

2000/13

Tese de Mestrado

P. 654

**Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meios
Magnéticos Desordenados: Localização Fraca,
Velocidade de Transporte de Energia e Constante de
Difusão**

Felipe Arruda de Araújo Pinheiro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, agosto de 2000

À memória de meu pai
À minha mãe

Le hasard est la réserve de Dieu. Le Tout-Puissant ne fait donner sa réserve qu'en des circonstances graves, surtout depuis qu'il a vu les hommes assez sagaces pour étudier et prévoir les chances d'après la nature et les éléments régulièrement organisés...

Or, Dieu aime ou doit aimer à déjouer les combinaisons de ces orgueilleux avec les éléments qui leur sont incommes, ou dont ils ne peuvent prévoir l'intervention.

Cette théorie, comme on le voit, renferme de spécieux arguments, et fournit de brillantes thèses...

Alexandre Dumas, *Les Quarante-Cinq*

Agradecimentos

A Luiz Carlos Sampaio, a quem devo minha iniciação profissional e o exemplo de dinamismo e dedicação à pesquisa, pela orientação competente, pela amizade, pela compreensão nos momentos difíceis e sobretudo pela liberdade que me deu para a realização deste trabalho. Obrigado Luiz!

A Alexandre Martinez, meu amigo, colaborador e a quem devo o interesse pela área de localização e espalhamento de luz, pelas valiosas discussões e sugestões, pelo entusiasmo, pelo companheirismo, pelos conselhos amigos e pela hospitalidade nas viagens à Ribeirão Preto. Valeu Alexandre!

Gostaria ainda de expressar minha profunda gratidão a estes dois professores, Luiz e Alexandre, pelo apoio e incentivo ilimitados, não apenas na realização deste trabalho, mas em vários outros momentos importantes da minha vida profissional.

A Ivan Oliveira, pela proposta inicial de tese, pelas dicas sempre oportunas e por tudo que me ensinou dentro e fora de sala de aula.

A todos os colegas e amigos do grupo de Magnetismo do CBPF: Alberto, Ali, Ana Lúcia, Ana Paula, Ângelo, Armando, Elis (e o pequeno Felipe, meu xará e companheiro de sala), Flávio, Fortunato, Geraldo, Germano, Israel, Mário, Salvador, Sarthour e Vítor, pelo ótimo ambiente de trabalho e por tornarem mais agradável meu dia a dia.

A Myriam e Ricardo da CFC, a Célia e a todo o pessoal da secretaria do DME e da biblioteca pela boa vontade, carinho e atenção que sempre me dispensaram.

Aos demais professores, colegas e funcionários do CBPF, pela excelente convivência e pela efetiva contribuição para o meu crescimento científico e pessoal.

Aos amigos de toda hora, Paulo Renato, Leo, Ricardo e Helder.

A toda minha família, em especial à minha mãe Beatriz que, apesar de não ter a menor noção de Física, sempre compreendeu a importância do que eu fazia e me deu muita força.

A meu pai Rubens (em memória), pela paixão pelo conhecimento e pela alegria de poder observar a natureza e me encantar.

Ao CBPF pelos recursos e infra-estrutura, em especial aos Professores Amós Troper e

Anibal Omar Caride, que não pouparam esforços para me proporcionar várias oportunidades de amadurecimento e crescimento profissional.

A CAPES, pela bolsa de estudos.

Resumo

Nesta tese são investigados alguns aspectos do espalhamento simples e múltiplo de ondas eletromagnéticas na presença de centros espalhadores magnéticos aleatoriamente distribuídos, bem como suas implicações no efeito de retroespalhamento coerente, no parâmetro de localização, na velocidade de transporte de energia e na constante de difusão. O espalhamento simples de ondas eletromagnéticas por esferas magnetizadas apresenta algumas características não usuais se comparadas com o caso não magnético, tais como o retroespalhamento preferencial e efeitos de ressonância, mesmo no limite de pequenas partículas. A seção de choque total e o fator de assimetria, que descrevem o processo de espalhamento simples, dependem fortemente da permeabilidade magnética dos espalhadores. No contexto do espalhamento múltiplo, isto altera o parâmetro de localização através do livre caminho médio de transporte ℓ^* . Em particular, mostrou-se que a presença de centros espalhadores magnéticos induz um decréscimo global no parâmetro de localização, que por sua vez apresenta uma dependência oscilatória em função da permeabilidade magnética dos espalhadores. Considerando que a permeabilidade magnética dos centros espalhadores depende da temperatura através da lei de Curie-Weiss e do campo magnético aplicado, propõe-se que o parâmetro de localização pode ser controlado através da variação da temperatura ou da aplicação de um campo magnético externo. Mostrou-se ainda que a constante de difusão $D = v_E \ell^*/3$ é substancialmente afetada pela presença de espalhadores magnéticos, não apenas através do livre caminho médio de transporte ℓ^* , mas também através da velocidade de transporte de energia v_E . O fato do espalhamento simples por partículas ferromagnéticas apresentar um caráter eminentemente ressonante, mesmo no limite de pequenas partículas, introduz um atraso adicional no tempo de propagação das ondas no meio, o que resulta em uma redução no valor da velocidade de transporte se comparada com o caso não magnético. Este fato, associado ao decréscimo global do livre caminho médio de transporte induzido pela presença de partículas magnéticas, reduz apreciavelmente os valores da constante de difusão. Finalmente, sugere-se a utilização de espalhadores constituídos por ferritas moles (baixa coercitividade) no regime de microondas como o sistema ideal para a verificação expe-

rimental dos resultados obtidos, uma vez que tais materiais apresentam altos valores da permeabilidade magnética nesta faixa de frequências e com baixas perdas. Algumas possíveis aplicações tecnológicas dos resultados também são discutidas.

Abstract

In this thesis, we report on some aspects of single and multiple scattering of electromagnetic waves in the presence of randomly distributed magnetic scatterers and their implications to the coherent backscattering effect, the localization parameter, the energy transport velocity and the diffusion constant. Single scattering of electromagnetic waves by magnetic particles presents some unusual features if compared with the nonmagnetic case, such as preferential backscattering and resonances effects, even in the small-particle limit. The total scattering cross-section and the asymmetry factor, which describe single scattering process, exhibit a strong dependence on the magnetic permeability of the scatterers. In multiple scattering, this alters the localization parameter through the transport mean free path ℓ^* . In particular, we have shown that the presence of magnetic scatterers induces a global decrease in the localization parameter, which also exhibits an oscillatory dependence on the scatterers magnetic permeability. Considering that the magnetic permeability of the scatterers depends on the temperature through the Curie-Weiss law and on the applied magnetic field, we suggest that the localization parameter can be tuned by varying the temperature or applying an external magnetic field.

In addition, we have shown that the diffusion constant $D = v_E \ell^*/3$ of wave propagation in the medium is strongly affected in the presence of magnetic scatterers, not only through the transport mean free path ℓ^* , but also through the energy transport velocity v_E . The fact that single electromagnetic scattering by ferromagnetic particles exhibits a characteristic resonant behavior, even in the small-particle limit, introduces an extra time delay in wave propagation, causing a decrease in the transport velocity if compared with the nonmagnetic case. This fact, as well as the global decrease in the transport mean free path induced by the presence of magnetic particles, leads to extremely small values of the diffusion constant.

Finally, we suggest the utilization of soft ferrites (low coercivity) scatterers in the microwave regime as the appropriate system in order to experimentally verify all the presented results, since these materials exhibit high values of the magnetic permeability in this frequency range with low loss. Some possible technological applications of our

studies are also discussed.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
1 Introdução	1
1.1 Conceitos Gerais	1
1.2 Ondas Clássicas versus Ondas de Matéria	5
1.3 Organização da Tese	9
2 Teoria de Mie	13
2.1 Formulação Geral do Problema	14
2.2 Soluções da Equação de Onda	16
2.2.1 Expansão dos Campos em termos dos Harmônicos Esféricos Vetoriais	19
2.2.2 Coeficientes de Espalhamento	21
2.2.3 A Solução de Campo Longínquo	23
2.3 Seções de Choque e Fator de Assimetria	25
2.3.1 Seções de Choque e Fatores de Eficiência	25
2.3.2 Fator de Assimetria	26
3 Localização Fraca de Ondas Clássicas - O Efeito de Retroespalhamento	
Coerente	28
3.1 Coerência na Direção de Retroespalhamento	30
3.2 Perfil Angular do Cone de Retroespalhamento	34

3.3	Conexão com o Fenômeno da Localização de Anderson e a Analogia com Sistemas Eletrônicos	41
3.3.1	O Parâmetro de Localização e a Rota para a Localização de Anderson de Ondas Eletromagnéticas	42
4	Localização Fraca de Ondas Eletromagnéticas em Meios Magnéticos Desordenados¹	44
4.1	Espalhamento Simples por Esferas Magnéticas	45
4.1.1	Limite de Pequenas Partículas: Tratamento Analítico	46
4.1.2	Fator de Assimetria: Tratamento Numérico	49
4.2	Espalhamento Múltiplo: O Parâmetro de Localização	56
4.3	Aspectos Experimentais	58
5	Velocidade de Transporte de Energia Eletromagnética em Meios Magnéticos Desordenados	63
5.1	Derivação Microscópica da Velocidade de Transporte de Energia	65
5.1.1	Comparação com o Caso Eletrônico	70
5.1.2	Aplicação para o Caso dos Espalhadores de Mie	71
5.2	Velocidade de Transporte de Energia em Meios Magnéticos Desordenados ²	74
	Conclusões	82

¹O conteúdo deste capítulo encontra-se essencialmente no artigo: F. A. Pinheiro, A. S. Martinez e L. C. Sampaio, “New Effects in Light Scattering in Disordered Media and Coherent Backscattering Cone: Systems of Magnetic Particles”, *Phys. Rev. Lett.* 84, 1435 (2000) (Ref. [1]).

²O conteúdo desta seção encontra-se essencialmente no artigo: “Vanishing of Energy Transport Velocity and Diffusion Constant of Electromagnetic Waves in Disordered Magnetic Media”, submetido para publicação no *Phys. Rev. Lett.* (Ref. [2]).

Lista de Figuras

2-1	Geometria do espalhamento de Mie.	16
2-2	Fator de eficiência de espalhamento Q_{esp} , definido como sendo a seção de choque de espalhamento C_{esp} normalizada pela seção de choque geométrica πa^2 , em função do parâmetro de tamanho $x = ka$ para uma esfera de Mie dielétrica, não magnética ($\mu = 1$) e com índice de refração relativo $m = 2.73$, correspondente à partículas de TiO_2 no vácuo.	27
3-1	Cone de retroespalhamento coerente: intensidade de luz ($\lambda = 515 \text{ nm}$) espalhada por uma suspensão coloidal com $\ell^* = 19 \mu m$ em função do ângulo. Note o aumento da intensidade espalhada na exata posição de retroespalhamento $\theta = 0^\circ$. Figura extraída da Ref. [3].	29
3-2	Visão esquemática do processo do espalhamento múltiplo, mostrando dois raios A e B que sofrem n espalhamentos dentro do meio. O raio B é tal que sua sequência de espalhamentos se dá exatamente na ordem inversa à do raio A . Os raios A e B serão perfeitamente coerentes quando $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$	31
4-1	O fator de assimetria $\frac{426830A \cos \theta}{526930B}$ em função do parâmetro de tamanho ka para três valores da parte real da permeabilidade magnética relativa: o caso não magnético $\mu' = 1$ (linha tracejada), $\mu' = 2$ (linha pontilhada) e $\mu' = 100$ (linha cheia). Os outros parâmetros utilizados são: $\epsilon' = 1.4161$, $\epsilon'' = 0$ e $\mu'' = 0$	51

4-2	O fator de assimetria $"426830A \cos \theta "526930B$ em função tanto da parte real μ' (linha cheia) quanto da parte imaginária μ'' (linha tracejada) de μ no limite de pequenas partículas $ka \simeq 0.63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$	53
4-3	O fator de assimetria $"426830A \cos \theta "526930B$ em função tanto da parte real μ' (linha cheia) quanto da parte imaginária μ'' (linha tracejada) de μ no regime de grandes esferas $ka \simeq 63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$	55
4-4	O inverso do parâmetro de localização $(k\ell^*)^{-1}$ em função da parte real μ' (linha cheia) e imaginária μ'' (linha tracejada) da permeabilidade magnética relativa no limite de pequenas partículas $ka \simeq 0.63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$, o comprimento de onda da radiação $\lambda = 633nm$ e a concentração de espalhadores por unidade de volume $\Phi = 0.01$	57
4-5	O inverso do parâmetro de localização $(k\ell^*)^{-1}$ em função da parte real μ' (linha cheia) e imaginária μ'' (linha tracejada) da permeabilidade magnética relativa no regime de grandes esferas $ka \simeq 63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$, o comprimento de onda da radiação $\lambda = 633nm$ e a concentração de espalhadores por unidade de volume $\Phi = 0.01$	59
5-1	Velocidade de fase v_p (linha tracejada), velocidade de grupo v_g (linha pontilhada; para maior clareza, é exibido o valor absoluto) e velocidade de transporte v_E (linha cheia) em função do parâmetro de tamanho x para luz que se propaga em um meio desordenado constituído por espalhadores de Mie dielétricos de índice de refração $m = 2.73$. O valor do <i>packing fraction</i> é $f = 0.36$ (Gráfico extraído da Ref. [4]).	73

- 5-2 Velocidade de transporte de energia v_E (normalizada pela velocidade de propagação no vácuo c_0) em função do parâmetro de tamanho ka para três valores da permeabilidade magnética relativa: $\mu = 1$ (linha tracejada), $\mu = 10^3$ (linha cheia em negrito) e $\mu = 10^5$ (linha cheia). O packing fraction vale $f = 0.36$ e a permissividade elétrica relativa $\epsilon = 7.29$, os mesmos parâmetros utilizados no caso não magnético (Fig. 5-1). 76
- 5-3 Fator de eficiência total Q (linha cheia) e a velocidade de transporte v_E (linha cheia em negrito) em função de μ para espalhadores ferromagnéticos e dielétricos no limite de pequenas partículas ($ka = 0.01$). v_E está normalizada por c_0 e os demais parâmetros utilizados são $f = 0.36$ e $\epsilon = 7.29$. 77
- 5-4 Velocidades de transporte v_E (linha cheia em negrito) e de fase v_p (linha cheia) em função de ka no limite de pequenas partículas para espalhadores ferromagnéticos ($\mu = 10^3$). Ambas as velocidades estão normalizadas por c_0 . Os demais parâmetros utilizados são $f = 0.36$ e $\epsilon = 7.29$ 78
- 5-5 As quantidades adimensionais: v_E (linha cheia), ℓ^* (linha tracejada) e D (linha cheia em negrito) em função de μ para espalhadores ferromagnéticos e dielétricos no limite de pequenas partículas ($ka = 0.01$). Para efeito de comparação, v_E foi multiplicado pelo fator 10^7 . Os demais parâmetros utilizados são $f = 0.36$ e $\epsilon = 7.29$ 79

Lista de Tabelas

1.1 Comparação entre as equações que descrevem a propagação de ondas de matéria (elétrons sem spin) e ondas clássicas escalares (ondas eletromagnéticas sem polarização). Para maior clareza, várias constantes foram normalizadas. Tabela extraída da Ref. [42]. 10

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conceitos Gerais

Em seu tratado *Opticks*, datado de 1730, Isaac Newton postula que a luz tem como característica básica se propagar “descrevendo linhas retas e com intensidade constante”. Esta afirmação é verdadeira contanto que a radiação não encontre nenhum tipo de obstáculo em seu caminho. Os obstáculos podem interferir na propagação da luz, e de ondas eletromagnéticas em geral, através de dois processos distintos: a absorção e o espalhamento. Na absorção, o obstáculo dissipa parte da energia eletromagnética transportada pelo feixe de luz incidente. No espalhamento, a presença de um obstáculo altera a direção de propagação do feixe incidente, sem que haja necessariamente dissipação de energia. Se um objeto espalha todos os comprimentos de onda com a mesma eficiência e não absorve, ele será branco. Se, por outro lado, o objeto absorve fortemente todos os comprimentos de onda, ele será negro. A origem do processo de espalhamento de luz está associada ao fenômeno da refração que, na sua forma mais simples, pode ser descrita pela conhecida lei de Snell.

O estabelecimento do processo de *espalhamento múltiplo* se dá quando a luz se propaga através de um meio composto por uma coleção de obstáculos. O espalhamento múltiplo é um processo ubíquo na natureza: ele pode ser encontrado não só em situações do nosso cotidiano, tais como a propagação da luz através de nuvens, poeira e líquidos (leite,

tinta, etc), mas também em situações envolvendo a propagação de ondas eletromagnéticas através de atmosferas planetárias ou aglomerados estelares.

Os primeiros estudos na tentativa de se compreender o espalhamento múltiplo da luz foram feitos no âmbito da comunidade de Astrofísica: a primeira obra de referência sobre o assunto é devida à Chandrasekhar [5]. Chandrasekhar introduz uma ferramenta fundamental para o estudo do espalhamento múltiplo da luz: a equação de transferência radiativa, que nada mais é do que um tratamento equivalente à equação de Boltzmann para partículas clássicas. Apesar de ser capaz de descrever com sucesso vários fenômenos envolvendo o transporte de energia eletromagnética em astrofísica e física nuclear, a equação de transferência radiativa não leva em conta um aspecto fundamental do processo de espalhamento múltiplo: a fase do campo, que por muito tempo foi considerada desprezível por se acreditar que ela seria completamente destruída após vários espalhamentos. Em outras palavras, pode-se afirmar que a equação de transferência radiativa ignora completamente os efeitos de interferência entre as ondas durante o processo de espalhamento múltiplo. Assim, o que se obtém através da utilização da equação de transferência radiativa é um espectro de caráter essencialmente difusivo para a intensidade dos campos. Desta forma, a utilização de um tratamento exclusivamente baseado na equação de transferência radiativa fez com que o estudo do espalhamento múltiplo da luz fosse considerado, por muitos anos, algo pouco interessante, um campo desprovido de qualquer perspectiva para a investigação de novas questões em Física.

Esta visão do espalhamento múltiplo da luz perdurou até o final da década de 50, que ficou marcada por uma mudança dramática nesta situação, uma verdadeira revolução. Entretanto, tal revolução não foi desencadeada por novos avanços obtidos pela comunidade envolvida com o espalhamento múltiplo da luz, mas sim por novas descobertas relativas ao espalhamento múltiplo de elétrons em estado sólido. De fato, é possível estabelecer uma série de analogias e conexões entre sistemas envolvendo o espalhamento múltiplo da luz e de elétrons, que constituem um tópico fascinante e bastante atual de pesquisa em Física, como será visto na próxima seção. Todas estas analogias se baseiam em uma característica fundamental comum à luz e aos elétrons: sua natureza ondulató-

ria. Desta forma, a corrente elétrica desempenharia o papel do feixe de luz nos sistemas ópticos, ao passo que as impurezas no metal fariam o papel dos centros espalhadores aleatoriamente distribuídos. Em física da matéria condensada, o caráter ondulatório dos elétrons desempenha um papel fundamental: ele explica, por exemplo, porque a resistividade elétrica de um cristal perfeito é nula, e também porque apenas os desvios deste sistema perfeito levam à uma resistividade finita. Entretanto, para se descrever o comportamento *difusivo* da propagação dos elétrons em um cristal, não é necessário incorporar o fenômeno de interferência da função de onda eletrônica no processo de espalhamento elétron-impureza. É exatamente isto que está por trás da conhecida lei de Ohm, que afirma que a resistência de um condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento. Explorando a analogia entre os sistemas eletrônicos e ópticos, pode-se afirmar que a lei de Ohm está intimamente relacionada com o regime difusivo no espalhamento múltiplo da luz. A idéia que revolucionou todo o estudo dos processos de espalhamento múltiplo está baseada exatamente na percepção de que era necessário ir além do regime difusivo, de que os *efeitos de interferência* desempenham um papel fundamental em tais processos. Como já foi dito, esta idéia surgiu no contexto da física da matéria condensada, quando P. W. Anderson demonstrou que os efeitos de interferência na função de onda eletrônica durante o processo de espalhamento múltiplo por impurezas em um metal são capazes de induzir efeitos de localização [6]. Este fenômeno de localização induzida por efeitos de interferência resulta na supressão da propagação eletrônica e é chamado de *localização de Anderson*¹. A localização de Anderson foi um verdadeiro marco na pesquisa em matéria condensada pois, além de servir de modelo para o estudo das transições metal-isolante, permitiu que muitos outros efeitos importantes pudessem ser descritos e explicados como fenômenos essencialmente ondulatórios: o efeito Sharvin-Sharvin [7], as oscilações de Aharanov-Bohm [8], o efeito Hall quântico [9] e as flutuações universais da condutância [10].

Se a propagação eletrônica pode ser inibida por efeitos de interferência, é natural

¹Na verdade, o fenômeno da localização de Anderson pode ser entendido como uma *transição de fase de segunda ordem* induzida pela desordem.

questionar por que o mesmo não pode ocorrer com a propagação da luz em meios espalhadores desordenados, uma vez que tanto os elétrons quanto a luz são essencialmente fenômenos ondulatórios. Curiosamente, esta pergunta só foi feita quinze anos atrás pelo próprio P. W. Anderson em sua “teoria da tinta branca” [11]. A partir daí, e da subsequente observação experimental do efeito de *retroespalhamento coerente da luz* [12][13][14], o análogo óptico do fenômeno da localização fraca eletrônica [15]², o estudo do espalhamento múltiplo da luz e de ondas eletromagnéticas em geral se transformou em uma ativa área de pesquisa. Dentro deste novo contexto, a busca de uma verificação experimental da *localização de Anderson da luz*³, o análogo eletromagnético para a localização de Anderson eletrônica, se tornou o objetivo principal. Atualmente, há evidências não ambíguas de localização de Anderson eletromagnética no regime de microondas em *quasi* - uma dimensão [16] e em duas dimensões [17]. Na faixa óptica, há evidências da formação de estados localizados em sistemas espalhadores de semicondutores em pó [18] que, contudo, não parecem ser conclusivas⁴.

A exemplo do que ocorre em sistemas eletrônicos, os efeitos de localização não são as únicas evidências da importância da fase do campo nos problemas de espalhamento múltiplo de ondas eletromagnéticas e tampouco esgotam a analogia entre sistemas desordenados ópticos e eletrônicos. Além do efeito de retroespalhamento coerente da luz e da localização de Anderson, a fase do campo eletromagnético também está presente de forma decisiva na origem de vários outros fenômenos, tais como as flutuações universais da condutância da luz, bem conhecidas em sistemas eletrônicos, mas somente observadas em sistemas ópticos recentemente [19].

²Por este motivo, o fenômeno de retroespalhamento coerente é também chamado de localização fraca da luz.

³A localização de Anderson da luz é frequentemente chamada de localização forte, em oposição ao fenômeno de retroespalhamento coerente da luz ou localização fraca. As condições necessárias para que ocorra uma transição “localização fraca - localização forte” em sistemas eletromagnéticos serão discutidas em detalhe no capítulo 3.

⁴Para uma discussão mais detalhada deste assunto, consulte o capítulo 3.

1.2 Ondas Clássicas versus Ondas de Matéria

Nesta seção, serão discutidos alguns aspectos das analogias e ligações profundas que existem entre as equações que descrevem a propagação de ondas de matéria e de ondas clássicas⁵. Uma discussão bastante detalhada e completa deste assunto pode ser encontrada em um artigo de revisão por Legendijk *et al.*[4]. A origem de todas estas analogias está ligada à estreita semelhança que existe entre o formalismo da equação de Schrödinger na Mecânica Quântica e o das equações de Maxwell no Eletromagnetismo. Um dos primeiros a perceber a existência de tais analogias, bem como suas importantes consequências, foi seguramente Louis de Broglie em seus trabalhos que marcaram o início da Mecânica Quântica ondulatória. Atualmente, o estudo das analogias e diferenças entre luz e elétrons é, como já mencionado, um tópico fascinante e bastante atual de pesquisa em Física. De fato, é importante ressaltar que muitos dos “efeitos quânticos” em física da matéria condensada são chamados de “quânticos” simplesmente porque foram estudados inicialmente para ondas de matéria (elétrons) mas, como tais efeitos são essencialmente fenômenos de interferência, eles podem também ser encontrados em sistemas de ondas clássicas. Como exemplos de interesse atual, podemos citar os já mencionados fenômenos de localização fraca e a localização de Anderson da luz e as flutuações universais da condutância. Além disso, o estudo das analogias elétrons-ondas eletromagnéticas tem possibilitado que muitos problemas complexos em Óptica sejam tratados com base na utilização de ferramentas frequentemente empregadas em Mecânica Quântica, como por exemplo a teoria de perturbações, a teoria de campos e as técnicas da física de muitos corpos [20].

A fim de tornar a discussão um pouco mais quantitativa, serão examinados a seguir alguns aspectos da analogia formal entre a equação de Schrödinger e as equações de Maxwell. A propagação de uma onda de matéria associada à uma partícula de massa m_e

⁵O termo ondas clássicas é frequentemente empregado para designar ondas eletromagnéticas, em oposição às ondas de matéria (ondas de de Broglie ou “ondas quânticas”).

é descrita pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (1.1)$$

A evolução temporal da função de onda ψ é descrita pela Hamiltoniana:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

para uma partícula de momento \mathbf{p} sob a ação de um potencial $V(\mathbf{r})$. A título de simplificação, o spin do elétron foi desprezado na Eq. 1.2. Além disso, será empregado doravante um sistema de unidades onde $\hbar = 2m_e = 1$. Na expressão para a Hamiltoniana 1.2, \mathbf{p} representa o operador $\mathbf{p} = -i\nabla$. Para uma problema independente do tempo, a equação de Schrödinger assume a forma de uma equação de autovalores para a energia E :

$$\{\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) - E\} \psi_E(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.3)$$

A propagação de ondas eletromagnéticas em meios contínuos, por sua vez, é descrita pelas equações de Maxwell. Em um meio não condutor (desprovido de cargas e correntes), não dispersivo (i.e., onde a permissividade elétrica é independente da frequência, $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$) e com permeabilidade magnética $\mu = 1$, as equações de Maxwell assumem a forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (1.7)$$

Eliminando-se o campo \mathbf{B} , é possível obter a equação de Helmholtz em função unicamente

do campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$:

$$\frac{\epsilon(\mathbf{r})}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (1.8)$$

A inspeção da Eq. 1.8 revela duas diferenças fundamentais com relação à equação de Schrödinger: a natureza vetorial dos campos eletromagnéticos e a segunda derivada com respeito ao tempo. Em termos do operador momento, é possível escrever o duplo rotacional na Eq. 1.8 como $-\mathbf{p}^2 \Delta_{\mathbf{p}}$. O tensor de rank 2 $\Delta_{\mathbf{p}}$, definido como

$$(\Delta_{\mathbf{p}})_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}, \quad (1.9)$$

tem a função de um projetor sobre o espaço dos campos transversos (normais a \mathbf{p}). É possível agora reescrever a Eq. 1.8 como

$$\left\{ \mathbf{p}^2 \Delta_{\mathbf{p}} + \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 [1 - \epsilon(\mathbf{r})] - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1.10)$$

onde a dependência temporal do campo elétrico, implícita em 1.8, foi utilizada. A Eq. 1.10 tem portanto uma forma bastante semelhante à equação de Schrödinger 1.3. Assim, comparando as Eqs. 1.10 e 1.3, é possível identificar a “energia eletromagnética” com

$$E_{EM} = (\omega/c_0)^2, \quad (1.11)$$

e o “potencial eletromagnético” com a quantidade

$$V_{EM} = [1 - \epsilon(\mathbf{r})] E_{EM}. \quad (1.12)$$

A partir da discussão acima é possível tirar importantes conclusões acerca das semelhanças e diferenças entre ondas de matéria e ondas eletromagnéticas. A primeira delas diz respeito à relação de dispersão. Como para o movimento livre $E \sim \mathbf{p}^2$ e $\omega^2 \sim E_{EM} \sim \mathbf{p}^2$, tem-se que a relação de dispersão $\omega = \omega(k)$ é parabólica para partículas

quânticas e linear para ondas eletromagnéticas.

Outra diferença fundamental entre ondas de matéria e ondas eletromagnéticas está relacionada com a *dependência em energia do potencial*: o “potencial eletromagnético” depende da energia (Eq. 1.12), contrariamente ao que ocorre no caso quântico. Este fato possui implicações profundas nos processos de espalhamento de luz e ondas eletromagnéticas em geral. Uma das manifestações mais importantes deste potencial dependente da energia está associada com o processo de espalhamento de luz a baixas energias. É importante salientar que, em geral, a aproximação de Born no caso de ondas clássicas se aplica para *baixas* energias, ao invés de altas energias como no caso do espalhamento de ondas quânticas: como $V_{EM} \sim E_{EM}$, a magnitude do potencial será pequena para baixas frequências. Para frequências mais altas ($E \gg |V|$), como por exemplo no caso do espalhamento de luz por partículas dielétricas, a aproximação de Born só será válida para valores da constante dielétrica $\epsilon(\mathbf{r})$ em torno de 1, o que corresponde ao chamado regime de Rayleigh-Gans [21]. Na aproximação de Born, a seção de choque de espalhamento C_{esp} é dada por [4]:

$$C_{esp} \sim |V_{EM}|^2 \sim E_{EM}^2 \sim \omega^4. \quad (1.13)$$

Este resultado, a forte dependência em frequência da seção de choque de espalhamento, foi previsto pela primeira vez por Lord Rayleigh no século passado e explica, dentre outras coisas, porque o céu é azul: a cor azul é consideravelmente mais espalhada que o vermelho na atmosfera terrestre. Além disso, este resultado está em claro contraste com o caso do espalhamento de ondas quânticas no limite de baixas frequências, onde a seção de choque tende a um valor constante (o chamado *limite de onda-s*).

Apesar da dependência em energia do “potencial eletromagnético” 1.12, é importante destacar que, se o valor de E_{EM} for constante, as Eqs. 1.3 e 1.10 serão análogas. Isto significa que ondas quânticas (e.g. elétrons) e ondas clássicas (e.g. luz) comportam-se de maneira semelhante apenas em situações envolvendo os *aspectos estacionários* da propagação das ondas. Em situações dinâmicas, em contrapartida, é preciso considerar

frequentemente processos envolvendo transições entre diversos níveis de energia, o que faz com o mecanismo de propagação de ondas clássicas e quânticas seja fundamentalmente diferente. Como exemplo de uma grandeza associada à experimentos em regime estacionário, podemos citar o livre caminho médio de transporte ℓ^* medido a partir da largura à meia altura do cone de retroespalhamento coerente, que será discutido em detalhes no capítulo 3. Por outro lado, medidas da velocidade de transporte de energia v_E e da constante de difusão $D = v_E \ell^* / 3$ da luz são exemplos de experimentos relacionados aos aspectos dinâmicos da propagação de ondas eletromagnéticas. Nestes casos, é de se esperar que luz e elétrons comportem-se de maneira distinta. A não observação deste fato resultou na interpretação equivocada de muitos experimentos e foi alvo de muitas controvérsias no início dos anos 90, como será visto no capítulo 5.

Finalmente, vale salientar que, através de um tratamento puramente escalar para as ondas eletromagnéticas⁶ e levando em conta explicitamente a dependência em energia do potencial eletromagnético, é possível estabelecer uma correspondência unívoca entre as Eqs. 1.3 e 1.10. Dentro deste contexto, pode-se formular vários conceitos fundamentais comuns às ondas quânticas e clássicas. Dentre eles, podemos citar a relação de Einstein para a condutividade, a relação de Friedel e o critério de Thouless para localização, que foram recentemente formulados também para a luz [22]. A tabela 1.1 exhibe algumas das principais semelhanças e diferenças entre os dois tipos de onda em um problema estacionário. A fim de tornar mais evidentes as analogias entre ondas quânticas (elétrons) e ondas clássicas (ondas eletromagnéticas), o spin do elétron e a polarização das ondas eletromagnéticas foram ignoradas.

1.3 Organização da Tese

Esta tese se propõe a investigar o espalhamento múltiplo e da propagação de ondas eletromagnéticas em meios desordenados *magnéticos*, com ênfase em três aspectos fun-

⁶Isto implica em substituir o campo elétrico $E(\mathbf{r}, t)$ por uma variável escalar $\psi_E(\mathbf{r}, t)$.

	Ondas de matéria (elétrons sem spin)	Ondas clássicas (ondas eletromagnéticas sem polarização)
Observável	$ \psi(\mathbf{r}, t) ^2$	$\psi(\mathbf{r}, t)$
Equação de movimento	$[\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})]\psi = i\partial_t\psi$	$[\mathbf{p}^2 + \epsilon(\mathbf{r})\partial_t^2]\psi = 0$
Equação de autovalores	$[\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})]\psi_E = E\psi_E$	$[\mathbf{p}^2 + V_E(\mathbf{r})]\psi_E = E\psi_E$
Potencial	$V(\mathbf{r})$	$V_E(\mathbf{r}) = [1 - \epsilon(\mathbf{r})]E$
Autovalor	E (energia)	$E = (\omega/c_0)^2$
Quantidade conservada	$\int d\mathbf{r} \psi ^2$	$\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [\epsilon(\mathbf{r}) \partial_t\psi ^2 + \partial_r\psi ^2]$
Densidade de corrente	$\text{Im}(\psi^* \partial_r \psi)$	$-\text{Re}(\partial_t \psi^* \partial_r \psi)$
Carga?	Sim	Não

Tabela 1.1: Comparação entre as equações que descrevem a propagação de ondas de matéria (elétrons sem spin) e ondas clássicas escalares (ondas eletromagnéticas sem polarização). Para maior clareza, várias constantes foram normalizadas. Tabela extraída da Ref. [42].

damentais: o fenômeno da localização fraca, o problema da velocidade de transporte de energia e da constante de difusão. O presente trabalho é provavelmente o primeiro estudo de tais fenômenos, como também do espalhamento múltiplo de ondas eletromagnéticas em geral, na presença de espalhadores magnéticos. Com relação à organização da tese propriamente dita, os capítulos 2 e 3 são dedicados à uma revisão dos conceitos já estabelecidos na literatura e que serão utilizados na tese, enquanto que os demais capítulos (4 e 5) são voltados para a apresentação e a discussão dos resultados obtidos.

Antes de abordar o problema do espalhamento múltiplo, é indispensável que se considere a teoria completa do espalhamento simples de ondas eletromagnéticas por uma única partícula, considerada esférica. Este é portanto o propósito do capítulo 2, onde são revisados os fundamentos e as características principais do espalhamento de Mie por partículas esféricas.

A partir do capítulo 3, a atenção será voltada para a abordagem do problema do espalhamento múltiplo. No capítulo 3, em particular, o efeito de retroespalhamento coerente, o análogo clássico da localização fraca eletrônica, será tratado em detalhes. Será discutida a origem do efeito, bem como as principais características do cone de retroespalhamento. A seção 3.3 será dedicada a uma discussão mais detalhada da analogia “ondas de matéria-ondas clássicas”, iniciada neste capítulo introdutório. Ainda dentro do

contexto desta analogia, as condições para o estabelecimento da localização de Anderson eletromagnética também serão abordadas.

O capítulo 4, por sua vez, é reservado à investigação do efeito da localização fraca eletromagnética no caso de interesse desta tese: sistemas magnéticos desordenados. Para isto, será feito inicialmente um tratamento do espalhamento simples por esferas magnéticas de tamanho arbitrário. Será explorada e discutida a dependência em μ (permeabilidade magnética relativa entre o espalhador e o meio) de quantidades relevantes para o processo de espalhamento múltiplo, tal como o fator de assimetria. O chamado limite de pequenas partículas, onde o comprimento de onda da radiação incidente é muito maior que as dimensões típicas da esfera espalhadora, receberá um tratamento analítico, enquanto que o caso de esferas maiores será tratado numericamente. No caso particular de esferas ferromagnéticas no limite de pequenas partículas, caso este jamais considerado na literatura, serão derivadas expressões analíticas para os primeiros termos da série de Mie, a_1 e b_1 . Em seguida, estes resultados relativos ao processo de espalhamento simples serão inseridos dentro do contexto do espalhamento múltiplo, com o objetivo de investigar a influência de espalhadores magnéticos no parâmetro de localização, inversamente proporcional à abertura angular do cone de retroespalhamento. Os resultados obtidos serão sistematicamente comparados com o caso não magnético já amplamente estudado na literatura. Serão feitas também algumas sugestões de como se estudar este problema do ponto de vista experimental e de quais os sistemas adequados para que os resultados obtidos possam ser observados em laboratório.

Finalmente, o capítulo 5 trata de dois aspectos dinâmicos fundamentais envolvidos na propagação de ondas eletromagnéticas em meios magnéticos desordenados: a velocidade de transporte de energia v_E e a constante de difusão D . Antes de efetivamente analisar as consequências da introdução de partículas magnéticas no comportamento de v_E e D , será feita uma breve revisão da teoria de van Albada *et al.* que, explorando a analogia elétrons-ondas clássicas, redefiniram estas grandezas para o caso eletromagnético. Em seguida, a partir da teoria de van Albada *et al.* e dos resultados obtidos no capítulo 4 relativos ao espalhamento simples por espalhadores ferromagnéticos no limite de pequenas

partículas, será feito um cálculo analítico das quantidades de interesse (v_E e D) neste caso particular. A exemplo do capítulo 4, procurar-se-á sempre comparar os resultados obtidos com o caso não magnético, enfatizando as profundas diferenças entre os dois casos em questão. Algumas possíveis aplicações tecnológicas dos resultados obtidos neste capítulo também serão discutidas.

Capítulo 2

Teoria de Mie

O problema do espalhamento de ondas eletromagnéticas por partículas esféricas é um tópico em Física que, apesar de ter sido amplamente abordado e discutido ao longo do século XX, está longe de ser um assunto esgotado. Os avanços e descobertas nesta área possuem um enorme potencial para aplicações em diversos campos da pesquisa científica, tais como a astrofísica, a meteorologia e química, o que lhe garante uma notável vitalidade nos dias atuais.

Do ponto de vista histórico, pode-se dizer que creditar o pioneirismo no estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas à uma única pessoa é algo errôneo: o que hoje conhecemos como Teoria de Mie é fruto de contribuições significativas dadas por vários físicos do final do século XIX e início do século XX. Em dois trabalhos publicados em 1890 e 1898, respectivamente, Lorenz desenvolveu um tratamento detalhado e completo do problema, derivando quantidades importantes na teoria do espalhamento, tais como os coeficientes de espalhamento, as funções de amplitude e as seções de choque. Em 1908, Gustav Mie desenvolveu, em seu artigo intitulado “Considerations on the optics of turbid media, especially colloidal metal sols” [23], uma teoria no sentido de entender os mecanismos de espalhamento e absorção de luz por sistemas de pequenas partículas coloidais de ouro suspensas em água. Aproximadamente na mesma época, Debye estudou o problema do espalhamento e da pressão de radiação exercida sobre pequenas partículas no contexto da astrofísica [24]. Mais recentemente, Nussenzveig desenvolveu uma teoria

completa para explicar um dos muitos fenômenos envolvendo o espalhamento de luz em nosso cotidiano: o arco-íris [25].

Este capítulo será dedicado à descrição matemática da teoria de Mie, cujos resultados serão utilizados nos capítulos subsequentes, sobretudo nos capítulos 4 e 5, onde os resultados da Teoria de Mie relativos ao espalhamento simples por esferas magnéticas serão inseridos no contexto do espalhamento múltiplo.

2.1 Formulação Geral do Problema

O problema de Mie trata o espalhamento de uma onda eletromagnética plana por uma esfera isotrópica, homogênea e de tamanho arbitrário. Desta forma, a solução do problema baseia-se na resolução das equações de Maxwell para os campos eletromagnéticos e na aplicação das condições de contorno apropriadas.

Consideremos uma onda plana harmônica com frequência ω , que se propaga através de um meio dielétrico, isotrópico e homogêneo, cujos valores da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética são, respectivamente, ϵ_0 e μ_0 . Tal onda pode ser descrita por:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (2.2)$$

onde \mathbf{k}_0 é o vetor de onda ($|\mathbf{k}_0| = 2\pi/\lambda_0$) e λ_0 é o comprimento de onda no meio.

Ao incidir sobre uma partícula esférica homogênea de raio a , permissividade elétrica ϵ_1 e permeabilidade magnética μ_1 , parte da radiação incidente é absorvida, e parte é espalhada, como ilustrado na Figura 2-1. Note que tanto ϵ_1 quanto μ_1 são complexos (i.e., $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + i\epsilon''_1$ e $\mu_1 = \mu'_1 + i\mu''_1$), onde as partes imaginárias estão relacionadas com os mecanismos de perdas. Como resultado da interação entre o campo incidente e a esfera espalhadora, tem-se a criação de dois novos campos: o *campo no interior da esfera* \mathbf{E}_d e o *campo espalhado* \mathbf{E}_s . Desta forma, os campos \mathbf{E}_f e \mathbf{H}_f que se propagam no meio

que circunda a esfera serão dados pela superposição do campo incidente com o campo espalhado, ou seja, $\mathbf{E}_f = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$ e $\mathbf{H}_f = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$. Tal campo deve obedecer às equações de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / \partial t \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

e conseqüentemente a equação de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

Além disso, os campos no interior da esfera (\mathbf{E}_d e \mathbf{H}_d) e no seu exterior (\mathbf{E}_f e \mathbf{H}_f) devem obedecer às condições de contorno usuais do eletromagnetismo: suas componentes tangenciais devem ser contínuas ao longo da interface entre a esfera e o meio, isto é:

$$[\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_f] \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.9)$$

$$[\mathbf{H}_d - \mathbf{H}_f] \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.10)$$

para $r = a$.

O problema de Mie fica completamente resolvido encontrando-se soluções para as Eqs. 2.7, 2.8 que satisfaçam as equações de Maxwell 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 e as condições de contorno 2.9 e 2.10. A próxima seção será dedicada à determinação destas soluções.

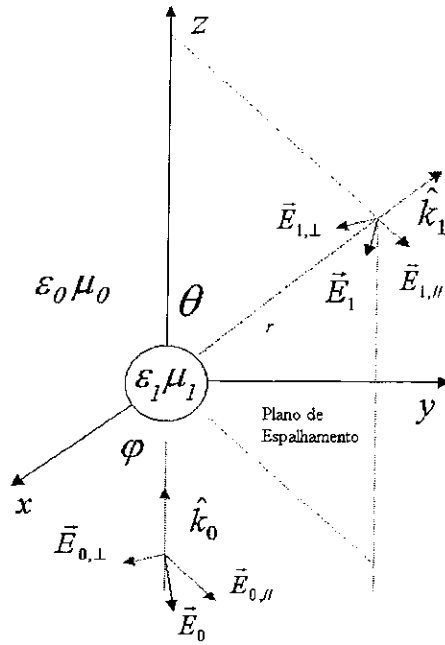


Figura 2-1: Geometria do espalhamento de Mie.

2.2 Soluções da Equação de Onda

A resolução das Eqs. 2.7, 2.8 fica bastante simplificada com a introdução dos *harmônicos esféricos* vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} e do seu *funcional gerador* ψ [26]. Sejam quaisquer duas funções vetoriais \mathbf{M} e $\mathbf{N} \equiv (\nabla \times \mathbf{M})/k$ que satisfaçam as equações de onda vetoriais 2.7, 2.8 e as Eqs. 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6. O *funcional gerador* ψ é definido como:

$$\mathbf{M} \equiv \nabla \times (\mathbf{r}\psi). \quad (2.11)$$

Os vetores \mathbf{M} e \mathbf{N} serão soluções da equação de onda *vetorial* se e somente se ψ satisfizer a equação de onda *escalar*:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.12)$$

Portanto, o problema de se encontrar as soluções para as *equações de onda vetoriais* dos campos eletromagnéticos fica reduzido ao problema consideravelmente mais simples de

se achar as soluções para uma *equação de onda escalar*.

Explorando a simetria do problema e utilizando o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , a equação de onda 2.12 assume a forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (2.13)$$

Assumindo que as soluções particulares de 2.13 tem a forma:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.14)$$

que, quando inserida em 2.13, fornece três equações separadas para as variáveis r, θ, ϕ :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} \right] \Theta = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0, \quad (2.17)$$

onde m e n são constantes de separação a serem determinadas.

As soluções linearmente independentes da Eq. 2.15 são dadas por:

$$\Phi_p = \cos(m\phi), \quad (2.18)$$

$$\Phi_i = \text{sen}(m\phi), \quad (2.19)$$

onde os índices p (par) e i (ímpar) estão associados com a paridade das soluções.

As soluções da Eq. 2.16 são dadas pelos *polinômios de Legendre associados* de grau n e ordem m [27]:

$$\Theta = P_n^m(\cos \theta). \quad (2.20)$$

A equação radial 2.17, por sua vez, tem como soluções as *funções de Bessel esféricas*

[27]:

$$j_n(\rho) = (\pi/2\rho)^{1/2} J_{n+1/2}(\rho), \quad (2.21)$$

$$y_n(\rho) = (\pi/2\rho)^{1/2} N_{n+1/2}(\rho), \quad (2.22)$$

onde $\rho = kr$ e $J_{n+1/2}(\rho)$ e $N_{n+1/2}(\rho)$ são, respectivamente, as funções de Bessel e de Neumann de ordem $n + 1/2$. Note que qualquer combinação linear das soluções 2.21 e 2.22 também será solução de 2.17. Uma dessas combinações, em particular, a *função de Hankel esférica*:

$$h_n(\rho) = j_n(\rho) + iy_n(\rho), \quad (2.23)$$

será bastante útil no que segue pelo fato de sua forma assintótica no limite de grandes distâncias anular-se quando $\rho \rightarrow \infty$ [28].

Podemos agora escrever os funcionais geradores que satisfazem a equação de onda escalar como:

$$\psi_{pmn} = \cos(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho), \quad (2.24)$$

$$\psi_{imn} = \text{sen}(m\phi) P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho), \quad (2.25)$$

onde $z_n(\rho)$ representa uma das três funções: $j_n(\rho)$, $y_n(\rho)$ e $h_n(\rho)$. É importante destacar que, devido à propriedade de completeza das funções $\cos(m\phi)$, $\text{sen}(m\phi)$, $P_n^m(\cos\theta)$ e $z_n(\rho)$, qualquer função que satisfaça a equação de onda escalar 2.13 pode ser escrita como uma série infinita das funções 2.24 e 2.25. Finalmente, os harmônicos esféricos vetoriais gerados por ψ_{pmn} e ψ_{imn} são dados por:

$$\mathbf{M}_{pmn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{pmn}), \quad \mathbf{M}_{imn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{imn}) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{N}_{pmn} = (\nabla \times \mathbf{M}_{pmn})/k, \quad \mathbf{N}_{imn} = (\nabla \times \mathbf{M}_{imn})/k. \quad (2.27)$$

2.2.1 Expansão dos Campos em termos dos Harmônicos Esféricos Vetoriais

Inicialmente, será tratada a expansão da onda plana incidente considerando, sem nenhuma perda de generalidade, que esta encontra-se polarizada ao longo do eixo x :

$$\mathbf{E}_i = E_0 \exp(ik_0 r \cos \theta) \hat{i}, \quad (2.28)$$

onde o fator temporal $\exp(-i\omega t)$ está implícito. A expressão mais geral de 2.28 em termos dos harmônicos esféricos vetoriais é dada por:

$$\mathbf{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (B_{pmn} \mathbf{M}_{pmn} + B_{imn} \mathbf{M}_{imn} + A_{pmn} \mathbf{N}_{pmn} + A_{imn} \mathbf{N}_{imn}). \quad (2.29)$$

Os coeficientes B_{pmn} , B_{imn} , A_{pmn} e A_{imn} da expansão acima são determinados através da utilização das relações de ortogonalidade para os pares de harmônicos esféricos vetoriais $(\mathbf{M}_{pmn}, \mathbf{M}_{imn})$, $(\mathbf{N}_{pmn}, \mathbf{N}_{imn})$, $(\mathbf{M}_{pmn}, \mathbf{N}_{pmn})$ e $(\mathbf{M}_{imn}, \mathbf{N}_{imn})$. Por exemplo, a relação de ortogonalidade para o par $(\mathbf{M}_{pmn}, \mathbf{M}_{imn})$ é dada por:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{pm'n'} \cdot \mathbf{M}_{imn} \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (2.30)$$

Expressões análogas podem ser escritas para os demais pares. Portanto, uma vez determinados todos os coeficientes em 2.29, a expansão da onda incidente 2.28 em termos dos harmônicos esféricos vetoriais pode ser escrita como [26]:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\mathbf{M}_{i1n}^{(1)} - i \mathbf{N}_{p1n}^{(1)} \right), \quad (2.31)$$

onde o sobrescrito (1) nos harmônicos esféricos vetoriais indica que a dependência radial dos funcionais geradores correspondentes é dada pela função $j_n(\rho)$ (Eq. 2.21). A solução cuja dependência radial é dada pela função $y_n(\rho)$ (Eq. 2.22) foi preterida neste caso pelo fato de ser divergente na origem, o que a torna incapaz de descrever adequadamente o

campo incidente. A determinação da expressão para o campo magnético incidente é feita aplicando-se uma das equações de Maxwell (Eq. 2.3) à Eq. 2.31:

$$\mathbf{H}_i = -\frac{k_0}{\omega\mu_0} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\mathbf{M}_{p1n}^{(1)} + i\mathbf{N}_{i1n}^{(1)} \right). \quad (2.32)$$

De posse das fórmulas para as expansões dos campos eletromagnéticos incidentes em termos dos harmônicos esféricos vetoriais (Eqs. 2.31 e 2.32) é possível, com o auxílio das condições de contorno 2.9 e 2.10 e das relações de ortogonalidade para os harmônicos esféricos vetoriais, determinar expansões análogas para os campos no interior da esfera (\mathbf{E}_d e \mathbf{H}_d) e para os campos espalhados (\mathbf{E}_s e \mathbf{H}_s). Para os campos no interior da esfera, em particular, tem-se [26]:

$$\mathbf{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(c_n \mathbf{M}_{i1n}^{(1)} - i d_n \mathbf{N}_{p1n}^{(1)} \right), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{H}_d = -\frac{k_1}{\omega\mu_1} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(d_n \mathbf{M}_{p1n}^{(1)} + i c_n \mathbf{N}_{i1n}^{(1)} \right), \quad (2.34)$$

onde o uso do sobrescrito (1) nos harmônicos esféricos vetoriais indica, mais uma vez, a escolha de uma solução finita na origem, como deve ser para os campos no interior da esfera. c_n e d_n são coeficientes a serem determinados.

Na região situada no exterior da esfera, tanto $j_n(\rho)$ como $y_n(\rho)$ (Eqs. 2.21 e 2.22) são finitas e, portanto, adequadas para serem utilizadas na expansão de \mathbf{E}_s e \mathbf{H}_s . Entretanto, deve-se notar que os campos espalhados devem ser nulos para grandes distâncias, o que torna o uso das funções de Hankel esféricas $h_n(\rho)$ (Eq. 2.23) nas expansões de \mathbf{E}_s e \mathbf{H}_s bastante apropriado. Assim, as expansões para os campos eletromagnéticos espalhados ficam [26]:

$$\mathbf{E}_s = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(i a_n \mathbf{N}_{p1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{i1n}^{(3)} \right), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(i b_n \mathbf{N}_{i1n}^{(3)} + a_n \mathbf{M}_{p1n}^{(3)} \right), \quad (2.36)$$

onde o sobrescrito (3) nos harmônicos esféricos vetoriais indica que a dependência radial dos funcionais geradores correspondentes é dada pela função $h_n(\rho)$ (Eq. 2.23). Os coeficientes a_n e b_n são chamados de *coeficientes de espalhamento*, a serem determinados.

Apesar de sua relativa complexidade matemática, a expansão dos campos eletromagnéticos em termos dos harmônicos esféricos vetoriais nos fornece uma interpretação física bastante intuitiva do processo de espalhamento. De fato, os vetores \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n podem ser entendidos como os *modos normais de vibração dos campos eletromagnéticos*. Assim, de forma geral, os campos espalhados \mathbf{E}_s e \mathbf{H}_s (Eqs. 2.35 e 2.36) são dados pela superposição dos modos normais, cada um deles proporcional aos coeficientes de espalhamento apropriados, a_n ou b_n . Podemos destacar, para cada valor de n , dois tipos distintos de modos normais: os modos *transversais magnéticos* (ondas E ou do tipo elétrico), cuja componente radial do campo magnético é nula, e os modos *transversais elétricos* (ondas M ou do tipo magnético), cuja componente radial do campo elétrico é nula.

Born e Wolf [29] e Kerker [30] propõem um tratamento alternativo do espalhamento por esferas, baseado na expansão dos campos eletromagnéticos em termos dos potenciais de Debye [24]. Tal tratamento evidencia a estreita relação que existe entre os potenciais de Debye e sua representação em termos de uma expansão em multipólos [31]: os potenciais de Debye descrevem a radiação emitida por multipólos oscilantes, cujos momentos de multipólo são proporcionais aos coeficientes de espalhamento a_n e b_n . Desta forma, a radiação espalhada pode ser vista como uma superposição da radiação emitida por multipólos elétricos e magnéticos oscilantes.

2.2.2 Coeficientes de Espalhamento

A determinação de fórmulas explícitas para os coeficientes de espalhamento a_n e b_n , bem como para c_n e d_n , implica na obtenção de quatro equações independentes envolvendo estes coeficientes. Isto pode ser feito com o auxílio das condições de contorno 2.9 e 2.10

que, escritas na forma de componentes, ficam:

$$E_{i\theta} + E_{s\theta} = E_{d\theta}, \quad E_{i\phi} + E_{s\phi} = E_{d\phi} \quad (2.37)$$

$$H_{i\theta} + H_{s\theta} = H_{d\theta}, \quad H_{i\phi} + H_{s\phi} = H_{d\phi} \quad (2.38)$$

para $r = a$. A partir das condições de contorno acima, e com o auxílio da relação de ortogonalidade para as funções $\cos(m\phi)$ e $\sin(m\phi)$ e das expansões 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35 e 2.36, é possível obter as quatro equações lineares envolvendo os coeficientes a_n , b_n , c_n e d_n :

$$j_n(mx)c_n + h_n(x)b_n = j_n(x), \quad (2.39)$$

$$[mxj_n(mx)]' c_n + \mu [xh_n(x)]' b_n = \mu [xj_n(x)]', \quad (2.40)$$

$$mj_n(mx)d_n + \mu h_n(x)a_n = \mu j_n(x), \quad (2.41)$$

$$[mxj_n(mx)]' d_n + m [xh_n(x)]' a_n = m [xj_n(x)]', \quad (2.42)$$

onde o símbolo $'$ denota a diferenciação com respeito ao argumento entre parênteses. O *parâmetro de tamanho* x , o *índice de refração relativo* m e a *permeabilidade magnética relativa* μ são definidos como:

$$x \equiv k_0 a = 2\pi a / \lambda_0, \quad m \equiv k_1 / k_0 = n_1 / n_0, \quad \mu \equiv \mu_1 / \mu_0, \quad (2.43)$$

onde n_1 e n_0 são os índices de refração da partícula e do meio, respectivamente. As equações 2.39, 2.40, 2.41 e 2.42 do sistema acima podem ser facilmente resolvidas para os quatro coeficientes a_n , b_n , c_n e d_n . Apenas os dois primeiros são de interesse aqui, e são dados por:

$$a_n = \frac{m^2 j_n(mx) [xj_n(x)]' - \mu j_n(x) [mxj_n(mx)]'}{m^2 j_n(mx) [xh_n(x)]' - \mu h_n(x) [mxj_n(mx)]'}, \quad (2.44)$$

$$b_n = \frac{\mu j_n(mx) [xj_n(x)]' - j_n(x) [mxj_n(mx)]'}{\mu j_n(mx) [xh_n(x)]' - h_n(x) [mxj_n(mx)]'}. \quad (2.45)$$

Com a introdução das *funções de Riccati-Bessel*:

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \quad \zeta_n = \rho h_n(\rho), \quad (2.46)$$

os coeficientes de espalhamento 2.44 e 2.45 podem ser escritos de uma forma mais simples:

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \mu\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\zeta'_n(x) - \mu\zeta_n(x)\psi'_n(mx)}, \quad (2.47)$$

$$b_n = \frac{\mu\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\mu\psi_n(mx)\zeta'_n(x) - m\zeta_n(x)\psi'_n(mx)}. \quad (2.48)$$

Isto completa a solução formal do problema do espalhamento de Mie. Os campos eletromagnéticos espalhados 2.35 e 2.36 ficam completamente determinados conhecendo-se os coeficientes de espalhamento 2.47 e 2.48 e os harmônicos esféricos vetoriais dados por 2.26 e 2.27, que por sua vez são determinados pelos funcionais geradores 2.24 e 2.25.

2.2.3 A Solução de Campo Longínquo

Uma situação de particular interesse no estudo do espalhamento de ondas eletromagnéticas por pequenas partículas, principalmente sob o ponto de vista experimental, é aquela em que os campos espalhados são observados a distâncias suficientemente grandes da partícula. Na maioria dos casos de interesse, esta é a situação efetivamente encontrada em laboratório. Matematicamente, tal situação corresponde a considerar o limite $k_0r \gg n^2$ nas expressões para os campos espalhados, onde n é a ordem das funções de Riccati-Bessel. Este é o domínio de validade da chamada *zona de campo longínquo* ou *zona de radiação*.

Na zona de campo longínquo, é lícito substituir as formas assintóticas das funções de Hankel esféricas para o limite $k_0r \gg n^2$ [28],

$$h_n(k_0r) \sim \frac{(-i)^n e^{ik_0r}}{ik_0r}, \quad (2.49)$$

$$h'_n(k_0r) \sim \frac{(-i)^n e^{ik_0r}}{k_0r}, \quad (2.50)$$

nas expressões para os campos espalhados (Eqs. 2.35 e 2.36). Além disso, é possível fazer uma aproximação adicional para tratar as soluções na zona de campo longínquo: supor que os campos espalhados são *ondas transversais*, isto é, campos cujas componentes radiais são nulas. Isto porque a componente radial decai muito mais rapidamente com as distâncias que as componentes transversais: enquanto estas decaem proporcionalmente ao fator λ_0/r , aquela decai com $(\lambda_0/r)^2$ [30]. Valendo-se destas aproximações, o campo elétrico espalhado pode ser expresso como:

$$E_{s\theta} = -E_0 \frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r} \cos \phi S_2(\cos \theta) \quad (2.51)$$

$$E_{s\phi} = E_0 \frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r} \text{sen} \phi S_1(\cos \theta) \quad (2.52)$$

onde foram introduzidas as *amplitudes de espalhamento*:

$$S_1(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)] \quad (2.53)$$

$$S_2(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)] \quad (2.54)$$

e as funções angulares:

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\text{sen} \theta} \quad (2.55)$$

$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^{(1)}(\cos \theta) \quad (2.56)$$

Na próxima seção, os resultados obtidos até o momento serão utilizados para se definir duas quantidades fundamentais na teoria do espalhamento: as seções de choque e o fator de assimetria.

2.3 Seções de Choque e Fator de Assimetria

2.3.1 Seções de Choque e Fatores de Eficiência

Como dito anteriormente, ao incidir sobre a esfera, parte da radiação incidente é absorvida e parte é espalhada. A *seção de choque de extinção* C_{ext} (ou total) é definida como sendo a área sobre a qual incide a energia total extraída do feixe incidente, devido tanto aos mecanismos de absorção quanto aos de espalhamento. Assim, C_{ext} é dada pela soma das seções de choque de espalhamento e de absorção:

$$C_{ext} = C_{esp} + C_{abs}. \quad (2.57)$$

A determinação destas seções de choque é feita calculando-se a o fluxo total de energia que atravessa uma esfera imaginária concêntrica à esfera espalhadora e de raio muito maior que a . Esta quantidade é proporcional a média temporal da parte real do vetor de Poynting associado aos campos no exterior da esfera espalhadora:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s). \quad (2.58)$$

Como a superfície da esfera imaginária está, por hipótese, situada na zona de campo longínquo, basta considerar as componentes transversais dos campos em 2.58. Assim, expandindo o produto vetorial acima em termos de componentes, integrando sobre a superfície da esfera imaginária e separando o resultado em três termos distintos, tem-se:

$$I = \text{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{i\theta}^*) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.59)$$

$$II = \text{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{s\theta} H_{i\phi}^* + E_{i\theta} H_{s\phi}^* - E_{s\phi} H_{i\theta}^* - E_{i\phi} H_{s\theta}^*) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.60)$$

$$III = \text{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{s\theta} H_{s\phi}^* - E_{s\phi} H_{s\theta}^*) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.61)$$

O termo I representa a energia total removida da radiação incidente não perturbada.

Como o meio é dielétrico, este termo é nulo. O termo *III*, por sua vez, está associado à energia da radiação espalhada e, portanto, vale C_{esp} . Finalmente, a conservação da energia requer que o termo *II* seja igual a $-C_{ext}$. Isto porque o fluxo total de energia que atravessa a esfera imaginária deve ser necessariamente igual a $-C_{abs}$, uma vez que, devido aos procesos de absorção, a esfera espalhadora age como um “sumidouro” de energia desta magnitude. O cálculo das integrais 2.59, 2.60 e 2.61 fornece [23]:

$$C_{esp} = \frac{2\pi}{k_0} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (2.62)$$

$$C_{ext} = \frac{2\pi}{k_0} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n). \quad (2.63)$$

É conveniente ainda definir os *fatores de eficiência* de espalhamento Q_{esp} e de extinção Q_{ext} , quantidades adimensionais obtidas dividindo-se as seções de choque acima pela seção de choque geométrica da partícula, πa^2 :

$$Q_{esp} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (2.64)$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n). \quad (2.65)$$

A título de ilustração, o fator de eficiência de espalhamento Q_{esp} é exibido na figura 2-2 em função do parâmetro de tamanho $x = ka$ para uma esfera dielétrica, não magnética ($\mu = 1$) e com de índice de refração relativo $m = \sqrt{\epsilon} = 2.73$, correspondente à partículas de TiO_2 no vácuo.

2.3.2 Fator de Assimetria

O *fator de assimetria* mede o valor médio do cosseno do ângulo de espalhamento θ . Tal quantidade é definida como:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{x^2 Q_{esp}} \int_{-1}^1 (|S_1|^2 + |S_2|^2) \xi d\xi, \quad (2.66)$$

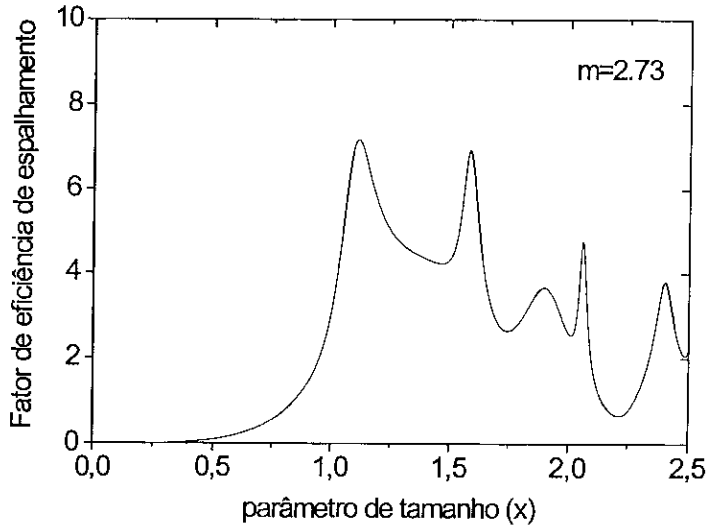


Figura 2-2: Fator de eficiência de espalhamento Q_{esp} , definido como sendo a seção de choque de espalhamento C_{esp} normalizada pela seção de choque geométrica πa^2 , em função do parâmetro de tamanho $x = ka$ para uma esfera de Mie dielétrica, não magnética ($\mu = 1$) e com índice de refração relativo $m = 2.73$, correspondente à partículas de TiO_2 no vácuo.

onde $\xi = \cos \theta$. Se $\langle \cos \theta \rangle = 0$, não há nenhuma direção preferencial de espalhamento, que portanto é dito isotrópico. Se o espalhamento for simétrico em torno de $\theta = 90^\circ$, o valor de $\langle \cos \theta \rangle$ também será nulo. Por outro lado, se o espalhamento for predominantemente na direção de retroespalhamento ($\theta = 180^\circ$), $\langle \cos \theta \rangle$ será negativo; caso contrário, seu valor será positivo.

Debye mostrou que o fator de assimetria pode ser expresso em termos dos coeficientes de espalhamento [24]:

$$\langle \cos \theta \rangle Q_{esp} = \frac{4}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(n+2)}{n+1} \operatorname{Re}(a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^*) + \frac{2n+1}{n(n+1)} \operatorname{Re}(a_n b_n^*) \right]. \quad (2.67)$$

A expressão acima é bastante útil para efeitos de cálculos numéricos e será largamente utilizada ao longo desta tese.

Capítulo 3

Localização Fraca de Ondas Clássicas - O Efeito de Retroespalhamento Coerente

A abordagem tradicional do problema do espalhamento múltiplo de ondas clássicas em meios desordenados é baseada na teoria de transferência radiativa [5], que nada mais é do que um tratamento equivalente à equação de Boltzmann para partículas clássicas. Apesar de ter sido capaz de descrever com sucesso vários fenômenos envolvendo o transporte de energia eletromagnética em astrofísica e em física nuclear, o que explica sua utilização durante vários anos, tal abordagem está longe de ser completa: ela considera apenas os efeitos triviais de interferência entre as ondas, isto é, a interferência entre a função de onda ψ e seu complexo conjugado ψ^* .

A primeira evidência de que os efeitos não triviais de interferência desempenham um papel decisivo no estudo da propagação de ondas clássicas em meios desordenados foi a verificação experimental do *efeito de retroespalhamento coerente da luz* por diversos grupos em meados da década de 80 [14][13] [12], após a proposta teórica inicial de P. W. Anderson [11]. O efeito de retroespalhamento coerente da luz, o análogo óptico do fenômeno da localização fraca para elétrons [15], se manifesta pelo aumento na intensidade da luz espalhada retroativamente por um sistema de partículas desordenadas. Este

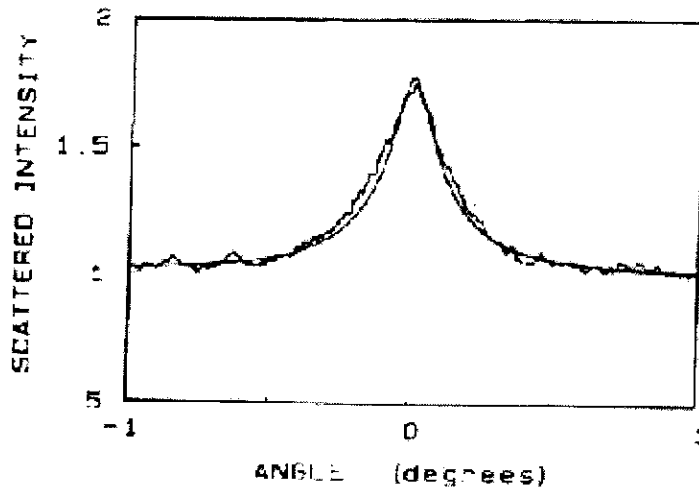


Figura 3-1: Cone de retroespalhamento coerente: intensidade de luz ($\lambda = 515 \text{ nm}$) espalhada por uma suspensão coloidal com $\ell^* = 19 \mu\text{m}$ em função do ângulo. Note o aumento da intensidade espalhada na exata posição de retroespalhamento $\theta = 0^\circ$. Figura extraída da Ref. [3].

aumento é essencialmente devido à interferência construtiva entre os diversos feixes de luz que sofrem múltiplos espalhamentos dentro do meio. Entretanto, é importante ressaltar que a interferência construtiva ocorre *somente na direção de retroespalhamento*: nas outras direções, a diferença entre as fases associadas aos diversos caminhos que a luz percorre dentro do meio faz com que o efeito de interferência seja destruído. Assim, o que se observa experimentalmente é um estreito “cone” na intensidade de luz espalhada que decai exponencialmente em função do ângulo de detecção, associado ao retroespalhamento coerente, sobreposto a um “background” difusivo, como ilustra a figura 3-1.

O efeito de retroespalhamento coerente da luz foi investigado em diversos sistemas e situações, tais como em meios que apresentam ganho [32], na presença de campos magnéticos externos [33] [34][35][36][37], em sistemas de baixa dimensionalidade [38], em sistemas anisotrópicos, como por exemplo os cristais líquidos [39][40], e mais recentemente em sistemas de átomos frios [41]. É importante destacar que o efeito de retroespalhamento coerente não se limita apenas à sistemas ópticos: ele se manifesta em qualquer

sistema envolvendo a propagação de ondas clássicas em meios desordenados, sejam elas microondas (e ondas eletromagnéticas em geral), ondas acústicas ou até mesmo ondas associadas à vibrações sísmológicas (veja por exemplo a Ref. [42]).

Este capítulo será dedicado à descrição da teoria do retroespalhamento coerente para ondas clássicas em geral (seções 3.1 e 3.2). Na seção 3.3, a análise se voltará para o caso particular de ondas eletromagnéticas, onde serão discutidas as analogias entre sistemas de ondas eletromagnéticas e sistemas eletrônicos, com ênfase no fenômeno da localização de Anderson. No capítulo 4, a teoria do efeito de retroespalhamento coerente será aplicada especificamente para o caso de ondas eletromagnéticas, com o objetivo de investigar tal efeito na presença de partículas magnéticas.

3.1 Coerência na Direção de Retroespalhamento

A figura 3-2 mostra uma visão esquemática do processo de espalhamento múltiplo de ondas em um meio composto por uma coleção de centros espalhadores idênticos, fixos e aleatoriamente distribuídos. A figura destaca também dois feixes de onda, A e B , de mesma frequência, que sofrem uma sequência de n espalhamentos dentro do meio. A título de simplificação, considera-se que tais raios são monocromáticos e que cada um deles não sofre mais do que um único espalhamento no mesmo centro espalhador, ou seja, despreza-se a situação de espalhamento recorrente¹. Os dois raios em questão são emitidos por uma fonte situada em um ponto \mathbf{R}_0 distante do meio espalhador, de modo que os raios A e B encontram-se paralelos na incidência. O raio A , em particular, possui amplitude A_i e vetor de onda \mathbf{k}_i no ponto \mathbf{R}_0 . Após n espalhamentos (que ocorrem nos pontos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}' = \mathbf{r}_n$, os quais indexam as posições dos n centros espalhadores), o raio A deixa o meio espalhador com amplitude A_f e vetor de onda \mathbf{k}_f , como ilustra a figura 3-2. O raio B é tal que sua trajetória dentro do meio possui sentido *oposto* ao da trajetória descrita pelo raio A : os n espalhamentos sofridos pelo raio B ocorrem

¹O tratamento do espalhamento múltiplo na presença do chamado espalhamento recorrente é bastante complicado, podendo resultar no estabelecimento de caos em tais sistemas (veja por exemplo a Ref. [43]).

exatamente em uma sequência *inversa* àquela associada aos espalhamentos sofridos pelo raio A . Desta forma, o raio B , que incide sobre o meio com amplitude $B_i = A_i$ e vetor de onda \mathbf{k}_i , sofre o primeiro espalhamento na posição $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_n$ e o último em $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, até deixar o meio com amplitude B_f e vetor de onda \mathbf{k}_f .

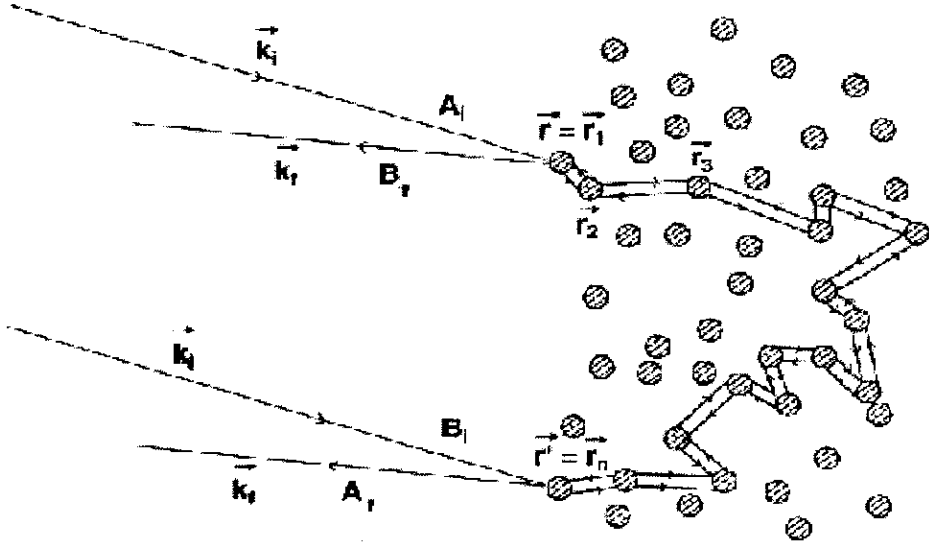


Figura 3-2: Visão esquemática do processo do espalhamento múltiplo, mostrando dois raios A e B que sofrem n espalhamentos dentro do meio. O raio B é tal que sua sequência de espalhamentos se dá exatamente na ordem inversa à do raio A . Os raios A e B serão perfeitamente coerentes quando $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$.

Supondo que todos os espalhamentos são processos elásticos, a relação entre a amplitude final emergente A_f do raio A em um ponto de observação distante \mathbf{r}_0 e a amplitude incidente A_i é dada por:

$$A_f = A_i G_A \exp[i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_0) + i\mathbf{k}_{1,2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \dots + i\mathbf{k}_{n-1,n} \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}) + i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_n)], \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{k}_{n-1,n}$ é o vetor de onda que descreve a propagação do raio entre os espalhadores $n - 1$ e n e G_A é um fator que dá conta da magnitude de cada espalhamento. Note que em 3.1 somente as fases relativas aos propagadores, representados matematicamente

pelas funções de Green e que descrevem a evolução do campo entre dois espalhadores sucessivos, foram escritos explicitamente. De forma análoga, a amplitude final do raio B (cuja amplitude incidente é a mesma do raio A , i.e., $B_i = A_i$) no mesmo ponto de observação distante \mathbf{r}_0 é dada por:

$$B_f = A_i G_B \exp [i \mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_0) + i \mathbf{k}_{n,n-1} \cdot (\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n) + \dots + i \mathbf{k}_{2,1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + i \mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)], \quad (3.2)$$

onde G_B é um fator similar à G_A . Note que, como por construção $\mathbf{k}_{n,n-1} = -\mathbf{k}_{n-1,n}$, todos os termos do fator de fase em 3.2 serão idênticos àqueles em 3.1, à exceção do primeiro e do último. Além disso, $G_A = G_B$ pois os centros espalhadores são idênticos. Portanto, a razão A_f/B_f será dada por:

$$\frac{A_f}{B_f} = \exp [i (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \quad (3.3)$$

A partir da análise da figura 3-2, é possível notar que a Eq. 3.3 tem uma interpretação física bastante simples: a amplitude final B_f possui uma fase extra $-\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ devido ao caminho adicional que o raio B percorre na incidência, ao passo que A_f apresenta a fase extra $\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ em virtude do caminho adicional percorrido pelo raio A ao deixar o meio. É importante destacar que, se $\mathbf{k}_i = -\mathbf{k}_f$, os dois raios emergentes serão paralelos e coerentes exatamente no sentido oposto ao sentido de incidência.

Entretanto, em uma experiência de espalhamento múltiplo, as trajetórias descritas pelos raios A e B não serão simplesmente como as trajetórias mostradas na figura 3-2, mas sim uma soma infinita sobre todos os possíveis caminhos de espalhamento. As trajetórias da figura são apenas alguns exemplos de caminhos de espalhamento. Desta forma, para $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}'$, \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_f fixos, as amplitudes emergentes A_f e B_f serão dadas

por:

$$A_f = \exp [i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) + i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')] \sum_{\{\alpha\}} A_\alpha, \quad (3.4)$$

$$B_f = \exp [i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{R}_0) + i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})] \sum_{\{\beta\}} B_\beta, \quad (3.5)$$

onde foi feito $A_i = B_i = 1$ a título de simplificação, e os símbolos α e β indexam os vários caminhos de espalhamento descritos pelos raios A e B , respectivamente. Sob determinadas condições (que serão discutidas a seguir), é possível mostrar que existe uma correspondência unívoca entre os termos das duas somas acima, $\sum_{\{\alpha\}} A_\alpha$ e $\sum_{\{\beta\}} B_\beta$. De fato, para cada caminho α é possível encontrar um caminho β tal que sua sequência de espalhamentos se dê exatamente na *ordem inversa* à sequência de espalhamentos associada ao caminho α , como exemplificado na figura 3-2. Portanto, o caminho β pode ser entendido como o caminho direto α *invertido temporalmente*². Vemos pois que a invariância sob reversão temporal é a condição necessária para que se possa definir um mapeamento unívoco entre os caminhos do conjunto $\{\alpha\}$ e do conjunto $\{\beta\}$ ². Logo, *se o sistema for invariante mediante uma operação de reversão temporal*², temos:

$$\sum_{\{\alpha\}} A_\alpha = \sum_{\{\beta\}} B_\beta \quad (3.6)$$

e a razão A_f/B_f será dada exatamente pela Eq. 3.3.

Um sistema será invariante sob reversão temporal se, por exemplo, os centros espalhadores permanecerem estáticos enquanto as ondas se propagam através do meio, de modo que os raios que percorrem os caminhos diretos e invertidos temporalmente “vejam” os espalhadores nas mesmas posições. Na prática, como a velocidade de propagação das ondas no meio desordenado é muito maior que a velocidade com que os centros espalhadores se deslocam (associada, por exemplo, ao movimento Browniano), esta condição é quase

²É importante destacar que esta afirmação é válida somente para *ondas escalares*. Em casos mais gerais, onde a polarização das ondas é levada em conta, a simetria em questão não é a de reversão temporal, mas sim a *reciprocidade* [44].

sempre satisfeita. Uma outra condição para que o sistema seja invariante sob reversão temporal, esta bem mais importante e restritiva, é a ausência de um campo magnético externo. A presença do campo magnético é responsável pelo surgimento de diferenças de fase entre os caminhos diretos e os invertidos temporalmente, o que faz com que o efeito de coerência na direção de retroespalhamento seja parcialmente destruído. É importante destacar que isto vale tanto para sistemas eletrônicos (ondas “quânticas”) quanto para sistemas de ondas clássicas. No caso de sistemas ópticos (ondas clássicas), em particular, foi observado experimentalmente [33] e posteriormente confirmado por meio de simulações numéricas [34], que a presença de um campo magnético externo faz com que a altura do cone de retroespalhamento diminua, o que evidencia a perda da coerência entre os caminhos ópticos na direção de retroespalhamento.

Note que, até agora, não foi especificado em nenhum momento se as ondas que se propagam através do meio desordenado são de natureza quântica ou clássica. Na próxima seção, entretanto, a discussão será voltada para o caso particular de ondas clássicas escalares, onde será feito um cálculo explícito do efeito de retroespalhamento coerente para uma amostra de geometria definida.

3.2 Perfil Angular do Cone de Retroespalhamento

Uma discussão mais quantitativa do efeito de localização fraca para ondas clássicas só pode ser feita a partir do cálculo da intensidade retroespalhada. Assim, se um feixe de ondas coerentes incidir sobre um meio de partículas desordenadas, a intensidade retroespalhada associada aos dois raios A e B será dada por:

$$\begin{aligned}
 |A_f + B_f|^2 &= |A_f|^2 + |B_f|^2 + A_f B_f^* + A_f^* B_f \\
 &= |A_f|^2 |1 + \exp[-i(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]|^2 \\
 &= 2 \{1 + \cos[(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]\} |A_f|^2, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

onde a Eq. 3.3 foi usada. Na última igualdade da expressão acima, pode-se distinguir dois tipos distintos de termos: o termo constante devido ao espalhamento incoerente e o termo de interferência, $\cos[(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]$. Note que o termo de interferência é máximo exatamente na situação de detecção retroativa, isto é, quando $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$. Vemos pois que, neste caso, os efeitos de coerência são responsáveis pelo aumento na intensidade retroespalhada por um fator 2.

A partir do resultado 3.7, é possível tirar algumas conclusões importantes sobre a intensidade da radiação retroespalhada. Para isso, consideremos um sistema de três centros espalhadores distintos situados nas posições \mathbf{r} , \mathbf{r}' e \mathbf{r}'' . A propagação das ondas através deste sistema envolve três pares de caminhos ópticos: $A_f(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}')$ e $B_f(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$; $C_f(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'')$ e $D_f(\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r})$; $E_f(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}'')$ e $F_f(\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}')$. A intensidade total espalhada por este sistema na direção de \mathbf{k}_f será dada por:

$$\begin{aligned}
 |A_f + B_f + C_f + D_f + E_f + F_f|^2 &= |A_f + B_f|^2 + |C_f + D_f|^2 + |E_f + F_f|^2 \\
 &+ (A_f + B_f)(C_f + D_f)^* + (A_f + B_f)^*(C_f + D_f) \\
 &+ (A_f + B_f)^*(E_f + F_f) + (A_f + B_f)(E_f + F_f)^* \\
 &+ (C_f + D_f)^*(E_f + F_f) + (C_f + D_f)(E_f + F_f)^* .
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

É possível distinguir dois tipos de termos na expressão acima. O primeiro deles está associado com os módulos quadrados dos pares de amplitude, cujos valores são dados por expressões análogas à Eq. 3.7. O segundo tipo, por sua vez, está associado com os termos de interferência entre os pares de amplitudes. É importante notar que os valores dos termos de interferência dependem de forma decisiva da configuração em que os centros espalhadores se encontram. Isto porque a fase relativa entre dois pares de amplitudes (e.g., $(C_f + D_f)$ e $(E_f + F_f)$) deve variar de forma aleatória de configuração para configuração, uma vez que não há motivos para se esperar algum tipo de relação fixa entre os caminhos ópticos de dois pares de raios distintos. Desta forma, após a realização de uma *média sobre todas as configurações possíveis do sistema*, apenas termos do primeiro tipo sobreviverão. Este efeito da média configuracional foi demonstrado experimental-

mente por Etemad *et al.* [45]. Usando o espalhamento de luz por configurações fixas de espalhadores, observa-se picos na intensidade refletida situados em posições angulares arbitrárias. A este espectro de intensidades dá-se o nome de *speckle*. Apesar das posições dos picos variarem de configuração para configuração, o pico na exata posição de retroespalhamento ($\theta = 0$), associado à interferência construtiva entres os caminhos diretos e reversos, estará sempre presente em todos os *speckles*. Após a realização da média configuracional, apenas o pico de retroespalhamento sobrevive, enquanto que os demais desaparecem. Assim, uma vez realizada a média configuracional³, basta substituir o módulo quadrado da soma das amplitudes (Eq. 3.8) pela soma do módulos quadrados dos *pares* de amplitudes (proporcionais ao fator de amplificação $[1 + \cos(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]])$ para calcular a intensidade retroespalhada.

Utilizando esta simplificação, é possível agora calcular o perfil angular do cone de retroespalhamento coerente para um feixe de ondas clássicas refletido por um meio de partículas desordenadas contidas em uma amostra que se estende de $z = 0$ a $z = L$. Para isto, será preciso conhecer o valor da quantidade $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que representa a fração da intensidade do feixe incidente que, emitido por uma fonte situada em \mathbf{r} , chega ao ponto \mathbf{r}' . O valor de $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser aproximado pelas solução estáticas (i.e., independentes do tempo) da equação de difusão [46]:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 v_E / 4Ds]}{(4\pi Ds / v_E)^{3/2}} \quad (3.9)$$

onde v_E é a velocidade com que a energia se propaga através do meio (*velocidade de transporte*), D é a constante de difusão, calculada pela teoria de transporte de Boltzmann, e s é a variável que designa o comprimento dos caminhos percorridos pela onda dentro do meio. A constante de difusão relaciona-se com a velocidade de transporte através da equação $D = v_E \ell^* / 3$, onde ℓ^* é o livre caminho médio de transporte. O livre caminho médio de transporte, por sua vez, é uma grandeza fundamental no estudo dos processos

³Na prática, a média configuracional pode ser obtida se os espalhadores estiverem se movimentando aleatoriamente, como por exemplo em uma solução coloidal em movimento Browniano.

difusivos. Fisicamente, ℓ^* representa a distância típica que a onda percorre antes que sua direção de propagação se torne completamente aleatória. Em outras palavras, ℓ^* está associado com a distância média que a onda percorre até que ela “perca a memória” de sua direção de propagação. É importante destacar a diferença entre o livre caminho médio de transporte ℓ^* e o livre caminho médio ℓ_s , que representa a distância média entre dois eventos de espalhamento sucessivos. Além disso, o livre caminho médio de transporte é uma grandeza que faz a “ponte de ligação” entre os processos de espalhamento múltiplo e simples que, no caso eletromagnético, é descrito pela teoria de Mie discutida no capítulo anterior. De fato, ℓ^* pode ser escrito em função de grandezas associadas ao processo de espalhamento simples, tais como a seção de choque total C_{ext} e o fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$, através da relação:

$$\ell^* = \frac{\ell_s}{1 - \langle \cos \theta \rangle}, \quad (3.10)$$

onde $\ell_s = 1/\Phi C_{ext}$ e Φ é a densidade de centros espalhadores dentro do meio.

Voltando às soluções da equação de difusão (Eq. 3.9), é importante ressaltar que a quantidade $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ está associada a apenas um único caminho óptico s . Em uma situação de espalhamento múltiplo, entretanto, deve-se levar em conta *todas* as trajetórias que a onda pode descrever ao se propagar do ponto \mathbf{r} ao ponto \mathbf{r}' . Assim, é preciso integrar $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sobre todas as trajetórias possíveis:

$$\begin{aligned} P'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int_0^\infty P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds = \int_0^\infty \frac{\exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 v_E / 4Ds]}{(4\pi Ds/v_E)^{3/2}} ds \\ &= \frac{v_E}{4\pi D |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Supondo ainda que a fonte das ondas é uma fonte difusiva, esta não pode estar situada sobre a superfície da amostra, mas sim sobre um plano $z = z_0 \cong \ell^*$ dentro da amostra, de modo a garantir que a onda incidente tenha sofrido pelo menos um espalhamento. A fim de simplificar o problema, será considerado apenas o caso limite $L \rightarrow \infty$, com a

condição de contorno no plano $z = 0$ sendo dada por:

$$P - C \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3.12)$$

onde $C = (2\ell^*/3)(1 + \rho)/(1 - \rho)$ é o chamado de comprimento de extrapolação e ρ é o coeficiente de reflexão na superfície da amostra. Uma solução aproximada, que satisfaça a condição de contorno 3.12, pode ser obtida a partir de 3.11 através do método das imagens [46]:

$$P'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{v_E}{4\pi D} \left\{ \frac{1}{[(x - x')^2 (y - y')^2 + (z_0 - z')^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x - x')^2 (y - y')^2 + (z' + z_0 - 2C)^2]^{1/2}} \right\}. \quad (3.13)$$

Como o último espalhamento se dá na posição $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, é razoável supor que $z' \cong z_0$. Assim, a Eq. 3.13 pode ser reescrita como:

$$P'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{3}{4\pi\ell^*} \left\{ \frac{1}{r_{\parallel}} - \frac{1}{[r_{\parallel}^2 + 4(z_0 + C)^2]^{1/2}} \right\}, \quad (3.14)$$

onde $r_{\parallel} = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$. Fazendo uso da simplificação discutida anteriormente, isto é, somando as intensidades associadas aos pares de amplitudes sobre todos os caminhos possíveis entre os pontos extremos \mathbf{r} e \mathbf{r}' , obtém-se a intensidade total espalhada na direção \mathbf{k}_f :

$$\frac{I(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)}{I_{inc}} \cong \frac{3}{(4\pi)^2 \ell^*} \int d\mathbf{r}_{\parallel} \left\{ \frac{1}{r_{\parallel}} - \frac{1}{[r_{\parallel}^2 + 4(z_0 + C)^2]^{1/2}} \right\} \times \{1 + \cos [(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]\}, \quad (3.15)$$

onde I_{inc} é a intensidade incidente e $\mathbf{r}_{\parallel} = (x - x', y - y')$. É importante destacar que o resultado acima é independente da posição \mathbf{r} em que a fonte está situada. Além disso, note que foi introduzido um fator adicional $1/4\pi$ para dar conta da fração da intensidade

que é espalhada na direção de \mathbf{k}_f no ponto \mathbf{r}' . Resolvendo a integral em 3.15, obtém-se [46]:

$$\frac{I(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)}{I_{inc}} \cong \frac{3(z_0 + C)}{4\pi\ell^*} \left\{ 1 + \frac{1 - \exp[-|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f|(z_0 + C)]}{2|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f|(z_0 + C)} \right\}. \quad (3.16)$$

A análise da Eq. 3.16 nos permite tirar várias conclusões importantes acerca do cone de retroespalhamento. A primeira delas está relacionada com o fator 2 de aumento na direção de retroespalhamento, como mencionado anteriormente. Efetivamente, como $(z_0 + C)$ é um fator da ordem de ℓ^* e $\ell^*|\mathbf{k}_i|$ é tipicamente $\gg 1$, é possível notar que o fator $2|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f|(z_0 + C)$ no denominador varia entre 0 (na exata direção de retroespalhamento $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$) e um valor $\gg 1$. Para $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$, em particular, note que o valor da razão $\frac{I(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)}{I_{inc}}$ na Eq. 3.16 é máximo, o que resulta em um aumento por um fator 2 da intensidade refletida na exata posição de retroespalhamento, relativa ao “background” incoerente. Esta é a origem do cone de retroespalhamento coerente que caracteriza o efeito da localização fraca de ondas clássicas.

O segundo ponto importante a ser notado é que este fator de aumento devido aos efeitos de coerência é observado apenas dentro de um “cone” com uma estreita abertura angular, a qual pode ser calculada a partir de 3.16. Definindo a largura do cone pela condição:

$$2|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f|(z_0 + C) = 1, \quad (3.17)$$

e denotando por θ o ângulo que mede o desvio entre \mathbf{k}_f e $-\mathbf{k}_i$, de modo que $\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f \approx 2\pi\theta/\lambda$ (onde λ é o comprimento de onda), tem-se que a condição 3.17 implica em uma abertura angular dada por:

$$\Delta\theta \cong \frac{\lambda}{4\pi\ell^*} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^{-1}. \quad (3.18)$$

Na expressão acima, foi assumido que $z_0 = \ell^*$. O fato de $\Delta\theta$ ser inversamente proporcional a ℓ^* não chega a ser algo surpreendente: como a diferença de fase entre os caminhos

diretos e reversos torna-se função da diferença entre \mathbf{r} e \mathbf{r}' quando $\mathbf{k}_f \neq -\mathbf{k}_i$, é razoável supor que a contribuição das amplitudes incoerentes para a intensidade total refletida seja dominante para separações $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ maiores que ℓ^* . Isto significa que só é possível somar coerentemente as amplitudes para $|\mathbf{r}_{||} - \mathbf{r}'_{||}| \leq \ell^*$. Assim, na situação limite onde $|\mathbf{r}_{||} - \mathbf{r}'_{||}| = \ell^*$, acima da qual a contribuição coerente deixa de ser apreciável, a diferença de caminho entre dois raios que emergem da amostra fazendo um ângulo θ com a direção de retroespalhamento será dada aproximadamente por $\theta\ell^*$. Além disso, como a interferência construtiva entre os raios só deve ocorrer quando esta diferença de caminho for da ordem (ou menor) que o comprimento de onda (i.e., quando $\theta\ell^* \leq \lambda$), o fenômeno de retroespalhamento coerente só deve ser observado dentro de uma abertura angular dada por $\Delta\theta\ell^* \cong \lambda$, o que concorda com o resultado obtido em 3.18. Em uma experiência de espalhamento múltiplo da luz, $\Delta\theta$ é tipicamente da ordem de milésimos de radiano, o que de certa forma explica porque o fenômeno da localização fraca da luz ter sido observado apenas recentemente.

Finalmente, a partir da análise da Eq. 3.16, é possível notar que, para pequenos valores do ângulo θ , o decréscimo do valor da razão $\frac{I(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)}{I_{inc}}$ a partir de seu valor máximo é linear em θ . Isto significa que o perfil angular do cone de retroespalhamento coerente apresenta um pico estreito na posição $\theta = 0$, i.e., uma descontinuidade em sua derivada neste ponto. É importante mencionar que tal descontinuidade ocorre somente no chamado *regime difusivo* (i.e, para $L/\ell^* \gg 1$) e em sistemas sem absorção⁴.

A análise do fenômeno da localização fraca de ondas clássicas apresentada nesta seção, apesar de simples, é suficiente para que se tenha uma intuição física sobre a origem das principais características do cone de retroespalhamento coerente que serão exploradas ao longo desta tese, dentro do contexto de sistemas magnéticos: o fator 2 de aumento na altura do cone e a dependência inversa entre $\Delta\theta$ e ℓ^* . Uma tratamento mais detalhado, incluindo a utilização de condições de contorno mais realistas e uma análise do processo de espalhamento múltiplo baseada representação diagramática da equação de Bethe-

⁴Na presença de processos de absorção, o pico do cone de retroespalhamento coerente não terá mais a forma de uma cúspide, mas sim uma forma arredondada.

Salpeter, pode ser encontrado nas Refs [47] e [48].

3.3 Conexão com o Fenômeno da Localização de Anderson e a Analogia com Sistemas Eletrônicos

O efeito de retroespalhamento coerente da luz (e de ondas eletromagnéticas em geral) evidencia a estreita analogia que existe entre sistemas que envolvem a propagação de ondas eletromagnéticas e sistemas que envolvem o transporte eletrônico em física da matéria condensada, onde também os efeitos de interferência desempenham um papel de fundamental importância. De fato, o efeito de retroespalhamento coerente da luz pode ser entendido como o análogo óptico do efeito da localização fraca para elétrons [3], que tem sua origem nos efeitos de interferência no processo de espalhamento múltiplo dos elétrons por impurezas em um metal. A analogia entre sistemas ópticos e eletrônicos é clara: os feixes de luz que se propagam pelo meio desordenado desempenham o papel da corrente elétrica no metal, ao passo que os centros espalhadores desempenham o papel das impurezas.

Como mencionado no capítulo 1, este tipo de analogia não se limita ao efeito da localização fraca, estendendo-se também para o fenômeno da *localização de Anderson* (às vezes chamada de localização forte), previsto por P. W. Anderson em 1958 [6], em um artigo que lhe rendeu o prêmio Nobel de física. Anderson mostrou que efeitos de interferência no processo de espalhamento múltiplo de elétrons por impurezas podem induzir a formação de *estados localizados*: a constante de difusão, associada ao processo de transporte eletrônico, pode anular-se, caracterizando a transição do sistema de um estado condutor para um estado isolante. É importante destacar que a localização de Anderson está intimamente relacionada com a presença de desordem no sistema: sem ela, a transição para o estado isolante não ocorreria.

Dentro deste contexto, é razoável esperar que o fenômeno da localização de Anderson ocorra também para sistemas de ondas eletromagnéticas. Entretanto, o caso eletromag-

nético apresenta uma importante particularidade: os fótons, ao contrário dos elétrons, não interagem entre si. Este fato levou muitos autores a pensar no transporte de fótons em meios desordenados como o sistema ideal para se estudar a localização de Anderson [11] [49]. De fato, tal fenômeno foi observado experimentalmente para microondas em sistemas *quasi*-unidimensionais [16] e bidimensionais [17] no início da década de 90. A localização de Anderson para a luz em sistemas tridimensionais, todavia, permaneceu como um desafio para muitos físicos experimentais até 1997, quando foram observados alguns indícios da formação de estados ópticos localizados em sistemas fortemente espalhadores de semicondutores em pó ⁵[18].

Na próxima subseção, serão discutidas as condições necessárias para que se estabeleça o fenômeno da localização de Anderson em sistemas de ondas eletromagnéticas.

3.3.1 O Parâmetro de Localização e a Rota para a Localização de Anderson de Ondas Eletromagnéticas

O efeito da localização para elétrons foi originalmente definido como sendo a situação onde a condutividade DC cai a zero, pois é esta a quantidade medida em laboratório [15]. Através da transposição deste conceito para o caso eletromagnético, é de se esperar que a localização de Anderson ocorra quando a constante de difusão D for nula. Lembrando da relação $D = v_E \ell^*/3$, note que a observação de pequenos valores da constante de difusão pode estar associada à dois fatores distintos: pequenos valores da velocidade de transporte v_E ou pequenos valores do livre caminho médio de transporte ℓ^* . Entretanto, é possível mostrar que uma eventual redução em v_E vem necessariamente acompanhada de um aumento na densidade de estados eletromagnéticos [4]. Isto faz com que o sistema se afaste da transição para a localização de Anderson que, de acordo com o *critério de Thouless* [53], desenvolvido inicialmente dentro do contexto dos sistemas eletrônicos e

⁵É importante mencionar que tais evidências, resultantes de experimentos realizados pelo grupo de Ad Lagendijk em Amsterdã, foram contestadas por vários autores [50], o que foi motivo de muita polêmica e que ainda gera uma série de controvérsias [50] [51]. A principal objeção feita aos experimentos realizados em Amsterdã diz respeito à alta taxa de absorção por parte dos espalhadores de semicondutor, o que “mascararia” os efeitos de localização [52].

depois generalizado para o caso de ondas eletromagnéticas [54] [55], deve ocorrer somente quando o valor da densidade de estados é baixo. Portanto, a diminuição dos valores de v_E não pode estar associada com o estabelecimento do fenômeno da localização de Anderson, apesar de provocar um decréscimo no valor da constante de difusão. Conforme será visto no próximo capítulo, a não observação deste fato levou a algumas interpretações equivocadas de experimentos onde foram medidos pequenos valores para a constante de difusão da luz, os quais foram erroneamente associados com o fenômeno da localização de Anderson.

A partir da discussão acima, fica claro que a localização de Anderson para ondas eletromagnéticas deve ocorrer quando os valores do livre caminho médio de transporte ℓ^* forem suficientemente pequenos. Dentro deste contexto, é apropriado definir a quantidade adimensional $k\ell^*$ como o *parâmetro de localização*. Existem várias teorias que prevêem um critério preciso para a localização de ondas clássicas: se $k\ell^*$ for menor que um valor crítico, tem-se então o estabelecimento de estados localizados. Talvez a mais acurada de todas elas seja a teoria desenvolvida por Economou *et al.* [56], baseada na analogia do poço de potencial, que fornece um valor crítico $k\ell^* = 0.844$ para a localização de ondas clássicas em geral. No caso de sistemas ópticos, em particular, o menor valor de $k\ell^*$ já medido foi de 1.5, no experimento realizado pelo grupo de Amsterdã [18]. Entretanto, pode-se dizer a grosso modo que para valores $k\ell^* \simeq 1$ os efeitos de interferência entre as ondas são suficientes para provocar uma redução significativa no valor de D , fazendo com que as ondas, inicialmente estendidas, passem a ter um caráter localizado [57].

Capítulo 4

Localização Fraca de Ondas Eletromagnéticas em Meios Magnéticos Desordenados¹

No capítulo 2 foi feita uma apresentação da teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas por partículas esféricas (Teoria de Mie), enquanto que o capítulo 3 foi dedicado à discussão do fenômeno da localização fraca para ondas clássicas em geral. Isto cria as condições necessárias para que se possa abordar o tema principal do presente capítulo: o estudo do fenômeno da localização fraca de ondas eletromagnéticas na presença de *centros espalhadores magnéticos*. É importante destacar que, após uma análise cuidadosa da bibliografia referente ao estudo dos fenômenos de espalhamento, propagação e localização de ondas eletromagnéticas em sistemas desordenados, foi constatado que não havia *nenhum* trabalho, tanto teórico quanto experimental, que trate tais fenômenos em meios magnéticos desordenados.

Este capítulo encontra-se organizado da seguinte forma: *i*) na seção 4.1 será feita uma análise do *espalhamento simples* de ondas eletromagnéticas por esferas magnetizadas e

¹O conteúdo deste capítulo encontra-se essencialmente no artigo: F. A. Pinheiro, A. S. Martinez e L. C. Sampaio, “New Effects in Light Scattering in Disordered Media and Coherent Backscattering Cone: Systems of Magnetic Particles”, *Phys. Rev. Lett.* 84, 1435 (2000) (Ref. [1]).

dielétricas. O caso particular em que as dimensões típicas da esfera espalhadora são muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente (i.e., $ka \ll 1$, chamado de limite de pequenas partículas) será tratado analiticamente. O caso de esferas magnéticas de tamanho arbitrário receberá um tratamento numérico. Será analisada também a dependência de quantidades relevantes para o espalhamento simples, tais como o fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$, com a permeabilidade magnética relativa μ ; *ii*) na seção 4.2 os resultados referentes ao espalhamento simples obtidos na seção 4.1 serão inseridos dentro do contexto do espalhamento múltiplo com o objetivo de, através de uma análise numérica, investigar como a presença de partículas magnéticas afetam o parâmetro de localização $k\ell^*$; e *iii*) finalmente, na seção 4.3, serão discutidas algumas possíveis situações onde os resultados obtidos nas seções 4.1 e 4.2 possam ser verificados experimentalmente.

4.1 Espalhamento Simples por Esferas Magnéticas

Apesar da vasta maioria dos livros-texto [30][21][26] sobre espalhamento de luz e ondas eletromagnéticas em geral considerar que a permeabilidade magnética relativa μ entre o espalhador e o meio que o circunda tem valor unitário, isto não se aplica para o caso de espalhadores magnéticos, sobretudo quando a radiação incidente está fora da faixa de frequências ópticas². Isto explica porque o fator μ foi mantido ao longo de toda a derivação dos coeficientes de espalhamento de Mie a_n e b_n (Eqs. 2.47 e 2.48) apresentada no capítulo 2. De fato, a permeabilidade magnética para materiais ferromagnéticos pode assumir uma vasta gama de valores. Por exemplo, $\mu \sim 10^6$ para uma amostra de níquel “bulk” a temperatura ambiente [58]. Com isto em mente, é possível agora dar início a um estudo mais aprofundado do espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas magnetizadas. A seguir, será tratado analiticamente o caso particular do espalhamento no limite de pequenas partículas, onde as particularidades do espalhamento magnético, e sobretudo suas diferenças em relação ao caso não-magnético, se manifestam de forma mais evidente.

²Veja a seção 4.3

4.1.1 Limite de Pequenas Partículas: Tratamento Analítico

O tratamento do limite de pequenas partículas ($ka \ll 1$) consiste em expandir os coeficientes de espalhamento de Mie a_n e b_n (Eqs. 2.47 e 2.48) em série de potências do parâmetro de tamanho ka e considerar apenas o primeiro termo da série. É importante destacar que o limite de pequenas partículas não implica em centros espalhadores pontuais: cada espalhador possui um raio a não nulo. O tratamento do limite de pequenas partículas requer a utilização das expansões em série de potências das funções de Ricatti-Bessel $\psi_n(\alpha)$ e de Hankel $\zeta_n(\alpha)$, bem como de suas derivadas no limite em que o argumento α é pequeno (i.e., $\alpha \ll 1$) [28]:

$$\psi_n(\alpha) = \frac{2^n n! \alpha^{n+1}}{(2n+1)!} \left\{ 1 - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \alpha^2 + \dots \right\}, \quad (4.1)$$

$$\psi'_n(\alpha) = \frac{2^n (n+1)!}{(2n+1)!} \alpha^n \left\{ 1 - \frac{n+3}{(2n+1)(2n+3)} \alpha^2 + \dots \right\}, \quad (4.2)$$

$$\zeta_n(\alpha) = i \frac{(2n)!}{2^n n! \alpha^n}, \quad (4.3)$$

$$\zeta'_n(\alpha) = -i \frac{(2n)!}{2^n (n-1)! \alpha^{n+1}}. \quad (4.4)$$

Substituindo as expansões acima nas expressões para os coeficientes de espalhamento de Mie a_n e b_n (Eqs. 2.47 e 2.48) e levando em conta somente o primeiro termo da série³, obtém-se:

$$a_1 = -\frac{i(ka)^3}{3} \frac{ka\psi'_1(mka) - 2\tilde{m}\psi_1(mka)}{ka\psi'_1(mka) + \tilde{m}\psi_1(mka)}, \quad (4.5)$$

$$b_1 = -\frac{i(ka)^3}{3} \frac{\tilde{m}ka\psi'_1(mka) - 2\psi_1(mka)}{\tilde{m}ka\psi'_1(mka) + \psi_1(mka)}, \quad (4.6)$$

onde $\tilde{m} \equiv m/\mu = \sqrt{\epsilon/\mu}$.

Neste ponto da discussão é fundamental que fique clara a distinção entre limite de pequenas partículas e limite Rayleigh, duas situações frequentemente confundidas na

³Os termos de ordem superior são da ordem de ka^5 ou maiores; podem pois serem desprezados em face ao primeiro (da ordem de ka^3).

literatura: no limite Rayleigh, não só o raio da esfera espalhadora deve ser muito menor que o comprimento de onda da radiação incidente (i.e., $ka \ll 1$), a exemplo do que ocorre no limite de pequenas partículas, mas também é preciso que o raio da esfera seja muito menor que o comprimento de onda *no interior* da partícula (i.e., $|m|ka \ll 1$). Portanto, o limite Rayleigh pode ser visto como um caso particular do limite de pequenas partículas. Com isto em mente e usando as expansões 4.1 e 4.2 nas Eqs. 4.5 e 4.6, é possível obter as expressões para os coeficientes de espalhamento a_n e b_n no limite Rayleigh ($ka \ll 1$ e $|m|ka \ll 1$):

$$a_1 = -\frac{2i(ka)^3}{3} \left[\frac{(1-\epsilon)}{(2+\epsilon)} \right], \quad (4.7)$$

$$b_1 = -\frac{2i(ka)^3}{3} \left[\frac{(1-\mu)}{(2+\mu)} \right]. \quad (4.8)$$

Vale mencionar que estes resultados foram obtidos por *Kerker et al.* [59]. Note que no caso não-magnético ($\mu = 1$) o termo b_1 é igual a zero e o primeiro termo não nulo na expansão de b_n , associada aos momentos de multipólos *magnéticos*, é da ordem de $(ka)^5$. Assim, é possível notar que no caso não magnético a intensidade total espalhada no limite Rayleigh é essencialmente devida à radiação de dipolo elétrico: o termo a_1 , associado ao momento de dipolo elétrico, domina o processo de espalhamento. Isto está em claro contraste com o que ocorre no caso do espalhamento magnético ($\mu \neq 1$) onde o termo b_1 é não nulo e da ordem de $(ka)^3$ (Eq. 4.8). Este fato evidencia a contribuição significativa dada pela radiação de dipolo magnético para a intensidade total espalhada no limite Rayleigh quando as esferas espalhadoras são magnéticas.

Uma consequência importante dos fatos discutidos acima está relacionada com o comportamento do fator de assimetria ($\cos \theta$) no limite Rayleigh. O fator de assimetria, até a ordem mais baixa em ka , tem a forma (veja a Eq. 2.67):

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\text{Re}(a_1 b_1^*)}{(|a_1|^2 + |b_1|^2)}. \quad (4.9)$$

A partir da análise da expressão acima é possível notar uma diferença fundamental entre

os processos de espalhamento por partículas magnéticas ($\mu \neq 1$) e não magnéticas ($\mu = 1$) no limite Rayleigh: no caso não magnético $\langle \cos \theta \rangle = 0$, o que implica em um espalhamento *isotrópico* (i.e., não existe nenhuma direção preferencial de espalhamento), ao passo que no caso magnético $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$, o que evidencia seu caráter *anisotrópico*. Isto decorre do fato do termo b_1 ser nulo no caso não magnético ($\mu = 1$) e diferente de zero no caso magnético ($\mu \neq 1$), como pode ser visto pela Eq. 4.8.

Caso Particular do Espalhamento no Limite de Pequenas Partículas: $|\mu| \gg 1$

O tratamento do caso particular do limite de pequenas partículas para grandes valores de $|\mu|$ é interessante não só pelas propriedades não usuais que ele apresenta, como será visto a seguir, mas também pelo fato dele respresentar a situação física em que a esfera espalhadora é feita de um material *ferromagnético*. O tratamento deste caso particular requer o emprego dos limites $ka \ll 1$ e $|m|ka \gg 1$ nos primeiros termos da expansão dos coeficientes de espalhamento a_n e b_n , diferentemente do que foi feito no caso do limite Rayleigh. Desta forma, para se obter expressões para a_n e b_n válidas neste limite, basta aplicar as formas assintóticas das funções de Ricatti-Bessel para $\alpha \gg 1$ [28]:

$$\psi_n(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{n+1}{2}\pi\right), \quad (4.10)$$

$$\psi'_n(\alpha) = -\text{sen}\left(\alpha - \frac{n+1}{2}\pi\right), \quad (4.11)$$

nas Eqs. 4.5 e 4.6, uma vez que estas já dão conta do limite $ka \ll 1$. Procedendo desta forma, obtém-se:

$$a_1 = -\frac{i(ka)^3 p(m, ka) + 2\tilde{m}}{3 p(m, ka) - \tilde{m}}, \quad (4.12)$$

$$b_1 = -\frac{i(ka)^3 \tilde{m}p(m, ka) + 2}{3 \tilde{m}p(m, ka) - 1}, \quad (4.13)$$

onde $p(m, ka) \equiv ka \tan(mka)$. A partir da análise das expressões acima, é possível perceber que, no limite de pequenas partículas para $|\mu| \gg 1$, o termo a_1 também apresenta

uma contribuição magnética, contrariamente ao que ocorre no limite Rayleigh, onde toda a dependência em μ está embutida no termo b_1 .

Além disso, é importante ressaltar outra característica interessante do limite de pequenas partículas para $|\mu| \gg 1$: a presença de *ressonâncias* no fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$. Isto decorre do fato dos coeficientes de espalhamento a_1 e b_1 serem proporcionais à função periódica $\tan(mka)$. Note que como $m = \sqrt{\epsilon\mu}$ tais ressonâncias dependem fortemente do valor da permeabilidade magnética relativa. Finalmente, vale salientar que as ressonâncias estão associadas com a *parte real* do índice de refração m , uma vez que a função $\tan(ix) = i \tanh(x)$ é não periódica. Este ponto será discutido com mais detalhes na próxima seção, onde será feita uma análise numérica do fator de assimetria para espalhadores de tamanho e permeabilidade magnética arbitrários.

4.1.2 Fator de Assimetria: Tratamento Numérico

Com o objetivo de analisar o comportamento do fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ para esferas magnéticas de tamanho arbitrário, a Fig. 4-1 mostra um cálculo numérico de $\langle \cos \theta \rangle$ em função do parâmetro de tamanho ka para três valores diferentes da parte real da permeabilidade magnética relativa μ' . Neste caso, supomos que os espalhadores são constituídos por um material dielétrico (i.e., $\epsilon'' = 0$) e que não apresente perdas histeréticas (i.e., $\mu'' = 0$). O valor da parte real da permissividade elétrica relativa ($\epsilon' = 1.4161$) corresponde à valores típicos utilizados em experimentos com espalhadores não magnéticos [60]. O código numérico, a partir do qual foi gerado este e todos os demais gráficos presentes neste capítulo, foi adaptado da Ref. [61] para dar conta da contribuição magnética.

Para efeito de comparação, o caso usualmente tratado na literatura em que os espalhadores são não magnéticos $\mu' = 1$ (veja Refs. [30][21][26]), também é mostrado na Fig 4-1. Note que o espalhamento por esferas não magnetizadas é caracterizado por ser isotrópico no limite de pequenas partículas, isto é, $\langle \cos \theta \rangle = 0$ para $ka \ll 1$. A anisotropia no espalhamento (i.e., $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$) por esferas não magnéticas só se manifesta de maneira significativa para valores maiores do parâmetro de tamanho, no chamado regime intermediário $ka \sim 1$ e no limite de grandes esferas $ka \gg 1$. Além disso, uma outra

característica marcante do espalhamento por esferas não magnéticas é o surgimento de uma estrutura fina e irregular na função $\langle \cos \theta \rangle$, as ressonâncias de Mie⁴, à medida que o parâmetro de tamanho aumenta, como pode ser visto para valores maiores que $ka \simeq 20$ na curva $\mu' = 1$. Entretanto, esta situação muda drasticamente quando os espalhadores em questão são magnéticos, como pode ser visto pela nas curvas $\mu' = 2$ e $\mu' = 100$ da Fig. 4-1. A análise destas curvas revela três características marcantes do espalhamento por partículas magnéticas e que estão ausentes no caso não magnético:

i) a presença de anisotropia no espalhamento no limite de pequenas partículas, uma vez que, no caso magnético, $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$ mesmo no limite $ka \ll 1$;

ii) a presença de ressonâncias no limite de pequenas partículas que, no caso não magnético, só ocorrem para grandes valores de ka ;

iii) o retroespalhamento preferencial (i.e., $\langle \cos \theta \rangle < 0$) para grandes valores de μ no limite de pequenas partículas, como pode ser visto pela análise da curva $\mu' = 100$.

Como já foi dito, tanto o espalhamento anisotrópico quanto os efeitos de ressonância só se manifestam no caso não magnético para valores grandes do parâmetro de tamanho, em contraste ao que ocorre no caso magnético. Além disso, é importante ressaltar que o fenômeno do retroespalhamento preferencial é raramente encontrado no caso não magnético, onde tipicamente $\langle \cos \theta \rangle \geq 0$, como ilustra a curva $\mu' = 1$ da Fig. 4-1. Vale observar ainda que estes resultados numéricos (sobretudo os enfocados nos pontos *i* e *ii*) estão de acordo com o que foi discutido na subseção 4.1.1 (veja as Eqs 4.12, 4.13 e a discussão subsequente).

Como a maioria das diferenças e contrastes entre os processos de espalhamento por esferas magnéticas e não magnéticas se manifesta de forma mais clara e evidente no limite de pequenas partículas, é útil que se faça uma análise mais detalhada deste caso limite, explorando principalmente a dependência que existe entre o fator de assimetria e

⁴Tal fenômeno é também usualmente chamado de *estrutura de ripple* em teoria de espalhamento. Sua origem está associada com ressonâncias nos coeficientes de espalhamento a_n e b_n , isto é, com as condições que devem ser satisfeitas para que os denominadores de a_n e b_n sejam nulos. Vale destacar ainda que a estrutura de ripple não é encontrada somente em $\langle \cos \theta \rangle$, mas também em outras funções de espalhamento que envolvam os coeficientes a_n e b_n , como por exemplo as seções de choque.

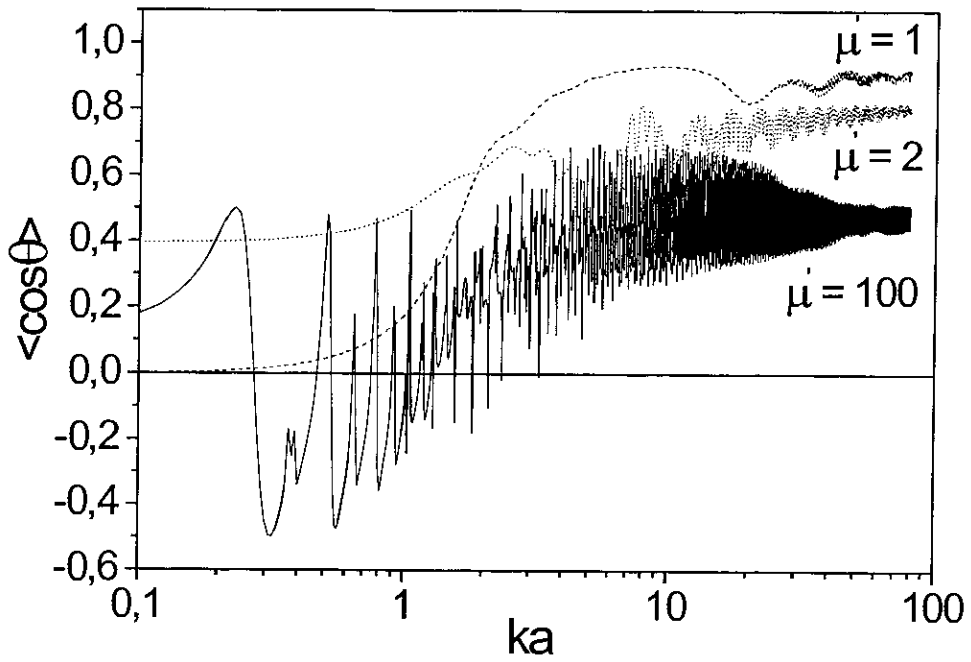


Figura 4-1: O fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ em função do parâmetro de tamanho ka para três valores da parte real da permeabilidade magnética relativa: o caso não magnético $\mu' = 1$ (linha tracejada), $\mu' = 2$ (linha pontilhada) e $\mu' = 100$ (linha cheia). Os outros parâmetros utilizados são: $\epsilon' = 1.4161$, $\epsilon'' = 0$ e $\mu'' = 0$.

a permeabilidade magnética relativa. Com esta finalidade, na Fig. 4-2 $\langle \cos \theta \rangle$ é calculado em função tanto da parte real μ' quanto da parte imaginária μ'' da permeabilidade magnética relativa para $ka \simeq 0.63$, ou seja, um valor do parâmetro de tamanho dentro do domínio de validade do limite de pequenas partículas. Observe a dependência oscilatória que existe entre $\langle \cos \theta \rangle$ e μ' , confirmando a presença dos efeitos de ressonância no limite de pequenas partículas. A origem de tais efeitos está intimamente relacionada com o surgimento de *ondas estacionárias* no interior da esfera magnética: à medida que μ' cresce, o índice de refração relativo m também cresce, fazendo com que as ondas no interior da esfera sejam quase que totalmente refletidas na fronteira entre a esfera e o meio, resultando na formação de ondas estacionárias. É interessante mencionar que este tipo de efeito de ressonância no limite de pequenas partículas já havia sido anteriormente mencionado por van de Hulst (Ref. [21], pág. 159), mas inserido dentro de uma situação física totalmente diferente da discutida aqui. De fato, van de Hulst considera apenas o caso do espalhamento na faixa de microondas por pequenas esferas metálicas *não magnéticas* com altos valores da condutividade elétrica como a única situação onde se pode observar experimentalmente grandes valores de m e, conseqüentemente, os efeitos de ressonância no limite de pequenas partículas.

Se o comportamento ressonante é uma característica marcante da dependência que existe entre o fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ e a parte real da permeabilidade magnética relativa μ' no limite de pequenas partículas, o mesmo não se pode afirmar para o caso da dependência com a parte imaginária μ'' : $\langle \cos \theta \rangle$ é uma função lentamente variável de μ'' , como ilustra a curva tracejada da Fig. 4-2. É importante destacar que este fato mais uma vez corrobora o tratamento analítico feito na subseção 4.1.1, onde foi mostrado que a parte imaginária de μ (e conseqüentemente de m) não tem nenhuma relação com os fenômenos de ressonância em $\langle \cos \theta \rangle$. Além disso, foi calculado numericamente o valor limite $\langle \cos \theta \rangle \simeq -0.3$ quando μ'' tende ao infinito. Este fato significa que uma pequena esfera constituída por um material magnético que apresente grandes perdas histeréticas contribui essencialmente com um valor constante e negativo para o fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$.

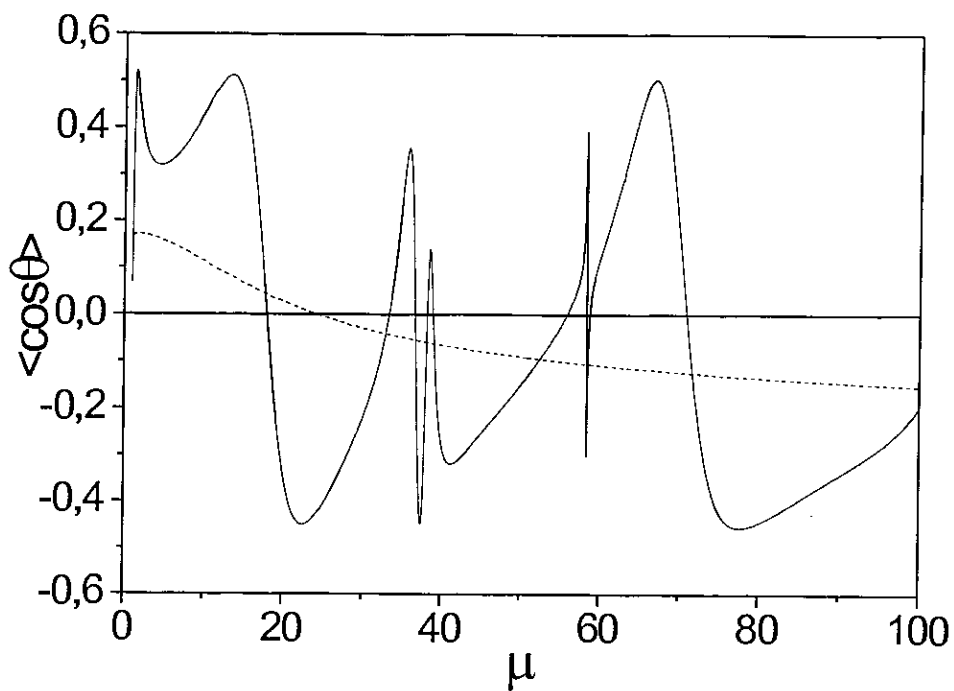


Figura 4-2: O fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ em função tanto da parte real μ' (linha cheia) quanto da parte imaginária μ'' (linha tracejada) de μ no limite de pequenas partículas $ka \simeq 0.63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$.

O fato do fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ poder assumir valores negativos para alguns valores de μ , o que significa uma configuração de retroespalhamento preferencial, é algo bastante incomum no processo de espalhamento de ondas eletromagnéticas por partículas não magnéticas [30][21][26]. Neste caso, o espalhamento é tipicamente simétrico em torno de $\theta = 90^\circ$ (no limite de pequenas partículas $ka \ll 1$) ou então preferencial na direção dianteira (para valores maiores do parâmetro de tamanho, $ka \sim 1$ e $ka \gg 1$). A razão para o surgimento desta configuração de retroespalhamento preferencial no limite de pequenas partículas está relacionada com a significativa contribuição dada pela radiação de dipolo magnético à intensidade total da radiação espalhada por pequenas esferas magnéticas [59], como foi visto na seção 4.1.1. É importante destacar que o fenômeno do retroespalhamento preferencial se manifesta tanto para valores reais de μ quanto para valores imaginários, como pode ser observado na Fig. 4-2. No caso em que os valores da permeabilidade magnética relativa são reais, em particular, é interessante notar que não só $\langle \cos \theta \rangle$ pode assumir valores negativos, mas também pode oscilar entre valores positivos e negativos, como mostra a curva em linha cheia da Fig. 4-2. Isto significa que, através da variação de μ' , *é possível passar de uma configuração de espalhamento preferencial dianteiro para uma configuração de espalhamento preferencial traseiro*. Este fato é de fundamental importância para o que segue pois, quando inserido dentro do contexto do espalhamento múltiplo e do efeito da localização fraca, dá origem a alguns aspectos interessantes e não usuais do perfil angular do cone de retroespalhamento coerente e do parâmetro de localização, como será visto na próxima seção.

Finalmente, na Fig. 4-3 é possível analisar o comportamento de $\langle \cos \theta \rangle$ em função tanto da parte real quanto da parte imaginária de μ para um parâmetro de tamanho $ka \simeq 63$, cem vezes maior do que o considerado anteriormente e portanto dentro do regime de grandes esferas. Note a presença das típicas ressonâncias de Mie em $\langle \cos \theta \rangle$ ou, em outras palavras, da estrutura de *ripple*, como era de se esperar no regime de grandes esferas. Entretanto, neste caso o espalhamento é sempre preferencialmente na direção dianteira pois os valores de $\langle \cos \theta \rangle$ são sempre positivos.

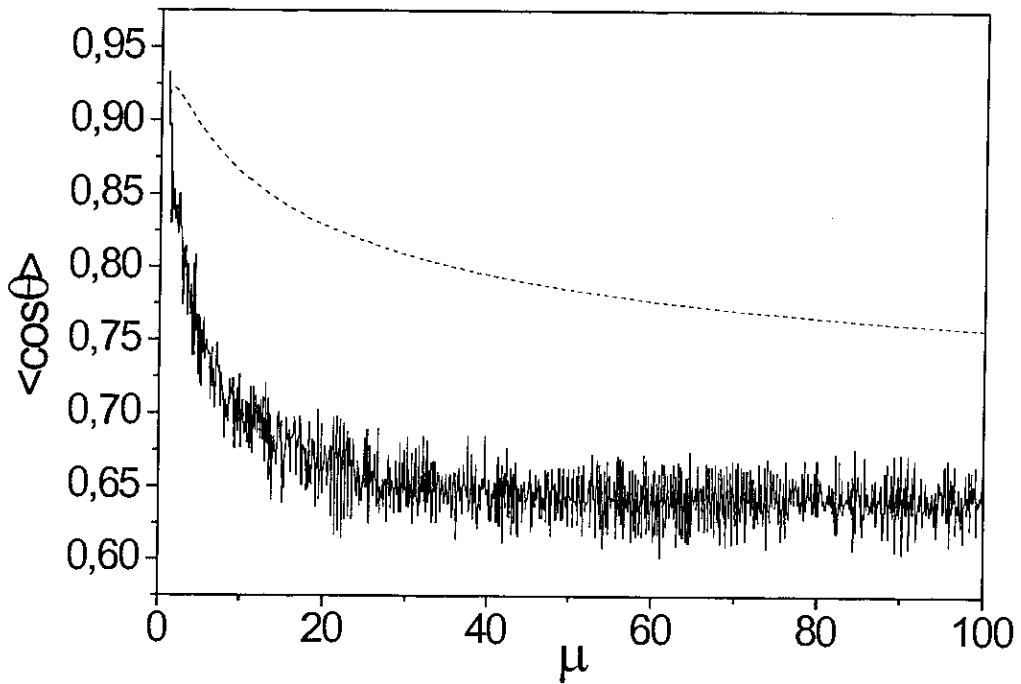


Figura 4-3: O fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ em função tanto da parte real μ' (linha cheia) quanto da parte imaginária μ'' (linha tracejada) de μ no regime de grandes esferas $ka \simeq 63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$.

4.2 Espalhamento Múltiplo: O Parâmetro de Localização

A discussão do espalhamento simples por partículas magnéticas feita na seção anterior, com ênfase na análise da influência da permeabilidade magnética relativa sobre o fator de assimetria, cria o embasamento necessário para se atacar o problema do espalhamento múltiplo e do fenômeno da localização fraca em meios magnéticos. Desta forma, o objetivo principal desta seção é investigar como a presença de espalhadores magnéticos distribuídos aleatoriamente afeta o cone de retroespalhamento coerente e o parâmetro de localização de ondas eletromagnéticas, tanto no regime de pequenas esferas quanto no de grandes esferas. É importante enfatizar ainda que somente os aspectos escalares da propagação das ondas e do efeito de retroespalhamento coerente serão levados em conta nesta seção, a exemplo do que foi feito no capítulo 3.

Na Fig. 4-4 o inverso do parâmetro de localização $(k\ell^*)^{-1}$ é calculado numericamente como função das partes real μ' e imaginária μ'' da permeabilidade magnética relativa para esferas magnéticas e dielétricas e parâmetro de tamanho $ka \simeq 0.63$, ou seja, dentro do regime de pequenas partículas. Os demais parâmetros utilizados ($\epsilon' = 1.4161$, $\lambda = 633nm$ e $\Phi = 0.01$) foram escolhidos por corresponderem à valores típicos empregados em experimentos com partículas não magnéticas[60]. O livre caminho médio de transporte ℓ^* foi calculado a partir da Eq. 3.10, com $\langle \cos \theta \rangle$ e C_{ext} sendo dados pelas Eqs. 2.67 e 2.63, respectivamente. A apresentação do inverso do parâmetro de localização $(k\ell^*)^{-1}$, ao invés do próprio $k\ell^*$, é justificada pelo fato de $(k\ell^*)^{-1}$ ser efetivamente a quantidade medida experimentalmente, uma vez que ela é proporcional à abertura angular do cone de retroespalhamento coerente (veja a Eq. 3.18).

A Fig. 4-4 revela uma conseqüência decisiva da introdução de centros espalhadores magnéticos para o efeito de localização fraca: *o decréscimo global do parâmetro de localização $k\ell^*$* . Isto pode ser visto claramente pela comparação entre os valores de $(k\ell^*)^{-1}$ na presença de espalhadores não magnéticos ($\mu = 1$) e magnéticos ($\mu \neq 1$) na Fig. 4-4. No caso de esferas espalhadoras com valores reais da permeabilidade magnética relativa (i.e.,

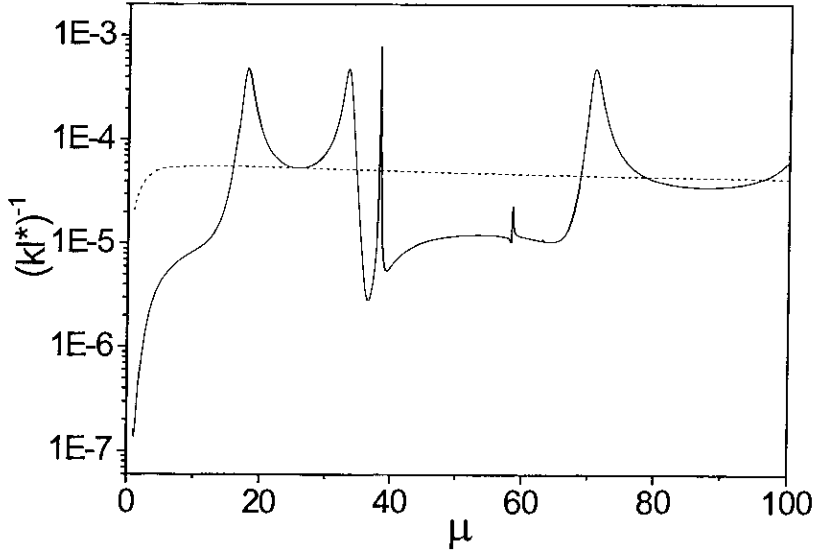


Figura 4-4: O inverso do parâmetro de localização $(kl^*)^{-1}$ em função da parte real μ' (linha cheia) e imaginária μ'' (linha tracejada) da permeabilidade magnética relativa no limite de pequenas partículas $ka \simeq 0.63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$, o comprimento de onda da radiação $\lambda = 633nm$ e a concentração de espalhadores por unidade de volume $\Phi = 0.01$.

$\mu = \mu'$), em particular, tal decréscimo se manifesta de forma ainda mais evidente: o valor do parâmetro de localização kl^* sofre uma redução de aproximadamente três ordens de magnitude quando μ' varia de 1 (caso não magnético) a 100, como mostra a curva em linha cheia da Fig. 4-4. Além disso, é interessante notar as rápidas oscilações em kl^* à medida que μ' varia. No caso de espalhadores com valor da permeabilidade magnética relativa puramente imaginário (i.e., $\mu = \mu''$), por sua vez, tal decréscimo é bem mais suave, com o valor de kl^* permanecendo praticamente constante ao longo de uma larga faixa de valores de μ'' (observe a curva em linha tracejada da Fig. 4-4).

A origem deste decréscimo global no parâmetro de localização está intimamente relacionada com as propriedades não usuais que caracterizam o espalhamento por partículas magnéticas discutidas na seção anterior: valores negativos do fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ induzem uma diminuição no valor do livre caminho médio de transporte ℓ^* (veja a Eq.

3.10) e, conseqüentemente, também no valor do parâmetro de localização kl^* . Este fato possui uma interpretação física simples e permite que se tenha uma visão bastante intuitiva do processo de espalhamento múltiplo e do efeito de localização fraca em meios magnéticos. O fato do espalhamento simples por esferas magnéticas apresentar, para certos valores de μ , o fenômeno do retroespalhamento preferencial faz com que, em uma situação de espalhamento múltiplo, as ondas eletromagnéticas descrevam trajetórias em “zig-zag” dentro o meio, favorecendo a formação de ondas estacionárias. Isto contribui para que as ondas fiquem consideravelmente mais “confinadas”, ou melhor, *localizadas* dentro do meio. Em outras palavras, a presença de espalhadores magnéticos contribui fortemente para induzir uma *maior localização espacial das ondas dentro do meio*, o que resulta em uma redução do parâmetro de localização.

O efeito de decréscimo global no parâmetro de localização kl^* induzido pela presença de centros espalhadores magnéticos está presente também no regime de grandes esferas, como pode ser visto na Fig.4-5 que exhibe $(kl^*)^{-1}$ em função de μ' e μ'' para um valor do parâmetro de tamanho $ka \simeq 63$. Além disso, a exemplo do que ocorre no limite de pequenas partículas, o parâmetro de localização apresenta rápidas oscilações à medida que a parte real de μ varia, em contraste com o que ocorre quando os valores de μ são imaginários puros. Através da análise da Fig.4-5 é possível notar que o valor do parâmetro de localização, além de sofrer um decréscimo global induzido pela presença de espalhadores magnéticos, atinge um *mínimo de saturação* à medida que tanto μ' quanto μ'' crescem. Este fato será bastante explorado na próxima seção, onde serão discutidos alguns aspectos experimentais do problema da localização fraca em meios magnéticos.

4.3 Aspectos Experimentais

Nesta seção será discutida a viabilidade de se estudar experimentalmente o efeito de localização fraca de ondas eletromagnéticas em meios magnéticos desordenados, bem como serão propostos alguns sistemas onde os resultados obtidos até aqui possam ser observados em laboratório.

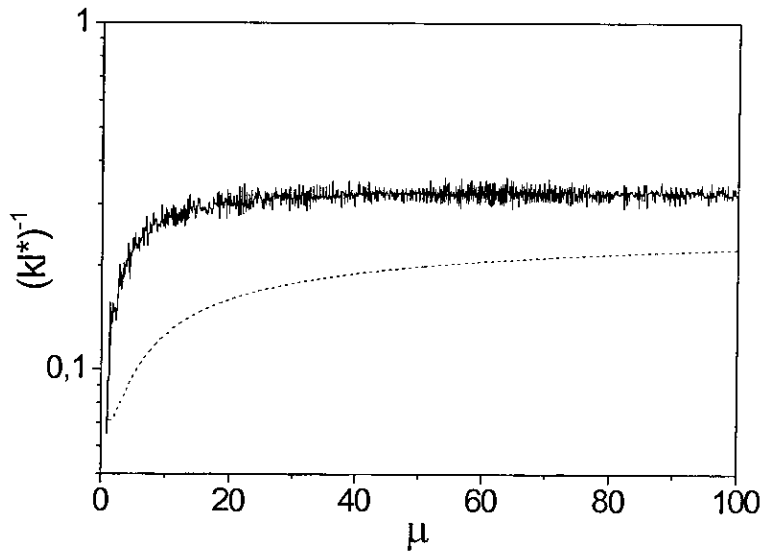


Figura 4-5: O inverso do parâmetro de localização $(kl^*)^{-1}$ em função da parte real μ' (linha cheia) e imaginária μ'' (linha tracejada) da permeabilidade magnética relativa no regime de grandes esferas $ka \simeq 63$. A permissividade elétrica relativa vale $\epsilon = \epsilon' = 1.4161$, o comprimento de onda da radiação $\lambda = 633nm$ e a concentração de espalhadores por unidade de volume $\Phi = 0.01$.

A fim de alcançar este objetivo, o ponto principal a ser elucidado é como controlar de maneira adequada o valor da permeabilidade magnética relativa μ e, por conseguinte, todos os efeitos e propriedades relativas ao processo de espalhamento múltiplo e ao fenômeno da localização fraca discutidos na seção 4.2. A idéia principal é baseada na dependência em temperatura da permeabilidade magnética relativa: como a susceptibilidade magnética χ dos materiais ferromagnéticos (relacionada com μ pela expressão $\mu = 1 + \chi$) segue tipicamente a lei de Curie-Weiss ($\chi \propto (T - T_c)^{-1}$) acima da temperatura crítica T_c [58], é possível ter um controle do valor de μ nesta faixa de temperatura. Isto faz com que se possa variar de um modo preciso o valor do fator de assimetria e do livre caminho médio de transporte, possibilitando que se tenha um *ajuste fino do valor do parâmetro de localização kl^** . O que se observaria em uma experiência de retroespalhamento coerente seria então um alargamento do cone de retroespalhamento à medida que a temperatura é baixada acima de T_c , o que corresponde ao decréscimo global do parâmetro de localização induzido pelo aumento dos valores de μ .

À luz do fenômeno da localização de ondas eletromagnéticas em sistemas desordenados, a idéia de controlar o valor do parâmetro de localização com a temperatura é extremamente interessante do ponto de vista experimental, uma vez que ela possibilita uma investigação alternativa do efeito de localização de Anderson ou “localização forte”. Nos experimentos de localização de ondas eletromagnéticas realizados até agora [18], onde foram utilizados espalhadores não magnéticos, o parâmetro de localização era alterado através da variação do diâmetro médio das partículas. Alternativamente, a utilização de espalhadores magnéticos em experimentos que visem observar a localização de Anderson eletromagnética oferece a vantagem de proporcionar um controle preciso do valor do parâmetro de localização kl^* através da variação da temperatura. Este fato, aliado ao decréscimo global no valor de kl^* induzido pela presença de espalhadores magnéticos discutido anteriormente, torna possível que se alcance o limiar da localização de Anderson $kl^* \simeq 1$ (veja a subseção 3.3.1) mais facilmente e utilizando uma única amostra.

Ainda dentro desta discussão acerca de uma investigação alternativa do fenômeno da localização de Anderson de ondas eletromagnéticas utilizando espalhadores magnetizados,

é importante destacar um aspecto importante que diz respeito ao regime de grandes esferas em particular. Como já foi dito, o valor do parâmetro de localização atinge um valor mínimo de saturação para grandes valores de μ' e μ'' no regime de grandes esferas (veja a Fig. 4-5). Assim, considerando que a susceptibilidade χ dos espalhadores ferromagnéticos segue a lei de Curie-Weiss, é possível assegurar que *o parâmetro de localização será o menor possível quando a temperatura se aproximar da temperatura crítica T_c , uma vez que neste ponto tanto χ quanto μ divergem.*

É importante destacar que o controle dos valores de μ , e conseqüentemente de kl^* , pode ser feito não só através da variação da temperatura, mas também através da aplicação de um campo magnético externo dc H_{ext} [62][58]. De fato, as chamadas ferritas “moles” (de baixa coercividade) apresentam altos valores da permeabilidade magnética para freqüências na faixa de microondas geralmente abaixo de 100 MHz e com poucas perdas [63]. Para freqüências maiores, entretanto, o valor da permeabilidade cai substancialmente e as perdas se tornam significativas. Isto ocorre pois a freqüência abaixo da qual a maioria das ferritas apresenta altos valores da permeabilidade e baixas perdas apresenta tipicamente uma dependência inversa com permeabilidade à baixas freqüências [63]. Nas classes $K1$ e $K12$ de ferritas de níquel-zinco, por exemplo, os valores de μ à baixas freqüências são de 80 e 20, respectivamente. Entretanto, tais valores sofrem um decréscimo apreciável acima de 20 e 100 MHz, respectivamente [63].

Desta forma, as ferritas podem ser empregadas em experimentos que visem investigar o efeito de retroespalhamento coerente em meios magnéticos desordenados, uma vez que os valores da permeabilidade magnética podem ser controlados precisamente através da variação de temperatura ou através da aplicação de um campo magnético externo, desde que a radiação incidente esteja dentro da faixa de freqüências discutidas acima. Para freqüências ópticas, entretanto, há uma séria restrição à utilização das ferritas: o fato de μ valer aproximadamente 1 para a maioria dos materiais magnéticos [58]. Isto ocorre porque o campo magnético associado à radiação incidente sobre os espalhadores não é capaz de induzir valores apreciáveis de magnetização na faixa óptica: os tempos de relaxação dos processos para e ferromagnéticos são tipicamente muito maiores que

os períodos ópticos, o que faz com que a susceptibilidade seja praticamente nula e a permeabilidade aproximadamente unitária [64]. Assim, a verificação experimental dos vários efeitos dependentes de μ discutidos nas seções anteriores torna-se bastante difícil na faixa óptica.

Finalmente, é interessante mencionar que a possibilidade de se controlar o valor de $k\ell^*$ pode ser aplicado também em sistemas que apresentem o chamado espalhamento recorrente, ou seja, sistemas em que as ondas são espalhadas mais de uma vez pelo mesmo centro espalhador. Nestes sistemas, Wiersma *et al.* [65] mostraram que o fator de aumento do cone de retroespalhamento coerente não é exatamente 2, mas depende do valor de $k\ell^*$. Assim, a utilização de partículas magnéticas em sistemas que apresentem espalhamento recorrente possibilita um ajuste fino também do fator de aumento do cone de retroespalhamento, através da variação da temperatura ou da aplicação de um campo magnético externo.

Capítulo 5

Velocidade de Transporte de Energia Eletromagnética em Meios Magnéticos Desordenados

Como já foi dito, apesar de ser possível estabelecer uma série de analogias e paralelos entre ondas eletromagnéticas e elétrons em *situações estáticas* (i.e., independentes do tempo), como por exemplo o fenômeno da localização fraca discutido nos dois últimos capítulos, as *situações dinâmicas* revelam diferenças fundamentais entre eles. De fato, a tentativa de aplicar diretamente conceitos da teoria de transporte eletrônico no estado sólido em sistemas que envolvem propriedades dinâmicas da propagação de ondas eletromagnéticas em meios desordenados levou à interpretação errada de alguns experimentos e gerou uma série de controvérsias no início dos anos 90[66][67]. Até esta época, acreditava-se que a velocidade com que a energia eletromagnética se propagava em tais meios era exatamente igual à velocidade de fase v_p , a exemplo do que ocorre em sistemas eletrônicos. Entretanto, esta idéia mostra-se equivocada ao considerarmos uma diferença fundamental entre os processos de *espalhamento simples* de ondas eletromagnéticas e de elétrons: no espalhamento de Mie (caso eletromagnético) as ondas ficam “confinadas” durante um determinado período de tempo dentro do centro espalhador (chamado de *dwell time* τ_d), o que não ocorre no caso do espalhamento elétron-impureza em matéria condensada.

Desta forma, é preciso levar em conta este “tempo de atraso” τ_d , durante o qual as ondas eletromagnéticas ficam armazenadas dentro dos centros espalhadores de Mie, no cálculo da velocidade de transporte de energia v_E .

A derivação de uma expressão apropriada para v_E , incluindo uma correção em v_p proporcional à τ_d , foi obtida pela primeira vez em 1991 pelo grupo de Ad Lagendijk em Amsterdã [68][55]. O objetivo de tal trabalho era entender uma persistente discrepância entre diferentes experimentos realizados em Amsterdã que visavam observar o fenômeno da localização de Anderson da luz, ou “localização forte”. Para que a localização de Anderson da luz seja observada experimentalmente é altamente desejável que se ajuste o parâmetro de tamanho ka nas posições de ressonância da seção de choque de espalhamento o que, aliado a uma escolha adequada do valor da concentração de espalhadores, favorece a diminuição do livre caminho médio de transporte ℓ^* (veja a Eq. 3.10). Levando-se em conta estas considerações, foram observados pequenos valores da constante de difusão [68] em experimentos que envolviam o espalhamento múltiplo da luz de comprimento de onda $\lambda = 633nm$ por partículas nanométricas de TiO_2 e índice de refração $m = 2.73$. A princípio, tais valores poderiam indicar a proximidade do ponto de limiar da localização de Anderson. Entretanto, após uma detalhada comparação entre experimentos resolvidos no tempo e experimentos estáticos¹, ficou comprovado que os baixos valores de D observados eram essencialmente devidos à baixos valores de v_E e não de ℓ^* (o que estaria verdadeiramente associado com o fenômeno da localização de Anderson). O desenvolvimento de uma nova teoria para calcular a velocidade de transporte de energia v_E veio pois explicar estes resultados e refutar a observação da localização de Anderson em tais experimentos. O resultado principal da teoria desenvolvida pelo grupo de Amsterdã é associar as quedas nos valores de v_E às ressonâncias nas seções de choque dos espalhadores de Mie. De fato, o *dwell time* aumenta apreciavelmente próximo à uma ressonância, o que causa um “atraso” adicional na propagação das ondas

¹Os experimentos “dinâmicos” eram essencialmente medidas da constante de difusão D resolvidas no tempo, ao passo que os experimentos “estáticos” consistiam na determinação de ℓ^* através de medidas do cone de retroespalhamento coerente.

eletromagnéticas através do meio e, conseqüentemente, quedas nos valores de v_E .

Este capítulo será dedicado à aplicação da teoria desenvolvida por van Albada *et al.* [68][55] para o caso de centros espalhadores *magnéticos*. Assim, na seção 5.1 será feita uma breve discussão da teoria de van Albada *et al.*, enfatizando apenas as principais hipóteses, conceitos físicos e aproximações utilizadas na derivação da expressão microscópica geral da velocidade de transporte de energia v_E para ondas clássicas. A partir desta expressão geral, na subseção 5.1.2 será tratado o caso particular de interesse dos centros espalhadores de Mie dielétricos. Além disso, na subseção 5.1.1 será feita uma comparação da teoria de van Albada *et al.* com o problema da velocidade de transporte em sistemas eletrônicos em metais desordenados. Serão enfatizados os limites e as condições necessárias para que uma lei de conservação fundamental em sistemas eletrônicos, a *identidade de Ward-Takahashi*, seja aplicável também aos sistemas de ondas clássicas, bem como suas implicações no problema da velocidade de transporte de energia. Finalmente, na seção 5.2 será feito um cálculo analítico de v_E para o caso de *espalhadores de Mie ferromagnéticos* no limite de pequenas partículas, bem como da constante de difusão $D = v_E \ell^*/3$. Serão discutidas as principais diferenças em relação ao caso não magnético já tratado na literatura, assim como algumas possíveis aplicações tecnológicas dos resultados obtidos.

5.1 Derivação Microscópica da Velocidade de Transporte de Energia

Nesta seção serão apresentadas as linhas gerais da derivação, feita pelo grupo de Amsterdã, da expressão para a velocidade de transporte de energia v_E em termos das propriedades microscópicas (matriz T de espalhamento) dos centros espalhadores. A derivação apresentada aqui segue basicamente a que foi feita nas Refs. [68] e [55]. Uma derivação bastante completa e detalhada da expressão para v_E pode ser encontrada nas Refs. [54] e [4].

O ponto de partida é considerar a equação escalar de onda:

$$\left[\epsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (5.1)$$

à qual os campos dentro do meio desordenado, representados por $\Psi(\mathbf{x}, t)$, devem satisfazer. $\epsilon(\mathbf{x}) = 1/c^2$ representa a constante dielétrica. O tratamento feito aqui será restrito aos *aspectos escalares* da propagação das ondas, uma vez que isto é suficiente para que se tenha uma noção da física envolvida na derivação de v_E . A inclusão da polarização apenas traria complicações adicionais.

É possível mostrar que a função de correlação escalar $\langle \Psi(\mathbf{x}_1, t_1) \Psi^*(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle$, após a realização da média sobre todas as configurações possíveis dos centros espalhadores (*média sobre a desordem*), satisfaz à seguinte equação [69],[70]:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{2E\omega}{c_0^2} + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \Sigma(E^+, \mathbf{p}^+) - \Sigma(E^-, \mathbf{p}^-) \right] \Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega | E) \\ & = \Delta G(\mathbf{q}, \omega | E, \mathbf{p}) \left[1 + \sum_{\mathbf{p}'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega | E) \Phi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega | E) \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aqui $\Phi_{\mathbf{p}}$ representa a quantidade $\langle \Psi(\mathbf{x}_1, t_1) \Psi^*(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle$ após a realização de uma transformada de Laplace com respeito ao tempo e de uma transformada de Fourier com respeito à posição. As oscilações internas do pacote de onda são descritas pela frequência E (oscilações temporais) e pelo vetor de onda \mathbf{p} (oscilações espaciais). As oscilações da envoltória do pacote de onda, por sua vez, estão associadas com a frequência ω (oscilações temporais) e com o vetor de onda \mathbf{q} (oscilações espaciais)². Além disso, Σ é o operador de massa, U é o chamado *vértice irredutível*, ΔG é a diferença entre as funções de Green retardada e avançada (i.e., $\Delta G = G(E^+, \mathbf{p}^+) - G(E^-, \mathbf{p}^-)$), $E^\pm \equiv E \pm i\epsilon \pm \frac{1}{2}\omega$ e $\mathbf{p}^\pm \equiv \mathbf{p} \pm \frac{1}{2}\mathbf{q}$. A velocidade de propagação no vácuo é denotada por c_0 .

A interpretação física da Eq. 5.2 é a seguinte. O termo em E do lado esquerdo vai atuar como uma derivada temporal nas coordenadas espaciais [54][4]. O segundo termo

²Na Eq. 5.2 foi tomado $\hbar = 1$.

do lado esquerdo, $2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$, representa um típico termo de corrente hidrodinâmica, contendo o operador gradiente na representação de coordenadas. É possível mostrar[4] que o terceiro termo, $\Delta\Sigma \equiv \Sigma(E^+, \mathbf{p}^+) - \Sigma(E^-, \mathbf{p}^-)$, está associado com a perda de energia do feixe incidente sobre o meio desordenado (termo de extinção). O segundo termo do lado direito é de fundamental importância para a compreensão das propriedades de transporte do sistema. Ele representa a intensidade da radiação espalhada por todas as direções \mathbf{p}' na direção \mathbf{p} . O objeto $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega | E)$ pode ser entendido como a peça fundamental (“*building block*”) do espalhamento múltiplo: ele contém toda a informação microscópica acerca dos processos de espalhamento simples. O termo $\Delta\Sigma$ é o análogo para os processos de perda ou extinção. Finalmente, o primeiro termo do lado direito representa o termo de fonte. Portanto, é possível dar a seguinte interpretação física para a Eq. 5.2:

$$[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + \text{perdas}] \Phi_{\mathbf{p}} = \text{fonte} + \text{espalhamento}. \quad (5.3)$$

A equação acima assemelha-se bastante com a equação de transporte para uma partícula de velocidade \mathbf{v} e momento \mathbf{p} . Por este motivo, a Eq. 5.2 é conhecida como *equação de Boltzmann generalizada*, a mais importante equação da teoria de transporte. Generalizada porque todas as correlações microscópicas no tempo e no espaço já estão incluídas.

Como toda e qualquer equação microscópica exata, a Eq. 5.2 não pode ser resolvida exatamente. Assim, sua resolução requer a utilização de algumas aproximações. O cálculo da constante de difusão será feito no chamado *limite de Kubo*, isto é, $\mathbf{q}, \omega \rightarrow 0$. No contexto da propagação de ondas clássicas tal limite corresponde à “*Aproximação do Envelope Lentamente Variável*” (AELV) [71]: as variáveis que descrevem as vibrações internas do pacote de onda (E e \mathbf{p}) oscilam muito mais rapidamente do que as que descrevem as vibrações da envoltória (\mathbf{q} e ω). Além disso, a Eq. 5.2 será resolvida em *primeira ordem* na densidade n de espalhadores (desordem fraca), ou seja, no chamado *limite de Boltzmann*. Neste limite, as quantidades Σ e U são dadas aproximadamente

por:

$$\Sigma(E^\pm, \mathbf{p}) \simeq nt_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(E^\pm), \quad (5.4)$$

$$U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega | E) \simeq nt_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}(E^+)t_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'-}(E^-), \quad (5.5)$$

onde t é a matriz T geral que descreve as propriedades de cada evento de espalhamento [72][46]. Obviamente, a matriz T depende do tipo de centro espalhador envolvido. A meta principal é obter uma expressão geral para a velocidade de transporte, ou seja, para qualquer tipo de espalhador e, em seguida, tratar o caso particular de interesse: os espalhadores de Mie (seção 5.1.2).

O próximo passo é fazer uma expansão do operador de massa e do vértice irreduzível em termos de ω e considerar apenas a primeira ordem [55]. Em seguida, utilizando a velocidade de fase v_p dada por [73]:

$$\frac{c_0}{v_p} = \sqrt{1 - \frac{n \operatorname{Re} t_{pp}(p)}{p^2}}, \quad (5.6)$$

e definindo a quantidade $\tilde{\Phi}_{\hat{\mathbf{p}}}$:

$$\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega | E) \equiv \delta(E^2/v_p^2 - p^2)\tilde{\Phi}_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{q}, \omega | E), \quad (5.7)$$

identifica-se a densidade de energia $\Xi(\mathbf{q}, \omega)$ e a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)$ de acordo com:

$$\Xi(\mathbf{q}, \omega) \equiv \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{4\pi} \tilde{\Phi}_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{q}, \omega | E), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \equiv v_E \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{4\pi} \hat{\mathbf{p}} \tilde{\Phi}_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{q}, \omega | E). \quad (5.9)$$

A grandeza v_E , que representa efetivamente a velocidade com que a energia é transportada através do meio, pode ser agora determinada impondo que Ξ e \mathbf{J} obedeçam à equação de continuidade. Assim, após somar ambos os lados da Eq. 5.2 sobre todos os

ângulos $\hat{\mathbf{p}}$, obtém-se:

$$i\omega\Xi(\mathbf{q}, \omega) - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) = \text{const}, \quad (5.10)$$

desde que seja feita a seguinte identificação:

$$v_E = \frac{c_0^2}{v_p} \left[1 - n \frac{d}{dp^2} \text{Re } t_{pp}(p) + n \left\langle I(\Omega) \frac{d\phi(\Omega)}{dp} \right\rangle_{\Omega} \right]^{-1}. \quad (5.11)$$

Aqui, $I(\Omega)$ e $\phi(\Omega)$ denotam a intensidade espalhada e o deslocamento de fase do processo de espalhamento na direção Ω .

Vale salientar que, na ausência do terceiro termo no denominador (chamado de *termo de colisão*) da Eq. 5.11, a velocidade de transporte seria exatamente igual à *velocidade de grupo*, definida por $v_g \equiv dE(p)/dp$ [55][54], e que, em sistemas eletrônicos, está associada com a massa efetiva dos elétrons. Entretanto, é conhecido que a velocidade de grupo perde seu significado físico nas proximidades de uma ressonância de Mie [74][75], podendo até mesmo assumir valores negativos. Assim, a não consideração do efeito das colisões torna a definição de uma velocidade de transporte de energia altamente problemática perto de uma ressonância. A fim de contornar este problema, os livros-texto geralmente afirmam que a discussão das propriedades de transporte se torna simplesmente irrelevante nas regiões de extinção ressonante. Na verdade, o que ocorre é que o termo de colisão compensa largamente este comportamento anômalo da velocidade de grupo [54].

Finalmente, tomando o segundo momento da equação de transporte (Eq. 5.2), é possível mostrar [76] que a velocidade dada pela equação 5.11 é a quantidade que efetivamente entra na expressão da constante de difusão $D = v_E \ell^*/3$. De fato, esta relação serve também para definir o livre caminho médio de transporte ℓ^* , uma vez obtidas a constante de difusão e a velocidade de transporte [77].

5.1.1 Comparação com o Caso Eletrônico

Neste ponto da discussão é bastante interessante fazer uma comparação dos resultados obtidos até agora (Eq. 5.11) com o caso eletrônico, ou seja, com os processos de transporte eletrônico e espalhamento elétron-impureza que ocorrem em matéria condensada. No caso do espalhamento elétron-impureza, o segundo e o terceiro termo do lado direito da Eq. 5.11 se cancelam em virtude da *identidade de Ward-Takahashi* [76][78][79]:

$$\Sigma(E^+, \mathbf{p}^+) - \Sigma(E^-, \mathbf{p}^-) = \sum_{\mathbf{p}'} \Delta G(\mathbf{q}, \omega | E, \mathbf{p}) U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega | E). \quad (5.12)$$

O cancelamento destes termos de correção na Eq. 5.11 faz com que a velocidade de transporte seja igual a c_0^2/v_p , que nada mais é do que o análogo da velocidade Fermi $\hbar k_F/m_e$ em teoria de transporte eletrônico. Uma consequência fundamental deste fato em sistemas eletrônicos é a ausência do chamado fator de aumento de massa (“mass-enhancement factor”) em alguns coeficientes de transporte de vital importância, como por exemplo a condutividade DC [80].

Entretanto, é importante destacar que a identidade de Ward-Takahashi é válida somente para sistemas não interagentes e para potenciais de espalhamento elétron-impureza locais e independentes da energia [79]. Assim sendo, os fatores de aumento de massa passam a ser relevantes na equação de continuidade à medida que as interações entre as partículas se tornam importantes. Como exemplos de sistemas em que isto ocorre, podemos citar os líquidos de Fermi [81][82] e os gases moderadamente densos [83][84].

Explorando a analogia elétrons-ondas clássicas, é natural fazer a seguinte pergunta: qual o resquício da identidade de Ward-Takahashi no caso do espalhamento de ondas clássicas? Em outras palavras, sob que condições tal identidade se aplica também para o caso clássico? A partir da comparação da equação de Schrödinger com a equação clássica de onda (Eq. 5.1) e após a aplicação da AELP, é possível identificar o “potencial eletromagnético” com o objeto $V_{EM}(\mathbf{x}, E_{EM}) = [1 - \epsilon(\mathbf{x})]E_{EM}$ (Eq. 1.12), de caráter

local, mas dependente da energia³. É fácil verificar que tal potencial *não* satisfaz uma condição essencial para que a identidade de Ward-Takahashi 5.12 seja válida, a saber: $V(E + \omega) = V(E - \omega)$ [54]. Esta condição só será satisfeita se $\omega = 0$, ou seja, somente se apenas as *propriedades estacionárias* da propagação das ondas forem tratadas, o que concorda com a discussão feita no capítulo 1. Portanto, só será possível mapear a equação escalar de onda na equação de Schrödinger se e somente se a condição $\omega = 0$ for satisfeita. Isto implica que a identidade de Ward-Takahashi deve valer também para ondas eletromagnéticas apenas quando $\omega = 0$. A aplicação da identidade de Ward-Takahashi para ondas clássicas em situações dinâmicas, como por exemplo o cálculo da velocidade de transporte de energia, é pois inadequada e leva a resultados errados. Até que esta conclusão se tornasse um consenso entre pesquisadores da área, a questão da aplicabilidade da identidade de Ward-Takahashi em sistemas clássicos e suas implicações no problema da velocidade de transporte foi objeto de algumas controvérsias no início dos anos 90 [66][67].

5.1.2 Aplicação para o Caso dos Espalhadores de Mie

A partir da expressão geral 5.11 para a velocidade de transporte de energia, válida para qualquer onda clássica escalar, é possível tratar o caso particular de interesse nesta tese: os espalhadores de Mie. Para isto, é preciso conhecer a forma exata da matriz T para tais espalhadores. No caso de espalhadores de Mie dielétricos (i.e., índice de refração m real), a matriz T é dada por [21]:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{pp}'}(E = pc_0) = -\frac{4\pi i}{p} \begin{pmatrix} S_2^*(\theta) \cos \varphi & 0 \\ 0 & S_1^*(\theta) \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

onde $S_1(\theta)$ e $S_2(\theta)$ são as amplitudes de espalhamento de Mie (Eqs. 2.53 e 2.54, respectivamente). Inserindo a Eq. 5.13 na expressão para v_E (Eq. 5.11) e utilizando as relações

³Veja o capítulo 1.

de ortogonalidade para as funções π e τ (Eqs. 2.55 e 2.56) [72]

$$\langle \pi_l \pi_n + \tau_l \tau_n \rangle = \delta_{nl} \frac{l^2(l+1)^2}{2l+1}, \quad \langle \pi_l \tau_n + \tau_l \pi_n \rangle = 0, \quad (5.14)$$

obtém-se [55][54][4]:

$$\frac{v_E}{c_0} = \frac{c_0}{v_p} \left[1 + \frac{3f}{4x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{d\alpha_n}{dx} + \frac{d\beta_n}{dx} \right) - \frac{1}{2} f C(x) \right]^{-1}, \quad (5.15)$$

onde $x = ka$ é o parâmetro de tamanho e α_n e β_n representam os deslocamentos de fase de van de Hulst para cada uma das ondas parciais. α_n e β_n são definidos em função dos coeficientes de espalhamento de Mie a_n e b_n de acordo com [21]:

$$a_n \equiv \frac{1}{2} (1 - e^{-2i\alpha_n(x)}), \quad (5.16)$$

$$b_n \equiv \frac{1}{2} (1 - e^{-2i\beta_n(x)}). \quad (5.17)$$

Na Eq. 5.15 foram introduzidos o *packing fraction* f , relacionado com a densidade de espalhadores n de acordo com $f = \frac{4}{3}\pi n a^3$ (onde a é o raio dos espalhadores), e parâmetro

$$C(x) \equiv \frac{3}{2x^3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [\text{Im } a_n + \text{Im } b_n]. \quad (5.18)$$

Em termos do parâmetro $C(x)$, a velocidade de fase v_p é dada por $v_p = c_0/\sqrt{1+fC}$.

A figura 5-1 mostra um cálculo numérico, feito por van Tiggelen *et al.* [68][55][54][4], da velocidade de transporte v_E (Eq. 5.15), da velocidade de fase v_p e da velocidade de grupo v_g para espalhadores de Mie *não magnéticos*, dielétricos e de índice de refração (real) $m = 2.73$ (TiO_2 no vácuo). O valor do *packing fraction* é $f = 0.36$. Estes parâmetros correspondem aos experimentos realizados pelo grupo de Amsterdã [68]. Note que, para determinados valores do parâmetro de tamanho x , a velocidade de transporte *cai abruptamente* e difere consideravelmente da velocidade de fase. Estes valores de x correspondem *exatamente* aos pontos onde ocorrem as ressonâncias na seção de choque

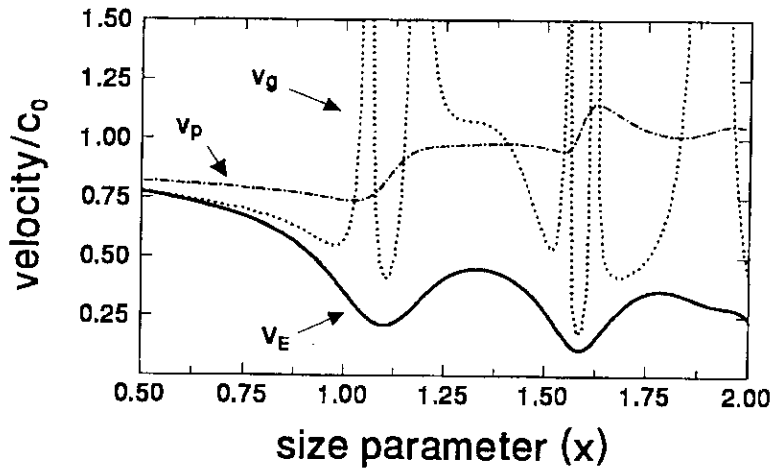


Figura 5-1: Velocidade de fase v_p (linha tracejada), velocidade de grupo v_g (linha pontilhada; para maior clareza, é exibido o valor absoluto) e velocidade de transporte v_E (linha cheia) em função do parâmetro de tamanho x para luz que se propaga em um meio desordenado constituído por espalhadores de Mie dielétricos de índice de refração $m = 2.73$. O valor do *packing fraction* é $f = 0.36$ (Gráfico extraído da Ref. [4]).

de cada centro espalhador [55][54], o que mostra que as quedas abruptas em v_E estão intimamente relacionadas com as ressonâncias do processo de espalhamento simples. De fato, a seção de choque de cada espalhador aumenta consideravelmente nas proximidades de uma ressonância até chegar a um ponto onde ela se torna comparável às dimensões do comprimento de onda da radiação incidente, o que caracteriza a situação de ressonância. Isto faz com que a radiação fique “confinada” dentro de cada centro espalhador por um maior período de tempo (*dwell time*), resultando em um atraso adicional na propagação das ondas através do meio e em uma consequente redução no valor da velocidade de transporte.

À luz desta interpretação física para as quedas em v_E , é razoável esperar que, suficientemente longe dos pontos de ressonância, todas as velocidades em questão (v_E , v_p e v_g) coincidam. De fato, para o caso de centros espalhadores não magnéticos, isto ocorre

exatamente no limite de pequenas partículas (limite Rayleigh) $x \rightarrow 0$ [55]:

$$v_E = v_p = v_g = c_0 \left(1 + 3f \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^{-1/2}. \quad (5.19)$$

Finalmente, é importante destacar que é possível reproduzir bastante bem os resultados da Eq. 5.15 através de um modelo heurístico bastante simples [55][54], baseado na diferença entre as densidades de energia dentro e fora dos centros espalhadores. De acordo com este modelo, é possível estimar a velocidade de transporte como sendo

$$v_E \approx \frac{c_0}{1 + f(W - 1)}, \quad (5.20)$$

onde W é a densidade de energia armazenada dentro de cada centro espalhador relativa à do meio. Em uma ressonância, tem-se $W \gg 1$ [85], o que evidencia mais uma vez que as quedas em v_E são essencialmente devidas às ressonâncias do processo de espalhamento simples. Além disso, cabe mencionar que, quando aplicada ao caso de espalhadores pontuais, a Eq. 5.20 coincide com as expressões obtidas por Brillouin [74] e Loudon [75], que derivaram uma expressão para o que chamaram de “velocidade de energia” no caso em que os espalhadores são osciladores harmônicos e átomos de dois níveis, respectivamente.

5.2 Velocidade de Transporte de Energia em Meios Magnéticos Desordenados⁴

A motivação de se aplicar a teoria de van Albada *et al.* discutida na seção anterior para o caso de espalhadores magnéticos se baseia no fato de que o espalhamento simples por partículas magnéticas apresenta ressonâncias mesmo no limite de pequenas partículas⁵,

⁴O conteúdo desta seção encontra-se essencialmente no artigo: “Vanishing of Energy Transport Velocity and Diffusion Constant of Electromagnetic Waves in Disordered Magnetic Media”, submetido para publicação no *Phys. Rev. Lett.* (Ref. [2]).

⁵Veja o capítulo 4.

contrariamente ao que ocorre com o espalhamento por partículas não magnéticas. À luz da teoria de van Albada *et al.*, é razoável supor que este fato implique em quedas nos valores de v_E mesmo no limite de pequenas partículas $ka \ll 1$. É importante destacar que, no caso não magnético, tais quedas só ocorrem no regime intermediário ($ka \sim 1$) e no regime de grandes partículas ($ka \gg 1$), como pode ser visto pela análise da figura 5-1. Isto ocorre porque as ressonâncias no processo de espalhamento simples por partículas não magnéticas estão ausentes no limite de pequenas partículas ($ka \ll 1$, limite Rayleigh), só vindo a se manifestar para $ka \sim 1$ e $ka \gg 1$.

No caso de espalhadores *ferromagnéticos* ($|\mu| \gg 1$) no limite $ka \ll 1$, em particular, é de se esperar que as quedas no valor de v_E se manifestem de maneira ainda mais evidente, uma vez que, neste caso, os efeitos de ressonância são muito mais intensos do que no caso de um material magnético com um valor baixo da permeabilidade magnética (veja, por exemplo, seção 4.1.2, Fig. 4-1). Neste sentido, é também interessante considerar espalhadores dielétricos (i.e., $\epsilon'' = 0$) e as perdas histeréticas desprezíveis (i.e., $\mu'' \ll \mu'$), fazendo com que o índice de refração relativo m seja real. Isto porque, como discutido no capítulo anterior, é a parte real de m a responsável pelo surgimento de ressonâncias no processo de espalhamento simples de ondas eletromagnéticas por pequenas partículas ferromagnéticas⁶.

De fato, a influência decisiva da presença de espalhadores ferromagnéticos no problema da velocidade de transporte de energia eletromagnética através de meios desordenados pode ser verificada através da análise da Fig. 5-2, onde v_E é calculada em função do parâmetro de tamanho ka no limite de pequenas partículas ($0 \leq ka \leq 0.1$) para três valores da permeabilidade magnética relativa ($\mu = 1, 10^3, 10^5$). A velocidade de transporte v_E foi calculada a partir da expressão derivada por van Albada *et al.* (Eq. 5.15) e das expressões para os primeiros termos da série dos coeficientes de Mie: Eqs. 4.12 e 4.13 no caso de espalhadores ferromagnéticos ($\mu = 10^3$ e $\mu = 10^5$) e as expressões bem conhecidas para a_1 e b_1 no limite Rayleigh (caso não magnético, $\mu = 1$) [30] [21] [26]. O valor do *packing fraction* é $f = 0.36$, o mesmo utilizado em experimentos com espalhadores não

⁶Veja o tratamento analítico do espalhamento de Mie para $ka \ll 1$ e $\mu \gg 1$ feito na seção 4.1.1

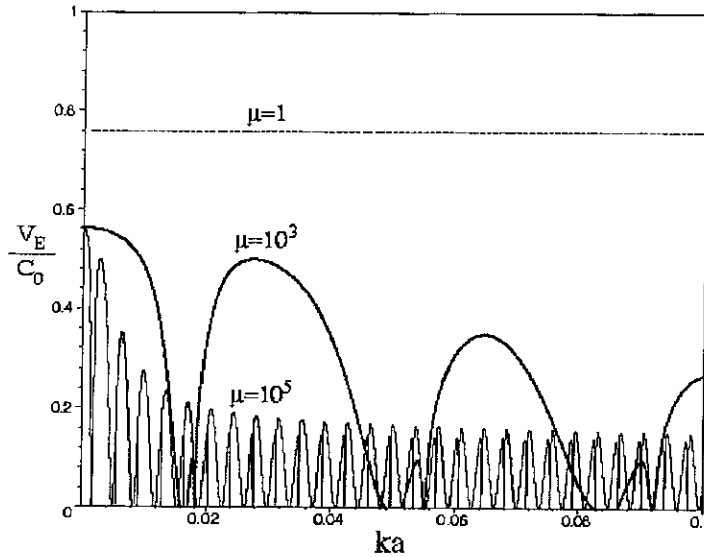


Figura 5-2: Velocidade de transporte de energia v_E (normalizada pela velocidade de propagação no vácuo c_0) em função do parâmetro de tamanho ka para três valores da permeabilidade magnética relativa: $\mu = 1$ (linha tracejada), $\mu = 10^3$ (linha cheia em negrito) e $\mu = 10^5$ (linha cheia). O packing fraction vale $f = 0.36$ e a permissividade elétrica relativa $\epsilon = 7.29$, os mesmos parâmetros utilizados no caso não magnético (Fig. 5-1).

magnéticos [68]. A partir da análise da Fig. 5-2, note que a ausência de ressonâncias no caso não magnético ($\mu = 1$) é responsável por um valor aproximadamente constante de v_E . Este panorama muda drasticamente quando espalhadores ferromagnéticos são considerados. Neste caso v_E apresenta, além de quedas abruptas no limite de pequenas partículas, uma dependência oscilatória com o parâmetro de tamanho ka , como pode ser visto pelas curvas $\mu = 10^3$ e $\mu = 10^5$ da Fig. 5-2. Além disso, note ainda que, para determinados valores de ka , v_E se anula, algo que jamais ocorre no caso de espalhadores não magnéticos.

Como já mencionado, as quedas abruptas em v_E têm sua origem nas ressonâncias na seção de choque total C_{ext} que caracteriza o processo de espalhamento simples. Isto pode ser visto claramente na Fig. 5-3, onde tanto v_E quanto o fator de eficiência total

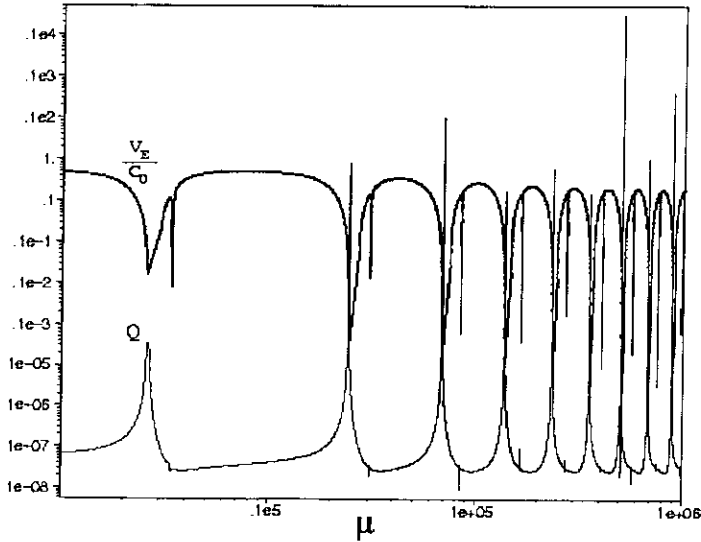


Figura 5-3: Fator de eficiência total Q (linha cheia) e a velocidade de transporte v_E (linha cheia em negrito) em função de μ para espalhadores ferromagnéticos e dielétricos no limite de pequenas partículas ($ka = 0.01$). v_E está normalizada por c_0 e os demais parâmetros utilizados são $f = 0.36$ e $\epsilon = 7.29$.

Q (Eq. 2.65) são calculados em função da permeabilidade magnética relativa μ^7 no limite de pequenas partículas ($ka = 0.01$). Este resultado está em pleno acordo com a interpretação de van Albada *et al.*: as quedas em v_E ocorrem exatamente nos mesmos pontos onde são observadas as ressonâncias na seção de choque, favorecendo a formação de ondas estacionárias no interior dos espalhadores. Isto gera uma “atraso” no tempo de propagação das ondas através do meio e uma conseqüente diminuição no valor de v_E . No entanto, no caso de espalhadores magnéticos tais ressonâncias estão associadas com o valor da permeabilidade magnética relativa e ocorrem também no limite de pequenas partículas $ka \ll 1$, diferentemente do que ocorre no caso não magnético.

Outro ponto interessante a ser destacado e que evidencia mais uma diferença marcante entre as propriedades dinâmicas da propagação de ondas eletromagnéticas em meios

⁷Note que os valores de μ correspondem sempre ao caso de espalhadores *ferromagnéticos*, ou seja, $\mu \gg 1$.

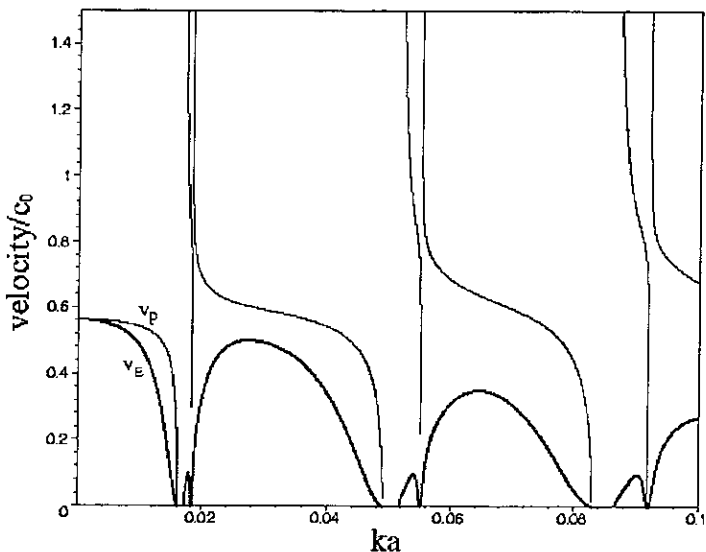


Figura 5-4: Velocidades de transporte v_E (linha cheia em negrito) e de fase v_p (linha cheia) em função de ka no limite de pequenas partículas para espalhadores ferromagnéticos ($\mu = 10^3$). Ambas as velocidades estão normalizadas por c_0 . Os demais parâmetros utilizados são $f = 0.36$ e $\epsilon = 7.29$.

desordenados ferromagnéticos e não magnéticos diz respeito à velocidade de fase v_p . A partir da análise da Fig. 5-4, onde v_p e v_E são calculados em função de ka para $\mu = 10^3$, é possível notar que, no caso de espalhadores ferromagnéticos, a velocidade de fase v_p jamais coincide com a velocidade de transporte de energia v_E , nem mesmo no limite de pequenas partículas. Isto está em claro contraste com o que é observado no caso de espalhadores não magnéticos, onde tem-se $v_p = v_E$ apenas no limite de pequenas partículas (veja Fig. 5-1). A origem desta diferença está novamente relacionada com o comportamento ressonante não usual que o processo de espalhamento simples por esferas ferromagnéticas apresenta no limite de pequenas partículas.

Uma vez calculada a velocidade de transporte de energia v_E neste tipo de sistema (espalhadores ferromagnéticos e dielétricos no limite de pequenas partículas), é possível utilizar os resultados obtidos no capítulo anterior e calcular a constante de difusão $D = v_E \ell^* / 3$. Assim, na Fig. 5-5, D é calculada em função de μ para espalhadores fer-

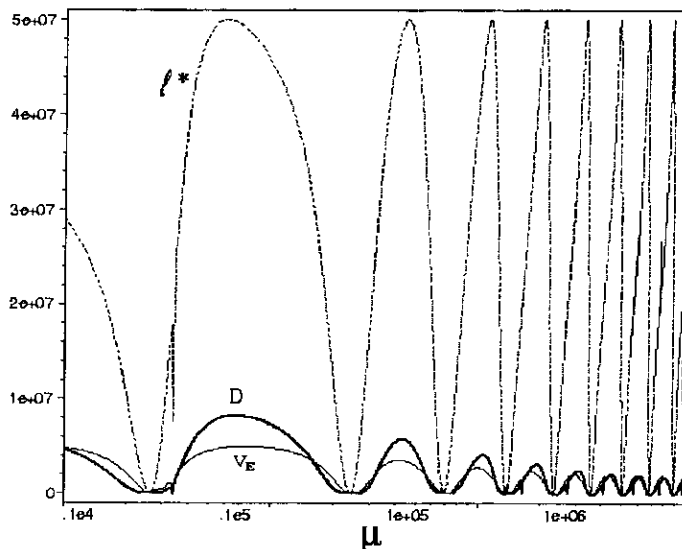


Figura 5-5: As quantidades adimensionais: v_E (linha cheia), l^* (linha tracejada) e D (linha cheia em negrito) em função de μ para espalhadores ferromagnéticos e dielétricos no limite de pequenas partículas ($ka = 0.01$). Para efeito de comparação, v_E foi multiplicado pelo fator 10^7 . Os demais parâmetros utilizados são $f = 0.36$ e $\epsilon = 7.29$.

romagnéticos no limite de pequenas partículas ($ka = 0.01$). Para efeito de comparação, v_E e l^* também são mostrados. A fim de exibir apenas quantidades adimensionais, v_E , l^* e D foram multiplicados pelos fatores $1/c_0$, $\pi a^2 \Phi$ e $\pi a^2 \Phi / c_0$, respectivamente. Note a presença de *oscilações na constante de difusão* D na presença de centros espalhadores ferromagnéticos. Além disso, é possível notar que, para determinados valores de μ , o *valor de D se anula*, o que significa que a intensidade das ondas transmitidas através da amostra será nula nestes pontos. Outro aspecto importante a ser observado é a presença de um *amortecimento nas oscilações em D* à medida que os valores de μ aumentam.

O fato da permeabilidade magnética dos materiais ferromagnéticos ser fortemente dependente da temperatura T e da aplicação de um campo magnético externo \mathbf{H}_{ext} , como já mencionado no capítulo anterior, faz com que todos os efeitos dependentes de μ discutidos acima possam ser controlados através da variação de um parâmetro externo (T ou \mathbf{H}_{ext}). No caso da dependência em temperatura, em particular, μ segue tipicamente

a lei de Curie-Weiss, o que significa que próximo à temperatura crítica T_c , onde μ diverge, serão observados os menores valores de D , como pode ser visto pela análise da Fig. 5-5. Além disso, o controle externo dos valores de μ através da variação de T ou \mathbf{H}_{ext} possibilita que se tenha uma sintonia precisa do valor de D e, conseqüentemente, da transmissividade das ondas eletromagnéticas através da amostra. Do ponto de vista experimental, é possível inclusive, por meio de um ajuste adequado dos parâmetros externos, atingir a situação de transmissividade nula, isto é, os pontos onde $D = 0$. Este fato torna os meios espalhadores constituídos por pequenas partículas ferromagnéticas potencialmente úteis para aplicações tecnológicas e no desenvolvimento de novos dispositivos magnéticos, como por exemplo chaves (“*switches*”) capazes de controlar a transmissividade das ondas eletromagnéticas através da variação da temperatura ou da aplicação de um campo magnético externo⁸.

Finalmente, vale salientar que, a exemplo dos resultados discutidos no capítulo anterior, os resultados aqui apresentados serão dificilmente observados na faixa óptica. Isto porque o valor da permeabilidade magnética μ da maioria dos materiais magnéticos difere muito pouco da unidade nesta região do espectro⁹. Na faixa de microondas, entretanto, μ atinge valores apreciáveis e pode ser facilmente controlado pela variação de T ou \mathbf{H}_{ext} [62] [58]. Desta forma, a utilização de ferritas moles com radiação incidente na faixa de microondas é também bastante apropriada para a verificação experimental dos resultados discutidos neste capítulo, bem como em possíveis aplicações tecnológicas. Além disso, tais materiais satisfazem bastante bem as hipóteses que foram feitas para descrever a permeabilidade magnética dos centros espalhadores ferromagnéticos (isto é, valores de μ reais e escalares). De fato, existe uma ampla gama de ferritas moles onde as perdas são pequenas (i.e., $\mu'' \ll \mu'$) e a anisotropia magnética é desprezível (veja a seção 4.3 e as Refs. [58] e [63]). É importante mencionar ainda que este tipo de restrição à permeabilidade magnética foi também empregado por alguns autores em outras situações

⁸Para algumas possíveis aplicações tecnológicas baseadas nas propriedades de transporte de ondas eletromagnéticas em meios desordenados consulte, por exemplo, a Ref. [86]

⁹Veja a seção 4.3.

envolvendo a interação entre materiais magnéticos e radiação eletromagnética, como por exemplo Sigalas *et al.*, que recentemente discutiram a possibilidade de se construir cristais fotônicos utilizando materiais magnéticos moles [87].

Conclusões

Nesta tese foram abordados alguns aspectos relativos aos processos de espalhamento simples e múltiplo de ondas eletromagnéticas por esferas *magnéticas*, com ênfase no fenômeno da localização fraca da luz, no problema da velocidade de transporte de energia e da constante de difusão. A principal contribuição deste trabalho reside no fato de ser o primeiro estudo dos processos de espalhamento e difusão de ondas eletromagnéticas em meios desordenados envolvendo *partículas magnéticas*. Este trabalho mostra que os sistemas de espalhadores magnéticos apresentam propriedades bastante interessantes e marcadamente diferentes se comparadas com sistemas não magnéticos, amplamente estudados nos últimos anos. Este fato torna tais sistemas extremamente promissores para novas investigações, tanto teóricas quanto experimentais, de questões fundamentais em física, como o fenômeno da localização de Anderson eletromagnética, bem como para possíveis aplicações tecnológicas.

No tocante ao estudo do espalhamento simples por esferas magnéticas (seção 4.1), foi analisado o comportamento do fator de assimetria $\langle \cos \theta \rangle$ para esferas com parâmetro de tamanho ka e permeabilidade magnética μ (relativa ao meio) arbitrárias. No caso do limite de pequenas esferas ($ka \ll 1$), em particular, foi mostrado, tanto analiticamente quanto numericamente, que o processo de espalhamento apresenta algumas propriedades não usuais se comparadas com o caso não magnético. Diferentemente do que ocorre no caso do espalhamento por pequenas partículas não magnéticas (limite Rayleigh), o espalhamento magnético no limite $ka \ll 1$ se caracteriza por ser anisotrópico (isto é, $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$) e por apresentar ressonâncias no fator de assimetria e nas seções de choque, fato que, no caso não magnético, só se manifesta no chamado regime intermediário $ka \sim 1$

e no regime de grandes esferas $ka \gg 1$. O espalhamento por pequenas esferas magnéticas também apresenta uma propriedade raramente encontrada no caso não magnético: o retroespalhamento preferencial. Foram derivadas analiticamente expressões para os primeiros termos da série de Mie, a_1 e b_1 , para um limite jamais tratado na literatura: $ka \ll 1$ e $|\mu| \gg 1$, que corresponde à situação de pequenas esferas espalhadoras *ferromagnéticas*. Este caso é particularmente interessante pois é exatamente nesta situação onde as propriedades não usuais do espalhamento magnético, tais como o retroespalhamento preferencial e os efeitos de ressonância no limite de pequenas partículas, se manifestam de forma mais evidente.

Os resultados relativos ao espalhamento simples foram inseridos no contexto do espalhamento múltiplo, com o objetivo de investigar a influência da presença de centros espalhadores magnéticos no fenômeno da localização fraca da luz (seção 4.2) e no problema da velocidade de transporte de energia em sistemas desordenados (capítulo 5). Em relação ao fenômeno da localização fraca da luz, em particular, foi mostrado através de um cálculo numérico que existe uma forte dependência entre o parâmetro de localização $k\ell^*$ e a permeabilidade magnética dos espalhadores, e que a presença de centros espalhadores magnéticos induz um *decréscimo global nos valores de $k\ell^*$* . A origem deste fato está intimamente ligada com as propriedades não usuais que o processo de espalhamento simples por esferas magnéticas apresenta, sobretudo com o retroespalhamento preferencial. O retroespalhamento preferencial favorece os caminhos ópticos em “zig-zag” e a formação de ondas estacionárias dentro do meio, o que causa uma maior localização espacial das ondas e um conseqüente decréscimo no valor de $k\ell^*$. Este fato torna os sistemas de espalhadores magnéticos potencialmente interessantes para uma verificação experimental alternativa do fenômeno da localização de Anderson eletromagnética, que se manifesta quando os valores de $k\ell^*$ se tornam suficientemente pequenos. Além disso, a utilização de partículas magnéticas em experimentos que visem observar a localização de Anderson oferece uma vantagem adicional em relação aos sistemas não magnéticos: a possibilidade de se ter um controle preciso do valor do parâmetro de localização sem alterar a concentração ou o diâmetro médio dos espalhadores. De fato, tal controle po-

de ser feito explorando a dependência que existe entre a permeabilidade magnética dos espalhadores e a temperatura T (tipicamente caracterizada pela lei de Curie-Weiss) ou o campo magnético externo \mathbf{H}_{ext} . Isto faz com que seja possível obter um “ajuste fino” do valor do parâmetro de localização através da variação de um parâmetro externo, T ou \mathbf{H}_{ext} .

As propriedades dinâmicas da propagação de ondas eletromagnéticas em meios desordenados também se mostraram significativamente afetadas pela presença de centros espalhadores magnéticos (capítulo 5). Com base na teoria desenvolvida por van Albada *et al.*[68][55], que prevê que os valores da velocidade de transporte de energia v_E sofrem quedas abruptas nas vizinhanças de uma ressonância na seção de choque de cada espalhador, e nas expressões para a_1 e b_1 derivadas no capítulo 4, foi possível mostrar analiticamente que tais quedas ocorrem mesmo no limite de pequenas partículas quando os centros espalhadores são constituídos por um material *ferromagnético*. Para certos valores de μ , em particular, o valor de v_E pode até mesmo anular-se. A origem deste fato está mais uma vez relacionada com as propriedades não usuais que caracterizam o espalhamento simples por partículas magnéticas. De fato, a presença de ressonâncias no processo de espalhamento simples por esferas ferromagnéticas, mesmo no limite de pequenas partículas, explica as quedas abruptas em v_E neste limite. No caso não magnético, em contrapartida, tais quedas só se manifestam para valores maiores do parâmetro de tamanho.

A constante de difusão $D = v_E \ell^*/3$, por sua vez, também exibe um comportamento fundamentalmente diferente se comparado com o caso em que os centros espalhadores são não magnéticos. Ainda tratando o caso particular de espalhadores ferromagnéticos no limite de pequenas partículas, foi mostrado que existe uma dependência oscilatória entre a constante de difusão D e a permeabilidade magnética relativa μ . Foi observado também um amortecimento nas oscilações em D à medida que os valores de μ aumentam. Além disso, o valor de D se anula para determinados valores de μ , o que significa que a intensidade das ondas eletromagnéticas transmitidas através da amostra será nula. Como todos estes efeitos dependentes de μ relativos ao processo de difusão podem ser

controlados através da variação de um parâmetro externo (T ou \mathbf{H}_{ext}), foi sugerido que os mesmos poderiam servir de base teórica para possíveis aplicações tecnológicas, tais como chaves (“*switches*”) capazes de controlar a transmissividade das ondas eletromagnéticas através da variação de T ou \mathbf{H}_{ext} .

Finalmente, foram feitas algumas considerações acerca do domínio de validade dos resultados apresentados nesta tese, assim como de possíveis materiais magnéticos a serem utilizados em futuros estudos experimentais. Como o valor da permeabilidade magnética da maioria dos materiais magnéticos difere muito pouco da unidade ($\mu = 1$) para frequências ópticas, a observação em laboratório de todos os efeitos e resultados apresentados ao longo deste trabalho é bastante improvável nesta região do espectro. No entanto, existe uma vasta gama de ferritas moles (baixa coercitividade) que apresenta altos valores da permeabilidade magnética com poucas perdas na faixa de microondas, geralmente abaixo de 100 MHz. Este fato torna tais ferritas candidatas em potencial para futuras investigações experimentais do processo de difusão e espalhamento múltiplo de ondas eletromagnéticas em meios magnéticos.

Bibliografia

- [1] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1435 (2000).
- [2] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, submetido para publicação no *Phys. Rev. Lett.*, 2000.
- [3] E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1471 (1986).
- [4] A. Lagendijk and B. A. V. Tiggele, *Phys. Rep.* **270**, 143 (1996).
- [5] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Dover, Nova Iorque, 1960.
- [6] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [7] D. Y. Sharvin and Y. V. Sharvin, *JETP Lett.* **34**, 272 (1981).
- [8] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2696 (1985).
- [9] K. V. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [10] P. A. Lee and A. D. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1622 (1986).
- [11] P. W. Anderson, *Phil. Mag. B* **52**, 505 (1985).
- [12] P. E. Wolf and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
- [13] M. P. V. Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
- [14] Y. Kuga and A. Ishimaru, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 831 (1984).

- [15] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [16] N. Garcia and A. Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1850 (1991).
- [17] R. Deliaouch, J. P. Armstrong, S. Schultz, P. M. Platzman, and S. L. McCall, *Nature* **354**, 53 (1991).
- [18] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Nature* **390**, 671 (1997).
- [19] F. Scheffold and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5800 (1998).
- [20] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Plenum Press, Nova Iorque, 1990.
- [21] H. C. V. de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, Dover, Nova Iorque, 1980.
- [22] B. A. V. Tiggelen and E. Kogan, *Phys. Rev. A* **49**, 708 (1994).
- [23] G. Mie, *Ann. Physik* **25**, 377 (1908).
- [24] P. Debye, *Ann. Physik* **30**, 57 (1909).
- [25] H. M. Nussenzveig, *Scientific American* **236**, 116 (1977).
- [26] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, John Wiley, Nova Yorque, 1983.
- [27] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume I, Wiley-Interscience, Nova Iorque, 1953.
- [28] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [29] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [30] M. Kerker, *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*, Academic Press, Nova Iorque, 1969.

- [31] C. H. Wilcox, *J. Math. Mech.* **6**, 167 (1957).
- [32] D. S. Wiersma, M. P. V. Albada, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1739 (1995).
- [33] F. A. Erbacher, R. Lenke, and G. Maret, *Europhys. Lett.* **21**, 55 (1993).
- [34] A. S. Martinez and R. Maynard, *Phys. Rev. B* **50**, 3714 (1994).
- [35] B. A. V. Tiggelen, R. Maynard, and T. M. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. E* **53**, 2881 (1996).
- [36] D. Lacoste, PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1999.
- [37] R. Lenke and G. Maret, *European Physics Journal* (2000), a ser publicado.
- [38] I. Freund, M. Rosenbluh, R. Berkovits, and M. Kaveh, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1214 (1988).
- [39] H. K. M. Vithana, L. Asfaw, and D. L. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3561 (1993).
- [40] B. A. V. Tiggelen, R. Maynard, and A. Heiderich, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 639 (1996).
- [41] G. Labeyrie et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5266 (1999).
- [42] P. R. Group, editor, *New Aspects of Electromagnetic and Acoustic Wave Diffusion*, Springer Tracts in Modern Physics, Springer, Berlin, 1998.
- [43] S. Bleher, C. Grebogi, and E. Ott, *Physica D* **46**, 87 (1990).
- [44] R. Maynard and A. S. Martinez, in *OSA Proceedings on Advances in Optical Imaging and Photon Migration*, edited by R. R. Alfano, volume 21, page 64, Washington DC, 1994.
- [45] S. Etemad, R. Thompson, and M. J. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 575 (1986).
- [46] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*, Academic Press, Nova Iorque, 1995.

- [47] E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard, and G. Maret, *J. Phys. France* **49**, 77 (1988).
- [48] M. C. W. Rossum and T. M. Nieuwenhuizen, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313 (1999).
- [49] S. John, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2169 (1984).
- [50] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, and G. Maret, *Nature* **398**, 206 (1999).
- [51] D. S. Wiersma, J. G. Rivas, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, (Reply) *Nature* **398**, 207 (1999).
- [52] R. Lenke, comunicação privada .
- [53] D. J. Thouless, *Phys. Rep.* **13C**, 93 (1974).
- [54] B. A. V. Tiggelen, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1992.
- [55] B. A. V. Tiggelen, A. Lagendijk, M. P. V. Albada, and A. Tip, *Phys. Rev. B* **45**, 12233 (1992).
- [56] E. N. Economou, C. M. Soukoulis, and A. D. Zetsis, *Phys. Rev. B* **30**, 1686 (1984).
- [57] A. Lagendijk, Série de palestras sobre Localização de Luz ministradas na "Photonic Crystals and Light Localization Conference - NATO Advanced Study Institute", realizada entre 19 e 30 de junho de 2000 em Creta, Grécia., 2000.
- [58] R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, IEEE Press, Piscataway, 1978.
- [59] M. Kerker, D. S. Wang, and G. L. Giles, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 765 (1983).
- [60] F. Erbacher, R. Lenke, and G. Maret, *Europhys. Lett.* **21**, 551 (1993).
- [61] A. S. Martinez, a ser publicado (consulte a página: http://publish.aps.org/eprint/gateway/eplist/aps1999sep27_01).

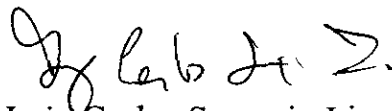
- [62] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, trabalho aceito para publicação no J. Magn. Mater. e apresentado na "International Conference on Magnetism 2000", realizada entre 6 e 11 de agosto de 2000 em Recife, Brasil.
- [63] E. C. Snelling, *Soft Ferrites, Properties and Applications*, Butterworths, Londres, 1988.
- [64] L. Landau and E. Lifchitz, *Electrodynamique Des Milieux Continus*, Editora Mir, Moscou, 1982.
- [65] D. S. Wiersma, M. P. V. Albada, B. A. V. Tiggelen, and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **74**, 4193 (1995).
- [66] Y. N. Barabanenkov and V. D. Ozrin, Phys. Rev. Lett. **69**, 1364 (1992).
- [67] B. A. V. Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, Phys. Rev. Lett. **71**, 1284 (1993).
- [68] M. P. V. Albada, B. A. V. Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, Phys. Rev. Lett. **66**, 3132 (1991).
- [69] T. R. Kirkpatrick, Phys. Rev. B **31**, 5746 (1985).
- [70] C. A. Condat and T. R. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **58**, 226 (1987).
- [71] D. Lenstra and W. V. Haeringen, in *Analogies in Optics and Micro Electronics*, edited by W. V. Haeringen and D. Lenstra, Kluwer Academic, Netherlands, 1990.
- [72] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, Nova Iorque, 1966.
- [73] P. Sheng and Z. Q. Zang, Phys. Rev. Lett **57**, 1879 (1986).
- [74] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, Nova Iorque, 1960.
- [75] R. Loudon, J. Phys. A **3**, 233 (1970).
- [76] D. Vollhardt and P. Wölfe, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).

- [77] B. A. V. Tiggelen, A. Lagendijk, A. Tip, and G. F. Reiter, *Europhys. Lett.* **15**, 535 (1991).
- [78] S. Engelsberg and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **131**, 993 (1963).
- [79] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Plenum, Nova Iorque, 1986.
- [80] G. Grimvall, *Phys. Scr.* **14**, 63 (1976).
- [81] D. Vollhardt, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 99 (1984).
- [82] L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30**, 1142 (1956).
- [83] S. Grossmann, *Nuovo Cimento* **37**, 698 (1965).
- [84] B. J. Baumgartl, *Phys. Rev.* **168**, 200 (1968).
- [85] A. Bott and W. Zdunkowski, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 1361 (1987).
- [86] A. Z. Genack and N. Garcia, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 408 (1993).
- [87] M. M. Sigalas, C. M. Soukoulis, R. Biswas, and K. M. Ho, *Phys. Rev. B* **56**, 959 (1997).

**“PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM
MEIOS MAGNÉTICOS DESORDENADOS: LOCALIZAÇÃO
FRACA, VELOCIDADE DE TRANSPORTE DE ENERGIA
E CONSTANTE DE DIFUSÃO”**

Felipe Arruda de Araújo Pinheiro

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:




Luiz Carlos Sampaio Lima - Presidente



Luiz Galisa Guimarães



Alexandre Souto Martinez – Convidado Especial



Constantino Tsallis

Rio de Janeiro, 31 de agosto de 2000