamado grupo de simetrias), é frequentemente possível de se eliminar os graus de liberdade redundantes e o espaço de fase resultante, ou reduzido, é geralmente não trivial [3]. Alternativamente, sem mencionar contextos relativísticos, onde a geometria euclideana perde seu privilégio, podemos estar interessados no limite clássico de sistemas quânticos, que sejam não-euclidianos, como sistemas de spin, por exemplo [3d,5]. Equivalentemente, é conveniente haver formalismos da dinâmica clássica que estejam intimamente conectados a algumas representações importantes usadas em mecânica quântica. Por exemplo, estados coerentes [6] ou, mais próximo do trabalho em mãos, a “representação de centro” de operadores (símbolos de Weyl) [7]. Novamente, é muitas vezes desejável ter estas formulações “semiclássicas” em geometrias não triviais também, mas isto requer formalismos clássicos previamente bem definidos.

Especificamente, precisamos de boas definições para ações, ou funções geratrizes de transformações canônicas finitas num espaço de fase M . Quando M é o fibrado contangente sobre um espaço de configuração geral Q estas funções são definidas em $Q \times Q$. Quando M é uma variedade Kähler geral [8], cujas métrica e forma simplética são relacionadas via sua estrutura complexa, as funções geratrizes são bi-holomorfas em $M_C \times \overline{M}_C$. Ademais, neste caso as trajetórias são complexas, em princípio. Apesar da utilidade das formulações complexas e da conveniência das ações definidas em espaços de configuração para tratar uma variedade de problemas, podemos nos beneficiar enormemente de um for-

malismo que nos leve a ações que sejam funções reais em variedades simpéticas não-triviais e suas relações com os fluxos hamiltonianos reais obtidos de um princípio variacional real, i.e. um princípio variacional no espaço de funções reais diferenciáveis em M .

Aqui, apresentamos tal formalismo. Este trabalho é uma generalização do conceito de “funções geratrizes de centro” desenvolvido para espaços euclidianos em [7,9]. Tais funções, como as hamiltonianas, são funções reais no próprio M , não em um par de coordenadas (locais) lagrangeanas, como (q_-, q_+) ou $(z_-, \bar{z}_+) \cdots$. Um argumento de uma tal função pode ser visto como o “centro” da transformação canônica $m_- \mapsto m_+$ que é gerada implicitamente pela dada função. O princípio variacional correspondente afirma que, para uma família apropriada de caminhos $\nu : [0, t] \rightarrow M$ cujas extremidades são “centradas” em m , a ação

$$\left\{ - \int_{\nu} h(m'(t'), t') dt' + \mathcal{S}_{\nu} w \right\} (m, t)$$

é estacionária para a trajetória clássica. Aqui, $\{\mathcal{S}_{\nu} w\}(m, t)$ é a área simplética entre a curva ν e o arco geodésico de $\nu(t)$ a $\nu(0)$ centrado em m .

A restrição à seguinte teoria é de que o espaço simplético M seja um espaço simétrico [10]. Isto significa que M admite uma métrica completa tal que todo ponto $m \in M$ seja o ponto fixo isolado de uma involução canônica isométrica de M em M que coincide com a inversão, em m , do fluxo geodésico, para todas as geodésicas por m . Desta maneira, esta presente formulação do princípio variacional é invariante ao menos com respeito a transformações gerais em M que preservem a métrica e a forma simplética.

A generalização do espaço simplético plano para espaços simpléticos simétricos gerais inicia-se com a noção de espaço de fase duplo DM , comum a ambos [3c]. Porém, enquanto é possível usar a propriedade de grupo em $M \equiv \mathbb{R}^{2n}$ para definir o grupo de reflexões e translações, a partir do qual a teoria plana se desenvolve (§ 2), tal construção não tem equivalente nos casos curvos. Ao invés, usamos uma estrutura algébrica que está sempre presente em DM , qual seja, o fato de que DM é um grupoide simplético [11]. Então, via um “mapa exponencial simétrico”, vemos todas as estruturas de DM em um subconjunto do fibrado tangente sobre M , TM . É lá que definimos a noção de grupoide central, como apresentado em § 3 (para o espaço euclidiano, a distinção entre TM e DM é irrelevante).

Com tais estruturas “pull-back” em TM , vemos os gráficos de transformações canônicas

$\alpha : M \rightarrow M$, como subvariedades lagrangeanas Λ_α de (subconjuntos de) TM . Ademais, o próprio M , visto também como a seção zero de TM , pode ser identificado com a transformação identidade o que, juntamente com as propriedades específicas da forma simplética pull-back em TM , nos permite definir, em § 4, funções geratrizes (locais) para transformações canônicas finitas, que são funções reais em M . Porém, tais funções geram transformações bem definidas só quando Λ_α é um gráfico sobre a seção zero de TM , além de ser a pré-imagem de um gráfico de uma transformação canônica em M , visto em DM . Estas considerações são discutidas em § 5.

A composição de duas transformações canônicas, enquanto geradas por tais “ações centrais”, é tratada em § 6. Aqui, novamente vemos que, apesar de sua natureza abstrata, a regra de composição destas é muito simples. Se f_{α_1} é a ação central para α_1 e f_{α_2} é a ação central para α_2 , então a ação central composta para $\alpha_2 \circ \alpha_1$ é

$$f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}(m) = Stat_{(m_1, m_2)} \{f_{\alpha_1}(m_1) + f_{\alpha_2}(m_2) + \Delta(m, m_1, m_2)\}$$

onde $\Delta(m, m_1, m_2)$ é a área simplética do triângulo geodésico com dados pontos médios. Esta regra naturalmente generaliza o resultado previamente obtido em espaços planos [7,9]. Ao iterar estas composições em § 7, chegamos ao princípio variacional central, tomando o limite de um número infinito de transformações canônicas infinitesimais (§ 8).

As discussões finais são dedicadas à evolução temporal destas ações centrais que são “extensões para tempos finitos” de hamiltonianas. Aqui (§ 9) descrevemos uma versão central da equação de Hamilton-Jacobi e, mais geralmente, apresentamos a derivada temporal destas ações centrais com respeito a fluxos hamiltonianos quaisquer, misturando assim a formulação de Hamilton-Jacobi com os parênteses de Poisson.

Ao apresentar estes conceitos abstratos usaremos muitas vezes exemplos particulares para fins de ilustrar o texto e às vezes guiar o leitor. Por razões de simplicidade, concentramos nos exemplos mais simples em duas dimensões, o plano euclidiano \mathbb{R}^2 , o toro T^2 , a esfera S^2 e o plano hiperbólico não compacto H^2 . Evidentemente, estender tais exemplos a seus produtos cartesianos $M = \mathbb{R}^{2n}$, $S^2 \times S^2$, $H^2 \times T^2$, etc... é razoavelmente direto e não foi considerado aqui. Deve ser enfatizado, porém, que a teoria se aplica a espaços simpléticos simétricos gerais de dimensão (par) arbitrária.

2 Coordenadas Centrais em Espaços Planos

Considere o plano euclidiano \mathbb{R}^2 , representando o mais simples espaço de fase de um único grau de liberdade. \mathbb{R}^2 é um grupo, sob adição de vetores, e podemos também identificar o produto de grupo como uma ação livre transitiva de \mathbb{R}^2 em si próprio, as translações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\vec{\xi}, \vec{x}) \mapsto \vec{x} + \vec{\xi} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{\xi} \end{array} \right\}$$

Ademais, \mathbb{R}^2 admite uma involução natural:

$$\mathcal{R}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{R}_0(\vec{x}) = -\vec{x},$$

que representa uma reflexão, ou rotação por π , pela origem. Junta com a transformação identidade, estas nos dão uma ação de \mathbb{Z}_2 em \mathbb{R}^2 . Podemos formar o produto semidireto:

$$(RT := \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{R}^2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

RT é chamado o grupo de reflexão-translação que pode também ser visto como um subgrupo normal do grupo simplético inhomogêneo $iSp(2)$. Os elementos da forma:

$$\mathcal{R}_{\vec{x}} = (T_{\vec{x}}\mathcal{R}_0T_{-\vec{x}}) = T_{2\vec{x}}\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0T_{-2\vec{x}}$$

agora agem como reflexões através do ponto \vec{x} :

$$\mathcal{R}_{\vec{x}}(\vec{x}') = 2\vec{x} - \vec{x}' \Leftrightarrow \mathcal{R}_{\vec{x}}(\vec{x}' - \vec{x}) = -(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Desta forma, encontramos as duas cópias de \mathbb{R}^2 em RT , $RT \equiv \{T_{\vec{\xi}}, \mathcal{R}_{\vec{x}}\}$ satisfazendo:

$$\left. \begin{array}{l} T_{\vec{\xi}}T_{\vec{\xi}'} = T_{(\vec{\xi}+\vec{\xi}')} \quad , \quad T_{\vec{\xi}}\mathcal{R}_{\vec{x}} = \mathcal{R}_{(\vec{x}+\vec{\xi}/2)} \\ \mathcal{R}_{\vec{x}}\mathcal{R}_{\vec{x}'} = T_{2(\vec{x}-\vec{x}')} \quad , \quad \mathcal{R}_{\vec{x}}T_{\vec{\xi}} = \mathcal{R}_{(\vec{x}-\vec{\xi}/2)} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Agora, seja $(\vec{x}_-, \vec{x}_+) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tal que

$$\vec{x}_+ = \mathcal{R}_{\vec{x}}(\vec{x}_-) \Leftrightarrow \vec{x}_- = \mathcal{R}_{\vec{x}}(\vec{x}_+).$$

Então, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ é chamado o centro do par (\vec{x}_-, \vec{x}_+) . De fato, temos que

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x}_- + \vec{x}_+),$$

logo, para a métrica euclideana, \vec{x} coincide com o ponto médio do arco geodésico que une \vec{x}_- a \vec{x}_+ . O elemento $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$T_{\vec{\xi}}(\vec{x}_-) = \vec{x}_+ \Leftrightarrow \vec{\xi} = \vec{x}_+ - \vec{x}_-$$

é chamado de a coordenada de corda de (\vec{x}_-, \vec{x}_+) . Em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a transformação $(\vec{x}_-, \vec{x}_+) \rightarrow (\vec{x}, \vec{\xi})$, como definida acima, é uma bijeção.

Finalmente, notemos como o grupo de translações em \mathbb{R}^2 pode ser interpretado como uma combinação de pares: Seja: $\vec{x}_+ = T_{\vec{\xi}'}(\vec{x}_\lambda)$, $\vec{x}_- = T_{-\vec{\xi}''}(\vec{x}_\lambda)$. Então,

$$\vec{x}_+ = T_{\vec{\xi}'} T_{\vec{\xi}''}(\vec{x}) = T_{(\vec{\xi}' + \vec{\xi}'')}(\vec{x}_-).$$

Mas se notarmos que uma ação de \mathbb{R}^2 em si próprio, $\vec{x}_+ = T_{\vec{\xi}}(\vec{x}_-) = \vec{x}_- + \vec{\xi}$, pode ser identificada por qualquer um dos pares $(\vec{x}_-, \vec{\xi})$, $(\vec{x}_+, \vec{\xi})$, (\vec{x}_-, \vec{x}_+) unicamente, podemos então reescrever a composição de translações acima como:

$$(\vec{x}_-, \vec{x}_\lambda) \odot (\vec{x}_\lambda, \vec{x}_+) = (\vec{x}_-, \vec{x}_+) \quad (2.2)$$

Embora (2.2) tenha sido derivada do produto de grupo em \mathbb{R}^2 , esta pode ser generalizada para espaços que não são grupos. Em outras palavras, podemos inverter o argumento e tomar (2.2) como a estrutura algébrica fundamental em $M \times M$, para M genérico. Isto introduz o conceito de grupoide.

3 Grupoides Centrais

Definição 3.1 Sejam os espaços Γ, M . Diz-se que Γ é um grupoide sobre M , denotado por $\Gamma \rightrightarrows M$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

Gd.0) \exists projeções $P_-, P_+ : \Gamma \rightarrow M$, chamadas de mapas fonte e alvo, respectivamente.

Gd.1) Seja $(\Gamma \times \Gamma) \supset \Gamma_2 := \{(\gamma', \gamma'') | P_+(\gamma') = P_-(\gamma'')\}$. Γ_2 é chamado o conjunto dos elementos componíveis. Então, \exists um mapa associativo

$$“\odot” : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma, (\gamma', \gamma'') \mapsto \gamma' \odot \gamma'',$$

satisfazendo

$$P_-(\gamma' \odot \gamma'') = P_-(\gamma'), P_+(\gamma' \odot \gamma'') = P_+(\gamma'').$$

Gd.2) \exists uma involução

$$i: \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad i \neq 1, \quad i^2 = 1,$$

chamada inversão, t.q.

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \bar{\gamma} \equiv i(\gamma),$$

seu inverso (único), satisfaz:

$$\bar{\gamma} \odot (\gamma \odot \gamma') = \gamma' \text{ se } (\gamma, \gamma') \in \Gamma_2, \quad (\gamma' \odot \gamma) \odot \bar{\gamma} = \gamma' \text{ se } (\gamma', \gamma) \in \Gamma_2.$$

M pode ser identificado com o conjunto dos identidades em Γ , definido como

$$\Gamma_e := \{ \gamma \odot \bar{\gamma}, \text{ ou } \bar{\gamma} \odot \gamma \mid \gamma \in \Gamma \}.$$

Qualquer elemento identidade $\gamma_e \in \Gamma_e$ satisfaz

$$P_-(\gamma_e) = P_+(\gamma_e),$$

mas o contrário não é necessariamente verdadeiro.

- Os exemplos mais simples de grupoides são:

i) Γ é um grupo G , $\Gamma_e \equiv \{e\} \equiv M$, $\Gamma_2 \equiv G \times G$

ii) O grupoide de pares $\Gamma \equiv M \times M$, P_- e P_+ sendo a primeira e segunda projeções, (ou restrições) respectivamente. Neste caso, $\Gamma_e \equiv \{(m, m) \mid m \in M\} \subset M \times M$, $\Gamma_e \simeq M$. Inversão é permutação: $i(m', m'') = (m'', m')$, e a composição é

$$(m_-, m_\lambda) \odot (m_\lambda, m_+) = (m_-, m_+) \quad (3.1)$$

que vem a ser a generalização de (2.2) que procurávamos. Estes dois exemplos são complementares no sentido de terem, respectivamente, o mínimo e o máximo espaços de identidade possíveis (exceto para casos triviais como $\Gamma \equiv e$).

Como nosso interesse primário é em dinâmica, concentrar-nos-emos em grupoides Γ que são também variedades simpléticas e para os quais a composição de grupoide respeita sua estrutura simplética.

Definição 3.2 Um grupoide $\Gamma \rightrightarrows M$ é simplético se (Γ, w_Γ) é uma variedade simplética e as seguintes propriedades adicionais são satisfeitas:

LGd) $M \simeq \Gamma_e$ é uma subvariedade de Γ , P_\pm são submersões e $i : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\cdot : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma$ são suaves. Neste caso, Γ é chamado um grupoide de Lie.

SGd) O gráfico de “ \odot ” é uma subvariedade lagrangeana de $\Gamma \times \Gamma \times \bar{\Gamma}$, onde $\Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ é um isomorfismo antisimplético: $(\bar{\Gamma}, w_{\bar{\Gamma}}) \equiv (\Gamma, -w_\Gamma)$. Em outras palavras,

$$w_\Gamma(\gamma) = w_\Gamma(\gamma_1) + w_\Gamma(\gamma_2) ,$$

quando

$$\gamma = \gamma_1 \odot \gamma_2 .$$

Como consequência, $M \simeq \Gamma_e$ é uma subvariedade lagrangeana de Γ e inversão é anti-simplética, i.e. o gráfico de “ i ” é uma subvariedade lagrangeana de $\Gamma \times \Gamma$.

- **Exemplo:** Seja M uma variedade simplética, cuja forma simplética é w . Então, o grupoide de pares $\bar{M} \times M$, com forma simplética $w_\Gamma = \delta w$, onde

$$\delta w := P_+^*(w) - P_-^*(w) \equiv w_+ - w_- , \quad (3.2)$$

é um grupoide simplético, chamado de Espaço de Fase Duplo e denotado por DM , ou seja, $DM \equiv (\bar{M} \times M) \rightrightarrows M$. Note que, enquanto DM satisfaz SGd, o produto cartesiano $M \times M$, com a forma simplética usual $w \oplus w$, não o satisfaz.

De forma a definir a noção de “cento” precisamente, precisamos considerar espaços de fase M que sejam não apenas simpléticos mas que também tenham a propriedade de serem simétricos:

Definição 3.3 Uma variedade diferenciável M munida de uma forma simplética w será chamada de um *Espaço Simplético Simétrico* se (M, w) admite uma métrica completa η tal que, $\forall m \in M$, m é o ponto fixo isolado de um simplectomorfismo isométrico involutivo $\mathcal{R}_m : M \rightarrow M$. Isto é, dado η , seja $d(m, m') \equiv$ distância geodésica mínima entre m e m' . Assim, $\forall m \in M$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall m' \in M$ satisfazendo $d(m, m') < \varepsilon$ temos que $\mathcal{R}_m(m') = m' \iff m' = m$, e \mathcal{R}_m satisfaz $\mathcal{R}_m^2 = \mathbb{1}$,

$\mathcal{R}_m^*(\eta, w) = (\eta, w)$. Ademais, \mathcal{R}_m é tal que coincide com a inversão, em m , do fluxo geodésico, para todas as geodésicas por m .

Um caso particular é quando M é uma variedade Kähler (uma variedade riemanniana com uma estrutura complexa J , um campo tensorial do tipo (1,1) satisfazendo $J^2 = -\mathbb{1}$ e $\nabla J = 0$, cuja forma simplética é definida por $\eta(JX, Y) =: w(X, Y)$, $\forall X, Y \in T_m M, \forall m \in M$) [8], para a qual a involução isométrica \mathcal{R}_m é holomorfa. Tais espaços são chamados de hermiteanos simétricos e podem também ser fatorados em espaços quocientes de grupos de Lie. Isto é, cada fator é da forma: $M = G/K$, K um subgrupo maximal compacto (com centro não discreto) do grupo de Lie conexo G (cujo centro é trivial), com (η, w) sendo G -invariante [10].

Como exemplos mais simples de espaços simpléticos simétricos, vamos considerar o plano euclidiano \mathbb{R}^2 e o toro T^2 , ambos os quais são grupos. Como exemplos curvos mais simples, vamos considerar a esfera $S^2 = SO(3)/S^1$ (ou $SU(2)/S^1$) e o plano hiperbólico não compacto $H^2 = SO(2, 1)/S^1$ (ou $SU(1, 1)/S^1$), ambos os quais são espaços hermiteanos simétricos.

Assim, denotemos o mapa exponencial riemanniano por

$$\text{Exp}_m : T_m M \rightarrow M, \quad \vec{v} \mapsto \rho_\tau(1),$$

onde

$$\rho_\tau(t) \text{ é a geodésica em } M$$

definida por

$$\rho_\tau(0) = m, \quad \dot{\rho}_\tau(0) = \vec{v}.$$

Quando M é um espaço simplético simétrico, podemos definir uma estrutura de grupoide (restrita) diretamente em (um subconjunto de) seu fibrado tangente TM , associado ao espaço de fase duplo DM , através do mapa exponencial simétrico:

$$\Phi : TM \rightarrow DM, \quad \tau = (m, \vec{v}) \mapsto \gamma = (\text{Exp}_m(-\vec{v}), \text{Exp}_m(\vec{v})).$$

Aqui, Φ é simétrico no sentido de que

$$(\mathcal{R}_m \circ \Phi)(m, \vec{v}) = \Phi(m, -\vec{v})$$

e portanto

$$\gamma \rightarrow \bar{\gamma} \equiv i(\gamma) .$$

Denotando

$$\Omega = \Phi^*(\delta w) ,$$

δw definida em (3.2), temos que Ω é uma 2-forma fechada em TM pois δw é uma forma simplética em DM . Se M for não-compacta, Φ é uma bijeção e (TM, Ω) é uma variedade simplética, mas se M for compacta, Φ não é globalmente inversível. Consideremos pois o conjunto

$$(TM)_0 \subset TM, (TM)_0$$

sendo o máximo subconjunto conectado à seção zero

$$T^0M \equiv \{(m, \vec{0})\} \subset TM ,$$

no qual Φ é inversível. Denotemos

$$\Phi_0 := \Phi|_{(TM)_0} , \quad \Omega_0 := \Omega|_{(TM)_0} \equiv \Phi_0^*(\delta w) .$$

Então, $((TM)_0, \Omega_0)$ é uma variedade simplética. Embora não sobrejetiva, assumimos que

$$\Phi_0 : (TM)_0 \rightarrow DM$$

apenas deixa de fora um subconjunto de medida zero com respeito à medida de Liouville em DM , obtida via δw . Estes fatos nos motivam a uma certa modificação no conceito de grupoides simpléticos, de acordo com nossos propósitos:

Definição 3.4 Seja M um espaço simplético simétrico. Então, $((TM)_0, \Omega_0)$ é chamado o Grupoide Central Standard sobre M , denotado por $(TM)_0 \rightrightarrows M$, satisfazendo:

CG.O) \exists projeções P_0, P_-, P_+ , chamadas de mapas central, fonte e alvo, respectivamente, onde $P_0(m, \vec{v}) = m$ é a projeção natural e $P_{\pm}(m, \vec{v}) = \text{Exp}_m(\pm\vec{v})$.

CG.1) Seja o conjunto *restrito* de elementos componíveis $(TM)_0^2 \subset ((TM)_0 \times (TM)_0)$ definido por:

$$(TM)_0^2 := \{(\tau', \tau'') \mid P_+(\tau') = P_-(\tau'') \text{ and } (P_-(\tau'), P_+(\tau'')) \in \text{Image}(\Phi_0) \subset DM\} .$$

então, \exists um mapa associativo,

$$“\odot” : (TM)_0^2 \rightarrow (TM)_0, (\tau', \tau'') \mapsto \tau' \odot \tau'' ,$$

satisfazendo

$$P_-(\tau' \odot \tau'') = P_-(\tau') , P_+(\tau' \odot \tau'') = P_+(\tau'') .$$

Esta composição pode ser definida via grupoide de pares por

$$\tau' \odot \tau'' \equiv \Phi_0^{-1} (P_-(\tau'), P_+(\tau'')) ,$$

quando $(\tau', \tau'') \in (TM)_0^2$.

CG.2) \exists uma involução

$$i : (TM)_0 \rightarrow (TM)_0 ,$$

chamada inversão, satisfazendo todas as propriedades em (Gd.2) mais

$$P_0(i(\tau)) = P_0(\tau) , \forall \tau \in (TM)_0 .$$

Especificamente, se $\tau = (m, \vec{v})$ então, $\bar{\tau} \equiv i(\tau) = (m, -\vec{v})$. Logo, i coincide com a inversão natural na fibra, $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$. Similarmente, $\Phi_0(\bar{\tau}) = \mathcal{R}_m(\Phi_0(\tau))$, portanto

$$i(\tau) \equiv \left(\Phi_0^{-1} \circ \mathcal{R}_m \circ \Phi_0 \right) (\tau) , m = P_0(\tau) , \forall \tau \in (TM)_0 .$$

CG.3) O espaço das identidades $(TM)_0^e$ é a seção zero $T^0M \simeq M$, que é uma subvariedade de $(TM)_0$ e $i : (TM)_0 \rightarrow (TM)_0$ é suave. Porém, P_{\pm} são apenas submersões locais e $\odot : (TM)_0^2 \rightarrow (TM)_0$ localmente suave. $(TM)_0$ é chamado um grupoide de Lie local.

CG.4) O gráfico de “ \odot ” é a união de subvariedades lagrangeanas de $(TM)_0 \times (TM)_0 \times (\overline{TM})_0$. O gráfico de “ i ” é uma de subvariedade lagrangeana de $(TM)_0 \times (TM)_0$, a seção zero sendo uma subvariedade lagrangeana de $(TM)_0$. Podemos chamar $((TM)_0, \Omega_0)$ de um grupoide simplético local.

A definição acima é genérica. Porém, quando M é não-compacta $(TM)_0 \equiv TM$, $\Phi_0 \equiv \Phi$, TM é difeomórfico a DM . Neste caso então, as palavras “restrito” e “local” não se aplicam e o Grupoide Central (TM, Ω) é um grupo simplético de fato, com a estrutura extra de um mapa central.

- **Exemplos:** $(T\mathbb{R}^2)_0 \equiv T\mathbb{R}^2$, $(TH^2)_0 \equiv TH^2$, os casos triviais pois tanto \mathbb{R}^2 como H^2 são não-compactos. Para o toro \mathcal{T}^2 , temos o seguinte: Denotemos por AS^1 o conjunto de antipodais em $S^1 \times S^1$, i.e. $\{(\varphi, \varphi \pm \pi)\}$, na representação usual $S^1 \ni e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Consideremos o subconjunto

$$TT^2 \supset (TT^2)_0 := \{\tau = (p, q ; v_p, v_q) \mid |v_p|, |v_q| < \pi/2\} ,$$

então, $\Phi_0 : (TT^2)_0 \rightarrow DT^2 \setminus (AS^1 \times AS^1)$ é bijetivo. Claramente, $AS^1 \times AS^1$ é um subconjunto de medida zero em $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{T}^2$. Para a esfera S^2 , a situação é bem similar: Denotemos por AS^2 o conjunto de antipodais em DS^2 . Tomando o subconjunto

$$TS^2 \supset (TS^2)_0 := \{\tau = (m, \vec{v}) \mid |\vec{v}| < \pi/2\} ,$$

então $\Phi_0 : (TS^2)_0 \rightarrow DS^2 \setminus AS^2$ é bijetivo. Novamente, AS^2 tem medida zero em DS^2 .

A aplicação de grupoides centrais em análises locais da mecânica clássica baseia-se no seguinte fato crucial:

Definição 3.5 Seja N um espaço simplético. Uma *Polarização* em N é uma folheação integrável de N por folhas lagrangeanas.

Lema 3.1 A fibração definida por P_0 é uma polarização em $((TM)_0, \Omega_0)$, chamada de *Polarização Central*, ou vertical.

Prova: Primeiramente, notemos que toda fibração é uma folheação integrável. Em segundo, como cada fibra é (um subconjunto de) o espaço tangente em cada ponto de M , a dimensão da fibra é metade da dimensão total de $(TM)_0$. Para provar que cada fibra é isotrópica com respeito à forma simplética $\Omega_0 = \Phi_0^*(\delta w)$, notemos que a inversão é antisimplética em $(TM)_0$, i.e.

$$i^*(\Omega_0) = -\Omega_0 .$$

Por outro lado, denotando a restrição da fibra por $(T_m M)_0$, temos que

$$i_m := i \Big|_{(T_m M)_0} \equiv \Phi_0^{-1} \circ \mathcal{R}_m \circ \Phi_0 .$$

Mas como w é invariante por \mathcal{R}_m ,

$$\mathcal{R}_m^*(w) = w ,$$

segue que

$$i_m^*((\Omega_0)_m) = (\Omega_0)_m ,$$

onde $(\Omega_0)_m \equiv \Omega_0|_{(TM)_0}$. Logo, $(\Omega_0)_m \equiv 0$.

Porém, quando M é compacto, o grupoide central standard não é o único grupoide central possível. Para ver isto, consideremos um outro subconjunto $(TM)_1 \subset TM$ satisfazendo:

$$(TM)_1 \cap (TM)_0 = \emptyset \quad \text{e} \quad \Phi((TM)_1) = \Phi((TM)_0) \equiv (DM)_0 \subset DM .$$

Ademais, denotando o mapa restrito por $\Phi_1 \equiv \Phi|_{(TM)_1}$, limitemos a atenção àqueles subconjuntos nos quais Φ_1 é quase sempre injetivo. Em outras palavras, o conjunto $N \subset (DM)_0$ no qual Φ_1^{-1} é múltiplo tem medida zero com respeito à medida de Liouville em DM obtida via δw . Então, definindo uma relação de equivalência entre diferentes pré-imagens em $(TM)_1$ do mesmo ponto em $(DM)_0$, temos uma outra bijeção

$$\tilde{\Phi}_1 : (\widetilde{TM})_1 \rightarrow (DM)_0 , \quad \text{onde} \quad (\widetilde{TM})_1 \equiv (TM)_1 / \sim_1$$

com a relação de equivalência

$$\tau \sim_1 \tau' \text{ sse } \Phi_1(\tau) = \Phi_1(\tau') .$$

Desta forma, denotemos tais pontos em $(\widetilde{TM})_1$ por

$$\hat{\tau} = [\tau]_1 , \quad \text{onde} \quad [\tau]_1 = \{\tau' \in (TM)_1 \mid \tau' \sim_1 \tau\} ,$$

como definido acima. Se $M \subset (DM)_0$ é a diagonal, sua pré-imagem

$$\tilde{\Phi}_1^{-1}(M) =: \widetilde{T^1M}$$

é uma seção transversal global de $(\widetilde{TM})_1$, definindo uma fibração

$$P_1 : (\widetilde{TM})_1 \rightarrow \widetilde{T^1M}$$

t.q., se

$$\tilde{\tau} \in (\widetilde{TM})_1 \text{ e } \tilde{\tau}^1 \in \widetilde{T^1M} ,$$

então

$$P_1(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}^1 \text{ sse } P_0(\tau) = P_0(\tau^1) .$$

Em outras palavras, o mapa central P_1 é essencialmente o próprio mapa $P_0 : TM \rightarrow M$. Denotemos $\Omega_1 \equiv \tilde{\Phi}_1^*(\delta w)$.

Definição 3.6 Nós chamaremos $((\widetilde{TM})_1, \Omega_1) \xrightarrow{P_1} (\widetilde{T^1M} \simeq M, w)$ de um *Grupoide Central não-Standard*. Com definição similar para $(\widetilde{TM})_1^2 \subset (\widetilde{TM})_1 \times (\widetilde{TM})_1$, i.e.

$$(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}') \in (\widetilde{TM})_1^2 \text{ sse } \tilde{P}_+(\tilde{\tau}) = \tilde{P}_-(\tilde{\tau}') \text{ e } (\tilde{P}_-(\tilde{\tau}), \tilde{P}_+(\tilde{\tau}')) \in (DM)_0 ,$$

onde os mapas fonte e alvo \tilde{P}_\pm são definidos por

$$\tilde{P}_\pm(\tilde{\tau}) \equiv P_\pm(\tau), \quad \forall \tau \in \tilde{\tau} ,$$

o produto de grupoide restrito $\odot : (\widetilde{TM})_1^2 \rightarrow (\widetilde{TM})_1$ é dado por

$$\tilde{\tau} \odot \tilde{\tau}' \equiv \tilde{\Phi}_1^{-1} \left(\tilde{\Phi}_1(\tilde{\tau}) \odot \tilde{\Phi}_1(\tilde{\tau}') \right) .$$

e a inversa por

$$i(\tilde{\tau}) \equiv \tilde{\Phi}_1^{-1}(i(\tilde{\Phi}_1(\tilde{\tau})))$$

Ainda, se $(\widetilde{TM})_2 \xrightarrow{P_2} \widetilde{T^2M}$ é um outro grupoide central, dizemos que $(\widetilde{TM})_2$ é fortemente equivalente a $(\widetilde{TM})_1$, denotado

$$(\widetilde{TM})_2 \simeq (\widetilde{TM})_1$$

se, para todo

$$\tilde{\tau} \in (\widetilde{TM})_1 \text{ e } \tilde{\tau}' \in (\widetilde{TM})_2$$

tal que

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{\tau}) = \tilde{\Phi}_2(\tilde{\tau}') ,$$

segue que

$$P_1(\tilde{\tau}) = P_2(\tilde{\tau}') .$$

Se $\tilde{\Phi}_1(\tilde{\tau}) = \tilde{\Phi}_2(\tilde{\tau}')$ mas $P_1(\tilde{\tau}) \neq P_2(\tilde{\tau}')$, dizemos que $\tilde{\tau}'$ é fracamente equivalente a $\tilde{\tau}$, denotado $\tilde{\tau}' \sim \tilde{\tau}$.

- **Exemplos:** Quando $M = \mathcal{T}^2$, o toro, \exists 4 grupoides centrais fortemente inequivalentes. O standard e mais 3 outros definidos por:

$$\begin{aligned} (T\mathcal{T}^2)_{01} &\equiv \{ \tau = (p, q, v_p, v_q) \mid |v_p| < \pi/2, |v_q - \pi| < \pi/2 \} \\ (T\mathcal{T}^2)_{10} &\equiv \{ \tau = (p, q, v_p, v_q) \mid |v_p - \pi| < \pi/2, |v_q| < \pi/2 \} \\ (T\mathcal{T}^2)_{11} &\equiv \{ \tau = (p, q, v_p, v_q) \mid |v_p - \pi| < \pi/2, |v_q - \pi| < \pi/2 \} \end{aligned}$$

Desta forma, denotamos $(T\mathcal{T}^2)_0 \equiv (T\mathcal{T}^2)_{00}$. Notemos que neste caso, todos os grupoides centrais não-standard são subconjuntos simples de TM , i.e. nenhuma relação de equivalência teve que ser considerada pois cada $\Phi_{ij} \equiv \Phi|_{(T\mathcal{T}^2)_{ij}}$ já é injetiva. Portanto, cada ponto em $(DT^2)_0$ tem 4 pré-imagens fortemente inequivalentes:

$$(p, q, v_q, v_q), (p \pm \pi, q, v_p \pm \pi, v_q), (p, q \pm \pi, v_p, v_q \pm \pi) \text{ e } (p \pm \pi, q \pm \pi, v_p \pm \pi, v_q \pm \pi),$$

cada uma pertencendo a um diferente $(T\mathcal{T}^2)_{ij}$, como definido acima. No caso da esfera S^2 , existem apenas 2 grupoides centrais fortemente inequivalentes. O grupoide central standard e um não-standard definido por:

$$(\widetilde{TS^2})_1 \equiv (TS^2)_1 / \sim_1, \text{ onde } (TS^2)_1 \equiv \{ (m, \vec{v}) \mid |\vec{v}| \in (\pi/2, \pi] \}$$

A relação de equivalência é não-trivial só quando $|\vec{v}| = \pi$, coincidindo com a definição da pré-imagem não-standard da diagonal em $(DS^2)_0$:

$$\begin{aligned} \widetilde{TS^2} &= \{ [\tau^1]_1, \text{ onde } \tau^1 = (m, \vec{v}_1) \in (TS^2)_1 \text{ é t.q. } |\vec{v}_1| = \pi \\ &\text{ e } (m, \vec{v}_1) \sim_1 (m', \vec{v}'_1) \text{ sse } m = m' \} \end{aligned}$$

Assim, cada ponto em $(DS^2)_0$ tem duas pré-imagens fortemente inequivalentes. Denotando

$$\Phi_0^{-1}(m_-, m_+) = (m, \vec{v}) \equiv (\theta, \varphi; v, \beta),$$

veja abaixo para a definição das coordenadas verticais (v, β) , então

$$\tilde{\Phi}_1^{-1}(m_-, m_+) = (\pi - \theta, \varphi - \pi; \pi - v, \beta - \pi).$$

A razão para se considerar tais pré-imagens não-standard em TM é, evidentemente, o fato de que quando M é compacto, a geodésica que conecta dois pontos em M não é única.

Desta forma, o grupoide central standard refere-se às geodésicas mais curtas e o grupoide central não-standard tipo k refere-se às geodésicas do tipo k . Aqui, uma geodésica do tipo k de m' a m'' é definida como a geodésica $(m' \rightarrow m) * L_k(m) * (m \rightarrow m'')$, onde $L_k(m)$ é uma volta geodésica com base em m , o centro da geodésica curta de m' a m'' . (Se $k \equiv 0$, $L_0 \equiv id$ é a volta trivial e $(m' \rightarrow m'')$ é a geodésica curta). Como exemplos de voltas geodésicas não triviais, em T^2 , $L_k \equiv L_{(a,b)} \equiv L_p^a * L_q^b$, onde L_p, L_q são os circuitos irreduzíveis, enquanto que, em S^2 , L_k é uma repetição de ordem $|k|$ de um meridiano geodésico e é fácil ver que apenas temos que considerar geodésicas fortemente inequivalentes. Finalmente, quando M é compacto também queremos considerar o seguinte:

Definição 3.7 Sejam os conjuntos $(\widetilde{TM})_{ij}^2$ definidos como

$$\{(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}') \in (\widetilde{TM})_i \times (\widetilde{TM})_j \mid \tilde{P}_+(\tilde{\tau}) = \tilde{P}_-(\tilde{\tau}') \text{ e } (\tilde{P}_-(\tilde{\tau}), \tilde{P}_+(\tilde{\tau}')) \in (DM)_0\} .$$

Assim, definimos *composições generalizadas*, ou *mixtas* (que são ainda restritas no sentido original) como

$$c_{ij}^k : (\widetilde{TM})_{ij}^2 \rightarrow (\widetilde{TM})_k ,$$

por

$$c_{ij}^k(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}') \equiv \tilde{\Phi}_k^{-1}(\tilde{\Phi}_i(\tilde{\tau}) \odot \tilde{\Phi}_j(\tilde{\tau}')) .$$

Na verdade, se M não for simplesmente conexo, podemos querer considerar apenas aquelas composições mixtas para as quais o triângulo de composição é um circuito redutível. Neste caso, a tripla $(i, j; k)$ é chamada *redutível*. Por outro lado, quando M é simplesmente conexo, é suficiente considerar todas as composições mixtas dentro do conjunto de grupoides centrais fortemente inequivalentes.

Notemos que o Lema 3.1 aplica-se para todo $P_i : (\widetilde{TM})_i \rightarrow \widetilde{TM}$, da mesma forma. Logo, no que se segue podemos considerar todos os possíveis grupoides centrais simi-larmente, quando M é compacto. Porém, na maior parte das vezes vamos lidar com o grupoide central standard, tanto para simplificar o tratamento quanto porque estaremos muito interessados no limite $|\vec{v}| \rightarrow 0$, o qual só se realiza em $(TM)_0$. Assim, frequentemente omitiremos a denominação “standard” nas próximas definições e discussões.

- **Formulae:** A fim de embasar as definições, conceitos e resultados abstratos desta tese frequentemente ilustrar-los-emos nos exemplos considerados até agora, i.e. $M = \mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2, S^2, H^2$. Por isso, agora fornecemos algumas fórmulas locais e úteis, para estes espaços. Aqui, nos concentramos nas grupáides centrais standard. Detalhes e derivações são referidos ao Apêndice B. Começamos com os espaços planos $M = \mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2$, que são localmente idênticos. Tomemos coordenadas em \mathbb{R}^2 como pares momento-configuração: $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = (p, q)$, com métrica e forma simplética usuais:

$$\eta = dp \otimes dp + dq \otimes dq \quad , \quad w = dp \wedge dq \quad .$$

Como exemplos de potenciais simpléticos, i.e. 1-forma ζ em \mathbb{R}^2 satisfazendo $d\zeta = w$, consideremos

$$\zeta_{>} = pdq \quad , \quad \zeta_{<} = -qdp \quad \text{ou} \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{2}(pdq - qdp) \quad .$$

O fibrado tangente $T\mathbb{R}^2$ é também um espaço linear, $T\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, e as coordenadas naturais são:

$$T\mathbb{R}^2 \ni \vec{\tau} = (\vec{x} ; \vec{\dot{x}}) = (p, q ; \dot{p}, \dot{q}) = (p, q ; v_p, v_q) = (\vec{x} ; \vec{v}) \quad .$$

Neste caso, o mapa exponencial simétrico é simplesmente:

$$\Phi(\vec{\tau}) \equiv \Phi(\vec{x} ; \vec{v}) = (\vec{x} - \vec{v} ; \vec{x} + \vec{v}) \equiv (\vec{x}_-, \vec{x}_+) \quad (3.3)$$

e a forma simplética pull-back é dada por:

$$\Omega = 2d\sigma \quad , \quad \sigma = v_p dq - v_q dp \quad , \quad (3.4a)$$

$$\frac{1}{2}\Omega = dv_p \wedge dq + dp \wedge dv_q \quad (3.4b)$$

Visto como uma variedade Kähler, a estrutura complexa em \mathbb{R}^2 é escrita nestas coordenadas como

$$J = \partial_q \otimes dp - \partial_p \otimes dq \quad , \quad \text{ou} \quad J \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

na representação usual de vetores colunas em \mathbb{R}^2 .

Para a esfera, tomemos coordenadas polares:

$$S^2 \ni m = (\theta, \varphi) \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad .$$

Estaremos usando as seguintes abreviações:

$$S_\alpha \equiv \sin(\alpha), \quad C_\alpha \equiv \cos(\alpha), \quad T_\alpha \equiv \tan(\alpha), \quad \text{com } S^{-1}(f), C^{-1}(f), T^{-1}(f)$$

denotando suas respectivas inversas. A métrica e forma simplética usuais são:

$$\eta = d\theta \otimes d\theta + S_\theta^2 d\varphi \otimes d\varphi, \quad \omega = S_\theta d\theta \wedge d\varphi$$

e exemplos de potenciais locais simpléticos são

$$\zeta_> = (1 - C_\theta)d\varphi, \quad \zeta_< = -(1 + C_\theta)d\varphi, \quad \zeta = -C_\theta d\varphi.$$

O primeiro diverge em $\theta = \pi$, o segundo em $\theta = 0$ e o terceiro é mal definido em ambos os polos (lembramos que não existem potenciais simpléticos globais em S^2 pois sua forma simplética não é exata). As coordenadas naturais no fibrado tangente são

$$TS^2 \ni \tau = (\theta, \varphi; \dot{\theta}, \dot{\varphi}),$$

porém é mais conveniente introduzir coordenadas polares nas fibras também. Assim,

$$(\theta, \varphi; \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \tau \longmapsto \tau = (\theta, \varphi; v, \beta)$$

onde:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{\theta}^2 + S_\theta^2 \dot{\varphi}^2}, \quad vC_\beta = \dot{\theta}, \quad vS_\beta = S_\theta \dot{\varphi}, \quad (3.5)$$

com a interpretação geométrica para o ângulo β dada na fig. 3.1.

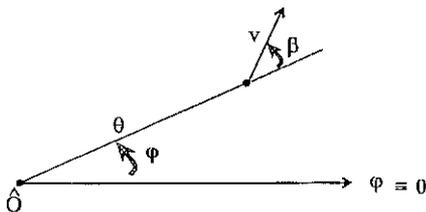


Fig. 3.1

Com estas coordenadas locais em $(TS^2)_0$ escrevemos o mapa exponencial simétrico

como

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\theta, \varphi; v, \beta) &= (\theta_-, \varphi_-; \theta_+, \varphi_+) \\ \theta_{\pm} &= C^{-1}(C_{\theta}C_v \mp S_{\theta}S_vC_{\beta}) \\ \varphi_{\pm} &= \varphi \pm T^{-1}(S_vS_{\beta}/g_{\pm}) + (1 - \text{Sign}(g_{\pm}))\pi/2 \\ &\text{onde } g_{\pm} = S_{\theta}C_v \pm C_{\theta}S_vC_{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

A forma simplética pull-back $\Omega_0 \equiv \Phi_0^*(\delta w)$ é dada por

$$\Omega_0 = 2d\sigma, \quad \sigma = S_{\theta}(C_{\beta}S_{\theta}d\varphi - S_{\beta}d\theta), \quad (3.7a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\Omega_0 &= C_v(S_{\beta}d\theta - C_{\beta}S_{\theta}d\varphi) \wedge dv + S_v(C_{\beta}d\theta + \\ &S_{\beta}S_{\theta}d\varphi) \wedge d\beta + S_vC_{\beta}C_{\theta}d\theta \wedge d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.7b)$$

Para H^2 , adaptamos as fórmulas esféricas, definindo $\theta =: i\rho$ (ou tomando $\theta \mapsto i\rho$), onde $i = \sqrt{-1}$. Assim,

$$S_{\theta} \mapsto i\tilde{S}_{\rho}, \quad C_{\theta} \mapsto \tilde{C}_{\rho}, \quad \dot{\theta} \mapsto i\dot{\rho}.$$

Agora estaremos também usando estas outras abreviações:

$$\tilde{S}_{\alpha} \equiv \sinh(\alpha), \quad \tilde{C}_{\alpha} \equiv \cosh(\alpha), \quad \tilde{T}_{\alpha} \equiv \tanh(\alpha), \quad \text{com } \tilde{S}^{-1}(f), \tilde{C}^{-1}(f), \tilde{T}^{-1}(f)$$

suas respectivas inversas. Portanto, tomando coordenadas locais “polares” em H^2 , $H^2 \ni m = (\rho, \varphi)$, temos a métrica e forma simplética usuais:

$$\eta = d\rho \otimes d\rho + \tilde{S}_{\rho}^2 d\varphi \otimes d\varphi, \quad w = \tilde{S}_{\rho} d\rho \wedge d\varphi$$

e o potencial simplético global

$$\zeta_{>} = (\tilde{C}_{\rho} - 1)d\varphi.$$

As coordenadas polares nas fibras são

$$TH^2 \ni \tau = (\rho, \varphi; \mu, \beta).$$

onde:

$$\mu = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \tilde{S}_{\rho}^2 \dot{\varphi}^2} \quad (v \mapsto i\mu), \quad \mu C_{\beta} = \dot{\rho}, \quad \mu S_{\beta} = \tilde{S}_{\rho} \dot{\varphi} \quad (3.8)$$

Notando que

$$S_v \mapsto i\tilde{S}_\mu, \quad C_v \mapsto \tilde{C}_\mu,$$

escrevemos o mapa exponencial simétrico como

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\rho, \varphi; \mu, \beta) &= (\rho_-, \varphi_-; \rho_+, \varphi_+) \\ \rho_\pm &= \tilde{C}^{-1}(\tilde{C}_\rho \tilde{C}_\mu \pm \tilde{S}_\rho \tilde{S}_\mu C_\beta) \\ \varphi_\pm &= \varphi \pm T^{-1}(\tilde{S}_\mu S_\beta / h_\pm) + (1 - \text{Sign}(h_\pm))\pi/2 \\ &\text{onde } h_\pm = \tilde{S}_\rho \tilde{C}_\mu \pm \tilde{C}_\rho \tilde{S}_\mu C_\beta \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

e a forma simplética pull-back é dada por

$$\Omega = 2d\sigma, \quad \sigma = \tilde{S}_\mu(C_\beta \tilde{S}_\rho d\varphi - S_\beta d\rho), \quad (3.10a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\Omega &= \tilde{C}_\mu(S_\beta d\rho - C_\beta \tilde{S}_\rho d\varphi) \wedge d\mu + \\ &\tilde{S}_\mu(C_\beta d\rho + S_\beta \tilde{S}_\rho d\varphi) \wedge d\beta + \tilde{S}_\mu C_\beta \tilde{C}_\rho d\rho \wedge d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.10b)$$

Podemos ver explicitamente em (3.4), (3.7) e (3.10) que os espaços verticais são isotrópicos nestes exemplos. O mesmo acontecendo para a seção zero $T^0M \simeq M$. Note-mos ainda que a forma simplética pull-back é a derivada de um potencial simplético sem qualquer componente diferencial vertical. Este fato será completamente explorado no que se segue.

4 A Equação Central

Começamos por enfatizar a estrutura algébrica do espaço de fase duplo, ou grupoide central. Historicamente, porém, sua estrutura simplética foi predominante, pois introduziu o conceito muito útil de ação, ou função geratriz, para uma transformação canônica no espaço de fase original, ou simples, (M, ω) . Assim, seja α uma tal transformação em M , i.e. um symplectomorfismo

$$\alpha : M \rightarrow M, \quad \alpha^*(w) = w.$$

Então, seu gráfico \mathcal{L}_α no espaço de fase duplo,

$$DM \supset \mathcal{L}_\alpha := \{(m_-, m_+) \mid m_+ = \alpha(m_-)\},$$

é uma subvariedade lagrangeana para a forma simplética δw , i.e.,

$$\delta w|_{\mathcal{L}_\alpha} \equiv 0.$$

Similarmente, se

$$\mathcal{L}_\alpha \subset \text{Imagem}(\Phi_0) \equiv (DM)_0 \subset DM,$$

então sua pré-imagem

$$\Lambda_\alpha := \Phi_0^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)$$

é lagrangeana no grupoide central $((TM)_0, \Omega_0)$. Isto é:

$$\Omega_0|_{\Lambda_\alpha} \equiv 0$$

Genericamente, consideramos os subconjuntos $\mathcal{L}_\alpha^{(r)} \subset \mathcal{L}_\alpha$, satisfazendo $\mathcal{L}_\alpha^{(r)} \subset \text{Imagem}(\Phi_0)$, e suas correspondentes pré-imagens $\Lambda_\alpha^{(r)}$ em $(TM)_0$.

A definição de funções geratrizes locais para subconjuntos lagrangeanos de variedades simpléticas gerais depende da escolha de um potencial simplético local (i.e. uma 1-forma cuja derivada é, localmente, a forma simplética) adaptada a uma polarização que é, ao menos localmente, uma fibração sobre uma subvariedade lagrangeana referencial que contém os suportes destas funções geratrizes [12]. No caso específico do grupoide central sobre M , tomamos o próprio M , também visto como a seção zero $T^0M \subset (TM)_0$, como a variedade lagrangeana referencial correspondente à polarização central em $(TM)_0$, dada pelo mapa central $P_0 : (TM)_0 \rightarrow M$. Assim, o potencial simplético adaptado a esta escolha é dado por:

Definição 4.1 Seja $((TM)_0, \Omega_0)$ o grupoide central sobre (M, w) . Um potencial simplético Z_0 , i.e. um 1-forma em $(TM)_0$ t.q. pelo menos localmente $dZ_0 = \Omega_0$, é chamado de um *potencial central*, se ele satisfaz

$$X \rfloor Z_0 = P'_0(X) \rfloor Z_0 \quad , \quad (4.1)$$

$\forall X \in T_\tau(TM)_0, \forall \tau \in (TM)_0$. Aqui, P'_0 é o mapa diferencial de P_0 e $\vec{x} \rfloor \alpha$ denota a contração vetor-forma.

Evidentemente, qualquer,

$$Z = Z_0 + dQ, \quad Q \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k((TM)_0),$$

é outro potencial, mas não central, em geral. A condição (4.1) nos diz que os potenciais centrais não possuem componentes diferenciais verticais, logo podemos identificar tais potenciais explicitamente em nossos exemplos como $Z_0 = 2\sigma$, das equações (3.4), (3.7) e (3.10). Nestes exemplos em particular, Z_0 é um potencial global em $(TM)_0$ i.e.,

$$\Omega_0 \equiv dZ_0 \text{ é exata .}$$

O que pode ser dito dos espaços simpléticos simétricos gerais? Argumentamos que o caso geral segue estes exemplos conhecidos.

Primeiramente, notemos que um tal potencial sempre existe em uma pequena vizinhança da seção zero T^0M . Pois, tome a 2-forma \dot{w} em TM definida por

$$\dot{w}(m, \vec{v}) := d(\vec{v}]w), \quad \forall \vec{v} \in T_m M, \quad \forall m \in M .$$

Então,

$$\dot{w} \equiv L_{\vec{v}}(w),$$

a derivada de Lie de w , pois w é fechada. Por outro lado, quando $|\vec{v}| \rightarrow 0$, podemos aproximar Ω_0 por

$$\Omega_0(m, \vec{v}) \simeq 2 \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t L_{\vec{v}}(w) dt' \right\} \simeq 2L_{\vec{v}}(w),$$

onde $\vec{v} = t \cdot \hat{v}$, $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$. Isto é,

$$\Omega_0 \rightarrow 2\dot{w} = 2d(\vec{v}]w).$$

Logo, numa vizinhança de T^0M ,

$$\Omega_0 \simeq 2d\zeta, \quad \text{onde } \zeta(m, \vec{v}) := \vec{v}]w$$

claramente satisfaz (4.1). Note que nos exemplos lineares ($M = \mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2$) $\frac{1}{2}Z_0 \equiv \zeta$ globalmente (eq. (3.4)), embora genericamente 2ζ apenas aproxima o potencial central numa pequena vizinhança de T^0M . Por outro lado, T^0M é lagrangeano para Ω_0 e, como cada fibra vertical em $(TM)_0$ é contrátil, esperamos que Ω_0 seja exata. Finalmente, as fibras

verticais também são lagrangeanas para Ω_0 . Enquanto isto é claramente uma condição necessária para a existência de um potencial central, conjecturamos que, junto aos outros fatos acima mencionamos, estes constituem um conjunto suficiente de condições para a sua existência, também. Em outras palavras, assumimos:

Conjectura 4.1 Em todo grupoide central, a forma simplética é exata,

$$\Phi_0^*(\delta w) \equiv \Omega_0 \equiv dZ_0,$$

onde Z_0 é um potencial central, i.e. satisfaz (4.1).

Recordando que

$$\frac{1}{2}Z_0(m, \vec{v}) \xrightarrow{\sim} \dot{\zeta}(m, \vec{v}) \equiv \vec{v}]w, \text{ quando } |\vec{v}| \rightarrow 0,$$

podemos nos referir à 1-forma $\dot{\zeta}$ como *potencial de Hamilton*, pois este está intimamente conectado à *equação de Hamilton*. Para ver isto, lembremos que podemos escrever o último como um *mapa*

$$\dot{z}[h] : M \rightarrow TM, \forall h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(M),$$

por

$$m \mapsto \tau_h, \text{ onde } \tau_h = (m, \vec{v}_h)$$

e \vec{v}_h é dado por

$$dh + \vec{v}_h]w = 0.$$

Ou, equivalentemente,

$$\dot{\zeta}(\tau_h) = -dh(m), P_0(\tau_h) = m, \forall m \in M.$$

Ou ainda, denotando,

$$TM \supset \dot{\Lambda}_h := \text{gráfico de } \dot{z}[h],$$

a equação de Hamilton torna-se

$$\dot{\zeta}|_{\dot{\Lambda}_h} = -dh,$$

implicitamente definindo $\dot{z}[h]$.

Similarmente, a existência de um potencial central para Ω_0 permite uma “extensão para tempos finitos” do formalismo de Hamilton, agora no contexto de funções geratrizes. Assim, suponha-se que uma subvariedade lagrangeana $\Lambda_\alpha \subset (TM)_0$ é localmente um gráfico sobre $T^0M \simeq M$, isto é:

$$\left. \begin{aligned} \text{Posto}(P'_0 | T_\tau \Lambda_\alpha) &= 2n = \dim(M) \\ \forall \tau \in \Lambda_\alpha \text{ s.t. } P_0(\tau) &= m \in U \subset M \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Então, como $dZ_0|_{\Lambda_\alpha} = 0$, de (4.1) obtemos:

Proposição 4.1 Para toda subvariedade lagrangeana $\Lambda_\alpha \subset (TM)_0$ satisfazendo (4.2) em $U \subset M$, existe uma *função geratriz central* $f_\alpha \in C^k_{\mathbb{R}}(U)$, satisfazendo a *equação central*:

$$Z_0 \Big|_{\Lambda_\alpha} = df_\alpha \quad , \quad \text{em } (TU)_0 \subset (TM)_0 . \quad (4.3)$$

Inversamente, para uma dada f_α , a equação acima define Λ_α implicitamente, i.e. fornece um mapa

$$z[f_\alpha] \equiv F_\alpha : U \rightarrow (TU)_0$$

que é bem definido quando a condição (4.2) é satisfeita.

Tal mapa pode ser multivaluado se $(T_m M)_0 \cap \Lambda_\alpha$ não é único, neste caso, devemos quebrar Λ_α em ramos $\Lambda_\alpha^{(r)}$, cada um unicamente dado por um mapa $F_\alpha^{(r)}$ em um subconjunto de M via

$$Z_0 \Big|_{\Lambda_\alpha^{(r)}} = df_\alpha^{(r)} \quad , \quad \text{para cada } f_\alpha^{(r)} ,$$

exceto para

$$\{\tau_k\} \subset \Lambda_\alpha \text{ onde } \text{Posto}(P'_0 | T_{\tau_k} \Lambda_\alpha) < 2n .$$

Via mapa Φ_0 então, (4.3) gera uma subvariedade lagrangeana \mathcal{L}_α em DM que localmente representa uma transformação canônica em M , quando \mathcal{L}_α é um gráfico sobre $M_- \subset DM$.

A semelhança entre a equação de Hamilton e a equação central é impressionante. Devemos ter em mente, porém, que a primeira fornece transformações canônicas infinitesimais enquanto que a segunda gera transformações finitas. Por isso, a condição (4.2) não é sempre satisfeita para todo symplectomorfismo finito $\alpha : M \rightarrow M$. Em outras palavras,

nem toda transformação canônica pode ser gerada por uma função real em M via equação central, sempre. Geralmente, a presença de *catástrofes centrais*,

$$\{\tau_k\} \subset \Lambda_\alpha \text{ t.q. } \text{Posto}(P'_0 | T_{\tau_k}\Lambda_\alpha) < 2n ,$$

é inevitável. Suas projeções

$$\{m_k\} \equiv \{P_0(\tau_k)\} \subset M,$$

são chamadas de *cáusticas centrais*.

Para contornar este problema, novos conjuntos de funções geratrizes “complementares” são necessários. Um exemplo especial destes, quando M é plano, são as funções de corda [7,9] e sua generalização para espaços simpléticos simétricos não planos está sendo presentemente investigada. Por outro lado, ao introduzir um parâmetro real $\lambda = t/2$ (uma escala) no mapa $\hat{z}[h]$, por exemplo, multiplicando todas hamiltonianas h por $t/2$, podemos ver a equação de Hamilton como um mapa de M em uma pequena vizinhança da seção zero em TM , se t é suficientemente pequeno. Como nesta vizinhança $\frac{1}{2}Z_0$ e $\dot{\zeta}$ são aproximadamente iguais, $f_\alpha = -th$ é uma função geratriz central para a transformação canônica infinitesimal gerada por h via equação de Hamilton. Mas estas últimas são sempre bem definidas, logo concluímos que toda transformação canônica infinitesimal pode ser gerada por uma função central. Agora, isto é mais ou menos óbvio se notarmos que tais transformações infinitesimais são pequenas deformações da identidade e são portanto associadas a subvariedades lagrangeanas em $(TM)_0$ que são pequenas deformações da seção zero $T^0M \simeq M$, portanto, satisfazendo (4.2).

Ademais, o mapa

$$F_\alpha = -tH : M \rightarrow (TM)_0 ,$$

obtido via equação central da função

$$f_\alpha = -th ,$$

onde h é uma hamiltoniana, é dado por

$$m \mapsto (m, \frac{\varepsilon}{2} \vec{v}_h(m)),$$

para tempos suficientemente pequenos $t \simeq \varepsilon$. Como

$$\frac{\varepsilon}{2} \vec{v}_h \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

para tempos muito curtos $t \simeq \varepsilon \rightarrow 0$, a transformação canônica implícita (m_-, m_+) , obtida via mapa exponencial simétrico, coincide com a versão linearizada

$$\left(\vec{x} - \frac{\varepsilon}{2} \vec{v}_h, \vec{x} + \frac{\varepsilon}{2} \vec{v}_h \right),$$

para qualquer escolha de coordenadas locais lineares em $U \subset M$, t.q. $m \simeq \vec{x}$, independente da geometria específica de M . Portanto, para movimentos de tempo muito curtos, o segmento geodésico centrado em m converge sobre a órbita hamiltoniana que se propaga de m para frente e para trás no tempo.

O comentário pertinente, neste ponto, é que o conceito de funções geratrizes é tradicionalmente definido no espaço de fase duplo DM ao invés de no grupoide central $(TM)_0$. Porém, isto requer prévias polarizações em M . Para fibrados contangentes gerais, apenas a polarização vertical existe e as funções geratrizes tomam seus valores de pares de pontos no espaço base, i.e. $f \equiv f(q_-, q_+)$. Para variedades Kähler gerais, apenas as polarizações complexas existem e as funções geratrizes são bi-holomorfas, i.e. $f \equiv f(z_-, z_+)$, z_{\pm} complexo. Este presente tratamento nos permite considerar funções geratrizes reais definidas em espaços simpléticos simétricos gerais M , através da polarização real em $(TM)_0$. Tais funções podem ser vistas como “hamiltonianas para tempos finitos”.

Por outro lado, além de satisfazer (4.2), a subvariedade lagrangeana Λ_α gerada por uma função central f_α deve ser a pré-imagem, pelo mapa exponencial simétrico, de um gráfico sobre M_- , $\mathcal{L}_\alpha \equiv \{m_+(m_-)\} \subset DM$, para que descreva uma transformação canônica $\alpha : M \rightarrow M$. Como nem todas subvariedades lagrangeanas em DM satisfazem esta condição “gráfica”, quando transposta para $(TM)_0$ tal condição é algo mais difícil de se assegurar de partida, para que as associações entre funções geratrizes centrais e transformações canônicas sejam garantidamente bem definidas.

Devemos notar ainda que outras versões da equação central estão disponíveis, quando M é compacto. Ou seja, além da equação central standard (4.3), existem também equações centrais não-standard:

$$Z_i|_{\Lambda_i^x} = df_\alpha^i, \text{ em } (\widetilde{TU})_i \subset (\widetilde{TM})_i. \quad (4.3')$$

cada uma fornecendo um mapa

$$F_\alpha^i : U \rightarrow (\widetilde{TU})_i ,$$

que gera

$$\Lambda_\alpha^i = \tilde{\Phi}_i^{-1}(\mathcal{L}_\alpha) ,$$

se

$$\text{Posto}(P'_i|T_{\tilde{\tau}}\Lambda_\alpha^i) = 2n , \text{ sobre } U \subset M . \quad (4.2')$$

Aqui,

$$dZ_i = \tilde{\Phi}_i^*(\delta w) ,$$

onde Z_i é um potencial central não-standard e as funções f_α^i satisfazendo (4.3') são funções geratrizes centrais não-standard. Note que usamos a notação abreviada: $f_\alpha^0 \equiv f_\alpha$, $\Lambda_\alpha^0 \equiv \Lambda_\alpha$, $F_\alpha^0 \equiv F_\alpha$, em prévias definições. Note também que o índice "i" em (4.3') não é o mesmo que o índice (r) definido antes referindo a ramos diferentes de uma única pré-imagem do conjunto $\{\mathcal{L}_\alpha^{(r)}\} \subset \mathcal{L}_\alpha \cap (DM)_0$. Assim, quando M é compacto, uma função geratriz central genérica pode carregar até dois índices $\{i, (r)\}$, para que seja completamente identificada.

Por fim, um comentário importante: como veremos nos parágrafos a seguir, a forma de compor funções geratrizes centrais exhibe de maneira muito clara a geometria simplética do próprio M , um fato que tem consequências importantes nas questões de quantização e análise semiclássica.

- **Exemplos:** Casos standard, somente. Primeiro mostramos a forma explícita para (4.3) e o mapa $z[f_\alpha] \equiv F_\alpha : M \rightarrow (TM)_0$, dado pela função geratriz central f_α , depois a relação intrínseca $m_+(m_-)$, vista agora como um ponto em DM , (m_-, m_+) , obtida via mapa exponencial simétrico. Para nos livrar de fatores 2 indesejáveis, vamos muitas vezes reescalonar e identificar $f_\alpha \equiv 2f$. Assim, usando (3.4), no espaço plano (4.3) torna-se:

$$\begin{aligned} v_p dq - v_q dp &= df = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p} dp , \text{ logo} \\ v_p &= \partial f / \partial q , \quad v_q = -\partial f / \partial p \end{aligned} \quad (4.4)$$

define o mapa F . Este pode ser reescrito como

$$\vec{\xi}_\alpha = 2\vec{x} = -J \cdot [\partial f_\alpha / \partial \vec{x}] , \quad (4.4')$$

de forma a coincidir com a expressão no espaço plano encontrada em [5.8]. Com-
pondo com o mapa exponencial simétrico Φ , eq. (3.3), temos:

$$p_\pm = p \pm \partial f / \partial q \quad , \quad q_\pm = q \mp \partial f / \partial p \quad , \quad \text{ou} \quad (4.5)$$

$$\vec{x}_\pm = \vec{x} \mp J \cdot [\partial f / \partial \vec{x}] = \vec{x} \mp \frac{1}{2} J \cdot [\partial f_\alpha / \partial \vec{x}] \quad (4.5')$$

como a transformação canônica implícita $\vec{x}_+(\vec{x}_-)$ que é (dita como) gerada por $f_\alpha \equiv 2f \in C_R^k(\mathbb{R}^2)$. No toro, as mesmas equações (4.4)-(4.5) são válidas, mas agora sujeitas à condição de consistência central standard, que significa restringir o mapa (4.4) sobre $(TT^2)_0$ apenas. Assim, f_α deve satisfazer:

$$|\partial f / \partial q| , |\partial f / \partial p| < \pi/2 , \text{ ou } \mathcal{T}^2 . \quad (4.6)$$

Na esfera, a equação central torna-se, por (3.7):

$$S_\nu(C_\beta S_\theta d\varphi - S_\beta d\theta) = df = \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi ,$$

tal que,

$$S_\nu C_\beta S_\theta = \partial f / \partial \varphi , \quad S_\nu S_\beta = -\partial f / \partial \theta .$$

Mas, como estas são bem definidas apenas quando $\theta \neq 0, \pi$, a expressão para o mapa $F : S^2 \rightarrow (TS^2)_0$ toma a forma local:

$$v = S^{-1}(S^0(f)) \quad (4.7a)$$

$$\beta = -T^{-1} \left\{ \frac{S_\theta \partial f / \partial \theta}{\partial f / \partial \varphi} \right\} + (1 - \text{Sign}(\partial f / \partial \varphi)) \pi/2 \quad (4.7b)$$

onde definimos os símbolos

$$\left. \begin{aligned} S^0(f) &:= \|df\| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{S_\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2} \\ C^0(f) &:= \sqrt{1 - (S^0(f))^2} \equiv \sqrt{1 - \|df\|^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

usando a métrica contravariante em S^2 (a métrica para 1-formas em S^2):

$$\bar{\eta} \equiv \partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{S_\theta^2} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi .$$

Agora notemos que (4.7a) e (4.8) possuem soluções reais apenas se f satisfaz a condição de consistência central standard:

$$S^0(f) \equiv \|df\| < 1 \quad , \quad \text{em } S^2 . \quad (4.9)$$

Compondo com o mapa exponencial simétrico, eq. (3.6), obtemos:

$$\theta_{\pm} = C^{-1}(C_{\theta}C^0(f) \mp \partial f/\partial\varphi) \quad (4.10a)$$

$$\varphi_{\pm} = \varphi \mp T^{-1}\{S_{\theta}(\partial f/\partial\theta)/\alpha_{\pm}\} + (1 - \text{Sign}(\alpha_{\pm}))\pi/2 \quad (4.10b)$$

$$\text{onde } \alpha_{\pm} = S_{\theta}^2 C^0(f) \pm C_{\theta}(\partial f/\partial\varphi) ,$$

como a forma local para a transformação canônica implícita $m_+(m_-)$ que é (dita como) gerada por $f_{\alpha} \equiv 2f \in C_{\mathbb{R}}^k(S^2)$, satisfazendo a condição de consistência (4.9). Equações muito similares valem em H^2 . Pois, de (3.10), a equação central torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\mu}(C_{\beta}\tilde{S}_{\rho}d\varphi - S_{\beta}d\rho) &= df = \frac{\partial f}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi \\ \Rightarrow \tilde{S}_{\mu}C_{\beta}\tilde{S}_{\rho} &= \partial f/\partial\varphi \quad , \quad \tilde{S}_{\mu}S_{\beta} = -\partial f/\partial\rho . \end{aligned}$$

Novamente, notando que estas só fazem sentido quando $\rho \equiv 0$, obtemos

$$\mu = \tilde{S}^{-1}(\tilde{S}^0(f)) \quad (4.11a)$$

$$\beta = -T^{-1}\left\{\frac{\tilde{S}_{\rho}(\partial f/\partial\rho)}{\partial f/\partial\varphi}\right\} + (1 - \text{Sign}(\partial f/\partial\varphi))\pi/2 \quad (4.11b)$$

como as expressões locais para o mapa $F : H^2 \rightarrow TH^2$, o qual agora não requer qualquer condição de consistência. Uma vez mais, usamos a métrica contravariante em H^2 :

$$\tilde{\eta} = \partial\rho \otimes \partial\rho + \left(\frac{1}{\tilde{S}_{\rho}}\right)^2 \partial\varphi \otimes \partial\varphi ,$$

para definir

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}^0(f) &:= \|df\| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tilde{S}_{\rho}}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)^2} \\ \tilde{C}^0(f) &:= \sqrt{1 + (\tilde{S}^0(f))^2} \equiv \sqrt{1 + \|df\|^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Finalmente, compondo com o mapa exponencial simétrico (3.9), temos

$$\rho_{\pm} = \tilde{C}^{-1}(\tilde{C}_{\rho}\tilde{C}^0(f) \pm \partial f/\partial\varphi) \quad (4.13a)$$

$$\varphi_{\pm} = \varphi \mp T^{-1}\left\{\tilde{S}_{\rho}(\partial f/\partial\rho)/\gamma_{\pm}\right\} + (1 - \text{Sign}(\gamma_{\pm}))\pi/2 \quad (4.13b)$$

$$\text{onde } \gamma_{\pm} = \tilde{S}_{\rho}^2\tilde{C}^0(f) \pm \tilde{C}_{\rho}(\partial f/\partial\varphi) ,$$

como a forma local para a transformação canônica implícita $m_+(m_-)$ que é (dita como) gerada por $f_\alpha \equiv 2f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(H^2)$. É importante enfatizar que, mesmo não sendo imposta qualquer condição de consistência explícita em (4.3), é ainda necessário que o mapa F seja bem definido, para um dado f , e isto constitui-se numa condição de consistência implícita que é não trivial, em alguns casos, para escolhas particulares de coordenadas locais. Para ver isto, considere a função $f = \varphi \tilde{S}_\rho$. Embora f seja bem definida em todo H^2 (assim como o potencial central), o mapa F dado por (4.11), é mal definido em $\rho = 0$. Podemos argumentar que β é mal definida neste ponto de qualquer forma, mas μ poderia ser bem definida e não o é. Claro que este problema reflete uma singularidade das coordenadas, somente, que é resolvida por uma mudança de origem. Assim mesmo, é ilustrativa dos cuidados que devemos ter ao resolver F , em espaços não planos. No próximo parágrafo, lidamos com as questões mais importantes e irredutíveis de consistência para o mapa F decorrentes da presença de cáusticas centrais, assim como propriedades de consistência gerais para a transformação implícita $m_+(m_-)$ obtida de f .

5 Ações Centrais

Vimos no último parágrafo que algumas funções $f_\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(U)$, $U \subset M$, podem ser tomadas localmente como funções geratrizes de algumas transformações canônicas $\alpha : M \rightarrow M$, $\alpha^*(w) = w$, via equação central (4.3), desde que (4.2) seja satisfeita por $\Lambda_\alpha \subset (TM)_0$, $\Lambda_\alpha = \Phi_0^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)$, onde \mathcal{L}_α é o gráfico de α sobre $M_- \subset DM$. Agora, a condição (4.2) é uma condição “gráfica” para Λ_α sobre $M \simeq T^0M \subset (TM)_0$ e é portanto formulada com respeito a Λ_α , a subvariedade lagrangeana do grupoide central que caracteriza α . Mas, genericamente, é precisamente esta subvariedade que é necessário encontrar, dado f_α . Além do mais, é necessário distinguir quais das subvariedades lagrangeanas em $(TM)_0$ de fato correspondem a transformações canônicas em M , i.e. quais são pré-imagens, pelo mapa exponencial simétrico, de gráfico sobre $M_- \subset DM$. Novamente, como usualmente começamos com a função geratriz, de um ponto de vista prático, precisamos de tal distinção, assim como uma alternativa à condição (4.2), formuladas diretamente em termos

de f_α . Procedemos agora nesta direção, no caso standard. Primeiro obtemos:

Lema 5.1 A função $f \equiv \frac{1}{2}f_\alpha \in C_{\mathbb{R}}^k(M)$, $k \geq 2$, pode ser localmente uma função geratriz central de uma subvariedade lagrangeana em $(TM)_0$, via mapa $F : U \rightarrow (TU)_0$ dado pela equação central, só se ela satisfaz todas as condições de consistência requeridas para a definição de F e

$$|\det[\partial F^i/\partial m^j]| < \infty \quad , \quad \forall m \in U \subset M \quad , \quad (5.1)$$

para qualquer escolha de coordenadas locais $\{m^i\}$ em U , $\{v^i\}$ em $(T_m M)_0$, com

$$\{F^i(m) = v^i(\tau)\}$$

denotando o mapa $\vec{F} : m \mapsto \vec{v} \in (T_m M)_0$.

Prova: Seja $\tau_\alpha \in \Lambda_\alpha \subset (TM)_0$, $P_0(\tau_\alpha) = m_\alpha \in M$, e considere coordenadas locais $\{x^1, x^2, \dots, x^{2n}\}$ $X \subset \Lambda_\alpha$ do ponto τ_α . Tome $\{m^1, m^2, \dots, m^{2n}\}$ como coordenadas locais numa vizinhança $U \subset M$ do ponto m_α e $\{v^1, v^2, \dots, v^{2n}\}$ coordenadas locais numa vizinhança $V \subset (T_{m_\alpha} M)_0$ do ponto $\vec{v}_\alpha \in (T_{m_\alpha} M)_0$, a componente vertical de τ_α . Para a análise local, consideremos as vizinhanças $N \subset (TM)_0$ do ponto τ_α que sejam aproximadas pelo produto cartesiano $N = U \times V$, com P_v denotando a projeção $N \rightarrow V$. Logo, nestas coordenadas locais, qualquer ponto $\tau \in X \subset N$ pode ser escrito como

$$\tau \equiv \{x^i(\tau)\} \equiv \{x^i\}, \quad \tau \equiv \{m^i(P_0(\tau)), v^i(P_v(\tau))\}, \quad \text{ou}$$

$$\tau \equiv \{m^i(P_0(\{x^j\})), v^i(P_v(\{x^j\}))\}.$$

Neste caso, a condição gráfica (4.2) pode ser escrita simplesmente como

$$\left. \begin{array}{l} [dm^i] = A_0 \cdot [dx^j], \quad [A_0^{ij}] = [\partial m^i/\partial x^j] \\ \text{satisfazendo} \quad 0 < |\det(A_0)| < \infty, \quad \text{em } \tau \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

$$\iff [dx^i] = A_0^{-1} \cdot [dm^j], \quad 0 < |\det(A_0^{-1})| < \infty \quad (5.3)$$

e a não observância de (4.2) pode ser escrita como

$$|\det(A_0)| = 0 \iff |\det(A_0^{-1})| = \infty .$$

Por outro lado, como nenhuma condição gráfica sobre V é assumida, temos apenas

$$\left. \begin{aligned} [dv^i] = A_v \cdot [dx^i], \quad [A_v^{ij}] = [dv^i/\partial x^j] \\ \text{satisfazendo } |det(A_v)| < \infty, \text{ ou } \tau \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

mas agora o mesmo não pode ser dito de A_v^{-1} pois $|det(A_v)| = 0$ é uma possibilidade real. Logo, combinando (5.4) e (5.3) temos que

$$|det(A_v \cdot A_0^{-1})| \equiv |det[\partial v^i/\partial m^j]| < \infty \quad (5.5)$$

como uma condição necessária para (5.2) e portanto (4.2) que é assim uma condição necessária para a existência de funções geratrizes centrais. Agora, se existem, elas satisfazem (4.3) e podemos escrever o mapa F gerado por $f \in C_{\mathbb{R}}^k(U)$ como $\{v^i(\tau) = F^i(m)\}$, desde que seja bem definido, i.e. desde que f satisfaça qualquer condição de consistência central (por exemplo, (4.9) quando $M = S^2$). Logo, de (5.5), obtemos (5.1).

- **Exemplos:** No espaço plano, de (4.4), $\vec{F} = -J \cdot [\partial f/\partial \vec{x}]$, logo

$$|det[\partial^2 f]| \equiv |det[\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j]| < \infty, \quad \forall \vec{x} \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad (5.6)$$

é a condição necessária que f deve satisfazer para que seja uma função geratriz central em $U \subset \mathbb{R}^2$, pois $det(J) = 1$. Em outras palavras, $|det[\partial^2 f]| = \infty$ indica a existência de uma cáustica central.

Na esfera, com as coordenadas polares duplas em $(TS^2)_0$, $\tau = (\theta, \varphi; v, \beta)$, obtemos de (4.7), com $f = \frac{1}{2}f_\alpha$,

$$\left| det[\partial^2 f] + \left(\frac{C_\theta}{S_\theta} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \right| \cdot \left| S_\theta S^0(f) C^0(f) \right|^{-1} < \infty, \quad (5.7)$$

onde

$$det[\partial^2 f] = (\partial^2 f/\partial \theta^2)(\partial^2 f/\partial \varphi^2) - (\partial^2 f/\partial \theta \partial \varphi)^2,$$

como a versão local de (5.6), desde que $\{(\theta, \varphi; v, \beta)\}$ sejam boas coordenadas em $(TU)_0$, $U \subset S^2$, claro. Mas estas coordenadas tornam-se singulares quando $\theta = 0, \pi$ ou $v = 0$, em cujos casos φ ou β são mal definidos e (5.7) é sem sentido. Agora, de (4.7),

$$v = 0 \iff S^0(f) = 0.$$

Também, de (4.7),

$$C^0(f) = 0 \implies v = \pi/2 ,$$

que está fora de $(TS^2)_0$. Em outras palavras, se f satisfaz a condição de consistência central (4.8), $C^0(f) \neq 0$. Portanto, sempre que (5.7) tem sentido, o denominador é um número positivo finito e podemos reescrever esta condição assim: Seja $U \subset S^2$, $(\theta = 0, \pi) \notin U$, e $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(S^2)$ satisfazendo $0 < \|df\| < 1$. Localmente, f pode ser uma função geratriz central em $U \subset M$, só se

$$\left| \det[\partial^2 f] + \left(\frac{C_\theta}{S_\theta}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi}\right) \right| < \infty , \quad \forall m \in U \subset S^2 . \quad (5.7')$$

Obviamente, a restrição $(\theta = 0, \pi) \notin U$ é facilmente removível por uma nova escolha da origem para as coordenadas polares em S^2 . Porém, uma nova análise local é necessária quando $\|df\| = 0$. Podemos tomar coordenadas cartesianas em $(T_m S^2)_0$, i.e. $\vec{v} = (\dot{\theta}, \dot{\varphi})$, reescrever F e obter de (5.5), uma alternativa para (5.7) válida também quando $\|df\|(m) = 0$. Mas, como

$$\|df\| \rightarrow 0 \text{ implica } |\vec{v}| \rightarrow 0 ,$$

sabemos que estes pontos correspondem a pontos fixos de qualquer transformação canônica que possa ser gerada por f . Logo, uma alternativa (local) mais simples consiste em expandir f em torno de m em coordenadas cartesianas locais e aplicar (5.6) diretamente, numa pequena vizinhança de m . Similarmente, numa tal vizinhança, podemos usar que $S_v \simeq v$ para obter, de (4.7), (3.10) e (5.5), a condição necessária,

$$\left| \det[\partial^2 f] + \left(\frac{C_\theta}{S_\theta}\right) \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right) \right\} \right| < \infty , \quad (5.7'')$$

que qualquer função $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(S^2)$, deve satisfazer numa vizinhança menor $U' \subset U \subset S^2$ de um ponto $m_0 \in U$ no qual $\|df\|(m_0) = 0$, com $(\theta = 0, \pi) \notin U' \subset U$, para que seja uma função geratriz central.

Condições muito similares valem no plano hiperbólico não-compacto. De (4.13) para qualquer função $f = \frac{1}{2}f_\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(H^2)$, $(\rho = 0) \notin U \subset H^2$, satisfazendo $\|df\| > 0$,

obtemos

$$\left| \det[\partial^2 f] + \left(\frac{\tilde{C}_\rho}{\tilde{S}_\rho} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi} \right) \right| \cdot \left| \tilde{S}_\rho \tilde{S}^0(f) \tilde{C}^0(f) \right|^{-1} < \infty \quad (5.8)$$

como a condição necessária que tais funções devem satisfazer $\forall m \in U \subset H^2$, para que sejam funções geratrizes centrais. Quando $\|df\|(m_0) = 0$, então, numa pequena vizinhança $U' \subset U$ em torno de m_0 , f pode ser uma função geratriz central só se satisfizer:

$$\frac{1}{(\tilde{S}_\rho)^2} \left| \det[\partial^2 f] + \left(\frac{\tilde{C}_\rho}{\tilde{S}_\rho} \right) \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \right| < \infty \quad (5.8')$$

$\forall m \in U' \subset U \subset H^2$, onde $(\rho = 0) \notin U' \subset U$. Nestas equações,

$$[\partial^2 f] \equiv \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi} \right)^2 \right\}$$

e, obviamente, podemos remover a restrição $\rho \neq 0$ por uma troca de origens. Alternativamente a (5.8'), podemos expandir f em torno de m em coordenadas cartesianas locais e usar (5.6), diretamente.

Lema 5.1 nos dá uma condição necessária, mas (5.1) não é uma condição suficiente para a existência de funções geratrizes centrais, genericamente. Em outras palavras, (5.3) implica (5.5), mas o inverso não é verdade quando $\Lambda \subset (TM)_0$ é uma subvariedade lagrangeana genérica, uma vez que é possível que $|\det(A_0)| = |\det(A_v)| = 0$, em $\tau \in X \subset \Lambda$. Ou ainda, uma subvariedade lagrangeana genérica $\Lambda \subset (TM)_0$ não é necessariamente um gráfico sobre M ou $T_m M$, em $\tau = (m, \vec{v}) \in \Lambda$. Porém, não estamos interessados num Λ , genérico, apenas naqueles que representam transformação canônica em M , i.e. $\Lambda_\alpha = \Phi_0^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)$, $DM \supset \mathcal{L}_\alpha$ sendo um gráfico sobre $M_- \subset DM$. Aiuda assim, é possível que $\det(A_0) = \det(A_v) = 0$, para uma transformação canônica genérica, se $\dim(M) \geq 4$. Para ver isto, considere o exemplo simples

$$M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad w = w_{(1)} \oplus w_{(2)}, \quad \alpha = \mathcal{R}_0^{(1)} \otimes id^{(2)}.$$

Ademais, embora (5.1) nos informe sobre a condição “gráfica” de $\Lambda_\alpha \subset (TM)_0$ sobre $M \simeq T^0 M$, ela não nos diz nada sobre a outra condição “gráfica” de $\mathcal{L}_\alpha = \Phi_0(\Lambda_\alpha) \subset DM$

sobre M_- , i.e. ela não distingue dentre as subvariedades lagrangeanas em $(TM)_0$ aquelas que realmente caracterizam uma transformação canônica em M ou não. A respeito disso, extendemos o Lema 5.1 para

Lema 5.2 Uma função $f \equiv \frac{1}{2}f_\alpha \in C_{\mathbb{R}}^k(M)$, $k \geq 2$, pode ser, localmente, a função geratriz central standard de uma transformação canônica em M somente se ela satisfizer a condição (5.1), além de qualquer condição de consistência central requerida para a definição do mapa

$$F : M \supset U \rightarrow (TU)_0, \quad m \mapsto \vec{F}(m) \in (T_m M)_0,$$

via equação central, e

$$0 < |\det[\partial(\text{Exp}_m(-\vec{F}(m))^i/\partial m^j)]| < \infty, \quad (5.9)$$

para qualquer escolha de coordenadas locais em M .

Prova: Considere $\Lambda_\alpha = \Phi_0^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)$, onde \mathcal{L}_α é o gráfico de uma transformação canônica $\alpha : M \rightarrow M$, $\alpha^*(w) = w$, i.e. $\mathcal{L}_\alpha \subset DM$ é um gráfico lagrangeano sobre $M_- \subset DM$. Seja $\gamma = \Phi_0(\tau) \in Y \subset L_\alpha$, Y uma vizinhança de $\gamma_\alpha = \Phi_0(\tau_\alpha)$ e considere as coordenadas locais $\{y^1, y^2, \dots, y^{2n}\}$ em Y . Similarmente, tome $\{m_-^1, m_-^2, \dots, m_-^{2n}\}$ como coordenadas locais numa vizinhança $U_- \subset M_-$ do ponto $m_-^\alpha = P_-(\tau_\alpha) = P_-(\gamma_\alpha)$. Então \mathcal{L}_α é localmente um gráfico sobre M_- sse

$$[dm_-^i] = B_-[dy^i], \quad \text{onde}$$

$$[B_-^{ij}] = [\partial m_-^i / \partial y^j] \quad \text{satisfaz} \quad 0 < |\det(B_-)| < \infty. \quad (5.10)$$

Ao contrário, se \mathcal{L}_α não for um gráfico sobre M_- , então da definição de B_- , $\det(B_-) = 0$. Mas como Φ_0 é um difeomorfismo, podemos reescrever (5.10) como

$$0 < |\det(A_-)| < \infty, \quad \text{onde} \quad [A_-^{ij}] = [\partial m_-^i / \partial x^j], \quad (5.10')$$

pois $A_- = B_- \cdot d\Phi_0$, onde $d\Phi_0 : TX \rightarrow TY$ satisfaz $0 < |\det(d\Phi_0)| < \infty$. Por outro lado, se Λ_α é um gráfico sobre $M \simeq T^0M$, isto pode ser ainda reescrito como

$$0 < |\det(A_-^0)| < \infty, \quad \text{onde} \quad [(A_-^0)^{ij}] = [\partial m_-^i / \partial m_-^j], \quad (5.10'')$$

pois $A_-^0 = A_- \cdot A_0^{-1}$ e A_0^{-1} satisfaz (5.3). Mas como

$$m_- = P_-(\tau) = \text{Exp}_m(-\vec{v}), \quad \tau = (m, \vec{v}),$$

então, se τ é dado pelo mapa central $\vec{F}(m) = \vec{v}$, gerado por f , obtemos (5.9) como uma condição necessária e suficiente para que Λ_α caracterize, localmente, uma transformação canônica em M , desde que Λ_α satisfaça (4.2), ou equivalentemente (5.2), e seja gerado centralmente por $f = \frac{1}{2}f_\alpha$ via mapa \vec{F} dado pela equação central.

- **Exemplo:** No plano, de (3.3) e (4.4), (5.9) nos dá a condição específica

$$0 < |1 + \det[\partial^2 f]| < \infty \quad (5.11)$$

mas como (5.6) já deve ser satisfeita, podemos isolar a nova condição a ser satisfeita por $f = \frac{1}{2}f_\alpha$ a fim de ser, localmente, uma função geratriz central de uma transformação canônica em \mathbb{R}^2 como

$$\det[\partial^2 f] \neq -1 \quad , \quad \forall \vec{x} \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad . \quad (5.11')$$

Porém, já em S^2 ou H^2 , as formas explícitas de (5.9) em coordenadas locais, para f genérico, tornam-se bastante longas e é bem mais simples checá-la diretamente, para cada f específico, usando as expressões específicas para $m_-(m)$ obtidas de (4.10) ou (4.13).

Condições similares a (5.1) e (5.9) aplicam-se a funções não-standard, também. É importante enfatizar, novamente, que uma função qualquer satisfazendo as condições do Lema 5.2 não necessariamente gera uma transformação canônica em M , pois estas condições não constituem um conjunto suficiente, genericamente. Uma análise mais completa é necessária para tal caracterização, que está fora do alcance deste trabalho. Ao fim e ao cabo, porém, podemos verificar explicitamente a consistência do mapa implícito $m_+(m_-)$ obtido de qualquer função f em $U \subset M$, via equação central e o mapa exponencial simétrico. Então, aquelas funções que fornecem mapas $m_+(m_-)$ bem definidos serão distinguidas como:

Definição 5.1 Uma função $f \equiv \frac{1}{2}f_\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(M)$, $k \geq 2$, que seja (localmente, $U \subset M$) a função geratriz central de uma transformação canônica em M é doravante referida simplesmente como uma *ação central (local)* em U . O conjunto de todas tais funções será chamado de espaço das ações centrais em U , denotado por $\mathcal{A}_c(U)$. Mais especificamente, $\mathcal{A}_c^0(U)$ é o espaço das *ações centrais standard* em U .

Claramente, tais espaços satisfazem $\mathcal{A}_c(U_1) \subset \mathcal{A}_c(U_2)$ se $U_1 \supset U_2$. Logo, se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, temos que: $\mathcal{A}_c(U_1 \cup U_2) \subset (\mathcal{A}_c(U_1) \cap \mathcal{A}_c(U_2)) \subset (\mathcal{A}_c(U_1) \cup \mathcal{A}_c(U_2)) \subset \mathcal{A}_c(U_1 \cap U_2)$ e obviamente, $\forall U \subset M$, $\mathcal{A}_c(U) \supset \mathcal{A}_c(M) \neq \emptyset$, o espaço de ações centrais em M , nitidamente não-vazio pois toda função $f_\alpha = -th$, $h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(M)$, é uma ação central, para t suficientemente pequeno.

- **Ilustrações:** Os exemplos mais simples de ações centrais são daquelas que geram translações uniformes no espaço plano. Seja

$$\alpha \equiv T_{\vec{\xi}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{\xi},$$

que corresponde ao plano lagrangeano $\vec{v} = \vec{\xi}/2$, constante, em $T\mathbb{R}^2$. De (4.5) temos imediatamente que

$$\vec{\xi} = -J \cdot \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} \right),$$

qual pode ser integrada como

$$f_\alpha(\vec{x}) = (J \cdot \vec{\xi}) \cdot \vec{x},$$

módulo constantes irrelevantes. Esta pode ser reescrita como um produto externo

$$f_\alpha(\vec{x}) = \vec{\xi} \wedge \vec{x}.$$

Em particular (quando $\vec{\xi} = 0$) a ação nula (ou qualquer constante) gera a identidade, um fato válido para todo M . O próximo exemplo mais simples, ainda em espaço plano, são as funções quadráticas homogêneas

$$f_\alpha(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot B \cdot \vec{x},$$

onde B é uma matriz simétrica, ou equivalentemente

$$f_\alpha(\vec{x}) = \beta p^2 + \beta' q^2 + 2\gamma pq, \quad \text{onde } \beta, \beta', \gamma \in \mathbb{R}.$$

Quando

$$\gamma = 0, \beta = \beta' = -\tan(\lambda/2), f_\alpha$$

gera uma rotação por um ângulo λ em torno da origem. Note que f_α , assim como (5.6), diverge em todo lugar quando

$$\lambda = \pm\pi.$$

Mas neste caso a transformação é uma reflexão na origem, \mathcal{R}_0 , e sua subvariedade lagrangeana correspondente em $T\mathbb{R}^2$ é $\Lambda_{\mathcal{R}_0} \equiv T_0\mathbb{R}^2$, que não é um gráfico sobre $T^0\mathbb{R}^2$ nunca. Quando

$$\beta = \beta' = 0, \gamma = -\tanh(\lambda/2),$$

f_α gera uma transformação hiperbólica pura com subvariedades estável/instável coincidindo com os eixos p/q . Agora (5.6) é sempre satisfeita, mas (5.11) é violada assintoticamente quando

$$|\lambda| \rightarrow \infty.$$

Não é difícil ver que toda ação central quadrática gera um elemento $\alpha \in Sp(2)$, o grupo simplético homogêneo em \mathbb{R}^2 , e inversamente todo tal elemento que possa ser centralmente gerado, é gerado por uma ação central quadrática. Note que isto não é uma propriedade das funções geratrizes mais familiares da mecânica em \mathbb{R}^2 , e.g. $f(q_-, q_+)$, para as quais translações gerais em $M = \mathbb{R}^2$ também são geradas por funções quadráticas. Finalmente, juntando os dois exemplos anteriores, é fácil ver [7] que as ações centrais quadráticas não homogêneas,

$$f_\alpha(\vec{x}) = \vec{\xi} \wedge \vec{x} + \vec{x}^T \cdot B \cdot \vec{x},$$

geram elementos $\alpha \in iSp(2)$, o grupo simplético não homogêneo em \mathbb{R}^2 .

Na esfera, os exemplos canônicos são as ações centrais para rotações. Aqui, casos standard, apenas. Assim, seja

$$\alpha \equiv \alpha(p, 2\gamma)$$

um elemento do grupo de rotações agindo em S^2 , i.e. $SO(3)$ ou $SU(2)$, cujo pólo (ponto fixo) é p e cujo ângulo de rotação é 2γ . Como $\alpha(p, 2\gamma) \equiv \alpha(\bar{p}, -2\gamma)$, onde

\bar{p} é o antipodal de $p \in S^2$, podemos tomar coordenadas polares para $p \equiv (\lambda, \varepsilon)$, tal que $\gamma \in [0, \pi/2]$. Mesmo assim, tomamos $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. Com $m \equiv (\theta, \varphi)$, as coordenadas polares usuais para um ponto $m \in S^2$, a correspondente ação central é

$$f_\alpha(m) = -2S^{-1} \left\{ S_\gamma \left[C_\chi C_\theta + S_\chi S_\theta C_{(\varphi-\varepsilon)} \right] \right\}. \quad (5.12)$$

Embora esta ação central pareça complicada, quando expressa em coordenadas locais, $f \equiv \frac{1}{2}f_\alpha$ tem a interpretação geométrica simples mostrada na Fig. 5.1 (a). Agora, se notarmos que

$$C_\chi C_\theta + S_\chi S_\theta C_{(\varphi-\varepsilon)} = C_y,$$

onde y é a distância geodésica de m a p , o mapa correspondente $F_v : S^2 \rightarrow (TS^2)_0$ é dado por (4.7) como

$$v = C^{-1} \left\{ C_\gamma / \sqrt{1 - (S_\gamma C_y)^2} \right\} \equiv C^{-1} \{ C_\gamma / C_f \} \quad (5.13a)$$

$$\beta = T^{-1} \left\{ [S_\chi C_\theta C_{(\varphi-\varepsilon)} - C_\chi S_\theta] / S_\chi S_{(\varphi-\varepsilon)} \right\} + (1 - \text{Sign}((\varphi - \varepsilon))\pi/2 \quad (5.13b)$$

e a transformação implícita $m_+(m_-)$ gerada por f_α é

$$\theta_\pm = C^{-1} \left\{ [C_\gamma C_\theta \pm S_\gamma S_\theta S_\chi S_{(\varphi-\varepsilon)}] / \sqrt{1 - (S_\gamma C_y)^2} \right\} \quad (5.14a)$$

$$\varphi_\pm = \varphi \pm T^{-1} \left\{ S_\gamma [C_\chi S_\theta - S_\chi C_\theta C_{(\varphi-\varepsilon)}] / \lambda_\pm \right\} + \\ + (1 - \text{Sign}(\lambda_\pm))\pi/2, \text{ where } \lambda_\pm = C_\gamma S_\theta \pm S_\gamma C_\theta S_\chi S_{(\varphi-\varepsilon)} \quad (5.14b)$$

onde usamos (4.10). Note que quando

$$m \rightarrow p \text{ ou } \bar{p}, \quad v \rightarrow 0$$

e m é um ponto fixo da transformação (5.14), como esperado, independente do valor de $\gamma \in [0, \pi/2]$. Porém, quando

$$\gamma = \pi/2$$

a transformação (5.14) não é bem definida. Novamente, neste caso

$$\alpha(p, 2\gamma) = \alpha(p, \pi) = \mathcal{R}_p : S^2 \rightarrow S^2,$$

e a correspondente subvariedade lagrangeana em $(TS^2)_0$ é $\Lambda_{\mathcal{R}_p} \equiv (T_p S^2)_0$, que nunca é um gráfico sobre $T^0 S^2$. Podemos também ver esta singularidade explicitamente

usando (5.7), para f dada por (5.12), quando $\gamma = \pi/2$. Para ver que $m \rightarrow p$ não é uma singularidade cáustica para

$$\gamma \neq \pi/2 ,$$

podemos checar diretamente em (5.7''). Similarmente, expandindo f em torno de m , i.e. com $y \rightarrow 0$, nos dá

$$f_\alpha(m) = \text{constant} + (T_\gamma)y^2 + o(y^4) \simeq (T_\gamma)y^2,$$

que é, a menos de um sinal, exatamente a função geratriz para rotações no plano, com

$$y^2 = p^2 + q^2 ,$$

para qualquer escolha de coordenadas cartesianas locais (p, q) em torno de m . Imediatamente vemos que (5.6) diverge só quando $\gamma = \pi/2$, como esperado, uma vez que a transformação (5.14) é perfeitamente bem definida quando $m \rightarrow p$, $\gamma \neq \pi/2$.

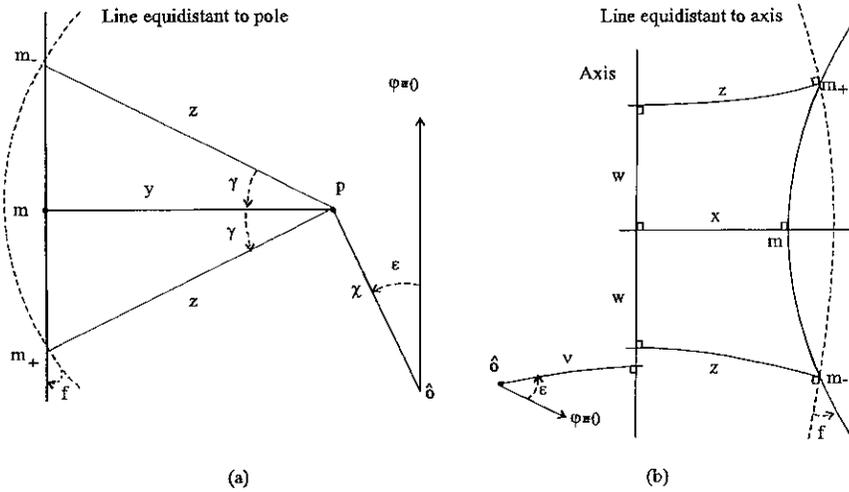


Fig. 5.1 - Full lines represent geodesics

Em H^2 , nós agora consideramos as ações centrais para alguns elementos $\alpha \in SO(2, 1)$. Estes podem ser subdivididos em três classes, de acordo com suas ações em H^2 tendo: (i) um ponto fixo real e um eixo ideal, (ii) ponto fixo e eixo no

infinito, (iii) um ponto fixo ideal e um eixo real. Um elemento da primeira classe é caracterizado como

$$\alpha = \alpha(p, 2\gamma) ,$$

onde $p \in H^2$ é um polo real, ou ponto fixo, e $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. Estas são rotações reais no plano hiperbólico em torno do polo p , por um ângulo 2γ . Tomando coordenadas polares para p e m : $p = (\nu, \varepsilon)$, $m = (\rho, \varphi)$, temos que

$$f_\alpha = +2S^{-1} \left\{ S_\gamma \left[\tilde{C}_\nu \tilde{C}_\rho - \tilde{S}_\nu \tilde{S}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} \right] \right\} \quad (5.15)$$

é a correspondente ação central para a rotação real $\alpha : H^2 \rightarrow H^2$. A interpretação geométrica para $f = \frac{1}{2}f_\alpha$ é análoga ao caso esférico, com orientação oposta. Novamente, note que

$$\tilde{C}_\nu \tilde{C}_\rho - \tilde{S}_\nu \tilde{S}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} = \tilde{C}_y, \quad y = \text{distancia}(m, p).$$

De (5.15) vemos imediatamente que tal ação central existe só quando

$$|S_\gamma| \tilde{C}_y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \tilde{C}^{-1}(1/|S_\gamma|),$$

mas dentro desta vizinhança do ponto fixo $p \in H^2$, f_α é uma função real bem definida. Analogamente ao caso esférico, o mapa correspondente $F_\alpha : H^2 \rightarrow TH^2$ é:

$$\mu = \tilde{C}^{-1} \left\{ C_\gamma / \sqrt{1 - (S_\gamma \tilde{C}_y)^2} \right\} \equiv \tilde{C}^{-1} \{C_\gamma / C_f\} \quad (5.16a)$$

$$\beta = T^{-1} \left\{ [\tilde{S}_\nu \tilde{C}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} - \tilde{C}_\nu \tilde{S}_\rho] / \tilde{S}_\nu S_{(\varphi-\varepsilon)} \right\} + (1 - \text{Sign}(\varphi - \varepsilon))\pi/2 \quad (5.16b)$$

usando (4.12), enquanto que a transformação implícita $m_+(m_-)$ é dada por (4.13) como:

$$\rho_\pm = \tilde{C}^{-1} \left\{ [C_\gamma \tilde{C}_\rho \pm S_\gamma \tilde{S}_\rho \tilde{S}_\nu S_{(\varphi-\varepsilon)}] / \sqrt{1 - (S_\gamma \tilde{C}_y)^2} \right\} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\pm &= \varphi \pm T^{-1} \left\{ S_\gamma [\tilde{C}_\nu \tilde{S}_\rho - \tilde{S}_\nu \tilde{C}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)}] / \eta_\pm \right\} + \\ &+ (1 - \text{Sign}(\eta_\pm))\pi/2, \quad \text{onde } \eta_\pm = C_\gamma \tilde{S}_\rho \pm S_\gamma \tilde{C}_\rho \tilde{S}_\nu S_{(\varphi-\varepsilon)} \end{aligned} \quad (5.17b)$$

Aqui, nossos comentários pertinentes aos outros espaços também se aplicam para as rotações reais hiperbólicas: $m \rightarrow p$ é um ponto fixo de (5.17), i.e. $\rho_\pm \rightarrow \rho, \varphi_\pm \rightarrow \varphi$,

quando $\gamma \neq \pi/2$. Se $\gamma = \pi/2$, a transformação (5.17) é mal definida e podemos ver explicitamente que (5.8) diverge. Neste caso, $\Lambda_{\alpha(p,2\gamma)} \equiv \Lambda_{\mathcal{K}_p} \equiv T_p H^2$, temos uma cáustica central. Mas, em oposição às rotações hiperbólicas reais, existem as rotações hiperbólicas ideais, ou elementos $\alpha \in SO(2,1)$ da terceira classe. Estes podem ser caracterizados de duas formas. Podemos considerar $\alpha = \alpha(\tilde{p}, 2\gamma)$, $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$, \tilde{p} um ponto fixo ideal (onde este pode ser pensado como um ponto em \mathbb{R}^3 satisfazendo $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, enquanto que um ponto real em $H^2 \subset \mathbb{R}^3$ satisfaz $z^2 - (x^2 + y^2) = 1$). Alternativamente, podemos tomar

$$\alpha = \tilde{\alpha}(\nu, \varepsilon, z)$$

onde $\nu \in [0, \infty)$, $z \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon \in [0, 2\pi]$; (ν, ε) sendo as coordenadas de um eixo real em H^2 , i.e. uma geodésica em H^2 t.q. ν é sua distância à origem e ε é o ângulo que este arco geodésico mínimo faz na origem como mostra a Fig. 5.1(b). Interpretamos $|z| < \infty$ como um segmento geodésico neste eixo, seu sinal determinando uma orientação particular. Então, a correspondente ação central que gera esta rotação hiperbólica ideal é dada em coordenadas polares locais como

$$f_{\tilde{\alpha}}(m) = 2S^{-1} \left\{ \tilde{S}_z \left[\tilde{C}_\nu \tilde{S}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} - \tilde{S}_\nu \tilde{C}_\rho \right] \right\}, \quad (5.18)$$

onde

$$\tilde{C}_\nu \tilde{S}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} - \tilde{S}_\nu \tilde{C}_\rho = \tilde{S}_x, \quad x = \text{distância}(m, \text{eixo}(\nu, \varepsilon)).$$

Novamente, $f \equiv \frac{1}{2} f_{\tilde{\alpha}}$ tem uma interpretação geométrica simples, como mostra a Fig. 5.1(b).

Novamente, vemos de (5.18), que tais ações centrais existem só se

$$|\tilde{S}_z \tilde{S}_x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \tilde{S}^{-1} \left(1/|\tilde{S}_z| \right), \quad (5.19)$$

mas nesta vizinhança do eixo (ν, ε) elas são funções reais perfeitamente bem definidas. De (4.12), seu mapa correspondente $F_{\tilde{\alpha}} : H^2 \rightarrow TH^2$ é dado por

$$\mu = \tilde{C}^{-1} \left\{ \tilde{C}_z / \sqrt{1 - (\tilde{S}_z \tilde{S}_x)^2} \right\} \equiv \tilde{C}^{-1} \{ \tilde{C}_z / C_f \} \quad (5.20a)$$

$$\beta = T^{-1} \left\{ [\tilde{C}_\nu \tilde{C}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} - \tilde{S}_\nu \tilde{S}_\rho] / \tilde{C}_\nu S_{(\varphi-\varepsilon)} \right\} + (1 + \text{Sign}(\varphi - \varepsilon))\pi/2 \quad (5.20b)$$

e a transformação intrínseca $m_+(m_-)$ gerada por $f_{\tilde{\alpha}}$ é dada por (4.13) como

$$\rho_{\pm} = \tilde{C}^{-1} \left\{ \left[\tilde{C}_z \tilde{C}_\rho \pm \tilde{S}_z \tilde{S}_\rho \tilde{C}_\nu S_{(\varphi-\varepsilon)} \right] / \sqrt{1 - (\tilde{S}_z \tilde{S}_\nu)^2} \right\} \quad (5.21a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm} = & \varphi \pm T^{-1} \left\{ \tilde{S}_z \left[\tilde{C}_\nu \tilde{C}_\rho C_{(\varphi-\varepsilon)} - \tilde{S}_\nu \tilde{S}_\rho \right] / \xi_{\pm} \right\} + \\ & + (1 + \text{Sign}(\xi_{\pm}))\pi/2, \text{ onde } \xi_{\pm} = \tilde{C}_z \tilde{S}_\rho \pm \tilde{S}_z \tilde{C}_\rho \tilde{C}_\nu S_{(\varphi-\varepsilon)} \end{aligned} \quad (5.21b)$$

A transformação (5.21) descreve movimento finito ao longo de linhas equidistantes ao eixo (ν, ε) , i.e. distância $(m_+, \text{eixo}) = \text{distância}(m_-, \text{eixo})$, como mostra a Fig. 5,1(b). Podemos ver que (5.21) não tem ponto fixo real e é também livre de cúspidas centrais i.e. é bem definida em toda a vizinhança do eixo (ν, ε) onde $f_{\tilde{\alpha}}$ é bem definida. Em outras palavras, a subvariedade lagrangeana $\Lambda_{\tilde{\alpha}} \subset TH^2$ é um gráfico sobre esta vizinhança; podemos checar implicitamente que (5.8) nunca diverge. Ademais, note que, quando $x \rightarrow 0$, m, m_+ e m_- todos convergem sobre o eixo (ν, ε) , com $z = \text{distância}(m, m_+)$. Porém, quando $|z| \rightarrow \infty$, (5.9) é violada assintoticamente, em acordo com (5.19), que implica $x = 0$ quando $|z| = \infty$.

6 Composição de Ações Centrais

Tendo explorado a estrutura simplética do grupoide central, tornamos as atenções à sua estrutura algébrica a fim de responder a seguinte questão: Sejam

$$f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(M)$$

ações centrais locais para duas transformações canônicas, respectivamente.

$$\alpha_1, \alpha_2 : M \rightarrow M, \quad m \mapsto \alpha_i(m).$$

Como $\alpha = \alpha_2(\alpha_1)$ é uma nova transformação canônica em M , qual é, localmente, sua ação central? Em outras palavras: Como as ações centrais se compõem? Começamos por considerar um outro tipo de potencial simplético (local) para Ω_0 , num subconjunto de $(TM)_0$:

Definição 6.1 Seja ζ um potencial simplético para w em $U_\zeta \subset M$, i.e. $d\zeta = w$, em U_ζ . Então, em $DU_\zeta \subset DM$, $\delta\zeta := P_+^*(\zeta) - P_-^*(\zeta)$ é um potencial simplético

local para δw e $Z_\zeta := \Phi_0^*(\delta\zeta)$ é localmente um potencial simplético para Ω_0 em $W_\zeta \subset (TM)_0$, $\Phi_0(W_\zeta) \subset DU_\zeta$, a ser chamado de *potencial aditivo*.

A razão para tal nome torna-se óbvia ao notarmos que

$$\forall \tau_1, \tau_2 \in W_\zeta \text{ tal que } \tau_1 \odot \tau_2 = \tau \in W_\zeta,$$

a seguinte propriedade aditiva é satisfeita:

$$Z_\zeta(\tau) = Z_\zeta(\tau_1) + Z_\zeta(\tau_2). \quad (6.1)$$

Devemos atentar para o fato de que tais potenciais aditivos não coincidem com os potenciais centrais i.e. Z_ζ não satisfaz propriedade (4.1), nem localmente, e não podemos usá-lo para a definição de funções geratrizes centrais diretamente. Por outro lado, os potenciais centrais não são aditivos, como em (6.1), mas a fim de compor ações centrais, notamos então que, em W_ζ , os potenciais central e aditivo diferem apenas por uma diferencial exata:

$$Z_\zeta = Z_0 + dQ_\zeta \quad , \quad Q_\zeta \equiv Q_\zeta^0 \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^k(W_\zeta). \quad (6.2)$$

Portanto, se $\tau_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, com $P_0(\tau_i) = m_i \in U$, é dado pela respectiva ação central standard $f_{\alpha_i} \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^k(U)$, então em $(TU)_0 \cap W_\zeta$:

$$Z_\zeta(\tau_i) = df_{\alpha_i}(m_i) + dQ_\zeta(\tau_i),$$

combinando (4.3) e (6.2). Logo, se Λ_α satisfaz (4.2) em $(TU)_0$, para $\alpha = \alpha_2(\alpha_1)$, e

$$\tau = \tau_1 \odot \tau_2 \in \Lambda_\alpha, \text{ com } P_0(\tau) = m \in U$$

é gerado pela ação central standard $f_\alpha \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^k(M)$, então, em $W_\zeta \cap (TU)_0$, (6.1) implica que

$$df_\alpha(m) = df_{\alpha_1}(m_1) + df_{\alpha_2}(m_2) + d\chi_\zeta(\tau_1, \tau_2), \quad (6.3)$$

onde definimos a função de fase standard $\chi_\zeta \equiv \chi_\zeta^0 : (TU)_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$, localmente por

$$\chi_\zeta(\tau_1, \tau_2) = Q_\zeta(\tau_1) + Q_\zeta(\tau_2) - Q_\zeta(\tau_1 \odot \tau_2). \quad (6.4)$$

Agora, usamos o seguinte resultado crucial, cuja prova é referida ao *Âpendice A*, por usar conceitos não definidos previamente.

Proposição 6.1 A função χ_ζ é bem definida em todo $(TM)_0^2$ e independe de escolhas para potenciais simpléticos locais em M . Na verdade ela coincide, modulo constantes, com a menor área simplética de qualquer dos triângulos geodésicos (orientados) em M que possam ser definidos por elementos $(TM)_0^2$ e determinados pelos pontos médios m, m_1 e m_2 , que doravante denotaremos por $\Delta_0(m, m_1, m_2)$ ou simplesmente $\Delta(m, m_1, m_2)$.

Algumas das technicalidades na afirmação acima tornam-se mais claras ao visitarmos alguns exemplos ou trilharmos por sua prova. Por enquanto, devemos mencionar que no caso do plano euclídeo, a função área dos pontos médios Δ é uma função unívoca e bem definida em todo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, mas tal não é verdade em geral. De todo modo, para qualquer tripla de pontos em $U \subset M$ para qual Δ é bem definida e única, módulo constante, obtemos das proposições 4.1 e 6.1, via (6.3):

Teorema 6.1 Seja $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} \in C_{\mathbb{R}}^k(M)$, $k \geq 2$, ações centrais standard locais para $\alpha_1, \alpha_2 : M \rightarrow M$, respectivamente. Se $f_\alpha \in C_{\mathbb{R}}^k(M)$ é a ação central standard local para $\alpha = \alpha_2(\alpha_1)$, então ela é dada por:

$$f_\alpha(m) \equiv f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}(m) = Stat_{(m_1, m_2)} \left\{ f_{\alpha_1}(m_1) + f_{\alpha_2}(m_2) + \Delta(m, m_1, m_2) \right\} \quad (6.5)$$

que define a composição standard de ações centrais se $\Delta(m, m_1, m_2)$ é bem definido, módulo constantes, i.e. desde que (m, m_1, m_2) possam ser os pontos médios de um triângulo geodésico curto.

Esta ação composta f_α , também denotada por $f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}$, pode não existir, ou então, pode não ser única. Isto é, a subvariedade lagrangeana $\Lambda_\alpha \subset (TM)_0$ pode não satisfazer (4.2) sobre $U \subset M$, ou então, pode ser composta de vários ramos em $(TU)_0$. Em outras palavras, visto como um produto em $\mathcal{A}_c^0(U)$, o resultado pode não existir, ou então, podem haver mais de um.

Ademais, a regra de composição (6.5) não é única se considerarmos também ações centrais não-standard, se M for compacto. Neste caso, repetindo os passos que levaram a (6.3), para triplas redutíveis $(i, j; k)$, usando (4.3') obtemos a versão

generalizada:

$$df_{\alpha}^k(m) = df_{\alpha_1}^i(m_1) + df_{\alpha_2}^j(m_2) + d[\chi_{\zeta}]_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2), \quad (6.3')$$

onde $[\chi_{\zeta}]_{ij}^k$ é uma representação local para uma união de fase geral $(\widetilde{TM})_{ij}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$[\chi_{\zeta}]_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2) = Q_{\zeta}^i(\tilde{\tau}_1) + Q_{\zeta}^j(\tilde{\tau}_2) - Q_{\zeta}^k(c_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)), \quad (6.4')$$

com cada Q_{ζ}^i sendo uma função definida por

$$dQ_{\zeta}^i = Z_{\zeta}^i - Z_i,$$

em subconjuntos apropriados $W_{\zeta}^i \subset (\widetilde{TM})_i$. Como no caso standard, identificamos tal função por:

Proposição 6.1' Para $(i, j; k)$ redutível, a função $[\chi_{\zeta}]_{ij}^k$ é bem definida em todo $(\widetilde{TM})_{ij}^2$, independe de escolhas locais para ζ e coincide, módulo constantes, com a menor área simplética de qualquer dos triângulos geodésicos (orientados, redutíveis) em M que possam ser definidos por elementos em $(\widetilde{TM})_{ij}^2 \times (\widetilde{TM})_k$ e determinados pelos pontos médios $(m_1, m_2; m)$, em outras palavras, triângulos geodésicos com pontos médio dados e lados que sejam geodésicas do tipo i, j e k . Tal área é doravante denotada por $\Delta_{ij}^k(m; m_1, m_2)$.

Novamente, referimos à prova da Proposição 6.1' ao Âpendice A. Então, via (6.3') obtemos:

Teorema 6.1' Seja M compacto e $f_{\alpha_1}^i, f_{\alpha_2}^j$ ações centrais locais para $\alpha_1, \alpha_2 : M \rightarrow M$, respectivamente. Se $(i, j; k)$ é redutível e f_{α}^k é uma ação central local para $\alpha = \alpha_2(\alpha_1)$, então ela é dada por

$$f_{\alpha}^k(m) \equiv f_{\alpha_1}^i \Delta^k f_{\alpha_2}^j = \text{Stat}_{(m_1, m_2)} \{ f_{\alpha_1}^i(m_1) + f_{\alpha_2}^j(m_2) + \Delta_{ij}^k(m; m_1, m_2) \} \quad (6.5')$$

definindo a composição $(i, j; k)$ de ações centrais em M , desde que $(m_1, m_2; m)$ possam ser os pontos médios de um triângulo geodésico redutível do tipo $(i, j; k)$.

Claramente, (6.5) é um caso particular de (6.5'), com $\Delta_{00}^0 \equiv \Delta_0 \equiv \Delta$. Porém, devemos nos atentar para o fato de que, ao se restringir para composições standard obtém-se uma regra unicamente definida de composição para ações centrais standard. Ao extendermos para ações centrais gerais, tal regra cessa a ser única, embora cada caso seja bem definindo. Por esta razão, ao considerar composições múltiplas, em § 7, vamos nos ater ao caso standard.

•**Exemplos:** Casos standard, apenas. Apresentamos algumas ilustrações sobre como chegar a (6.5) diretamente, embora de forma um tanto heurística, nos exemplos de espaços considerados. Fornecemos as expressões para Δ correspondentes e analisamos as restrições não triviais específica que se aplicam, em cada caso. Para o plano euclidano, tomando o potencial simplético

$$\zeta = \frac{1}{2} (pdq - qdp),$$

(6.2) é escrito como

$$Z_{\zeta} \equiv \bar{Z} = Z_0 + d(pv_q - qv_p).$$

Mas $Q_{\zeta} \equiv \bar{Q}$ pode ser reescrita como

$$\bar{Q} \equiv p\dot{q} - q\dot{p} = \vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} = w(\vec{x}, \dot{\vec{x}}),$$

onde $\dot{\vec{x}}$ é visto agora como um vetor em $\mathbb{R}^2 = T^0\mathbb{R}^2$. Assim, \bar{Q} é a área simplética determinada pelos vetores \vec{x} e $\dot{\vec{x}}$ em \mathbb{R}^2 , que coincide com a área simplética do triângulo com vértices $(\hat{o}, \vec{x}_-, \vec{x}_+)$, como mostra a Fig. 6.1(a).

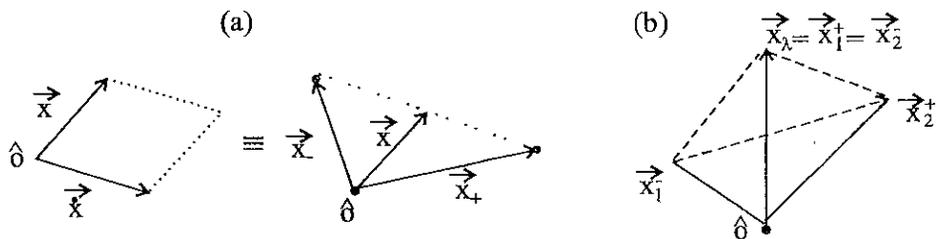


Fig. 6.1

Denotando a área de tal triângulo por $\acute{A}\text{rea}(\hat{o}, \vec{x}_-, \vec{x}_+)$, vemos que

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) &= \bar{Q}(\vec{\tau}_1) + \bar{Q}(\vec{\tau}_2) - \bar{Q}(\vec{\tau}_1 \circ \vec{\tau}_2) = \\ &= \acute{A}\text{rea}(\hat{o}, \vec{x}_1^-, \vec{x}_1^+) + \acute{A}\text{rea}(\hat{o}, \vec{x}_2^-, \vec{x}_2^+) - \acute{A}\text{rea}(\hat{o}, \vec{x}_1^-, \vec{x}_2^+) , \end{aligned}$$

onde

$$\vec{x}_1^+ = \vec{x}_2^- = \vec{x}_\lambda$$

é a junção da composição de grupoide. Mas a soma acima é simplesmente

$$\acute{A}\text{rea}(\vec{x}_1^-, \vec{x}_\lambda, \vec{x}_2^+) ,$$

como vemos da Fig. 6.1(b), que pode ser identificada como

$$\Delta(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2) ,$$

com

$$\vec{x}_i = P_0(\vec{\tau}_i) \text{ e } \vec{x} = P_0(\vec{\tau}_1 \odot \vec{\tau}_2)$$

sendo os pontos médios do triângulo cujos vértices são $(\vec{x}_1^-, \vec{x}_\lambda, \vec{x}_2^+)$. Esta expressão é independente da escolha para $\bar{\zeta}$ e é dada por

$$\Delta(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2) = 2 \{ \vec{x} \wedge \vec{x}_1 + \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \wedge \vec{x} \} \quad (6.6)$$

que é a área triangular de centros, em \mathbb{R}^2 , também referida em [7], como a área do triângulo circunscrito definido pelos pontos médios dos lados. Portanto, a composição de duas ações centrais no plano euclídeo torna-se, com $f_i = \frac{1}{2} f_{\alpha_i}$:

$$f(\vec{x}) \equiv f_1 \Delta f_2(\vec{x}) = \text{Stat}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \{ f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2) + \vec{x} \wedge \vec{x}_1 + \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \wedge \vec{x} \} \quad (6.7)$$

que é o resultado apresentado em [7,9] e uma versão particular de (6.5) em \mathbb{R}^2 . Para o toro \mathcal{T}^2 , equações (6.6) e (6.7) ainda estão válidas, mas com a restrição de que os triângulos tenham todos os lados com as componentes q e p de tamanhos menores que π . Em termos dos pontos médios, tal restrição se escreve:

$$|q_i - q| , |p_i - p| , |q_1 - q_2| , |p_1 - p_2| < \pi/2 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (6.8)$$

É assim (6.7), junto com o vínculo (6.8) define a composição standard de duas ações centrais no toro.

Na esfera, tomamos o potencial simplético local

$$\zeta_{>} = (1 - C_\theta)d\varphi, \text{ em } U_{\zeta_{>}} \equiv U_{>} = S^2 \setminus (\theta = \pi),$$

para obter

$$Z_{\zeta_{>}} \equiv Z_{>} = Z_0 + d \left(2T^{-1} \left(\frac{S_\theta S_\nu S_\beta}{C_\theta + C_\nu} \right) \right), \text{ em } W_\zeta \quad (6.9)$$

e assim identificamos, por (6.2),

$$Q_{>} = 2T^{-1} \left(\frac{S_\theta S_\nu S_\beta}{C_\theta + C_\nu} \right)$$

que coincide com a área simplética do triângulo esférico cujos vértices são (\hat{o}, m_-, m_+) denotado por

$$Q_{>} = \text{Área}(\hat{o}, m_-, m_+).$$

Assim, similarmente com o plano, obtemos

$$\chi_{>} = \text{Área}(m_1^-, m_\lambda, m_2^+),$$

onde

$$(m_i^-, m_i^+) = \Phi_0(\tau_i) \text{ e } m_1^+ = m_2^- = m_\lambda$$

é a junção do produto de grupoide. Novamente, as áreas e as geometrias de tais triângulos, quando todos os lados têm tamanho menor que π , podem ser determinados pelos pontos médios dos lados, ou equivalentemente, pelas projeções centrais

$$m_i = P_0(\tau_i), \quad m = P_0(\tau_1 \circ \tau_2).$$

Logo,

$$\text{Área}(m_1^-, m_\lambda, m_2^+) = \Delta(m, m_1, m_2) \equiv \Delta,$$

que, independentemente da escolha para $\zeta_{>}$, é dada por

$$\Delta = 2\text{Arg} \left\{ \sigma \sqrt{1 - D^2} + iD \right\} \quad (6.10)$$

onde

$$\sigma \equiv \sigma(m, m_1, m_2) \in \{-1, 1\}$$

tem o mesmo sinal que qualquer dos produtos escalares

$$(\hat{m} \cdot \hat{m}_1), (\hat{m} \cdot \hat{m}_2), (\hat{m}_1 \cdot \hat{m}_2),$$

e

$$D \equiv D(m, m_1, m_2) = \det[\hat{m}, \hat{m}_1, \hat{m}_2].$$

Aqui, $\hat{m} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a representação cartesiana de produto em S^2 como vetores-colunas unitários \mathbb{R}^3 tal que $\hat{m}_1 \cdot \hat{m}_2$ é o produto escalar usual $[\hat{m}, \hat{m}_1, \hat{m}_2]$ é uma matriz real 3×3 usual. Para triângulo pequenos i.e. $|\Delta| < \pi$, (6.10) simplifica para

$$\Delta(m, m_1, m_2) = 2S^{-1} (\det [\hat{m}, \hat{m}_1, \hat{m}_2]) \quad (6.11)$$

Assim, (6.10)-(6.11) é a forma explícita para Δ que deve ser inserida na expressão geral (6.5) para a composição standard de ações centrais em S^2 , desde que a tripla (m, m_1, m_2) seja os pontos médios de um triângulo esférico com todos os lados mais curtos que π . Mas isto impõe restrições não triviais em tais pontos de $S^2 \times S^2 \times S^2$. Uma análise cuidadosa revela que qualquer uma tal tripla deve satisfazer:

$$(\hat{m} \cdot \hat{m}_1)(\hat{m}_1 \cdot \hat{m}_2), (\hat{m} \cdot \hat{m}_2)(\hat{m}_1 \cdot \hat{m}_2), (\hat{m} \cdot \hat{m}_1)(\hat{m} \cdot \hat{m}_2) > 0 \quad (6.12)$$

e (6.12) é a restrição não trivial que deve ser imposta em (6.5), (6.10)-(6.11), para definir a composição standard de duas ações centrais na esfera.

O caso do plano hiperbólico, embora muito similar ao da esfera, apresenta uma distinção sutil. Novamente, tomemos o potencial simplético global

$$\zeta_{>} = (\tilde{C}_\rho - 1)d\varphi, \quad U_\zeta = H^2.$$

Então,

$$Z_{\zeta_{>}} \equiv Z_{>} = Z_0 + d \left\{ 2T^{-1} \left(\frac{\tilde{S}_\rho \tilde{S}_\mu S_\beta}{\tilde{C}_\rho + \tilde{C}_\mu} \right) \right\}, \quad (6.13)$$

do qual obtemos, por (6.2),

$$Q_{>} \equiv 2T^{-1} \left(\frac{\tilde{S}_\rho \tilde{S}_\mu \tilde{S}_\beta}{\tilde{C}_\rho + \tilde{C}_\mu} \right) \equiv \text{Área}(\hat{o}, m_-, m_+) ,$$

a área simplética do triângulo hiperbólico cujos vértices são (\hat{o}, m_-, m_+) . Uma vez mais, temos:

$$\chi(\tau_1, \tau_2) \equiv \text{Área}(m_-^1, m_\lambda, m_+^2) ,$$

que pode ser identificada como

$$\Delta(m, m_1, m_2) ,$$

onde

$$m = \text{mid}(m_-^1, m_+^2) , \quad m_1 = \text{mid}(m_-^1, m_\lambda) , \quad m_2 = \text{mid}(m_\lambda, m_+^2)$$

e cuja expressão explícita é

$$\Delta(m, m_1, m_2) = 2S^{-1} (\det [\vec{m}, \vec{m}_1, \vec{m}_2]) \quad (6.14)$$

onde $m \simeq \vec{m} \in H^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a representação cartesiana de vetores-coluna. Mas agora notamos que (6.14) apenas faz sentido quando,

$$|\det [\vec{m}, \vec{m}_1, \vec{m}_2]| < 1 , \quad (6.15)$$

que é uma restrição real em $H^2 \times H^2 \times H^2$. Na verdade, (6.15) é uma condição necessária e suficiente que qualquer tripla de pontos de H^2 deve satisfazer para que seja o conjunto de pontos de um triângulo hiperbólico único. Assim, como no caso esfera, existe uma restrição não trivial na composição de duas ações centrais. Porém, no caso hiperbólico, tal restrição (6.15) advém naturalmente da própria definição da função área (6.14), sendo pois intrínseca à própria geometria hiperbólica. Sua interpretação é que os três pontos médios nunca podem estar muito distantes, como visto esquematicamente na Fig. 6.2, onde H^2 é representado como o disco de Poincaré.

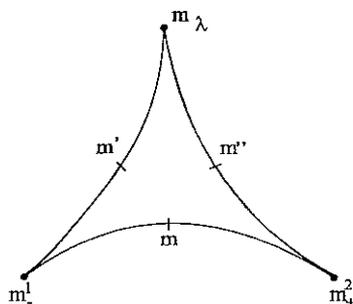


Fig. 6.2

Por outro lado, na esfera a restrição (6.12) é uma consequência da restrição do grupoide $(TS^2)_0$. Em outras palavras, existem triângulos esféricos cujos pontos médios não satisfazem (6.12), mas estes não podem ser usados na definição da composição standard de ações centrais; contrariamente ao caso hiperbólico onde, para todo triângulo, (6.15) é satisfeita. É interessante notar também que, ao definirmos triângulos pelos vértices ao invés dos pontos médios, nenhuma restrição não trivial se aplica (exceto a exclusão de antipodais, no caso esférico, que é um conjunto de medida zero em $S^2 \times S^2 \times S^2$), indicando que o mapa *vértices* \rightarrow *pontos médios* é geralmente menos trivial do que suporíamos ao olhar para \mathbb{R}^2 .

Assim, escrevemos a composição de duas ações centrais no plano hiperbólico não compacto, com $f_i = \frac{1}{2}f_{\alpha_i}$ e (m, m_1, m_2) satisfazendo a restrição (6.15), como

$$f(m) \equiv f_1 \Delta f_2(m) = \text{Stat}_{(m_1, m_2)} \left\{ f_1(m_1) + f_2(m_2) + S^{-1} (\det [\vec{m}, \vec{m}_1, \vec{m}_2]) \right\} \quad (6.16)$$

7 Composições Múltiplas

Até agora vimos como duas ações centrais standard podem se compor em uma nova, via (6.5). Agora, queremos generalizar isto para a composição de um número arbitrário de ações centrais standard, sempre que possível. Porém, isto deve ser feito com algum cuidado, assim começamos com a composição de três ações. Suponha

que $f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}$, dado por (6.5), seja uma única ação central standard em $U \subset M$, assim como f_{α_3} . Usando (6.5) novamente:

$$\begin{aligned} (f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}) \Delta f_{\alpha_3}(m) &= \text{Stat}_{(m', m_3)} \{f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}(m') + f_{\alpha_3}(m_3) + \Delta(m, m', m_3)\} \\ &= \text{Stat}_{(m', m_3)} \left\{ \text{Stat}_{(m_1, m_2)} \{f_{\alpha_1}(m_1) + f_{\alpha_2}(m_2) + \Delta(m', m_1, m_2)\} + \right. \\ &\quad \left. + f_{\alpha_3}(m_3) + \Delta(m', m_3, m) \right\} \end{aligned}$$

Agora, se a solução existe, isto pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \text{Stat}_{(m_1, m_2, m_3)} \{f_{\alpha_1}(m_1) + f_{\alpha_2}(m_2) + f_{\alpha_3}(m_3) + \\ \text{Stat}_{(m')} \{\Delta(m', m_1, m_2) + \Delta(m', m_3, m)\}\} . \end{aligned}$$

Mas, com m_1, m_2, m_3 restringidos pela condição de estacionariedade, via equação central (4.3),

$$\Delta(m', m_1, m_2) =: g_1(m') \text{ e } \Delta(m', m_3, m) =: g_2(m')$$

forneem mapas bem definidos

$$\vec{G}_1, \vec{G}_2 : m' \longmapsto (T_{m'}M)_0$$

sob hipótese de que tanto $f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}$ e $(f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}) \Delta f_{\alpha_3}$ são ações centrais bem definidas, i.e. que as condições de estacionariedade possuem solução única, tanto parcial quanto completa. Então, da forma da equação central e do caráter involutivo do potencial central:

$$Z_0(\tau) = -Z_0(\bar{\tau}),$$

a condição de estacionariedade em m' implica

$$\vec{G}_1(m') = -\vec{G}_2(m').$$

Do mapa exponencial simétrico, isto significa que os dois triângulos compostos formam um único quadrilátero, i.e., seus lados centrados em m' são precisamente opostos um ao outro. Em outras palavras, temos que

$$\text{Stat}_{(m')} \{\Delta(m', m_1, m_2) + \Delta(m', m_3, m)\} \equiv P_4(m_1, m_2, m_3, m) \quad (7.1)$$

onde $P_4(m_1, m_2, m_3, m)$ é a área simplética do quadrilátero definido em (7.1), cujos pontos médios são (m_1, m_2, m_3, m) .

Genericamente, os quatro pontos médios não determinam o quadrilátero unicamente. Porém, se todas as suas decomposições triangulares resultam em triângulos definidos por elementos em $(TM)_0^2$ apenas, então pela proposição 6.1 and (7.1), $P_4(m_1, m_2, m_3, m)$ é a menor área simplética de qualquer destes quadriláteros, a menos de constantes. Qualquer degenerescência em sua geometria, que seja uma função contínua em m' , não altera sua área simplética, por (7.1). E qualquer outro quadrilátero “do tipo $(TM)_0$ ”, no sentido acima, terá a mesma área simplética, a menos de constantes, pela proposição 6.1. Com a palavra standard subentendida, apresentamos este resultado como:

Lema 7.1 Seja $f_{\alpha_i} \in C_{\mathbb{R}}^k(M)$, $k \geq 2$, localmente uma ação central para $\Lambda_{\alpha_i} \subset (TU)_0$. Se $f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}$ e $f_{\alpha_2} \Delta f_{\alpha_3}$ são ações centrais únicas em U , assim como $(f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}) \Delta f_{\alpha_3}$ e $f_{\alpha_1} \Delta (f_{\alpha_2} \Delta f_{\alpha_3})$, então $(f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}) \Delta f_{\alpha_3} = f_{\alpha_1} \Delta (f_{\alpha_2} \Delta f_{\alpha_3})$ é dado por

$$f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2} \Delta f_{\alpha_3}(m) = \text{Stat}_{(m_1, m_2, m_3)} \{f_{\alpha_1}(m_1) + f_{\alpha_2}(m_2) + f_{\alpha_3}(m_3) + P_4(m, m_1, m_2, m_3)\} , \quad (7.2)$$

$P_4(m, m_1, m_2, m_3)$ sendo a menor área simplética de qualquer quadrilátero (orientado) que possa ser decomposto em triângulos definidos por elementos em $(TM)_0^2$ apenas e determinados pelos pontos médios (m, m_1, m_2, m_3) , a menos de constantes.

As condições de existência e unicidade são bastante difíceis de assegurar de início, em geral. É claro que, se qualquer f_{α_i} ou composição intermediária não é uma ação central, a composição tripla é sem sentido. Por outro lado, se uma composição intermediária não é única, por exemplo

$$f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2} = \{g_1, g_2\} ,$$

então podemos proceder com

$$\{g_1 \Delta f_{\alpha_3}, g_2 \Delta f_{\alpha_3}\}$$

da mesma forma, mas a composição final

$$(f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2}) \Delta f_{\alpha_3}$$

não é garantida de ser associativa, ao menos em princípio. Porém, se todas $\Lambda_{\alpha_i}, \Lambda_{\alpha_i \circ \alpha_j}, \dots$ são compostas de ramos tal que um destes possa ser consistentemente distinguido, por alguma razão particular, assim como sua ação central correspondente, então podemos aplicar Lema 7.1 exclusivamente a este conjunto.

Mencionamos ainda que poderíamos ter nos aproximado da composição de três ações centrais por outro ângulo, começando com a propriedade associativa do grupoide central $(TM)_0$, e usando (6.1), (6.2) e (4.3) diretamente para as três ações, obtendo, em $W_\zeta \cap (TU)_0$,

$$df_\alpha(m) = df_{\alpha_1}(m_1) + df_{\alpha_2}(m_2) + df_{\alpha_3}(m_3) + d\chi_\zeta^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) ,$$

onde

$$\chi_\zeta^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = Q_\zeta(\tau_1) + Q_\zeta(\tau_2) + Q_\zeta(\tau_3) - Q_\zeta(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3) .$$

Então, sob as condições do Lema 7.1 sabemos que

$$\chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv P_4(m, m_1, m_2, m_3)$$

e

$$f_\alpha \equiv f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2} \Delta f_{\alpha_3} ,$$

unicamente dada por (7.2).

Finalmente, uma cuidadosa reinteração de todos os passos que levam à (7.2), com todas as condições intermediárias de existência e unicidade, nos dão:

Corolário 7.1 Seja $f_{\alpha_i} \in C_{\mathbb{R}}^k(U)$, $U \subset M$, $k \geq 2$, localmente ações centrais standard para $\Lambda_{\alpha_i} \subset (TU)_0$. Se todas as composições ordenadas intermediárias $f_{\alpha_i} \Delta f_{\alpha_{i+1}}$, $f_{\alpha_i} \Delta (f_{\alpha_{i+1}} \Delta f_{\alpha_{i+2}})$, $((f_{\alpha_i} \Delta f_{\alpha_{i+1}}) \Delta f_{\alpha_{i+2}}) \Delta f_{\alpha_{i+3}}$, são ações centrais únicas em U , então todas as sequências ordenadas de n composições são iguais e dadas por:

$$f_{\alpha_1} \Delta f_{\alpha_2} \Delta \dots \Delta f_{\alpha_n}(m) = \text{Stat}_{\{\{m_i\}\}} \left\{ \sum_i f_{\alpha_i}(m_i) + P_{n+1}(m, \{m_i\}) \right\} \quad (7.3)$$

$P_{n+1}(m, \{m_i\})$ sendo a menor área simplética de qualquer $(n + 1)$ -polígono orientado que possa ser triangulado por elementos definidos em $(TM)_0^2$ apenas e determinado pelos pontos médios $(m, \{m_i\})$, a menos de constantes.

Novamente, se a unicidade falhar mas, por alguma razão particular, um conjunto único de ações centrais possa ser consistentemente distinguido, então podemos usar o corolário 7.1 para estas ações centrais standard, exclusivamente, como faremos em § 8.

- **Exemplos:** Para a composição de três ações, primeiramente o plano euclideo, que já apresenta uma propriedade interessante. De (6.7) duas vezes e (7.1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_4(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) &= \text{Stat}_{(\vec{x}')} \{ \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \wedge \vec{x} + \vec{x}' \wedge (\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \vec{x}) \} \\ &\implies \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \vec{x} = 0 . \end{aligned} \quad (7.4)$$

Esta condição significa que $(\vec{x}, \{\vec{x}_i\})$ são os vértices de um paralelogramo com diagonais

$$\vec{x}_3 - \vec{x}_1 , \vec{x} - \vec{x}_2 .$$

Mas isto é verdade para qualquer quadrilátero em \mathbb{R}^2 , i.e. seus pontos médios são vértices de um paralelogramo. Inversamente, dado qualquer paralelogramo em \mathbb{R}^2 , existe uma família contínua de quadriláteros circunscritos cujos pontos médios são os vértices do dado paralelogramo. Tal família pode ser parametrizada por um dos vértices de cada quadrilátero circunscrito ou, equivalentemente, pelo ponto médio de uma das diagonais, como \vec{x}' acima. De acordo com (7.1), a área simplética independe de \vec{x}' , sendo dada unicamente como duas vezes a área do paralelogramo inscrito:

$$\frac{1}{2}P_4(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \wedge \vec{x} = (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \wedge (\vec{x} - \vec{x}_2).$$

Assim, a composição de três ações centrais em \mathbb{R}^2 torna-se, usando a convenção $f_i = \frac{1}{2}f_{\alpha i}$,

$$f_1 \Delta f_2 \Delta f_3(\vec{x}) = \text{Stat}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \{ f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2) + f_3(\vec{x}_3) + \vec{x} \wedge \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 \} \quad (7.5)$$

com $(\vec{x}, \{\vec{x}_i\})$ sujeito a (7.4) e sob as condições necessárias de existência e unicidade apresentadas no Lema 7.1. No toro, a mesma análise e resultados se aplicam, mas agora sujeitos à restrição (de grupoide standard) extra:

$$|q - q_i|, |q_i - q_j|, |p - p_i|, |p_i - p_j| < \pi/2, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7.6)$$

No caso esférico, por outro lado, a ambiguidade acima com relação à geometria dos quadriláteros inexistente, ao menos quando consideramos apenas aqueles quadriláteros definidos por elementos que se compõem em $(TS^2)_0$. Então, como para os triângulos esféricos, uma bijeção entre os conjuntos de vértices e pontos médios permite uma definição única da geometria do quadrilátero, não apenas sua área, de qualquer maneira. Ou seja, cada quadrilátero é unicamente determinado pelos vértices ou pelos centros e a única restrição, no conjunto de centros deriva das restrições do grupoide $(TS^2)_0$. Denotando

$$C_{ij} = \hat{m}_i \cdot \hat{m}_j \equiv \text{coseno}(\text{distância}(m_i, m_j)),$$

podemos escrever a área de quadriláteros convexos que sejam decomponíveis em triângulos pequenos, i.e. $|\Delta| < \pi$, como

$$\frac{1}{2}P_4(m_1, m_2, m_3, m_4) = \sigma_{1234} \cdot C^{-1}\{C_{12}C_{34} + C_{23}C_{41} - C_{13}C_{24}\} \quad (7.7)$$

onde $\sigma_{1234} = \pm 1$ é a orientação do conjunto convexo (m_1, m_2, m_3, m_4) e as restrições de grupoide nos pontos médios destes quadriláteros simples tornam-se, denotando

$$D_{ijk} \equiv \det[\hat{m}_i, \hat{m}_j, \hat{m}_k],$$

$$D_{123}, D_{234}, D_{341}, D_{412} > 0 \quad (7.8)$$

Portanto, podemos escrever esta composição mais simples de ações centrais em S^2 , sob as hipóteses de existência e unicidade do Lema 7.1, com $f_i = \frac{1}{2}f_{\alpha i}$, como:

$$f_1 \Delta f_2 \Delta f_3(m_4) = \text{Stat}_{(m_1, m_2, m_3)}\{f_1(m_1) + f_2(m_2) + f_3(m_3) + \sigma_{1234} \cdot C^{-1}[C_{12}C_{34} + C_{23}C_{41} - C_{13}C_{24}]\}, \quad (7.9)$$

onde os $\{m_i\}$ então sujeitos à restrição (7.8).

Para o plano hiperbólico não compacto, a função área de centros para quadriláteros convexos é similar:

$$\frac{1}{2}P_4(m_1, m_2, m_3, m_4) = \sigma_{1234} \cdot C^{-1} \{ \tilde{C}_{12}\tilde{C}_{34} + \tilde{C}_{23}\tilde{C}_{41} - \tilde{C}_{13}\tilde{C}_{24} \} , \quad (7.10)$$

onde

$$\tilde{C}_{ij} = \cosh (\text{distância } (m_i, m_j)) .$$

Novamente, como para triângulos hiperbólicos, as restrições nos pontos médios são intrínsecas à geometria hiperbólica e podem ser obtidas diretamente de (7.10), i.e.

(m_1, m_2, m_3, m_4) convexo deve satisfazer:

$$| \tilde{C}_{12}\tilde{C}_{34} + \tilde{C}_{23}\tilde{C}_{41} - \tilde{C}_{13}\tilde{C}_{24} | < 1 \quad (7.11)$$

e, como no caso de esfera, cada quádrupla de centros satisfazendo (7.11) determina um único quadrilátero convexo hiperbólico e vice-versa. Logo, esta composição mais simples de três ações centrais em H^2 , sob as hipóteses de existência e unicidade do Lema 7.1 é escrita, com $f_i = \frac{1}{2}f_{\alpha_i}$ e $\{m_i\}$ sujeito à restrição (7.11), como:

$$f_1 \Delta f_2 \Delta f_3(m_4) = Stat_{(m_1, m_2, m_3)} \{ f_1(m_1) + f_2(m_2) + f_3(m_3) + \sigma_{1234} \cdot C^{-1} [\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{34} + \tilde{C}_{23}\tilde{C}_{41} - \tilde{C}_{13}\tilde{C}_{24}] \} . \quad (7.12)$$

Além de fornecer equações explícitas para composições de três ações centrais, a discussão acima ilustrou alguns tipos de restrições a que os pontos médios, ou centros (os argumentos das ações componentes) estão sujeitos. A respeito disto, o plano euclideo apresenta a propriedade de que, quando o número de ações componentes é par, nenhuma restrição se aplica, mas quando o número é ímpar, existe uma degenerescência na determinação do 2ℓ -polígono, de seus pontos médios, correspondendo a uma restrição funcional linear

$$g(\vec{x}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{2\ell-1}) = 0$$

nos argumentos das ações centrais componentes. Para o toro, ainda é necessário acrescentar as restrições de grupoide.

Por outro lado, nos casos curvos estudados, tal degenerescência e sua correspondente restrição extra não estão presentes. Ao considerar somente aqueles polígonos que são obtidos por composições reiteradas no grupóide central standard, há sempre uma bijeção entre os conjuntos de centros e de vértices. Em H^2 , restrições intrínsecas existem para os pontos médios, porém, que aparecem explicitamente na função área, qualquer que seja o número de ações componentes. Em S^2 , apenas as restrições do grupóide central (standard) são aplicáveis, em todos os casos.

Uma outra forma de ver estas dificuldades com respeito a degenerescências e restrições extras é a seguinte: Seja $(m, \{m_i\}_n)$ um candidato para o conjunto de pontos médios de um $(n + 1)$ -polígono em M . Ainda, para cada m_i , seja

$$\mathcal{R}_{m_i} : M \rightarrow M$$

a involução correspondente, cujo ponto fixo é m_i . Então, a existência de um $(n + 1)$ -polígono circunscrito aos centros $(m, \{m_i\}_n)$ é equivalente à existência de um ponto fixo para o symplectomorfismo

$$\mathcal{P}_{n+1} \equiv \mathcal{R}_{m_1} \cdot \mathcal{R}_{m_2} \cdot \cdots \cdot \mathcal{R}_{m_n} \cdot \mathcal{R}_m : M \rightarrow M.$$

Agora, em \mathbb{R}^2 , quando n é ímpar \mathcal{P}_{n+1} é uma translação, veja (2.1). Pontos fixos existem apenas quando esta translação é a identidade, quando todos os pontos são fixos. Para a esfera, por outro lado $\mathcal{P}_{n+1} \in SO(3)$, ou $SU(2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e sempre existe um ponto fixo (na verdade dois). Porém, em H^2 , $\mathcal{P}_{n+1} \in SO(2, 1)$ e pode ou não haver um ponto fixo em H^2 , $\forall n \geq 2$, mas quando há, ele é único.

Nós não apresentaremos aqui uma caracterização explícita das composições múltiplas, para n genérico, em todos os exemplos. O leitor é referido a [7], para o caso H^2 . Ao invés, no próximo parágrafo vamos estudar um limite particular para (7.3), quando $n \rightarrow \infty$.

8 O Princípio Variacional Central

Nós agora concentramos na relação entre as descrições centrais das transformações canônicas finitas e infinitesimais, i.e., na relação entre ações centrais finitas e infinitesimais. Para este fim, considere $(\alpha)_T \equiv \{\alpha_y^{(x)}\}_T$, uma sequência contínua de transformações

canônicas em M evoluindo da identidade $\alpha_0 \equiv id : M \rightarrow M$, tal que

$$\forall x, y, z, t \in [0, T] \text{ t.q. } x + y + z = t ,$$

as seguintes propriedades valem.

$$\alpha_y^{(x)} : M \rightarrow M \text{ satisfaz } (\alpha_y^{(x)})^*(w) = w,$$

$$\alpha_t \equiv \alpha_t^{(0)} = \alpha_z^{x+y}(\alpha_y^{(x)} \cdot \alpha_x^{(0)}) = \alpha_z^{(x+y)} \cdot \alpha_{x+y}^{(0)} = (\alpha_z^{(x+y)} \cdot \alpha_y^{(x)}) \cdot \alpha_x^{(0)} = \alpha_{y+z}^{(x)} \cdot \alpha_x^{(0)}$$

e também

$$\alpha_{t+\varepsilon} = \alpha_\varepsilon^{(t)} \cdot \alpha_t = \alpha_t + o(\varepsilon) , \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0 ,$$

com

$$\alpha_\varepsilon^{(t)} \rightarrow id : M \rightarrow M.$$

Onde $\alpha_\varepsilon^{(t)}$ é a transformação canônica infinitesimal definida pela função hamiltoniana $h(t)$, via equação de Hamilton ou, equivalentemente, pela ação central infinitesimal

$$f_{\alpha_\varepsilon^{(t)}} = -\varepsilon h(t) ,$$

via equação central (4.3). O parâmetro t acima, é usualmente identificado como “tempo”. Assumimos que as hamiltonianas não-autônomas são contínuas em t , i.e. funções contínuas em $M \times [0, T]$, com

$$h(t) \neq h(t') ,$$

em geral. De acordo, denotamos $h(0) \equiv h$ e, se

$$h(t) = h, \forall t \in [0, T] , \text{ dizemos que } h \text{ é autônoma.}$$

Neste caso particular, $h(t) \equiv h$, temos que, para $t \in [-T, T]$:

$$(\alpha_t)^{-1} \equiv \alpha_{-t}.$$

Mas geralmente, i.e. $h(t) \neq h(t')$, tal inversibilidade simples é apenas satisfeita em intervalos de tempo muito curtos i.e.

$$(\alpha_\varepsilon^{(t)})^{-1} = \alpha_{-\varepsilon}^{(t)} \text{ apenas no limite } \varepsilon \rightarrow 0 .$$

Em outras palavras, o fluxo de $\{\alpha_t\}_T$ é localmente hamiltoniano (autônomo), mas não globalmente. Assim, procuramos as ações centrais para α_t dadas em termos de $h(t)$. Para alcançar este objetivo usaremos os resultados do parágrafo anterior mas, ao fazê-lo, deveríamos nos certificar que f_{α_t} existe e é única $\forall t' \in [0, t]$, em princípio. Na verdade, ambas as condições podem ser relaxadas neste caso particular, como veremos adiante. Então, obtemos:

Teorema 8.1 Seja $(\alpha)_T$ uma sequência contínua de transformações canônicas num espaço simplético simétrico M , evoluindo da identidade, como acima, tal que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha_\varepsilon^{(t)}$ é a transformação canônica infinitesimal gerada pela hamiltoniana $h(t)$, ou equivalentemente, pela ação central $-\varepsilon h(t)$, onde $h(t) \equiv h(m, t)$ é contínua em t . Então aonde quer que a ação central para $\alpha_t \equiv \alpha_t^{(0)}$ exista,

$$f_{\alpha_t}(m) \equiv \Psi_h^t(m) \equiv \Psi_h(m, t) ,$$

ela satisfaz o *Princípio Variacional Central*:

$$\Psi_h(m, t) = Stat_{(\nu)} \left\{ - \int_\nu h(m'(t'), t') dt' + \mathcal{F}_\nu w \right\} (m, t) , \quad (8.1)$$

para um família de caminhos contínuos

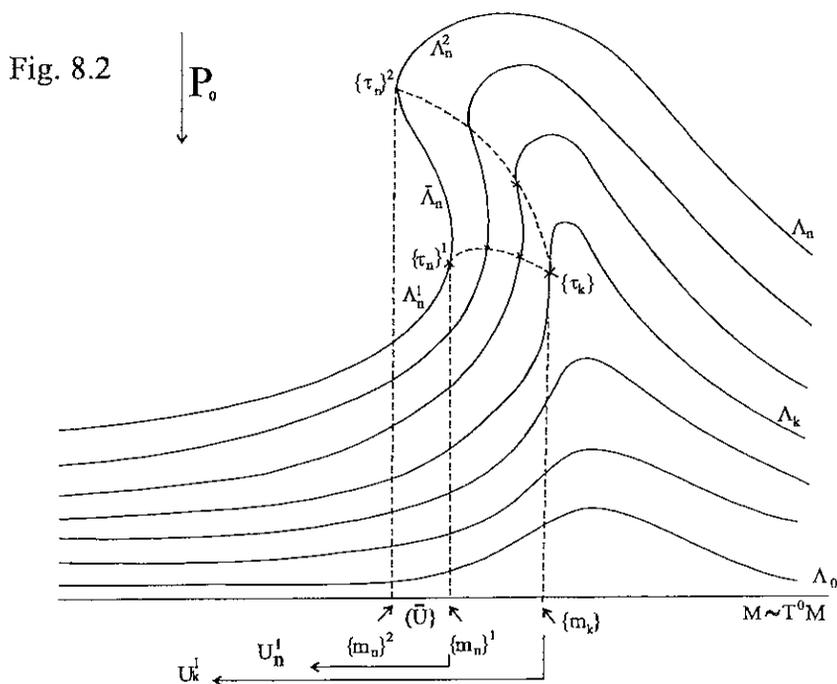
$$\nu : [0, t] \rightarrow M$$

geodesicamente centrados em m onde, por definição,

$$\{\mathcal{F}_\nu w\}(m, t) \equiv [\mathcal{F}_\nu w]^t(m)$$

é a área simplética entre a curva ν e a geodésica de $\nu(t)$ a $\nu(0)$ centrada em m . como mostrado na Fig. 8.1. Esta função área é bem definida, a menos de constantes, desde que a geodésica seja tal que o circuito completo fechado seja redutível. Ademais, os caminhos estacionários ν que resolvem (8.1) coincidem com as trajetórias clássicas no espaço de fase que descrevem a evolução contínua de $\nu(0)$ a $\nu(t)$, geodesicamente centrada em $m \in M$.

ações centrais para α_n em U . Ademais, os outros conjuntos de catástrofes centrais para Λ_n , $\{\tau_n\}^2$ na Fig. 8.2, não estão conectadas a Λ_n^1 , logo f_n^1 é na verdade uma ação central continuamente deformada da identidade na vizinhança maior $U_n^1 \supset U$. $U_n^1 \subset U_k^1 \subset M$ sendo limitada apenas pelo conjunto de cáusticas centrais $\{m_\nu\}^1$, $\forall t' \in (0, t_n)$. Isto significa também que, para tais valores de t' , $f_{\alpha, t'}^1$ existe, além de ser continuamente deformada da hamiltoniana, em $U_n^1 \subset M$.



Estamos agora prontos para aplicar o corolário 7.1 a

$$f_{\alpha t}^1 = f_{\alpha(t/r)}^1 \Delta f_{\alpha(t/r)}^1 \cdots \Delta f_{\alpha(t/r)}^1 \Delta f_{\alpha(t/r)}^1, r \text{ vezes.}$$

Isto é, a continuidade de $f_{\alpha t}^1$ substituiu a condição de unicidade.

Assim, do caráter involutivo do potencial central Z_0 , via equação central, temos que $f_{(\alpha_\epsilon)^{-1}} = f_{\alpha_\epsilon} = -f_{\alpha_\epsilon}$, o que implica $f_{\alpha_\epsilon} = +\epsilon h + o(\epsilon^3)$. O mesmo sendo verdade para $f_{\alpha_\epsilon^{(t')}} = -\epsilon h(t') + o(\epsilon^3)$.

Então, tomando $r \rightarrow \infty$, podemos seguramente fazer a aproximação

$$f_{\alpha(t/r)}^1 = -\frac{t}{r} h(t_i) + o((t/r)^3) \rightsquigarrow -\frac{t}{r} h(t_i),$$

para obter, em $U_t^1 \subset M$:

$$f_{\alpha_t}^1(m) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\text{Stat}_{(\{m'_i\}_r)} \left\{ \sum_{i=1}^r \left(\frac{-t}{r} \right) h(m'_i, t'_i) + P_{r+1}(m, \{m'_i\}_r) \right\} \right]. \quad (8.2)$$

onde

$$m'_i = m'(t'_i), \quad t'_i < t'_{i+1} \in [0, t].$$

Agora notamos que (8.2) toma a forma (8.1) ao identificarmos

$$\nu \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} (\{m'(t'_i)\}_r) : [0, t] \rightarrow U_t^1 \subset M$$

como uma curva contínua satisfazendo

$$P_0(\Phi_0^{-1}(\nu(0), \nu(t))) = m.$$

Ao passar da (8.2) para (8.1), esta área é integrada via um limite ($r \rightarrow \infty$) da área de $(r+1)$ -polígonos cujos pontos médios são $(m, \{m'_i\}_r)$, quando r dos lados tende a zero enquanto o outro tende para a geodésica de m'_r a m'_1 centrada em m . Para ver que o caminho estacionário é a trajetória clássica com extremidades geodesicamente centradas em m , notamos que cada pequeno lado do $(r+1)$ -polígono é uma geodésica que, no limite de intervalos de tempo muito curtos, i.e. de lados muito pequenos, coincide com o fluxo hamiltoniano de $h(m'_i, t'_i)$, que é centrado em m'_i , como discutido em § 4. Logo, tomando o limite $r \rightarrow \infty$ de $\{m'(t'_i)\}_r$, obtemos um caminho que é sempre tangente ao fluxo hamiltoniano local, em outras palavras, que converge sobre a trajetória clássica.

De início, (8.1)-(8.2) seria aplicável apenas àquelas ações centrais que são continuamente deformadas da hamiltoniana h , em $U_t^1 \subset M$. Porém, se f_{α_t} não é deste tipo, sempre é possível decompô-la na forma

$$f_{\alpha_t} = f_{\alpha_{t-t'}}^1 \Delta f_{\alpha_{t'}}^1 \text{ or } f_{\alpha_{t-t'-t''}}^1 \Delta^j \left(f_{\alpha_{t''}}^1 \Delta f_{\alpha_{t'}}^1 \right), \text{ etc...}$$

onde cada componente “menor” é continuamente deformada da hamiltoniana $h(t')$ apropriada, em cada vizinhança apropriada. Logo, estas podem ser escritas como soluções de (8.1). Porém, as leis de composição de ações centrais (6.5 e 6.5'),

mais o fato de estarmos compondo ações centrais para a sequência contínua $(\alpha)_T$, implicam que as trajetórias ν', ν'' se compõem em uma única trajetória contínua

$$\nu = \nu'' \circ \nu' ,$$

para escolhas apropriadas de $f_{\alpha_{\nu'}}^1, f_{\alpha_{\nu''}}^1$, com as áreas correspondentes $\mathcal{F}_{\nu', w}$ e $\mathcal{F}_{\nu'', w}$ somando para $\mathcal{F}_{\nu, w}$. Para ver isto, notemos que a condição de estacionariedade para m' em (6.5) implica, via equação central, que $[\mathcal{F}_{\nu} w]^{t'}(m')$ e $\Delta(m', m'', m)$ fornecem mapas de m' em elementos reciprocamente inversos em $T_{m'}M$, o que, via mapa exponencial simétrico, nos diz que estas se compõem numa única figura geométrica. Repetindo a análise com m'' , temos que

$$[\mathcal{F}_{\nu} w]^{t'}(m'), [\mathcal{F}_{\nu} w]^{t''}(m'') \text{ e } \Delta(m, m', m'')$$

compõem-se em

$$[\mathcal{F}_{\nu} w]^t(m) \equiv \{\mathcal{F}_{\nu} w\}(m, t) ,$$

para $t = t' + t''$, usando o fato de que $\nu = \nu'' \circ \nu'$, desde que a composição seja redutível, i.e. desde que o triângulo de composição $\Delta = \Delta_{ij}^k$ seja um circuito redutível, o que significa que a geodésica de $\nu(t)$ a $\nu(0)$ centrada em m é tal que ela fecha a trajetória ν num circuito redutível.

E daí em diante... segue que f_{α_t} pode também ser escrita como solução para (8.1), mesmo quando ela não é continuamente deformada da hamiltoniana, o que significa que, para algum $(m', t') \in M \times [0, t)$, $f_{\alpha_{t'}}(m')$ não existe, i.e. m' é uma singularidade cáustica central para $\Lambda_{\alpha_{t'}}$, $t' < t$. Logo, embora $f_{\alpha_{t'}}$, não exista em todo M , para $t' < t$, e f_{α_t} não seja sempre deformada da função hamiltoniana h continuamente, onde quer que f_{α_t} exista ela pode ser escrita como solução de (8.1), com ν sendo uma trajetória contínua, $\nu : [0, t] \rightarrow M$, e m sendo o centro da (curta ou longa) geodésica de $\nu(t)$ a $\nu(0)$ que fecha a trajetória num circuito redutível.

Teorema 8.1 generaliza para os espaços simpléticos simétricos curvos o resultado previamente apresentado apenas no espaço euclideo [7,9]. É um princípio variacional real que é invariante ao menos por transformações gerais em M que preservem a métrica e a

forma simplética. Mais ainda, ela não requer qualquer decomposição local do espaço de fase M em subconjuntos lagrangeanos. Ou seja, é completamente adaptada à geometria não trivial de M .

Além do mais, em oposição aos formalismos complexos, este princípio variacional real tem apenas trajetórias clássicas reais como soluções estacionárias de (8.1). A novidade é que tais trajetórias são restringidas em seus centros geodésicos, ao invés das mais familiares coordenadas lagrangeanas (locais) de suas extremidades. Portanto, ao resolver para os caminhos estacionários em (8.1), apenas o tempo t e o centro m são mantidos fixos.

Finalmente, a própria ação central $\Psi_h(m, t)$ fornece, via equação central, a transformação finita $\nu(0) \rightarrow \nu(t)$ e, dada sua explícita relação com as geradoras infinitesimais $h(m, t)$, mais o fato de que é uma função real em $M \times [0, T]$, Ψ_h pode ser vista como uma extensão para tempos finitos da função hamiltoniana.

9 Evolução Temporal de Ações Centrais

Acabamos de ver como o princípio variacional central fornece, não apenas as trajetórias clássicas obtidas pela condição de estacionariedade, mas também as ações centrais que geram as transformações canônicas finitas e que podem ser vistas como extensões para tempos finitos das funções hamiltonianas. Agora vamos investigar a evolução temporal destas ações centrais. Isto pode ser feito de duas maneiras.

Primeiro, podemos examinar a evolução temporal de $\Psi_h(m, t)$, para m fixo. Em outras palavras, investigamos $\partial\Psi_h(m, t)/\partial t$.

Bem, a variação total de $\Psi_h(m, t)$ com respeito a t depende da direção de \vec{m} . Denotando $\delta t = \varepsilon$, temos:

$$\varepsilon \cdot \nabla_t(\Psi_h(m, t)) \equiv \varepsilon \cdot \left\{ \partial\Psi_h(m, t)/\partial t + \vec{m} \cdot d\Psi_h^t(m) \right\} . \quad (9.1)$$

Por outro lado, de (8.2),

$$\varepsilon \cdot \nabla_t(\Psi_h^t(m)) = -\varepsilon \cdot h(\nu(t), t) + \varepsilon \cdot \left\{ \vec{m} \cdot d[\mathcal{L}_\nu w]^t(m) \right\} + o(\varepsilon^2) , \quad (9.2)$$

pois $\Psi_h^t(m)$ é estacionário em ν e portanto só os termos em $(\delta\nu)^2$ contribuem, onde

$$o((\delta\nu)^2) \sim o(\varepsilon^2) .$$

Na equação (9.2) estamos pois aproximando o novo caminho $\nu'_{t+\varepsilon}$ pelo antigo ν_t , i.e. consideramos apenas variações infinitesimais na extremidade $\nu(t)$ ao longo da mesma trajetória clássica $\nu : (0, t + \varepsilon) \rightarrow M$. Via equação central, temos

$$d\Psi_h^t \equiv df_{\alpha_t} : m \rightarrow \tau_{\alpha_t} ,$$

enquanto

$$d[\mathcal{F}_\nu w]^t : m \rightarrow \tau_\nu .$$

Mas, por construção,

$$\tau_{\alpha_t} = \tau_\nu = \tilde{\Phi}_i^{-1}(\nu(0), \nu(t))$$

e portanto

$$d\Psi_h^t(m) = d[\mathcal{F}_\nu w]^t(m) ,$$

onde agora identificamos $\Psi_h^t(m) \equiv \Psi_h^i(m, t)$ como uma ação central genérica. Disto e mais (9.1)-(9.2), usando que $(m_-, m_+) \equiv (\nu(0), \nu(t))$, identificamos:

$$\partial\Psi_h(m, t)/\partial t = -h(m_+, t) \tag{9.3}$$

mas como

$$(m_-, m_+) = \tilde{\Phi}_i(\tau_{\alpha_t}) = \tilde{\Phi}_i\left(m, \vec{F}_{\alpha_t}^i(m)\right) ,$$

$\vec{F}_{\alpha_t}^i$ sendo o mapa $m \rightarrow (\widetilde{T_m M})_i$ definido por $df_{\alpha_t}^i \equiv d\Psi_h^t$ via equação central, podemos escrever

$$m_+ = \text{Exp}_m\left(+\vec{F}_{\alpha_t}^i(m)\right) ,$$

e denotar $h(m_+, t) \equiv h\left(\text{Exp}_m\left(+\vec{F}_{\alpha_t}^i(m)\right), t\right)$ como

$$\mathbb{H}\left[\Psi_h^i(m, t)\right] := h\left(\text{Exp}_m\left(+\vec{F}_{\alpha_t}^i(m)\right), t\right) , \tag{9.4}$$

definindo o funcional \mathbb{H} em $\mathcal{A}_c(U)$. Assim, (9.3) pode ser reescrita como:

$$\partial\Psi_h(m, t)/\partial t + \mathbb{H}[\Psi_h(m, t)] = 0 , \tag{9.5}$$

que é a versão central da equação de *Hamilton-Jacobi*

- **Exemplos:** No espaço plano, eq. (9.5) toma a forma explícita:

$$\partial\Psi_h(\vec{x}, t)/\partial t + h(\vec{x} - \frac{1}{2} J \cdot (\partial\Psi_h(\vec{x}, t)/\partial\vec{x}), t) = 0 \quad (9.6)$$

como apresentado em [7] e derivado primeiramente em [13]. Nos espaços curvos, porém, sua forma genérica explícita em coordenadas locais pode ser bastante complicada. Por exemplo, em S^2 e H^2 , é bem mais fácil usar (4.10) e (4.13) a fim de reescrever $\mathbb{H}[\Psi_h^t(m)]$, para cada h . Como exemplo mais simples, considere em S^2 a função hamiltoniana

$$h = -C_\theta ,$$

geradora de rotações infinitesimais em torno do eixo (ou polos) sul/norte. Usando a convenção $\Psi_h^t \equiv f_{\alpha t} \equiv 2f_t$, de (4.10) reescrevemos a versão standard de (9.5) como

$$\partial f(\theta, t)/\partial t - \frac{1}{2} C_\theta \sqrt{1 - (\partial f(\theta, t)/\partial\theta)^2} = 0 , \quad (9.7)$$

onde denotamos $f_t(\theta, \varphi) \equiv f(\theta, t)$, explorando a invariância em φ ; e lembrando que, ao reescalar $\Psi_h^t \equiv f_{\alpha t}$, devemos também reescalar h , e portanto \mathbb{H} pelo mesmo fator. Pode-se checar explicitamente que a ação central dada por (5.12), com $\chi = 0$ e $t = 2\gamma$, satisfaz (9.7). Uma análise completamente análoga se aplica às rotações em torno do polo real $\rho = 0$, em H^2 . Demais exemplos são considerados de formas menos simples mas inteiramente similares.

Finalmente, notamos que podemos reescrever a equação (9.4) como:

$$\nabla_l^g (\Psi_h^t(m)) := \partial\Psi_h^t(m)/\partial t + \vec{v}_g]d\Psi_h^t(m) ,$$

para $\vec{m} \equiv \vec{v}_g$, definido por

$$\vec{v}_g]w = -dg , \quad g \in \mathcal{C}_R^k(M) .$$

Ou seja, usando (9.5), obtivemos:

Proposição 9.1 Sejam $g, h \in \mathcal{C}_R^k(M)$ e $\Psi_h^t \in \mathcal{A}_c(U)$, $U \subset M$, onde Ψ_h^t é relacionada com h via princípio variacional central (8.1), para um dado tempo $t \in \mathbb{R}$. A derivada

temporal de Ψ_h^t “ao longo de g ”, i.e. na direção do fluxo hamiltoniano de g , denotada por $\nabla_t^g(\Psi_h^t)$, é dada por

$$\nabla_t^g(\Psi_h^t) = \{\Psi_h^t, g\} - \mathbb{H}[\Psi_h^t] \quad (9.8)$$

onde $\{ \ , \ }$ denota o parêntese de Poisson e o funcional \mathbb{H} é definido por (9.4) via equação central.

Devemos atentar para que o lado direito de (9.8) envolve derivadas parciais em M somente. Particularmente interessante é o caso onde Ψ_h^t é sabido de ser invariante numa dada direção \vec{v}_g ,

$$\nabla_t^g(\Psi_h^t) = 0, \text{ dando } \{\Psi_h^t, g\} = \mathbb{H}[\Psi_h^t] \quad (9.9)$$

como uma relação direta entre o funcional \mathbb{H} e o parêntese de Poisson com g . Inversamente, qualquer função $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^k(U)$ satisfazendo a segunda parte de (9.9) define curvas $\Gamma_g : [0, T] \rightarrow U \subset M$, ao longo das quais Ψ_h^t é constante. O outro caso particularmente interessante é quando $\{\Psi_h^t, g\} = 0$, no qual $\nabla_t^g(\Psi_h(m, t)) = \partial\Psi_h(m, t)/\partial t$, computável pela versão central da equação de Hamilton-Jacobi.

10 Conclusão

Nesta tese apresentamos um formalismo geral para descrever sistemas dinâmicos clássicos definidos em espaços simpléticos simétricos. A distinção essencial deste formalismo está no fato de que as ações são funções reais no espaço de fase. Assim, vimos como estas ações são definidas e geram transformações canônicas finitas implicitamente via equação central e mapa exponencial simétrico. Depois, vimos como estas se compõe via uma fórmula singela envolvendo a área triangular (poligonal) de centros e como elas estão relacionadas com as geradoras infinitesimais via um princípio variacional real de grande simplicidade geométrica que determina as trajetórias clássicas. Finalmente, vimos como estas “hamiltonianas para tempos finitos” obedecem a uma equação de Hamilton-Jacobi e providenciam uma mistura particular desta equação com o formalismo de parênteses de Poisson. Novamente, tal só é possível porque estas ações são funções reais no espaço

de fase, mas talvez esta propriedade distintiva ainda esteja por ser mais completamente explorada.

Pois a característica marcante do formalismo de Hamilton, que posição e momento estejam em igualdade, que é uma propriedade explícita de espaços simpléticos gerais e funções hamiltonianas, não havia ainda sido estendida para a definição de ações, a não ser no caso euclidiano, recentemente, ou em variedades Kähler, sob forma complexa. Mas, enquanto as funções hamiltonianas correspondem aos geradores de transformações canônicas infinitesimais, com respectivas estruturas de parêntese de Poisson e Lie estando intimamente relacionadas, as ações geram simplectomorfismos finitos, correspondendo portanto aos elementos no grupo de Lie das transformações canônicas. E assim como elementos do grupo podem ser relacionados a elementos na álgebra, também ações podem ser relacionadas com hamiltonianas.

Enquanto que previamente, hamiltonianas e ações eram objetos matemáticos distintos, ou seja, distintos tipos de funções, estas são agora apresentadas de forma homogênea como funções reais no espaço de fase, enfatizando, portanto, a característica do formalismo de Hamilton e abrindo novas possibilidades para um entendimento mais profundo e completo do formalismo canônico da dinâmica clássica, com potenciais consequências por grande parte da física moderna.

Apêndice A: A Respeito das Provas

Aqui apresentamos uma prova sucinta das proposições 6.1 e 6.1'. Para maiores detalhes, referimos a [14] e especialmente [15]. Esta prova baseia-se numa construção matemática [3c.11] que consiste, essencialmente, na construção de um fibrado principal S^1 sobre uma variedade simplética (M, w) com conexão α cuja curvatura é w/λ . Denotamos tal fibrado por

$$S^1 \rightarrow (SM, \alpha) \xrightarrow{\pi} (M, w/\lambda) , \quad d\alpha = \pi^*(w/\lambda) .$$

Estes fibrados existem (são bem definidos) somente se

$$\frac{1}{2\pi\lambda} \oint_{\mathcal{B}} w = p \in \mathbb{Z} ,$$

onde \mathcal{B} é qualquer 2-superfície orientada e fechada sem bordo em M . Quando M tem dimensão 2, $\mathcal{B} \equiv M$, se M é compacta, caso contrário $\mathcal{B} \equiv \emptyset$. Aqui, λ pode ser tomado como uma constante auxiliar que podemos até fazer igual a zero, no final.

Para estender esta construção ao espaço de fase duplo [16], identificamos

$$SDM \equiv (\overline{SM}_- \times \overline{SM}_+)/S^1 ,$$

$(\overline{SM}_{\pm}, \mp\alpha)$ sendo o mesmo fibrado principal sobre M , a menos de uma inversão da conexão, e o quociente é tomado com respeito à ação diagonal de $S^1 \subset \mathcal{T}^2$ em $\overline{SM}_- \times \overline{SM}_+$. Na verdade, escolhemos a conexão cuja curvatura é $-\delta w/\lambda$, logo poderíamos talvez denotar este fibrado por \overline{SDM} . Mas, para simplificar a notação e seguindo [15], vamos manter SDM . Assim,

$$S^1 \rightarrow (SDM, [-\delta\alpha]) \xrightarrow{[\pi]} (DM, -\delta w/\lambda) ,$$

$$d[-\delta\alpha] = [\pi]^*(-\delta w/\lambda) ,$$

cujos elementos são denotados por

$$[\sigma, \sigma'] , \quad \text{onde } (\sigma, \sigma') \in \overline{SM}_- \times \overline{SM}_+ .$$

Então, escolhendo os elementos de identidade da forma

$$[\sigma, \sigma] ,$$

extendemos a composição de grupoide de DM a SDM por

$$[\sigma, \sigma'] \odot [\sigma', \sigma''] = [\sigma, \sigma''] .$$

Depois, trazemos de volta (pull back) a estrutura de SDM usando o mapa exponencial simétrico (restrito) para obter um fibrado (trivial) sobre $(TM)_0$, denotado por $(STM)_0$.

Em seguida, consideramos as seções $(TM)_0 \rightarrow (STM)_0$ que são obtidas via transporte paralelo, sobre as fibras de P_0 , dos elementos de identidade em $(STM)_0$, estes últimos fixados pela escolha acima em SDM . Estas seções polarizadas

$$\varepsilon_0 : (TM)_0 \rightarrow (STM)_0$$

são tais que, se $(\tau_1, \tau_2) \in (TM)_0^2$, então

$$\varepsilon_0(\tau_1) \odot \varepsilon_0(\tau_2) = \varepsilon_0(\tau_1 \odot \tau_2) K_0(\tau_1, \tau_2) ,$$

onde

$$K_0 : (TM)_0^2 \rightarrow S^1$$

é a holonomia sobre o triângulo de composição em M , que pode ser identificado com

$$\text{Exp} \left\{ \frac{i}{\lambda} \Delta_0(m, m_1, m_2) \right\} ,$$

para

$$m_i = P_0(\tau_i) , \quad m = P_0(\tau_1 \odot \tau_2) ,$$

onde

$$\Delta_0(m, m_1, m_2)$$

denota a área simplética, módulo $2\pi\lambda$, do triângulo geodésico curto com tais pontos médios. Isto também significa que $\text{Exp} \left\{ \frac{i}{\lambda} \Delta_0(m, m_1, m_2) \right\}$ é bem definido em todo $(TM)_0^2$, assim como é completamente independente das expressões locais para a conexão $[-\delta\alpha]$ e sua pull-back $\bar{\alpha}_0$, veja [14,15].

Por outro lado, a conexão pull-back $\bar{\alpha}_0$ pode ser localmente escrita como

$$\bar{\alpha}_0 \simeq d\theta - \frac{1}{\lambda} Z_\zeta ,$$

onde θ é a coordenada na fibra, para uma escolha local de potencial simplético

$$w \simeq d\zeta .$$

Como, sobre as fibras de P_0 , estas podem ser localmente reescritas como

$$\bar{\alpha}_0|_m \simeq (d\theta - \frac{1}{\lambda}(Z_\zeta - Z_0))|_m \simeq (d\theta - \frac{1}{\lambda}dQ_\zeta)|_m .$$

segue, desde que $Q_\zeta|_{T^0M} = 0$ e para uma representação local dos elementos de identidade como $(m, \vec{0}; 0)$, que as seções trivializantes ε_0 podem ser localmente escritas como

$$\varepsilon_0(\tau) \simeq \left(\tau; \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\lambda} Q_\zeta(\tau) \right\} \right)$$

e portanto a fase de holonomia é localmente identificado como

$$\Delta_0(m, m_1, m_2) = Q_\zeta(\tau_1) + Q_\zeta(\tau_2) - Q_\zeta(\tau_1 \odot \tau_2) , \text{ módulo } 2\pi\lambda .$$

A prova da proposição 6.1' é uma elaboração da análise acima. Aqui devemos argumentar que existe uma escolha consistente para Z_j , Z_ζ^j e Q_ζ^j tal que

$$Q_\zeta^j|_{\widetilde{T^jM}} \equiv \gamma^j : M \rightarrow \mathbb{R}$$

é dado por

$$\exp \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{\lambda} \gamma^j(m) \right\} = \eta'_j(m) .$$

onde $\eta'_j(m)$ é o transporte horizontal sobre $M \simeq \widetilde{T^jM}$ da holonomia do circuito geodésico $L_j(m_0)$. Especificamente

$$\gamma^j(m) = \int_{\Sigma L'_j(m)} w ,$$

módulo $2\pi\lambda$ e uma constante β_j representando sua classe de homologia. onde, dado um ponto de referência m_0 ,

$$\partial \Sigma L'_j(m) = L'_j(m) = L_j(m_0, m)$$

é o circuito redutível em M dado por

$$L_j(m_0) \circ (m_0 \rightarrow m) \circ L_j^{-1}(m) \circ (m \rightarrow m_0) ,$$

com $L_j(m)$ denotando o circuito (volta) geodésico do tipo j , com base em m . Agora, cada

$$\hat{\Phi}_j : (\widetilde{T^jM})_j \rightarrow DM$$

fornece um fibrado (trivial) pull-back

$$(ST\widetilde{M})_j \xrightarrow{\rho_j} SDM .$$

Então, tomando seções locais trivializantes

$$\tilde{\varepsilon}_j : T^j\widetilde{M} \rightarrow (ST\widetilde{M})_j$$

da forma

$$\tilde{\varepsilon}_j = \rho_j^{-1}([\sigma, \sigma_j]) ,$$

onde

$$\sigma_j' = \sigma \cdot \eta_j'(m) \text{ para } \pi(\sigma) = \pi(\sigma_j') = m ,$$

que são localmente representadas como

$$\tilde{\varepsilon}_j(\tilde{\tau}^j) \simeq (m, [\vec{v}_j]; \exp\{\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}\gamma^j(m)\}) ,$$

por uma análise similar ao caso standard, as seções trivializantes $\varepsilon_j : (T\widetilde{M})_j \rightarrow (ST\widetilde{M})_j$ que são obtidas de $\tilde{\varepsilon}_j$ via transporte paralelo ao longo das fibras de P_j , são tais que, se $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2) \in (T\widetilde{M})_{ij}^2$, então

$$C_{ij}^k(\varepsilon_i(\tilde{\tau}_1), \varepsilon_j(\tilde{\tau}_2)) = \varepsilon_k(c_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)) \cdot K_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2) ,$$

onde

$$C_{ij}^k : (ST\widetilde{M})_{ij}^2 \rightarrow (ST\widetilde{M})_k$$

é a “extensão” da composição mixta c_{ij}^k , definida como

$$C_{ij}^k(z_1, z_2) := \rho_k^{-1}(\rho_i(z_1) \odot \rho_j(z_2)) ,$$

$z_i \in (ST\widetilde{M})_i$, etc... e

$$K_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2) \in S^1$$

é a holonomia sobre o triângulo— (i, j, k) de composição, que, se (i, j, k) é redutível, pode ser identificada como

$$\text{Exp}\{\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}\Delta_{ij}^k(m; m_1, m_2)\} .$$

para

$$m_1 = P_i(\tilde{\tau}_1), \quad m_2 = P_j(\tilde{\tau}_2) \text{ e } m = P_k(c_{ij}^k(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)).$$

onde

$$\Delta_{ij}^k(m; m_1, m_2)$$

denota a área simplética, modulo $2\pi\lambda$, do triângulo redutível com dados pontos médios e lados que sejam geodésicas do tipo $k; i, j$. Isto também significa que $Exp\{\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}\Delta_{ij}^k(m; m_1, m_2)\}$ é bem definida em todo $(\widetilde{TM})_{ij}^2$ e independente de expressões locais para a conexão $[-\delta\alpha]$ e suas pull-backs $\bar{\alpha}_j$ [15]. Mas, da forma de tais conexões pull-backs e para $Q_\zeta^j|_{\widetilde{TM}} \equiv \gamma^j$ e $\varepsilon_j|_{\widetilde{TM}} \equiv \hat{\varepsilon}_j$, como acima, segue que as seções trivializantes ε_j podem localmente ser escritas como

$$\varepsilon_j(\tilde{\tau}) \simeq (\tilde{\tau}; exp\{\frac{\sqrt{-1}}{\lambda}Q_\zeta^j(\tilde{\tau})\})$$

e portanto $[\chi_\zeta]_{ij}^k$ é uma representação local para $\Delta_{ij}^k(m; m_1, m_2)$, modulo $2\pi\lambda$.

Apêndice B: A Respeitos dos Cálculos

Aqui mostramos os passos necessários para se chegar a resultados explícitos apresentados no texto. Vamos nos restringir aos cálculos em espaços curvos uma vez que nos planos estes são bem mais simples e já foram, em sua maioria, apresentados alhures [7.9].

i) Formas simpléticas e potenciais Pull-back

Primeiro, o caso esférico. Há pelo menos dois métodos. Um é através da imersão $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $TS^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$. Um ponto $\hat{m} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é definido como a tripla

$$(x, y, z) \text{ t.q. } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

e o vetor \vec{v} em \hat{m} é identificado pela tripla

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \text{ t.q. } x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0.$$

Neste caso, o mapa exponencial riemanniano é dado por

$$Exp_{\hat{m}}(\vec{v}) = (C_v x + S_v(\dot{x}/v), C_v y + S_v(\dot{y}/v), C_v z + S_v(\dot{z}/v)), \quad (\text{B.1})$$

onde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Similarmente, $Exp_{\hat{m}}(-\vec{v}) = (C_v x - S_v(\dot{x}/v), \dots)$. Identificando $Exp_{\hat{m}}(\pm\vec{v}) \equiv (x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm})$, primeiramente computamos $\Phi^*(\delta w)$, $\delta w = w_+ - w_-$, onde w é a forma simplética em S^2 , escrita nestas coordenadas como:

$$w = (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)|_{x^2+y^2+z^2=1} \quad (\text{B.2})$$

Agora,

$$dx_{\pm} = C_v dx \pm (S_v/v) \dot{x} + g_x^{\pm} dv, \text{ onde } g_x^{\pm} = \pm(C_v - S_v/v)(\dot{x}/v) - x S_v.$$

Similarmente para as outras componentes. Assim,

$$\begin{aligned} dx_{\pm} \wedge dy_{\pm} &= C_v^2 dx \wedge dy \pm \frac{C_v S_v}{v} (d\dot{x} \wedge dy + dx \wedge d\dot{y}) + \left(\frac{S_v}{v}\right)^2 d\dot{x} \wedge d\dot{y} + \\ &C_v (g_y^{\pm} dx - g_x^{\pm} dy) \wedge dv \pm \left(\frac{S_v}{v}\right) (g_y^{\pm} d\dot{x} - g_x^{\pm} d\dot{y}) \wedge dv \end{aligned}$$

e então

$$\frac{1}{2}(w_+ - w_-) = \left(\frac{C_v^2 S_v}{v}\right) (\dot{z} dx \wedge dy + z(d\dot{x} \wedge dy + dx \wedge d\dot{y})) + \left(\frac{S_v}{v}\right)^3 (\dot{z} d\dot{x} \wedge d\dot{y}) + \text{cyclic} + \mathcal{R}_{xyz},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{xyz} &= (Az\dot{y} - B\dot{z}y) dx \wedge dv - (Az\dot{x} - B\dot{z}x) dy \wedge dv + \\ &(D\dot{y}\dot{z} - Byz) d\dot{x} \wedge dv + (D\dot{x}\dot{z} + Bxz) d\dot{y} \wedge dv + \text{cyclic}. \end{aligned}$$

com

$$A = C_v^2 \left(\frac{C_v}{v} - \frac{S_v}{v^2}\right), \quad B = \frac{C_v S_v^2}{v}, \quad D = \left(\frac{S_v}{v}\right)^2 \left(\frac{C_v}{v} - \frac{S_v}{v^2}\right).$$

Decompondo

$$dv = \frac{1}{v}(\dot{x}d\dot{x} + \dot{y}d\dot{y} + \dot{z}d\dot{z})$$

e somando todas as contribuições cíclicas, obtemos que termos como $d\dot{x} \wedge d\dot{y}$, etc... em \mathcal{R}_{xyz} cancelam e, após algum rearranjo, nos resta

$$\mathcal{R}_{xyz} = [(A+B)(\dot{y}z - \dot{z}y)] dx \wedge dv + \text{cyclic},$$

portanto

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(w_+ - w_-) &= \left(\frac{C_v^2 S_v}{v} (\dot{z} dx \wedge dy + z(d\dot{x} \wedge dy + dx \wedge d\dot{y}))\right) \\ &+ \left(\frac{S_v}{v}\right)^3 \dot{z} d\dot{x} \wedge d\dot{y} + \frac{C_v}{v} \left(1 - \frac{C_v S_v}{v}\right) (\dot{y}z - \dot{z}y) dx \wedge dv + \text{cyclic terms} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3})$$

Isto é agora reexpresso nas coordenadas $(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ de TS^2 , via identificação

$$(x, y, z) \equiv (S_\theta C_\varphi, S_\theta S_\varphi, C_\theta)$$

da qual, por diferenciação, podemos reexpressar todos os termos em (B.3). Primeiro obtemos

$$\dot{z}dx \wedge dy + cyclic \equiv 0 .$$

Depois,

$$(\dot{y}z - \dot{z}y)dx + cyclic \equiv S_\theta(\dot{\varphi}d\theta - \dot{\theta}d\varphi)$$

e a soma

$$z(d\dot{x} \wedge dy + dx \wedge d\dot{y}) + cyclic \equiv S_\theta(d\dot{\theta} \wedge d\varphi + d\theta \wedge d\dot{\varphi}) + C_\theta\dot{\theta}d\theta \wedge d\varphi \equiv \dot{w} \equiv d_T w ,$$

o levantamento tangente, ou completo de w (veja [12]). Finalmente,

$$\dot{z}d\dot{x} \wedge d\dot{y} + cyclic \equiv v^2\dot{w} - vS_\theta(\dot{\varphi}d\theta - \dot{\theta}d\varphi) \wedge dv .$$

Somando tudo, chegamos em

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\Phi_0^*(\delta w) &= (S_\nu/v)d(S_\theta(\dot{\theta}d\varphi - \dot{\varphi}d\theta) + d(S_\nu/v) \wedge S_\theta(\dot{\theta}d\varphi - \dot{\varphi}d\theta)) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\Phi_0^*(\delta w) &= d\sigma , \text{ onde } \sigma = (S_\nu/v)S_\theta(\dot{\theta}d\varphi - \dot{\varphi}d\theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.4})$$

É fácil checar que σ é bem definida em todo $(TS^2)_0$: denotando $\sigma = \left(\frac{S_x}{r}\right)\nu$, $\left(\frac{S_u}{r}\right)$ é bem definida sempre, ν é obviamente bem def. fora dos polos. Próximo aos polos

$$\nu \simeq \left(\frac{\dot{x}dy - \dot{y}dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

é bem definida quando $x, y \rightarrow 0$ logo $\Omega_0 \equiv \Phi_0^*(\delta w)$ é de fato exata. Finalmente, usando a definição do ângulo β dado em (3.5), chegamos em (3.7).

A fim de computar $\Phi_0^*(\delta\zeta)$, para $\zeta \equiv \zeta_>$, primeiro reescrevemos este potencial em coordenadas cartesianas como

$$\zeta_> = (1/(1+z))(xdy - ydx)|_{x^2+y^2+z^2=1} \quad (\text{B.5})$$

Assim,

$$\frac{1}{2}(\delta\zeta_>) = \{B(\mu_+ - \mu_-)/2 + D(\mu_+ + \mu_-)/2\}/A ,$$

onde

$$\mu^\pm \equiv x_\pm dy_\pm - y_\pm dx_\pm \text{ e } A = B^2 - D^2, \text{ com } B = 1 + C_v z, D = -S_v(\dot{z}/v).$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\mu_+ + \mu_-}{2} &= C_v^2(xdy - ydx) + \left(\frac{S_v}{v}\right)^2 (\dot{x}dy - \dot{y}dx), \\ \frac{\mu_+ - \mu_-}{2} &= \left(\frac{C_v S_v}{v}\right) (\dot{x}dy + x\dot{y} - \dot{y}dx - y\dot{x}) + \frac{1}{v} \left(1 - \frac{C_v S_v}{v}\right) (\dot{y}x - \dot{x}y)dv. \end{aligned}$$

Reexpressando tudo nas coordenadas $(\theta, \varphi, v, \beta)$, finalmente chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Z_{>} &= \frac{1}{2}\Phi_0^*(\delta\zeta_{>}) = \frac{1}{(C_v + C_\theta)^2 + \mathcal{S}^2} \{ (1 + C_\theta C_v) S_\theta S_\beta dv + \\ &+ (C_v + C_\theta) S_\theta S_v C_\beta d\beta + ((C_v + C_\theta)^2 + \mathcal{S}^2) S_\theta S_v C_\beta d\varphi + \\ &+ [1 + C_v C_\theta - ((C_v + C_\theta)^2 + \mathcal{S}^2)] S_v S_\beta d\theta \}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

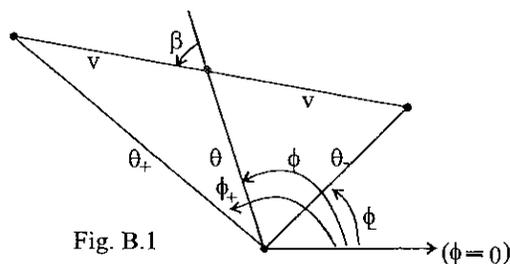
onde $\mathcal{S} \equiv S_\theta S_v S_\beta$, da qual identificamos (6.9).

Um outro método para calcular estas formas baseia-se na trigonometria esférica [17]. Se A, B, F são os três ângulos de um triângulo geodésico em S^2 , cujos lados opostos são $a, b, f < \pi$, respectivamente, então as seguintes identidades são válidas:

$$S_a/S_A = S_b/S_B = S_f/S_F \quad (\text{B.7a})$$

$$C_f = C_a C_b + S_a S_b C_F, \quad C_F = S_A S_B C_f - C_A C_B \quad (\text{B.7b})$$

Agora, se $(\theta, \varphi, v, \beta)$ é o ponto em $(TS^2)_0$ a ser simetricamente exponenciado, então, de (B.7) e Fig. B.1 abaixo,



temos que

$$C_{\theta_\pm} = C_\theta C_v \mp S_\theta S_v C_\beta$$

e

$$S_{(\varphi_{\pm}-\varphi)} = \pm S_{\nu} S_{\beta} / S_{\theta_{\pm}} ,$$

$$C_{(\varphi_{\pm}-\varphi)} = (S_{\theta} C_{\nu} \pm C_{\theta} S_{\nu} C_{\beta}) / S_{\theta_{\pm}} ,$$

das quais obtemos (3.6). Então, diferenciando estas relações e usando-as e também (B.7) repetidamente, podemos expressar δw e $\delta \zeta$ nas coordenadas de $(T, S^2)_0$, obtendo (3.7) e (6.9). No caso hiperbólico, as identidades trigonométricas análogas são

$$\tilde{S}_a / S_A = \tilde{S}_b / S_B = \tilde{S}_f / S_F \quad (\text{B.8a})$$

$$\tilde{C}_f = \tilde{C}_a \tilde{C}_b - \tilde{S}_a \tilde{S}_b C_F , \quad C_F = S_A S_B \tilde{C}_f - C_A C_B \quad (\text{B.8b})$$

e uma análise similar leva a (3.9) e depois a (3.10) e (6.13). Alternativamente, podemos adaptar as fórmulas esféricas pelas pela substituição cuidadosa $\theta \mapsto i\rho$, $\nu \mapsto iu$.

ii) Funções e restrições triangulares e quadriláteras.

Primeiro, a análise triangular, caso esférico. Novamente, há mais de um método. Aqui apresentamos o método que se baseia na trigonometria esférica. Começamos por lembrar que a área de um triângulo esférico é seu ângulo de excesso. Agora, para qualquer triângulo com lados $\ell_i < \pi$, um cálculo simples mostra que

$$T_{\lambda_i} = K / (C_{\ell_i} - C_{\ell_j} C_{\ell_k}) \quad (\text{B.9})$$

onde λ_i é o ângulo oposto a ℓ_i e K é uma constante para este triângulo.

$$K^2 \equiv 1 - C_{\ell_1}^2 - C_{\ell_2}^2 - C_{\ell_3}^2 + 2C_{\ell_1} C_{\ell_2} C_{\ell_3} \equiv \text{Det}^2[\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3] ,$$

onde α_i são os vértices do triângulo. Fixando as orientações corretamente, podemos tomar o sinal positivo na raiz quadrada. Assim denotamos

$$\ell_i = 2y_i \text{ e } x_i \equiv \text{distância}(m_j, m_k) ,$$

onde m_i é o ponto médio do lado ℓ_i . Temos que

$$\hat{m}_i = \frac{1}{2C_{y_i}} (\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_k) ,$$

do qual, como

$$C_{x_i} = \hat{m}_j \cdot \hat{m}_k ,$$

obtemos

$$C_{x_i} = \frac{1}{2C_{y_k}}(C_{y_j} + C_{z_j}) = \frac{1}{2C_{y_i}}(C_{y_k} + C_{z_k}) ,$$

onde

$$z_j \equiv \text{dist\~{a}ncia}(m_j, \alpha_j) .$$

Disto obtemos que C_{x_i}/C_{y_i} é uma constante para este triângulo

$$C_{x_1}/C_{y_1} = C_{x_2}/C_{y_2} = C_{x_3}/C_{y_3} = \Gamma, \text{ uma constante} . \quad (\text{B.10})$$

Isto é uma generalização da relação triangular

$$x_i/y_i = 1 ,$$

no plano. Agora, para calcular Γ , nós substituímos (B.10) nas igualdades triangulares

$$C_{x_i} = C_{y_j}C_{y_k} + S_{y_j}S_{y_k}C_{\lambda_i} ,$$

$$C_{2y_i} = C_{2y_j}C_{2y_k} + S_{2y_j}S_{2y_k}C_{\lambda_i} ,$$

obtendo

$$\Gamma^2 = C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + C_{x_3}^2 - 2C_{x_1}C_{x_2}C_{x_3} \equiv 1 - Dcl^2[\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3] \quad (\text{B.11})$$

Usando (B.9) para o triângulo (x_i, y_j, y_k) , junto com (B.10) and (B.11), obtemos

$$T_{\lambda_i} = \Gamma\sqrt{1 - \Gamma^2} / (\Gamma^2 - C_{x_j}C_{x_k}/C_{x_i}) , \text{ e} \quad (\text{B.12})$$

$$T_{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \equiv T_{\Delta} = \Gamma\sqrt{1 - \Gamma^2} / (\Gamma^2 - 1/2) \quad (\text{B.13})$$

Identificando $\Gamma \equiv C_{\gamma}$, temos que $T_{\Delta} = T_{2\gamma}$, ou seja

$$C_{\Delta/2} = \pm\sqrt{C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + C_{x_3}^2 - 2C_{x_1}C_{x_2}C_{x_3}} \equiv \Gamma \quad (\text{B.14a})$$

$$S_{\Delta/2} = Dcl[\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3] \equiv \sqrt{1 - \Gamma^2} \quad (\text{B.14b})$$

A escolha de sinal em (B.14b) é fixada pela orientação. Ainda temos que determinar o sinal da raiz quadrada em (B.14a). Obviamente, se $|\Delta| < \pi$, devemos escolher o sinal

positivo. Estas áreas triangulares são deformadas dos triângulos infinitesimais, para os quais $C_{x_i} > 0, \forall i$. Como estamos considerando só triângulos curtos i.e. $y_i < \pi/2, \forall i$, de (B.10) obtemos $\Gamma > 0$. Por outro lado, seja $|\Delta| = 2\pi$, i.e. considere m_1, m_2, m_3 colineares, assim como $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tal que o triângulo coincide com um merideano geodésico. É claro que neste caso, $\Gamma < 0$. Se $y_i < \pi/2, \forall i$, de (B.10), segue que $C_{x_i} < 0, \forall i$.

E assim para triângulos continuamente deformado deste triângulo "grande". Finalmente, quando $|\Delta| = \pi$, $C_{\Delta/2} = 0$ e obtemos que, $\forall i, C_{x_i} = 0$. Segue que o sinal da raiz quadrada coincide com o sinal de C_{x_i} , ou em outras palavras, de $\hat{n}_j \cdot \hat{n}_k, \forall i, j, k$, quando todos os lados são curtos. Logo obtemos (6.10) e (6.11). Quanto às restrições aos pontos médios, já às obtivemos: se $C_{y_i} > 0, \forall i$, então ou $C_{x_i} > 0$ ou $C_{x_i} < 0, \forall i$. Em ambos os casos,

$$C_{x_i} C_{x_j} > 0, \forall i, j,$$

que é a condição (6.12). (Não é difícil de ver que, se $|\Delta| = \pi$ ao menos um par de vértices é antipodal, isto é $C_{x_i} = 0, \forall i \Rightarrow C_{y_i} = 0, \exists i$, excluindo os triângulos curtos).

Novamente, a análise esférica pode ser adaptada a H^2 , com algum cuidado. Em H^2 não temos problemas de antipodais, ou escolhas de sinais, uma vez $|\Delta| < \pi$, sempre. Por outro lado, o análogo de (B.14), isto é (6.14), é bem definida somente quando, (6.15) é satisfeita, que é portanto uma condição necessária para que $\{m_1, m_2, m_3\}$ sejam os centros de um triângulo geodésico hiperbólico. Mas, uma vez que

$$\Gamma = C_{\Delta/2} = \tilde{C}_{x_1} + \tilde{C}_{x_2} + \tilde{C}_{x_3} - 2\tilde{C}_{x_1} \tilde{C}_{x_2} \tilde{C}_{x_3}$$

é bem definido, percorremos o argumento para trás de

$$\tilde{C}_{x_1} / \tilde{C}_{y_1} = \Gamma,$$

e vemos que o triângulo geodésico também é bem definido. Logo, (6.15) é também suficiente.

Finalmente, a análise quadrilátera. Novamente, vamos proceder com a análise esférica e posteriormente adaptar as fórmulas hiperbólicas. Começamos por considerar um quadrilátero com vértices α_i e centros

$$m_i \equiv mid(\alpha_i, \alpha_{i+1}).$$

Estamos considerando apenas quadriláteros curtos, o que significa que a

$$\text{distância } (\alpha_i, \alpha_j) < \pi, \forall i, j \in \{1, \dots, 4\} .$$

Isto quer dizer que não apenas os lados, mas também as diagonais são curtas. Agora, denotamos por

$$m_0, \text{ o centro da diagonal } (\alpha_1, \alpha_3)$$

e por

$$y_0, \text{ seu meio comprimento .}$$

Similarmente, denotamos

$$y_i = \frac{1}{2} \text{ distancia } (\alpha_i, \alpha_{i+1}) .$$

Então, cada um dos triângulos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_1)$ são unicamente determinados pelos centros (m_0, m_1, m_2) e (m_0, m_3, m_4) , e serão denotados por

$$\Delta_{12} \text{ e } \Delta_{34} ,$$

respectivamente, com a mesma notação referindo-se às áreas. Ainda, denotemos

$$x_{ij} = \text{distância } (m_i, m_j) .$$

Da análise triangular, sabemos que

$$C_{x_{12}}/C_{y_0} = C_{\Delta_{12}/2}, \quad C_{x_{34}}/C_{y_0} = C_{\Delta_{34}/2} .$$

Similarmente para o outra partição,

$$C_{x_{23}}/C_{y'_0} = C_{\Delta_{23}/2}, \quad C_{x_{41}}/C_{y'_0} = C_{\Delta_{41}/2},$$

onde $y'_0 = \frac{1}{2}$ distancia (α_2, α_4) , m'_0 sendo seu centro, e assim por diante. Portanto,

$$C_{x_{12}}/C_{x_{34}} = C_{\Delta_{12}/2}/C_{\Delta_{34}/2}, \quad C_{x_{23}}/C_{x_{41}} = C_{\Delta_{23}/2}/C_{\Delta_{41}/2} \quad (\text{B.15})$$

Esta equação generaliza a relação de paralelogramo,

$$x_{12}/x_{34} = 1 = x_{23}/x_{41} ,$$

no plano. Contrariamente ao caso plano, porém, (B.15) não impõe restrições aos centros. Para compensar este fato, no caso esférico, os quatro pontos médios determinam a área e a geometria específica do quadrilátero curto. Em outras palavras,

$$m_0 = m_0(\{m_i\})$$

e similarmente para m'_0 . Para ver isto, denotemos

$$\tau_0 = \Phi_0^{-1}(\alpha_1, \alpha_3) . \text{ I.e. } \tau_0 = (m_0, \vec{v}_0) , \quad |\vec{v}_0| = y_0 .$$

Ainda, vamos denotar por \mathcal{R}_m a involução por m e considerar o elemento de $SO(3)$ definido como

$$\sigma_{12}^2 := \mathcal{R}_{m_1} \mathcal{R}_{m_2} .$$

Similarmente,

$$\sigma_{34}^2 := \mathcal{R}_{m_3} \mathcal{R}_{m_4} .$$

Agora, para qualquer elemento $\sigma \in SO(3)$, considere o campo vetorial $\mathcal{X}_\sigma \subset TS^2$ definido por

$$\tau \in \mathcal{X}_\sigma \text{ sse } \Phi(\tau) = (m_-, m_+) \text{ t.q. } m_+ = \sigma^2(m_-) .$$

(Além do mais, não é muito difícil de ver que para qualquer $\tau \in TS^2$, \exists uma família a 1 parâmetro de elementos em $SO(3)$, $\{\sigma(\mu)\}$, t.q. $\tau \in \mathcal{X}_{\sigma(\mu)}$, $\forall \mu \in [0, \pi]$. Se $\mu = 0$, então $\sigma_{(0)}^2 \equiv \mathcal{R}_m$, $m = P_0(\tau)$). Logo, a condição que garante que os triângulos Δ_{12} e Δ_{34} compõe-se no quadrilátero \square_{1234} pode ser escrita como

$$\tau_0 \in \mathcal{X}_{\sigma_{12}} \cap \mathcal{X}_{\sigma_{34}^{-1}} \tag{B.16}$$

Mas, $\tau_0 \in \mathcal{X}_{\sigma_{12}}$ somente se o polo p_{12} de σ_{12} está na linha polar de τ_0 , a qual é definida como a geodésica ortogonal a \vec{v}_0 , em m_0 . O parâmetro μ acima referido é simplesmente a distância geodésica a partir de m_0 ao longo desta linha, para uma orientação positiva de $(p_{12}, m_0, m_+ = \text{Exp}_{m_0}(\vec{v}))$. Assim, a primeira condição obtida de (B.16) é que m_0, p_{12} e p_{34} são colineares. Ou seja,

$$\text{Det}[\hat{m}_0, \hat{p}_{12}, \hat{p}_{34}] = 0 .$$

De fato, temos mais:

$$\hat{p}_{12} = \frac{1}{S_{x_{12}}} \hat{m}_1 \times \hat{m}_2 , \quad \hat{p}_{34} = \frac{1}{S_{x_{34}}} \hat{m}_3 \times \hat{m}_4 .$$

Logo

$$\text{Det}[\hat{m}_0, \hat{m}_1 \times \hat{m}_2, \hat{m}_3 \times \hat{m}_4] = 0 .$$

Podemos então escrever

$$\hat{m}_0 = \vec{w}/|\vec{w}|,$$

onde

$$\vec{w} = w_{12}(\hat{m}_1 \times \hat{m}_2) + w_{34}(\hat{m}_3 \times \hat{m}_4) \quad (\text{B.17})$$

Isto não é tudo, porém. Denotando

$$\mu_{12} = \text{distância } (m_0, p_{12})$$

e

$$\mu_{34} = \text{distância } (m_0, p_{34}) ,$$

temos que

$$|S_{\mu_{12}} T_{x_{12}}| = |T_{y_0}| = |S_{\mu_{34}} T_{x_{34}}| ,$$

mas como

$$|S_{\mu_{12}} S_{x_{12}}| = |\hat{m}_0 \times (\hat{m}_1 \times \hat{m}_2)|$$

e

$$|S_{\mu_{34}} S_{x_{34}}| = |\hat{m}_0 \times (\hat{m}_3 \times \hat{m}_4)| ,$$

segue que

$$\frac{|\hat{m}_0 \times (\hat{m}_1 \times \hat{m}_2)|}{|\hat{m}_1 \cdot \hat{m}_2|} = \frac{|\hat{m}_0 \times (\hat{m}_3 \times \hat{m}_4)|}{|\hat{m}_3 \cdot \hat{m}_4|} \quad (\text{B.18})$$

Substituindo (B.17) em (B.18), obtemos

$$\vec{w} = \alpha C_{x_{12}}(\hat{m}_3 \times \hat{m}_4) + \beta C_{x_{34}}(\hat{m}_1 \times \hat{m}_2) , \quad \alpha, \beta \in \{-1, 1\} \quad (\text{B.19})$$

As escolhas de sinais devem ser feitas com cuidado. Mas para quadriláteros convexos pequenos tomamos o sinal positivo duas vezes. Neste caso

$$\left. \begin{aligned} |\vec{w}|^2 \equiv w^2 &= C_{x_{12}}^2 + C_{x_{34}}^2 - 2C_{x_{12}}C_{x_{34}}R , \text{ onde} \\ R &= C_{x_{12}}C_{x_{34}} + C_{x_{23}}C_{x_{41}} - C_{x_{13}}C_{x_{24}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.20})$$

Equações (B.17), (B.19), (B.20) fixam a geometria do quadrilátero convexo pequeno dados pelos centros $\{m_1, \dots, m_4\}$, como mencionado antes. Equações análogas valem para \hat{m}'_i . Quanto à área, de (B.14) temos que

$$S_{\Delta_{12}/2} = \frac{1}{w} \{C_{x_{34}} - RC_{x_{12}}\} ,$$

$$S_{\Delta_{34}/2} = \frac{1}{w} \{C_{x_{12}} - RC_{x_{34}}\} .$$

Então, neste caso mais simples, denotando a área do quadrilátero por P_4 , obtemos

$$C_{P_4/2} = R = C_{x_{12}}C_{x_{34}} + C_{x_{23}}C_{x_{41}} - C_{x_{13}}C_{x_{24}} , \quad (\text{B.21})$$

da qual obtemos (7.7). Na análise acima, nos restringimos a quadriláteros convexos decomponíveis em triângulos pequenos, i.e. triângulos com área $< \pi$. Maior cuidado é necessário na escolha dos sinais em (B.19), para o caso geral. Quanto às restrições, neste caso mais simples, ao impor

$$\hat{m}_0 \cdot \hat{m}_i > 0 ,$$

obtemos (7.8). Novamente, ao transpor para o plano hiperbólico não temos que ter tantos cuidados com sinais, mas neste caso, o análogo de (B.21), isto é (7.10), só é bem definida quando (7.11) é satisfeita e, similarmente à análise triangular, uma vez que valha (7.11), o quadrilátero convexo existe. E assim por diante, no caso geral.

Referências

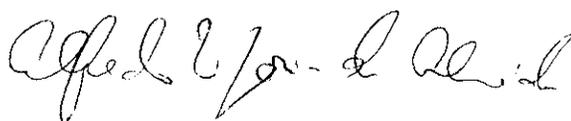
- [1] de M. Rios, P. *Pequeno Histórico do Projeto Matemático* (CBPF-CS-003/99).
- [2] Lanczos, C. *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed. U. Toronto Press, 1970.
- [3] a) Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2nd ed.). Springer-Verlag, 1989.
b) Goldstein, H. *Classical Mechanics* (2nd ed.). Addison-Wesley, 1980.
c) Marsden, J.E. and Abraham, R. *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings, 1978.
d) Sudarshan, E.C.G. and Mukunda, N. *Classical Dynamics: A Modern Perspective*. John Wiley & Sons, 1974.
- [4] a) Dirac, P.A.M. *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva U. Press, 1974.
b) Hanson, A., Regge, T. and Teitelboim, C. *Constrained Hamiltonian Systems*. Roma: Acad. Nazionale dei Lincei, 1976.
- [5] Penrose, R. *Newton, Quantum Theory and Reality*. In *Three Hundred Years of Gravitation*. Ed. S. Hawking and W. Israel. Cambridge U. Press, 1987.
- [6] Klauder, J.R. and Skagerstam, B.-S. *Coherent States*. World Scientific, 1985.
- [7] Ozorio de Almeida, A.M. *The Weyl Representation in Classical and Quantum Mechanics*. Physics Reports 295 (1998).
- [8] a) Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M. *Analysis. Manifolds and Physics*. (Revised ed.). North-Holland, 1982.

- b) Kobayashi, S. and Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2. John Wiley & Sons, 1963.
- [9] Ozorio de Almeida, A.M. *On the Symplectically Invariant Variational Principle and Generating Functions*. Proc. R. Soc. Lond. A 431 (1990), 403-417.
- [10] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978.
- [11] Bates, S. and Weinstein, A. *Lectures on the Geometry of Quantization*. Berkeley Mathematics Lecture Notes, volume 8.
- [12] Tulczyjew, W.M. *The Legendre Transform*. Ann. Inst. H. Poincaré 27 (1977), 101-114.
- [13] Marinov, M.S. *An Alternative to the Hamilton-Jacobi Approach in Classical Mechanics*. J. Phys. A 12 (1979), 31-47.
- [14] Tuynman, G.M. and de M. Rios, P. *Weyl Quantization from Geometric Quantization?* To appear in Rep. Math. Phys.
- [15] de M. Rios, P.P. *Central Products of Functions on Symmetric Symplectic Spaces*. (In preparation).
- [16] Weinstein, A. and Xu, P. *Extensions of Symplectic Groupoids and Quantization*. J. Reine Angew. Math. 417 (1991), 159-189.
- [17] Sommerville, D.M.Y. *The Elements of Non-Euclidean Geometry*. Dover, 1958.

“UM PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA AÇÕES EM ESPAÇOS SIMPLÉTICOS SIMÉTRICOS”

Pedro Paulo de Magalhães Rios

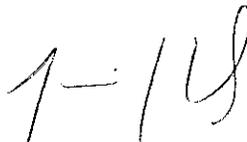
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



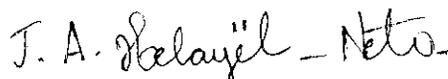
Alfredo Miguel Ozorio de Almeida – Presidente



Diógenes Galetti



Jair Koiller



José Abdalla Helayël-Neto



Luiz Alberto Rezende de Oliveira

Rio de Janeiro, 01 de agosto de 2000