

TESE DE  
MESTRADO

DINÂMICA DO CAMPO MAGNÉTICO  
EM WIST, EM UMA MÉTRICA TIPO  
BIANCHI-I

RICARDO MATTOS MARTINS

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, JUNHO DE 2000

# DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, ambos já na vida maior, dedico esta tese e agradeço pelo maior bem que a mim deixaram: a instrução.*

*‘A minha esposa, cuja afeição e carinho, foram fundamentais.*

# AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de ser grato a todas estas pessoas sem cuja prestimosa ajuda, seria impossível a conclusão deste singelo trabalho:

Guilherme de Berredo Peixoto, Martha Christina Motta da Silva, Marcelo Costa de Lima (grande Marcelo!), Alexandre Lopes de Oliveira (obrigado pela força), Joselina Quintella do Nascimento, Myriam Simões Coutinho e a todos os colegas da 509-B.

Não poderia deixar de ser grato, é claro, ao meu orientador, Dr. José Martins Salim que conseguiu, pacientemente, orientar-me neste trabalho.

Ao CBPF pelos recursos de infra-estrutura.

Ao CNPq pela bolsa de estudos, sem a qual a realização deste trabalho seria impossível.

E, acima de tudo, a Deus.

**The way things are going  
They're gonna crucify me**

**(J. Lennon)**

# RESUMO

No presente trabalho, consideramos o espaço-tempo tetra-dimensional representado por uma geometria de Weyl integrável (*WIST*), caracterizada através do tensor métrico e do campo escalar de origem geométrica e estudamos algumas aplicações básicas dentro da teoria da gravitação. Para tanto, expomos a geometria de Weyl integrável e fazemos um breve comentário da gravitação na geometria de Weyl e a comparamos com a sua contraparte integrável. Terminamos com o estudo da interação gravitação-eletromagnetismo em *WIST* em uma geometria Bianchi-I.

# ABSTRACT

In the present work we consider the four-dimensional space-time represented by a Weyl integrable geometry (*WIST*), characterized by the metric tensor and the scalar field of geometric nature and we study some basic applications in the theory of gravitation. In order of that we expose the *WIST* and we briefly comment the theory of gravitation in that geometry. We end the work with a study of the interaction gravitation-electromagnetism in a Bianchi-I metrics.

# Índice

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
Índice . . . . .	vi
Lista de figuras . . . . .	viii
<b>Notação</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Fundamentos Geométricos para o Espaço-Tempo</b>	<b>4</b>
1.1 O espaço-tempo como uma variedade . . . . .	4
1.2 Variedade diferenciável . . . . .	5
1.3 Curvas e Superfícies . . . . .	6
1.4 Transformação de Coordenadas . . . . .	6
1.5 Tensores . . . . .	7
1.5.1 Adição de tensores . . . . .	8

1.5.2	Multiplificação de tensores . . . . .	9
1.5.3	Contração de tensores . . . . .	9
1.6	A conexão afim e a derivada covariante . . . . .	14
1.7	Métrica – variedade Riemanniana . . . . .	18
1.8	Espaços de Weyl e espaços de Weyl integráveis . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Gravitação em <i>WIST</i></b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>Campo magnético na teoria de <i>WIST</i></b>	<b>44</b>
3.1	Introdução . . . . .	44
3.2	Equações de movimento . . . . .	45
	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo de algumas quantidades geométricas</b>	<b>56</b>

# Lista de Figuras

1.1 Deslocamento paralelo . . . . .	14
-------------------------------------	----

# Notação

Usaremos para a diferenciação covariante a notação “//” concomitante-mente com a notação “ $\nabla$ ” quando se tratar de um espaço de Riemann. Exemplo:

$$\nabla_{\alpha} A^{\beta} = A^{\beta}_{//\alpha} .$$

No espaço de Weyl integrável a notação será “;”. Exemplo:

$$\nabla_{\alpha} A^{\beta} = A^{\beta}_{;\alpha} .$$

# Introdução

A concepção newtoniana de força gravitacional manteve-se absoluta, desde o seu surgimento no século XVII até o início do século XX, quando Einstein introduziu a teoria geral da relatividade. Esta nova teoria substitui a idéia de força gravitacional por geometria, isto é, Einstein coloca um cenário novo, constituído por uma variedade a quatro dimensões, o espaço-tempo; a matéria nele contida o deforma, gerando a gravitação. De início, a teoria de Einstein não convenceu as mentes científicas, mas com o decorrer do tempo, alcançou sucesso, apesar de não ser isenta de críticas. Em determinadas situações, como próximo a campos muito intensos, surgem dificuldades não superáveis, tais como a presença de singularidades. Diversas tentativas foram feitas de se encontrar soluções para tais problemas, onde podemos citar Brans-Dicke [13] e mais recentemente, outra modificação da T.G.R. chamada gravitação dilatônica onde o campo introduzido não está geometrizado. A geometria de Weyl integrável (*WIST*), pano de fundo deste trabalho, foi introduzida por apresentar um campo vetorial que é o gradiente de um escalar, obtendo-se assim a geometrização da gravitação, recuperando-se o aspecto geométrico da teoria de Einstein, que as tentativas anteriores não lograram obter. Embora a estrutura *WIST* seja diferente da geometria de Riemann, utilizada por Einstein, ela se assemelha a esta última.

Como veremos no texto a geometria de Weyl integrável pode ser escrita em função de sua estrutura de Riemann associada permitindo desse modo uma comparação mais simples com a relatividade geral de Einstein. Em particular esta última é obtida se fizermos o campo escalar constante.

No capítulo 1, fazemos uma sucinta descrição desta geometria, mostrando como ficam modificadas certas quantidades geométricas que surgem na geometria riemanniana.

No capítulo 2 falamos da teoria da gravitação em *WIST*, mostrando de modo breve como esta nova geometria se adapta às características do campo gravitacional, já que esta geometria permite integrar o sistema dinâmico obtido com as suas equações, o que não seria possível se a geometria adotada fosse a de Riemann.

# Capítulo 1

## Fundamentos Geométricos para o Espaço-Tempo

### 1.1 O espaço-tempo como uma variedade

O mais importante em todas as teorias que usam a idéia de variedade espaço-tempo é o conceito de ponto neste espaço-tempo. O ponto corresponde a quando e onde um evento físico acontece, por exemplo, a colisão entre duas partículas. A coleção de todos estes pontos, isto é, a coleção de todos os “quandos” e “ondes” de todos os eventos físicos possíveis constitui o espaço-tempo. Estes pontos são todos indistinguíveis, isto é, todos os pontos do espaço-tempo são assumidos como sendo equivalentes.

As propriedades locais do espaço-tempo são as mesmas do 4-plano Euclidiano; como consequência é possível mapear os pontos de qualquer região pequena e finita do espaço-tempo em pontos de uma região correspondente do 4-plano Euclidiano numa relação biunívoca. Esta propriedade caracteriza o espaço tempo como uma variedade.

Bem explicado, uma variedade é um conjunto de pontos cada um possuindo um conjunto de  $n$  coordenadas  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , onde cada coordenada varia em um subconjunto dos reais, podendo, em particular, cobrir toda a reta real.

## 1.2 Variedade diferenciável

Define-se uma variedade diferenciável  $M^{(n)}$  de dimensão  $\mathbf{n}$  como um conjunto  $P$  de eventos sobre o qual existe um mapeamento um-a-um com o espaço  $\mathbf{R}^n$  das  $n$ -plas coordenadas  $x^{(n)} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  de números reais, satisfazendo as seguintes condições:

1. Para todos os pontos  $P$  de  $M^{(n)}$  existe uma vizinhança  $M_i = \text{Viz}_i(P)$ , definida através de distância no  $\mathbf{R}^n$  [1, 2, 3],

$$M_i = \text{Viz}_i(P) = \left\{ Q \in M^{(n)} \mid \text{dist} \left( x_P^{(n)}, x_Q^{(n)} \right) < \epsilon_i \right\} ; \quad (1.1)$$

onde  $\epsilon_i$  é um real positivo.

2. A união de todas as vizinhanças  $M_i$  recobre a variedade  $M^{(n)}$ :

$$M^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i ; \quad (1.2)$$

3. As noções de continuidade e diferenciabilidade em  $M^{(n)}$  são definidas via cálculo diferencial no  $\mathbf{R}^n$ .

Doravante omitiremos o índice  $n$  de dimensão e usaremos índices gregos para as coordenadas de um ponto arbitrário  $P$  de  $M$ :  $x_{(P)} = (x^\mu)_{(P)}$ . Adotaremos também a convenção da soma de Einstein.

### 1.3 Curvas e Superfícies

Em uma variedade é possível definir curvas e superfícies por um *parâmetro*:

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

Esta relação é a *equação paramétrica* de uma curva e onde  $\lambda$  é o parâmetro ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ).

Podemos também, de modo análogo, definir uma superfície:

$$x^\mu = x^\mu(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m) \quad (1.4)$$

Esta relação mostra a dependência com  $m$  parâmetros, sendo  $m \leq n$ . O caso particular em que  $m = n - 1$  define uma hipersuperfície.

### 1.4 Transformação de Coordenadas

Vamos considerar uma transformação de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^{\mu'}(x) . \quad (1.5)$$

Tal transformação deve ser inversível, isto é, pode-se após uma transformação de coordenadas dada pela equação (1.5), retornar-se às coordenadas iniciais:

$$x^\mu = x^\mu(x') \quad (1.6)$$

## 1.5 Tensores

Podemos escrever a *diferencial total* da expressão (1.3):

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (1.7)$$

onde foi usada a convenção da soma de Einstein. Podemos então definir um *tensor contravariante* como um objeto geométrico que se transforma sob mudança de coordenadas (Eq. (1.5)) como [4]

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} . \quad (1.8)$$

De modo análogo temos um *tensor covariante*:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

Os tensores apresentados em (1.8) e em (1.9) são tensores de *segunda ordem*.

Sob a transformação de coordenadas (1.3) os vetores (tensores de primeira

ordem) contravariante e covariante transformam-se, respectivamente, como:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \quad (1.10)$$

e

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu} . \quad (1.11)$$

Os escalares (tensores de ordem zero) são quantidades invariantes sob a transformação (1.5):

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (1.12)$$

Generalizando, um tensor de ordem  $r$  é um objeto  $T_{\varepsilon\sigma\pi\cdots}^{\mu\nu\rho\cdots}$  com  $p$  contraíndices  $(\mu\nu\rho, \cdots)$ , e  $q$  co-índices  $(\varepsilon, \sigma, \pi, \cdots)$  tal que  $p+q = r$ . Um tensor  $T_{\lambda}^{\mu\nu}$ , misto de 3ª ordem, transforma-se como [5]:

$$T_{\lambda}^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\lambda}} T_{\varepsilon}^{\rho\sigma} \quad (1.13)$$

### 1.5.1 Adição de tensores

Pode-se subtrair ou adicionar tensores do mesmo tipo definidos no mesmo ponto da variedade para produzir um novo tensor do mesmo tipo no mesmo ponto

$$A_{\lambda}^{\mu\nu} + B_{\lambda}^{\mu\nu} = C_{\lambda}^{\mu\nu}$$

## 1.5.2 Multiplicação de tensores

A coleção de números obtidos multiplicando-se em todas as combinações as componentes de dois tensores de ordem  $r$  e  $s$  num ponto da variedade fornece um novo tensor de ordem  $r + s$  naquele ponto. Em particular, multiplicação de um tensor por um escalar fornece um novo tensor de mesma ordem

$$C_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = A_{\alpha\beta} B_{\gamma}^{\lambda}$$

## 1.5.3 Contração de tensores

A partir de um tensor de ordem  $r$ , podemos construir um novo tensor de ordem  $r - 2$  somando em um índice contravariante com um covariante. Assim,  $D^{\rho} \equiv D_{\mu}^{\mu\rho}$  é um tensor formado a partir do tensor misto  $D_{\nu}^{\mu\rho}$  somando-se os índices  $\mu$  e  $\nu$ . Se somássemos  $\rho$  e  $\nu$  obteríamos um outro tensor diferente do primeiro. Na verdade os dois tensores assim obtidos são iguais se  $D_{\nu}^{\mu\rho} = D_{\nu}^{\rho\mu}$ , isto é, se o tensor fosse simétrico nos índices  $\mu$  e  $\rho$ . Observe que a contração sempre envolve 2 índices, um contra e o outro covariante. Se a soma ocorrer em dois índices covariantes ou contravariantes, o resultado obtido não seria um tensor.

Uma propriedade invariante de todos os tensores é a sua simetria em relação à troca de índices. Se após a troca de dois contra ou co-índices o tensor permanece inalterado em valor, dizemos que é *simétrico* nestes dois índices enquanto que se houver troca de sinal dizemos que é *antissimétrico*.

Pode ocorrer da simetria ser múltipla. Por exemplo, o tensor  $B_{\mu\nu\rho\sigma}$  pode

ser antissimétrico em  $\mu$  e  $\nu$  e em  $\rho$  e  $\sigma$  mas ser simétrico nos conjuntos  $\mu\nu$  e  $\rho\sigma$ , de modo que

$$B_{\mu\nu\rho\sigma} = B_{\rho\sigma\mu\nu}$$

Podemos, com a idéia de simetria e antissimetria, construir as partes simétrica e antissimétrica de um tensor. Seja por exemplo um tensor  $T^{\mu\nu}$ . Então:

$$\begin{aligned} T^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) \text{ (parte simétrica)} \\ T^{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \text{ (parte antissimétrica)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

A idéia de pontos simétricos e antissimétricos pode ser estendida a tensores de ordem mais alta. Seja o tensor  $T_{\mu\nu\rho}$ . Então:

$$\begin{aligned} T_{(\mu\nu\rho)} &= \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\nu\mu\rho} + T_{\rho\nu\mu} + T_{\mu\rho\nu}) \text{ (parte simétrica)} \\ T_{[\mu\nu\rho]} &= \frac{1}{3!}(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\nu\rho\mu} - T_{\nu\mu\rho} - T_{\mu\rho\nu} - T_{\rho\nu\mu}) \text{ (parte antissimétrica)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Se  $T_{\mu\nu\rho}$  é completamente simétrico, então  $T_{(\mu\nu\rho)} = T_{\mu\nu\rho}$ ; se  $T_{\mu\nu\rho}$  é completamente antissimétrico, então  $T_{[\mu\nu\rho]} = T_{\mu\nu\rho}$ . A operação de se construir um tensor completamente simétrico ou antissimétrico pode ser estendida a tensores de ordens mais altas. No primeiro caso temos a *simetrização* e no segundo caso, temos a *antissimetrização*. Naturalmente para tensores de 5ª ordem ou maior a simetrização leva a um tensor nulo. Podemos também aplicar estas operações ao produto de 2 ou mais tensores tal que o

produto seja um tensor. Assim

$$A_{[\mu}B_{\sigma]}^{\rho} = \frac{1}{2}(A_{\mu}B_{\sigma}^{\rho} - A_{\sigma}B_{\mu}^{\rho}) \quad (1.16)$$

Definimos o delta de Kronecker  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  na forma:

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta \\ 0, \alpha \neq \beta \end{cases}$$
$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (1.17)$$

Definimos

$$\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \delta_{\sigma}^{\rho} = \begin{cases} 1, \text{ se } \rho = \sigma \\ 0, \text{ se } \rho \neq \sigma \end{cases} \quad (1.18)$$

A expressão (1.18) pode ser generalizada:

$$\delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \begin{cases} 1, \mu \neq \nu; \rho = \mu, \sigma = \nu \\ -1, \mu \neq \nu; \rho = \nu, \sigma = \mu \\ 0, \text{ outros casos} \end{cases} \quad (1.19)$$

Pode-se mostrar que [4]

$$\delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\nu} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} \end{vmatrix} = \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\rho}^{\nu} \quad (1.20)$$

o que demonstra o caráter tensorial de  $\delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$ . Analogamente temos:

$$\delta_{\rho\sigma\tau}^{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\lambda} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\sigma}^{\lambda} \\ \delta_{\tau}^{\mu} & \delta_{\tau}^{\nu} & \delta_{\tau}^{\lambda} \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

A idéia se generaliza para ordens maiores. Em 4 dimensões o delta de Kronecker com 5 índices se anula identicamente. Temos também que

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} A_{\rho\sigma} \quad (1.22)$$
$$A_{[\mu\nu\lambda]} = \frac{1}{3!} \delta_{\mu\nu\lambda}^{\rho\sigma\tau} A_{\rho\sigma\tau}$$

Continuemos a mostrar alguns resultados sem demonstração.

1. Se  $\vec{A}$  é um vetor covariante, então

$$A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} A_{\rho,\sigma}$$

é um tensor covariante antissimétrico de segunda ordem. Este cotensor é chamado de rotacional do vetor.

2. Se  $A_{\mu\nu}$  é um tensor covariante antissimétrico de 2<sup>a</sup> ordem a divergência cíclica

$$A_{\mu\nu,\rho} + A_{\rho\mu,\nu} + A_{\nu\rho,\mu} = \delta_{\mu\nu\rho}^{\epsilon\omega\lambda} A_{\epsilon\omega,\lambda}$$

é um tensor completamente antissimétrico de 3<sup>a</sup> ordem.

3. Se  $A_{\mu\nu\rho}$  é um tensor covariante completamente antissimétrico de 3<sup>a</sup> ordem, então  $A_{\mu\nu\rho,\sigma} - A_{\sigma\mu\nu,\rho} + A_{\mu\rho\sigma,\nu} - A_{\nu\rho\sigma,\mu} = \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\varepsilon w\lambda\tau} A_{\varepsilon w\lambda,\tau}$  é um tensor covariante completamente antissimétrico de 4<sup>a</sup> ordem. Esta última construção é o máximo onde se pode ir com este processo em 4 dimensões.

Um rápido comentário sobre o símbolo de Levi-Civita, que é uma densidade tensorial [4] (sem-demonstração).

$$\frac{1}{0!} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau} \varepsilon_{ik\rho\sigma} = \delta_{ik\rho\sigma}^{\mu\nu\lambda\tau} \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{1!} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau} \varepsilon_{ik\rho\tau} = \delta_{ik\rho}^{\mu\nu\lambda} \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{2!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{ik\rho\sigma} = \delta_{ik}^{\mu\nu} \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{3!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\nu\rho\sigma} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1 \quad (1.27)$$

Podemos formar uma base no sistema de coordenadas  $x^\mu$  através da notação

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

De modo que qualquer vetor em  $P$  é dado por

$$X_P = X_P^\mu [\partial_\mu]_P \quad (1.28)$$

isto é, uma combinação linear dos vetores da base  $\partial_\mu$ .

O espaço vetorial de todos os vetores contravariantes em  $P$  é conhecido

como *espaço tangente* em  $P$ . Não confundir o espaço tangente com a própria variedade. O vetor tangente à superfície em um dado ponto *está no espaço tangente* e não na superfície. Podemos citar como exceções o espaço euclidiano e o espaço-tempo de Minkowski.

## 1.6 A conexão afim e a derivada covariante

Seja um vetor  $A^\mu(x)$  cujas componentes no ponto  $x^\mu + dx^\mu$ ,  $A^\mu(x^\mu + dx^\mu)$ , estão relacionadas com  $A^\mu(x)$  pela equação  $A^\mu(x + dx) = A^\mu(x) + dA^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$ ; a quantidade  $dA^\mu$  não é um vetor pois é proveniente de aplicações do vetor  $A^\mu$  em pontos diferentes. Mas podemos construir um vetor em  $x^\mu + dx^\mu$  paralelo a  $A^\mu(x)$ ; sejam  $A^\mu(x) + \delta A^\mu(x)$  suas componentes. Novamente,  $\delta A^\mu$  sendo a diferença de dois vetores em pontos distintos, não é um vetor, mas podemos proceder de tal maneira que a diferença  $A^\mu(x) + dA^\mu(x) - (A^\mu(x) + \delta A^\mu(x)) = dA^\mu(x) - \delta A^\mu(x)$  seja um vetor. A Fig.1.1 ilustra o processo.

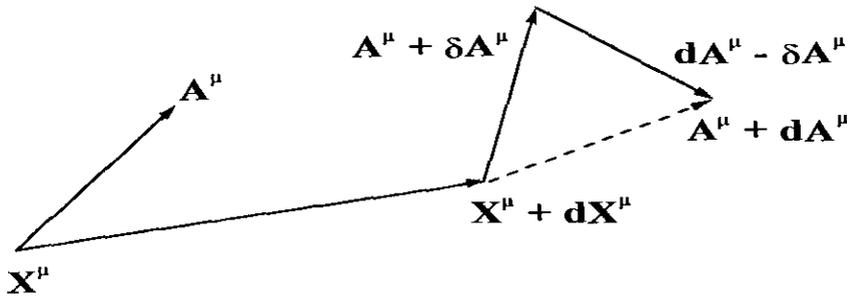


Figura 1.1: A linha tracejada indica o vetor sob transporte paralelo na geometria euclidiana.

Vamos assumir que  $\delta A^\mu$  seja linear em  $A^\mu$  e em  $\delta x^\mu$ . Então:

$$\delta A^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \delta x^\lambda \quad (1.29)$$

onde  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  é a conexão afim da variedade. Definimos então a derivada covariante de um vetor contravariante:

$$\nabla_\mu A^\lambda = A^\lambda_{;\mu} = \partial_\mu A^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda A^\nu \quad (1.30)$$

e para um vetor covariante:

$$\nabla_\mu A_\lambda = \partial_\mu A_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu . \quad (1.31)$$

A idéia acima estende-se para tensores de ordem mais alta. Exemplo:

$$A^\mu_{\nu;\sigma} = \partial_\sigma A^\mu_\nu + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu A^\alpha_\nu - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha A^\mu_\alpha \quad (1.32)$$

A derivada covariante de um escalar reduz-se à própria derivada usual:

$$\nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi = \frac{d}{dx^\alpha} \phi \quad (1.33)$$

A conexão afim é simétrica nos índices inferiores (se tivéssemos um espaço com torção, a conexão não seria simétrica):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (1.34)$$

A derivada covariante não é em geral comutativa. Para qualquer tensor  $T^\alpha_\beta$  definamos o seu *comutador* como sendo

$$\nabla_\lambda \nabla_\delta T^\alpha_\beta - \nabla_\delta \nabla_\lambda T^\alpha_\beta \quad (1.35)$$

(a definição vale também para tensores de ordem mais alta). Vamos trabalhar o comutador

para o caso de um vetor  $X^\alpha$ . Temos:

$$\nabla_\delta \nabla_\lambda X^\alpha = \partial_\delta (\partial_\lambda X^\alpha + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha X^\beta) + \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha (\partial_\lambda X^\epsilon + \Gamma_{\beta\lambda}^\epsilon X^\beta) - \Gamma_{\lambda\delta}^\epsilon (\partial_\epsilon X^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha X^\beta) \quad (1.36)$$

$$\nabla_\lambda \nabla_\delta X^\alpha = \partial_\lambda (\partial_\delta X^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha X^\beta) + \Gamma_{\epsilon\lambda}^\alpha (\partial_\delta X^\epsilon + \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon X^\beta) - \Gamma_{\delta\lambda}^\epsilon (\partial_\epsilon X^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha X^\beta) \quad (1.37)$$

Assumindo que  $\partial_\lambda \partial_\delta X^\alpha = \partial_\delta \partial_\lambda X^\alpha$  e substituindo no comutador, temos:

$$\nabla_\lambda \nabla_\delta X^\alpha - \nabla_\delta \nabla_\lambda X^\alpha = R_{\beta\lambda\delta}^\alpha X^\beta + (\Gamma_{\lambda\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\lambda}^\epsilon) \nabla_\epsilon X^\alpha \quad , \quad (1.38)$$

onde

$$R_{\beta\lambda\delta}^\alpha = \partial_\lambda \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\lambda}^\alpha - \Gamma_{\beta\lambda}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \quad (1.39)$$

é o tensor de Riemann ou tensor de curvatura obedecendo às propriedades [5, 6]:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1.40)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (1.41)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} = 0 \quad (1.42)$$

esta última relação chama-se *identidade de Bianchi*.

Como estamos interessados em conexões sem torção o último termo na Eq.(1.38) se anula.

Usando a parte antissimétrica de um tensor, podemos reescrever a Eq.(1.38)

na forma:

$$\nabla_{[\lambda} \nabla_{\delta]} X^\alpha = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\lambda\delta} X^\beta . \quad (1.43)$$

Pode ser mostrado que, para uma conexão simétrica, o comutador de qualquer tensor pode ser expresso em termos dele mesmo e do tensor de Riemann.

I) Definimos o *tensor de Ricci* pela contração

$$R_{\alpha\beta} = R^\lambda_{\alpha\lambda\beta} = g^{\lambda\rho} R_{\rho\alpha\lambda\beta} \quad (1.44)$$

que é simétrico pela relação (1.39).

II) Definimos o *escalar de curvatura*

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (1.45)$$

III) Definimos o *tensor de Einstein*

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \quad (1.46)$$

simétrico, isto é,  $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$  e obedecendo a identidade de Bianchi contraída:

$$G^\beta_{\alpha;\beta} = 0 \quad (1.47)$$

## 1.7 Métrica – variedade Riemanniana

Um tensor de segunda ordem, simétrico e com inversa, define uma *métrica*.

Seja  $g_{\mu\nu}(x)$  este tensor.

Uma variedade dotada de uma métrica é uma *variedade Riemanniana*. Uma métrica pode ser usada para definir distâncias e comprimentos de vetores.

Dados dois pontos infinitesimalmente próximos,  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ , a distância entre eles pode ser escrita como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (1.48)$$

chama-se a esta distância de *elemento de linha*.

A métrica  $g_{\mu\nu}$  é associada a uma matriz, podendo esta ser ou não diagonal, dependendo se a métrica tenha ou não termos cruzados. Seu determinante é dado por

$$g = \Delta(g_{\mu\nu}) \quad (1.49)$$

e sua inversa é  $g^{\mu\nu}$  de forma que

$$g^{\mu\lambda}g_{\rho\mu} = \delta^\lambda_\rho . \quad (1.50)$$

Como  $g_{\mu\nu}$  é um tensor de ordem 2, temos que sua derivada covariante é:

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \quad (1.51)$$

mas a derivada covariante da métrica numa variedade Riemanniana é nula:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 . \quad (1.52)$$

A partir do momento em que a Eq.(1.52) se anula é possível se obter uma expressão para a conexão em função da métrica. Como já vimos, a conexão é simétrica nos índices inferiores (Eq.(1.34)).

Vamos escrever a Eq.(1.51) com diferentes permutações de índices:

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu} \quad (1.53)$$

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu} g_{\alpha\nu} \quad (1.54)$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha} = -\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} g_{\beta\nu} . \quad (1.55)$$

Um simples algebrismo (lembrando que  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ), nos permite escrever:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} &= (\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}) g_{\nu\beta} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}) g_{\nu\mu} \\ &\quad + (\Gamma_{\beta\mu}^{\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu}) g_{\alpha\nu} . \end{aligned} \quad (1.56)$$

Devido à simetria da conexão (Eq.(1.34)), os primeiros dois termos da direita se anulam; obtemos então:

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} . \quad (1.57)$$

Multiplicando por  $g^{\alpha\gamma}$  e lembrando que  $g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} = \delta^\gamma_\nu$ , temos:

$$\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (1.58)$$

## 1.8 Espaços de Weyl e espaços de Weyl integráveis

A partir da Teoria Geral da Relatividade onde a força gravitacional é “geometrizada”, vários pesquisadores procuraram uma descrição unificada, com base geométrica, que incorporasse tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo, ambas interações fundamentais de longo alcance. Entre esses pesquisadores temos Hermann Weyl, que em 1918 propôs uma unificação eletromagnetismo — gravitação, na qual a liberdade de calibre do potencial eletromagnético é associada a um fator de escala local de medidas de comprimentos, donde resulta uma estrutura geométrica conformalmente invariante — o Espaço de Weyl — na qual, ao contrário do caso Riemanniano, não é possível definir uma unidade de comprimento válida globalmente ao longo de toda a variedade. A curvatura do espaço-tempo requerida pela TRG pode ser vista em termos da noção de deslocamento paralelo de um vetor; na geometria de Riemann o transporte de um vetor por deslocamento paralelo ao longo de um circuito fechado resulta na variação da direção final do vetor em relação à direção inicial. Weyl coloca que, além da direção, o comprimento do vetor também varia.

Definamos então tensor  $Q_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}g_{\sigma\nu}$ , simétrico nos dois primeiros índices,  $Q_{\mu\nu\alpha} = Q_{\nu\mu\alpha}$ . Weyl, propôs a introdução do campo vetorial  $\vec{w}(x) = w_\alpha(x^\mu)$ , definido sobre uma variedade afim com métrica  $g_{\mu\nu}$ , como um novo objeto

geométrico que regularia localmente as variações de comprimento no transporte de vetores através da relação

$$Q_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu}w_\alpha \quad (1.59)$$

Nesse caso as conexões afins são dadas por [1, 8]

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu \nu \end{array} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\mu\lambda}w_\nu - g_{\nu\lambda}w_\mu - g_{\mu\nu}w_\lambda) \quad (1.60)$$

Então a variação do comprimento de um vetor  $\xi^\mu$  ao ser transportado segundo um incremento  $dx^\alpha$  será

$$d(\ell^2) = (g_{\mu\nu;\alpha}dx^\alpha) \xi^\mu \xi^\nu = g_{\mu\nu}w_\alpha dx^\alpha \xi^\mu \xi^\nu = \ell^2 w_\alpha dx^\alpha \quad (1.61a)$$

$$\text{ou} \quad d\ell = \frac{\ell}{2} w_\alpha dx^\alpha \quad (1.61b)$$

Obtemos assim uma teoria em que a variação local  $d(\ell^2)$  do comprimento de um vetor transportado infinitesimalmente é função linear do comprimento  $\ell^2$ , do incremento  $dx^\alpha$  e do vetor de escala  $w_\alpha$ . Como  $\ell^2$  e  $w_\alpha dx^\alpha$  são escalares, a relação (1.61b) é covariante. Definimos assim um *Espaço de Weyl* como uma variedade afim a 4 dimensões, dotado de métrica  $g_{\mu\nu}$  (empregada na determinação de comprimentos), de uma conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  (empregada na construção de derivadas covariantes) e de um vetor  $w_\alpha$  (empregado na determinação de variações de comprimentos) satisfazendo as relações [1]

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu}w_\alpha \quad ; \quad (1.62a)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\nu \end{array} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\mu\lambda} w_{\nu} + g_{\nu\lambda} w_{\mu} - g_{\mu\nu} w_{\lambda}) \quad ; \quad (1.62b)$$

$$d\ell = \frac{1}{2} \ell w_{\alpha} dx^{\alpha} \quad ; \quad (1.62c)$$

sendo o elemento infinitesimal de linha dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.63)$$

onde escolhemos a assinatura (+ - - -) para o tensor métrico. Nas expressões acima,  $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu \nu \end{array} \right\}$  é a conexão Riemanniana, observe que se  $w_{\alpha}$  for nulo a conexão Weyliana reduz-se à forma de Riemann.

Então o tensor de Riemann na geometria de Weyl toma a forma:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} &= \bar{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} + \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\beta} W_{\lambda\gamma} + \\ &+ w_{\beta||\gamma} \delta^{\alpha}_{\lambda} + w^{\alpha} ||_{[\lambda} g_{\gamma]\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{[\lambda} w_{\gamma]} w_{\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha[\gamma} w_{\lambda]} w^{\alpha} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{[\gamma} g_{\lambda]\beta} w_{\rho} w^{\rho} \quad , \end{aligned} \quad (1.64)$$

onde

$$W_{\lambda\gamma} = \omega_{\lambda||\gamma} - \omega_{\gamma||\lambda} = \omega_{\lambda|\gamma} - \omega_{\gamma|\lambda} \quad (1.65)$$

e

$$\bar{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\}_{,\lambda} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\lambda \end{array} \right\}_{,\gamma} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \lambda\rho \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \gamma\beta \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\rho \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \lambda\beta \end{array} \right\} \quad (1.66)$$

é o tensor de Riemann num espaço Riemanniano (onde vale  $g_{\mu\nu||\alpha} = 0$ ).

De modo análogo, o tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  definido por

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - 3 w_{\alpha||\beta} + w_{\beta||\alpha} - \frac{1}{2} w_{\beta} w_{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (w^{\gamma}{}_{||\gamma} - w_{\gamma} w^{\gamma}) \quad (1.67)$$

tem no espaço de Weyl a expressão

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} w_{\alpha||\beta} + \frac{1}{2} w_{\beta||\alpha} - \frac{1}{2} w_{\beta} w_{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (w^{\gamma}{}_{||\gamma} - w_{\gamma} w^{\gamma}) \quad (1.68)$$

onde

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\}_{,\beta} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_{,\mu} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\alpha \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \quad (1.69)$$

é tensor de Ricci no espaço de Riemann. O escalar de curvatura  $R$ ,

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (1.70)$$

tem a expressão

$$R = \bar{R} - 3w^{\gamma}{}_{||\gamma} + \frac{3}{2} w_{\gamma} w^{\gamma} \quad (1.71)$$

onde  $\bar{R} = g^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta}$  é a forma Riemanniana.

Por fim o tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \quad (1.72)$$

tem no espaço de Weyl a forma

$$G_{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} w_{\alpha||\beta} + \frac{1}{2} w_{\beta||\alpha} - \frac{1}{2} w_{\alpha} w_{\beta} + g_{\alpha\beta} \left( w^{\gamma||\gamma} - \frac{1}{4} w_{\gamma} w^{\gamma} \right) \quad (1.73)$$

(de novo,  $\bar{G}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{\alpha\beta}$  é a versão Riemanniana).

Doravante as quantidades Riemannianas serão denotadas por uma barra superior. A escolha da Eq.(1.62a) não fixa univocamente as 14 variáveis compreendidas na descrição da métrica  $g_{\mu\nu}$  e do vetor de calibre  $w_{\alpha}$ .

Tanto num espaço de Riemann como num espaço de Weyl, os ângulos entre vetores são preservados, já que o cosseno do ângulo entre dois vetores

$$\cos \alpha = \frac{g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta}}{(g_{\alpha\beta} A^{\alpha} A^{\beta})^{\frac{1}{2}} (g_{\alpha\beta} B^{\alpha} B^{\beta})^{\frac{1}{2}}} \quad (1.74)$$

é conformalmente invariante.

Na geometria de Riemann a lei de transporte afim de um vetor é dada por

$$d\xi^{\alpha} = -\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \xi^{\beta} dx^{\gamma} . \quad (1.75)$$

Fica óbvio de ver que, pelo fato da invariância das conexões, a Eq.(1.75) fica mantida, mas os comprimentos de vetores localmente se alteram:

$$\tilde{l}^2 = \Omega^2 l^2 . \quad (1.76)$$

Este fato não permite o estabelecimento de um padrão de comprimentos que seja válido

em toda a variedade.

Também não temos a conservação de comprimentos sob transporte paralelo, pois da expressão (1.62c) temos

$$2 \oint \frac{dl}{l} = \oint \omega_\alpha dx^\alpha \neq 0. \quad (1.77)$$

A geometria de Riemann é um caso especial da geometria de Weyl. Observe que se em (1.62a) o vetor de calibre for nulo, recaímos no caso Riemanniano. Por sua vez essa condição pode também ser obtida se

$$\omega_\alpha = \Phi_{,\alpha} , \quad (1.78)$$

isto é, se o vetor de calibre for o gradiente de alguma função escalar  $\Phi = \Phi(x)$ , porque podemos então realizar uma transformação de calibre tal que

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha^* = 0 = \omega_\alpha + \frac{\Omega^2_{,\alpha}}{\Omega^2} \quad (1.79)$$

donde  $\omega_\alpha = -\frac{\Omega^2_{,\alpha}}{\Omega^2}$  e  $\Phi$  e  $\Omega^2$  estão relacionados por

$$\Omega^2 = e^{-\Phi} . \quad (1.80)$$

A estrutura geométrica assim formada terá aspecto Riemanniano porque

$$\left( \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \right)^* = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} , \quad (1.81)$$

isto é, as conexões serão idênticas; e fundamental:

$$(\tilde{g}_{\mu\nu;\alpha})^* = \tilde{g}_{\mu\nu}\omega_\alpha^* = 0 . \quad (1.82)$$

Ora, sendo válida a Eq.(1.78), o teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = \oint_C A_\alpha dx^\alpha = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\alpha dS^\alpha , \quad (1.83)$$

onde  $C$  é o circuito fechado englobando a área  $S$ , mostra que

$$2 \oint_C \frac{dl}{l} = \oint_C \omega_\alpha dx^\alpha = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi) \cdot d\vec{S} = 0 , \quad (1.84)$$

isto é, os comprimentos são preservados sob transporte paralelo em um circuito infinitesimal fechado. Temos então a estrutura conhecida sob a denominação de *espaços conformalmente Riemannianos* ou *espaços de Weyl integráveis* (*WIST* — “Weyl Integrable Space-Time”), isto é, espaços de Weyl cujo vetor de calibre é o gradiente de uma função escalar. Uma estrutura *WIST* é caracterizada portanto pela relação

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu}\Phi_{,\alpha} . \quad (1.85)$$

Como no caso Riemanniano, num *WIST* a variação total de comprimento num percurso fechado é nula porque a condição de integrabilidade

$$W_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha,\beta} - \omega_{\beta,\alpha} = 0 \quad (1.86)$$

que permite a preservação de comprimentos sob transporte em um circuito infinitesimal é satisfeita. Um *WIST* sempre é redutível a um espaço de Riemann por meio de uma transformação do tipo dado pela Eq.(1.79). Deve-se salientar entretanto que suas estruturas não são idênticas.

## Capítulo 2

# Gravitação em *WIST*

No seu trabalho de 1915, Einstein modificou a concepção newtoniana de ação à distância introduzindo a noção de campo gravitacional responsável pela ação local da gravitação. Esta nova idéia, associada aos princípios de equivalência e covariância, permitiu formular a teoria onde a matéria contida no universo é a responsável pela curvatura do espaço-tempo. Para expressar seus pensamentos, Einstein representou o contínuo espaço-tempo por uma geometria riemanniana, onde com o traço do tensor de curvatura  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , constrói-se o tensor de Einstein,  $G_{\alpha\beta}$ . Este tensor está relacionado ao tensor momentum-energia da matéria,  $T_{\alpha\beta}$ , pela equação

$$G_{\alpha\beta} = -k T_{\alpha\beta} \text{ ,} \quad (2.1)$$

onde o lado esquerdo determina as propriedades da geometria e o lado direito expressa o conteúdo material ou de energia. Assim a matéria/energia e a geometria estão diretamente relacionadas. A constante  $k$  é a constante de proporcionalidade relacionada à constante

$G$  que aparece na teoria clássica newtoniana ( $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ ).

Na geometria de Riemann o tensor  $G_{\alpha\beta}$  é simétrico em seus dois índices e o tensor  $T_{\alpha\beta}$  é simétrico por definição.

Pode-se mostrar, pela identidade de Bianchi para o tensor de Riemann, que a divergência do tensor de Einstein é nula,

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad , \quad (2.2)$$

Como conseqüência temos a lei de conservação da matéria/energia, isto é,

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad . \quad (2.3)$$

Na teoria geral da relatividade, as leis dinâmicas do movimento da matéria estão contidas nas equações de Einstein. Para o caso especial de poeira, tomado aqui como exemplo, temos [4]

$$T^{\alpha\beta} = \rho V^\alpha V^\beta \quad , \quad (2.4)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $V$  é o campo de velocidades. Calculando a divergência do tensor acima, obtemos:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \rho V^\alpha V^\beta{}_{;\beta} + \rho V^\alpha{}_{;\beta} V^\beta + \rho_{;\beta} V^\alpha V^\beta = 0 \quad . \quad (2.5)$$

Projetando estas equações nas direções paralela e perpendicular à direção do movimento, expressa pelo campo vetorial  $V^\mu(x)$ , obtemos, respectivamente [5]:

$$\rho\theta + \dot{\rho} = 0 \quad (2.6)$$

e

$$\rho h^\mu{}_\alpha V^\alpha{}_{;\beta} V^\beta = 0 \quad , \quad (2.7)$$

onde  $\theta = V^\beta{}_{;\beta}$  expressa a variação do volume específico do fluido e  $h^\mu{}_\alpha = g^\mu{}_\nu - V^\mu V_\nu$  é o tensor projeção. Tais expressões mostram que a matéria tem sua densidade de energia conservada e as partícula do fluido seguem geodésicas em um campo gravitacional.

Podemos também procurar por uma equação de movimento dos raios de luz. Na física clássica newtoniana a luz propaga-se em trajetória retilínea. No contexto da teoria de Einstein, as equações podem ser obtidas pela aproximação ótica das equações de Maxwell, que mostramos a seguir.

A ótica geométrica diz que os raios de luz propagam-se em geodésicas nulas.

Tomemos a fase da onda [6]

$$m = \frac{\text{distância}}{\text{comprimento de onda}}$$

e a amplitude

$$A = \text{Re} \left\{ \text{Amplitude} \cdot e^{im/\varepsilon} \right\} \quad .$$

O vetor de onda pode ser escrito como

$$k_\mu = \nabla_\mu(m) \quad , \quad (2.8)$$

isto é, o gradiente da fase. O potencial vetor pode ser escrito

$$A_\mu = \text{Re} \left\{ \left( a_\mu + \varepsilon b_\mu + \varepsilon^2 c_\mu + \dots \right) e^{im/\varepsilon} \right\} \quad , \quad (2.9)$$

onde os vetores  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, \dots$  são arbitrários, linearmente independentes e funções do ponto, assim como a fase  $m$ ; o parâmetro  $\varepsilon$  é feito tão pequeno quanto se queira. A expansão acima é um artifício matemático da ótica geométrica. Daqui por diante só consideraremos o primeiro termo em expansões do tipo da equação (2.9).

O vetor polarização da onda é dado por

$$f^\mu = \frac{a^\mu}{(g_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta)^{\frac{1}{2}}} . \quad (2.10)$$

O potencial vetor da Eq. (2.9) acima satisfaz à condição de gauge de Lorentz,

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (2.11)$$

e a equação de onda generalizada,

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} + R^\alpha{}_\beta A^\beta = 4\pi J^\alpha , \quad (2.12)$$

onde  $R^\alpha{}_\beta$  é o tensor de Ricci e  $J^\alpha$  é o vetor corrente, que assume a forma

$$-A^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} + R^\alpha{}_\beta A^\beta = 0 \quad (2.13)$$

ou

$$\text{Re} \left\{ \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} k^\beta k_\beta a^\alpha - 2 \frac{i}{\varepsilon} k^\beta a^\alpha{}_{;\beta} - \frac{i}{\varepsilon} k^\beta{}_{;\beta} a^{\alpha;\beta} - a^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} + R^\alpha{}_\beta a^\beta \right] e^{im/\varepsilon} \right\} = 0 \quad (2.14)$$

já que o vetor corrente pode ser feito igual a zero. Agrupando os termos de ordem  $1/\varepsilon^2$ ,

temos:

$$O(1/\varepsilon^2) : k^\beta k_\beta a^\alpha = 0 ; \quad (2.15)$$

como o vetor  $a^\alpha$  é arbitrário, segue que

$$k^\mu k_\mu = 0 , \quad (2.16)$$

isto é, o vetor de onda é um vetor nulo, determinando o cone de luz.

Derivando a expressão (2.16) na forma

$$(k^\beta k_\beta)_{;\alpha} = 2k^\beta k_{\beta;\alpha} = 0 \quad (2.17)$$

e lembrando que  $k_\beta = m_{,\beta}$  (gradiente de um escalar), podemos permutar índices:

$$k^\beta k_{\beta;\alpha} = k^\beta k_{\alpha;\beta} = 0 . \quad (2.18)$$

Logo

$$k^\alpha{}_{;\beta} k^\beta = 0 . \quad (2.19)$$

Esta equação diz como o vetor de onda se propaga, isto é, é a equação da geodésica.

As equações de Einstein podem ser obtidas por um método variacional, como mostrou David Hilbert [7] em um trabalho que veio logo a seguir ao de Einstein. Neste trabalho é construída uma densidade lagrangeana que contém um escalar envolvendo a geometria — o escalar de curvatura. O escalar  $R$  contém o tensor  $g_{ik}$ , suas derivadas primeiras e suas derivadas segundas de forma linear [7]. Pelo fato da dependência ser

linear, pode-se fazer com que a integral construída com o escalar  $R$ , seja transformada numa integral que não dependa mais das derivadas segundas do tensor métrico  $g_{ik}$ . Vamos iniciar tomando a ação

$$S = \int \mathcal{L} dV = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.20)$$

ou

$$S = \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.21)$$

Considerando uma pequena variação  $\delta g_{\mu\nu}$ :

$$\delta (R\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta (\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Como foi explicado,  $R$  é função de  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas. Sendo este escalar traço do tensor  $R_{\mu\nu}$ , este último também é função de  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas, já que o mesmo depende da conexão  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ . Ora, usando a expressão (1.58) podemos escrever a variação  $\delta R_{\mu\nu}$  como

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{\nu} - (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{\lambda} \quad (2.23)$$

então o último termo em (2.22) ficará

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} [(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{\nu} - (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{\lambda}] \quad (2.24)$$

ou usando a expressão

$$V^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} V^\mu)_{,\mu}$$

para a divergência de um vetor, temos:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)_{|\nu} - \left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right)_{|\lambda} . \quad (2.25)$$

Quando realizamos a integração, a expressão acima reduz-se a uma integral de superfície e como a variação  $\delta g^{\mu\nu}$  se anula nos contornos da região de integração a expressão (2.21) fica:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x , \quad (2.26)$$

onde usamos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

e

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} . \quad (2.28)$$

Pelo princípio de mínima ação,  $\delta S = 0$  e sendo  $\delta g^{\mu\nu}$  arbitrário, obtemos

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0 , \quad (2.29)$$

que são as equações de Einstein para o vazio. Levando em conta a presença de matéria e campos, temos

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -kT^{\mu\nu} , \quad (2.30)$$

onde o tensor momentum-energia  $T^{\mu\nu}$  provém da variação em relação a  $g_{\mu\nu}$  da ação  $S = \int \Lambda\sqrt{-g} d^4x$ , onde  $\Lambda$  é a densidade lagrangeana que representa a matéria em um volume  $\sqrt{-g} d^4x$ .

A teoria de Einstein da gravitação estabeleceu-se tendo a cosmologia como uma de suas aplicações. O modelo padrão foi desenvolvido para explicar o universo e suas origens. Mas ao longo do tempo começaram a surgir objeções que a *TGR* não resolvia, como por exemplo a dificuldade em relação à singularidade inicial [11, 12, 20]. É difícil aceitar que a partir de um determinado instante, anteriormente ao qual nada existia, surge espontaneamente toda a matéria e energia contidas no atual universo observado. Também pode ser citado que a radiação resultante do “Big-Bang” apresenta um comportamento isotrópico não explicado nos instantes iniciais do universo.

Estas e outras dificuldades deram ensejo a teorias alternativas à *TGR* que surgem formando um amplo espectro de idéias novas que evoluem constantemente, gerando novos caminhos para o desenvolvimento da teoria da gravitação. Isto é uma característica natural da história de todo pensamento científico, acionado pela constante necessidade de se superar um modelo pré-estabelecido, face aos problemas por ele suscitados. Pode-se afirmar então que uma base comum a toda nova proposta teórica vai ser a violação de algumas hipóteses da teoria precedente objetivando evitar os problemas que aquelas apresentam.

Entre as alternativas podemos citar a teoria de Brans-Dicke [13], onde um campo escalar é introduzido para representar a distribuição de matéria no universo e buscar uma realização do princípio de Mach. Citamos também as teorias que introduzem o dilaton, campo escalar proveniente da teoria de cordas [11] ou de redução dimensional de teorias tipo Kaluza-Klein [12,13]. Essas teorias fornecem resultados interessantes para buracos negros e estrelas bosônicas bem como para modelos cosmológicos.

Essas teorias não geometrizam integralmente a interação gravitacional. Um

meio de geometrizar o campo escalar introduzido é adotar a geometria de Weyl para substituir a geometria de Riemann; na geometria de Weyl, a métrica e a conexão afim são relacionadas pela propriedade de *compatibilidade* que estabelece que para toda métrica  $g_{\mu\nu}(x)$ , existe um vetor  $\omega_\lambda(x)$ , chamado vetor covariante de Weyl, tal que [17]

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu}\omega_\lambda \quad (2.31)$$

(para maiores detalhes sobre geometria de Weyl, ver o Cap.1 desta tese).

O fato de se adotar a geometria de Weyl em substituição à geometria de Riemann traz alguns problemas de ordem física como o “efeito do relógio secundário”. Antes de comentá-lo, façamos uma breve recordação do “efeito do relógio primário” ou “paradoxo dos gêmeos” que surge na experiência em que dois relógios idênticos estão juntos e sincronizados e depois são separados espacialmente durante um certo intervalo de tempo, ao final do qual voltam a se juntar. Quando comparados após a separação apresentam-se dessincronizados.

O “efeito do relógio secundário” considera a mesma experiência descrita acima, mas além da dessincronização aparecem também variações nas unidades de medida entre os dois relógios; ao final da experiência, um deles funcionará mais rápido que o outro. Este fenômeno não existe na Geometria de Riemann, sendo típico da geometria de Weyl. A medida do efeito do relógio secundário é a diferença entre as respectivas variações por unidade de medida que os relógios sofrem ao longo de diferentes caminhos. Isto é determinado pela integral do vetor de Weyl ao longo da curva fechada  $C$  formada pelas

trajetórias dos relógios [1, 18]

$$\oint \frac{dl}{l} = \oint_C \omega_\alpha dx^\alpha . \quad (2.32)$$

Pelo teorema de Stokes, (2.32) é igual à integral tomada sobre a superfície  $S$  limitada entre as linhas de universo dos relógios

$$\oint_C \frac{dl}{l} = \int_S \omega_{[\alpha,\beta]} d\sigma^{\alpha\beta} . \quad (2.33)$$

Isto leva a alguns problemas, porque se, por exemplo, os relógios forem oscilações atômicas, teremos que se um átomo for levado por uma trajetória, sua frequência de radiação diferirá se a trajetória for outra. E mais ainda, a geometria de Weyl deixa o tensor de Einstein não simétrico em seus dois índices (ver Cap.1) ocasionando também uma alteração na simetria do tensor momentum-energia. Estas críticas podem ser superadas se optarmos pela vetor de Weyl como gradiente de um campo escalar (ver Cap.1). O entendimento de uma nova teoria da gravitação num espaço-tempo de Weyl integrável e sua comparação com as teorias já conhecidas, é favorecido pela possibilidade de se escrever os elementos da gravitação em *WIST* em termos da estrutura riemanniana associada mais os termos construídos em função do campo geométrico de Weyl. Em *WIST*, o tensor de Einstein e por conseguinte, o tensor de Ricci, recuperam a simetria e como já foi visto,  $\omega_\lambda = \omega_{\lambda}$ , o que faz que a integral em (2.32) se anule, evitando-se assim o efeito do relógio secundário.

Em *WIST*,  $\omega_{[\alpha,\beta]} = 0$  é uma expressão sempre válida, isto é, [19]

$$\int_S \omega_{[\alpha,\beta]} dS = \oint \frac{dl}{l} = \oint \omega_\mu dx^\mu = 0 . \quad (2.34)$$

As equações correspondentes, nesta nova teoria, às equações de Einstein, podem também ser obtidas pelo método variacional. Na ausência de distribuição de matéria ou de campos externos, a ação que representa o espaço-tempo vazio deve conter apenas elementos da geometria. A ação mais simples que podemos construir é

$$S = \int (R + \xi \omega^\mu{}_{;\mu}) \sqrt{-g} d^4x , \quad (2.35)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura weyliano,  $\xi$  é uma constante de acoplamento arbitrária [21] e  $\omega^\mu{}_{;\mu}$  é o escalar que podemos formar com o vetor de Weyl. Variando-se (2.35) em relação a  $g_{\mu\nu}$  e igualando a zero, temos

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1) \omega_\mu \omega_\nu + \xi g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha = 0 , \quad (2.36)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein em *WIST*. As equações (2.36) generalizam a equações de Einstein no vazio e coincidem com elas quando  $\omega$  é constante.

Para completar o conjunto de equações do movimento da geometria é necessário variar a ação em relação ao campo escalar geométrico; obtém-se assim a equação dinâmica para  $\omega$ :

$$\omega^{;\alpha}{}_{;\alpha} + 2\omega_\alpha \omega^\alpha = 0 . \quad (2.37)$$

Em um espaço-tempo de Weyl integrável é possível escrever  $R_{\mu\nu}$  e  $G_{\mu\nu}$  como a soma dos tensores riemannianos  $\hat{R}_{\mu\nu}$  e  $\hat{G}_{\mu\nu}$  acrescidos de termos construídos com o vetor de Weyl. Por conseguinte, as Eqs.(2.36) podem ser representadas em termos da configuração

riemanniana associada na forma

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda \left( \omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha \right) = 0, \quad (2.38)$$

sendo a constante de acoplamento  $\lambda$  dada por

$$\lambda = \frac{1}{2} (4\xi - 3). \quad (2.39)$$

Nas Eqs.(2.38), os termos que incluem as derivadas do campo escalar geométrico não podem ser interpretadas como fontes físicas do campo gravitacional; isto poderia ser considerado no caso de  $\lambda$  negativo [22, 23], quando então as equações seriam equivalentes às equações de Einstein com uma fonte escalar  $\omega$ .

Denotando como  $\square$  o operador d'alambertiano em Riemann, a Eq.(2.37) pode ser expressa em termos da configuração riemanniana associada,

$$\square\omega = 0. \quad (2.40)$$

Esta equação é satisfeita se as equações de Einstein generalizadas, Eq.(2.36), são válidas. Isto é visto de modo imediato a partir da condição de divergência nula para o tensor de Einstein em Riemann:

$$\hat{G}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.41)$$

Se levarmos em conta a interação entre a gravitação e campos externos, devemos introduzir termos na lagrangeana (2.35) para que a mesma seja estendida para o espaço-tempo com

fontes externas não geométricas.

Podemos, como exemplo, citar o caso de um campo escalar externo  $\Phi(x)$ .

A ação fica então

$$S = \int \left( R + \xi \omega^\alpha_{;\alpha} + e^{-2\omega} \Phi_{;\mu} \Phi^{;\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x . \quad (2.42)$$

As equações de movimento respectivas à variação da geometria são:

$$\begin{aligned} [\delta g^{\mu\nu}] \quad G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} + \frac{3}{4} g_{\mu\nu} \omega^\alpha_{;\alpha} - (2\xi - 1) \omega_\mu \omega_\nu + \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha = \\ = -e^{-2\omega} \left( \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} \right) , \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$[\delta \omega] \quad \square \omega + 2\omega_\alpha \omega^\alpha = \frac{1}{\lambda} e^{-2\omega} \Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} . \quad (2.44)$$

Variando-se a ação em relação ao campo escalar, obtemos:

$$[\delta \Phi] \quad \Phi^{i\mu}_{;\mu} = 0 . \quad (2.45)$$

Aqui a anulação da conexão afim faz com que se recaia na relatividade especial. Se em vez do campo  $\Phi$  tivéssemos optado pelo tensor  $F_{\mu\nu}$ , teríamos a equação de Maxwell da relatividade especial.

Tanto no caso do vazio, como no caso de acoplamento com campos externos, podemos reescrever todas as equações em termos da estrutura de Riemann associada. As expressões resultantes são:

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda \left( \omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha \right) = -e^{-2\omega} \left( \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{;\alpha} \Phi^{;\alpha} \right) ; \quad (2.46)$$

$$\square\omega = \frac{1}{\lambda}\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu}e^{-2\omega} ; \quad (2.47)$$

$$\square\Phi = 2\omega_{,\mu}\Phi^{,\mu} . \quad (2.48)$$

As soluções destas equações serão diferentes para cada valor da constante de acoplamento adimensional  $\lambda$ . Como o campo  $\omega$  tem natureza geométrica,  $\lambda$  pode tomar qualquer valor real (se  $\lambda < 0$ , todas as equações da teoria de dilaton da gravitação são reobtidas). É interessante observar que qualquer solução com campo escalar externo não nulo corresponde a um campo escalar geométrico  $\omega$  não constante. Isto é fundamental no que tange às modificações das soluções em relação à teoria da relatividade de Einstein; é possível eliminar a singularidade no horizonte de Cauchy na solução de buraco negro carregado [24]. No caso de soluções cosmológicas, dependendo do valor da constante de acoplamento  $\xi$ , pode ser determinado um período inflacionário e eliminar-se a singularidades do espaço-tempo.

Para ilustrar um pouco melhor as propriedades da teoria de *WIST*, vamos apresentar o caso de uma partícula livre. A dinâmica de uma partícula livre ou de um fluido com pressão nula em *WIST* pode ser obtida por intermédio de uma generalização da ação correspondente na *TGR* de Einstein. A ação total é dada pela soma de um termo geométrico com um termo da matéria:

$$S = S_G + S_M . \quad (2.49)$$

$S_G$  é a ação do espaço-tempo vazio (Eq.(2.35)) e  $S_M$  toma a forma

$$S_M = - \int \sum_{i=1}^n 2m_i \left( \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{e^{-\omega} g^{\mu\nu} \frac{dZ_i^\mu}{d\sigma_i} \frac{dZ_i^\nu}{d\sigma_i}} d\sigma_i \right) \delta^4(x - Z_i) d^4x. \quad (2.50)$$

Na expressão acima,  $\delta^4(x - Z_i)$  é a função delta 4-dimensional de Dirac e o índice  $i$  refere-se à  $i$ -ésima partícula do fluido;  $n$  é o número total de partículas;  $Z_i$  é a posição de cada partícula e o parâmetro  $\sigma$  refere-se à trajetória das partícula do fluido.

A variação em relação ao tensor métrico fornece as equações de Einstein generalizadas

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} + \frac{3}{4}g_{\mu\nu}\omega^\alpha{}_{;\alpha} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha = -kT_{\mu\nu}^M(x). \quad (2.51)$$

O lado esquerdo contém o resultado da variação de  $S_G$  e o lado direito apresenta o tensor momentum-energia decorrente da variação de  $S_M$ :

$$T_{\mu\nu}^M(x) = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \delta^4(x - Z_i) \frac{dZ_i^\mu}{d\sigma_i} \frac{dZ_i^\nu}{d\sigma_i} d\sigma_i. \quad (2.52)$$

Se aplicarmos a definição de densidade de energia média

$$\rho(x) = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \left( \sum_{i=1}^n m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \delta^4(x - Z_i) \frac{dZ_i^\mu}{d\sigma_i} \frac{dZ_i^\nu}{d\sigma_i} dV \right) \quad (2.53)$$

na Eq.(2.52), obtemos

$$T_M^{\mu\nu}(x) = e^{-\omega/2} \rho(x) V^\mu V^\nu, \quad (2.54)$$

onde  $V^\mu$  é o campo de velocidades do fluido parametrizado em relação ao tempo próprio.

Com a expressão (2.54), a Eq.(2.51) toma a forma

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha = -ke^{-\omega/2} \rho(x) V^\mu V^\nu. \quad (2.55)$$

Se variarmos a ação total em relação a  $\omega$ , obtemos a equação dinâmica para o campo escalar geométrico:

$$\square\omega + 2\omega_\alpha\omega^\alpha = -\frac{1}{2\lambda}\rho e^{-\omega/2} . \quad (2.56)$$

Em termos da estrutura riemanniana associada podemos escrever as duas equações acima como

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda \left( \omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha \right) = -k\rho e^{-\omega/2} \quad ; \quad (2.57)$$

$$\square\omega = -\frac{1}{2\lambda}e^{-\omega/2}\rho . \quad (2.58)$$

O acoplamento entre a densidade de matéria e o campo escalar está presente nas equações de movimento. Isso mostra que a presença de um fluido perfeito sem pressão induz um campo escalar geométrico não constante na geometria de Weyl integrável.

Se fizermos agora  $n = 1$  e variando a ação em relação ao caminho da partícula e, considerando  $\sigma$  como distância conforme,

$$d\sigma^2 = e^{-\omega} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.59)$$

obtemos a equação da geodésica em *WIST*:

$$\left( \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right)_{;\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = 0 . \quad (2.60)$$

Esta expressão é a generalização para o espaço-tempo curvo da equação de movimento para uma partícula livre na relatividade especial.

# Capítulo 3

## Campo magnético na teoria de WIST

### 3.1 Introdução

O estudo da dinâmica do campo magnético cosmológico em relatividade geral tem sido exaustivamente investigado [25]. O caso mais simples, um campo magnético em um espaço-tempo tipo Bianchi-I, foi recentemente estudado [26]. Devido à complexidade do sistema dinâmico gerado pelas suas equações, técnicas de análise de sistemas dinâmicos foram utilizadas para se obter informações a respeito de tal sistema, já que o mesmo não é integrável e soluções analíticas são possíveis de serem obtidas.

Neste capítulo construímos um modelo tendo como base o espaço-tempo de Weyl integrável em substituição à relatividade geral, modelo este aplicado no estudo da dinâmica do campo magnético. Este modelo mantém algumas das características básicas do sistema dinâmico estudadas nas Refs. [26] e [27], mas tem a vantagem de poder ser integrado analiticamente.

## 3.2 Equações de movimento

A ação que adotamos é dada por

$$S = \int \sqrt{-g} \left( R + \xi g^{\mu\nu} \omega_{;\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-2\omega} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) d^4x . \quad (3.1)$$

Tal expressão é uma extensão da Eq.(2.35) onde adicionamos o tensor de Maxwell. O acoplamento  $e^{-2\omega}$  já foi devidamente explicado no capítulo 2.

Considerando a Eq.(2.39) e variando a Eq.(3.1) em relação a  $\omega$ , ao potencial vetor ( $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ ) e à métrica  $g_{\mu\nu}$ , obtemos as expressões

$$\square\omega + 2\omega_{\alpha}\omega^{\alpha} = \frac{1}{\lambda} e^{-2\omega} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad ; \quad (3.2)$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad ; \quad (3.3)$$

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1) \omega_{\mu}\omega_{\nu} + \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} \omega_{\alpha}\omega^{\alpha} = -e^{-2\omega} \left( F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (3.4)$$

As equações na estrutura riemaniana associada ficam

$$\square\omega = \frac{1}{2\lambda} e^{-2\omega} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad ; \quad (3.5)$$

$$\left( e^{-2\omega} F^{\mu\nu} \right)_{||\nu} = 0 \quad ; \quad (3.6)$$

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda \left( \omega_{|\mu}\omega_{|\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega_{|\alpha}\omega^{|\alpha} \right) = -e^{-2\omega} \left( F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (3.7)$$

A geometria tipo Bianchi I, a métrica é dada por

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2. \quad (3.8)$$

A intensidade do campo magnético na teoria de Einstein-Maxwell também satisfaz à equação de movimento (3.3). Sem perda de generalidade, podemos tomar o vetor campo magnético alinhado com a direção  $x$ . Neste caso sua única componente não nula é dada por

$$F^{23} = \frac{F_0}{b^2 c^2}, \quad (3.9)$$

onde  $F_0$  é uma constante. Com tais especificações, as equações de campo se reduzem a

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = -\frac{1}{2}\lambda\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}F_0^2 \frac{e^{-2\omega}}{b^2 c^2}; \quad (3.10)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = \frac{1}{2}\lambda\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}F_0^2 \frac{e^{-2\omega}}{b^2 c^2}; \quad (3.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} = \frac{1}{2}\lambda\dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}F_0^2 \frac{e^{-2\omega}}{b^2 c^2}; \quad (3.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{1}{2}\lambda\dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}F_0^2 \frac{e^{-2\omega}}{b^2 c^2}; \quad (3.13)$$

$$\frac{(\dot{abc}\dot{\omega})}{abc} = \frac{1}{2}F_0^2 \frac{e^{-2\omega}}{b^2 c^2}, \quad (3.14)$$

(o ponto nas equações acima significa derivada em relação ao tempo). O sistema de equações diferenciais acima pode ser simplificado. Para tanto, introduzimos uma nova coordenada temporal:

$$d\tau = a(t) b(t) c(t) dt. \quad (3.15)$$

Com este procedimento, as equações (3.10)–(3.14) tomam a forma:

$$\frac{a'b'}{ab} + \frac{a'c'}{ac} + \frac{b'c'}{bc} = -\frac{1}{2}\lambda\omega'^2 + \frac{1}{2}F_0^2 a^2 e^{-2\omega}; \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{b'}{b}\right)' + \left(\frac{c'}{c}\right)' - \frac{a'b'}{ab} - \frac{a'c'}{ac} - \frac{b'c'}{bc} = \frac{1}{2}\lambda\omega'^2 + \frac{1}{2}F_0^2 a^2 e^{-2\omega}; \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' + \left(\frac{c'}{c}\right)' - \frac{a'b'}{ab} - \frac{a'c'}{ac} - \frac{b'c'}{bc} = \frac{1}{2}\lambda\omega'^2 - \frac{1}{2}F_0^2 a^2 e^{-2\omega}; \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' + \left(\frac{b'}{b}\right)' - \frac{a'b'}{ab} - \frac{a'c'}{ac} - \frac{b'c'}{bc} = \frac{1}{2}\lambda\omega'^2 - \frac{1}{2}F_0^2 a^2 e^{-2\omega}; \quad (3.19)$$

$$\omega'' = \frac{1}{\lambda}F_0^2 a^2 e^{-2\omega}. \quad (3.20)$$

(O símbolo “ ’ ”significa derivação em relação ao tempo coordenado  $\tau$ ). Substituindo (3.16) e (3.20) em (3.17), (3.18) e (3.19) e, após alguns algebrismos, temos

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' = -\frac{\lambda}{2}\omega''; \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{b'}{b}\right)' = \frac{\lambda}{2}\omega''; \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{c'}{c}\right)' = \frac{\lambda}{2}\omega''. \quad (3.23)$$

Definindo as novas variáveis:

$$x = \frac{a'}{a}; \quad y = \frac{b'}{b}; \quad z = \frac{c'}{c}; \quad w = \omega',$$

o sistema (3.16)–(3.20) torna-se

$$x' = -xy - xz - yz - \frac{\lambda}{2}w^2; \quad (3.24)$$

$$y' = xy + xz + yz + \frac{\lambda}{2}w^2; \quad (3.25)$$

$$z' = xy + xz + zy + \frac{\lambda}{2}w^2; \quad (3.26)$$

$$w' = \frac{2}{\lambda}(xy + xz + yz) + w^2, \quad (3.27)$$

sendo um sistema autônomo [28, 29].

Este sistema apresenta duas soluções particulares distintas. Façamos primeiro

$x' = y' = z' = w' = 0$ . Neste caso temos como solução

$$a(\tau) = A_0 e^{x_0 \tau}; \quad (3.28)$$

$$b(\tau) = B_0 e^{y_0 \tau}; \quad (3.29)$$

$$c(\tau) = C_0 e^{z_0 \tau}; \quad (3.30)$$

$$\omega(\tau) = \hat{w}_1 \tau + w_0. \quad (3.31)$$

As constantes  $A_0, B_0, C_0, w_0, x_0, y_0, z_0$  e  $\hat{w}_1$  podem ser escolhidas arbitrariamente desde que a condição

$$\hat{w}_1 = -\frac{2}{\lambda}(x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0) \quad (3.32)$$

seja encontrada. Esta solução representa um modelo de universo anisotrópico, homogêneo e estacionário.

A segunda solução pode ser obtida se escolhermos para o sistema de soluções

tipo Kasner:

$$a(\tau) = A_0 \tau^{p_1}; \quad (3.33)$$

$$b(\tau) = B_0 \tau^{p_2}; \quad (3.34)$$

$$c(\tau) = C_0 \tau^{p_3}; \quad (3.35)$$

$$\omega(\tau) = w_0 \ln \tau. \quad (3.36)$$

O sistema será satisfeito se  $p_1 = -p_2$ ,  $p_2 = p_3 = \frac{1}{2}\lambda w_0$  e  $w_0 = \frac{2}{\lambda-2}$ . Esta solução tem uma singularidade em  $\tau = 0$ , uma direção expandindo (contraíndo) e as outras duas direções contraíndo (expandindo).

As soluções gerais para as equações (3.21), (3.22), (3.23) e (3.27) são:

$$a = \tilde{A}_0 e^{-\lambda\omega/2} e^{\omega_1\tau}; \quad (3.37)$$

$$b = \tilde{B}_0 e^{\lambda\omega/2} e^{\omega_2\tau}; \quad (3.38)$$

$$c = \tilde{C}_0 e^{\lambda\omega/2} e^{\omega_3\tau}. \quad (3.39)$$

As constantes  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  estão associadas à taxa inicial de expansão nas três direções espaciais. Substituindo estas soluções em (3.27), obtemos:

$$\frac{1}{2}\lambda w' = \frac{1}{2}\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) w^2 + \lambda w \omega_1 + \Omega_0, \quad (3.40)$$

onde  $\Omega_0 = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3$ . No nosso tratamento desejamos que o termo cinético do

dilaton seja positivo de modo que restringimos os valores de  $\lambda$  a:

$$\lambda = -2\alpha^2 < 0. \quad (3.41)$$

Então a equação diferencial (3.40) fica:

$$\alpha^2 w' = \left( rw + \frac{s}{r} \right)^2 - \Omega_0 - \left( \frac{s}{r} \right)^2, \quad (3.42)$$

onde  $r^2 = \alpha^2 (1 + \alpha^2)$  e  $s = \alpha^2 \omega_1$ .

Para integrarmos a equação, introduzimos uma nova variável:

$$v = rw + \frac{s}{r}. \quad (3.43)$$

Substituindo em (3.42), temos:

$$\frac{\alpha^2}{r} v' - v^2 \pm \beta^2 = 0, \quad (3.44)$$

sendo  $\beta^2 = \Omega_0 + \left( \frac{s}{r} \right)^2$ . Para resolvermos a equação diferencial, devemos considerar três

casos:

- (I)  $+\beta^2$ , se  $\Omega_0 + \left( \frac{s}{r} \right)^2 > 0$  e  $v^2 > \beta^2$
- (II)  $+\beta^2$ , se  $\Omega_0 + \left( \frac{s}{r} \right)^2 > 0$  e  $v^2 < \beta^2$ .
- (III)  $-\beta^2$ , se  $\Omega_0 + \left( \frac{s}{r} \right)^2 < 0$

No caso (I), a solução é

$$v = -\beta \operatorname{cotgh} \left( \frac{\beta r \tau}{\alpha^2} \right), \quad (3.45)$$

o que implica:

$$r\omega' + \frac{s}{r} = -\beta \operatorname{cotgh} \left( \frac{\beta r \tau}{\alpha^2} \right). \quad (3.46)$$

Integrando esta última equação, temos:

$$\omega = -\frac{s\tau}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r^2} \ln \left[ \operatorname{senh} \left( \frac{\beta r}{\alpha^2} \tau \right) \right] + \omega_0. \quad (3.47)$$

Com este resultado, os três fatores de escala tornam-se:

$$a = A_0 e^{-(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \operatorname{senh} \left( \frac{\beta r}{\alpha^2} \tau \right) \right]^{-\alpha^4/r^2} e^{\omega_1 \tau}; \quad (3.48)$$

$$b = B_0 e^{(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \operatorname{senh} \left( \frac{\beta r}{\alpha^2} \tau \right) \right]^{\alpha^4/r^2} e^{\omega_2 \tau}; \quad (3.49)$$

$$c = C_0 e^{(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \operatorname{senh} \left( \frac{\beta r}{\alpha^2} \tau \right) \right]^{\alpha^4/r^2} e^{\omega_3 \tau}, \quad (3.50)$$

onde  $A_0 = \tilde{A}_0 e^{-\lambda\omega_0/2}$ ,  $B_0 = \tilde{B}_0 e^{-\lambda\omega_0/2}$ ,  $C_0 = \tilde{C}_0 e^{-\lambda\omega_0/2}$ . Esta solução é singular para  $\tau \rightarrow 0$ . Neste ponto a densidade de energia dos campos escalar e magnético diverge e o volume espacial vai a zero. No limite  $\tau \rightarrow \infty$ , a densidade de energia dos campos vai a zero e o volume do universo vai ao infinito.

No caso (II) temos a seguinte solução para  $v$ :

$$v = -\beta \operatorname{tgh} \left( \frac{r\beta}{\alpha^2} \tau \right). \quad (3.51)$$

Neste caso,  $\omega$  torna-se:

$$\omega = \omega_0 - \frac{s}{r^2}\tau - \frac{\alpha^2}{r^2} \ln \left[ \cosh \left( \frac{r\beta}{\alpha^2} \tau \right) \right]. \quad (3.52)$$

Os três fatores de escala são:

$$a = A_0 e^{-(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \cosh \left( \frac{r\beta}{\alpha^2} \tau \right) \right]^{-\alpha^4/r^2} e^{\omega_1\tau}; \quad (3.53)$$

$$b = B_0 e^{(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \cosh \left( \frac{r\beta}{\alpha^2} \tau \right) \right]^{+\alpha^4/r^2} e^{\omega_2\tau}; \quad (3.54)$$

$$c = C_0 e^{(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \cosh \left( \frac{r\beta}{\alpha^2} \tau \right) \right]^{+\alpha^4/r^2} e^{\omega_3\tau}. \quad (3.55)$$

Neste caso o comportamento da solução depende da quantidade  $I$ , construída na forma

$$I = \frac{s\alpha^2}{r^2} + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \frac{\alpha^2}{r}\beta. \quad (3.56)$$

Se  $I$  é positivo, a solução começa numa singularidade em  $\tau \rightarrow -\infty$  e termina como uma solução anisotrópica com volume infinito e densidade de energia nula em  $\tau \rightarrow \infty$ . Se  $I$  é negativo então o comportamento é o oposto: o universo começa com uma solução anisotrópica com volume infinito e termina numa singularidade.

No caso (III), a solução para  $v$  é:

$$v = \beta \operatorname{tg} \left( \frac{r\beta}{\alpha^2} \tau \right). \quad (3.57)$$

Integrando, obtemos:

$$\omega = \omega_0 - \frac{s}{r^2}\tau + \ln \left[ \cos \left( \frac{r\beta}{\alpha^2}\tau \right) \right]^{-\alpha^2/r^2}. \quad (3.58)$$

As soluções para os três fatores de escala são:

$$a = A_0 e^{-(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \cos \left( \frac{r\beta}{\alpha^2}\tau \right) \right]^{-\alpha^4/r^2} e^{\omega_1\tau}; \quad (3.59)$$

$$b = B_0 e^{(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \cos \left( \frac{r\beta}{\alpha^2}\tau \right) \right]^{\alpha^4/r^2} e^{\omega_2\tau}; \quad (3.60)$$

$$c = C_0 e^{(s\alpha^2/r^2)\tau} \left[ \cos \left( \frac{r\beta}{\alpha^2}\tau \right) \right]^{\alpha^4/r^2} e^{\omega_3\tau}. \quad (3.61)$$

Observa-se duas singularidades em  $\tau = \pm \frac{\pi\alpha^2}{2r\beta}$ . Nas singularidades o fator escalar associado com o eixo  $x$  torna-se infinito e os outros dois tornam-se nulos (singularidades tipo charuto).

# Conclusão

A gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável é uma teoria escalar-tensorial onde temos o espaço-tempo representado pela Geometria de Weil Integrável (*WIST*). Esta geometria é mais geral que a geometria de Riemann da Teoria Geral da Relatividade, geometrizando o campo escalar a ela associado, embora mantendo a idéia básica de representar a interação gravitacional mediante uma descrição geométrica do espaço-tempo.

Ao contrário do resultado obtido em [26], onde é adotada a geometria de Riemann, conseguimos integrar o sistema dinâmico obtido no capítulo 3, onde fazemos uma descrição da interação gravitação-eletromagnetismo e obtivemos a solução geral do sistema que apresenta três classes de soluções [29]. A integração só é possível pela geometria adotada ser *WIST*.

As perspectivas para esta área específica da Física Teórica, a Cosmologia e a Gravitação, são promissoras, em particular para aqueles que se interessam pelos problemas concernentes à teoria de gravitação na teoria de *WIST*.

# Apêndices

# Apêndice A

## Cálculo de algumas quantidades geométricas

A classificação de Bianchi-I tem um elemento de linha da forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 , \quad (\text{A.1})$$

isto é, temos uma geometria que é solução das equações de Einstein sem termo cosmológico. Tal geometria tem uma hipersuperfície 3-dimensional com uma seção  $t =$  constante, sendo  $t$  o tempo cosmológico [30].

O tensor métrico que se obtém a partir da métrica A.1 é uma matriz diag-

onal, já que a mesma não apresenta termos cruzados:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2(t) \end{pmatrix} . \quad (\text{A.2})$$

A matriz inversa é facilmente obtida:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-2}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^{-2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-2}(t) \end{pmatrix} . \quad (\text{A.3})$$

O produto das duas matrizes fornece a matriz identidade:

$$(g^{\mu\nu})(g_{\mu\nu}) = \mathbf{1} . \quad (\text{A.4})$$

A matriz  $g$  tem determinante

$$\Delta(g_{\mu\nu}) = g = -(a(t)b(t)c(t))^2 . \quad (\text{A.5})$$

A partir do tensor métrico pode-se calcular as conexões afim através da fórmula usual [31, 32]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\epsilon} (g_{\epsilon\beta,\gamma} + g_{\epsilon\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\epsilon}) , \quad (\text{A.6})$$

cujas únicas componetes não nulas são:

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{a}}{a} ; \quad (\text{A.7a})$$

$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{b}}{b} ; \quad (\text{A.7b})$$

$$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{c}}{c} ; \quad (\text{A.7c})$$

$$\Gamma^0_{11} = a\dot{a} ; \quad (\text{A.7d})$$

$$\Gamma^0_{22} = b\dot{b} ; \quad (\text{A.7e})$$

$$\Gamma^0_{33} = c\dot{c} . \quad (\text{A.7f})$$

O tensor de Riemann é calculado com o auxílio da expressão (A.6):

$$R^\alpha_{\mu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\rho\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta} \Gamma^\beta_{\sigma\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \Gamma^\beta_{\rho\mu} . \quad (\text{A.8})$$

As únicas componentes não nulas são:

$$R^0_{101} = -a\ddot{a} ; \quad (\text{A.9a})$$

$$R^0_{202} = -b\ddot{b} ; \quad (\text{A.9b})$$

$$R^0_{303} = -c\ddot{c} ; \quad (\text{A.9c})$$

$$R^1_{212} = -\frac{\dot{a}}{a} b\dot{b} ; \quad (\text{A.9d})$$

$$R^1_{313} = -\frac{\dot{a}}{a} c\dot{c} ; \quad (\text{A.9e})$$

$$R^2_{323} = -\frac{\dot{b}}{b} c\dot{c} . \quad (\text{A.9f})$$

Estendemos o nosso cálculo para o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\alpha} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\alpha} \text{ ou } R^{\mu}_{\alpha} = g^{\mu\xi} R_{\xi\alpha} , \quad (\text{A.10})$$

cujas únicas componentes não nulas são:

$$R^0_0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} ; \quad (\text{A.11a})$$

$$R^1_1 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) ; \quad (\text{A.11b})$$

$$R^2_2 = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right) ; \quad (\text{A.11c})$$

$$R^3_3 = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) . \quad (\text{A.11d})$$

O escalar de curvatura é dado por

$$R = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha} = 2 \left[ \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) + \left( \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} \right) \right] . \quad (\text{A.12})$$

Aqui fazemos uma análise assintótica:

O escalar  $R$ , construído com as componentes da métrica que aparecem nos três casos relacionados no capítulo 3 (expressões (3.48), (3.49), (3.50), (3.53), (3.54), (3.55), (3.59), (3.60) e (3.61)), apresenta o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} R = 0 . \quad (\text{A.13})$$

Quando o tempo coordenado  $\tau$  tende a valores iniciais, o escalar  $R$  diverge, resultado

válido para os três casos. A mesma análise foi feita para a expansão

$$\theta = V^{\mu}_{\mu} = \frac{(\sqrt{-g})^{\cdot}}{\sqrt{-g}} = \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \quad (\text{A.14})$$

e para a deformação

$$\sigma^1_1 = \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{3}\theta ; \quad (\text{A.15a})$$

$$\sigma^2_2 = \frac{\dot{b}}{b} - \frac{1}{3}\theta ; \quad (\text{A.15b})$$

$$\sigma^3_3 = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{1}{3}\theta , \quad (\text{A.15c})$$

obtendo-se os mesmos resultados assintóticos para  $R$ , assim como o comportamento destas grandezas para  $\tau = 0$ .

# Referências

- [1] L.A.R. Oliveira, *Acoplamento não mínimo com a gravitação e espaços de Weyl integráveis*, Tese de doutorado – CBPF (1988).
- [2] M.P. do Carmo, , – IMPA (1979).
- [3] M. Spivak, *Comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish (1975).
- [4] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1973).
- [5] J.L. Synge, A. Schild, *Tensor calculus*, Dover Publ. (1978).
- [6] B.F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press (1994).
- [7] D. Hilbert, *Die grundlagen der Physik (Zweite Meitteilung)*, Konigl. Gelell. d. Wiss, Göttingen, Nachr., Math. Phys. KL., (1915) 395.
- [8] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to general relativity*, McGraw-Hill Books (1975).
- [9] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman(1973).
- [10] L. Landau, E. Lifchitz, *Teoria do campo*, Ed. Hemus (s.d.)

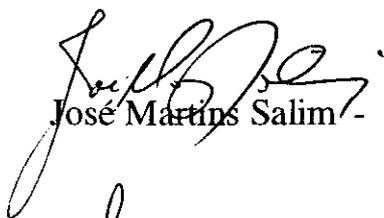
- [11] S.L. Sautú, *Teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável*, Tese de doutorado – CBPF (1997).
- [12] F.C. Maximo, *Soluções cosmológicas anisotrópicas em WIST*, Tese de mestrado – PUC-RIO (1998).
- [13] C. Brans, R.H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124** (1961) 925.
- [14] R.H. Brandenberger, *Formation of structure in the universe*, Proc. of VIII Brazilian school of cosmology and gravitation II, Editor M. Novello (1996).
- [15] S.L. Sautú, op. cit. (Ver Ref. 45 e 48).
- [16] S.L. Sautú, op. cit. (Ver Ref. 45 e 48).
- [17] J. Ehlers, F. Pirani, A. Schild, *General relativity*, Essays in honour of J.L. Synge, Clarendon Press (1972) 63.
- [18] V. Perlick, *Observed fields in Weylian spacetimes models*, Class. Quantum Grav. **8** (1991) 1369.
- [19] V. Perlick, *Characterization of standard clocks by means of light rays and freely falling particles*, Gen. Rel. Grav. **19** No. 11 (1987) 1059.
- [20] F. Hoyle, G. Burbidge, J.V. Narlikar, *The basic theory underlying quasi-steady-state cosmology*, Proc. R. Soc. Lond. A **448** (1995) 191.
- [21] M. Novello, L.A.R. Oliveira, J.M. Salim, E. Elbaz, *Geometrized instantons and the creation of the universe*, Int. J. of Mod. Phys. **D1**, No. 3,4 (1993) 641.

- [22] B. Gradwohl, G. Kälbermann, *Dilaton stars*, Nucl. Phys **B 324** (1989) 215.
- [23] F. Dowker, J.P. Gauntlett, D.A. Kastor, J. Traschen, *Pair creation of dilaton black holes*, Phys. Rev. **D 49**, No.6 (1994) 2909.
- [24] D. Garfinkle, G.T. Horowitz e A. Strominger, *Charged black holes in string theory*, Phys. Rev. **D 43**, No. 10 (1991) 3140.
- [25] K.C. Jacobs, *Cosmologies of Bianchi-I with a uniform magnetic field*, The Astrophysical Journal **155** (1969) 379.
- [26] V.G. Le Blanc, *Asymptotic states of magnetic Bianchi-I cosmologies*, Calss. Quantum Grav. **14** (1997) 2281.
- [27] C.B. Collins, *Qualitative magnetic cosmology*, Commun. Math. Phys. **27** (1988) 37.
- [28] R.C. Bassanezzi, W.C. Ferreira Jr., *Equações diferenciais com aplicações*, Ed. Harbra (1988).
- [29] J.M. Salim, S.L. Sautú, R.M. Martins, *Dilaton electromagnetic Bianchi-I cosmologies*, Class. Quantum Grav. **15** (1998) 1521.
- [30] M.C. Motta da Silva, *Teoria de perturbações em universos anisotrópicos: modelo de Kasner*, Tese de Doutorado – CBPF (1998).
- [31] J.L. Martin, *General relativity*, Prentice Hall (1993).
- [32] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, Jonh Wiley & sons (1972).

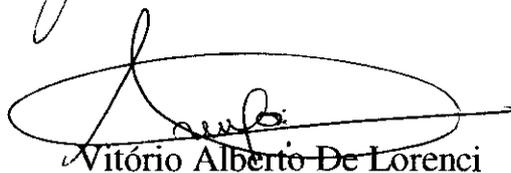
**“DINÂMICA DO CAMPO MAGNÉTICO EM WIST,  
EM UMA MÉTRICA TIPO BIANCHI-I”**

***Ricardo Mattos Martins***

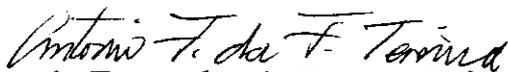
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



José Martins Salim - Presidente



Vitório Alberto De Lorenci



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Nelson Pinto Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 26 de junho de 2000