

Tese de Doutorado

Ação da Expansão do Universo em  
Campos Eletromagnéticos Não-Maxwellianos

Alexandre L. Oliveira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

2000

*À minha mãe, Maria Isabel,  
por tudo que fez por nós, seus filhos,  
nos ensinando com perseverança, paciência,  
e acima de tudo pela bondade que tem em seu coração.*

## Agradecimentos

- Ao orientador desta tese, Antônio F. F. Teixeira, pela orientação de mestrado e de doutorado, pela amizade e pelos frequentes questionamentos que permitiram a lapidação de tantas idéias cruas.
- Ao Marcelo Carvalho por muitas discussões, colaboração e ajuda no estudo de espaços fibrados.
- Ao Professor A. Caride por haver-me chamado a atenção para o trabalho de H. Hori relacionado com as teorias de alcance finito.
- À Myriam Coutinho pela boa vontade e ajuda ao longo da pós-graduação no CBPF.
- À Eliana por ter permanecido ao meu lado, à Danielle pelo seu otimismo e garra contagiantes, à Maria, Wanda, ao Barros, Bodó e Júlio pelo incentivo.
- À Elvira e ao Edinho pelo apoio em casa, e aos meus primos, familiares e amigos pela confiança depositada.
- Aos colegas do CBPF, do Valongo e de outros lugares.
- Ao Sandro do INPE pela colaboração, referências e discussões.
- Ao "Metrô", onde diversos rascunhos foram escritos e tópicos foram lapidados ao longo do trajeto casa ↔ Valongo.
- Ao CBPF, pelo apoio material e pela formação.
- Ao CNPq e Capes, pelos períodos de bolsa na pós-graduação.
- Mais uma vez, à minha mãe pelo seu amor, bondade e dedicação.
- Finalmente a todos aqueles que colaboraram para que este trabalho chegasse ao fim.

## Resumo

O eletromagnetismo maxwelliano e o não-maxwelliano de Proca em meios condutores - æther de Dirac - são discutidos em diversos de seus aspectos, tendo como *arena* geometrias tridimensionais homogêneas e isotrópicas. Encontramos efeitos de amplificação de campos de indução magnética, decorrendo da curvatura do espaço-tempo; tais efeitos são importantes para a astrofísica extra-galática.

## Abstract

The maxwellian electromagnetism and the non-maxwellian Proca in conducting media - Dirac's æther - and some of their features are discussed; it is supposed that the backgrounds are the tri-dimensional, homogeneous and isotropic Friedmann geometries. We find amplification of the magnetic induction fields, caused by the curvature of the space-time; these effects are important for the extra-galactic astrophysics.

# Índice

1	Introdução	2
2	Æther de Dirac	5
2.1	Existe um Æther ?	5
2.2	Equações do Æther	8
3	Eletromagnetismo de Proca	11
3.1	Eletromagnetismo de Alcance Finito	11
3.2	Ondas Transversais de Proca no Tritoro $T^3$	13
3.3	Campos de Maxwell	14
3.4	Campos de Proca	16
3.4.1	Tensor Energia-Momentum de Proca	16
3.4.2	Ondas de Proca e Transformações de Lorentz	18
3.5	Discussão	20
4	Soluções Não-Maxwellianas Exatas	23
4.1	Soluções no Universo de Einstein	24
4.1.1	Introdução	24
4.1.2	Equações e Soluções	24
4.1.3	Discussão	26
4.2	Solução na Geometria Elítica de Friedmann	27
4.2.1	Campo Magnético Toroidal na $S^3$ e no $P^3$	27

4.2.2	Discussão . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Ação da Expansão em Sistemas Locais</b>	<b>29</b>
5.1	Introdução . . . . .	29
5.2	Coordenadas Normais de Fermi . . . . .	31
5.3	Equações de Movimento no SLI . . . . .	35
5.4	Correções Cosmológicas para os Sistemas Locais . . . . .	36
5.5	Algumas Estimativas . . . . .	38
5.6	Discussões . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Amplificação Geométrica de Campos Não-Maxwellianos</b>	<b>40</b>
6.1	Introdução . . . . .	40
6.2	O Modelo . . . . .	43
6.3	Soluções e Discussão . . . . .	45
6.3.1	No Universo Estático de Einstein . . . . .	46
6.3.2	Nos Modelos de RW . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>56</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Na cosmologia padrão baseada na teoria da relatividade geral de Einstein, o universo, desde seus estágios primitivos, foi submetido a uma expansão. Esta expansão tem consequências no cenário cósmico, tais como a queda da temperatura da radiação cósmica de fundo; discute-se também na literatura possíveis efeitos da expansão sobre o átomo de hidrogênio [1]. Parece interessante estudar como os fenômenos naturais, nas diferentes escalas, são influenciados pela expansão do universo (veja interessante trabalho de revisão neste assunto em [2]). Um tema de sensível interesse é investigar como a expansão do background cosmológico pode influenciar os campos eletromagnéticos não-maxwellianos (NM).

A teoria padrão que trata do comportamento dos campos eletromagnéticos na escala cósmica diz que, nesta escala, eles se comportam muito diferente do que nos laboratórios terrestres [3]. Particularmente, são previstos efeitos de auto-regeneração do campo de indução magnética cósmica [3].

O tema campos eletromagnéticos em modelos cosmológicos tem recebido interesse cada vez maior na literatura; recentes observações indicam a possibilidade da existência do campo de indução magnética em escalas extra-galáticas [4]. A pesquisa neste assunto tem uma ligação forte com a física de partículas (veja referências em [5]) e é importante para se compreender uma grande variedade de fenômenos astrofísicos [6]. Além disto as teorias



que tratam da evolução de campos magnéticos cósmicos têm uma série de questões não resolvidas [5]. Se em futuro próximo tivermos mais informações sobre os campos extragaláticos, naturalmente teremos de responder questões referentes a seus mecanismos de evolução.

A nova tecnologia observacional da radio-astronomia permitirá certamente um mapeamento mais detalhado da distribuição dos campos magnéticos cósmicos. Estima-se que eles estão distribuídos por todas as partes do universo [3]. Tanto os dados observacionais quanto as simulações realizadas prevêem esta possibilidade [4].

A teoria para o eletromagnetismo que escolhemos para estudar a evolução de campos eletromagnéticos em meio cósmico foi a teoria de Proca (TP), por supormos que no estudo de fenômenos que envolvam a estrutura em larga escala do universo é possível que ela possa explicar efeitos não previstos pela usual teoria maxwelliana. Além disto, como os modelos do universo primitivo prevêem que na maior parte de sua história ele foi um bom condutor, presumiremos que depois da era de recombinação o universo herdou da fase anterior uma pequena condutividade, e conforme se sabe o meio cósmico condutivo é chamado de æther de Dirac.

Para abordar estes assuntos faremos inicialmente, no capítulo 2, uma exposição sobre o æther de Dirac, e no capítulo 3 sobre alguns aspectos teóricos da teoria não-maxwelliana de Proca onde também encontramos soluções de onda de Proca no tritoro; o capítulo 4 é dedicado à discussão de soluções exatas do eletromagnetismo de Proca em um æther de Dirac, tendo como background a geometria elítica estática de Einstein e a evolutiva de Friedmann; o capítulo 5 investiga a ação da expansão cósmica em estruturas locais, buscando sensibilizar o leitor para a importância que a expansão do universo pode ter em diferentes fenômenos; o capítulo 6 estuda a ação da expansão do universo sobre os campos eletromagnéticos cósmicos, e discute ainda as possíveis consequências do modelo em fenômenos da astrofísica extragalática; na conclusão final da monografia fazemos um resumo dos principais resultados alcançados e elaboramos algumas perspectivas de continuidade do trabalho.

Finalmente lembramos ao leitor que nesta monografia as partes baseadas em trabalhos de nossa autoria, em conjunto ou não com o orientador, são: segunda parte da segunda seção do capítulo 2, a segunda seção do capítulo 3, e os capítulos 4 e 6.

# Capítulo 2

## Æther de Dirac

Faremos neste capítulo uma introdução ao *æther de Dirac* ( $\mathcal{A}ED$ ), onde descreveremos algumas de suas propriedades. Fizemos uma seleção dos tópicos que consideramos mais importantes de forma a fornecer uma idéia geral do  $\mathcal{A}ED$ . Para otimização do texto foi necessário deixar de lado uma exposição, talvez cansativa, de outros tópicos relacionados. O leitor interessado encontrará nas referências citadas mais detalhes sobre os modelos existentes para o  $\mathcal{A}ED$ . No final do capítulo propomos equações covariantes que serão em seguida escritas no espaço plano em coordenadas cartesianas para fácil comparação com as equações do eletromagnetismo maxwelliano.

### 2.1 Existe um Æther ?

A descoberta do princípio da relatividade em 1905 por Einstein descartou a existência de um *æther* universal, entretanto com a mecânica quântica ele foi restaurado por Dirac [7] como um *æther covariante*, *æther de Dirac* ou mesmo *vácuo real* [8]. Este último nome insinua que este seria um modelo mais realista para o usual vácuo.

O modelo original de Dirac é formulado a partir da suposição de que uma região do espaço que seja um perfeito vácuo, isto é, onde não haja matéria nem campos, de acordo com a relatividade, essa região será isotrópica no sentido de Lorentz, isto é, todas as direções dentro do cone de luz serão equivalentes. Na hipótese do *æther*, em cada ponto

do espaço existe um meio, o æther, movendo-se com alguma velocidade menor que a velocidade da luz. Esta velocidade fornece uma direção preferencial dentro do cone de luz, a qual poderia ser determinada através de experiências. Teríamos, portanto, uma contradição com o princípio da relatividade, que afirma que todas as direções dentro do cone de luz são equivalentes.

Ao aplicarmos a mecânica quântica ao æther, a velocidade deste, como qualquer variável física, estará sujeita a relações de incerteza em cada ponto do espaço-tempo; a velocidade não é uma quantidade bem definida, estando distribuída sobre vários valores possíveis de acordo com a lei de probabilidade obtida através do quadrado da função de onda. Poderemos estabelecer uma função de onda que faça todos os valores de velocidade do æther igualmente prováveis. Esta função de onda certamente obedeceria alguma equação covariante que representasse o estado de vácuo perfeito, em acordo com o princípio da relatividade.

Encontramos um problema semelhante ao estudarmos o átomo de hidrogênio desconsiderando o spin do elétron e o do próton. Do ponto de vista clássico é impossível para este átomo se encontrar num estado de simetria esférica, entretanto sabemos experimentalmente que o átomo de hidrogênio pode se encontrar em estado de simetria esférica. A teoria quântica fornece uma explicação ao permitir funções de onda com simetria esférica. A passagem da teoria clássica para a teoria quântica pode mudar radicalmente nossas idéias relacionadas com as simetrias dos sistemas físicos. Algo que pode não ser simétrico no modelo clássico pode estar em um estado simétrico após a quantização. Isto pode acontecer também com a simetria por transformações de Lorentz, o que poderá tornar possível a existência de um æther em acordo com os princípios da relatividade.

Dirac elaborou seu modelo de æther baseado nestas idéias e em uma eletrodinâmica também de sua autoria [9], na qual a um potencial eletromagnético  $\Phi^\mu$  corresponderia uma 4-velocidade  $v^\mu \propto \Phi^\mu$ . Esta 4-velocidade seria aquela com que fluiria uma carga elétrica colocada neste meio.

Ainda que a eletrodinâmica proposta por Dirac tenha sido abandonada, permaneceu

a idéia do  $\mathcal{AED}$  como sendo um meio ("v\u00e1cuo") com condutividade. A id\u00e9ia de um \u00e6ther qu\u00e2ntico prevaleceu ainda que tenham sido levantadas algumas dificuldades para o modelo, tais como a previs\u00e3o de um efeito de viscosidade, o qual n\u00e3o \u00e9 detectado experimentalmente. Para eliminar essa viscosidade indesejada outros autores apresentaram um novo modelo, no qual o \u00e6ther \u00e9 um super-fl\u00fuido constitu\u00eddo por pares eletricamente neutros de f\u00e9rmions e antif\u00e9rmions [10]. Um corpo macrosc\u00f3pico se movendo neste superfl\u00fuido seria incapaz de trocar energia e momentum com o meio; tais efeitos de troca de energia e momentum somente apareceriam em escalas cosmol\u00f3gicas.

Como os novos modelos do \u00e6ther que surgiram o assemelham a um plasma condutor, ele se torna \u00fasil para aplica\u00e7\u00e3o \u00e0 hidrodin\u00e2mica do plasma c\u00f3smico, na qual existem par\u00e2metros proporcionais a uma poss\u00edvel condutividade do meio intergal\u00e1tico [11]. Na relatividade geral ter\u00edamos, como consequ\u00eancia, um fl\u00fuido c\u00f3smico com duas componentes: a usual descrita pelo tensor energia-momentum que aparece nas equa\u00e7\u00f5es de Einstein, e outra associada a um tensor energia-momentum de v\u00e1cuo  $(T_{\mu\nu})_{vac}$ , cuja interpreta\u00e7\u00e3o \u00e9 a de uma *constante cosmol\u00f3gica*.

A n\u00edvel local, as interpreta\u00e7\u00f5es atuais dos experimentos da f\u00edsica n\u00e3o se modificariam com a introdu\u00e7\u00e3o do \u00e6ther, pois uma carga el\u00e9trica hipot\u00e9tica levaria um intervalo de tempo da ordem de bilh\u00f5es de anos para desaparecer caso o v\u00e1cuo tivesse uma condutividade da ordem de  $\sigma \approx 10^{-22}/s$ <sup>1</sup>. Sabemos ainda que diversos autores j\u00e1 discutiram a possibilidade de que ocorram pequenas varia\u00e7\u00f5es de constantes tais como a carga do eletr\u00f3n, a constante gravitacional, a constante de Hubble e outras [13].

No que diz respeito a experi\u00eancias locais para a verifica\u00e7\u00e3o da condutividade de deslocamento  $\sigma$ <sup>2</sup>, foram montados experimentos recentes para a verifica\u00e7\u00e3o da corrente de deslocamento de Maxwell no v\u00e1cuo [14]. H\u00e1 autores que associam resultados considerados positivos destas experi\u00eancias com uma exist\u00eancia real de um  $\mathcal{AED}$  superfl\u00fuido [15].

Na literatura encontramos rela\u00e7\u00f5es entre  $\sigma$  e a massa do f\u00f3ton  $m_\gamma$  [15, 12]. Se admitir-

---

<sup>1</sup>Valor estimado em [12]; este valor o torna mais pr\u00f3ximo dos isolantes do que dos condutores por t\u00e3o pequeno que \u00e9.

<sup>2</sup>Para uma corrente el\u00e9trica  $\vec{J}$  e um campo el\u00e9trico  $\vec{E}$  temos  $\vec{J} = \sigma \epsilon_0 \vec{E}$ .

mos que um fóton com energia  $E$  tenha uma massa de repouso não nula  $m_\gamma$ , sua velocidade  $v$  será dependente de sua frequência  $\nu$  de acordo com  $E = h\nu = m_\gamma c^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$  onde  $c$  é a velocidade limite. Se admitirmos ainda a equivalência entre a velocidade da onda de de Broglie associada ao fóton e a *velocidade de grupo*  $v_g$  do pacote de onda eletromagnética no  $\mathcal{AED}$ , com velocidade angular na vizinhança de um valor  $\omega$ , encontraremos (no SI de unidades) para  $\sigma/\chi_e\omega \ll 1$

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\chi_e\chi_m}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8\chi_e^2\omega^2} \right), \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon_0$ ,  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  são a permissividade do vácuo usual, a permissividade relativa e a permeabilidade relativa do  $\mathcal{AED}$ . Encontraremos para a massa do fóton a relação

$$m_\gamma^2 = \frac{2\hbar^2}{c^4} \omega^2 (1 - v_g/c), \quad (2.2)$$

onde  $\hbar = h/2\pi$ .

Supondo-se que no  $\mathcal{AED}$   $\chi_e\chi_m > 1$ , então  $v_g < c$  para as frequências do espectro eletromagnético. Se  $m_\gamma \leq 10^{-68} kg$  teremos  $\sigma < 10^{-25}/s$ , que é um valor abaixo daquele encontrado por [12], no qual foram utilizados parâmetros cosmológicos.

Ainda que a nível local seja muito difícil a detecção de  $\sigma$ , sabe-se que os modelos do  $\mathcal{AED}$  prevêem um efeito cósmico de anisotropia na velocidade de propagação da luz. Há autores que acreditam que este efeito poderia ser responsável pela anisotropia da radiação cósmica de fundo [15].

## 2.2 Equações do $\mathcal{Aether}$

Para estudarmos as equações do  $\mathcal{AED}$  observemos que as equações homogêneas de Maxwell são sempre satisfeitas para campos eletromagnéticos  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu$ , logo poderemos estudar somente as modificações que o modelo do  $\mathcal{AED}$  introduzirá nas equações inhomogêneas de Maxwell (lei de Gauss e lei de Ampère-Maxwell), que no vácuo se escrevem

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Ao supormos a existência da condutividade  $\sigma$  no  $\mathcal{AED}$ , teremos apenas a introdução do termo de corrente  $\sigma\mathbf{E}$  na segunda equação, a qual passará a ser

$$c^2\nabla \times \mathbf{B} = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Nosso objetivo agora é escrever as equações do  $\mathcal{AED}$  na forma covariante para posteriormente fazermos sua aplicação nos espaços curvos. Com este objetivo observamos que, na literatura sobre eletrodinâmica de plasma em espaços curvos [16], o termo da condutividade é escrito covariantemente na forma  $\sigma u_\alpha F^{\nu\alpha}$ , onde  $u_\alpha$  é a quadri-velocidade do sistema de referência considerado. No caso de sistemas de referência *comóveis*, temos por definição  $u_\alpha = \delta_\alpha^0$  (onde o índice 0 corresponde à coordenada temporal).

Poderemos então escrever diretamente as equações de Maxwell em um  $\mathcal{AED}$  na forma covariante,

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = (\sigma/c)u_\alpha F^{\nu\alpha}, \quad (2.5)$$

onde a vírgula subscrita significa a derivada comum, que deverá ser substituída pela derivação covariante quando o espaço for curvo.

Em estudos que realizamos sobre o  $\mathcal{AED}$  [17], foi necessário utilizarmos o formalismo lagrangeano. A usual lagrangeana do eletromagnetismo na presença de uma quadri-corrente tem o termo de interação  $(\sigma/c)u_\alpha F^{\nu\alpha}\Phi_\nu$ , que acarretará as equações de campo

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + (\sigma/c)\partial^\alpha(u_\alpha\Phi_\nu - u_\nu\Phi_\alpha) + (\sigma/c)u^\alpha F_{\nu\alpha} = 0. \quad (2.6)$$

que no calibre de Lorentz,  $\partial_\alpha\Phi^\alpha = 0$ , e em coordenadas cartesianas são

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$c^2\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} - \frac{\sigma}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

onde  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são respectivamente os potenciais escalar e vetorial do campo eletromagnético  $F_{\mu\nu}$ .

Observemos que neste tratamento para obter as equações de movimento, tanto a lei de Gauss quanto a lei de Ampère-Maxwell foram modificadas com o aparecimento de termos

"extras", ambos proporcionais à derivada temporal dos potenciais. Estes termos são proporcionais a  $\sigma$ ; caso façamos  $\sigma = 0$ , teremos as equações de Maxwell usuais como era de se esperar. Podemos interpretar a derivada temporal do potencial escalar  $\phi$  funciona na lei de Gauss modificada como uma densidade de carga, e a derivada temporal do potencial vetorial  $\mathbf{A}$  na lei de Ampère-Maxwell como uma *anti-corrente de deslocamento*, pois tem sinal contrário ao termo  $\partial\mathbf{E}/\partial t$ . Caso as medições que são associadas a uma possível existência de uma corrente de deslocamento *real* possam vir a ser confirmadas no futuro, estas equações poderão servir como um modelo teórico mais geral para ser comparado com resultados experimentais.



# Chapter 3

## Eletromagnetismo de Proca

Neste capítulo apresentaremos inicialmente soluções que encontramos para as equações de Proca no tritoro [18], e em seguida uma discussão comparativa [19] das propriedades do tensor energia-momentum de Maxwell e do de Proca.

### 3.1 Eletromagnetismo de Alcance Finito

O eletromagnetismo de Proca é uma teoria de alcance finito [20] à qual corresponde, após o procedimento de quantização, uma massa não nula para o fóton. É verdade que os limites experimentais estabelecidos para a massa do fóton, e a manutenção da invariância de calibre de segunda espécie, fazem da teoria de Maxwell uma excelente teoria para as interações eletromagnéticas. Contudo, em nossa opinião, há ainda muitos aspectos da teoria de Proca (TP) que a tornam merecedora de consideração.

A TP é da mesma classe que a chamada teoria Einstein-de Broglie da luz (TEdB) [21], que também supõe um alcance finito para os campos eletromagnéticos. Acredita-se que a TEdB precede a TP, em razão da forte influência que de Broglie teve sobre Proca e outros de sua época. As duas teorias foram divulgadas em épocas próximas, sendo que a TEdB parece-nos ter tido menor repercussão. Há autores [20] que atribuem a pouca divulgação da TEdB a que o livro de de Broglie [21] foi publicado em época de guerra, e teve poucos exemplares divulgados devido à ocupação da França. Em outros

livros publicados posteriormente o autor expõe novamente o seu *eletromagnetismo não-maxwelliano* [22], bem como suas idéias sobre uma possível composição do fóton por férmions. As equações não-maxwellianas de de Broglie podem ser reduzidas às conhecidas equações do eletromagnetismo de Proca que aparecem usualmente na literatura [15, 12]. No contexto desta monografia chamaremos o eletromagnetismo de alcance finito de TP ou de eletromagnetismo não-maxwelliano (ENM). Os interessados encontrarão as referências antigas destas teorias em [20], e algumas referências mais recentes são citadas no capítulo 5.

A TP é bastante usada para testar certos aspectos das teorias de campo, e tem-se revelado útil em uma série de circunstâncias outras [23]; há autores que também enfatizam muitos de seus interessantes aspectos teóricos [24].

A suposição da massa do fóton não ser nula não alteraria radicalmente a atual teoria física. Para a relatividade especial, a velocidade da luz  $c$  é uma velocidade limite para a qual a velocidade de todos os objetos tende quando a energia cinética deles se torna muito grande. Esta velocidade representa somente um limite superior (assim como a temperatura zero Kelvin representa um limite inferior para as temperaturas). Considerando-se esta teoria e certos limites para a massa do fóton, não haverão contradições observáveis com as previsões da mecânica quântica [8]. Há ainda na literatura a discussão de que a invariância de calibre de um campo vetorial não implica necessariamente em massa nula para a partícula associada a este campo [25].

Sabe-se que o *alcance*  $\lambda$  do campo de Proca está relacionado à massa do fóton por  $m_\gamma = h/(\lambda c)$ , onde  $h$  é a constante de Planck. As estimativas experimentais estabelecem que  $m_\gamma < 10^{-48}$ g [26], então podemos confortavelmente admitir que  $\lambda > 10^{25}$ cm.

Apresentaremos na primeira parte deste capítulo soluções eletromagnéticas que são ondas de Proca no trítoro  $T^3$ . Em seguida nos dedicaremos a discutir questões referentes às ondas eletromagnéticas de Proca.

O traço do tensor energia-momentum de um campo é um invariante por transformações de Lorentz que fornece algumas informações sobre esse campo; por exemplo, o traço do tensor energia-momentum do campo da radiação eletromagnética é nulo. Outro invariante de Lorentz do tensor energia-momentum é o posto da matriz que o representa. No caso acima (3.15), a 4-velocidade de um elemento de fluido no seu referencial de repouso é  $u^\alpha = \delta_0^\alpha$ , vemos então que o tensor (3.15) tem posto 1, de vez que  $T_{(m)}^{\mu\nu} = \text{diagonal}(c^2 \rho_m, 0, 0, 0)$  naquele referencial.

Para fazermos uma comparação entre as propriedades dos campos de Maxwell e de Proca, suporemos uma onda eletromagnética plana de Maxwell [28] se propagando na direção  $z$ , composta por  $\mathbf{E} = E_o(1, 0, 0) \text{sen}[k(z - ct)]$  e  $\mathbf{B} = B_o(0, 1, 0)\text{sen}[k(z - ct)]$ , tendo para vetor de onda  $k^\mu = k(1; 0, 0, 1)$ ; o tensor  $F_{\mu\nu}$  correspondente é proporcional a uma matriz de posto 1, bem como seu tensor energia-momentum (3.14). Se substituirmos o 4-vetor de onda  $k^\mu$  no lugar da 4-velocidade  $u^\mu$  em (3.15) teremos também um tensor de posto 1. Nesta abordagem clássica inicial do problema podemos dizer que estão compatíveis o tensor energia-momentum da onda plana descrita pelos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  com um conteúdo material descrito pelo tensor (3.15).

## 3.4 Campos de Proca

As equações de Proca (3.2) no espaço de Minkowski com densidade de carga-corrente  $J^\nu$  e com  $\kappa_P = -1$  são

$$F_{\nu}^{\nu\mu} + (1/\lambda^2)\Phi^\mu = J^\nu/(4a). \quad (3.16)$$

### 3.4.1 Tensor Energia-Momentum de Proca

Se  $J^\nu = 0$ , o tensor energia-momentum *simétrico* do campo eletromagnético de Proca ( $P$ ) puro pode ser obtido analogamente ao maxwelliano a partir de (3.13), onde devemos acrescentar à densidade de lagrangeana do eletromagnetismo maxwelliano o termo  $b\Phi^\mu\Phi_\mu$ ,

sendo  $b$  uma constante que depende do sistema de unidades utilizado, obtendo-se

$$T_P^{\lambda\nu} = 4a \eta^{\lambda\beta} F^{\nu\alpha} F_{\beta\alpha} + 2b \Phi^\lambda \Phi^\nu - a \eta^{\lambda\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - b \eta^{\lambda\nu} \Phi^\sigma \Phi_\sigma. \quad (3.17)$$

A quadridivergência das equações (3.16) revela que somente no calibre de Lorentz  $\Phi^\lambda_{,\lambda} = 0$  temos a conservação da 4-corrente. Podemos escrever as equações de Proca neste calibre, sem cargas ou correntes para o potencial  $\Phi^\mu$ , chegando à equação da onda de Proca

$$\mathcal{D}\Phi^\lambda + \uparrow\uparrow^\epsilon \Phi^\lambda = \prime \quad (3.18)$$

onde  $\mathcal{D}$  é o operador 4-D'Alembertiano  $\partial_{ct}^2 - \nabla \cdot \nabla$ .

Chamaremos de onda de Proca [20] a solução desta equação que se propague na direção do eixo  $z$ ; o potencial dessa onda é

$$\Phi^\lambda \equiv (0; A, 0, 0) \cos(kz - \omega t), \quad A = \text{const.} \quad (3.19)$$

Também aqui temos a relação de dispersão (3.8). E o tensor do campo eletromagnético de Proca será

$$F^{\nu\mu} = A \sin(kz - \omega t) \begin{pmatrix} 0 & \omega/c & 0 & 0 \\ -\omega/c & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

onde se observa que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , por serem ortogonais à direção de propagação  $z$ , se assemelham às ondas maxwellianas transversais.

Levando-se o potencial  $\Phi^\lambda$  da onda livre de Proca (3.20) em (3.17) e fazendo-se  $b = -2m^2 a$ , o tensor energia-momentum poderá ser escrito como a soma de duas parcelas, uma associada ao campo  $F_{\mu\nu}$  e outra associada ao potencial  $\Phi_\mu$ , sendo

$$T_P^{\nu\mu} = -2a A^2 \sin^2(kz - \omega t) \begin{pmatrix} \omega^2/c^2 + k^2 & 0 & 0 & 2\omega k/c \\ 0 & k^2 - \omega^2/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2/c^2 - k^2 & 0 \\ 2\omega k/c & 0 & 0 & \omega^2/c^2 + k^2 \end{pmatrix} -$$

$$2aA^2m^2\cos^2(kz - \omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (3.21)$$

$$= \frac{-2aA^2}{c^2} \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & \omega kc \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega kc & 0 & 0 & k^2c^2 \end{pmatrix} + 2aA^2\cos^2(kz - \omega t) \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 & \omega k/c \\ 0 & -m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & 0 \\ \omega k/c & 0 & 0 & \omega^2/c^2 \end{pmatrix}. (3.22)$$

### 3.4.2 Ondas de Proca e Transformações de Lorentz

Vejamos agora a onda de Proca descrita pelo potencial  $\Phi^\lambda (\equiv A^x)$ , no seu próprio referencial. Para isto faremos uma transformação de Lorentz com a matriz

$$L^\lambda_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega/(mc) & 0 & 0 & -k/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k/m & 0 & 0 & \omega/(mc) \end{pmatrix}, (3.23)$$

onde  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2} = \omega/(mc)$ ,  $\beta \equiv v/c = ck/\omega$ , onde  $v$  é a velocidade da onda em relação ao sistema de referência  $\mathbf{O}$ .

Neste novo sistema de referência o qual chamaremos de  $\mathbf{O}'$ , o quadri-vetor de onda  $k^\mu = (\omega/c; 0, 0, k)$  se transformará em  $k'^\mu = L^\mu_\nu k^\nu = (m; 0, 0, 0)$ . As novas componentes do tensor energia-momentum são determinadas através de  $T'^{\lambda\beta} = L^\lambda_\alpha T^{\alpha\beta} L^\nu_\beta$ , isto é

$$T'^{\nu\mu} = -2a A^2 \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2a A^2 \cos 2mt' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix}; (3.24)$$

o quadripotencial transformado é

$$\Phi'^\lambda = (0; A, 0, 0) \cos(mt'), (3.25)$$

e o campo eletromagnético de Proca em  $O'$  será

$$F'^{\lambda\nu} = m.A \text{sen}(mt') \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Note-se que neste novo sistema o campo magnético de Proca  $B$  é nulo, e o argumento da função campo elétrico depende somente do tempo. Neste caso, não temos uma perturbação eletromagnética na qual a frente de onda *caminha* com o transcurso do tempo (como em (3.20)); dizemos então que a onda de Proca não se propaga.

Vejamos finalmente um terceiro referencial  $O''$  de onde se vê o sistema de referência  $O'$  movendo-se na direção do eixo  $x$ ; a transformação de Lorentz que leva de  $O'$  para  $O''$  é

$$L''^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \omega/(mc) & k/m & 0 & 0 \\ k/m & \omega/(mc) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Em  $O''$  as ondas se propagam paralelamente às componentes espaciais  $A''$  do 4-potencial

$$\Phi''^{\lambda} = A/m(k; \omega/c, 0, 0) \cos(kx'' - \omega t''). \quad (3.28)$$

Esta solução já era bem conhecida por de Broglie, conforme se vê em [22]. Estas ondas foram por ele chamadas de ondas longitudinais não-maxwellianas. Sua velocidade  $v''$  é paralela ao campo elétrico  $E''$  bem como ao trivetor  $A''$ .

O tensor energia-momentum em  $O''$  é

$$T''^{\nu\mu} = -2a A^2 \begin{pmatrix} \omega^2/c^2 & \omega k/c & 0 & 0 \\ \omega k/c & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2a A^2 \cos 2mct'' \begin{pmatrix} -k^2 & -\omega k/c & 0 & 0 \\ -\omega k/c & -\omega^2/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

onde a primeira parcela, associada às derivadas do potencial, é constante enquanto que a segunda, associada ao potencial, varia com o tempo.

### 3.5 Discussão

As soluções que encontramos no tritoro sugerem que em espaços compactos a teoria de alcance finito de Proca é bastante adequada. Nesta situação típica vimos que a teoria de Proca é mais eficiente que a teoria maxwelliana. Entretanto, são necessários mais estudos das semelhanças e dissemelhanças entre as duas teorias para que se possa descobrir onde e quando qual delas é a mais adequada.

Para uma comparação dos tensores energia-momentum de matéria (3.15) e do campo de Proca (3.17) utilizaremos os referenciais próprios; o tensor (3.15), com  $u^\mu = \delta_0^\mu$ , já está escrito no seu referencial próprio, mas o tensor energia-momentum do campo eletromagnético de Proca deve ser comparado na forma (3.24), isto é no referencial  $O'$ . Neste referencial ele consta de uma parte independente do tempo, do tipo (3.15), e de uma outra parte dependente do tempo e anisotrópica. Este tensor se assemelha ao tensor energia-momentum de um sistema composto por uma coleção de partículas com pressão [29], anisotrópica e dependente do tempo. Podemos notar ainda que a segunda parcela de (3.24) é nula quando  $2mct = (n + 1/2)\pi$ , e há direções em que é negativa. Observamos ainda que o posto da matriz é 4, e não 1 como o caso maxwelliano.

Notemos também que a transformação de Lorentz (3.23) informa que no referencial do laboratório  $O$  o conteúdo material associado ao campo de Proca se propaga na direção do eixo  $z$  com velocidade  $v = kc^2/\omega$ , que é a velocidade de grupo  $v_g$  (3.9) da onda considerada.

Um elemento de volume  $\Delta V$  que está se movendo na direção  $z$  com  $v = kc^2/\omega$  conterà uma quantidade fixa de energia. No caso das ondas de Proca que descrevemos, podemos notar que o potencial da onda livre de Proca e o campo (3.20) desta onda variam de acordo com a velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{k} > c. \quad (3.30)$$

Supondo-se que em  $t = 0$  o elemento de volume  $\Delta V$  está em  $z_0$ , como se move com  $v_g$ , as

partículas localizadas em  $\Delta V$  terão  $z = z_o + kt/\omega$ , o que acarretará

$$\begin{aligned}\Phi^\lambda &= (0; A, 0, 0)\cos(kz_o - m^2t/\omega), \\ E_x &= (\omega/c)A\text{sen}(kz_o - m^2t/\omega), \\ B_y &= (k/c)A\text{sen}(kz_o - m^2t/\omega).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Estas expressões são dependentes do tempo devido ao termo massivo;  $v_f \neq v_g$ , mas se  $m \rightarrow 0$  então teremos  $v_g \rightarrow v_f$ .

A densidade de energia e a componente  $z$  da densidade de momentum em  $\Delta V$  é obtida ao substituir (3.31) no tensor energia-momentum (3.21) obtendo-se

$$T^{00} = -2a A^2 \left[ \omega^2/c^2 - k^2 \cos(2kz_o - \frac{2m^2c^2t}{\omega}) \right], \tag{3.32}$$

$$T^{30} = -2a A^2(\omega k/c) \left[ 1 - \cos(2kz_o - \frac{2m^2c^2t}{\omega}) \right]. \tag{3.33}$$

A onda de Proca transversal contida em um volume  $\Delta V$  mostra uma dependência temporal da variação de energia  $\Delta E$  e de momentum  $\Delta p$  (contidas no  $\Delta V$ ). Caso estas quantidades estivessem se movendo com uma hipotética partícula livre de Proca, a razão  $\alpha \equiv \Delta p/\Delta E$  seria dependente do tempo; isso contrasta com o caso da partícula livre usual, onde  $\alpha$  é independente do tempo. No caso das ondas de Proca isto não ocorre; por exemplo, no instante em que  $kz_o - m^2t/\omega = n\pi$  teremos  $T^{30} = 0$ , mas a energia correspondente  $\Delta V T^{00}$  será  $A^2 m^2 \Delta V / 8\pi$ , o que significa que a partícula em tal instante - *neste referencial* - está em repouso. Desenvolvimento semelhante para o caso em  $\mathbf{O}'$ , isto é, ondas longitudinais de Proca, levam a resultado análogo.

No caso do campo de Proca temos diferentes valores para a velocidade de grupo e de fase, e em (3.22) e (3.29) os dois termos não são proporcionais: já nas ondas maxwellianas, como  $m = 0$ , temos  $k = \omega$ , o que acarreta

$$T^{00} = T^{30} \frac{A^2 \omega^2}{8\pi} [1 - \cos(2kz_o)]. \tag{3.34}$$

quantidades estas que são independentes do tempo.

Estas discrepâncias entre a teoria maxwelliana e a teoria de Proca, juntamente com outras que aqui não foram apresentadas, levaram a recentes especulações sobre um possível



conteúdo material, ainda desconhecido, associado ao campo de Proca [19]; entretanto, desde a época da TEdB já encontramos especulações semelhantes [21, 22].

# Capítulo 4

## Soluções Não-Maxwellianas Exatas

O estudo de campos magnéticos cósmicos tem sido alvo de trabalhos de diversos autores. Com os telescópios orbitais, informações mais confiáveis estão chegando do Cosmo, permitindo investigação mais minuciosa da existência e evolução de tais campos. Os campos magnéticos não uniformes constituem uma interessante possibilidade para ser investigada.

Apresentaremos neste capítulo o estudo da evolução destes campos em geometrias elíticas. A geometria pré admitida pelo problema, na qual evoluem os campos eletromagnéticos, costuma ser chamada de "background", que aqui chamaremos de *arena*. Consideraremos primeiramente como *arena* o universo estático de Einstein, e em seguida a geometria com curvatura constante positiva de Friedmann. As coordenadas escolhidas são as *coordenadas cilíndricas de Schrödinger* [30]  $(\rho, \phi, \zeta)$ . Estas coordenadas são chamadas de cilíndricas porque quando  $\rho \rightarrow 0$  encontramos  $dl^2 \rightarrow d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + d\zeta^2$ , o familiar elemento de linha do triespço plano. A coordenada azimutal  $-\pi < \phi \leq +\pi$  é bem conhecida, mas a altura  $\zeta$  é uma coordenada cíclica cujos limites dependem da topologia da trivariiedade; na triesfera  $S^3$  a altura vai de  $-\pi$  a  $+\pi$ , já no triespço projetivo real  $P^3$  varia no intervalo  $(-\pi/2, +\pi/2]$ .

onde o ponto superescrito significa a derivada em relação ao tempo  $t$ . Numa base ortonormal as componentes não nulas dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são

$$E_\phi = -R\dot{f} \sin \rho, \quad B_\zeta = 2f \cos \rho. \quad (4.4)$$

As equações de Proca em meios condutores são

$$F_{;\mu}^{\mu\nu} + (\kappa_P/\lambda^2)\Phi^\nu = (\sigma/c)u_\alpha F^{\nu\alpha}. \quad (4.5)$$

onde  $\sigma > 0$  é a condutividade de deslocamento elétrico,  $u_\alpha$  é a 4-velocidade do meio condutor,  $\lambda$  é o alcance do campo de Proca, e  $\kappa_P = \pm 1$  corresponde a duas classes diferentes de campo de Proca. Para  $\nu = 2$  e  $u_\alpha = \delta_\alpha^0$  a equação (4.5) leva a

$$\ddot{f} + 2\Gamma\dot{f} + \gamma f = 0, \quad (4.6)$$

onde

$$\Gamma = \sigma/2, \quad \gamma = 4c^2/R^2 + \kappa_P c^2/\lambda^2. \quad (4.7)$$

Dependendo dos valores relativos das constantes  $\Gamma$  (não negativo) e  $\gamma$  (arbitrário) existem três classes de soluções de (4.6); veja a tabela 4.1, onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração.

Tabela 4.1: Funções Potencial  $f(t)$

Classes	Soluções Exatas de (4.6)
$\Gamma^2 = \gamma$	$f(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\Gamma t}$
$\Gamma^2 < \gamma$	$f(t) = C_1 e^{-\Gamma t} \cos(\sqrt{\gamma - \Gamma^2} t) + C_2$
$\Gamma^2 > \gamma$	$f(t) = e^{-\Gamma t}(C_1 e^{\sqrt{\Gamma^2 - \gamma} t} + C_2 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \gamma} t})$

São particularmente interessantes as soluções nas quais a energia do campo é distribuída homoganeamente no triespço. Das equações (4.4) verificamos que a quantidade  $\Delta = E_\phi^2 + c^2 B_\zeta^2$  é independente de  $\rho$  somente quando  $R^2 \dot{f}^2 = 4c^2 f^2$ , o que implica

em  $f(t) \propto \exp(2\epsilon ct/R)$ , com  $\epsilon = \pm 1$ . Discutiremos a seguir três tipos de soluções não equivalentes com  $\partial\Delta/\partial\rho = 0$ , e relações entre as seis quantidades  $\{\sigma, \lambda, R, c, \kappa_P, \epsilon\}$ .

### 4.1.3 Discussão

Como pode ser visto em (4.4), em todas as soluções os campos E e B são mutuamente ortogonais e espacialmente não-homogêneos. O campo E é puramente azimutal, desaparece no eixo  $\zeta$  (eixo onde  $\rho = 0$ ), e é máximo ao longo da circunferência  $\rho = \pi/2$ . Opostamente o campo B é puramente longitudinal, é máximo ao longo do eixo  $\zeta$  e desaparece na circunferência  $\rho = \pi/2$ . Estas expressões para os campos são globalmente possíveis enquanto a topologia do triespço é ou a triesfera simplesmente conexa  $S^3$  ou o triespço projetivo real  $P^3$ . Nenhuma outra trivariiedade multiplamente conexa dotada de geometria elítica (por exemplo o dodecaedro de Poincaré) acomoda globalmente estes campos.

Da tabela (4.1) podemos distinguir duas soluções *estáticas*: uma é a solução trivial sem campos  $E = B = 0$ , correspondente a  $C_1 = C_2 = 0$ ; a outra é a solução puramente magnetostática com  $E = 0$  e  $B_\zeta = 2C_1 \cos \rho$ , pertence à classe  $\Gamma^2 > \gamma$  com  $C_2 = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\kappa_P = -1$ ,  $\lambda = R/2$ .

Todas as soluções *não-estáticas* são ondas *estacionárias* de Proca com amortecimento exponencial na evolução do tempo. Na classe  $\Gamma^2 > \gamma$  há uma excessão que merece ser mencionada: quando  $\gamma < 0$ , isto é  $\kappa_P = -1$  e  $\lambda < R/2$  na equação (6.9), o potencial  $f(t)$  e os campos de Proca mostram um crescimento exponencial com a evolução do tempo. Três conjuntos de soluções não estáticas foram encontradas com a quantidade  $\Delta = E_\phi^2 + c^2 B_\zeta^2$  independente da localização no triespço: veja a tabela (4.2). Os conjuntos a e b têm  $\Delta \propto \exp(-4ct/R)$  (amortecimento ao longo do tempo), ambos contêm  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\sigma = 4c/R$  (um campo de Maxwell) como um caso especial. O conjunto c tem  $\Delta \propto \exp(+4ct/R)$  (aumenta ao longo do tempo). Os conjuntos b e c contêm como caso especial  $\lambda = R/\sqrt{8}$ ,  $\sigma = 0$  (condutividade nula).

Tabela 4.2: Parâmetros para  $\Delta(t)$  Uniforme

a	$\kappa_P = +1$	$\sigma = 4c/R + cR/(2\lambda^2)$	$\lambda$ free	$\epsilon = -1$
b	$\kappa_P = -1$	$\sigma = 4c/R - cR/(2\lambda^2)$	$\lambda \geq R/\sqrt{8}$	$\epsilon = -1$
c	$\kappa_P = -1$	$\sigma = cR/(2\lambda^2) - 4c/R$	$\lambda \leq R/\sqrt{8}$	$\epsilon = +1$

Com respeito às constantes  $m_\gamma, \lambda, \sigma$  e  $R$  é interessante fazer algumas observações. Primeiramente lembremos que a massa  $m_\gamma$  e o alcance  $\lambda$  têm a correspondência quântica  $m_\gamma c = h/\lambda$ , onde  $h = 6.6 \times 10^{-34}$  Js é a constante de Planck. Admitindo  $\lambda \approx R \approx 10^{10}$  anos-luz  $\approx 10^{26}$  m, então  $m_\gamma \approx 10^{-68}$  kg, que é 15 ordens de grandeza menor que o limite superior obtido por técnicas experimentais [20]; isto significa que o campo de Proca com este alcance  $\lambda$  é atualmente indistinguível do campo de Maxwell. Da tabela (4.2), e admitindo  $\lambda \approx R \approx 10^{26}$  m, teremos  $\sigma \approx 10^{-17}$ /s para sistemas com a quantidade  $\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2$  homogeneamente distribuída sobre o triespço; este valor para a condutividade coincide na ordem de grandeza com aquele obtido em diferente contexto por [12]. Observamos finalmente que se considerarmos os valores acima para as várias constantes na classe das oscilações harmônicas,  $\Gamma^2 < \gamma$ , na tabela (4.1), então a frequência resultante será  $\delta \approx 10^{-18}$  Hz: campos com esta lenta oscilação parecem estáticos.

## 4.2 Solução na Geometria Elítica de Friedmann

O propósito desta seção é o estudo de campos magnéticos não uniformes na geometria elítica evolutiva de Friedmann [33].

### 4.2.1 Campo Magnético Toroidal na $S^3$ e no $P^3$

O elemento de linha que utilizaremos é do tipo (4.1), porém com  $R = R(t)$  (arbitrário); além disto, aqui faremos  $c = 1$ . Admitiremos nesta geometria o potencial

$$\Phi_\mu = a(0; 0, 0, \cos^2 \rho), \quad a = \text{const}; \quad (4.8)$$

este potencial também satisfaz o calibre de Lorentz. O campo  $F_{\mu\nu}$  correspondente tem uma única componente não-nula

$$F_{13} = -F_{31} = a \operatorname{sen}(2\rho). \quad (4.9)$$

Consideraremos aqui as equações de Proca (4.5) sem cargas ou correntes e em meios não condutores ( $\sigma = 0$ ) e faremos  $\kappa_P = -1$ . O campo (4.9) satisfaz estas equações para  $\lambda = R(t)/2$ .

### 4.2.2 Discussão

O potencial (4.8) tem sua intensidade máxima ao longo da circunferência  $\rho = 0$  e diminui monotonicamente até zero na circunferência  $\rho = \pi/2$ . Nas duas topologias  $S^3$  e  $P^3$  estas duas circunferências são geodésicas polares entre si.

O campo magnético é puramente azimutal com componentes físicas

$$H_\omega = -2aR^{-2}(t) \operatorname{sen}2\rho. \quad (4.10)$$

Em um tempo fixo  $t$  o campo  $H$  aumenta do valor zero ao longo de  $\rho = 0$  até ao valor  $\rho = \pi/2$ . Cada linha de campo é uma circunferência com  $\rho$  e  $\zeta$  constantes, a intensidade do fluxo é constante ao longo de cada circunferência.

Notemos ainda que o campo (4.10) é dependente do tempo devido ao fator de escala  $R(t)$ , as linhas de campo comportam-se como se estivessem congeladas no triespaco *arena*. Este triespaco expande ou contrai dependendo do fator de escala  $R(t)$ , entretanto não é produzido campo elétrico. Este é um resultado inesperado do ponto de vista maxwelliano, onde a variação temporal do campo magnético tem como consequência um campo elétrico.

# Capítulo 5

## Ação da Expansão em Sistemas

### Locais

Um dos modelos mais frequentemente utilizados para descrever a chamada *expansão* do universo [34] é aquele no qual o universo é representado pela superfície de um balão e os aglomerados de galáxias por moedas sobre esta superfície. À medida em que a superfície do balão se expande, a distância entre as moedas aumenta, mas as próprias moedas continuam do mesmo tamanho [29] [35], não sendo elas afetadas pela expansão.

Será que este modelo para descrever a expansão é o mais adequado ? Para responder esta pergunta precisamos saber como a expansão influencia os sistemas locais, tais como átomos, sistema solar e mesmo galáxias. Este capítulo se destina a este tema já que encontramos na literatura recente diversos questionamentos e discussões no assunto [36, 37, 1].

### 5.1 Introdução

No modelo cosmológico padrão se supõe que o universo é dotado da métrica de Friedmann-Robertson-Walker(FRW), que é intrinsecamente dinâmica. O fator de escala  $R(t)$  acarreta o aumento (ou diminuição) das distâncias próprias [27]. No contínuo espaço-

tempo não há restrição matemática referente às escalas onde a expansão atua. Contudo, na prática, sabe-se que em pequenas escalas espaciais e temporais esta ação, se existir, está longe de ser detectada atualmente.

Alguns autores estudaram, por exemplo, a ação da expansão sobre os aglomerados galácticos, sistemas estelares e planetários (vejam-se diversas referências em [38]), mas não chegaram a respostas conclusivas. Muito trabalho já foram feitos como tentativas de responder estas questões; alguns deles chegam a resultados opostos, conforme se pode notar na vasta bibliografia existente no assunto. Sob nosso ponto de vista, há estudos que utilizam modelos teóricos que atualmente têm pouca aplicação. Por exemplo, em trabalho recente [39] se chega à conclusão que a influência da expansão sobre o átomo de hidrogênio é totalmente desprezível, contudo o modelo atômico utilizado é um modelo clássico em absoluto desuso.

É ainda trabalhosa a comparação entre os diferentes trabalhos encontrados, pois diferentes sistemas de coordenadas são utilizados pelos autores. Seria bastante conveniente que fosse feita uma padronização dos sistemas de coordenadas utilizados para tratar deste assunto. Infelizmente cada autor prefere escolher um sistema de coordenadas mais adequado ao problema que está tratando, e ao método que está utilizando.

Apesar das diversas dificuldades para se chegar a um resultado teórico satisfatório, as observações atuais confirmam que, se as distâncias diretamente envolvidas nos sistemas físicos considerados são de ordem de grandeza muito pequena em relação ao raio de curvatura do universo, a influência da expansão é tão pequena que não precisa ser levada em consideração.

Para se comparar os resultados teóricos com as observações, se tem adicionalmente dificuldade em relacionar as coordenadas utilizadas nos modelos com aquelas relevantes para as observações astronômicas. Uma tentativa para resolver este problema é a utilização de *sistemas de referência localmente inerciais* (SLI) [27, 29], que são os sistemas mais utilizados nas observações astronômicas. Estudaremos a influência da expansão sob o ponto de vista dos SLI seguindo a referência [38].



Podemos fazer inicialmente uma avaliação qualitativa partindo da formulação geométrica do princípio de equivalência. Em um ponto  $p$  do espaço-tempo curvo, pode-se aproximar a variedade pseudo-riemanniana pelo seu espaço tangente plano; esta aproximação é válida somente em uma pequena vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$ ; ela perde o sentido quando o tamanho de  $\mathcal{U}(p)$  se torna comparável ao raio de curvatura do espaço-tempo. Do ponto de vista físico o espaço tangente em  $p$  descreve o espaço-tempo visto por um observador caindo livremente, um SLI. Supõe-se que o efeito da expansão seja desprezível localmente, mas que sua influência cresça com a distância, atingindo intensidade significativa nos escalões cosmológicos.

Pretendemos fazer a seguir uma avaliação quantitativa deste problema: para isto começaremos estudando o movimento de uma partícula sujeita a forças externas, a partir de um SLI, usando *coordenadas normais de Fermi*,  $\{x_F^\mu\}$  [40] - as quais chamaremos para simplificar apenas de coordenadas de Fermi <sup>1</sup>.

## 5.2 Coordenadas Normais de Fermi

Para melhor intuirmos os conceitos relacionados com as coordenadas de Fermi e os SLI, vejamos preliminarmente, sob o ponto de vista da mecânica newtoniana, conceitos semelhantes. Para tal, lembremo-nos que o princípio de equivalência galileano diz que, num dado campo gravitacional, todas as partículas pontuais caem com a mesma aceleração. Um sistema de referência em queda livre pode detectar a presença do campo gravitacional terrestre através das forças de *maré*: por exemplo, em uma nave espacial em queda livre, na órbita terrestre. Esta força é produzida pelo campo gravitacional da Terra, por exemplo na deformação de uma gota d'água em suspensão na nave espacial: a força de maré tem origem na pequena inhomogeneidade do campo gravitacional terrestre.

<sup>1</sup>Há diversas outras coordenadas locais parecidas às coordenadas normais de Fermi. Nas coordenadas de Fermi, a curva de referência é uma geodésica, nas outras coordenadas a curva de referência não é obrigatoriamente uma geodésica. O leitor interessado pode encontrar em [10, 29] a descrição de algumas destas outras coordenadas.

A magnitude desta força é calculada pela mecânica newtoniana [41], sendo proporcional ao *tensor força de maré*. O correspondente a este tensor na relatividade geral é o tensor de Riemann.

Suporemos que um ponto de referência, que é a origem do sistema de coordenadas  $\{x^k\}$ , está em queda livre, e que a distância de uma partícula de massa  $m$  a um centro de atração gravitacional é muito maior que a distância da partícula à origem das coordenadas. Pode-se escrever newtonianamente que as componentes  $f^k$  da força de maré atuando na partícula são

$$f^k = -m \frac{d^2 x^k}{dt^2} = mc^2 R^k_{0i0} x^i. \quad (5.1)$$

onde  $t$  é o tempo,  $c$  a velocidade da luz e  $R^k_{0i0}$  são componentes  $(^k_i)$  do tensor força de maré, onde estão colocados os dois índices "0" extras para compatibilizá-lo com o tensor de Riemann da relatividade geral.

A generalização da equação (5.1) para o espaço curvo é a conhecida equação do desvio geodésico, e as coordenadas geodésicas em queda livre são coordenadas de Fermi [41, 29]. Esta equação nos diz o quanto duas geodésicas vizinhas são separadas devido à curvatura do espaço tempo; ou, no exemplo acima, o quanto um lado da gota d'água está "caindo livremente" diferentemente do outro lado, devido às diferenças locais na curvatura do espaço-tempo.

Na relatividade geral, as coordenadas de Fermi são tomadas na vizinhança de uma certa geodésica  $\mathcal{G}_1$ . Sobre  $\mathcal{G}_1$  o tensor métrico do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  é igual ao tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Isto é, temos  $g_{\mu\nu}|_{\mathcal{G}_1} = \eta_{\mu\nu}$ , e os símbolos de Christoffel  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  são nulos ao longo de  $\mathcal{G}_1$  [40].

Com  $c = 1$ , em espaço-tempo FRW do tipo Einstein-de Sitter, as coordenadas que utilizaremos são  $x^\mu = (t, x, y, z)$ , que escreveremos também  $(t_{FRW}, \vec{x}_{FRW})$ . A métrica se escreve

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.2)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala responsável pela expansão do universo.

Uma base ortonormal de tetradas  $\hat{e}_\mu^F$  se propaga paralelamente ao longo da geodésica  $\mathcal{G}_1$ . Os vetores da base FRW,  $\hat{e}_\mu^{FRW}$ , estão relacionados com os de Fermi,  $\hat{e}_\mu^F$ , por

$$\hat{e}_\alpha^F = \Lambda_\alpha^\nu \hat{e}_\nu^{FRW} \quad (5.3)$$

onde  $\Lambda_\alpha^\nu = \text{diagonal}(1; a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$ , e as componentes do tensor de Riemann em coordenadas de Fermi,  $R_{\alpha\beta\mu\nu}^F$ , podem ser obtidas através de suas componentes nas coordenadas de Friedmann. Ao longo da geodésica  $\mathcal{G}_1$ , escreve-se

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^F = \Lambda_\alpha^\sigma \Lambda_\beta^\lambda \Lambda_\mu^\omega \Lambda_\nu^\kappa R_{\sigma\lambda\omega\kappa}^{FRW}. \quad (5.4)$$

Desejamos encontrar transformações que nos levem das coordenadas do espaço-tempo curvo (FRW) para as coordenadas normais de Fermi, assim como encontrar também expressões para a métrica do espaço-tempo e para as equações de movimento nestas coordenadas.

A origem do sistema de referência, em coordenadas FRW, tem como linha de universo a geodésica  $r = 0$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ). Queremos encontrar as coordenadas de Fermi de um ponto  $P$ , próximo da origem, cujas coordenadas FRW são dadas por  $(t_{FRW}; \vec{x}_{FRW})$ . A linha de universo de um observador na origem  $r = 0$  intercepta a trisuperfície  $t = \text{const}$  ortogonalmente em um ponto que chamaremos de  $Q$ . Tomemos uma geodésica  $\mathcal{G}_2$ , puramente espacial e que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ . As duas geodésicas são ortogonais. Seja  $\tau$  o parâmetro ao longo da geodésica  $\mathcal{G}_2$ , tomemos  $\tau = 0$  em  $Q$ , e  $\tau = 1$  em  $P$ , o vetor velocidade inicial é  $T^\mu = dx^\mu/d\tau|_{\tau=0}$ . O tempo de Fermi,  $t_F$ , é tomado de forma a ser o tempo próprio desde a singularidade cosmológica inicial até  $Q$ , ao longo de  $\mathcal{G}_1$ . As coordenadas espaciais de Fermi são dadas pela projeção de  $T^\mu$  sobre uma triáde ortonormal  $e_{(a)}^\mu$  ( $a = 1, 2, 3$ ), ou seja,  $e_{(1)}^\mu$  aponta na direção  $x$ ,  $e_{(2)}^\mu$  e  $e_{(3)}^\mu$  nas direções  $y$  e  $z$  respectivamente.

A equação da geodésica  $\mathcal{G}_2$  nas coordenadas FRW tem soluções na forma  $x^k = x^k(t, c_m)$  e  $t = t(t, c_m)$ , onde  $c_m$  são um conjunto de oito constantes. Das condições estabelecidas

acima, temos no ponto  $Q$

$$\begin{aligned} x^k(0, c_m) &= 0, & t_F &= t(0, c_m), \\ \frac{\partial t}{\partial \tau}(0, c_m) &= 0, & x_F^k &= a(t_F) \frac{\partial x^k}{\partial \tau}(0, c_m). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Este conjunto de equações pode ser resolvido para  $c_m = c_m(x_F^k, t_F)$ , que em  $P$ , onde  $x_{FRW}^k = x^k(1, c_m)$  e  $t_{FRW} = t(1, c_m)$ , fornecerá as transformações desejadas  $x_{FRW}^k = x_{FRW}^k(x_F^m, t_F)$  e  $t_{FRW} = t_{FRW}(x_F^m, t_F)$ .

As equações das geodésicas em coordenadas FRW são

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + a\dot{a} \left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.6)$$

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0. \quad (5.7)$$

A integral primeira de (5.7) é

$$\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{C_1^k}{a^2}. \quad (5.8)$$

onde  $C_1^k$  são constantes. Das equações (5.6, 5.8) obtemos

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{|\vec{C}_1|^2}{a^2} - C_2}. \quad (5.9)$$

sendo  $C_2 = \text{constante}$ .

Faremos agora o fator de expansão  $a(t) = (\alpha t)^n$ ,  $\alpha$  e  $n$  constantes. As equações (5.8, 5.9) poderão ser integradas por série de potências, e escreveremos

$$\begin{aligned} t(\tau) &= t_0 + \sqrt{\frac{|\vec{C}_1|^2}{(\alpha t_0)^{2n}} + C_2} \tau - \frac{n|\vec{C}_1|^2}{2(\alpha t_0)^{2n} t_0} \tau^2 + \\ &+ \frac{(2n+1)n|\vec{C}_1|^2}{6(\alpha t_0)^{2n} t_0^2} \sqrt{\frac{|\vec{C}_1|^2}{(\alpha t_0)^{2n}} + C_2} \tau^3 + O(\tau^4). \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} x^k(\tau) &= x_0^k + \frac{C_1^k}{(\alpha t_0)^{2n}} \tau - \frac{n C_1^k}{(\alpha t_0)^{2n} t_0} \sqrt{\frac{|\vec{C}_1|^2}{(\alpha t_0)^{2n}} + C_2} \tau^2 + \\ &+ \frac{n C_1^k [(2n+1)C_2 + (3n+1)\frac{|\vec{C}_1|^2}{(\alpha t_0)^{2n}}]}{3(\alpha t_0)^{2n} t_0} \tau^3 + O(\tau^4). \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde  $t_0$  e  $x_0^k$  são constantes. Como  $t_F = t(\tau = 0)$  temos que  $t_F = t_0$ ,  $x^k(\tau = 0) = 0$  e  $x_0^k = 0$ ,  $x_F^k = a(t_0)dx^k/d\tau|_{\tau=0}$  acarreta que  $t_F^k = (\alpha t_F)^n x_F^k$  e  $dt/d\tau|_{\tau=0} = 0$ , que conseqüentemente fornece  $C_2 = -|x_F^i|^2$ . Usando  $t_{FRW} = t(\tau = 1)$  e  $x_{FRW}^k = x^k(\tau = 1)$ , teremos

$$\begin{aligned} t_{FRW} &= t_F - \frac{n|\vec{x}_F|^2}{2t_F} + O(|x_F^i|^4), \\ x_{FRW}^k &= \frac{x_F^k}{(\alpha t_F)^n} \left[ 1 + \frac{n^2|\vec{x}_F|^2}{3t_F^2} \right] + O(|x_F^i|^4). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Observe que tomando-se apenas o primeiro termo obtemos  $x_F^k = a(t_{FRW})x_{FRW}^k$  e  $t_F = t_{FRW}$ : as coordenadas de Fermi são, portanto, as coordenadas "físicas" no espaço-tempo de FRW.

De posse das expressões (5.12), que dão as coordenadas de Fermi em função das coordenadas FRW, poderemos escrever as componentes espaciais da equação da geodésica apenas nos termos de mais baixa ordem, e obteremos

$$\frac{d^2 x_F^k}{dt^2} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) x_F^k = 0. \quad (5.13)$$

### 5.3 Equações de Movimento no SLI

Utilizando-nos das transformações acima obtidas, podemos escrever a métrica na forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{n(n-1)|\vec{x}_F|^2}{t_F^2} \right) dt_F^2 + \left( \delta_{kl} \left( 1 - \frac{n^2|\vec{x}_F|^2}{3t_F^2} \right) + \frac{n^2 x_k^F x_l^F}{3t_F^2} \right) dx_F^k dx_F^l. \quad (5.14)$$

a qual poderá também ser escrita em função das componentes do tensor de Riemann, isto é,

$$ds^2 = - \left( 1 + R_{0i0i}^l x_F^i x_F^i \right) dt_F^2 - \left( \frac{4}{3} R_{0ljm}^l x_F^l x_F^m \right) dt_F dx_F^l - \quad (5.15)$$

$$+ \left( \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ijm}^l x_F^l x_F^m \right) dx_F^i dx_F^j. \quad (5.16)$$

sendo que as componentes de mais baixa ordem do tensor de Riemann são

$$R_{0x0x}^l = R_{0y0y}^l = R_{0z0z}^l = -\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{n(n-1)}{t_F^2}. \quad (5.17)$$

$$R_{xyxy}^F = R_{zxzx}^F = R_{yzyz}^F = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{n^2}{t_F^2}. \quad (5.18)$$

A equação do desvio geodésico nas coordenadas FRW é

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + R^k{}_{0l0l} x^l = 0. \quad (5.19)$$

que em virtude da nulidade dos símbolos de Christoffel nas coordenadas de Fermi se escreverá

$$\frac{d^2 x_F^k}{d\tau^2} + R^k{}_{0l0l} x^l = 0. \quad (5.20)$$

Logo as equações de movimento, em coordenadas de Fermi, com somente os termos de mais baixa ordem, são

$$\frac{d^2 x_F^k}{d\tau^2} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) x_F^k = 0, \quad (5.21)$$

onde cada ponto superescrito significa uma derivada em relação ao tempo  $t$ : fazendo-se nesta equação  $\tau = t$ , obtemos a equação (5.13).

## 5.4 Correções Cosmológicas para os Sistemas Locais

Pretendemos nesta seção discutir alguns efeitos da expansão do universo, na dinâmica de sistemas locais. Para isto, usaremos o modelo desenvolvido em [42], onde se considera como *arena* cosmológica um universo RW cujo conteúdo material é um fluido sem pressão ("poeira"): nesta *arena* estudaremos questões referentes ao problema de dois corpos.

Vejamos inicialmente que pela dinâmica newtoniana [42] o raio orbital médio  $\langle r \rangle$  e sua derivada no tempo  $\langle \dot{r} \rangle$  estão relacionados por

$$\frac{\langle \dot{r} \rangle}{\langle r \rangle} = -\frac{\epsilon}{1 + 4\epsilon} \dot{\rho}/\rho, \quad (5.22)$$

$$\text{com } \epsilon = \frac{8\pi \langle r \rangle^3 \rho}{3M}, \quad (5.23)$$

sendo  $M$  a massa do corpo central e  $\rho$  a densidade de energia do fluido. Sendo  $H = -\dot{\rho}/(3\rho)$  a constante de Hubble [34], então

$$\langle \dot{r} \rangle = -\frac{\epsilon}{1 + 4\epsilon} H \langle r \rangle, \quad (5.24)$$

Notemos que esta equação nos diz que o raio orbital aumenta proporcionalmente ao módulo de  $Hr$ .

Este problema será tratado agora por um SLI, mas nos restringiremos às *órbitas circulares* em universo Einstein-de Sitter na fase de *matéria*.

A equação de movimento (5.21) pode ser escrita em coordenadas de Fermi.

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) \bar{r} = -\frac{GM}{r^2} \bar{e}_r, \quad (5.25)$$

sendo  $\bar{e}_r$  o unitário da direção  $r$ . Observamos que foi incluído um termo diferente de zero do lado direito de (5.21), devido à força gravitacional exercida pela massa central  $M$ .

A perturbação que consideraremos ao movimento central é também central: o movimento está, portanto, confinado a um plano orbital fixo, sendo então conveniente o uso de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Neste plano consideraremos as perturbações  $\delta\theta(t)$  e  $\delta r(t)$  das coordenadas orbitais, e escreveremos

$$r(t) = r_o + \delta r(t), \quad (5.26)$$

$$\theta(t) = \omega_o t + \delta\theta(t). \quad (5.27)$$

Levando-se estas definições em (5.25), obteremos <sup>2</sup>

$$r_o \delta\ddot{\theta} - 2\omega_o \delta\dot{r} = 0, \quad (5.28)$$

$$\delta\ddot{r} - 2r_o \omega_o \delta\dot{\theta} - \left(\omega_o^2 + 2\frac{GM}{r_o^3} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) \delta r = 0.$$

Como estamos considerando que as órbitas são circulares, escrevemos

$$\omega_o^2 = \frac{GM}{r_o^3}, \quad (5.29)$$

além disto, na fase de matéria  $a(t) \propto t^{2/3}$  teremos  $\ddot{a}/a = -2/(9t^2)$ , que com as equações (5.28) acarretarão

$$\delta\ddot{r} + \left(\omega_o^2 + \frac{2}{9t^2}\right) \delta r = 0. \quad (5.30)$$

---

<sup>2</sup>As equações seguintes bem como a discussão que se segue são diferentes do que foi feito em [38], entretanto as conclusões finais são semelhantes.

Para nossos fins notamos que um estudo qualitativo da equação (5.30) permite fazer a avaliação desejada da influência da expansão sobre os sistemas locais. Faremos uma comparação, nesta equação, entre as ordens de grandezas das duas parcelas do segundo termo, isto é,  $\omega_o^2$  e  $2/(9t^2)$ , as quais chamaremos, respectivamente, de parcelas (1) e (2).

Independentemente de qual sistema local está sendo estudado, sabemos que para a idade do universo  $t \approx 6.3 \times 10^{17}$ seg, o fator (2) é de ordem de grandeza  $10^{-34}$ ; já para avaliação da ordem de grandeza da parcela (1) precisamos especificar o valor da constante  $\omega_o$ , o qual depende do sistema local que está sendo considerado.

## 5.5 Algumas Estimativas

No caso do sistema Terra-Sol, temos  $r_o \approx 1.5 \times 10^{11}$ m, e a frequência angular  $\omega_o$  é aproximadamente igual a  $2 \times 10^{-7}$ seg $^{-1}$ , o que acarretará para a parcela (1) a ordem de grandeza  $10^{-13}$ , conseqüentemente a parcela (2) será 21 ordens de magnitude inferior.

Em escala *galáctica* podemos considerar que o Sol está afastado do centro da galáxia de  $r_o = 8,5 \pm 1$ kpc, e tem uma velocidade orbital de  $220 \pm 15$ km s $^{-1}$  [38]. Como  $\omega_o = v_o/r_o$ , o período orbital é de  $\approx 2 \times 10^8$  anos, e a frequência angular é  $\omega_o \approx 10^{-15}$ seg $^{-1}$ . Neste caso a parcela (1) é de ordem de magnitude  $10^{-30}$ , o que mostra, agora, um efeito da expansão apenas 3 ordens de magnitude inferior a aquele causado pela parcela (1). Note-se que neste caso o efeito é 17 ordens de magnitude maior que o determinado acima para o caso do sistema Terra-Sol.

Este resultado já era previsto pela relatividade einsteiniana, onde os efeitos da curvatura do espaço-tempo se tornam mais significativos à proporção em que as dimensões características do problema a ser tratado estão mais próximas das dimensões relevantes no cálculo da curvatura do espaço-tempo cósmico.

Vejamos, finalmente, este mesmo problema agora na escala dos *aglomerados galácticos*. Para tal, tomemos o raio do "caroço", ou núcleo central do aglomerado,  $r_o \approx 250$ kpc, e  $\sigma \approx 800$ km s $^{-1}$ , que é a velocidade com a qual as galáxias da borda do núcleo estão



orbitando; temos então  $\omega_0 \propto 10^{-16}$ /seg, conseqüentemente a parcela (1) é agora apenas *duas* ordens de magnitude superior a parcela (2).

## 5.6 Discussões

O resultado principal alcançado aqui, sob o ponto de vista de um SLI, foi a avaliação da magnitude do efeito da expansão cósmica em comparação com o efeito da força de atração gravitacional local. Pelo que vimos na seção 5 o efeito da expansão nas escalas do sistema solar ou mesmo galácticas é desprezível. Em escalas maiores como a dos aglomerados galácticos o efeito é pequeno, porém bem maior que nas escalas inferiores. Confirmam-se assim as previsões da relatividade geral de Einstein, onde o efeito da expansão aumenta à proporção em que o tamanho e a escala de tempo considerados se aproximam do raio de Hubble do universo e/ou do tempo de Hubble.

# Capítulo 6

## Amplificação Geométrica de Campos Não-Maxwellianos

Neste capítulo exporemos o estudo da evolução dos campos eletromagnéticos cósmicos nas geometria de RW [43]. Suporemos que o meio cósmico é um æther de Dirac, e admitiremos um quadripotencial com simetria cilíndrica  $\Phi^\mu$ , homogêneo, dependente do tempo. Na seção 1 veremos algumas questões referentes ao campo de indução magnética (IM) cósmica; na seção 2 elaboraremos o modelo; na 3 as equações são resolvidas e as soluções são discutidas.

### 6.1 Introdução

Acredita-se amplamente que os campos de IM cósmica são encontrados no universo onde tenhamos meios para detectá-los [3]. Eles são bastante importantes em diversos fenômenos astrofísicos. As evidências observacionais nos dizem que as galáxias são dotadas de uma IM da ordem de  $10^{-10}\text{T}$ . O estudo do conhecido efeito da rotação de Faraday leva a que se estabeleçam limites para a IM cósmica fora dos aglomerados galáticos. Estima-se que o limite superior é de  $10^{-13}\text{T}$ , e para ter este valor acredita-se que ocorreu uma amplificação de um campo magnético *semente* inicial. Admite-se que o efeito dínamo

amplificou este campo semente. O origem dos campos de IM da estrutura em larga escala do universo é ainda desconhecida [3, 44, 45, 46]. Muitas origens cosmológicas foram propostas para esses campos. Não se sabe se os atuais campos existentes de IM cósmica se amplificaram ao longo da evolução do tempo cósmico, ou se sua amplificação ocorreu rapidamente na época da formação das primeiras galáxias [5]. Estas intrigantes questões são frequentemente discutidas na literatura. Há teorias que pressupõem que os campos semente foram gerados no universo primitivo; talvez mecanismos tais como inflação, transições de fase, cosmologia quântica ou outros possam ter sido os responsáveis por sua criação [45, 46]. Há outras teorias nas quais durante a fase de radiação o momento angular das protogaláxias geraram a IM [47]. Alguns autores enfatizaram que a IM evoluiu através do efeito dínamo a partir de campos iniciais muito pequenos que não tiveram origem primordial; para estes autores a IM é resultado da compressão de um campo magnético inicial, cuja origem ainda é desconhecida e é postulada como "problema cosmológico" [48]. A condição de *congelamento* [3, 48] é a base para a explanação da origem dos campos observados de IM cósmica. Estudos recentes sugerem que o efeito dínamo "clássico" fornece uma descrição inadequada para a origem do campo de IM galático [49].

A recente evidência observacional do campo de IM no meio intergalático e a alto red-shift reforçou as pesquisas de como os campos magnéticos primordiais afetaram os cenários de formação das estruturas cósmicas. O estudo da influência da força de Lorentz na formação de galáxias após a recombinação levou alguns autores a conjecturar que a IM teve influência chave na formação das estruturas. É possível que este campo atue como fonte para a flutuação de densidade na escala galática. Acredita-se que a ação combinada das perturbações de densidade, das velocidades peculiares, e das induções magnéticas tenha influenciado fortemente a formação de estruturas cósmicas. Ações diferentes da IM podem ter ocorrido após a recombinação. Já foi sugerido que a força de Lorentz tenha sido a responsável por perturbações rotacionais e de compressão que cresceram nas protogaláxias em rotação [50]. Além disto, nas escalas onde a aglomeração de matéria

é dominada pelo regime não linear, a IM atua mais fortemente. O estudo da reação do fluido à força de Lorentz tem levado à conclusão de que em pequenas escalas a IM teve uma importância dinâmica na formação de galáxias e de aglomerados mesmo nos casos em que as perturbações originais foram causadas por outras fontes [49].

Estamos aqui interessados puramente em efeitos *geométricos* que possam ter levado à amplificação de campos primordiais. Consideraremos somente a influência da quadrigometria curva, particularmente da expansão do universo, sobre o potencial eletromagnético.

Para escolher a teoria eletromagnética mais adequada aos nossos objetivos, conjecturaremos que, em escala cósmica, a geometria curva fornece aos campos eletromagnéticos um tipo de alcance finito aos fótons que nela se propagam. Idéias similares a estas são antigas na física. Na teoria da relatividade geral (RG) é discutido desde a época de Einstein [51] que a não-nulidade da massa de repouso de todas as partículas é consequência da teoria (veja também [52]). É sabido que [15, 53] a equação da onda para o potencial eletromagnético  $\Phi^\mu$  na geometria curva é [29]

$$\Phi^\mu{}_{;\beta} + R^\mu{}_\nu \Phi^\nu = 0, \quad (6.1)$$

onde o ponto-e-vírgula significa a derivação covariante e  $R^\mu{}_\nu$  é o tensor de Ricci. O termo de curvatura pode ser interpretado como um termo de massa, que é zero no espaço-tempo sem curvatura.

Então admitiremos aqui que o espaço-tempo curvo fornece ao fóton um tipo de "massa de repouso efetiva não nula", como no caso recente da ótica de campo próximo, onde se admite uma massa efetiva para os fótons virtuais para explicar o funcionamento do microscópio de tunelamento de fótons (PSTM) [54].

Considerando-se estas questões e para a generalidade do tratamento a ser utilizado admitiremos aqui também a teoria de alcance finito de Proca, lembrando que esta teoria tem como limite a teoria maxwelliana quando o alcance se torna infinito.

Por outro lado, como se supõe que o universo foi ao longo da maior parte de sua história um bom condutor [46], admitiremos que depois da era da recombinação o universo herdou da fase anterior uma pequena condutividade. Este meio cósmico costuma ser chamado de

æther de Dirac [15, 12]. Estabeleçeremos na última seção alguns valores limites para as constantes da teoria de Proca e do æther de Dirac

## 6.2 O Modelo

Admitiremos válidas as geometrias de Robertson-Walker (RW) e utilizaremos as coordenadas cilíndricas de Schrödinger  $x^\mu = (\eta; \rho, \phi, \zeta)$ . Como nosso estudo é local não nos preocuparemos com a topologia das hipersuperfícies  $\eta = \text{const}$ , portanto não fixaremos limites para as coordenadas espaciais (para uma discussão sobre estes limites na geometria elítica veja [33]).

O tensor métrico das três geometrias de RW é escrito

$$ds^2 = R^2(\eta) \left[ d\eta^2 - (d\rho^2 + u^2 d\phi^2 + v^2 d\zeta^2) \right]. \quad (6.2)$$

onde as funções  $u(\rho)$  e  $v(\rho)$  definem o tipo de trigeometria (com curvatura constante  $k_c$ ) que está sendo considerada (veja a tabela 3.1).

Tabela 6.1: As funções  $u$  e  $v$

Funções	Curvatura $k_c$
$u = \rho, v = 1$	0
$u = \text{sen}\rho, v = \text{cos}\rho$	+1
$u = \text{senh}\rho, v = \text{cosh}\rho$	-1

Admitiremos um quadripotencial dependente do tempo com simetria cilíndrica

$$\Phi^\mu = (0; 0, 1, 0)f(\eta)/R^2(\eta), \quad (6.3)$$

onde  $f(\eta)$  é uma função a ser determinada pelas equações de campo; em cada uma das três geometria o potencial obedece ao calibre de Lorentz  $\partial_\mu [(-g)^{1/2}\Phi^\mu] = 0$ . As únicas componentes independentes do campo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi_\nu - \partial_\nu\Phi_\mu$  não nulas são  $F_{02}$  e  $F_{12}$ . Logo,

numa base ortonormal, as componentes não nulas dos campos  $\mathbf{E}$  e  $c\mathbf{B}$  são

$$E_\phi = -\dot{f}u^2/R^2, \quad cB_\zeta = 2fu' / R^2, \quad (6.4)$$

onde o ponto superescrito significa  $d/d\eta$ , a plica superescrita é a derivada  $d/d\rho$ , e  $c$  é a velocidade da luz. O campo elétrico e a IM são ortogonais e inhomogêneos, ambos dependem de  $\eta$  e  $\rho$ ; seus módulos são

$$|\mathbf{E}| = |u\dot{f}|/R^2, \quad |\mathbf{B}| = 2|fu'|/(cR^2). \quad (6.5)$$

O campo elétrico é sempre azimuthal e nulo no eixo  $\zeta$ , enquanto que a IM é sempre longitudinal, sendo máxima sobre este eixo. Como desejamos saber o quanto a expansão do universo influencia a evolução temporal do campo eletromagnético, parece apropriado definir quantidades puramente dependentes do tempo  $\mathcal{E}(\eta) \equiv |\mathbf{E}/u|$  e  $\mathcal{B}(\eta) \equiv |\mathbf{B}/u'|$ ; por simplicidade nos referiremos a estas quantidades também como campo elétrico e IM.

No acoplamento mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo as equações de Proca são

$$F_{;\mu}^{\mu\nu} + (\kappa_P/\lambda^2)\Phi^\nu = 0, \quad (6.6)$$

onde  $\kappa_P = \pm 1$  corresponde aos dois tipos diferentes do campo de Proca a serem considerados. A condutividade do meio cósmico adiciona a quadricorrente  $J^\nu = (\sigma/c)u_\alpha F^{\nu\alpha}$  [16] onde  $\sigma > 0$  é a condutividade de deslocamento elétrico e  $u_\alpha = \delta_\alpha^0$  é a quadri-velocidade do meio condutor. Então as equações gerais que temos que resolver são

$$F_{;\mu}^{\mu\nu} + (\kappa_P/\lambda^2)\Phi^\nu = (\sigma/c)u_\alpha F^{\nu\alpha}. \quad (6.7)$$

O campo de Maxwell corresponde formalmente a  $\kappa_P = 0$ . Para  $\nu = 2$  na equação (6.7) encontramos

$$\ddot{f} + \frac{\sigma}{c} R(\eta) \dot{f} + \left[ 4k_c + \frac{\kappa_P}{\lambda^2} R^2(\eta) \right] f = 0. \quad (6.8)$$

Quando  $\lambda = \infty$ ,  $\sigma = 0$ , e  $k_c = 0$ , a equação (6.8) simplifica para  $\ddot{f} = 0$ , que corresponde às equações de Maxwell no caso particular da geometria plana de RW em meio sem condutividade.

## 6.3 Soluções e Discussão

Os modelos usuais do eletromagnetismo cósmico têm uma série de questões não resolvidas, não somente sobre os campos iniciais como também sobre seus mecanismos de evolução [5]. São frequentes as discussões sobre a existência, ainda duvidosa para alguns autores, do campo de IM extra-galático [5, 44].

Procuramos soluções de (6.8) que amplifiquem a IM cósmica. Mais precisamente, desejamos desvendar mecanismos de evolução que possamos chamar de *amplificação geométrica* (AG) dos campos cósmicos. Isto significaria uma amplificação devida puramente à existência do campo gravitacional.

Nosso estudo conclui que, dependendo dos valores admitidos para as constantes  $\lambda$  e  $\sigma$ , pode-se ter um efeito colossal de amplificação dos campos  $\mathcal{E}(\eta)$  e  $\mathcal{B}(\eta)$ . Como se pode notar pela equação (6.8), o fator de escala  $R(\eta)$  é o responsável pela forte interação entre os campos eletromagnéticos não-maxwellianos (NM) e o campo gravitacional. Para evitar que sejam utilizados valores não físicos para  $\lambda$  e  $\sigma$ , estabeleceremos brevemente valores limites para estas constantes.

Sabe-se que o alcance  $\lambda$  do campo de Proca está relacionado com a massa do fóton por  $m_\gamma = h/(\lambda c)$  onde  $h$  é a constante de Planck. Estimativas atuais de laboratório fornecem  $m_\gamma < 10^{-48} \text{g}$  [26], então podemos admitir confortavelmente que  $\lambda > 10^{23} \text{m}$ . No caso da condutividade  $\sigma$  do æther de Dirac's temos  $m_\gamma = \sigma h/c^2$  [15], isto é  $\sigma < 10^{-13} \text{/s}$ . Somente valores de  $\lambda$  e  $\sigma$  que estão de acordo com estas condições serão aqui considerados, e serão chamados de *valores permitidos*.

Dentre muitas soluções interessantes de (6.8) (todas somente para valores permitidos de  $\lambda$  e de  $\sigma$ ), selecionamos algumas que possam dar uma idéia das várias possibilidades qualitativamente diferentes. Em cada um dos quatro casos apresentados serão exibidas também as soluções maxwellianas (M) correspondentes ( $\lambda = \infty$ ,  $\sigma = 0$ ).

Antes de discutirmos as soluções encontradas, devemos notar que mesmo para os valores permitidos de  $\lambda$  e de  $\sigma$  a amplificação resultante pode se tornar muito grande. Esta amplificação induz um crescimento enorme do tensor energia-momentum do campo

eletromagnético  $T_{\mu\nu}^e$ . Relembramos que estamos utilizando o modelo de eletromagnetismo em *arena* curva (EAC), no qual se pressupõe que  $T_{\mu\nu}^e$  é desprezível em comparação às fontes de matéria gravitacional ( $T_{\mu\nu}^m$ ). Então, para estarmos certos de que os campos que estão sendo estudados estão realmente no que pode se considerar um modelo de EAC, examinaremos qualitativamente esta questão: Partindo das equações de Einstein  $G_{\mu\nu} = k_G T_{\mu\nu}^m$ , comparamos  $G_{\mu\nu}/k_G$  com os valores de  $T_{\mu\nu}^e$  correspondentes aos campos que aparecem neste estudo; enquanto encontrarmos razão  $> 10^{13}$  consideraremos que nosso sistema se encontra no modelo EAC. A única exceção que aparece aqui é o caso 1B que conseqüentemente consideraremos não-válido.

A equação (6.8) é integrada analiticamente para a teoria maxwelliana, enquanto para as demais teorias ( $\lambda \neq \infty$  e/ou  $\sigma \neq 0$ ) ela é integrada numericamente. Nesta integração tomamos como tempo inicial  $\eta = \eta_i = 0.089$  ( $10^{13}$ s), e como tempo final  $\eta = \eta_f = 1.61$  ( $6.2 \times 10^{16}$ s). Na cosmologia padrão, estes valores de  $\eta$  correspondem aproximadamente ao estágio final do acoplamento da matéria-radiação e à época atual, respectivamente.

A integração numérica foi feita usando-se a linguagem FORTRAN, e dois passos diferentes foram utilizados,  $\Delta\eta = 10^{-11}$  para regiões onde os campos são mais sensíveis às variações de  $\eta$ , e  $\Delta\eta = 10^{-4}$  nas demais regiões.

Observamos que a equação (6.8) é particularmente sensível ao valor inicial da função  $\dot{f}/f$ . Usaremos a razão  $\beta_i \equiv \dot{f}_i/f_i$  para estabelecer as condições iniciais (CIs) para os casos a serem estudados.

Como se conjectura sobre a detecção do campo cósmico  $\mathcal{B}(\eta)$  da ordem de  $10^{-28}$ T [55], aqui em nosso estudo consideraremos nulos os valores  $< 10^{-35}$ T. Abandonaremos também campos elétricos  $< 10^{-27}$ V/m (pois para efeitos de comparação podemos considerar aproximadamente a relação  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ ).

### 6.3.1 No Universo Estático de Einstein

Antes de estudarmos o potencial (6.3) nas geometrias RW, faremos uma pequena mostra do estudo deste potencial no universo estático de Einstein. Este caso foi estudado



mais pormenorizadamente no capítulo 4, apresentaremos aqui apenas o resumo do que foi lá apresentado.

Na geometria elítica tomaremos o raio constante  $R = R(\eta_f) = 2.6 \times 10^{25} \text{m}$ , e

$$\Gamma = \sigma R / (2c), \quad \gamma = 4 + \kappa_P R^2 / \lambda^2, \quad (6.9)$$

que levam (6.8) a admitir a forma particular

$$\ddot{f} + 2\Gamma \dot{f} + \gamma f = 0. \quad (6.10)$$

Esta equação é a do oscilador harmônico amortecido, cujas três classes de soluções estão na tabela 6.2. Notemos que em todas as classes o fator multiplicativo de amortecimento  $e^{-\Gamma t}$  está presente, e enfatizamos que todas as soluções não-estáticas são *ondas estacionárias de Proca*.

Tabela 6.2: Função Potencial

Classes	Soluções Exatas de (6.10)
1 : $\Gamma^2 = \gamma$	$f(\eta) = (C_1 + C_2 \eta) e^{-\Gamma \eta}$
2 : $\Gamma^2 < \gamma$	$f(\eta) = C_1 e^{-\Gamma \eta} \cos(\sqrt{\gamma - \Gamma^2} \eta) + C_2$
3 : $\Gamma^2 > \gamma$	$f(\eta) = e^{-\Gamma \eta} (C_1 e^{\sqrt{\Gamma^2 - \gamma} \eta} + C_2 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \gamma} \eta})$

O caso NM do universo estático de Einstein sob análise é da classe 3 da tabela 6.2, estes campos estão desenhados na *figura 1*. Para podermos dar conta da grande variação dos campos no intervalo considerado, serão desenhados os logaritmos decimais dos campos (estes expressos no sistema internacional de unidades (SI)) como função da coordenada temporal  $\eta$ . No *gráfico 1A* notemos que há uma rápida diminuição do campo elétrico inicial com um aumento da IM. Este comportamento está em acordo com a teoria maxwelliana: uma variação temporal do campo elétrico altera a IM. Pode-se mostrar que este comportamento dos campos é uma consequência do campo de Proca. Pode-se também observar que no estágio final  $B_f \approx 10^{-14} \text{T}$ , enquanto que  $\mathcal{E}_f$  é aproximadamente um décimo de seu valor inicial.

Quando  $\sigma = 0$  (*gráfico 1B*) a amplificação se torna muito grande ( $B_f = 10^{18} \times B_i$ ) e o sistema excede os limites de nosso modelo EAC. A única diferença entre os casos 1A e 1B é o valor da condutividade. Há um interessante efeito do campo de Proca  $\kappa_P = -1$ , o qual tem o poder de quebrar a amplificação causada pelo æther de Dirac sozinho.

A solução maxwelliana é da classe 2 na tabela 6.2 com  $\Gamma = 0$  e  $\gamma = 4$  ou  $f = C_1 \cos(2t + C_2)$ . Este caso, quando dotado das ICs acima, resulta no *gráfico 1C*. Logo no início o caso M é muito similar ao NM 1A, mas a solução harmônica tem somente uma oscilação ao longo de todo o intervalo estudado, e o instante em que é máxima a IM é também o instante em que é mínimo o campo elétrico, conforme é previsto pela teoria de Maxwell para ondas planas no espaço-tempo de Minkowski.

### 6.3.2 Nos Modelos de RW

Admitiremos diferentes fatores de escala  $R(\eta)$  [56] para as diferentes geometrias de RW na resolução de (6.8). Eles estão explicitados na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Fatores de Escala  $R(\eta)$ , onde  $\alpha = 10^{26}m$

Geometria	Fator de Escala $R(\eta)$
Plana	$(\alpha/2)\eta^2$
Elítica	$\alpha(1 - \cos \eta)$
Hiperbólica	$\alpha(\cosh \eta - 1)$

As soluções exatas para os casos M estão listadas na tabela 6.4 e serão discutidas abaixo. As CIs consideradas são  $\beta_i = 10^{11}$  e  $B_i = 10^{-20}T$ , e também  $\mathcal{E}_i = 10^{-1}V/m$ .

#### 1. Trigeometria Plana

No caso plano ( $k_c = 0$ ) nosso estudo será restrito a somente um caso NM e a um caso M, ambos estão desenhados no gráfico da *figura 2*. No caso NM (*gráfico 2A*) a IM se amplifica  $\times 10^{+5}$ . O campo  $\mathcal{E}(\eta)$  decresce monotonicamente devido à interação com o

Tabela 6.4: Soluções Maxwellianas para os Modelos de RW

$k_c$	Soluções Exatas de (6.10)
0	$f(\eta) = C_1\eta + C_2$
+1	$f(\eta) = C_1\text{sen}(2\eta) + C_2\text{cos}(2\eta)$
-1	$f(\eta) = C_1\text{senh}(2\eta) + C_2\text{cosh}(2\eta)$

campo gravitacional (um efeito semelhante a este - mas com oscilações - é encontrado na geometria hiperbólica com o campo de Proca do tipo  $\kappa_P = +1$ ). Neste caso o campo não-maxwelliano é caracterizado pela pequena condutividade  $\sigma$ . Este comportamento do campo elétrico se assemelha à evolução dos campos eletromagnéticos nos modelos cósmicos de *plasma de alta condutividade*. Nestes modelos o campo elétrico se torna rapidamente nulo [48] devido à alta condutividade do plasma.

No caso M (*gráfico 2B*) os campos inicialmente evoluem como no caso NM, o campo  $\mathcal{E}(\eta)$  não decresce até zero como no último caso, decrescendo apenas cerca de 5 ordens de magnitude, enquanto a IM é submetida a uma amplificação total de 6 ordens de grandeza. O subsequente amortecimento é uma consequência da geometria curva, onde o campo  $\mathcal{E}(\eta)$  varia com  $\text{const}/R^2$  e o campo  $\mathcal{B}(\eta)$  com  $\text{const}/R$ .

## 2. Trigeometria Elítica

Na geometria elítica estudaremos dois casos NM e um caso M, eles estão desenhados na *figura 3*. O caso NM com  $\kappa_P = +1$  é mostrado no *gráfico 3A*. Este caso é muito similar ao próximo caso M desenhado no *gráfico 3B*. Eles diferem essencialmente pela localização do ponto de mínimo do campo  $\mathcal{E}(\eta)$ . Os campos não-maxwellianos interagindo com o campo gravitacional são responsáveis pela antecipação do ponto de mínimo. Depois deste ponto o campo elétrico inverte seu sentido.

No outro caso NM ( $\kappa_P = -1$ ), desenhado no *gráfico 3C*, temos um interessante comportamento dos campos para o valor admitido para a condutividade ( $\sigma = 3,0 \times 10^{-13}/\text{s}$ ).

Este valor é o maior valor usado para  $\sigma$  neste trabalho, entretanto os campos não ultrapassam os valores permitidos pelo modelo EAC. Este resultado é independente de  $k_c$  e do tipo de campo de Proca presumido. Existem neste caso dois instantes onde a função  $\dot{f}$  é nula, e então o campo elétrico inverte o sentido duas vezes. Esta é uma peculiaridade destes campos não-maxwellianos. Note-se que nos demais casos desenhados neste trabalho, se considerarmos valores de  $\sigma$  desta ordem encontraremos ampliações muito além dos limites estabelecidos pelo modelo EAC.

### 3. Trigeometria Hiperbólica

Os gráficos da geometria hiperbólica estão desenhados na *figura 4*. O primeiro caso NM estudado é o 4A, no início temos novamente um decréscimo de  $\mathcal{E}(\eta)$  e um aumento de  $\mathcal{B}(\eta)$ . Apesar de não-maxwelliano, o interrelacionamento dos campos não leva a oscilações, embora em todos os casos desta figura haja tanto amortecimentos como oscilações. Novamente em 4B encontramos em  $\eta_f$  uma redução de 4 ordens de magnitude em  $\mathcal{E}(\eta)$  e uma amplificação de 4 ordens em  $\mathcal{B}(\eta)$ . O estudo das funções  $f$  e  $\dot{f}$  neste caso mostra que desde  $\eta \approx 0.36$  até  $\eta_f$  ambas oscilam. Vemos que a equação (6.8) se torna  $\ddot{f} + g(\eta)f = 0$  onde  $g(\eta) = -[4 - R^2(\eta)/\lambda^2]$ ; o campo de Proca com  $\kappa_P = +1$  impõe um amortecimento nas puras oscilações (que são soluções do caso com  $g(\eta) = \text{const} > 0$ ). Este resultado é qualitativamente independente da curvatura da geometria ( $k_c$ ) utilizada e de qualquer uma das três formas do fator de escala que está sendo utilizada (veja a tabela 6.3). Admitindo que  $\kappa_P = -1$  ao invés de  $\kappa_P = +1$ , os campos não podem mais ser estudados no modelo EAC.

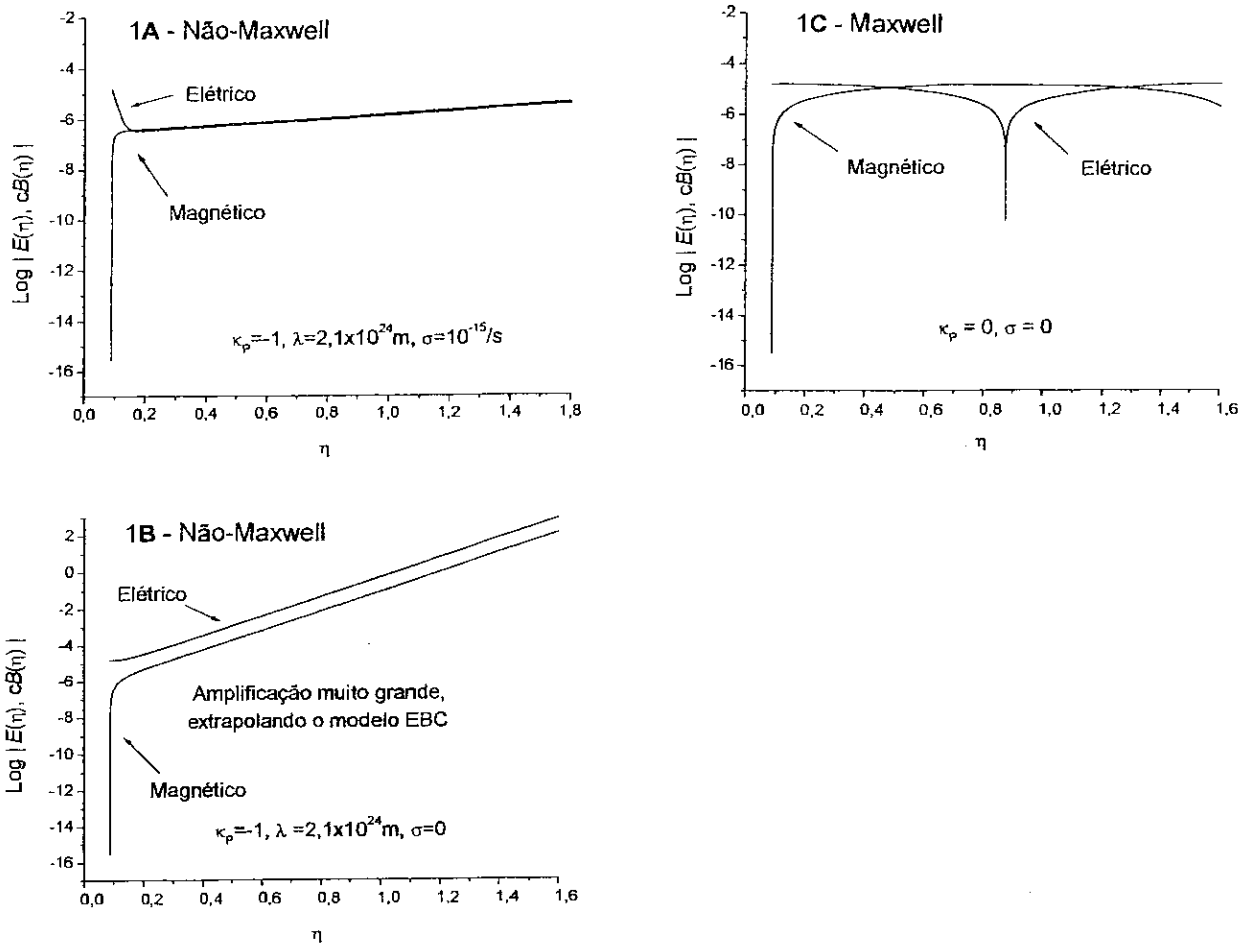
No caso NM desenhado no *gráfico 4C* temos novamente oscilações dos campos entre grandes intervalos de tempo cósmico. O aumento do intervalo de tempo entre duas oscilações sucessivas é devido à condutividade do æther de Dirac. Ambos os campos desaparecem em  $\eta_f$ .

Finalmente, o caso M da geometria hiperbólica, desenhado no *gráfico 4D*, é bastante simples. Notamos uma amplificação de  $\mathcal{B}(\eta)$  somente uma ordem de grandeza a mais do

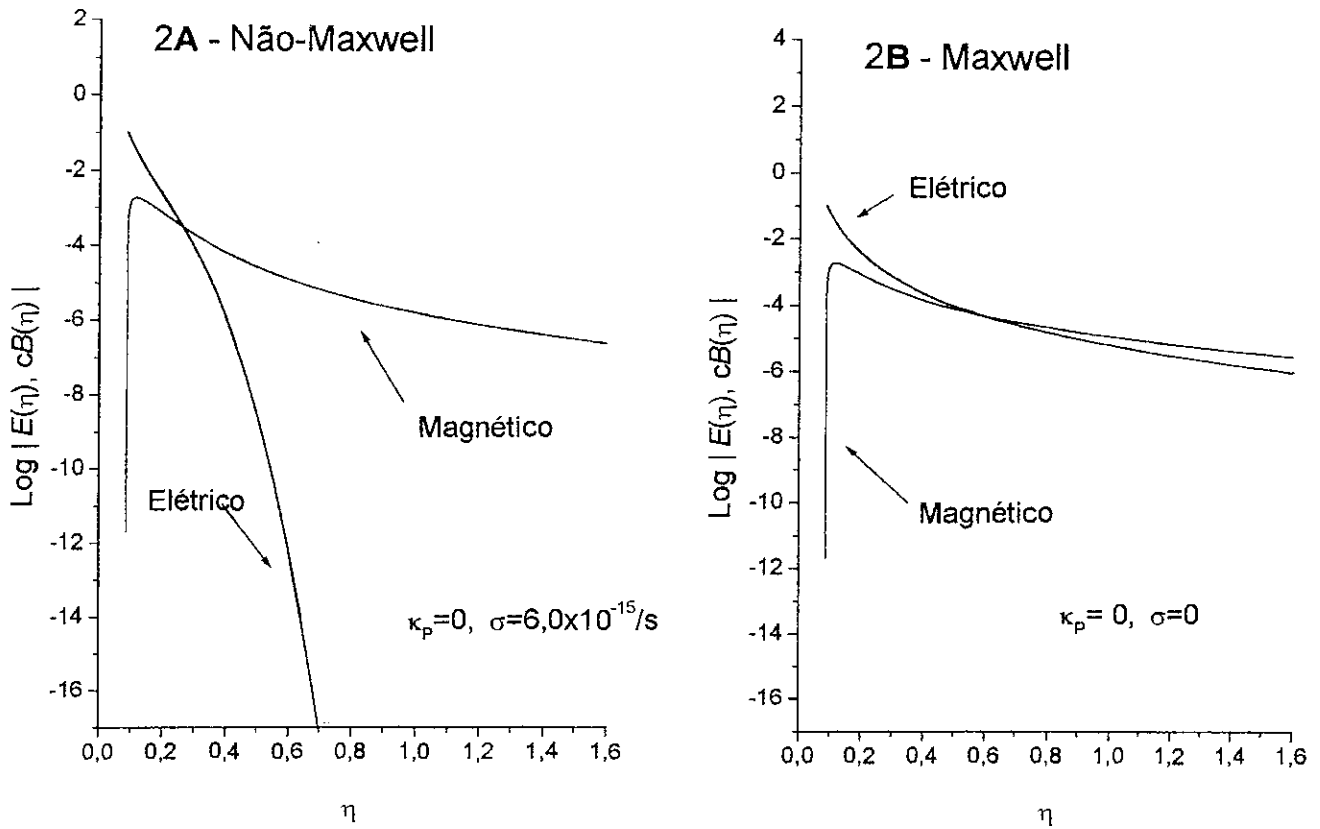
que naquela do *gráfico 4A*; igualmente o valor final de  $\mathcal{E}(\eta)$  é somente um pouco maior do que aquele encontrado no *gráfico 4A* .

Em todas as figuras notamos que o comportamento dos campos imediatamente após  $\eta_i$  pode ser descrito pela teoria de Maxwell do eletromagnetismo. O rápido decréscimo do campo inicial  $\mathcal{E}(\eta)$  origina um aumento de  $\mathcal{B}(\eta)$ . A evolução subsequente de ambos os campos é determinada pela interação entre a geometria do espaço-tempo com os campos maxwellianos nos casos 1C, 2B, 3B, 4D, ou com os campos não-maxwellianos nos demais casos.

As equações maxwellianas no espaço-tempo de Minkowski têm como soluções campos harmônicos oscilantes. Nestas soluções o comportamento da IM e do campo elétrico são semelhantes, mas há uma diferença de fase entre ambos. Quando a densidade de energia do campo elétrico é máxima, a do campo magnético é mínima. Em muitos casos estudados aqui as oscilações se assemelham bastante às oscilações maxwellianas. A curvatura variável do espaço-tempo interagindo com os campo maxwellianos (ou não maxwellianos, dependendo do caso) é que irá determinar o seu comportamento geral. Em cada gráfico o resultado da interação gravitacional-eletromagnética depende da geometria que está sendo considerada e da teoria eletromagnética maxwelliana ou não considerada.



**Fig. 1** - Logaritmo decimal do módulo de  $\mathcal{E}(\eta)$  e  $c\mathcal{B}(\eta)$  desenhados contra o tempo conforme  $\eta$  no sistema MKS para o universo estático de Einstein ( $k_c = +1$ ) com raio  $R = 2,6 \times 10^{26} \text{ m}$ . As condições iniciais são  $\beta_i = 10^{11}$  e  $B_i = 10^{-24} \text{ T}$  (isto é  $\mathcal{E}_i = 10^{-5} \text{ V/m}$ ). No gráfico 1A  $\mathcal{E}(\eta)$  tem uma forte atenuação inicial, enquanto  $\mathcal{B}(\eta)$  tem um comportamento inicial oposto. O campo elétrico atinge seu valor mínimo em  $\eta \approx 0,18$ , depois do qual ambos os campos aumentam seu valor monotonicamente até  $\eta_f = 1,6$ . Gráfico 1B é um exemplo que não satisfaz ao modelo EAC, a amplificação é muito grande. Em 1C o campo  $\mathcal{E}(\eta)$  inicialmente decresce e vai a zero quando  $\eta = 0,87$ , então inverte o sinal e monotonicamente reassume sua intensidade inicial (em módulo);  $\mathcal{B}(\eta)$  inicialmente se comporta como em 1A, tem um máximo em  $\eta = 0,87$ , a partir do que enfraquece uma ordem de magnitude até  $\eta_f = 1,6$  onde tem aproximadamente a metade do valor final no caso NM acima (gráfico 1A). Apesar de se desenvolverem de maneira diferentes nos gráficos 1A e 1C, os campos têm aproximadamente os mesmos valores finais (veja no texto mais argumentos analíticos e físicos sobre todos os casos estudados).



**Fig. 2** - Na geometria plana de RW admitimos como condições iniciais  $\beta_i = 10^{11}$  e  $B_i = 10^{-20}\text{T}$  (isto é  $\mathcal{E}_i = 10^{-1}\text{V/m}$ ). No caso NM 2A, os campos se comportam inicialmente como no caso 1A. O campo  $B(\eta)$  cresce até o valor máximo  $B(0,12) \approx 6,0 \times 10^{-12}\text{T}$ , então decresce até  $B_f \approx 10^{-15}\text{T}$ . O campo elétrico decresce monotonicamente e pode ser considerado nulo ( $< 10^{-27}\text{V/m}$ ) para  $\eta > 0,84$ . No caso M 2B os campos se comportam inicialmente como no caso 2A, então ambos decrescem até  $\eta_f$ , quando a IM é  $B_f \approx 10^{+6} \times B_i$ .

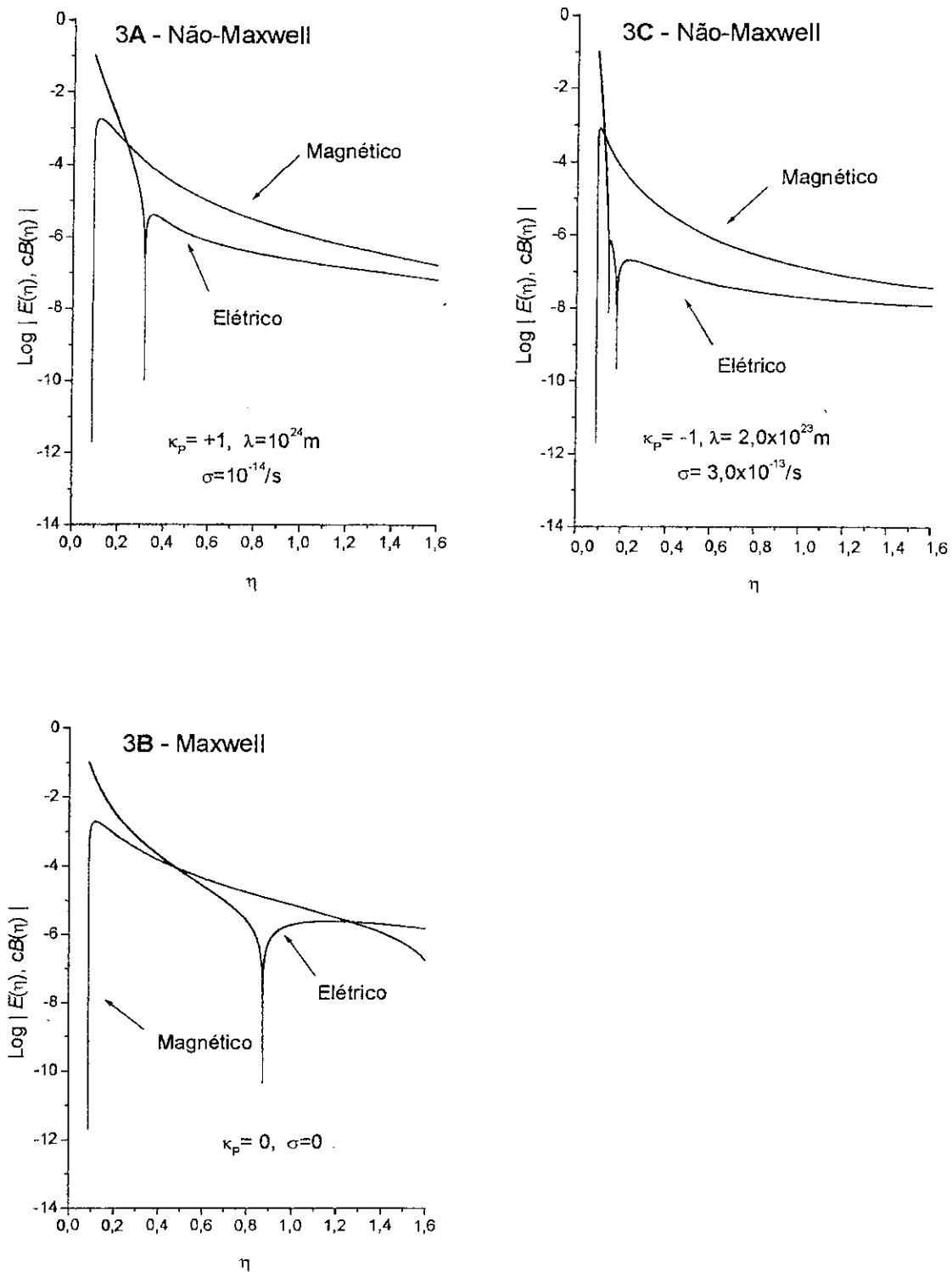


Fig. 3 - Na geometria elítica de RW o campo elétrico sempre inverte seu sinal uma ou mais vezes. A condutividade do æther de Dirac em conjunto com as peculiaridades do campo de Proca antecipa a inversão (em  $\eta \approx 0,32$ ) no caso NM (3A) relativamente ao caso M (3B, em  $\eta \approx 0,87$ ). Em todos os três casos estudados o campo elétrico tem uma redução geral de 5 ordens de magnitude no caso M e de 6 – 7 ordens nos casos NM. O campo  $B(\eta)$  é amplificado 5 ordens nos casos 3A e 3B. O caso 3C parece anômalo pois a amplificação (4 ordens no campo  $B(\eta)$ ) não é excessiva apesar do grande valor admitido para  $\sigma$ ; além disto há dois momentos ( $\eta \approx 0,14$  e  $\eta \approx 0,18$ ) nos quais o campo elétrico inverte o sentido.



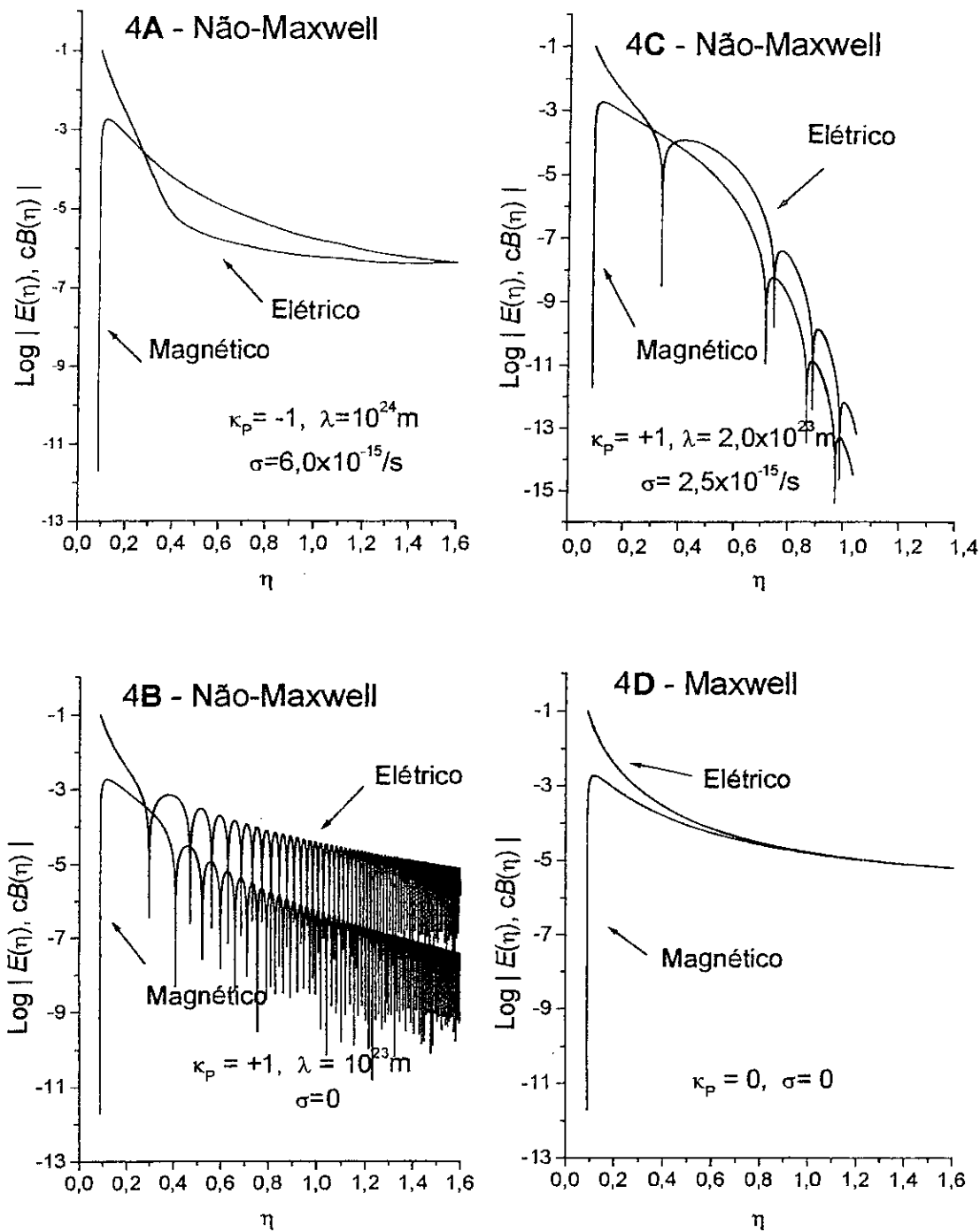


Fig. 4 - Estes gráficos se referem à geometria hiperbólica de RW. No gráfico 4A, os campos não-maxwellianos se comportam de maneira semelhante aos casos maxwellianos 4D e 2B. Nos dois outros casos, gráficos 4B e 4C, notamos que ocorre uma interessante oscilação amortecida dos campos de Proca com  $k_p = +1$ . No caso 4B os campos invertem o sinal cerca de 60 vezes desde  $\eta \approx 0,36$  até a época atual, enquanto no caso 4C o æther de Dirac obriga as oscilações mas impõe um forte amortecimento dos campos: estes se anulam em  $\eta \approx 1,1$ .

# Capítulo 7

## Conclusão

Antes de concluirmos este trabalho gostaríamos de abordar uma questão interessante que surgiu no desenvolvimento do nosso estudo. Ao longo do texto foi utilizada a teoria *não-maxwelliana* de Proca, assim como o eletromagnetismo de Maxwell em espaço cósmico condutivo, ou æther de Dirac. Em nosso estudo, foram consideradas relações entre a condutividade  $\sigma$  do æther de Dirac e o alcance  $\lambda$  do campo de Proca. Acreditamos que existam relações mais profundas entre estas duas teorias, e que um tratamento quântico adequado do problema poderá fornecer estas informações. Temos já realizado um estudo preliminar sobre este assunto, que por estar ainda incompleto [17] não foi aqui incluído.

O afastamento das raias espectrais das galáxias para o vermelho é tomado usualmente como prova de que o espaço está em expansão. Porém sabemos que esta não é a única interpretação existente para este efeito [57]. Caso a interpretação padrão esteja correta, a *expansão* do universo existirá em todos os escalões físicos. Porém, até agora, nos fenômenos cujas dimensões características são pequenas em relação às escalas cósmicas, a influência da expansão tem-se mostrado desprezível. Assim, acreditamos que sua ação nos laboratórios terrestres possa ser atualmente desprezada.

Nos problemas relacionados com os sistemas gravitantes locais referidos no texto, tais como átomos, Terra-Sol, galáxias e aglomerados, diversas soluções aproximadas têm sido avaliadas na literatura. Tais soluções poderão ser reavaliadas tomando-se em consideração

novos fatores, ainda não ponderados. Por exemplo, no caso Terra-Sol a ação perturbadora de outros planetas, ou com o estudo mais realista de formas elíticas para as órbitas planetárias. Além do mais, como na literatura sempre se supõe sempre que as métricas para os sistemas gravitacionais têm simetria esférica, talvez estudos com outras simetrias tragam informações ainda insuspeitadas.

Apesar destas considerações podemos dizer com segurança que os resultados alcançados até agora pelos trabalhos realizados confirmam as previsões da relatividade geral. A expansão afeta mais fortemente os fenômenos cujas dimensões são de ordem de grandeza da estrutura em larga escala do universo, isto é, além dos aglomerados galáticos. Em pequenas escalas de distâncias a influência pode ser considerada desprezível em relação às influências dos agentes locais.

No estudo realizado sobre a ação da expansão sobre campos eletromagnéticos cósmicos, diversos efeitos foram encontrados, mas em geral obtivemos efeitos amplificadores. Estes efeitos parecem importantes na astrofísica extra-galática, por exemplo na formação das estruturas cósmicas e na geração de campos magnéticos existentes atualmente no universo.

Provavelmente se encontrarão efeitos semelhantes aos encontrados aqui, presumindo-se acoplamentos mais fortes entre a gravitação e o eletromagnetismo [58]. Contudo, pelas suposições que fizemos em relação aos valores iniciais dos campos, esses tipos de acoplamentos não se fizeram necessários. Realizamos estudos com acoplamentos alternativos, mas como não chegamos a resultados que achássemos interessantes, eles não constaram do presente trabalho.

Devemos enfatizar que em *todos* os casos puramente maxwellianos estudados foram encontradas soluções com amplificação do campo de IM, logo podemos dizer que esta desejada amplificação não é um efeito puramente devido ao exotismo da teoria *não-maxwelliana* escolhida; em outras palavras, foi obtida uma *amplificação geométrica* mesmo na teoria padrão do eletromagnetismo. O único requisito a ser satisfeito foi o da existência de um *campo elétrico inicial local*, mesmo que de intensidade muito pequena.

Em geral as teorias que estudam os campos de IM cósmica não consideram que a ex-

pansão do universo possa ser uma causadora directa da amplificação destes campos. Acreditamos que este nosso modelo possa despertar interesse na descoberta de outros mecanismos geométricos, provavelmente mais realistas, onde a expansão do fundo geométrico possa ser adicionada aos usuais mecanismos não geométricos existentes na literatura.

# Referências

- [1] W. B. Bonnor, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 1313-1321;
- [2] P. Middy e J-P. Petit, *Int. J. Mod. Phys.* **D8** (1999) 271-289; gr-qc/9909086;
- [3] E. N. Parker , "Cosmical Magnetic Fields", Clarendon Press, Oxford, 1979;
- [4] L. Feretti et al., *Astron. Astrophys.* **344** (1999) 472-482;
- [5] P. P. Kronberg, *Rep. Prog. Physics* **57** (1994) 325-382;
- [6] G. P. Singh e T. Singh, *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 371-378 e referências aí citadas;
- [7] P. A. M. Dirac, *Nature* **168** (1951) 906-907;
- [8] J. V. Narlikar, J. C. Pecker e J.-P. Vigièr, *Phys. Lett. A* **154** (1991) 203-209;
- [9] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **209** (1951) 291-296;
- [10] K. P. Sinha, C. Sivaram e E. C. G. Sudarshan, *Found. Phys.* **6** (1976) 65-70;
- [11] H. Alfvén, "Evolution of the Solar System", U. S. Government printing Office, Washington, 1976; H. Alfvén and Carl-Gunne Fälthammar, "Cosmical Electrodynamics", Second Edition, Oxford University Press, Oxford, 1963;
- [12] G. Kar, M. Sinha e S. Roy, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 593-607;
- [13] V. N. Melnikov, *Int. J. Theor. Phys.* **33** (1994) 1569-1573;

- [14] D. F. Bartlett e T. R. Corle, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 59 (1985), D. F. Bartlett e G. Gengel *Phys. Rev. A* **39**(3), 938 (1989);
- [15] J.-P. Vigièr, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **18** (1990) 64-72;
- [16] A. Lichnerowicz, "Relativistic Hydrodynamics e Magnetohydrodynamics". W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967;
- [17] A. L. Oliveira e M. Carvalho, em elaboração;
- [18] V. S. Huziwara e A. L. Oliveira, "Anais da XX Reunião Anual da Sociedade Astronômica Brasileira", Campos do Jordão-SP, Brasil, Agosto de 1994;
- [19] E. Comay, *Nuovo Cimento* **113 B** (1998) 733-743;
- [20] A. S. Goldhaber e M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43** (1971) 277-296;
- [21] L. de Broglie, "La mécanique ondulatoire du photon", in *Une Nouvelle Théorie de la Lumière*, tome I, 121-145, Gauthier-Villars, Paris, 1940;
- [22] L. de Broglie, "Mécanique Ondulatoire du Photon et Théorie Quantique des Champs", Gauthier-Villars, Paris, 1949;
- [23] V. Aldaya, M. Calixto e M. Navarro, *Int. J. Mod. Phys. A* **12** (1997) 3609-3623; hep-th/9609083;
- [24] S. Deser, *Ann. Inst. Henry Poincaré* **16** (1972) 79-85; K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445-2459; J. des Cloizeaux, *J. Phys. A* **6** (1973) 596-609;
- [25] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **125** (1962) 397-398; **128** (1962) 2425-2429;
- [26] Particle Data Group, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 1173-1200; E. Fischbach et al., *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 514-517;
- [27] L. Landau e E. Lifchitz, "Théorie du Champ", Éditions MIR, Moscou, 1966;
- [28] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", J. Wiley & Sons, New York, 1975;

- [29] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, "Gravitation", W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973;
- [30] L. Bass e E. Schrödinger, *Proc. Roy. Soc. A* **232** (1955) 1-6;
- [31] A. L. Oliveira e A. F. F. Teixeira, *An. Acad. Bras. Ci.* **72** (2000) 161-164;
- [32] J. Ahonen e K. Enqvist, *Phys. Lett. B* **382** (1996) 40-44;
- [33] A. L. Oliveira e A. F. F. Teixeira *Phys. Rev. D* **50** (1994) 5429-5430, **51** (1995) 3135;
- [34] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", J. Wiley & Sons, New York, 1972;
- [35] J. R. Weeks, "The Shape of Space", Marcel Dekker, Inc, New York, 1985;
- [36] H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **68** (2000) 689-690 e referências aí citadas;
- [37] J. L. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3602-3604;
- [38] F. I. Cooperstock, V. Faraoni e D. N. Vollick, *Ap. J.* **503** (1998) 61-70. e referências aí citadas; astro-ph/9803097;
- [39] W. B. Bonnor, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **282** (1996) 1467-1469;
- [40] F. K. Manasse e C. W. Misner, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 735-745; F. K. Manasse. *J. Math. Phys.* **4** (1963) 746-761;
- [41] H. C. Ohanian, "Gravitation and Spacetime", W. W. Norton & Company, Inc, New York, 1976;
- [42] P. D. Noerdlinger e V. Petrosian, *Ap. J.* **168** (1971) 1-9;
- [43] A. L. Oliveira, submetido a *Int. J. Mod. Phys. D* ;
- [44] J. P. Vallée, *Fundamentals of Cosmic Physics* **19** (1997) 1-89;
- [45] A. Iwasaki, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2997-2930; O. Bertolami e D. F. Mota, *Phys. Lett. A* **455** (1999) 96-103;


- [46] M. S. Turner e L. M. Widrow, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 2743-2754; M. Hindmarsh e A. Everett, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 103505; M. Christensson e M. Hindmarsh, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 063001;
- [47] E. R. Harrison, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **147** (1970) 279-286;
- [48] Ya. B. Zel'dovich, A. A. Rusmaikin e D. D. Sokoloff, "Magnetic Fields in Astrophysics", Gordon and Breach, New York, 1983;
- [49] E-J Kim, A. V. Olinto e R. Rosner, *Ap. J.* **468** (1996) 23-50;
- [50] I. Wasserman, *Ap. J.* **224** (1978) 337-343;
- [51] A. Einstein, *Ann. Phys.* (Leipzig) **7** (1905) 132-148; **18** (1917) 121-130, citado em [8];
- [52] L. Bass e E. Schrödinger, *Proc. Roy. Soc. A* **232** (1955) 1-6;
- [53] V. de Sabbata, C. Sivaram e L. Garcia de Andrade, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 1523-1530;
- [54] H. Hori, "Near Field Optics", D. W. Pohl e D. Courjon (Eds), 1993, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp 105-114; H. Hori e M. Ohtsu, "Quantum Control and Measurement", Proceedings of the ISQM Satellite Workshop ARL, Hitachi, Hatoyama, Saitama, August 28-29, 1992, H. Ezawa e Y. Murayama (Eds), pp 197-202;
- [55] R. Plaga, *Nature* **374** (1995) 430-432; K. Enqvist, *Int. J. Mod. Phys. D7* (1998) 331-350; astro-ph/9803196;
- [56] Ya. B. Zel'dovich e I. D. Novikov, "The Structure and Evolution of the Universe", The University of Chicago Press, Chicago, 1983;
- [57] P. J. E. Peebles, "Principles of Physical Cosmology", Princeton University Press, New Jersey, 1993;
- [58] R. M. Wald, "General Relativity", The University of Chicago Press, Chicago, 1984;

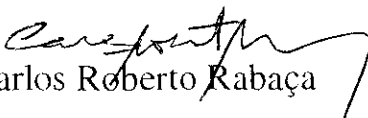


**“AÇÃO DA EXPANSÃO DO UNIVERSO EM  
CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS  
NÃO-MAXWELLIANOS”**

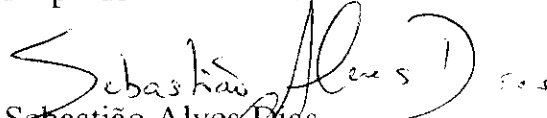
*Alexandre Lyra de Oliveira*


Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


  
Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira – Presidente

  
Carlos Roberto Rabaça

  
Filipe de Moraes Paiva

  
Sebastião Alves Dias

  
Sérgio José Barbosa Duarte

  
Luiz Alberto Rezende de Oliveira - Suplente