

Vitor Luiz Bastos de Jesus

Movimento de Cargas em Campos  
Oscilantes: Separação Isotópica e  
Confinamento Magnético Ressonantes

Tese de Doutorado

**Orientador: Prof. Dr. Alberto Passos Guimarães**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Ivan dos Santos Oliveira**

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

**Rio de Janeiro, fevereiro de 2000**

*À minha mãe,  
Vitória Bastos de Jesus,  
e aos meus avós,  
José de França Bastos<sup>†</sup>  
e Cinira Teixeira Bastos<sup>†</sup>.*

# Agradecimentos

Aos meus orientadores, Alberto Passos Guimarães e Ivan dos Santos Oliveira por tudo, tudo mesmo! Não tenho palavras (e nunca fui bom nisso!) para expressar o meu agradecimento. Valeu Ivan, por ter apostado no meu taco (no bom sentido!) e deixar-me participar dessa aventura que é a RCE (Ressonância de Corrente Elétrica).

Ao Prof. Eduardo Chaves Montenegro pela oportunidade e credibilidade, abrindo as portas do laboratório Van de Graaff (PUC-Rio) para uma “aventura” na física experimental. Ao amigo Marcelo Sant’Anna (grande Marcelo!) pela paciência em me esclarecer os segredos do laboratório Van de Graaff. Aos amigos e companheiros de labuta, Wilson e Toni (Antônio Carlos). Aos Drs. Nelson Velho, Geraldo Sigaud e Fernando Lázaro.

Aos técnicos do laboratório Van de Graaff: Seu Nélio, Luiz Alberto, Marcos, Lagartauro (Nilton), Sérgio e Nestor pela competência e dedicação. À valiosa colaboração da oficina mecânica: Srs. Carlos Augusto e Edson. Sem eles a tese seria teórica! À Tânia e ao grande Jorge.

Um “Valeu” especial aos Profs. Tião (Sebastião Dias) e Helayel pelas leituras e sugestões. Ao Prof. Argos.

Aos meus amigos de Laboratório: Christiana V. B. Tribuzy, Francisco F. Ponce (em memória), Robertinho Moita, Ali Kamel, Salvador Belmonte (Renato Russo não morreu!), Wanderley e Welber. Ao auxílio do pessoal da oficina mecânica do CBPF: Seu Valmir, George, Antônio Botafoguense e Marquinhos. Ao pessoal do CAT, à competência do engenheiro Alexandre Mello nos projetos e sugestões indispensáveis para um bom trabalho experimental, e ainda ao seu discípulo Alexandre Rosa. Ao Prof. João Carlos pela fundamental ajuda na confecção de uma das partes mais importantes que compõem a linha do acelerador, o tubo de vidro metalizado! Ao Marcelo Portes e Aline. As dicas de LATEX gentilmente cedidas pelas meninas Valéria e Socorro, ao pronto atendimento das secretárias Míriam e Vanda, ao Almério, ao pessoal da Biblioteca, ao Vicente (vidreiro), à dupla dinâmica Henrique e Ivanildo, a professora Maria pelas valiosas aulas de inglês e a tantos outros funcionários deste centro de pesquisas que me auxiliaram nesse trabalho.

Agradecimentos especiais aos mestres do CBPF que ajudaram na minha formação profissional.

À Adriana, que depois dessa já tem um pé na física experimental.

Aos amigos: Cabeça (Isaías), Armando Takeuchi, Já Morreu! (Luiz Sampaio), Gegê

(Geraldo), Márcia, Flavinho Gracinha, quero dizer, Garcia, Mário? Que Mário?, à dupla Mineiro (Winder) e Leonardo, Gasparzinho (Daniel Sasaki), Ângelo, Felipe, Hélio, Cristine, Alf (Carlos Eduardo), Alexandre, Elcio, Joana, Liana, Bart (Alan), Álvaro, Ana, Lídia, Danays, Jacobson, Marcos Flores, Prof. Jorge Ribeiro e Joaquim (em memória). Ao Manoel's bar: Ronaldo, Tião, Ismael, Dadá, Já Morreu II (André) e Rodrigão.

Meus agradecimentos à minha mãe que, durante todos esses anos, me aturou, colaborou e incentivou muito para que este trabalho se realizasse.

Tudo bem caro leitor, já está de saco cheio de ler esta parte da tese mas, acredito que teria de escrever muito mais do que algumas páginas para agradecer a todos que colaboraram para a elaboração deste trabalho.

Finalizando, quero agradecer ao apoio financeiro do CNPq, sem o qual esse trabalho não teria nem começado.

## Resumo

Investigamos o movimento de uma partícula carregada em campos magnético e elétrico oscilantes. A introdução de um *sistema girante de coordenadas* simplifica muito as equações clássicas de movimento e permite uma analogia formal com o problema de três osciladores acoplados com “amortecimento anisotrópico”. As soluções são calculadas analiticamente. Mostramos, que na condição ressonante, isto é, quando a frequência do campo girante ( $\omega$ ) se iguala à frequência de ciclotron da partícula ( $\omega_c$ ), esta é *confinada* em uma região do espaço de volume dado aproximadamente por  $\sqrt{3}(4v_0/3\omega_1)^3$ , onde  $v_0$  é o módulo da velocidade inicial da partícula e  $\omega_1 = qB_1/m$  é a frequência da partícula em torno de  $B_1$ , a magnitude do campo girante. Neste caso a órbita da partícula torna-se uma curva *fechada* no sistema girante de coordenadas, ou uma superfície fechada no sistema de coordenadas do laboratório. Fora da ressonância, a partícula não é confinada. Simulamos o movimento de partículas com razão carga-massa diferindo em torno de 1%, e mostramos que elas podem ser ressonantemente separadas. Soluções gerais são calculadas numericamente para frequências arbitrárias. Os resultados sugerem um método ressonante para confinamento de partículas carregadas e separação isotópica. O uso de um sistema girante de coordenadas também permite analisar o problema em termos da Mecânica Quântica, assim como obter a derivação analítica da função de onda no laboratório. Com o objetivo de verificarmos algumas destas previsões teóricas realizamos, em colaboração com o grupo do acelerador Van de Graaff (PUC-Rio), um experimento “piloto” com o intuito de observarmos a trajetória inicial da partícula no campo ressonante. Para isto utilizamos íons de  $\text{He}^+$  com energia de 6,5 keV. O feixe de íons  $\text{He}^+$  é produzido em uma fonte tipo “Penning”. Os módulos dos campos magnéticos usados no experimento são 10,4 mT para  $B_0$  ( $\omega_c = 80\pi$  kHz) e  $\approx 0,093$  mT para  $B_1$ . Estes campos são produzidos por um solenóide ( $B_0$ ) e dois pares de bobinas retangulares em uma configuração tipo Helmholtz ( $B_1$ ) colocadas em torno de um tubo de vidro, revestido internamente por duas camadas de filmes finos de aço e de cobre. A região sobre a qual o campo ressonante é aplicado tem 20 cm de comprimento. Um potencial de retardo de 4,0 kV é aplicado de modo que o tempo de voo de uma partícula nesta região é de aproximadamente 0,58  $\mu\text{s}$ . A detecção é feita 1,90 m a frente, em uma tela fosforescente de um tubo de osciloscópio adaptado ao final da linha do acelerador. Resultados preliminares indicam que o feixe é desviado ressonantemente em aproximadamente 20%.

# Abstract

We investigate the motion of a charged particle in oscillating magnetic and electric fields. The introduction of a rotating coordinate system greatly simplifies the classical equations of motion and allows a formal analogy to the problem of three coupled oscillators with “anisotropic damping” terms. The solutions are calculated analytically. We show that, when the resonance condition is achieved, that is, the frequency of the rotating field ( $\omega$ ) equals the cyclotron frequency of the particle ( $\omega_c$ ), the particle is *confined* to a region of space of volume given approximately by  $\sqrt{3}(4v_o/3\omega_1)^3$ , where  $v_o$  is the modulus of the initial velocity of the particle and  $\omega_1 = qB_1/m$  is the frequency of the particle about  $B_1$ , the magnitude of the oscillating field. The orbit of the particle is shown to be a *closed* curve in the rotating coordinate system, or a closed surface in the laboratory system. Off resonance, the particle drifts away. We simulate the motion of particles with charge-to-mass ratios differing by about 1%, and show that they can be resonantly separated. We performed numerical calculations for arbitrary fields frequencies. The results suggest a resonant method for charged particle confinement and isotope separation. The use of a rotating coordinate system also allows us to analyze the problem quantum-mechanically, as well as, to obtain the analytical derivation of the laboratory wavefunction. With the purpose of verifying some of these theoretical predictions, we performed, in collaboration with the group of the Van de Graaff accelerator (PUC-Rio), an experiment designed to observe the initial particle trajectory in the resonant field. For that purpose we utilized  $\text{He}^+$  ions with energy of 6.5 keV. The  $\text{He}^+$  ion beam is produced in a Penning Ion Gauge (PIG) source. The magnitudes of the magnetic fields used in the experiment are 10.4 mT for  $|\mathbf{B}_0|$  ( $\omega_c = 80\pi$  kHz) and  $\approx 0.093$  mT for  $|\mathbf{B}_1|$ . These fields are produced by a solenoid ( $B_0$ ) and two pairs of rectangular coils in a Helmholtz-like configuration ( $B_1$ ) around a glass tube, internally coated with two layers of steel and copper thin films. The resonant field region is 20 cm long and, due to a retarding potential of 4.0 kV, it is traversed by the particles in about  $0.58 \mu\text{s}$ . The detection is made 1.90 m away, in a phosphorescent screen of an oscilloscope tube adapted to the end of the accelerator line. Preliminary results indicate a resonant deviation of the beam of approximately 20%.

# Índice

Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	vi
Abstract . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Organização da Tese . . . . .	3
<b>2 Resultados Teóricos I: Tratamento Clássico</b>	<b>5</b>
2.1 Transformações para Sistemas Girantes de Coordenadas: Uma Breve Discussão . . . . .	5
2.1.1 Transformação do Vetor Velocidade . . . . .	6
2.1.2 Comentários . . . . .	8
2.2 Movimento de Partículas Carregadas em Campos Magnéticos Oscilantes: Tratamento Clássico . . . . .	9
2.2.1 Mudança para o Sistema Girante de Coordenadas . . . . .	10
2.2.2 Autovalores e Autovetores: Modos Normais de Oscilação . . . . .	13
2.2.3 Soluções Numéricas . . . . .	30
2.2.4 Movimento na Ausência de Campo Elétrico . . . . .	34
2.2.5 Campo Pulsado . . . . .	37
2.2.6 Comentários . . . . .	38
<b>3 Resultados Teóricos II: Tratamento Quântico</b>	<b>41</b>
3.1 Movimento de Partículas Carregadas em Campos Magnéticos Oscilantes: Tratamento Quântico . . . . .	41
3.1.1 Transformação do Hamiltoniano . . . . .	41
3.1.2 Equações de Movimento na Ressonância . . . . .	45
3.1.3 Rotação Unitária Aplicada ao Hamiltoniano Efetivo . . . . .	49

3.1.4	Comentários . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Ensaio Experimental</b>	<b>53</b>
4.1	Objetivo do Experimento . . . . .	53
4.2	O Acelerador de Íons . . . . .	57
4.3	Montagem da Linha do Acelerador . . . . .	59
4.3.1	Colimadores . . . . .	62
4.3.2	O Tubo de Vidro Metalizado . . . . .	62
4.3.3	Construção e Calibração das Bobinas Geradoras dos Campos Magnéticos $B_0$ e $B_1$ . . . . .	65
4.3.4	Sistema de Detecção e Observação dos Íons . . . . .	73
4.4	Resultados Obtidos . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>82</b>
5.1	Resumo do Trabalho . . . . .	82
5.2	Discussão dos Resultados Experimentais . . . . .	83
5.3	Aprimoramento do Experimento . . . . .	83
5.3.1	Redimensionamento do Experimento . . . . .	84
5.3.2	Implementação da Detecção via Placa de Microcanais . . . . .	84
5.3.3	Separação Ressonante de Isótopos de um Feixe . . . . .	84
5.3.4	Confinamento Ressonante . . . . .	84
5.4	Algumas Possíveis Extensões . . . . .	85
<b>A</b>	<b>O Sistema Girante de Coordenadas</b>	<b>86</b>
<b>B</b>	<b>As Raízes da Equação Secular de Sexta Ordem</b>	<b>88</b>
B.1	Análise das Raízes . . . . .	89
B.2	Análise Gráfica . . . . .	92
<b>C</b>	<b>Movimento Vinculado de uma Partícula Carregada sob a Ação de um Campo Magnético</b>	<b>96</b>
C.1	Introdução . . . . .	96
C.2	Equações de Movimento . . . . .	97
C.3	Momento Angular . . . . .	100
C.4	Conclusões . . . . .	104



<b>D Operadores Exponenciais em Mecânica Quântica</b>	<b>106</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>113</b>

# Lista de Figuras

- 2.1 Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância ( $\omega = \omega_c$ ), submetido aos campos estático de módulo  $B_0 = 1$  T e oscilante de amplitude  $B_1 = 0,01$  T, representada no sistema girante de coordenadas. A velocidade inicial é  $v_0 = 10^4$  m/s ao longo do eixo  $z$ , e a frequência de ciclotron é  $\omega_c = -1,231$  MHz. Note a baixa amplitude do modo vibracional de alta frequência superposto sobre a trajetória. . . . . 20
- 2.2 Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância, representada no sistema de coordenadas do laboratório no início de seu movimento ( $\Delta t = 150 \mu\text{s}$ ); a figura também mostra as projeções da trajetória sobre os planos cartesianos. Os parâmetros são os mesmos utilizados na figura 2.1. As setas indicam a direção do movimento. . . . . 22
- 2.3 Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância, representada no sistema de coordenadas do laboratório um pouco antes de completar um ciclo ( $\Delta t = 560 \mu\text{s}$ ). . . . . 23
- 2.4 Trajetória de uma partícula não-ressonante com razão carga-massa diferindo aproximadamente 1% do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  dado como exemplo na figura 2.1. Note o intervalo de tempo, aproximadamente  $1/3$  do ciclo do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$ , e a escala do eixo  $z$ . . . . . 24
- 2.5 Trajetórias de isótopos triplamente ionizados do urânio em campos oscilantes “sintonizados” na frequência de ressonância do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  ( $\omega = -1,231$  MHz) representadas no sistema girante de coordenadas. O campo estático está ao longo do eixo  $+z$ , e o campo magnético oscilante preenche todo o espaço na direção paralela ao eixo  $x$ . A velocidade inicial das partículas é  $v_0 = 10^4$  m/s, ao longo da direção do campo estático. A órbita da partícula ressonante é uma curva fechada, enquanto que aquelas não ressonantes correspondem a curvas abertas, com as partículas se afastando rapidamente. As trajetórias no sistema de coordenadas do laboratório são obtidas girando a figura em torno do eixo  $z$ . Estas curvas foram produzidas para diferentes intervalos de tempo a fim de mostrá-las todas visíveis na mesma escala. . . . . 25

2.6	Trajectoria do íon $^{235}\text{U}^{3+}$ na condição ressonante, ou seja, $\omega = \omega_c$ , representada no sistema girante de coordenadas, incidindo com velocidade de $10^4$ m/s na direção $z$ . A relação entre os módulos dos campos magnéticos aplicados fornece $\omega_1 = 0,01\omega_c$ indicando a condição $\omega_1 \ll \omega_c$ . . . . .	30
2.7	Trajectoria do íon $^{235}\text{U}^{3+}$ na condição ressonante, ou seja, $\omega = \omega_c$ , representada no sistema girante de coordenadas, incidindo com velocidade de $10^4$ m/s na direção $z$ . A relação entre os módulos dos campos magnéticos aplicados fornece $\omega_1 = 0,9\omega_c$ , indicando a condição $\omega_1 \approx \omega_c$ . . . . .	31
2.8	Trajectoria do íon $^{235}\text{U}^{3+}$ na condição ressonante, cuja incidência corresponde a um desvio de 5 graus em relação ao eixo $z$ , sendo a componente $z$ igual a 9962 m/s e a componente perpendicular igual a 871 m/s (na direção $x$ ) resultando em um módulo de $10^4$ m/s. . . . .	32
2.9	Trajectoria do íon $^{235}\text{U}^{3+}$ na condição ressonante, cuja incidência corresponde a um desvio de 5 graus em relação ao eixo $z$ , sendo a componente $z$ igual a 9962 m/s e a componente perpendicular igual a 871 m/s (na direção $y$ ) resultando em um módulo de $10^4$ m/s. . . . .	33
2.10	Trajectoria do íon $^{235}\text{U}^{3+}$ , no sistema de coordenadas do laboratório, submetido a campos estático e oscilante de módulos $B_0 = 1$ T e $B_1 = 0,01$ T, respectivamente. Neste caso o campo elétrico proveniente da oscilação do campo magnético não é considerado. As condições iniciais são $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , com velocidade inicial $v_0 = 10^4$ m/s na direção $z$ . . . . .	35
4.1	Trajectoria do íon na linha do acelerador. São mostrados a entrada de gás, a fonte de íons, o fitro de Wien, as etapas de colimação, o tubo de vidro metalizado, as bobinas geradoras dos campos magnéticos, o copo de Faraday e a tela de detecção fosforescente. . . . .	55
4.2	Esquema simplificado mostrando o desvio do feixe provocado pela interação com os campos magnéticos e a fase final em movimento retilíneo uniforme. A visualização na tela fosforescente no final da linha do acelerador deve ser um círculo de raio $r_0$ . . . . .	57

- 4.3 Visão frontal do acelerador de íons no início da montagem experimental. No início da linha há a entrada do gás que está acoplada à fonte de íons tipo *Penning* conhecida como *Penning Ion Gauge* - PIG, cujo potencial varia de 0 a 10,0 kV ( $\pm 0,2$  kV). Logo após há um eletromagneto que focaliza o plasma ionizado, cuja amplitude da corrente alternada pode variar de 0 a 1,00 A ( $\pm 0,02$  A). Toda esta parte está no mesmo potencial positivo previamente escolhido para a extração do feixe, podendo variar de 6,0 a 30,0 kV ( $\pm 0,1$  kV). A seguir, localiza-se o filtro de Wien, que seleciona o feixe de trabalho. Na parte final do acelerador existe uma espécie de colimador retangular de dimensões 14,6 mm  $\times$  30,0 mm, cujos detalhes são mostrados na figura 4.4. . . . . . 58
- 4.4 (a) Placa metálica retangular cujas dimensões são 14,6 mm  $\times$  30,0 mm. Sua função é limitar a área do feixe gerado na fonte de íons. (b) Detalhe mostrando como a placa metálica se acomoda no interior da linha do acelerador. . . . . . 59
- 4.5 (a) Mini-garrafa contendo gás seguida de uma válvula simples e uma válvula tipo “agulha”; (b) fonte de alta voltagem *Spellman* responsável pela tensão de ionização do gás, (c) fonte geradora da corrente alternada fornecida ao eletromagneto focalizador do plasma ionizado; (d) gerador da tensão de extração do feixe. Os equipamentos indicados nos itens (a), (b) e (c) estão no mesmo potencial do escolhido para a extração do feixe. . 60
- 4.6 Vista da fonte de íons (tipo *Penning*) do acelerador: (a) entrada de gás, (b) alimentação do potencial de ionização, (c) alimentação da corrente alternada do eletromagneto focalizador, (d) potencial de extração do feixe de íons, (e) entrada para o potencial nas placas paralelas do filtro de Wien. Ao lado temos o corte transversal mostrando detalhes da fonte de íons. . . . . . 61
- 4.7 Detalhe do acoplamento do tubo de vidro na linha do acelerador: (a) tubo de vidro metalizado internamente, (b) contato elétrico externo do filme metálico, (c) peças de alumínio que acoplam o vidro à linha do acelerador, (d) “o-rings”, (e) anéis isolantes de *plexiglas*, (f) tirantes de latão, (g) conjunto composto pelo *bellows* e pela mola. . . . . 63
- 4.8 Desenho da peça de alumínio utilizada no acoplamento do vidro metalizado com a linha do acelerador. . . . . . 64
- 4.9 Bobina geradora do campo magnético estático ( $B_0$ ) após receber uma camada de folha de alumínio. Sua função é proteger o fio esmaltado da bobina de possíveis arranhões quando receber uma camada de tubo de cobre maleável utilizado na refrigeração. Os orifícios têm como função permitir a troca de calor entre a bobina e o tubo de refrigeração. 66

4.10	Bobina geradora do campo $B_0$ após receber a camada de tubo de cobre maleável. O contato mecânico entre a bobina e o tubo de cobre foi otimizado com a ajuda de um torno mecânico, garantindo um bom contato térmico. . . . .	66
4.11	Gráfico mostrando a variação do campo estático ao longo do eixo da bobina tipo solenóide (eixo $z$ ). . . . .	67
4.12	Campo calculado sobre o eixo de um solenóide de $N$ espiras, comprimento $L$ e raio $a$ . $\alpha_1$ e $\alpha_2$ correspondem, respectivamente, aos ângulos formados pela união do ponto $z$ às bordas esquerda e direita da bobina. . . . .	68
4.13	Gráfico mostrando a relação linear entre o campo magnético $B_0$ no eixo da bobina a uma distância de 19 cm do centro ( $z = -6,5$ cm) e a corrente fornecida pelo gerador de potência. . . . .	69
4.14	Detalhe do acoplamento das bobinas geradoras dos campos oscilantes. Cada par produz um campo magnético oscilante, um perpendicular ao outro e defasados de 90 graus. Ao lado temos o circuito responsável pela amplificação da corrente que percorre cada par de bobinas. . . . .	70
4.15	Diagrama de blocos do circuito que alimenta as bobinas geradoras dos campos oscilantes. Ao lado mostramos a disposição dos pares em relação aos eixos coordenados (o feixe incide na direção $z$ ). . . . .	71
4.16	(a) Mostramos a disposição do par de bobinas retangulares em relação aos eixos coordenados. A direção $z$ corresponde a direção de incidência do feixe de íons; (b) gráfico $B_y$ versus $y$ em $x = z = 0$ cm; (c) gráfico $B_y$ versus $y$ em $x = 0$ cm e $z = 15$ cm, ou seja, na extremidade direita do par de bobinas; (d) gráfico $B_y$ versus $z$ em $x = 0$ cm e $y = 4,5$ cm. Observamos que o campo se mantém bem homogêneo ao longo da direção do feixe; (e) gráfico $B_y$ versus $x$ em $y = 4,5$ cm e $z = 0$ cm. Vemos que a componente $B_y$ tem variação de aproximadamente 5% quando comparada a uma variação espacial de 1,0 cm em torno do centro; (f) gráfico $B_z$ versus $z$ , em $y = 4,5$ cm e $x = 0$ cm. Observamos que a componente $B_z$ varia muito rapidamente nas bordas do par de bobinas retangulares. . . . .	72
4.17	Gráfico mostrando a relação linear entre o campo magnético $B_1$ no centro de um par de bobinas retangulares, separadas por uma distância de 8,0 cm, e a corrente que as percorre. . . . .	73

4.18	Gráfico da corrente do feixe $I$ medida pelo copo de Faraday em função do potencial aplicado nas placas que compõem o filtro de Wien, $U_{wien}$ , para um feixe de He obtido a partir de um potencial de extração de 9,0 kV. São observadas 3 gaussianas ajustáveis, das quais a primeira corresponde ao feixe de $Ar^+$ , a segunda ao feixe de $Ar^{++}$ e a terceira ( $U_3$ ) corresponde ao feixe de $He^+$ . . . . .	75
4.19	Aparato experimental na fase atual de montagem no laboratório Van de Graaff da PUC.	76
4.20	Fotografias do feixe $He^+$ para as seguintes situações: (a) feixe sem campos magnéticos aplicados; (b) feixe na presença do campo estático $B_0(I = 4,2 \text{ A}) = 10,4 \text{ mT}$ ; (c) feixe na presença do campo $B_0$ , o mesmo do item (b), e do campo girante $B_1$ de frequência $\omega = \omega_c = \gamma B_0 = 2\pi 40 \text{ kHz} = 251,327 \text{ kHz}$ e módulo $B_1(I = 108 \text{ mA}) = 0,093 \text{ mT}$ ; (d) feixe na presença do campo girante como dado no item anterior, porém com campo estático dado por $B'_0 = B_0/2 = 5,2 \text{ mT}$ , portanto fora da condição de ressonância $\omega = \omega'_c = \gamma B'_0$ . (e) feixe na presença do campo girante como dado no item (c), porém com campo estático dado por $B''_0 = 20,8 \text{ mT}$ , novamente fora da condição de ressonância $\omega = \omega''_c = \gamma B''_0$ . Observe que a frequência do campo girante equivale a metade da frequência de ciclotron neste caso, $\omega = \omega_c = \omega''_c/2$ . O menor retângulo tem dimensões $7,0 \text{ mm} \times 11,3 \text{ mm}$ e o fator de escala para as figuras vale 1,4. . . . .	78
4.21	Superfície de intensidade do feixe correspondente ao item (c) da figura 4.20. A linha preta representa a direção do corte transversal sobre o qual as curvas de intensidades são analisadas (veja figura 4.22). . . . .	79
4.22	Gráficos mostrando a variação da intensidade ao longo do diâmetro do feixe. Os gráficos correspondem, respectivamente, às fotos mostradas na figura 4.20. As linhas vermelhas horizontais indicam qual a região estimada para os valores dos raios médios do feixe sob diferentes condições. . . . .	80
4.23	Gráfico dos parâmetros mostrados na tabela 4.2 em função do campo estático. A parte em amarelo mostra os valores do diâmetro médio para os casos (a) e (b) mostrados na figura 4.20. . . . .	81
B.1	Representação gráfica da função $f(\lambda)$ para o caso em que $c > 0$ , o que implica em $\omega > \omega_c$ , quando a solução corresponde a duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real negativa. . . . .	93
B.2	Representação gráfica da função $f(\lambda)$ para o caso em que $c > 0$ , o que implica em $\omega > \omega_c$ , quando a solução corresponde a três raízes reais negativas. . . . .	94

B.3 Curvas da função  $f(\lambda_+)$  em função da frequência do campo magnético oscilante  $B_1, \omega$ , para os isótopos triplamente ionizados do urânio:  $^{233}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ . Estes isótopos estão submetidos aos campos  $B_1 = 0,01 \text{ T}$  e  $B_0 = 1 \text{ T}$ . . . . . 95

C.1 Trajetórias da partícula e do momento angular canônico para  $k = 0,01$ . As condições iniciais são:  $\theta(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . . . . . 101

C.2 Trajetórias da partícula e do momento angular canônico para  $k = 0,5$ . As condições iniciais são:  $\theta(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . . . . . 102

C.3 Trajetórias da partícula e do momento angular canônico para  $k = 1$ . As condições iniciais são:  $\theta(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . . . . . 103

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros associados ao íon $\text{He}^+$ . A unidade de massa atômica (u.m.a.) tem valor $1,6605402 \times 10^{-27}$ kg. . . . .	54
4.2	Diâmetros médios do feixe sob a ação dos campos magnético estático $B_0$ e girante $B_1$ , conforme descrição da figura 4.20. . . . .	77



# Capítulo 1

## Introdução

A dinâmica de partículas carregadas em campos elétricos e magnéticos tem sido investigada por um número muito grande de pesquisadores nos últimos cem anos. Este problema encontra aplicações em muitas áreas da ciência e da tecnologia. Estas incluem o desenvolvimento de aceleradores ciclotrônicos [1], lasers de elétrons livres [2], física de plasma [3] e também na descrição de alguns fenômenos atmosféricos [4, 5]. Em um artigo de revisão sobre movimentos de cargas em matéria condensada, Pan [6] comenta a existência de mais de 500 efeitos galvanométricos em sólidos. Um outro trabalho de revisão interessante sobre movimento de cargas em sólidos pode ser encontrado no livro de Abrikosov [7].

Apesar de um grande número de trabalhos publicados, a pesquisa nesta área ainda está muito ativa e continua a crescer [8, 9]. Um exemplo disto está em um recente trabalho onde se sugere que um novo fenômeno ressonante pode existir em um material condutor [10]. Este foi chamado *Ecos de Corrente*. Esta expressão foi primeiramente usada na referência [11], mas em uma situação diferente daquela descrita em [10]. Um simples tratamento quântico deste fenômeno será desenvolvido no Capítulo 3, e pode também ser encontrado nas referências [12, 13, 14].

O trabalho descrito na referência [10] tem por objetivo explorar a analogia entre dois antigos e aparentemente diferentes problemas em Física: o movimento de partículas carregadas em campos elétrico e magnético, e o movimento de dipolos paramagnéticos em campos magnéticos. Ambos os problemas têm sido exaustivamente explorados.

O primeiro problema está intimamente relacionado ao do transporte de portadores de carga e calor em metais. No início deste século P. Drude escreveu a equação de movimento

para um elétron em um sólido sujeito a uma força externa  $\mathbf{F}(t)$  [15, 16]

$$\frac{\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} + \mathbf{F}(t), \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  é o momento linear do elétron e  $\tau$  é o tempo de relaxação ou tempo médio entre duas colisões sucessivas com a rede. Esta equação descreve algumas das principais propriedades de transporte em metais [16].

O segundo problema foi considerado aproximadamente 50 anos depois por F. Bloch [17, 18], que escreveu a equação de movimento para um conjunto de momentos magnéticos em um campo magnético  $\mathbf{B}$ ; esta pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_o}{\tau} + \gamma_n (\mathbf{B} \times \mathbf{M}) = 0. \quad (1.2)$$

Nesta equação,  $\mathbf{M}$  é a magnetização, definida como o momento magnético total por unidade de volume,  $\gamma_n$  é a *razão giromagnética*, que para spins nucleares está em torno de algumas dezenas de MHz/T,  $\mathbf{M}_o = \chi \mathbf{B}$  ( $\chi$  é a susceptibilidade magnética) é a magnetização de equilíbrio e  $\tau$  é o tempo de relaxação. No caso geral existirão duas constantes de tempo, denominadas tempos de relaxação spin-spin e spin-rede, que descrevem a interação entre os spins e a interação entre o spin e a rede cristalina da matriz, respectivamente.

Em ambos os casos os tempos de relaxação que aparecem nas equações 1.1 e 1.2 são *parâmetros fenomenológicos* introduzidos para descrever as interações entre as partículas do sistema (elétrons ou momentos magnéticos) e suas vizinhanças (a *rede*).

A equação 1.2 é a base da técnica conhecida como Ressonância Magnética Nuclear (RMN), que tornou-se um dos principais métodos de investigação na Física do Estado Sólido.

A RMN é utilizada atualmente em muitas áreas da pesquisa básica em Química e Física e ainda em várias aplicações tecnológicas, como tomografias por RMN em medicina, etc. Suas principais aplicações em Física do Estado Sólido correspondem à determinação de campos magnéticos hiperfinos locais, gradientes de campos elétricos, e à medida dos tempos de relaxação spin-spin e spin-rede [19]. Em Medicina, a técnica é usada para obter imagens transversais e longitudinais do corpo humano e também para ajudar na identificação de tumores e hematomas [20].

A similaridade entre as equações 1.1 e 1.2 pode ser apreciada se considerarmos um elétron (carga  $-e$ ) submetido a campos elétrico ( $\mathbf{E}$ ) e magnético ( $\mathbf{B}$ ). Neste caso  $\mathbf{F}(t)$  na equação 1.1 é a força de Lorentz, que em unidades do Sistema Internacional (SI) é escrita

como [21]

$$\mathbf{F}(t) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.3)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade do elétron.

Escrevendo o vetor densidade de corrente elétrica como

$$\mathbf{J} = -nev, \quad (1.4)$$

onde  $n$  é a densidade eletrônica, a equação 1.1 pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J} - \mathbf{J}_o}{\tau} + \gamma(\mathbf{B} \times \mathbf{J}) = 0, \quad (1.5)$$

onde  $\mathbf{J}_o = (ne^2\tau/m)\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$ , e  $\gamma \equiv -e/m$  é a razão giromagnética eletrônica. Para elétrons livres,  $|\gamma| \approx 176 \text{ GHz/T}$ .

A equação 1.5 é formalmente idêntica à 1.2 e portanto ambas devem ter as mesmas soluções. Conseqüentemente, devem existir fenômenos similares àqueles em RMN. Devido a este fato o análogo à Ressonância Magnética Nuclear foi chamado *Ressonância de Corrente Elétrica*, ou RCE [10].

## 1.1 Motivação e Organização da Tese

A possibilidade da existência de fenômenos de ressonância envolvendo cargas em movimento no vácuo, como sugerido em [12], motivou uma análise mais aprofundada do problema. A principal dificuldade com o desenvolvimento feito em [12] foi a não inclusão do campo elétrico nas equações de movimento, necessariamente presente, devido à Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

No Capítulo 2, apresentamos uma tratamento clássico do movimento de partículas carregadas no vácuo sob a ação de campos magnéticos oscilantes e o campo elétrico associado, oriundo da equação 1.6. A transformação para um sistema girante de coordenadas, com frequência idêntica àquela dos campos magnéticos oscilantes, abre caminho para a obtenção de uma solução analítica do problema. No Capítulo 3, o problema é tratado quanticamente. A utilização de operadores de rotação aplicados diretamente à equação de Schrödinger permite a obtenção da função de onda no sistema de coordenadas do laboratório. No Capítulo 4, descrevemos o aparato experimental montado com o objetivo

de observar o fenômeno ressonante descrito nos Capítulos 2 e 3, em um feixe de íons  $\text{He}^+$ . E, finalmente, no Capítulo 5, discutimos os resultados experimentais preliminares e apresentamos propostas para a continuação do trabalho, bem como algumas possíveis aplicações.

# Capítulo 2

## Resultados Teóricos I: Tratamento Clássico

Neste capítulo apresentamos os resultados teóricos para o movimento de uma partícula carregada sob a ação de campos elétrico e magnético dependentes do tempo, utilizando conceitos da Mecânica Clássica. A transformação de coordenadas para um sistema girante permite a obtenção de soluções analíticas para o conjunto das equações de movimento. Os resultados mostram que a partícula pode ser confinada em uma região finita do espaço quando a frequência dos campos oscilantes se iguala à frequência de ciclotron da partícula.

### 2.1 Transformações para Sistemas Girantes de Coordenadas: Uma Breve Discussão

Na referência [12] investiga-se a dinâmica quântica de partículas carregadas sob a ação de campos magnéticos oscilantes. O campo elétrico que aparece devido à oscilação do campo magnético não é levado em consideração (Equação 1.6). O problema geral consiste em encontrar a solução da equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi = \frac{1}{2m} [\mathbf{P} - q\mathbf{A}]^2 \psi, \quad (2.1)$$

onde  $q$  é a carga da partícula,  $m$  sua massa,  $\mathbf{P}$  seu momento linear canônico e  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor. O campo magnético é obtido a partir de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Se  $\mathcal{H}$  fosse independente do tempo, a solução geral de 2.1 seria

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t\right) \psi(0). \quad (2.2)$$

No entanto, o campo magnético ao qual a partícula está submetida é dado por

$$\mathbf{B} = B_1[\cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}] + B_0\mathbf{k} = \mathbf{B}_1(t) + \mathbf{B}_0. \quad (2.3)$$

A dependência temporal explícita que aparece em 2.3 invalida a solução apresentada em 2.2. A forma particular de  $\mathbf{B}_1(t)$  sugere uma transformação para um sistema girante de coordenadas com frequência angular  $\omega$  em torno do eixo  $z$  (veja Apêndice A). Neste sistema seria possível eliminar a dependência de  $\mathbf{B}_1$  e o problema seria simplificado, deixando o hamiltoniano independente do tempo.

O procedimento utilizado em [12] é o mesmo da RMN usual [19, 22]. O campo efetivo no sistema girante de coordenadas é dado por

$$\mathbf{B}_{ef} = \left(\frac{\omega}{\gamma} + B_0\right)\mathbf{k}' + B_1\mathbf{i}', \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  e  $\mathbf{k}'$  são os versores neste novo sistema de coordenadas, e  $\gamma \equiv q/m$  é o análogo da razão giromagnética na RMN usual.

A partir de 2.4, os autores de [12] obtêm o seguinte potencial vetor

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}(\Delta B)Y\mathbf{i}' + \frac{1}{2}[(\Delta B)X - B_1Z]\mathbf{j}' + \frac{1}{2}B_1Y\mathbf{k}', \quad (2.5)$$

onde  $\Delta B = \omega/\gamma B_0$ . O hamiltoniano se torna independente de  $t$ , e os autores calculam a partir daí valores esperados para o momento e a posição da partícula. Na próxima seção faremos uma breve análise crítica do procedimento utilizado em [12] e mostraremos que este *não* conduz corretamente às coordenadas da partícula no laboratório.

### 2.1.1 Transformação do Vetor Velocidade

O campo magnético  $\mathbf{B}$  dado em 2.3, quando expresso em um sistema de coordenadas que gira com frequência angular  $\omega$  em torno do eixo  $z$ , será escrito como

$$\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}' + B_0\mathbf{k}', \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  se referem ao sistema girante de coordenadas, girando em torno do eixo  $z$  com frequência angular  $\omega$ . No Apêndice A apresentamos uma revisão sobre sistemas girantes de coordenadas. O campo magnético efetivo, escrito na forma da equação 2.4, mantém, no sistema girante de coordenadas, a forma funcional da força de Lorentz.

No sistema de coordenadas do laboratório, a força de Lorentz pode ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \gamma\mathbf{V} \times \mathbf{B}(t), \quad (2.7)$$

Escrevendo o vetor velocidade  $\mathbf{V}$  no sistema girante de coordenadas, e usando a relação A.7 para representar a derivada neste novo sistema de coordenadas, obtemos a equação 2.7 escrita como

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \gamma \mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

A equação 2.8 pode, portanto, ser escrita de maneira a manter a forma da força de Lorentz neste novo sistema, ou seja,

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} = \gamma \mathbf{V} \times \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\gamma} + \mathbf{B} \right) = \gamma \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{ef}, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{B}_{ef} = \boldsymbol{\omega}/\gamma + \mathbf{B}$ . Quando  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}'$ , com  $\mathbf{B}$  dado por 2.6, o campo magnético efetivo  $\mathbf{B}_{ef}$  será dado por 2.4.

A partir da exposição acima observamos que o problema foi tratado definindo-se uma transformação para o sistema girante de coordenadas onde  $\mathbf{V}$  se mantém invariante sob a transformação. Desta maneira  $(V_x, V_y, V_z)$  são as componentes de  $\mathbf{V}$  escritas no sistema de coordenadas do laboratório e  $(v_x, v_y, v_z)$  as componentes de  $\mathbf{V}$  escritas no sistema girante de coordenadas. Podemos definir que  $(x, y, z)$  correspondem às variáveis as quais, derivadas em relação ao tempo, levam a  $(v_x, v_y, v_z)$ , a menos de uma constante.

No entanto,  $(x, y, z)$  não se relacionam, neste caso, com  $(X, Y, Z)$  (coordenadas do vetor posição da partícula no sistema de coordenadas do laboratório) por

$$\begin{aligned} X &= x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t), \\ Y &= x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t), \\ Z &= z, \end{aligned} \quad (2.10)$$

como mostrado em nosso trabalho [23].

Logo, a relação entre  $(x, y, z)$  e  $(X, Y, Z)$  em [12] é mais complicada do que aquela mostrada em 2.10. Podemos encontrá-la utilizando a relação entre  $(V_x, V_y, V_z)$  e  $(v_x, v_y, v_z)$ , que é

$$\begin{aligned} V_x &= v_x \cos(\omega t) - v_y \sin(\omega t), \\ V_y &= v_x \sin(\omega t) + v_y \cos(\omega t), \\ V_z &= v_z. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sabemos que  $V_x = dX/dt$  e que  $v_x = dx/dt$ , com formas análogas para as demais coordenadas. Substituindo no conjunto de equações 2.11 e integrando em relação ao

tempo, podemos obter

$$\begin{aligned}
 X - X_0 &= \int_0^t V_x dt' = \int_0^t \frac{dx}{dt'} \cos(\omega t') dt' - \int_0^t \frac{dy}{dt'} \sin(\omega t') dt', \\
 Y - Y_0 &= \int_0^t V_y dt' = \int_0^t \frac{dx}{dt'} \sin(\omega t') dt' + \int_0^t \frac{dy}{dt'} \cos(\omega t') dt', \\
 Z - Z_0 &= \int_0^t V_z dt' = \int_0^t \frac{dz}{dt'} dt',
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde sabemos que, em  $t = 0$ ,  $(V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$  e  $(x_0, y_0, z_0) = (X_0, Y_0, Z_0)$ .

As integrais envolvendo termos em seno e co-seno podem ser escritas como

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'} \cos(\omega t') dt' = x \cos(\omega t) - x_0 + \omega \int_0^t x \sin(\omega t') dt', \tag{2.13}$$

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'} \sin(\omega t') dt' = x \sin(\omega t) - \omega \int_0^t x \cos(\omega t') dt'. \tag{2.14}$$

Usando os resultados 2.13 e 2.14, podemos escrever o conjunto de equações 2.12 como

$$\begin{aligned}
 X - X_0 &= x \cos(\omega t) - x_0 + \omega \int_0^t x \sin(\omega t') dt' - y \sin(\omega t) + \omega \int_0^t y \cos(\omega t') dt', \\
 Y - Y_0 &= x \sin(\omega t) - \omega \int_0^t x \cos(\omega t') dt' + y \cos(\omega t) - y_0 + \omega \int_0^t y \sin(\omega t') dt', \\
 Z - Z_0 &= z - z_0.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Reorganizando os termos e usando o fato de as origens serem coincidentes em  $t = 0$  obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
 X &= x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) + \omega \int_0^t [x \sin(\omega t') + y \cos(\omega t')] dt', \\
 Y &= x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) - \omega \int_0^t [x \cos(\omega t') - y \sin(\omega t')] dt', \\
 Z &= z.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

As transformações 2.11 e 2.16 fornecem as relações corretas entre as componentes dos vetores posição e velocidade nos dois sistemas.

### 2.1.2 Comentários

Devemos observar que a discussão precedente foi necessária devido ao fato de considerarmos o módulo de um dado vetor invariante sob rotações em um determinado sistema de coordenadas. Comumente, em Mecânica Clássica, o que fazemos é considerar o módulo do vetor posição invariante sob rotações em um dado sistema de coordenadas. Em alguns



casos, como na RMN ou no caso tratado na referência [12] (onde o campo elétrico oriundo da oscilação do campo magnético não é considerado), adotar o módulo do vetor momento magnético nuclear, ou do vetor velocidade, invariante sob rotações, ao invés do módulo do vetor posição, facilita muito a resolução do problema. No primeiro caso obtemos dessa forma a quantidade relevante que é a magnetização nuclear, e no segundo a densidade de corrente de partículas, que é proporcional à velocidade.

## 2.2 Movimento de Partículas Carregadas em Campos Magnéticos Oscilantes: Tratamento Clássico

Investigaremos as soluções das equações de movimento clássicas para uma partícula carregada sob a ação de campos magnético e *elétrico* dependentes do tempo, dados por

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} + B_1 [\cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\omega t) \mathbf{j}], \quad (2.17)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} Z \omega B_1 [\cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\omega t) \mathbf{j}] + \frac{\omega}{2} B_1 [X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)] \mathbf{k}. \quad (2.18)$$

Estes campos estão relacionados pela equação (Lei de Faraday)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Notamos que os campos  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  não satisfazem a Lei de Ampère na ausência de fontes de correntes

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.20)$$

já que  $B_1$  é considerado homogêneo na região sob consideração<sup>1</sup>. Esta aproximação foi usada por outros pesquisadores no contexto de armadilhas atômicas e *wigglers* de lasers de elétrons livres [2, 24, 25]. O arranjo experimental consiste de dois pares de bobinas cruzadas em uma configuração do tipo Helmholtz, através dos quais passa um feixe de partículas carregadas que não interagem entre si (Capítulo 4). O campo estático  $B_0$  é

<sup>1</sup>No entanto, para a configuração de bobinas explorada nesta tese, a dependência espacial das componentes de  $\mathbf{B}_1$  ( $B_{1_x}, B_{1_y}$ ) em torno do centro é parabólica, do tipo  $B_{1_x}(x, y, z, t) = [\alpha x^2 + \eta z^2 - \epsilon y^2] \cos(\omega t)$  e  $B_{1_y}(x, y, z, t) = [\alpha y^2 + \eta z^2 - \epsilon x^2] \sin(\omega t)$ , como pode ser observado na figura 4.16. Incluindo esta dependência em  $\mathbf{B}_1$ , consegue-se satisfazer a Lei de Ampère até segunda ordem  $x, y$  e  $z$ .

aplicado ao longo da direção do feixe, que está ao longo da direção  $z$ . Simulações numéricas mostram que, com esta geometria, o campo magnético é homogêneo em uma região de aproximadamente 20% do volume total compreendido entre as bobinas, levando-nos a usar a equação 2.17 como uma boa aproximação nesta região (ver Capítulo 4).

A dependência temporal explícita nos campos acima descritos dificulta muito a solução das equações de movimento. Para resolver nosso problema usaremos o conceito de um sistema girante de coordenadas, discutido no Apêndice A. Esta mudança de sistema de coordenadas simplifica as equações de movimento acopladas e permite obter soluções analíticas completas, onde, caso contrário, somente resultados numéricos poderiam ser esperados. A estrutura das equações de movimento transformadas no sistema de coordenadas girantes leva-nos a uma analogia formal com o problema de modos normais de três osciladores acoplados com termos anisotrópicos de “amortecimento”. Na subseção 2.2.1 derivaremos as equações de movimento no laboratório e no sistema girante de coordenadas. Também mostraremos que estas podem ser escritas como um problema de autovalores. Na seção 2.2.2 obteremos as autofreqüências do amortecimento; estas são reduzidas a uma forma particularmente simples na ressonância. Mostraremos que, neste caso, a partícula é confinada na região do campo, e deduzimos a forma de sua órbita. A subseção 2.2.3 apresenta soluções numéricas para os casos em que  $B_1 \ll B_0$  e  $B_1 \approx B_0$  e também para pequenas variações nas condições iniciais. O movimento da partícula quando o campo elétrico (Equação 2.18) não é considerado é comentado na subseção 2.2.4. Finalmente, na subseção 2.2.5 consideraremos brevemente a aplicação de campos oscilantes sob a forma de pulsos.

### 2.2.1 Mudança para o Sistema Girante de Coordenadas

A força de Lorentz (Equação 1.3) com  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dados por 2.17 e 2.18 leva ao seguinte conjunto de equações acopladas

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \gamma \left[ -\frac{1}{2} Z \omega B_1 \cos(\omega t) + \dot{Y} B_0 - \dot{Z} B_1 \sin(\omega t) \right], \\ \ddot{Y} &= \gamma \left[ -\frac{1}{2} Z \omega B_1 \sin(\omega t) - \dot{X} B_0 + \dot{Z} B_1 \cos(\omega t) \right], \\ \ddot{Z} &= \gamma \left[ \frac{1}{2} \omega B_1 (X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)) + \dot{X} B_1 \sin(\omega t) - \dot{Y} B_1 \cos(\omega t) \right],\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde  $\gamma = q/m$  é a razão carga-massa da partícula.

Estas equações misturam componentes da aceleração, velocidade e posição da partícula, incluindo a complicada dependência temporal dos termos oscilantes. Nesta forma, o melhor que podemos esperar é uma solução numérica aproximada.

Aqui, como na RMN, o “sistema girante de coordenadas” [10, 22] aparece como uma poderosa idéia. As relações entre os vetores unitários do sistema de coordenadas do laboratório e do sistema girante são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}'\cos(\omega t) - \mathbf{j}'\sin(\omega t), \\ \mathbf{j} &= \mathbf{i}'\sin(\omega t) + \mathbf{j}'\cos(\omega t), \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}', \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  se referem ao sistema girante de coordenadas, girando em torno do eixo  $z$  com frequência angular  $\omega$ .

Sabemos que  $\mathbf{F} = m\delta^2\mathbf{r}/dt^2$ . Usando as relações A.7 e A.10 podemos reescrever a equação 1.3 como

$$\frac{\delta^2\mathbf{r}}{\delta t^2} = \gamma\mathbf{E}' + \gamma\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} \times \left(\mathbf{B}' + \frac{2\boldsymbol{\omega}}{\gamma}\right) + \gamma(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \left(\mathbf{B}' + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\gamma}\right), \quad (2.23)$$

onde  $\delta^2\mathbf{r}/\delta t^2 = (dx/dt)\mathbf{i}' + (dy/dt)\mathbf{j}' + (dz/dt)\mathbf{k}'$ , sendo as letras minúsculas utilizadas para designar as variáveis no sistema girante de coordenadas. Os campos magnético e elétrico estão escritos no sistema girante de coordenadas,  $\mathbf{B}' = B_1\mathbf{i}' + B_0\mathbf{k}'$  e  $\mathbf{E}' = -z\omega B_1/2\mathbf{i}' + x\omega B_1/2\mathbf{k}'$ . Podemos imediatamente reconhecer os dois primeiros termos na expressão 2.23 como o de força centrífuga e o de Coriolis, respectivamente [26]. Separando em componentes temos

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \gamma \left[ \dot{y} \left( B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + x\omega \left( B_0 + \frac{\omega}{\gamma} \right) - \frac{z\omega B_1}{2} \right], \\ \ddot{y} &= \gamma \left[ \dot{z}B_1 - \dot{x} \left( B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + y\omega \left( B_0 + \frac{\omega}{\gamma} \right) \right], \\ \ddot{z} &= -\gamma \left[ \dot{y}B_1 + \frac{x\omega B_1}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

Observamos que a dependência temporal do campo desaparece após a transformação, como esperado.

É útil definir campos *magnético* e *elétrico efetivos* no sistema girante de coordenadas como

$$\mathbf{B}_{ef} = B_1\mathbf{i}' + \left( B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) \mathbf{k}', \quad (2.25)$$

e

$$\mathbf{E}_{ef} = \left[ x\omega \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) - \frac{z\omega}{2} B_1 \right] \mathbf{i}' + \left[ y\omega \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) \right] \mathbf{j}' - \frac{x\omega B_1}{2} \mathbf{k}'. \quad (2.26)$$

Como podemos ver,  $\nabla \times \mathbf{E}_{ef} = 0$ , e  $\partial \mathbf{B}_{ef} / \partial t = 0$ . Os campos efetivos foram definidos de maneira que a força de Lorentz (*força de Lorentz efetiva*) mantivesse a mesma forma do que aquela exibida no sistema de coordenadas do laboratório, isto é,

$$\mathbf{F}_{ef} = q\mathbf{E}_{ef} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{ef}. \quad (2.27)$$

É importante distinguir os dois tipos de contribuições para  $\mathbf{E}_{ef}$ , uma aparecendo da transformação do próprio  $\mathbf{E}$ ,  $-(z\omega/2)B_1\mathbf{i}' + (x\omega/2)B_1\mathbf{k}'$ , e um outro termo igual a  $-x\omega B_1\mathbf{k}'$ , o qual aparece da componente  $z$  do produto cruzado  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times B_1\mathbf{i}'$ . Estas contribuições são adicionadas no sistema girante de coordenadas. Isto significa que, se desejarmos desconsiderar os efeitos do campo elétrico, devemos fazê-lo *antes* da transformação.

Poderíamos também, de maneira mais elegante, ter escolhido realizar a transformação diretamente na lagrangeana do movimento. No sistema do laboratório temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{q}{2}\dot{X}[ZB_1\text{sen}(\omega t) - YB_o] + \\ & + \frac{q}{2}\dot{Y}[XB_o - ZB_1\text{cos}(\omega t)] + \frac{q}{2}\dot{Z}[YB_1\text{cos}(\omega t) - XB_1\text{sen}(\omega t)]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Reescrevendo a lagrangeana 2.28 na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{qB_1}{2}Z[\dot{X}\text{sen}(\omega t) - \dot{Y}\text{cos}(\omega t)] + \\ & + \frac{qB_o}{2}(X\dot{Y} - Y\dot{X}) + \frac{qB_1}{2}\dot{Z}[Y\text{cos}(\omega t) - X\text{sen}(\omega t)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

e utilizando as relações entre os sistemas do laboratório e girante, respectivamente,

$$Z = z,$$

$$X\text{cos}(\omega t) + Y\text{sen}(\omega t) = x,$$

$$-X\text{sen}(\omega t) + Y\text{cos}(\omega t) = y,$$

$$\dot{X}\text{sen}(\omega t) - \dot{Y}\text{cos}(\omega t) = -(\dot{y} + \omega x),$$

$$X\dot{Y} - Y\dot{X} = xy - y\dot{x} + \omega(x^2 + y^2),$$

e

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega(xy - y\dot{x}),$$

encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \left( \frac{m\omega^2}{2} + \frac{qB_0\omega}{2} \right) (x^2 + y^2) + \\ & + \left( \frac{qB_0}{2} + m\omega \right) (xy - yx) - \frac{qB_1}{2}zy - \frac{qB_1\omega}{2}xz + \frac{qB_1}{2}y\dot{z}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Agrupando os termos obtemos, no sistema girante de coordenadas, a *lagrangeana efetiva*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{q}{2}\dot{x}y \left( B_o + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + \frac{q}{2}\dot{y} \left[ x \left( B_o + \frac{2\omega}{\gamma} \right) - zB_1 \right] + \\ & + \frac{qB_1y\dot{z}}{2} + \frac{q\omega}{2} \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) (x^2 + y^2) - \frac{q\omega B_1xz}{2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

É fácil ver que as equações de movimento 2.24 podem ser obtidas da equação 2.31 utilizando as equações de Lagrange [26]. A lagrangeana acima pode ser escrita na forma usual

$$\mathcal{L}_{ef} = T + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{ef} - q\phi_{ef}, \quad (2.32)$$

onde  $T$  é a energia cinética da partícula,  $\mathbf{A}_{ef}$  o *potencial vetor efetivo* dado por

$$\mathbf{A}_{ef}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}_{ef}, \quad (2.33)$$

e o *potencial escalar efetivo* é

$$\phi_{ef}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\omega B_1xz - \frac{\omega}{2} \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) (x^2 + y^2). \quad (2.34)$$

O conjunto de equações 2.24 exhibe duas frequências de ressonância:  $\omega = -\gamma B_o = \omega_c$ , e  $\omega = -(1/2)\gamma B_o = (1/2)\omega_c$ . Será mostrado que um campo oscilando na primeira frequência ( $\omega = \omega_c$ ) leva a um *confinamento* espacial da partícula, enquanto que para  $\omega = \omega_c/2$  a partícula não será confinada. A frequência  $\omega_c$  é chamada frequência de ciclotron da partícula.

## 2.2.2 Autovalores e Autovetores: Modos Normais de Oscilação

As soluções do sistema de equações diferenciais acopladas 2.24 podem ser obtidas definindo-se o vetor coluna

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

As equações de movimento 2.24 podem ser escritas na forma compacta:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{X}, \quad (2.36)$$

onde as matrizes  $\tilde{\mathbf{D}}$  e  $\tilde{\mathbf{W}}$  são dadas por:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & (2\omega - \omega_c) & 0 \\ -(2\omega - \omega_c) & 0 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

e

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \omega(\omega - \omega_c) & 0 & -\omega\omega_1/2 \\ 0 & \omega(\omega - \omega_c) & 0 \\ -\omega\omega_1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

onde  $\omega_1 = \gamma B_1$ .

A equação 2.36 é *formalmente* idêntica à equação de movimento de um conjunto de *três osciladores harmônicos acoplados com amortecimento anisotrópico*. Contudo, esta analogia é somente formal. Em nosso caso, a existência de um termo de “amortecimento” não significa que o movimento seja atenuado. Utilizando soluções estacionárias com a forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_o e^{pt}, \quad (2.39)$$

chegamos à seguinte equação matricial

$$(p^2 \tilde{\mathbf{I}} - p \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{X}_o = \begin{pmatrix} p^2 - \omega(\omega - \omega_c) & -(2\omega - \omega_c)p & \omega\omega_1/2 \\ (2\omega - \omega_c)p & p^2 - \omega(\omega - \omega_c) & -\omega_1 p \\ \omega\omega_1/2 & \omega_1 p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.40)$$

Para que o sistema apresente solução não trivial é necessário que

$$|p^2 \tilde{\mathbf{I}} - p \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}}| = 0. \quad (2.41)$$

As soluções de 2.41 fornecem as autofreqüências do sistema. Organizando os termos chegamos à seguinte equação secular de sexta ordem (ver Apêndice B)

$$p^6 + \left[ \omega_1^2 - 2\omega(\omega - \omega_c) + (2\omega - \omega_c)^2 \right] p^4 + \left[ (\omega - \omega_c)^2 + \frac{3}{4}\omega_1^2 \right] \omega^2 p^2 + \frac{1}{4}\omega_1^2 \omega^3 (\omega - \omega_c) = 0. \quad (2.42)$$

A equação 2.42 pode ser escrita na forma

$$p^6 + ap^4 + bp^2 + c = 0, \quad (2.43)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \omega^2 + \omega_1^2 + (\omega - \omega_c)^2, \\ b &= \omega^2 \left[ (\omega - \omega_c)^2 + \frac{3\omega_1^2}{4} \right], \\ c &= \frac{1}{4}\omega_1^2\omega^3(\omega - \omega_c). \end{aligned}$$

Notamos imediatamente que na ressonância,  $\omega = \omega_c$ , a equação de autovalores de 2.43 é grandemente simplificada, levando a

$$p^6 + a_0p^4 + b_0p^2 = (p^4 + a_0p^2 + b_0)p^2 = 0, \quad (2.44)$$

onde os coeficientes, na ressonância, são

$$\begin{aligned} a_0 &= \omega_c^2 + \omega_1^2, \\ b_0 &= \frac{3}{4}\omega_c^2\omega_1^2, \\ c_0 &= 0. \end{aligned}$$

A equação 2.44 possui as raízes:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = 0, \\ p &= \pm \sqrt{\frac{-a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4b_0}}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes  $a_0$  e  $b_0$  obtemos as seguintes raízes

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = 0, \\ p_3 &= -p_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{k(\omega_1, \omega_c) - (\omega_1^2 + \omega_c^2)}, \\ p_5 &= -p_6 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{k(\omega_1, \omega_c) + (\omega_1^2 + \omega_c^2)}, \end{aligned}$$

onde

$$k(\omega_1, \omega_c) = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_c^2)^2 - 3\omega_1^2\omega_c^2} = \sqrt{\omega_1^4 + \omega_c^4 - \omega_1^2\omega_c^2}.$$

O movimento geral pode ser escrito como uma combinação linear do tipo [27]

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^6 A_n X_o^{(n)} e^{p_n t}, \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{X}_o^{(n)}$  é o autovetor de  $n$ -ésima ordem, correspondente à  $n$ -ésima raiz da equação 2.43. Em nosso caso temos

$$\mathbf{X}(t) = (A + A't) \mathbf{X}_o^{(1,2)} e^{p_1 t} + B \mathbf{X}_o^{(3)} e^{p_3 t} + C \mathbf{X}_o^{(4)} e^{p_4 t} + D \mathbf{X}_o^{(5)} e^{p_5 t} + E \mathbf{X}_o^{(6)} e^{p_6 t}, \quad (2.46)$$

onde  $A, A', B, C, D$  e  $E$  são determinados pelas condições iniciais. O termo  $A' \mathbf{X}_o^{(1,2)} t$  aparece devido ao fato de as duas raízes  $p_1$  e  $p_2$  serem idênticas ( $p_1 = p_2 = 0$ ) [27].

Dentro da aproximação  $\omega_c \gg \omega_1$ , comumente feita em RMN [19, 22], obtemos

$$k(\omega_1, \omega_c) = \omega_c^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_1}{\omega_c} \right)^2 + \left( \frac{\omega_1}{\omega_c} \right)^4 \right]^{1/2} \approx \omega_c^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_1}{\omega_c} \right)^2 \right] = \omega_c^2 - \omega_1^2/2,$$

onde desprezamos termos de ordem superior a  $(\omega_1/\omega_c)^2$ . Assim, as autofreqüências não nulas tornam-se

$$p_3 = -p_4 = \frac{i\sqrt{3}}{2} \omega_1, \quad (2.47)$$

$$p_5 = -p_6 = i\omega_c. \quad (2.48)$$

Os autovetores podem ser obtidos a partir das autofreqüências utilizando a equação 2.40 na condição ressonante ( $\omega = \omega_c$ )

$$\begin{pmatrix} p^2 & -\omega_c p & \omega_c \omega_1/2 \\ \omega_c p & p^2 & -\omega_1 p \\ \omega_c \omega_1/2 & \omega_1 p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.49)$$

Multiplicando a segunda equação pelo fator  $p/\omega_1$  e somando à terceira, podemos eliminar  $z_0$ , obtendo

$$\left[ \frac{\omega_c}{\omega_1} p^2 + \frac{\omega_c \omega_1}{2} \right] x_0 + p \left[ \frac{p^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] y_0 = 0. \quad (2.50)$$

Expressando  $x_0$  em função de  $y_0$  encontramos

$$x_0 = - \frac{\left[ \frac{p^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] p}{\left[ \frac{p^2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{2} \right] \omega_c} y_0. \quad (2.51)$$

De maneira análoga podemos expressar  $z_0$  em função de  $y_0$  substituindo a equação 2.51 na primeira equação de 2.49 e obtendo

$$z_0 = \frac{2p}{\omega_1} \left\{ 1 + \frac{\left[ \frac{p^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] p^2}{\left[ \frac{p^2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{2} \right] \omega_c^2} \right\} y_0. \quad (2.52)$$



Assim, reorganizando os termos nas equações 2.51 e 2.52, obtemos para um dado autovalor  $p$  na ressonância, o autovetor

$$\mathbf{X}_o = \begin{pmatrix} -\frac{2p}{\omega_c} \left[ \frac{p^2 + \omega_1^2}{2p^2 + \omega_1^2} \right] \\ 1 \\ \frac{2p}{\omega_1} \left\{ 1 + \frac{2p^2}{\omega_c^2} \left[ \frac{p^2 + \omega_1^2}{2p^2 + \omega_1^2} \right] \right\} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

onde escolhemos  $y_0 = 1$ .

Podemos agora escrever os autovetores, na ressonância, para os respectivos autovalores, ou autofreqüências, que são

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_o^{(1,2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ i\sqrt{3} \left( 1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(4)} = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \left( 1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix}; \\ \mathbf{X}_o^{(5)} &= \begin{pmatrix} -2i \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ \frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(6)} = \begin{pmatrix} 2i \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ -\frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Escolhendo as condições iniciais  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ , e  $\dot{z}(0) = V_o = v_o$ , podemos encontrar as constantes  $A, A', B, C, D$  e  $E$ . Para isto precisamos da derivada de  $\mathbf{X}(t)$ ,

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [A' + p_1(A + A't)] X_o^{(1,2)} e^{p_1 t} + B p_3 \mathbf{X}_o^{(3)} e^{p_3 t} + C p_4 \mathbf{X}_o^{(4)} e^{p_4 t} + D p_5 \mathbf{X}_o^{(5)} e^{p_5 t} + E p_6 \mathbf{X}_o^{(6)} e^{p_6 t} \quad (2.55)$$

Substituindo as raízes nas equações 2.46 e 2.55 obtemos as seguintes equações matriciais a  $t = 0$

$$\mathbf{X}(0) = A \mathbf{X}_o^{(1,2)} + B \mathbf{X}_o^{(3)} + C \mathbf{X}_o^{(4)} + D \mathbf{X}_o^{(5)} + E \mathbf{X}_o^{(6)}, \quad (2.56)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(0) = A' X_o^{(1,2)} + p_3 (B \mathbf{X}_o^{(3)} - C \mathbf{X}_o^{(4)}) + p_5 (D \mathbf{X}_o^{(5)} - E \mathbf{X}_o^{(6)}). \quad (2.57)$$

Substituindo os autovetores dados em 2.54 e as condições iniciais 2.56 e 2.57 obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ i\sqrt{3} \left( 1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \left( 1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix} + \\ &+ D \begin{pmatrix} -2i \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ \frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 2i \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ -\frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$-3\omega_1 \left(1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2}\right) B - \frac{4\omega_c^2}{\omega_1} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2}\right)\right] D = v_0,$$

que tem como solução

$$D = -\frac{v_0}{\left[6\omega_1 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2}\right) + \frac{4\omega_c^2}{\omega_1}\right]}.$$

Considerando o caso  $\omega_1 \ll \omega_c$  podemos obter, desconsiderando termos de ordem igual ou superior a  $(\omega_1/\omega_c)^2$ , os seguintes valores para as constantes

$$A' = 0; \quad A \approx \frac{2v_0}{3\omega_1} + \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2}; \quad B = C \approx -\frac{v_0}{3\omega_1}; \quad D = E \approx -\frac{\omega_1 v_0}{4\omega_c^2}.$$

Recolocando as constantes obtidas acima e os autovetores dados em 2.54 (expressos dentro do limite  $\omega_1 \ll \omega_c$ ) na equação 2.46, encontramos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 2v_0 \\ 3\omega_1 \\ \omega_1 v_0 \\ 2\omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{v_0}{3\omega_1} \left\{ \begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega_1 t/2} + \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} -i\frac{\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega_1 t/2} \right\} - \frac{\omega_1 v_0}{4\omega_c^2} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} + \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_c t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Realizando as operações em 2.66 e usando as relações

$$2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta},$$

$$2i\text{sen}(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta},$$

chegamos, finalmente, às seguintes componentes

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \frac{\sqrt{3}v_0}{3\omega_c} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2} \right) - \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} \text{sen}(\omega_c t), \\ y(t) &\approx -\frac{2v_0}{3\omega_1} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2} \right) - 1 \right] - \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} [\cos(\omega_c t) - 1], \\ z(t) &\approx \frac{2\sqrt{3}v_0}{3\omega_1} \text{sen} \left( \frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

As equações 2.67 descrevem a trajetória da partícula carregada na ressonância, ou seja, quando a frequência do campo oscilante se iguala à frequência de cíclotron da partícula. A figura 2.1 mostra essa trajetória, no sistema girante de coordenadas, para o isótopo triplamente ionizado do urânio,  $^{235}\text{U}^{3+}$  (razão carga-massa igual a 1,231 MHz/T), com

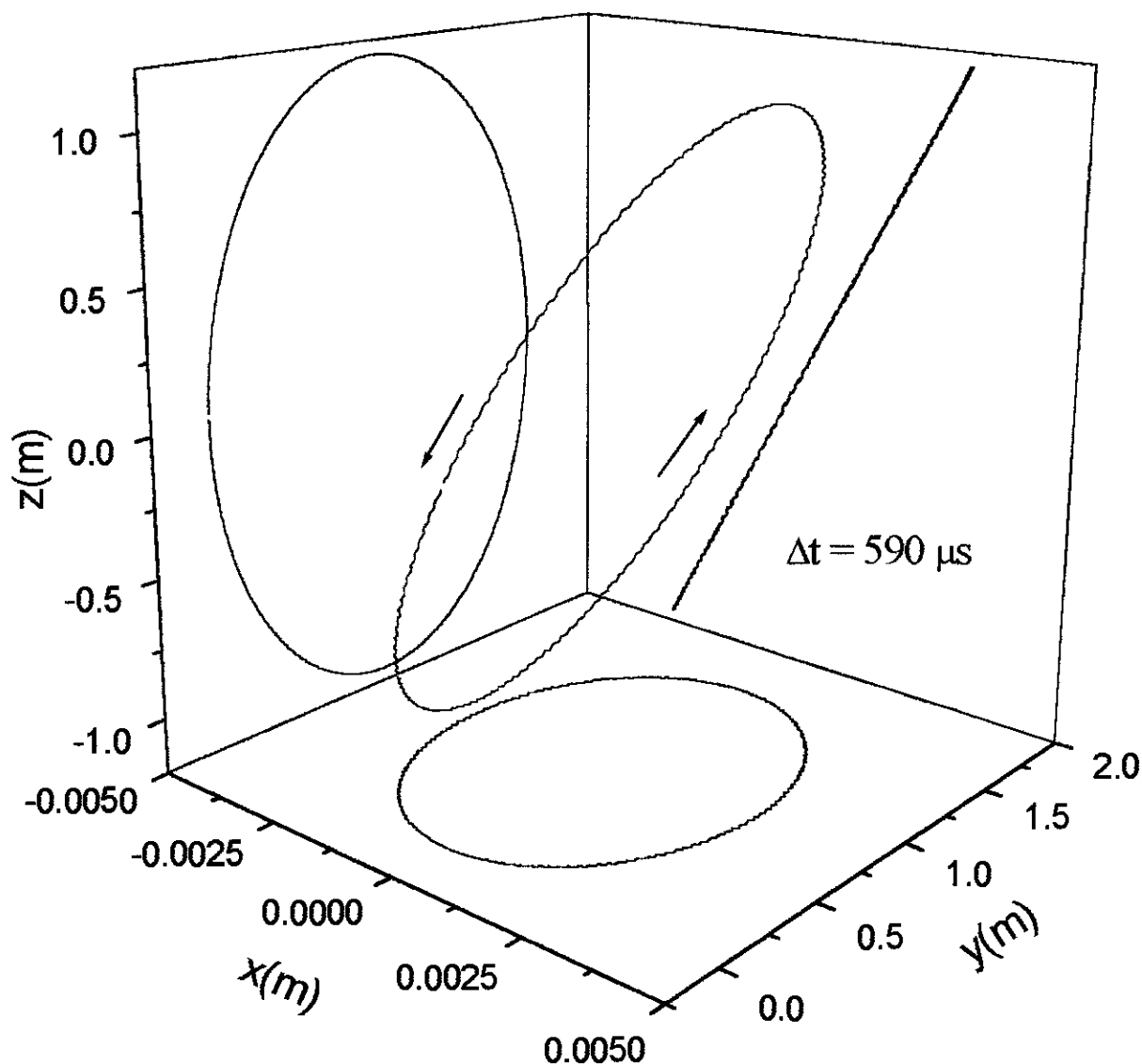


Figura 2.1: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância ( $\omega = \omega_c$ ), submetido aos campos estático de módulo  $B_0 = 1$  T e oscilante de amplitude  $B_1 = 0,01$  T, representada no sistema girante de coordenadas. A velocidade inicial é  $v_o = 10^4$  m/s ao longo do eixo  $z$ , e a frequência de cíclotron é  $\omega_c = -1,231$  MHz. Note a baixa amplitude do modo vibracional de alta frequência superposto sobre a trajetória.

velocidade inicial  $v_0 = 10^4$  m/s, submetido aos campos estático de módulo  $B_0 = 1$  T e oscilante de amplitude  $B_1 = 0,01$  T, levando aos valores  $\omega_c = -1,231$  MHz e  $\omega_1 = 12,31$  kHz. A curva é uma combinação de dois modos vibracionais, um de alta e outro de baixa frequência, a amplitude deste último sendo aproximadamente duas ordens de grandeza maior do que a do outro. As figuras 2.2 e 2.3 mostram, respectivamente, a trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância ( $\omega = \omega_c$ ) representada no sistema de coordenadas do laboratório para dois instantes de tempo: no início do movimento ( $\Delta t = 150 \mu\text{s}$ ), e um pouco antes de completar um ciclo ( $\Delta t = 560 \mu\text{s}$ ). As setas indicam a direção do movimento.

O aspecto mais interessante dos resultados mostrados acima é que a órbita da partícula está sobre uma *superfície fechada* no sistema de coordenadas do laboratório (ou é uma curva fechada no sistema girante de coordenadas), e portanto, a partícula está *confinada*. Do conjunto de equações 2.67 podemos obter que o volume no qual a partícula está confinada é aproximadamente  $\sqrt{3}(4v_0/3\omega_1)^3$ . A figura 2.4 mostra a trajetória de uma partícula cuja frequência de cíclotron difere em aproximadamente 1% da frequência de oscilação do campo  $B_1$ , sintonizado na frequência de ressonância do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  mostrado na figura 2.1. Neste caso, a partícula não-ressonante sai da região de confinamento. A justificativa matemática para esta “fuga” são as raízes *reais* obtidas da equação 2.43 para este caso.

Para um valor genérico de  $\omega$  temos a possibilidade de confinar a partícula se a equação secular 2.43 fornecer raízes imaginárias puras. No apêndice B mostramos que isto é possível para frequências muito acima de  $\omega_c$ . Para frequências abaixo de  $\omega_c$  a equação 2.43 fornece raízes reais que provocam o arrastamento exponencial da partícula. Para frequências em torno de  $\omega_c$  o confinamento só acontece em  $\omega = \omega_c$ . Como um exemplo disso, a figura 2.5 mostra as trajetórias de partículas em um feixe contendo isótopos de urânio triplamente ionizados. As respectivas razões carga-massa em MHz/T são:  $\gamma(^{233}\text{U}^{3+}) = 1,242$ ,  $\gamma(^{234}\text{U}^{3+}) = 1,237$ ,  $\gamma(^{235}\text{U}^{3+}) = 1,231$ ,  $\gamma(^{236}\text{U}^{3+}) = 1,226$  e  $\gamma(^{238}\text{U}^{3+}) = 1,216$ . Para esta simulação as partículas possuem também  $v_0 = 10^4$  m/s e estão submetidas aos campos  $B_0 = 1$  T,  $B_1 = 0,01$  T. A frequência dos campos oscilantes está sintonizada na frequência de cíclotron do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$ ,  $\omega = \gamma(^{235}\text{U}^{3+})B_0 = -1,231$  MHz. A figura é mostrada no sistema girante de coordenadas. Podemos obter uma idéia das trajetórias no sistema de coordenadas do laboratório através da rotação da figura em torno do eixo  $z$ . Note que cada isótopo, de acordo com as equações 2.26 e 2.25, é afetado por diferentes campos efetivos. Isto provoca um desvio dos íons dos isótopos mais leves

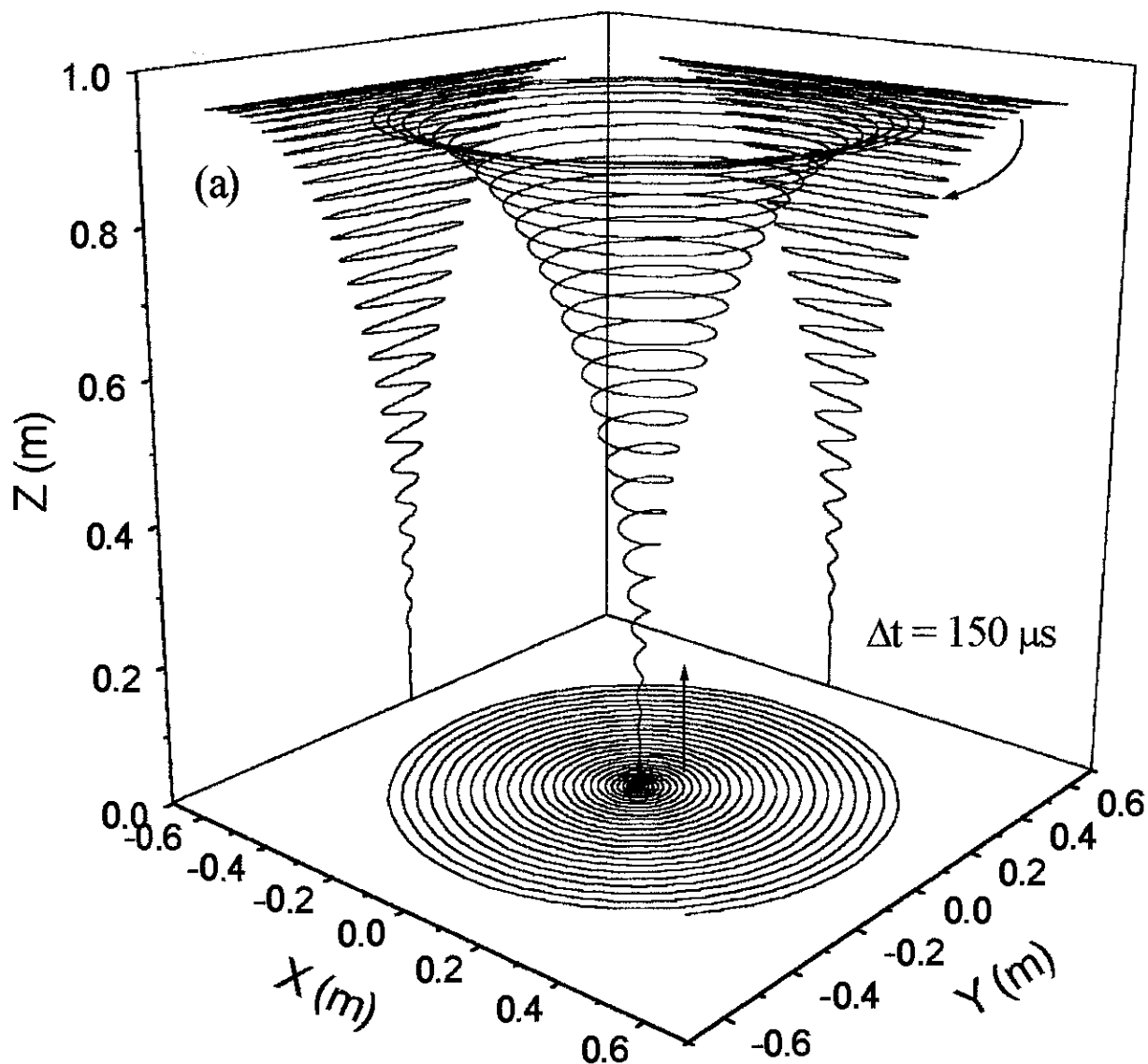


Figura 2.2: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância, representada no sistema de coordenadas do laboratório no início de seu movimento ( $\Delta t = 150 \mu\text{s}$ ); a figura também mostra as projeções da trajetória sobre os planos cartesianos. Os parâmetros são os mesmos utilizados na figura 2.1. As setas indicam a direção do movimento.

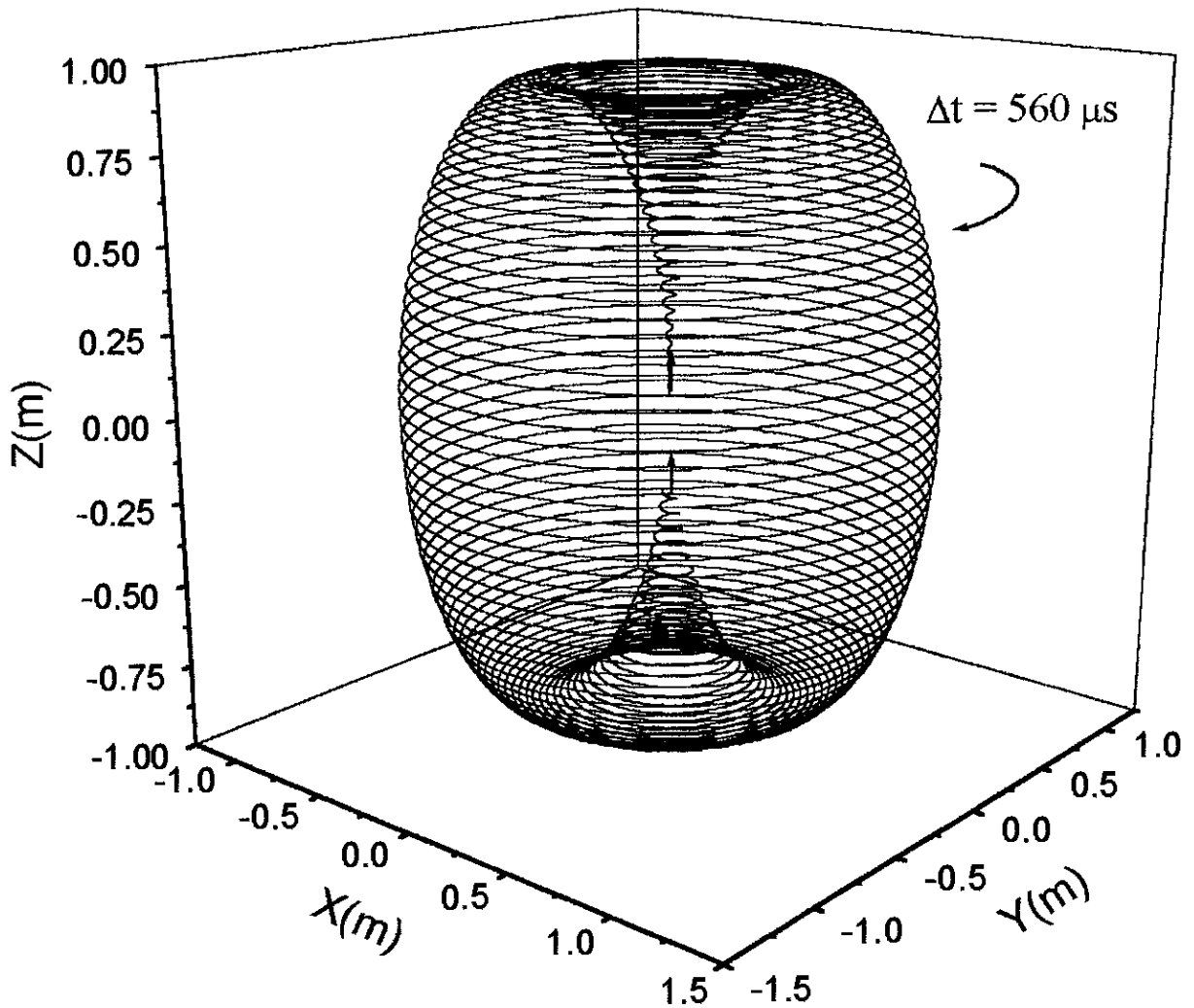


Figura 2.3: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na ressonância, representada no sistema de coordenadas do laboratório um pouco antes de completar um ciclo ( $\Delta t = 560 \mu\text{s}$ ).

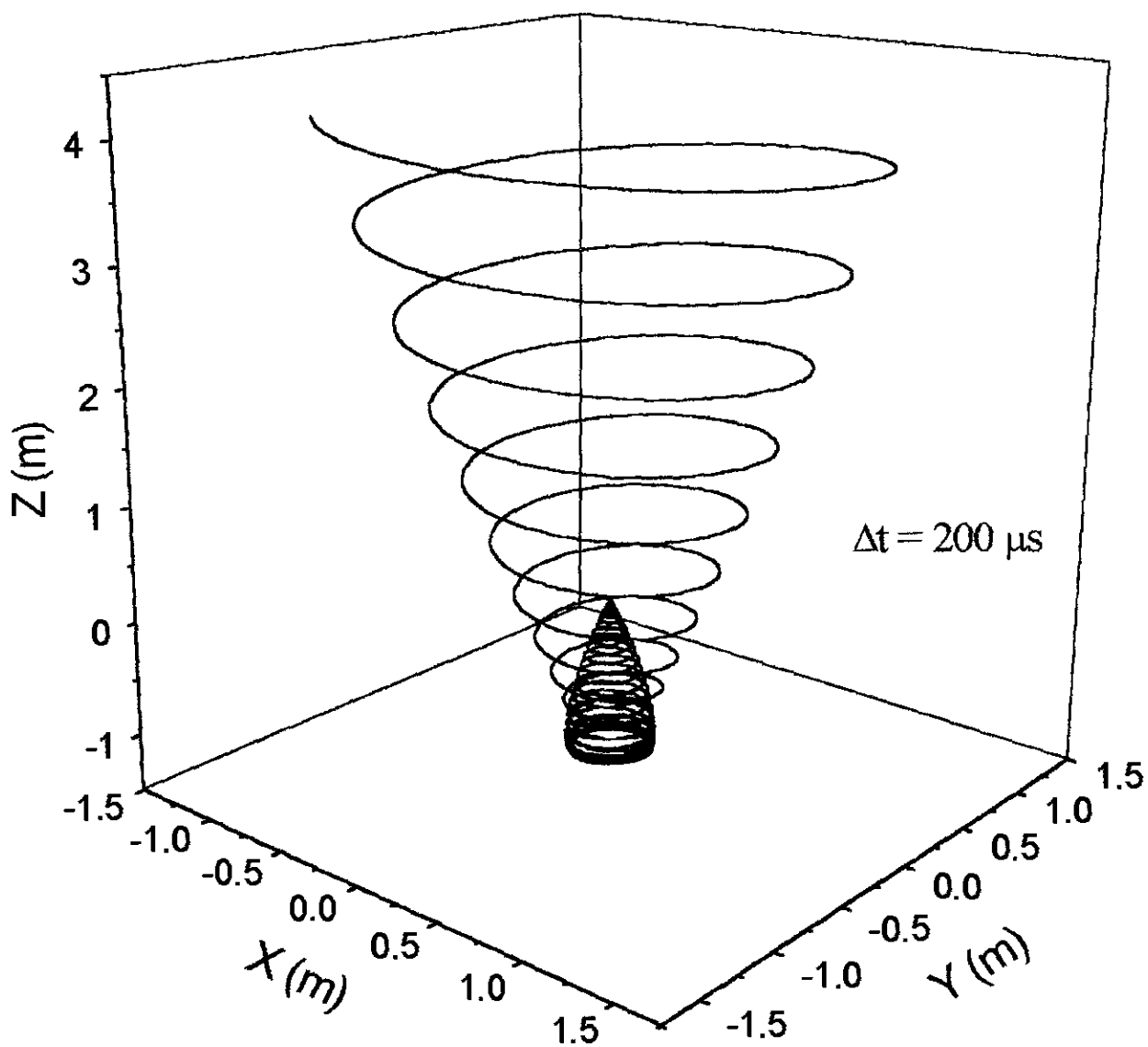


Figura 2.4: Trajetória de uma partícula não-ressonante com razão carga-massa diferindo aproximadamente 1% do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  dado como exemplo na figura 2.1. Note o intervalo de tempo, aproximadamente  $1/3$  do ciclo do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$ , e a escala do eixo  $z$ .

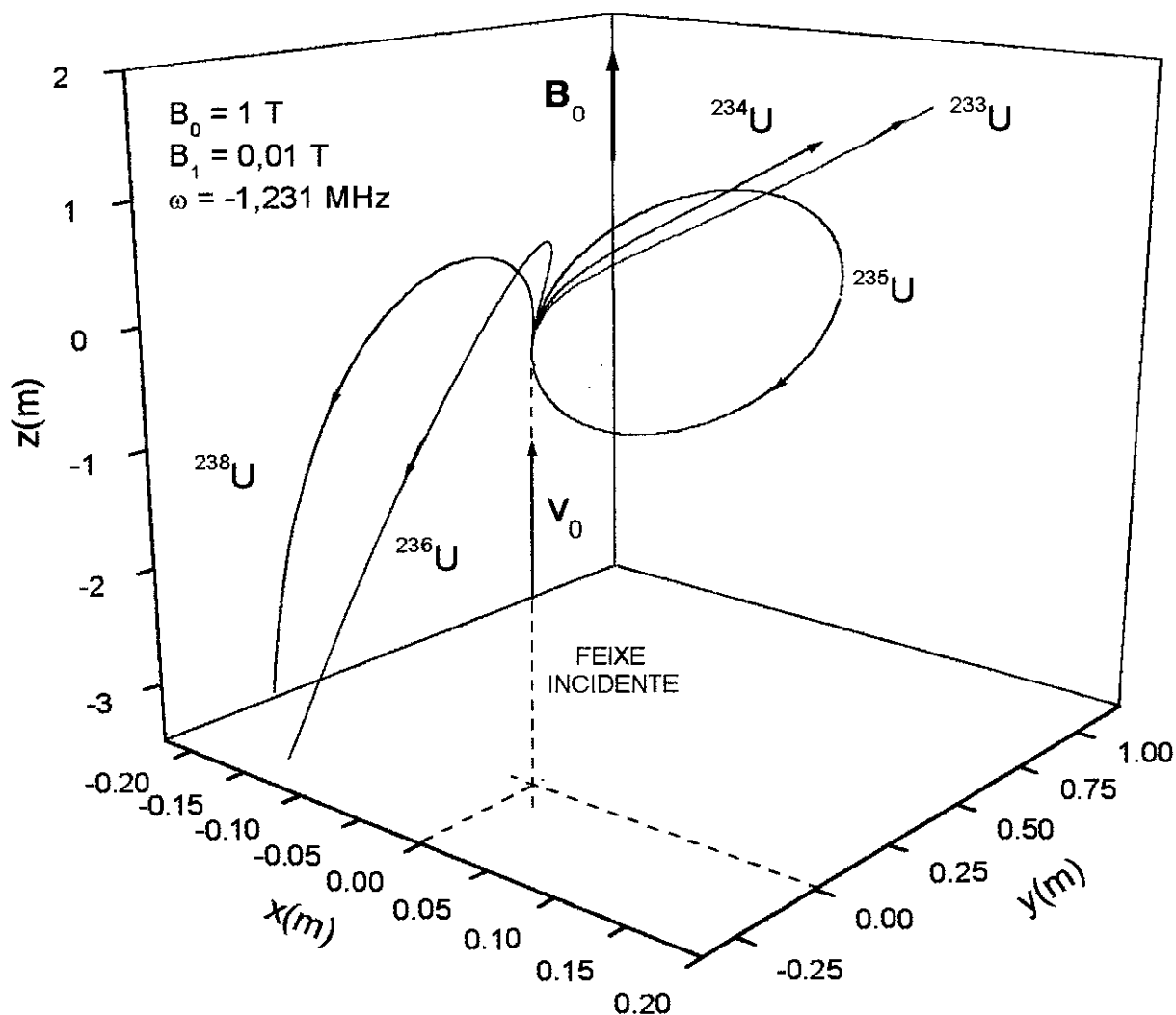


Figura 2.5: Trajetórias de isótopos triplamente ionizados do urânio em campos oscilantes “sintonizados” na frequência de ressonância do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  ( $\omega = -1,231 \text{ MHz}$ ) representadas no sistema girante de coordenadas. O campo estático está ao longo do eixo  $+z$ , e o campo magnético oscilante preenche todo o espaço na direção paralela ao eixo  $x$ . A velocidade inicial das partículas é  $v_0 = 10^4 \text{ m/s}$ , ao longo da direção do campo estático. A órbita da partícula ressonante é uma curva fechada, enquanto que aquelas não ressonantes correspondem a curvas abertas, com as partículas se afastando rapidamente. As trajetórias no sistema de coordenadas do laboratório são obtidas girando a figura em torno do eixo  $z$ . Estas curvas foram produzidas para diferentes intervalos de tempo a fim de mostrá-las todas visíveis na mesma escala.



em direções opostas com respeito àqueles mais pesados.

É instrutivo analisar as soluções para  $\omega = \omega_c/2$  (frequência de Larmor). Neste caso, os coeficientes da equação de autovalores 2.43 são

$$\begin{aligned} a' &= \omega_1^2 + \frac{\omega_c^2}{2}, \\ b' &= \frac{\omega_c^2}{16}(3\omega_1^2 + \omega_c^2), \\ c' &= -\frac{1}{64}\omega_1^2\omega_c^4. \end{aligned}$$

As raízes da equação de autovalores são

$$\begin{aligned} p_1 &= -p_2 = \frac{i\omega_c}{2}, \\ p_3 &= -p_4 = \frac{1}{4}\sqrt{-2\omega_c^2 - 8\omega_1^2 - 2k(\omega_1, \omega_c)}, \\ p_5 &= -p_6 = \sqrt{-2\omega_c^2 - 8\omega_1^2 + 2k(\omega_1, \omega_c)}, \end{aligned}$$

onde

$$k(\omega_1, \omega_c) = \sqrt{\omega_c^4 + 12\omega_1^2\omega_c^2 + 16\omega_1^4}.$$

Dentro da aproximação  $\omega_c \gg \omega_1$  obtemos

$$k(\omega_1, \omega_c) = \omega_c^2 \left[ 1 + 12 \left( \frac{\omega_1}{\omega_c} \right)^2 + 16 \left( \frac{\omega_1}{\omega_c} \right)^4 \right]^{1/2} \approx \omega_c^2 + 6\omega_1^2,$$

onde desprezamos termos de ordem superior a  $(\omega_1/\omega_c)^2$ . Assim, as autofrequências tornam-se

$$p_1 = -p_2 = \frac{i\omega_c}{2}, \quad (2.68)$$

$$p_3 = -p_4 = \frac{i\omega_c}{2} \left( 1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2} \right)^{1/2} \approx \frac{i\omega_c}{2} \left( 1 + \frac{5\omega_1^2}{2\omega_c^2} \right) = \frac{i\omega_c\alpha}{2}, \quad (2.69)$$

$$p_5 = -p_6 = \frac{\omega_1}{2}, \quad (2.70)$$

onde

$$\alpha = 1 + \frac{5\omega_1^2}{2\omega_c^2}.$$

Os autovetores podem ser obtidos a partir das autofrequências utilizando a equação matricial 2.40 para  $\omega = \omega_c/2$

$$\begin{pmatrix} p^2 + \omega_c^2/4 & 0 & \omega_c\omega_1/4 \\ 0 & p^2 + \omega_c^2/4 & -\omega_1 p \\ \omega_c\omega_1/4 & \omega_1 p & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.71)$$

Usando a segunda equação de 2.71 chegamos a

$$z_0 = \frac{(4p^2 + \omega_c^2)}{4\omega_1 p} y_0. \quad (2.72)$$

Substituindo a relação 2.72 na terceira equação de 2.71 encontramos

$$x_0 = -\frac{p}{\omega_1^2 \omega_c} (4\omega_1^2 + 4p^2 + \omega_c^2) y_0. \quad (2.73)$$

Assim, para um dado autovalor  $p$ , quando  $\omega = \omega_c/2$ , temos o autovetor associado

$$\mathbf{X}_o = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\omega_1^2 \omega_c} (4\omega_1^2 + 4p^2 + \omega_c^2) \\ 1 \\ \frac{4p^2 + \omega_c^2}{4\omega_1 p} \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

onde escolhemos  $y_0 = 1$ .

Abaixo escrevemos o conjunto de autovetores

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_o^{(1)} &= \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(2)} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ \frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(4)} = \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ -\frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{X}_o^{(5)} &= \begin{pmatrix} -\frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ \frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_o^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ -\frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Escolhendo as mesmas condições iniciais dadas para o caso  $\omega = \omega_c$ , substituindo os autovalores 2.68, 2.69 e 2.70, e os autovetores 2.75 na solução geral 2.45 (todas as raízes são diferentes) e em sua derivada, em  $t = 0$ , chegamos ao conjunto de equações

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_3 \begin{pmatrix} \frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ \frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix} + A_4 \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ -\frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix} + \\ &+ A_5 \begin{pmatrix} -\frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ \frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{pmatrix} + A_6 \begin{pmatrix} \frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ -\frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{i\omega_c}{2} A_1 \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i\omega_c}{2} A_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i\omega_c\alpha}{2} A_3 \begin{pmatrix} \frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ \frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix} - \frac{i\omega_c\alpha}{2} A_4 \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ -\frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\omega_1}{2}A_5 \begin{pmatrix} -\frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ \frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{pmatrix} - \frac{\omega_1}{2}A_6 \begin{pmatrix} \frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ -\frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Desenvolvendo as operações matriciais em 2.76 e 2.77 obtemos as equações

$$2i(A_2 - A_1) + \frac{i\alpha}{2}(A_3 - A_4) + \frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) (A_6 - A_5) = 0, \quad (2.78)$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0, \quad (2.79)$$

$$\frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha}(A_3 - A_4) + \frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) (A_5 - A_6) = 0, \quad (2.80)$$

$$\omega_c(A_1 + A_2) - \frac{\omega_c}{4} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) (A_3 + A_4) - \frac{\omega_c}{4} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) (A_5 + A_6) = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{i\omega_c}{2}(A_1 - A_2) + \frac{i\omega_c\alpha}{2}(A_3 - A_4) + \frac{\omega_1}{2}(A_5 - A_6) = 0, \quad (2.82)$$

e

$$-\frac{5\omega_1}{4}(A_3 + A_4) + \frac{\omega_c^2}{4\omega_1} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) (A_5 + A_6) = v_0. \quad (2.83)$$

Calculando o determinante para o sistema formado pelas equações 2.78, 2.80 e 2.82 encontramos  $\det \neq 0$ , correspondendo a solução trivial para as variáveis  $(A_1 - A_2)$ ,  $(A_3 - A_4)$  e  $(A_5 - A_6)$ , ou seja,

$$A_1 = A_2; \quad A_3 = A_4; \quad A_5 = A_6.$$

A partir da equação 2.83 chegamos a

$$A_3 = \frac{\omega_c^2}{5\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) A_5 - \frac{2v_0}{5\omega_1}. \quad (2.84)$$

Substituindo a relação 2.84 na equação 2.79 encontramos

$$A_1 = - \left\{ \left( \frac{\omega_c^2}{5\omega_1^2} + \frac{6}{5} \right) A_5 - \frac{2v_0}{5\omega_1} \right\}. \quad (2.85)$$

Substituindo as relações 2.84 e 2.85 na equação 2.81 obtemos

$$A_5 = \frac{2\omega_1 v_0}{\omega_c^2} \left(1 + \frac{7\omega_1^2}{\omega_c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2\omega_1 v_0}{\omega_c^2}, \quad (2.86)$$

onde desconsideramos termos de ordem superior a  $(\omega_1/\omega_c)^2$ . Dentro desta aproximação obtemos as constantes  $A_3$  e  $A_1$ .

$$A_3 = \frac{2\omega_1 v_0}{5\omega_c^2} \quad (2.87)$$

e

$$A_1 = -\frac{12\omega_1 v_0}{5\omega_c^2} \quad (2.88)$$

Substituindo as constantes 2.86, 2.87 e 2.88, e os autovetores 2.75, na solução geral 2.45 encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & A_1 [X_o^{(1)} e^{p_1 t} + X_o^{(2)} e^{-p_1 t}] + A_3 [X_o^{(3)} e^{p_3 t} + X_o^{(4)} e^{-p_3 t}] + A_5 [X_o^{(5)} e^{p_5 t} + X_o^{(6)} e^{-p_5 t}] = \\ & = -\frac{12\omega_1 v_0}{5\omega_c^2} \left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_c t/2} + \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_c t/2} \right\} + \\ & + \frac{2\omega_1 v_0}{5\omega_c^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ \frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix} e^{i\omega_c\alpha t/2} + \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha}{2} \\ 1 \\ -\frac{5i\omega_1}{2\omega_c\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\omega_c\alpha t/2} \right\} + \\ & + \frac{2\omega_1 v_0}{\omega_c^2} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ \frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{bmatrix} e^{\omega_1 t/2} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_c}{2\omega_1} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \\ 1 \\ -\frac{\omega_c^2}{2\omega_1^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \end{bmatrix} e^{-\omega_1 t/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Desenvolvendo as operações matriciais acima e utilizando as relações

$$\sinh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

e

$$\cosh(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2},$$

chegamos as seguintes componentes

$$\begin{aligned} x(t) & \approx -\frac{2\omega_1 v_0}{5\omega_c^2} \left\{ 24 \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) + \operatorname{sen} \left[ \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{2\omega_c^2}\right) \frac{\omega_c t}{2} \right] \right\} - \frac{2v_0}{\omega_c} \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \operatorname{senh} \left(\frac{\omega_1 t}{2}\right), \\ y(t) & \approx \frac{4\omega_1 v_0}{5\omega_c^2} \left\{ -6 \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) + \cos \left[ \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{2\omega_c^2}\right) \frac{\omega_c t}{2} \right] + 5 \cosh \left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \right\}, \\ z(t) & \approx -\frac{2\omega_1^2 v_0}{\omega_c^3} \operatorname{sen} \left[ \left(1 + \frac{5\omega_1^2}{2\omega_c^2}\right) \frac{\omega_c t}{2} \right] + \frac{2v_0}{\omega_1} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \operatorname{senh} \left(\frac{\omega_1 t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Se recolocarmos os valores de  $\omega_c$ ,  $\omega_1$  e  $v_0$  usados na figura 2.1, encontraremos  $z \approx 2,2$  m depois de  $\Delta t = 180 \mu\text{s}$ . Portanto, não existe confinamento neste caso.

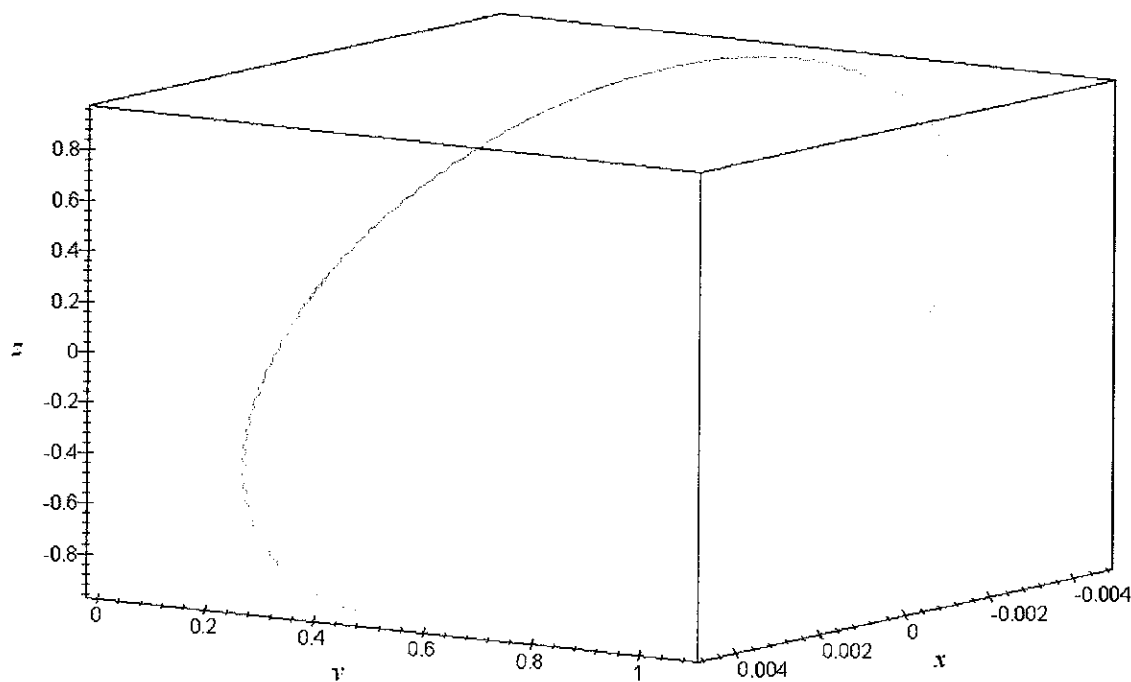


Figura 2.6: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na condição ressonante, ou seja,  $\omega = \omega_c$ , representada no sistema girante de coordenadas, incidindo com velocidade de  $10^4$  m/s na direção  $z$ . A relação entre os módulos dos campos magnéticos aplicados fornece  $\omega_1 = 0,01\omega_c$  indicando a condição  $\omega_1 \ll \omega_c$ .

### 2.2.3 Soluções Numéricas

Nesta subseção discutiremos brevemente algumas características do movimento da partícula do ponto de vista da variação das intensidades dos campos magnéticos envolvidos e ainda da criticalidade das condições iniciais. O cálculo numérico foi realizado utilizando-se o programa *Maple V - Release 3.0*. Sobre as condições iniciais, mostraremos que pequenos desvios da direção da velocidade inicial em relação ao eixo  $z$  não desconfiguram o confinamento da partícula, na condição de ressonância.

Nas figuras 2.6 e 2.7, mostramos as trajetórias, no sistema girante de coordenadas, resultantes da solução numérica das equações de movimento, na ressonância, para o isótopo  $^{235}\text{U}^{3+}$  incidindo com velocidade de  $10^4$  m/s na direção  $z$  quando a relação entre as intensidades dos campos magnéticos aplicados fornece, respectivamente

- $\omega_1 = 0,01\omega_c$ , indicando a condição  $\omega_1 \ll \omega_c$ ;
- $\omega_1 = 0,9\omega_c$ , indicando a condição  $\omega_1 \approx \omega_c$ .

Podemos observar, em ambos os casos, que o movimento da partícula é resultado da

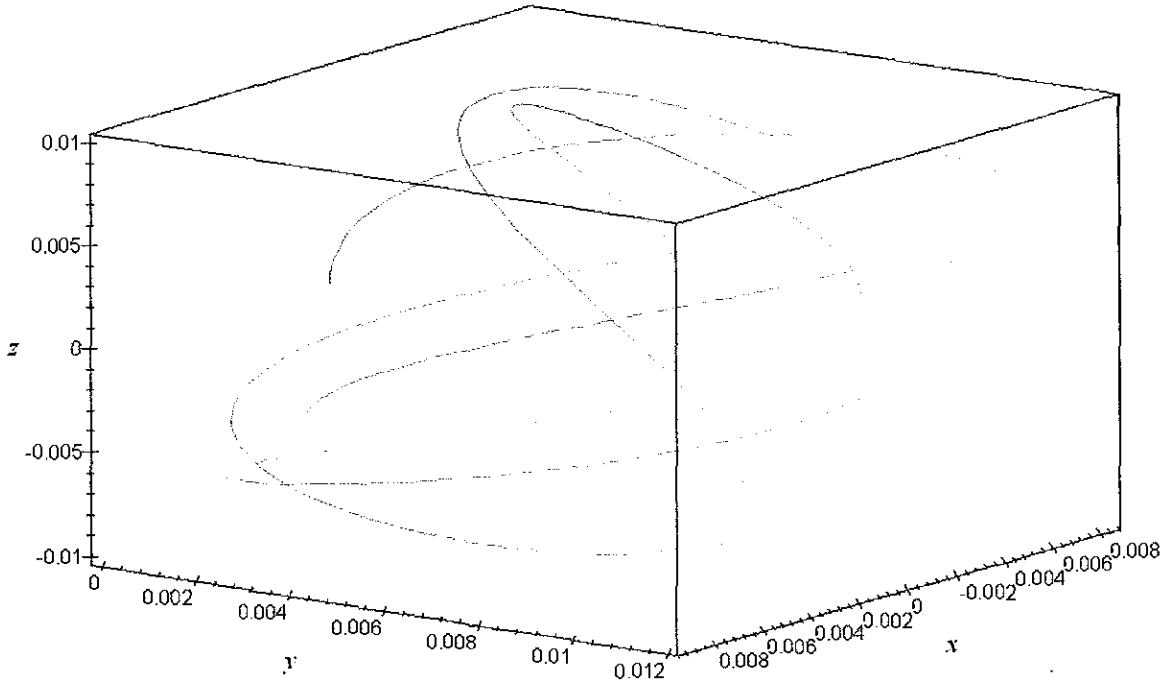


Figura 2.7: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na condição ressonante, ou seja,  $\omega = \omega_c$ , representada no sistema girante de coordenadas, incidindo com velocidade de  $10^4$  m/s na direção  $z$ . A relação entre os módulos dos campos magnéticos aplicados fornece  $\omega_1 = 0,9\omega_c$ , indicando a condição  $\omega_1 \approx \omega_c$ .

composição de dois movimentos oscilantes cujas frequências dependem exclusivamente da carga e da massa da partícula envolvida, e ainda dos campos magnéticos aplicados. No primeiro caso ( $\omega_1 \ll \omega_c$ ) o movimento é uma combinação de dois modos normais de baixa e alta frequências, cuja relação entre as respectivas amplitudes corresponde a um fator 100. No segundo caso ( $\omega_1 \approx \omega_c$ ) o movimento é uma combinação de dois modos normais com frequências da ordem de  $\omega_c$  e amplitudes de oscilação da mesma ordem de grandeza.

A partir de uma breve inspeção do conjunto de equações 2.67 encontramos que a amplitude de oscilação das componentes do vetor posição, no sistema girante de coordenadas, varia com o inverso das frequências. Isto significa que, quando  $\omega_1 \approx \omega_c$ , o volume que contém a trajetória da partícula será aproximadamente  $(10^2)^3$  menor do que no caso onde  $\omega_1 = 0,01\omega_c$ . Comparando as amplitudes de oscilação da componente  $x$  (figuras 2.6 e 2.7, respectivamente) encontramos uma redução de um fator da ordem de 100.

Nas figuras 2.8 e 2.9 mostramos as trajetórias, no sistema girante de coordenadas, resultantes da solução numérica das equações de movimento, na ressonância, para o íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  sob a ação de campos magnéticos cuja relação entre os módulos fornece  $\omega_1 =$

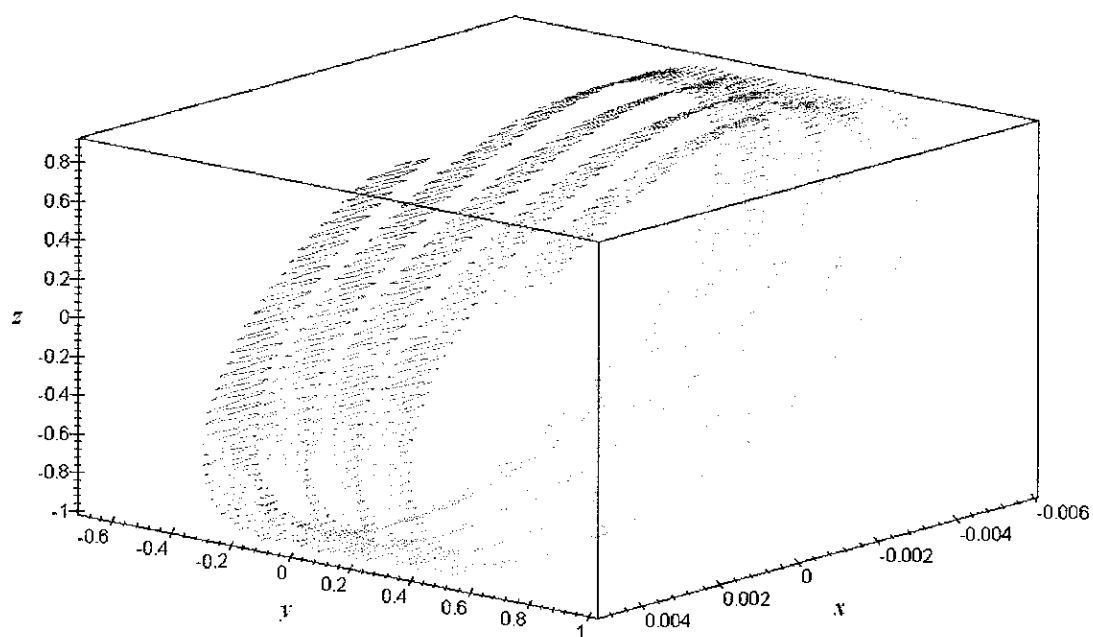


Figura 2.9: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$  na condição ressonante, cuja incidência corresponde a um desvio de 5 graus em relação ao eixo  $z$ , sendo a componente  $z$  igual a 9962 m/s e a componente perpendicular igual a 871 m/s (na direção  $y$ ) resultando em um módulo de  $10^4$  m/s.

A solução 2.46, na condição ressonante, mostra um termo que varia linearmente no tempo. A condição inicial referente à velocidade é fundamental para a existência deste termo. Se a componente de velocidade na direção  $y$  for igual a zero, o termo linear se anula; caso contrário, teremos um arrastamento linear superposto às soluções oscilantes. Este termo aparece na solução geral devido ao fato de a equação de autovalores 2.43 fornecer, na condição ressonante, raízes idênticas  $p_1 = p_2 = 0$  [27].

### 2.2.4 Movimento na Ausência de Campo Elétrico

Em RMN o efeito do campo elétrico sobre os spins não é considerado, já que não temos interação direta entre o campo elétrico e o spin. No movimento de partículas carregadas o seu efeito não pode ser desconsiderado. Mesmo assim, pode ser de interesse acadêmico o movimento destes portadores de carga na ausência do campo elétrico proveniente da oscilação do campo magnético.

Desconsiderando as componentes do campo elétrico  $-(z\omega/2)B_1\mathbf{i}' + (x\omega/2)B_1\mathbf{k}'$  no sistema girante de coordenadas, temos as equações de movimento

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \gamma \left[ \dot{y} \left( B_o + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + x\omega \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) \right], \\ \ddot{y} &= \gamma \left[ \dot{z}B_1 - \dot{x} \left( B_o + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + y\omega \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) \right], \\ \ddot{z} &= -\gamma [\dot{y}B_1 + x\omega B_1].\end{aligned}\tag{2.91'}$$

As soluções do conjunto de equações acopladas 2.91, na condição de ressonância:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_o[\omega_c \text{sen}(\omega_1 t) - \omega_1 \text{sen}(\omega_c t)]}{\omega_c^2 - \omega_1^2}, \\ y(t) &= \frac{v_o\omega_1[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_c t)]}{\omega_c^2 - \omega_1^2}, \\ z(t) &= \frac{v_o \text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1},\end{aligned}$$

onde usamos as mesmas condições iniciais anteriores:  $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = v_o$ . Usando a aproximação  $\omega_c \gg \omega_1$  encontramos

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_o}{\omega_c} \text{sen}(\omega_1 t) - \frac{v_o\omega_1}{\omega_c^2} \text{sen}(\omega_c t), \\ y(t) &= \frac{v_o\omega_1}{\omega_c^2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_c t)]\end{aligned}$$



A solução 2.46, na condição ressonante, mostra um termo que varia linearmente no tempo. A condição inicial referente à velocidade é fundamental para a existência deste termo. Se a componente de velocidade na direção  $y$  for igual a zero, o termo linear se anula; caso contrário, teremos um arrastamento linear superposto às soluções oscilantes. Este termo aparece na solução geral devido ao fato de a equação de autovalores 2.43 fornecer, na condição ressonante, raízes idênticas  $p_1 = p_2 = 0$  [27].

## 2.2.4 Movimento na Ausência de Campo Elétrico

Em RMN o efeito do campo elétrico sobre os spins não é considerado, já que não temos interação direta entre o campo elétrico e o spin. No movimento de partículas carregadas o seu efeito não pode ser desconsiderado. Mesmo assim, pode ser de interesse acadêmico o movimento destes portadores de carga na ausência do campo elétrico proveniente da oscilação do campo magnético.

Desconsiderando as componentes do campo elétrico  $-(z\omega/2)B_1\mathbf{i}' + (x\omega/2)B_1\mathbf{k}'$  no sistema girante de coordenadas, temos as equações de movimento

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \gamma \left[ \dot{y} \left( B_o + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + x\omega \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) \right], \\ \ddot{y} &= \gamma \left[ \dot{z}B_1 - \dot{x} \left( B_o + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + y\omega \left( B_o + \frac{\omega}{\gamma} \right) \right], \\ \ddot{z} &= -\gamma [\dot{y}B_1 + x\omega B_1].\end{aligned}\tag{2.91}$$

As soluções do conjunto de equações acopladas 2.91, na condição de ressonância, são

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_o[\omega_c \text{sen}(\omega_1 t) - \omega_1 \text{sen}(\omega_c t)]}{\omega_c^2 - \omega_1^2}, \\ y(t) &= \frac{v_o\omega_1[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_c t)]}{\omega_c^2 - \omega_1^2}, \\ z(t) &= \frac{v_o \text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1},\end{aligned}\tag{2.92}$$

onde usamos as mesmas condições iniciais anteriores:  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = v_o$ . Usando a aproximação  $\omega_c \gg \omega_1$  encontramos

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_o}{\omega_c} \text{sen}(\omega_1 t) - \frac{v_o\omega_1}{\omega_c^2} \text{sen}(\omega_c t), \\ y(t) &= \frac{v_o\omega_1}{\omega_c^2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_c t)],\end{aligned}\tag{2.93}$$

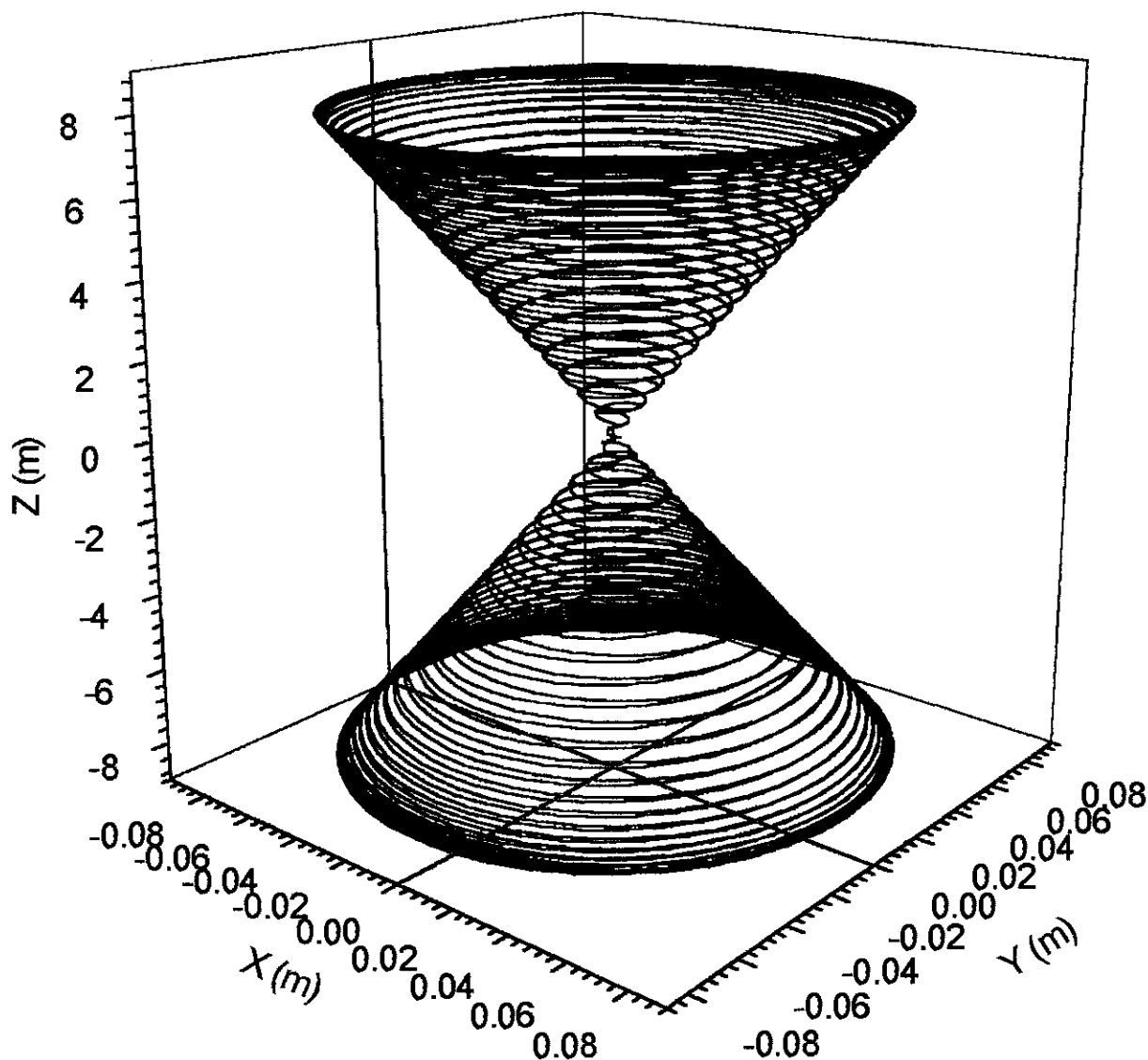


Figura 2.10: Trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$ , no sistema de coordenadas do laboratório, submetido a campos estático e oscilante de módulos  $B_0 = 1$  T e  $B_1 = 0,01$  T, respectivamente. Neste caso o campo elétrico proveniente da oscilação do campo magnético não é considerado. As condições iniciais são  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , com velocidade inicial  $v_0 = 10^4$  m/s na direção  $z$ .

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t).$$

A figura 2.10 mostra a trajetória do íon  $^{235}\text{U}^{3+}$ , no sistema de coordenadas do laboratório, submetido a campos estático e oscilante de módulos  $B_0 = 1 \text{ T}$  e  $B_1 = 0,01 \text{ T}$ , respectivamente. O isótopo incide na direção  $z$  com velocidade inicial de  $10^4 \text{ m/s}$ . A trajetória se dá sobre uma superfície que assemelha-se à de um cone estreito e tem componentes de alta frequência. Para termos uma idéia disto, podemos desconsiderar os termos de baixa amplitude no conjunto de equações 2.93. A partir daí obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \frac{v_0}{\omega_c} \text{sen}(\omega_1 t), \\ y(t) &\approx 0, \\ z(t) &= \frac{v_0}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t). \end{aligned} \tag{2.94}$$

A partir do conjunto de equações 2.94 e utilizando a transformação de coordenadas para o sistema do laboratório 2.22, encontramos

$$\begin{aligned} X(t) &\approx \frac{v_0}{\omega_c} \text{sen}(\omega_1 t) \cos(\omega_0 t), \\ Y(t) &\approx \frac{v_0}{\omega_c} \text{sen}(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_0 t), \\ Z(t) &= \frac{v_0}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t). \end{aligned} \tag{2.95}$$

Calculando  $X^2 + Y^2$ , obtemos

$$X^2 + Y^2 \approx \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \text{sen}^2(\omega_1 t). \tag{2.96}$$

Substituindo  $v_0 \text{sen}(\omega_1 t) = \omega_1 Z(t)$ , chegamos a

$$Z \approx \frac{\omega_c}{\omega_1} \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{2.97}$$

que é a equação de um cone cujo ângulo  $\alpha$  entre o eixo  $z$  e a superfície é aproximadamente

$$\alpha \approx \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_1}{\omega_c} \right). \tag{2.98}$$

Apesar de não considerarmos o campo elétrico, temos ainda o confinamento da partícula na condição ressonante.

### 2.2.5 Campo Pulsado

É interessante considerar brevemente a aplicação dos campos magnéticos oscilantes na forma de pulsos. Nas referências [10, 12], na *ausência* de campo elétrico, é mostrado que um efeito transiente nas componentes da velocidade, similar aos chamados ecos de spin em RMN (equações que possuem a mesma forma funcional), pode ser esperado na corrente elétrica ou corrente de íons. Da mesma maneira, podemos esperar que o uso de campos pulsados possa ser uma maneira útil de controlar a trajetória da partícula no vácuo.

A partir das componentes do vetor posição no sistema girante de coordenadas podemos calcular as componentes da velocidade e comparar com as componentes do vetor densidade de corrente elétrica (proporcional ao vetor velocidade), mostrada nas referências [10, 12]. Para isto, devemos lembrar que nas referências [10, 12] o vetor velocidade foi mantido invariante sob a transformação (ver seção 2.1.1). Para que seja possível uma comparação da velocidade da partícula é necessário algo mais do que simplesmente derivar em relação ao tempo as componentes do vetor posição dadas no conjunto de equações 2.93. A velocidade da partícula é calculada a partir de A.7 como

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.99)$$

onde  $\delta\mathbf{r}/\delta t = \dot{x}\mathbf{i}' + \dot{y}\mathbf{j}' + \dot{z}\mathbf{k}'$ . Sendo  $\boldsymbol{\omega} = \omega_c\mathbf{k}' = \omega_c\mathbf{k}$ , as componentes da velocidade escritas no sistema girante de coordenadas são

$$\begin{aligned} V_x(t) &= \frac{\delta x}{\delta t} - y\omega_c = 0, \\ V_y(t) &= \frac{\delta y}{\delta t} + x\omega_c = v_o \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_c^2}\right) \text{sen}(\omega_1 t) \approx v_o \text{sen}(\omega_1 t), \\ V_z(t) &= v_o \text{cos}(\omega_1 t), \end{aligned} \quad (2.100)$$

as quais concordam com [10, 12] para  $t = \tau$ .

Esta expressão é modificada se o campo elétrico for incluído. Note que na ressonância, as expressões 2.26 e 2.25 tornam-se

$$\mathbf{E}_{ef} = -\frac{z\omega_c}{2} B_1 \mathbf{i}' - \frac{x\omega_c B_1}{2} \mathbf{k}', \quad (2.101)$$

e

$$\mathbf{B}_{ef} = B_1 \mathbf{i}' - B_o \mathbf{k}'. \quad (2.102)$$

Assim, ao contrário do que acontece quando o campo elétrico não é considerado [12], a componente  $z$  de  $\mathbf{B}_{ef}$  não se anula. Substituindo as componentes do vetor posição dadas pelo conjunto de equações 2.67 na equação 2.99, encontramos

$$\begin{aligned} V_x(t) &= \frac{\delta x}{\delta t} - y\omega_c = \frac{2\omega_c v_o}{3\omega_1} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{2\omega_c^2}\right) \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right) - 1\right] \approx \frac{2\omega_c v_o}{3\omega_1} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right) - 1\right], \\ V_y(t) &= \frac{\delta y}{\delta t} + x\omega_c = \frac{2\sqrt{3}v_o}{3} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right), \\ V_z(t) &= v_o \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.103)$$

A expressão completa para a velocidade neste caso, para  $t = \tau$ , é

$$\mathbf{V}(\tau) = \frac{2\omega_c v_o}{3\omega_1} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 \tau}{2}\right) - 1\right] \mathbf{i}' + \frac{2\sqrt{3}v_o}{3} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 \tau}{2}\right) \mathbf{j}' + v_o \cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 \tau}{2}\right) \mathbf{k}'. \quad (2.104)$$

O movimento na ausência do pulso torna-se particularmente simples. Se tomamos  $\omega = -\gamma B_o$  e  $B_1 = 0$  nas equações de movimento 2.24, obtemos

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y},$$

$$\ddot{y} = \omega_c \dot{x},$$

$$\ddot{z} = 0.$$

Entretanto, vemos que  $\dot{z}$  é constante, e, fazendo  $\sqrt{3}\omega_1 \tau/2 \approx \pi/2$  na expressão 2.104, podemos manter  $\dot{z} = 0$ .

## 2.2.6 Comentários

Até aqui, obtivemos soluções analíticas para o movimento de uma partícula carregada em campos elétrico e magnético oscilantes. O problema é simplificado quando usamos o conceito de um sistema girante de coordenadas, como em RMN [22]. Neste sistema de coordenadas, podemos descrever o movimento em termos de uma *lagrangeana efetiva*, e a forma da força de Lorentz é preservada. Reconhecemos então a similaridade entre as equações de movimento da partícula e aquelas de um conjunto de três osciladores harmônicos acoplados com termos de amortecimento anisotrópicos. O movimento da partícula é, então, descrito como uma superposição de autovetores de uma matriz dinâmica.

Mostramos que, na ressonância, a partícula é confinada na região de atuação dos campos. Este é um ponto que merece uma discussão mais aprofundada. O problema

de confinamento de partícula carregada é importante em física atômica e de plasma; o confinamento normalmente ocorre quando existe um gradiente de campo magnético, o qual dá origem aos chamados *espelhos magnéticos* [21]. Campos magnéticos dependentes da posição foram também aplicados em uma configuração projetada para resfriamento ressonante de átomos neutros [25]. Podemos sugerir uma analogia se consideramos o campo elétrico na ressonância (Equação 2.101), escrito na forma

$$\mathbf{E}_{ef} = \frac{1}{2}v_o \left( \frac{B_o}{\lambda_1} x \mathbf{i}' - \frac{B_o}{\lambda_1} z \mathbf{k}' \right) \times \mathbf{j}', \quad (2.105)$$

onde  $\lambda_1 \equiv v_o/\omega_1$  tem dimensão de comprimento e fornece a ordem de grandeza da extensão da região de confinamento (ver a componente  $z$  das equações 2.67).

A grandeza entre parênteses pode ser vista como um campo magnético dependente da posição, com gradiente de campo dado por

$$B'_o = \frac{B_o}{\lambda_1}.$$

Por exemplo, para um elétron em um campo estático  $B_o = 1$  T,  $B_1 = 10^{-3}$  T e  $v_o = 10^7$  m/s, encontramos  $B'_o = 2.0 \times 10^{-4}$  T/m, enquanto que para  $^{235}\text{U}^{3+}$  com  $v_o = 10^4$  m/s teríamos  $B'_o = 1.2 \times 10^{-3}$  T/m.

Assim, a força elétrica efetiva pode ser escrita na sugestiva forma

$$q\mathbf{E}_{ef} = -\frac{1}{2}qv_o\mathbf{j}' \times \mathbf{B}_c(x, z), \quad (2.106)$$

onde  $\mathbf{B}_c(x, z)$  é o campo magnético dependente da posição da equação 2.105. Então, na ressonância, o campo elétrico efetivo atuando sobre a partícula aparece como um campo magnético dependente da posição.

Uma importante consideração pode ser feita no que se refere à estabilidade dos resultados discutidos na subseção 2.2.2, considerando as condições iniciais. O confinamento ocorre estritamente para partículas com velocidade inicial sobre o plano formado por  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{B}_1$  no sistema de coordenadas girantes (em nosso caso, o plano  $xz$ ). Por outro lado a partícula ressonante terá uma velocidade de escape, a qual será *linear* em  $t$ , ou *exponencial* em  $t$ , para a não ressonante. Apenas para dar um exemplo numérico, se permitirmos que a velocidade da partícula desvie  $1^\circ$  na direção  $y$ , esta se afastará aproximadamente 2 m, depois de  $150 \mu\text{s}$ , para o caso não ressonante, enquanto que, para o caso ressonante, o afastamento será apenas de cerca de 2 cm.

Finalmente, devemos mencionar que possíveis aplicações das soluções apresentadas podem ser úteis em confinamento de átomos para evaporação por resfriamento [25, 28,

# Capítulo 3

## Resultados Teóricos II: Tratamento Quântico

Neste capítulo tratamos o problema do movimento da carga em campos oscilantes do ponto de vista da Mecânica Quântica. A transformação equivalente àquela feita no formalismo da mecânica Clássica para o sistema girante de coordenadas é, neste caso, feita diretamente sobre a equação de Schrödinger e permite a derivação da função de onda no sistema de coordenadas do laboratório.

### 3.1 Movimento de Partículas Carregadas em Campos Magnéticos Oscilantes: Tratamento Quântico

#### 3.1.1 Transformação do Hamiltoniano

Em Mecânica Quântica o problema é abordado utilizando-se o formalismo hamiltoniano. A partir da lagrangeana dada na equação 2.28, podemos obter o hamiltoniano [26]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2m} (P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2) - \frac{q}{2m} [B_1(L_X \cos(\omega t) + L_Y \sin(\omega t)) + B_0 L_Z] + \\ & + \frac{q^2}{8m} \{ B_0^2 (X^2 + Y^2) + B_1^2 Z^2 - 2B_0 B_1 Z [X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)] + \\ & + B_1^2 [Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)]^2 \}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $L_X = YP_Z - ZP_Y$ ,  $L_Y = ZP_X - XP_Z$  e  $L_Z = XP_Y - YP_X$  são as componentes do momento angular canônico da partícula. Este hamiltoniano deve ser substituído na equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (3.2)$$

A dependência temporal explícita do hamiltoniano inviabiliza uma solução analítica para a função de onda.

Aplicando o operador  $e^{i\omega t L_Z/\hbar}$  pela esquerda na equação 3.2 encontramos

$$e^{i\omega t L_Z/\hbar} \left( i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = e^{i\omega t L_Z/\hbar} \mathcal{H}\psi. \quad (3.3)$$

Aplicando o operador identidade  $\tilde{1} = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} e^{i\omega t L_Z/\hbar}$  no lado direito da equação 3.3 e definindo a função de onda  $\psi'$  através da relação

$$e^{i\omega t L_Z/\hbar} \psi = \psi'. \quad (3.4)$$

obtemos

$$e^{i\omega t L_Z/\hbar} \left( i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left( e^{i\omega t L_Z/\hbar} \mathcal{H} e^{-i\omega t L_Z/\hbar} \right) \left( e^{i\omega t L_Z/\hbar} \psi \right). \quad (3.5)$$

Definindo  $\mathcal{H}' = e^{i\omega t L_Z/\hbar} \mathcal{H} e^{-i\omega t L_Z/\hbar}$  e usando a relação 3.4, chegamos a

$$e^{i\omega t L_Z/\hbar} \left( i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \mathcal{H}' \psi'. \quad (3.6)$$

Calculando a derivada parcial em relação ao tempo na equação 3.4, obtemos

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = e^{i\omega t L_Z/\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i\omega L_Z}{\hbar} e^{i\omega t L_Z/\hbar} \psi \Rightarrow e^{i\omega t L_Z/\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{i\omega L_Z}{\hbar} \psi'. \quad (3.7)$$

Substituindo 3.7 em 3.6, e usando novamente a relação 3.4, encontramos

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\mathcal{H}' - \omega L_Z) \psi' \equiv \mathcal{H}'_{ef} \psi', \quad (3.8)$$

onde  $\mathcal{H}'_{ef} = \mathcal{H}' - \omega L_Z$ .

Usando as relações (veja Apêndice D)

$$X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} X e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.9)$$

$$[Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)]^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Y^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.10)$$

$$X^2 + Y^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} (X^2 + Y^2) e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.11)$$

$$Z^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Z^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.12)$$



$$L_X \cos(\omega t) + L_Y \sin(\omega t) = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} L_X e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.13)$$

$$L_Z = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} L_Z e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.14)$$

$$P_X^2 + P_Y^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} (P_X^2 + P_Y^2) e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.15)$$

$$P_Z^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_Z^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (3.16)$$

podemos reescrever o hamiltoniano  $\mathcal{H}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2m} e^{-i\omega t L_Z/\hbar} (P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2) e^{i\omega t L_Z/\hbar} - \frac{q}{2m} \left[ B_1 e^{-i\omega t L_Z/\hbar} L_X e^{i\omega t L_Z/\hbar} + \right. \\ & \left. + B_0 e^{-i\omega t L_Z/\hbar} L_Z e^{i\omega t L_Z/\hbar} \right] + \frac{q^2}{8m} \left\{ B_0^2 e^{-i\omega t L_Z/\hbar} (X^2 + Y^2) e^{i\omega t L_Z/\hbar} + \right. \\ & \left. + B_1^2 e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Z^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar} - 2B_0 B_1 e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Z X e^{i\omega t L_Z/\hbar} + B_1^2 e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Y^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar} \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando os operadores exponenciais  $e^{i\omega t L_Z/\hbar}$  e  $e^{-i\omega t L_Z/\hbar}$  em 3.17 pela esquerda e direita, respectivamente, o hamiltoniano  $\mathcal{H}'$  será<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' \equiv & e^{i\omega t L_Z/\hbar} \mathcal{H}(t) e^{-i\omega t L_Z/\hbar} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_0^2}{8} (X^2 + Y^2) + \\ & + \frac{m\gamma^2 B_1^2}{8} (Y^2 + Z^2) - \frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4} X Z - \frac{\gamma B_0}{2} L_Z - \frac{\gamma B_1}{2} L_X, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde  $\gamma = q/m$ . Este hamiltoniano representa uma partícula carregada movendo-se em um campo magnético *estático*  $\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_0 \mathbf{k}$ . A operação acima pode ser interpretada como uma transformação do hamiltoniano para o sistema girante de coordenadas com frequência  $\omega$ .

Como  $\mathcal{H}'_{ef} = \mathcal{H}' - \omega L_Z$  é independente do tempo, a solução de (3.8) será

$$\psi'(t) = e^{-i\mathcal{H}'_{ef} t/\hbar} \psi(0) = e^{-i(\mathcal{H}' - \omega L_Z) t/\hbar} \psi(0), \quad (3.19)$$

onde substituímos  $\psi'(0) = \psi(0)$ . Conseqüentemente, a função de onda no *sistema de coordenadas do laboratório* será

$$\psi(t) = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} e^{-i(\mathcal{H}' - \omega L_Z) t/\hbar} \psi(0). \quad (3.20)$$

Deve-se notar que, sendo  $[L_Z, \mathcal{H}'] \neq 0$ , os dois operadores exponenciais na equação (3.20) não podem ser reunidos em um único operador.

Analisaremos, agora, as propriedades de  $\mathcal{H}'_{ef}$ ,

$$\mathcal{H}'_{ef} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_0^2}{8} (X^2 + Y^2) + \frac{m\gamma^2 B_1^2}{8} (Y^2 + Z^2) -$$

<sup>1</sup>Para o tratamento quântico mantemos letras maiúsculas até o fim deste capítulo.

$$-\frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4} XZ - \frac{\gamma \Delta B}{2} L_Z - \frac{\gamma B_1}{2} L_X, \quad (3.21)$$

onde  $\Delta B \equiv B_0 + 2\omega/\gamma$ . Somando e subtraindo a quantidade

$$\frac{m\gamma^2}{8} \left( \frac{4\omega^2}{\gamma^2} + \frac{4\omega B_0}{\gamma} \right) (X^2 + Y^2) - \frac{m\gamma B_1}{4} 2\omega XZ,$$

o hamiltoniano efetivo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{ef} = & \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 \Delta B^2}{8} (X^2 + Y^2) + \frac{m\gamma^2 B_1^2}{8} (Y^2 + Z^2) - \\ & - \frac{m\gamma^2 \Delta B B_1}{4} XZ - \frac{\gamma \Delta B}{2} L_Z - \frac{\gamma B_1}{2} L_X + q \frac{\omega}{2} \left[ B_1 XZ - \left( \frac{\omega}{\gamma} + B_0 \right) (X^2 + Y^2) \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

o qual, por sua vez, tem a forma geral

$$\mathcal{H}'_{ef} = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q\mathbf{A}_{ef})^2 + q\phi_{ef}, \quad (3.23)$$

onde o *potencial escalar efetivo* é dado por

$$\phi_{ef} = \frac{\omega}{2} \left[ B_1 XZ - \left( \frac{\omega}{\gamma} + B_0 \right) (X^2 + Y^2) \right], \quad (3.24)$$

e  $\mathbf{A}_{ef}$  é o *potencial vetor efetivo*. As componentes de  $\mathbf{A}_{ef}$  podem ser obtidas comutando-se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  com  $\mathcal{H}'_{ef}$  e comparando o resultado com a definição do momento angular canônico  $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{R}} + q\mathbf{A}$ . Por exemplo,

$$i\hbar \dot{X} = [X, \mathcal{H}'_{ef}] = \frac{1}{2m} 2i\hbar P_X + \frac{\gamma \Delta B}{2} i\hbar Y$$

e

$$P_X = m\dot{X} - q \frac{\Delta B}{2} Y.$$

Conseqüentemente,

$$A_{ef,X} = -\frac{\Delta B}{2} Y.$$

Repetindo o procedimento para as outras componentes, obtemos

$$A_{ef,Y} = -\frac{B_1}{2} Z + \frac{\Delta B}{2} X,$$

$$A_{ef,Z} = \frac{B_1}{2} Y,$$

ou seja,

$$\mathbf{A}_{ef} = -\frac{1}{2} \mathbf{R} \times \mathbf{B}_{ef},$$

onde  $\mathbf{B}_{ef} = B_1\mathbf{i} + \Delta B\mathbf{k}$ . Estes resultados são os *mesmos* do que aqueles obtidos na referência [12], a única diferença sendo o fator 2 na definição de  $\Delta B$ .

Escrito na forma da equação 3.22, o hamiltoniano exibe os efeitos do campo elétrico (devido à dependência espacial do campo elétrico, foi necessário considerar invariante o vetor posição em lugar do vetor velocidade). Contrariamente ao que acontece quando este não é considerado [12], duas frequências de ressonância são mostradas. Na frequência de Larmor,  $\Delta B = 0$ , e o hamiltoniano 3.22 torna-se

$$\mathcal{H}'_{ef} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_1^2}{8}(Y^2 + Z^2) - \frac{\gamma B_1}{2}L_X - \frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4}XZ + \frac{m\gamma^2 B_0^2}{4}(X^2 + Y^2), \quad (3.25)$$

que representa uma partícula em um campo magnético estático ao longo da direção  $X$  ( $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}$ ), correspondente aos três primeiros termos, e sob a ação de um potencial elétrico, correspondente aos dois últimos. Os autoestados da partícula neste caso não podem ser facilmente encontrados. Por outro lado, na frequência de cíclotron ( $\omega = \omega_c = -\gamma B_0$ ), o segundo termo de  $\phi_{ef}$  na equação 3.24 se anula, e o hamiltoniano se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{ef} = & \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_0^2}{8}(X^2 + Y^2) + \frac{m\gamma^2 B_1^2}{8}(Y^2 + Z^2) + \\ & + \frac{\gamma B_0}{2}L_Z - \frac{\gamma B_1}{2}L_X - \frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4}XZ, \end{aligned} \quad (3.26)$$

o qual representa a partícula movendo-se em um campo *magnético estático*  $\mathbf{B}_{ef} = B_1\mathbf{i} - B_0\mathbf{k}$  e ainda sob a ação de um potencial elétrico  $\phi_{ef} = -\gamma B_0 B_1 XZ/2$ , que pode ser visto como um termo de acoplamento entre os campos.

### 3.1.2 Equações de Movimento na Ressonância

A partir do hamiltoniano 3.26 podemos obter as equações de movimento para os valores esperados dos operadores de posição. Para um dado operador  $A$  temos que [31]

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, \mathcal{H}(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle. \quad (3.27)$$

Para os operadores posição e momento canônico,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}$  respectivamente, temos

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{R}, \mathcal{H}(t)] \rangle, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{P}, \mathcal{H}(t)] \rangle. \quad (3.29)$$

Primeiramente obteremos as equações de movimento para os operadores. Aplicando 3.28 para o operador  $X$ , temos

$$\dot{X} = \frac{1}{i\hbar}[X, \mathcal{H}'_{ef}] = \frac{1}{2mi\hbar}[X, P_X^2] + \frac{\gamma B_0}{2i\hbar}[X, L_Z]. \quad (3.30)$$

Sabemos que  $[X, L_Z] = -i\hbar Y$  (relação D.8) e, ainda,

$$[X, P_X P_X] = [X, P_X]P_X + P_X[X, P_X] = 2i\hbar P_X, \quad (3.31)$$

onde usamos a propriedade D.4 e a relação de comutação D.2. Substituindo as relações D.8 e 3.31 na equação 3.30, encontramos

$$\dot{X} = \frac{P_X}{m} - \frac{\gamma B_0}{2} Y. \quad (3.32)$$

Calculando a equação 3.29 para o operador  $P_X$ , obtemos

$$\dot{P}_X = \frac{1}{i\hbar}[P_X, \mathcal{H}'_{ef}] = \frac{m\gamma^2 B_0^2}{8i\hbar}[P_X, X^2] + \frac{\gamma B_0}{2i\hbar}[P_X, L_Z] - \frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4i\hbar}[P_X, XZ]. \quad (3.33)$$

Conhecemos  $[P_X, L_Z] = -i\hbar P_Y$  (relação D.39) e os comutadores

$$[P_X, XX] = [P_X, X]X + X[P_X, X] = -2i\hbar X, \quad (3.34)$$

$$[P_X, XZ] = [P_X, X]Z + X[P_X, Z] = -i\hbar Z. \quad (3.35)$$

Substituindo as relações D.39, 3.34 e 3.35 na equação 3.33, chegamos a

$$\dot{P}_X = -\frac{m\gamma^2 B_0^2}{4} X - \frac{\gamma B_0}{2} P_Y + \frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4} Z. \quad (3.36)$$

Podemos proceder de maneira análoga para obter as equações para os operadores  $Y$  e  $P_Y$ . Para o primeiro, encontramos

$$\dot{Y} = \frac{1}{i\hbar}[Y, \mathcal{H}'_{ef}] = \frac{1}{2mi\hbar}[Y, P_Y^2] + \frac{\gamma B_0}{2i\hbar}[Y, L_Z] - \frac{\gamma B_1}{2i\hbar}[Y, L_X]. \quad (3.37)$$

Conhecemos a relação D.11,  $[Y, L_Z] = i\hbar X$ , e os comutadores

$$[Y, P_Y P_Y] = [Y, P_Y]P_Y + P_Y[Y, P_Y] = 2i\hbar P_Y, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} [Y, L_X] &= [Y, Y P_Z] - [Y, Z P_Y] = \\ &= \{[Y, Y]P_Z + Y[Y, P_Z]\} - \{[Y, Z]P_Y + Z[Y, P_Y]\} = -i\hbar Z, \end{aligned} \quad (3.39)$$

As relações de comutação  $[P_Z, Z^2]$ ,  $[P_Z, L_X]$  e  $[P_Z, XZ]$  são dadas por

$$[P_Z, ZZ] = [P_Z, Z]Z + Z[P_Z, Z] = -2i\hbar Z, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} [P_Z, L_X] &= [P_Z, YP_Z] + [P_Z, ZP_Y] = \\ &= \{[P_Z, Y]P_Z + Y[P_Z, P_Z]\} - \{[P_Z, Z]P_Y + Z[P_Z, P_Y]\} = i\hbar P_Y, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$[P_Z, XZ] = [P_Z, X]Z + X[P_Z, Z] = -i\hbar X. \quad (3.52)$$

Substituindo as relações 3.50, 3.51 e 3.52 na equação 3.49, obtemos

$$\dot{P}_Z = -\frac{m\gamma^2 B_1^2}{4} Z - \frac{\gamma B_1}{2} P_Y + \frac{m\gamma^2 B_0 B_1}{4} X. \quad (3.53)$$

A partir das equações 3.32, 3.40 e 3.48, encontramos as seguintes relações para as componentes do momento canônico

$$P_X = m\dot{X} + m\frac{\gamma B_0}{2} Y, \quad (3.54)$$

$$P_Y = m\dot{Y} - m\frac{\gamma B_0}{2} X - m\frac{\gamma B_1}{2} Z, \quad (3.55)$$

$$P_Z = m\dot{Z} + m\frac{\gamma B_1}{2} Y. \quad (3.56)$$

Substituindo as equações 3.54, 3.55 e 3.56 nas equações 3.36, 3.44 e 3.53, e calculando o valor médio dos operadores envolvidos, encontramos o conjunto das equações de movimento mostrado abaixo

$$\begin{aligned} \langle \ddot{X} \rangle &= -\gamma B_0 \langle \dot{Y} \rangle + \frac{\gamma^2 B_0 B_1}{2} \langle Z \rangle, \\ \langle \ddot{Y} \rangle &= \gamma B_1 \langle \dot{Z} \rangle + \gamma B_0 \langle \dot{X} \rangle, \\ \langle \ddot{Z} \rangle &= -\gamma B_1 \langle \dot{Y} \rangle + \frac{\gamma^2 B_0 B_1}{2} \langle X \rangle. \end{aligned} \quad (3.57)$$

O conjunto de equações 3.57 é idêntico àquele obtido no Capítulo 2 (conjunto de equações 2.24) na condição de ressonância, ou seja, quando a frequência do campo oscilante  $B_1$  se iguala à frequência de ciclotron da partícula carregada ( $\omega = \omega_c = -\gamma B_0$ ).

### 3.1.3 Rotação Unitária Aplicada ao Hamiltoniano Efetivo

O hamiltoniano 3.26 pode ser simplificado a partir da aplicação de operadores exponenciais equivalentes a uma rotação de um ângulo  $\theta = \arctg|B_1|/|B_0|$  em torno do eixo  $y$ . O hamiltoniano 3.26 pode ser reescrito como

$$\mathcal{H}'_{ef} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2}{8}(B_0X - B_1Z)^2 + \frac{m\gamma^2}{8}(B_0^2 + B_1^2)Y^2 + \frac{\gamma}{2}(B_0L_Z - B_1L_X). \quad (3.58)$$

Definindo  $B_{ef}^2 = B_0^2 + B_1^2$ , podemos escrever 3.58 como

$$\mathcal{H}'_{ef} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} \left( \frac{B_0}{B_{ef}}X - \frac{B_1}{B_{ef}}Z \right)^2 + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} Y^2 + \frac{\gamma B_{ef}}{2} \left( \frac{B_0}{B_{ef}}L_Z - \frac{B_1}{B_{ef}}L_X \right). \quad (3.59)$$

Sendo  $\text{sen}\theta = B_1/B_{ef}$  e  $\text{cos}\theta = B_0/B_{ef}$ , temos 3.59 na forma

$$\mathcal{H}'_{ef} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} (X\text{cos}\theta - Z\text{sen}\theta)^2 + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} Y^2 + \frac{\gamma B_{ef}}{2} (L_Z\text{cos}\theta - L_X\text{sen}\theta). \quad (3.60)$$

Utilizando as relações

$$X\text{cos}\theta - Z\text{sen}\theta = e^{-i\theta L_Y/\hbar} X e^{i\theta L_Y/\hbar}, \quad (3.61)$$

$$L_Z\text{cos}\theta - L_X\text{sen}\theta = e^{i\theta L_Y/\hbar} L_Z e^{-i\theta L_Y/\hbar}, \quad (3.62)$$

$$P^2 = e^{-i\theta L_Y/\hbar} P^2 e^{i\theta L_Y/\hbar}, \quad (3.63)$$

$$Y^2 = e^{-i\theta L_Y/\hbar} Y^2 e^{i\theta L_Y/\hbar}, \quad (3.64)$$

que podem ser obtidas de forma análoga àquelas mostradas no Apêndice D, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{ef} &= e^{-i\theta L_Y/\hbar} \frac{P^2}{2m} e^{i\theta L_Y/\hbar} + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} e^{-i\theta L_Y/\hbar} X^2 e^{i\theta L_Y/\hbar} + \\ &+ \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} e^{-i\theta L_Y/\hbar} Y^2 e^{i\theta L_Y/\hbar} + \frac{\gamma B_{ef}}{2} e^{i\theta L_Y/\hbar} L_Z e^{-i\theta L_Y/\hbar}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Aplicando os operadores exponenciais  $e^{i\theta L_Y/\hbar}$  e  $e^{-i\theta L_Y/\hbar}$ , respectivamente, obtemos

$$\mathcal{H}''_{ef} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8} (X^2 + Y^2) + \frac{\gamma B_{ef}}{2} e^{i2\theta L_Y/\hbar} L_Z e^{-i2\theta L_Y/\hbar}. \quad (3.66)$$

O último termo em 3.66 é dado por

$$e^{i2\theta L_Y/\hbar} L_Z e^{-i2\theta L_Y/\hbar} = L_Z \text{cos}2\theta - L_X \text{sen}2\theta = L_Z \frac{B_0^2 - B_1^2}{B_{ef}^2} - L_X \frac{2B_0 B_1}{B_{ef}^2}, \quad (3.67)$$

onde usamos as relações trigonométricas

$$\text{cos}2\theta = \text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta,$$

$$\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\text{cos}\theta.$$

Quando  $B_1 \ll B_0$ , temos que

$$\frac{B_0^2 - B_1^2}{B_0^2 + B_1^2} \approx 1 - \frac{2B_1^2}{B_0^2},$$

$$\frac{2B_0B_1}{B_0^2 + B_1^2} \approx \frac{2B_1}{B_0} \left(1 - \frac{B_1^2}{B_0^2}\right).$$

Desconsiderando os termos proporcionais a  $(B_1/B_0)^2$ , temos o hamiltoniano 3.66 escrito como

$$\mathcal{H}_{ef}'' = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\gamma^2 B_{ef}^2}{8}(X^2 + Y^2) + \frac{\gamma B_{ef}}{2}L_Z - \gamma B_1 L_X = \mathcal{H}_{B_{ef}} - \gamma B_1 L_X. \quad (3.68)$$

O hamiltoniano 3.68 pode ser visto como a combinação do hamiltoniano de uma partícula em um campo magnético efetivo  $\mathbf{B} = -B_{ef}\mathbf{k}$  com o hamiltoniano de um oscilador forçado acoplado nas direções  $y$  e  $z$  (último termo em 3.68). Para visualização disto, podemos obter as equações de movimento nas direções  $y$  e  $z$  para o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} - \gamma B_1 L_X = \frac{P^2}{2m} - \omega_1 L_X. \quad (3.69)$$

Resolvendo classicamente, obtemos o primeiro conjunto de equações

$$\dot{X} = \frac{P_X}{m},$$

$$\dot{Y} = \omega_1 Z + \frac{P_Y}{m}, \quad (3.70)$$

$$\dot{Z} = -\omega_1 Y + \frac{P_Z}{m},$$

e, ainda, o segundo conjunto

$$\dot{P}_X = 0,$$

$$\dot{P}_Y = \omega_1 P_Z, \quad (3.71)$$

$$\dot{P}_Z = -\omega_1 P_Y.$$

Substituindo a segunda equação do conjunto 3.71 na terceira e derivando-a, chegamos

a

$$\ddot{P}_Y + \omega_1^2 P_Y = 0. \quad (3.72)$$

De maneira análoga, podemos chegar a

$$\ddot{P}_Z + \omega_1^2 P_Z = 0. \quad (3.73)$$

As equações 3.72 e 3.73 representam as equações de osciladores harmônicos para as componentes  $y$  e  $z$  do momento canônico. As soluções são do tipo  $P_Y = A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$  e  $P_Z = E\cos(\omega_1 t) + F\sin(\omega_1 t)$ . Substituindo as soluções no conjunto de equações 3.71, chegamos à seguinte relação entre os coeficientes:  $E = B$  e  $A = -F$ . Usando as duas últimas equações do conjunto de equações 3.70, obtemos

$$m\dot{Y} - m\omega_1 Z = A\cos(\omega_1 t) + B(\sin\omega_1 t), \quad (3.74)$$

$$m\dot{Z} + m\omega_1 Y = B\cos(\omega_1 t) - A\sin(\omega_1 t). \quad (3.75)$$

Derivando a equação 3.74 e substituindo a equação 3.75, chegamos a

$$\ddot{Y} + \omega_1^2 Y = -\frac{2\omega_1}{m}[A\sin(\omega_1 t) - B\cos(\omega_1 t)], \quad (3.76)$$

e, de maneira análoga

$$\ddot{Z} + \omega_1^2 Z = -\frac{2\omega_1}{m}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)]. \quad (3.77)$$

As equações 3.76 e 3.77 mostram que temos osciladores forçados, de frequência igual a  $\omega_1$ , nas direções  $y$  e  $z$ . Na ressonância, estes termos descrevem a oscilação de baixa frequência e grande amplitude nas direções  $y$  e  $z$ , como discutido no Capítulo 2.

### 3.1.4 Comentários

Nesta Capítulo estudamos a dinâmica quântica de uma partícula carregada em campos magnético e elétrico oscilantes, os quais estão relacionados através da lei de Faraday.

Usando, em mecânica quântica, o equivalente a uma transformação para um sistema girante de coordenadas, encontramos uma expressão operacional para a função de onda da partícula no sistema de coordenadas do laboratório 3.20. Quando  $\omega = \omega_c$ , o hamiltoniano efetivo corresponde àquele de uma partícula carregada movendo-se em um campo *magnético estático*  $\mathbf{B}_{ef} = B_1\mathbf{i} - B_0\mathbf{k}$  e ainda sob a ação de um potencial elétrico  $\phi_{ef} = -\gamma B_0 B_1 XZ/2$ , que pode ser considerado um termo de acoplamento entre os campos estático e oscilantes. Obtivemos as equações de movimento para os valores esperados das componentes de posição (conjunto de equações 3.57) e mostramos que são equivalentes às equações de movimento, obtidas classicamente, no Capítulo 2 (conjunto de equações 2.24) na condição ressonante, ou seja, quando a frequência do campo oscilante  $B_1$  se iguala à frequência de ciclotron da partícula carregada ( $\omega = \omega_c = -\gamma B_0$ ).



Uma segunda operação equivalente a uma rotação em torno do eixo  $y$  de um ângulo  $\theta = \arctg|\mathbf{B}_1|/|\mathbf{B}_0|$  pode simplificar o hamiltoniano 3.26. Realizando esta operação, chegamos ao hamiltoniano 3.68, que pode ser entendido como uma combinação do hamiltoniano de uma partícula em um campo magnético efetivo  $\mathbf{B} = -B_{ef}\mathbf{k}$  com o hamiltoniano de um oscilador forçado acoplado nas direções  $y$  e  $z$ .

O hamiltoniano 3.26 mostra uma importante diferença que aparece neste trabalho, onde o campo elétrico é considerado. Contrariamente ao que acontece em [12], o termo referente ao campo estático não se anula na ressonância.

# Capítulo 4

## Ensaio Experimental

Neste capítulo descrevemos o aparato experimental montado com o objetivo de observar o fenômeno de ressonância, descrito nos Capítulos 2 e 3, em um feixe de íons  $\text{He}^+$ . A montagem experimental foi realizada em colaboração com o grupo de física atômica do acelerador Van de Graaff da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

### 4.1 Objetivo do Experimento

A montagem experimental descrita neste capítulo teve como objetivo principal a realização de um experimento piloto para a avaliação dos parâmetros envolvidos, e eventualmente obter indícios da existência do fenômeno ressonante chamado Ressonância de Corrente Elétrica (RCE) em um feixe de íons, através da observação da deflexão transversal deste após a interação com os campos magnéticos estático ( $B_0$ ) e girante ( $B_1$ ), equivalente a uma combinação de campos oscilantes defasados de 90 graus. Nesta fase do trabalho não estamos interessados em mostrar experimentalmente a possibilidade de confinamento e separação isotópica, que também emergem dos resultados teóricos discutidos no Capítulo 2, mas sim mostrar que a deflexão, no início do movimento, pode ser prevista, por exemplo, na condição de ressonância, ou seja, quando a frequência do campo girante  $B_1$  se iguala à frequência de ciclotron dos íons do feixe ( $\omega = |\gamma B_0|$ ), utilizando o conjunto de equações de movimento 2.67. No Capítulo 5, subseção 5.3.4, são comentadas algumas dificuldades para a realização de um experimento que possa corroborar o confinamento e a separação isotópica de um feixe de íons da mesma espécie.

Tabela 4.1: Parâmetros associados ao íon  $\text{He}^+$ . A unidade de massa atômica (u.m.a.) tem valor  $1.6605402 \times 10^{-27}$  kg.

Íon	massa $m(\text{u.m.a.})$	massa $m(\text{kg})$	carga $q(\text{C})$	razão carga-massa $\gamma = q/m$ (Hz/T)	Ref.
$\text{He}^+$	4,002603	$6,646483 \times 10^{-27}$	$1e = 1,60217733 \times 10^{-19}$	$2,407288 \times 10^7$	[32]

Para a realização do experimento utilizamos um feixe de íons  $\text{He}^+$  colimado, cujos dados são mostrados na tabela 4.1, interagindo com os campos magnéticos estático e girante definidos em 2.17 e 2.18. Esta interação se dá por um tempo suficiente apenas para permitir a medida da deflexão transversal do feixe de íons 1,90 m após o final da interação com os campos magnéticos, em uma tela fosforescente no final da linha do acelerador. Para fins de comparação, a trajetória do íon neste experimento está associada a uma fração de aproximadamente 1/100 da trajetória mostrada na figura 2.2.

A escolha do íon foi feita com base nos parâmetros viáveis para a construção das bobinas geradoras dos campos estático e oscilantes, e ainda pela limitação na obtenção de um amplificador de potência para frequências superiores a 100 kHz. Devemos lembrar que na ressonância a frequência do campo  $B_1$  deve igualar-se à frequência de ciclotron,  $\omega = |-\gamma B_0|$ , e, portanto, o fator  $\gamma$  é fundamental. Por exemplo, se escolhêssemos  $\text{Ar}^+$  ( $A = 40$ ) em lugar de  $\text{He}^+$  ( $A = 4$ ) teríamos um fator de redução igual a 10 na frequência de ciclotron. Por outro lado, precisaríamos de um campo estático 10 vezes maior. Para isto, a bobina deveria ter uma corrente 10 vezes maior do que aquela utilizada no experimento realizado, e teria uma massa de aproximadamente 190 kg!

A figura 4.1 mostra, esquematicamente, a trajetória que os íons  $\text{He}^+$  percorrem da sua origem, na fonte de íons e seleção no filtro de Wien, passando por dois estágios de colimação (colimador e anti-colimador), interagindo com os campos magnéticos estático e oscilantes no interior de um tubo de vidro com metalização interna<sup>1</sup>. Ao final da interação o feixe percorre 190 cm em movimento retilíneo uniforme, até a detecção no final da linha pela tela fosforescente. Entre o tubo de vidro e a tela fosforescente temos um copo de Faraday móvel que permite a detecção da corrente do feixe.

<sup>1</sup>Esta região está em um potencial positivo, que é utilizado para retardar o feixe e aumentar, assim, o tempo de interação dos íons com os campos magnéticos.

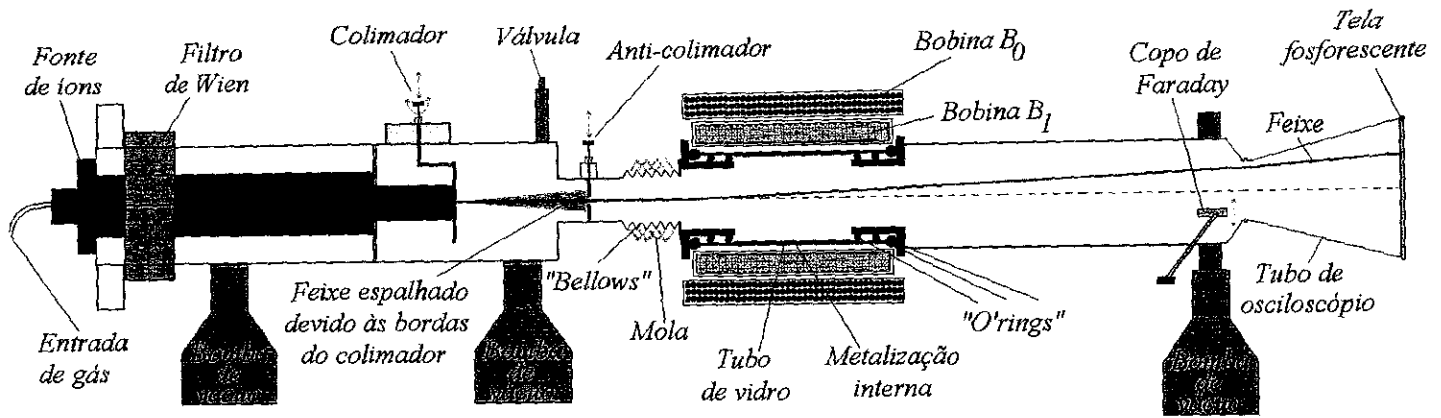


Figura 4.1: Trajetória do íon na linha do acelerador. São mostrados a entrada de gás, a fonte de íons, o filtro de Wien, as etapas de colimação, o tubo de vidro metalizado, as bobinas geradoras dos campos magnéticos, o copo de Faraday e a tela de detecção fosforescente.

O objetivo da medida é observarmos a deflexão transversal do feixe,  $r$ , definida como o desvio do feixe com relação à direção de incidência em função da variação de parâmetros externos, como a frequência  $\omega$  e a amplitude do campo girante  $B_1$ . A idéia mais imediata seria relacionar a deflexão  $r$  com a frequência do campo girante  $\omega$ . Este gráfico poderia fornecer uma curva com um máximo em torno da frequência de ressonância  $\omega_c$ . No entanto, no início do movimento, um gráfico da deflexão  $r$  em função da frequência do campo oscilante  $\omega$  não é capaz de caracterizar o fenômeno ressonante, devido à impossibilidade atual de realizar medidas com campos magnéticos estáticos de alta intensidade e campos magnéticos oscilantes suficientemente intensos a altas frequências. Podemos, em lugar disto, tentar obter um gráfico da deflexão  $r$  em função da amplitude do campo girante  $B_1$ . Esta relação pode ser obtida a partir do conjunto de equações de movimento, na ressonância, 2.67.

Suponhamos que o feixe de  $\text{He}^+$  incida com uma energia de

$$E_0 = qU_{ext} = 1 \times 4,0 \times 10^3 \text{ eV},$$

onde  $q = 1$  corresponde ao número de portadores de carga do íon e  $U_{ext}$  corresponde ao potencial de extração do feixe. Teremos então a velocidade inicial  $v_0$  dada por

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = \sqrt{\frac{2qU_{ext}}{m}} = \sqrt{2\gamma U_{ext}} = 4,39 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

Sabemos que o tempo de vôo dentro do tubo de vidro metalizado,  $t_v$ , no início do

movimento, é dado aproximadamente por

$$t_v \approx \frac{z_0}{v_0} = \frac{0,200}{4,39 \times 10^5} = 4,55 \times 10^{-7} \text{ s},$$

onde  $z_0$  é o comprimento da região de atuação dos campos magnéticos. Supondo, para efeitos de discussão, que os campos magnéticos aplicados sejam  $B_0 = 0,0080 \text{ T}$  e  $B_1 = 0,0012 \text{ T}$  teremos as frequências características  $\omega_c$  e  $\omega_1$  para o íon  $\text{He}^+$  dadas por

$$\omega_c = \gamma B_0 = 192583,0 \text{ Hz}$$

e

$$\omega_1 = \gamma B_1 = 28887,46 \text{ Hz},$$

onde utilizamos o valor de  $\gamma$  dado na tabela 4.1. Realizando o cálculo do argumento das funções trigonométricas utilizadas no conjunto de equações 2.67, chegamos aos seguintes valores

$$\frac{\sqrt{3}\omega_1 t_v}{2} = 0,0114 \text{ rad}$$

e

$$\omega_c t_v = 0,0876 \text{ rad}.$$

Assim sendo, podemos usar as seguintes aproximações para as funções trigonométricas no conjunto de equações 2.67

$$\text{sen}\theta \approx \theta$$

e

$$\text{cos}\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$

Procedendo desta maneira, chegamos às seguintes componentes espaciais para o feixe de  $\text{He}^+$  ao final da interação com os campos magnéticos

$$\begin{aligned} x(t_v) &\approx \frac{\sqrt{3}v_0}{3\omega_c} \frac{\sqrt{3}\omega_1 t_v}{2} - \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} \omega_c t_v = 0, \\ y(t_v) &\approx -\frac{2v_0}{3\omega_1} \frac{1}{2} \left[ -\left( \frac{\sqrt{3}\omega_1 t_v}{2} \right)^2 \right] - \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} \frac{1}{2} [-(\omega_c t_v)^2] = \frac{\omega_1 v_0 t_v^2}{2} = \frac{\omega_1 z_0^2}{2v_0}, \\ z(t_v) &\approx v_0 t_v. \end{aligned} \quad (4.1)$$

A partir do conjunto de equações 4.1 sabemos que a deflexão ao final do percurso será:

$$r \approx y(t_v) = \frac{\omega_1 z_0^2}{2v_0} = 0,00132 \text{ m}. \quad (4.2)$$

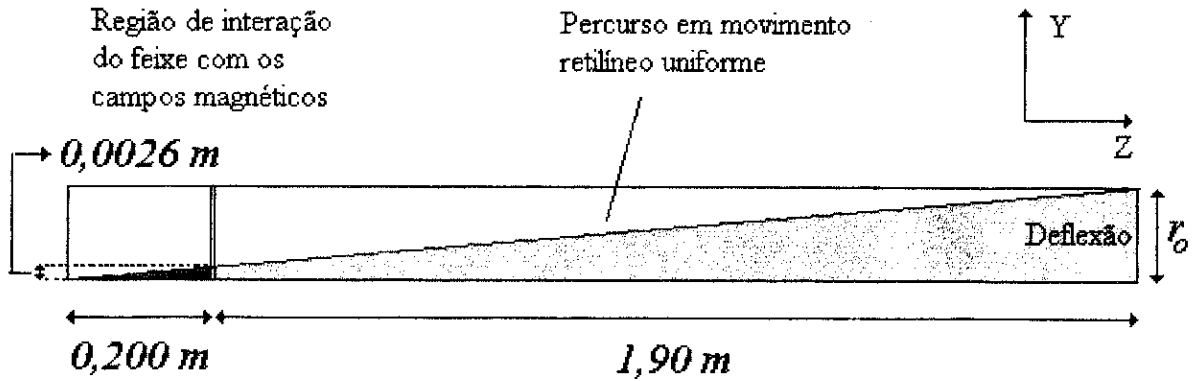


Figura 4.2: Esquema simplificado mostrando o desvio do feixe provocado pela interação com os campos magnéticos e a fase final em movimento retilíneo uniforme. A visualização na tela fosforescente no final da linha do acelerador deve ser um círculo de raio  $r_0$ .

A detecção acontece 1,90 m após o final do tubo de vidro metalizado e podemos calcular o desvio que ocorre ao final da linha na tela fosforescente utilizando semelhança de triângulos, o que é uma boa aproximação no início do movimento, como mostra a figura 4.2<sup>2</sup>. Podemos obter, então, a deflexão final dada por

$$r_0 = \frac{(1,90 + 0,200)}{0,200} 0,00132 = 0,0139 \text{ m.}$$

Logo, nesta aproximação temos a deflexão proporcional à amplitude do campo magnético  $B_1$

$$r_0 \approx \left( \frac{2,10}{0,200} \right) \frac{\gamma z_0^2}{2v_0} B_1. \quad (4.3)$$

O gráfico da deflexão transversal do feixe  $r$  versus a amplitude do campo magnético  $B_1$  deve apresentar ajuste linear e um coeficiente angular igual a  $2,10\gamma z_0^2/(0,400v_0)$ . A visualização na tela fosforescente no final da linha do acelerador deve ser um círculo de raio  $r_0$ .

## 4.2 O Acelerador de Íons

Ao iniciarmos o trabalho, tínhamos à disposição um acelerador montado para a implantação de íons em filmes metálicos. Para este tipo de estudo não é necessário um feixe colimado, mas sim um feixe intenso com uma área útil maior do que a área do filme metálico disponível. Abaixo descrevemos as partes que compõem o acelerador.

<sup>2</sup>Estamos considerando nulo o potencial retardador na região onde atuam os campos magnéticos.

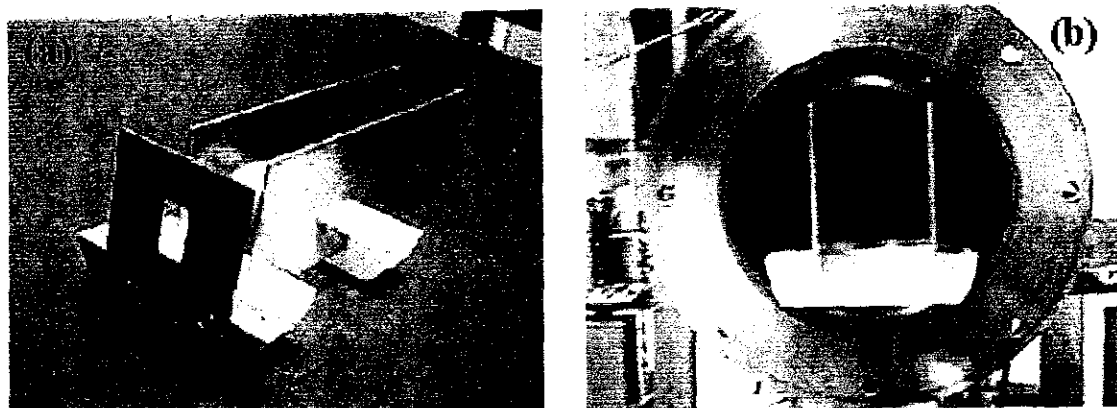


Figura 4.4: (a) Placa metálica retangular cujas dimensões são  $14,6 \text{ mm} \times 30,0 \text{ mm}$ . Sua função é limitar a área do feixe gerado na fonte de íons. (b) Detalhe mostrando como a placa metálica se acomoda no interior da linha do acelerador.

ionizado; (d) gerador da tensão de extração do feixe, 6,0 a 30,0 kV. Os equipamentos indicados nos ítems (a), (b) e (c) estão no mesmo potencial do que aquele escolhido para o potencial de extração.

A figura 4.6 mostra, em detalhes, os principais componentes do acelerador e da fonte de íons: (a) entrada de gás, (b) alimentação do potencial de ionização, (c) alimentação da corrente alternada do eletromagneto focalizador, (d) potencial de extração do feixe de íons, (e) entrada para o potencial nas placas paralelas do filtro de Wien. Ao lado temos um esquema mostrando detalhes da fonte de íons tipo *Penning*.

O filtro de Wien é composto por um magneto e placas paralelas, cujo campo estático produzido é de 0,0620 T; cada placa possuindo comprimento de 11,7 cm e separação de  $38 \pm 1 \text{ mm}$ . O funcionamento do filtro de Wien está baseado no equilíbrio entre as forças magnética e elétrica produzidas pelo magneto e pelas placas paralelas, respectivamente [33]. A escolha do íon é feita variando a tensão de alimentação das placas paralelas. Neste trabalho utilizamos um fonte de tensão estabilizada *TECTROL* Mod. TCH3000, que varia de 0 a 3,0 kV ( $\pm 0,1 \text{ kV}$ ).

### 4.3 Montagem da Linha do Acelerador

Nesta seção serão apresentadas as principais partes que compõem a montagem da linha do acelerador necessárias à realização do experimento sob discussão.

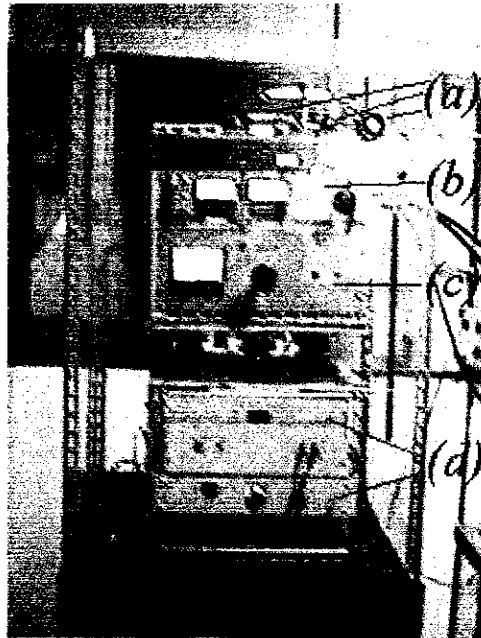


Figura 4.5: (a) Mini-garrafa contendo gás seguida de uma válvula simples e uma válvula tipo “agulha”; (b) fonte de alta voltagem *Spellman* responsável pela tensão de ionização do gás, (c) fonte geradora da corrente alternada fornecida ao eletromagneto focalizador do plasma ionizado; (d) gerador da tensão de extração do feixe. Os equipamentos indicados nos itens (a), (b) e (c) estão no mesmo potencial do escolhido para a extração do feixe.



### 4.3.1 Colimadores

É fundamental para a realização do experimento sob discussão um feixe de íons bem colimado. Para isto, colocamos, após a placa metálica retangular (veja figura 4.4), um colimador e um anti-colimador de diâmetros iguais a 1,5 cm e 2,5 cm, respectivamente, confeccionados em folhas de alumínio. O colimador tem dois graus de liberdade: vertical e horizontal. O anti-colimador tem apenas grau de liberdade vertical. O anti-colimador possui diâmetro maior do que o do colimador, com o objetivo de diminuir a intensidade do feixe espalhado nas bordas do colimador, como mostra a figura 4.1.

### 4.3.2 O Tubo de Vidro Metalizado

Construímos um tubo de vidro de 8,0 cm de diâmetro e 30,0 cm de comprimento, sendo de 20 cm, simetricamente distribuídos ao longo do tubo, o comprimento da metalização interna. A metalização é composta por um filme de aço e recoberto por um filme de cobre, onde utilizamos a máquina de preparação de filmes finos, tipo *Sputtering*, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). No centro do vidro há um pequeno parafuso metálico que faz o contato elétrico entre o filme e o exterior. Assim, podemos colocar o filme em qualquer potencial desejado.

Esta foi a maneira encontrada para permitir a interação dos campos magnéticos oscilantes com o feixe de íons, reduzindo ao máximo o problema do comprimento de penetração das ondas eletromagnéticas em metais [21]. Não poderíamos simplesmente colocar o tubo de vidro sem uma camada metálica interna, pois, dessa maneira, o vidro poderia ser carregado pelo próprio feixe, gerando assim potenciais eletrostáticos que modificariam a trajetória das partículas.

A figura 4.7 mostra como o tubo de vidro foi colocado na linha. Os problemas enfrentados foram: como acoplar o vidro às tubulações de aço e alumínio da linha, mantendo um vácuo da ordem de grandeza de  $10^{-6}$  Torr e como evitar tensões de cisalhamento no vidro, que ocorrem quando a pressão na linha é variada. O primeiro problema foi resolvido utilizando-se duas peças de alumínio projetadas pela engenharia mecânica do CBPF e confeccionadas na oficina mecânica do laboratório Van de Graaff. Estas permitem a obtenção de um bom vácuo utilizando, em cada uma delas, dois “o-rings” próximos à extremidade do tubo de vidro e um “o-ring” de apoio para que o vidro não seja pressionado diretamente contra a peça de alumínio cada vez que a evacuação do tubo fosse iniciada. Também são

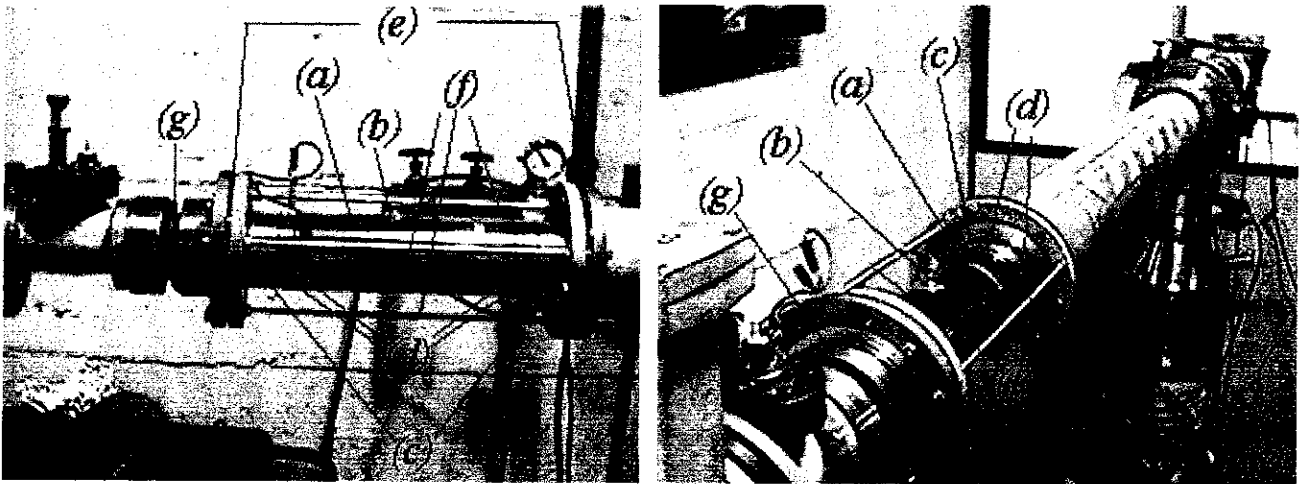


Figura 4.7: Detalhe do acoplamento do tubo de vidro na linha do acelerador: (a) tubo de vidro metalizado internamente, (b) contato elétrico externo do filme metálico, (c) peças de alumínio que acoplam o vidro à linha do acelerador, (d) “o-rings”, (e) anéis isolantes de *plexiglas*, (f) tirantes de latão, (g) conjunto composto pelo *bellows* e pela mola.

utilizados três tirantes de latão cuja função é equilibrar as forças realizadas pelo restante da tubulação sobre o vidro, devido à diferença de pressão existente entre o interior e o exterior da linha. A figura 4.8 mostra as dimensões e os detalhes desta peça.

Estas duas peças de alumínio, que dão sustentação ao vidro, estão eletricamente isoladas da linha através de anéis de *plexiglas*. Externamente, realizamos o contato elétrico destas peças com o filme metálico no interior do vidro. Desta forma, garantimos uma região de potencial positivo uniforme, com a função de retardar o feixe, aumentando o tempo de interação deste com os campos magnéticos.

Para permitir uma pequena mobilidade do vidro na linha, evitando o problema das tensões de cisalhamento quando a evacuação fosse efetuada, colocamos um *bellows* na região compreendida entre o anti-colimador e o vidro. Em torno do *bellows* colocamos uma mola (do mesmo tipo do que aquelas utilizadas em amortecedores para automóveis) de 6,5 cm de comprimento, apoiada em suportes metálicos, para não permitir a compressão total do *bellows*, o que inutilizaria sua função. Esta parte também pode ser vista na figura 4.7. Isto foi necessário porque os extremos da linha do acelerador não estão fixos no solo.

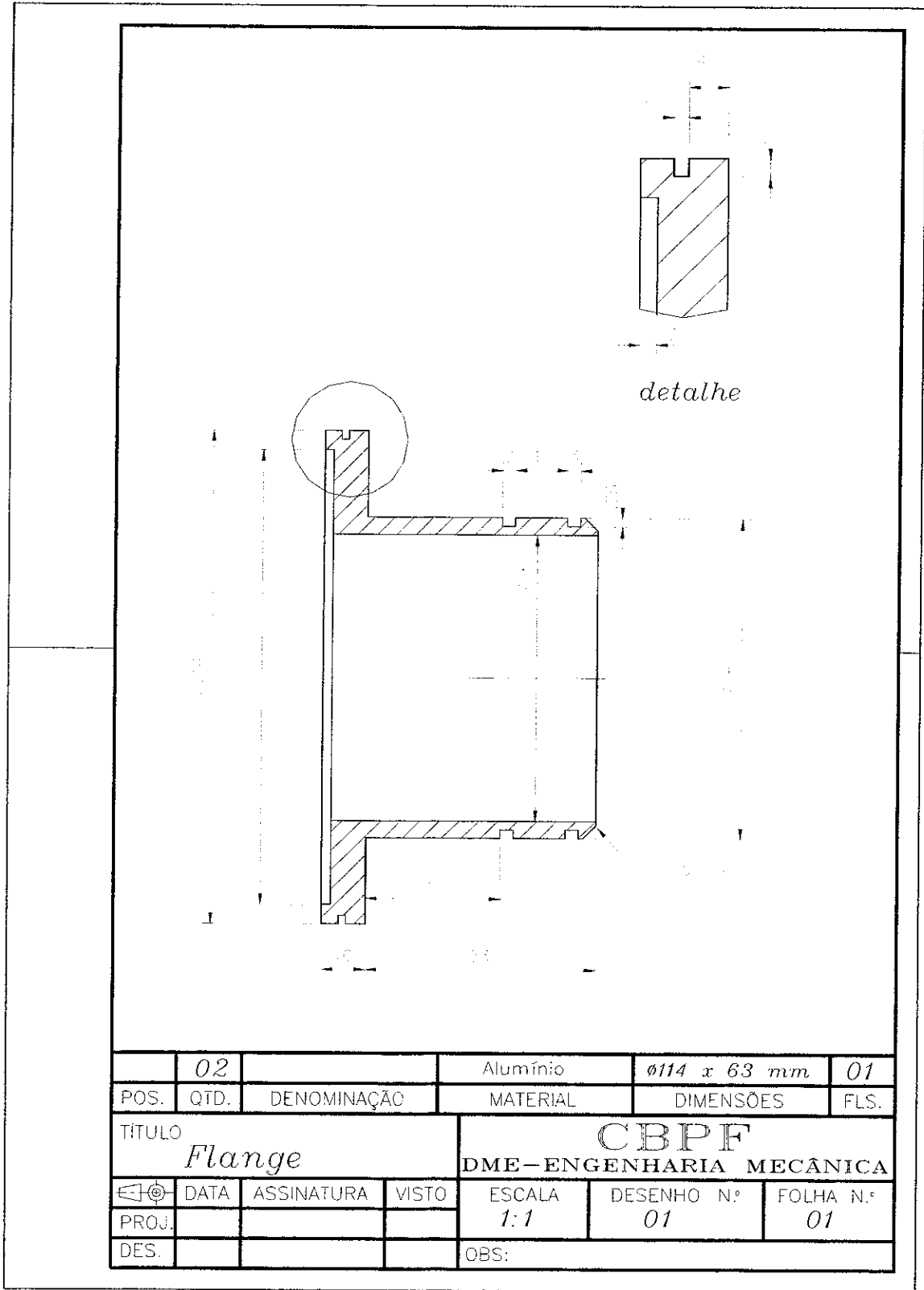


Figura 4.8: Desenho da peça de alumínio utilizada no acoplamento do vidro metalizado com a linha do acelerador.

### 4.3.3 Construção e Calibração das Bobinas Geradoras dos Campos Magnéticos $B_0$ e $B_1$

Abaixo descrevemos de forma sucinta a construção das bobinas geradoras dos campos magnéticos estático e oscilantes, referentes aos campos  $B_0$  e  $B_1$ , respectivamente. O procedimento e as bobinas descritas a seguir referem-se, das várias que foram testadas, àquelas que mostraram o melhor desempenho e homogeneidade de campo.

#### Bobina Geradora do Campo Magnético Estático $B_0$

A bobina geradora do campo estático foi construída de acordo com a fonte de corrente mais potente disponível para o experimento. Esta é uma fonte *Hewlett Packard* modelo 6264B DC, podendo variar o potencial de 0 a 25 V e a corrente de 0 a 25 A (potência máxima igual a 625 W). A bobina possui 639 espiras de fio 10 AWG (corrente máxima de 15,8 A) distribuídas em 6 camadas, resistência elétrica igual a 1,6 Ohms, indutância de 52 mH, com dimensões de 25,0 cm de comprimento e 20,6 cm de raio médio, e massa de aproximadamente 18 kg.

Apesar de o fio estar corretamente dimensionado para correntes de até 15 A, o aquecimento da bobina é inevitável devido ao grande número de espiras e, conseqüentemente, à difícil dissipação do calor gerado entre elas. Para contornar este problema, foi enrolada em torno da bobina uma folha de alumínio com vários orifícios, e sobre esta, uma camada contendo 33 espiras de tubo de cobre maleável, como mostram as figuras 4.9 e 4.10. A folha de alumínio foi utilizada para proteger o fio esmaltado de possíveis arranhões, durante o enrolamento da camada de tubo de cobre, evitando assim curto-circuitos na bobina. Os orifícios têm como função permitir a troca de calor entre a bobina e o tubo de cobre, por onde faz-se passar água para a refrigeração. O enrolamento do tubo de cobre foi feito no torno da oficina, sob tensão, para garantir um bom contato térmico entre este e a bobina.

Segundo a condição mostrada no Capítulo 2, a homogeneidade do campo estático gerado por esta bobina, tipo solenóide, pode ser verificada através da observação do gráfico exibido na figura 4.11, onde mostramos o gráfico da variação do campo estático ao longo do eixo da bobina (eixo  $z$ ) para uma corrente de 15 A. Podemos estimar o campo médio dentro da bobina em cerca de  $30,0 \text{ mT} \pm 6,0$ , o que corresponde a uma variação de aproximadamente 20 % em torno do valor médio. Dentro de 60 % do comprimento

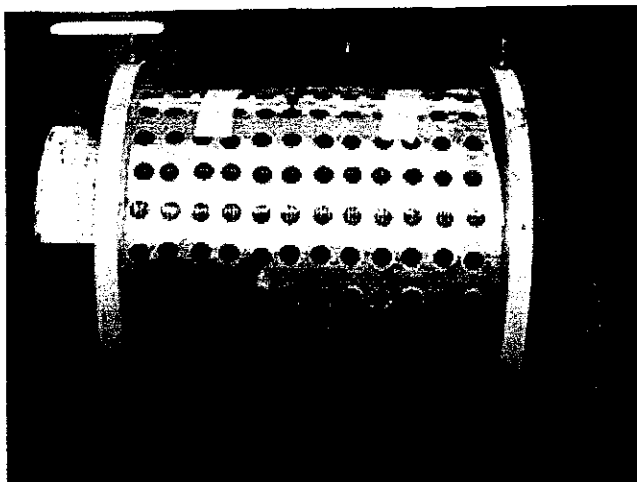


Figura 4.9: Bobina geradora do campo magnético estático ( $B_0$ ) após receber uma camada de folha de alumínio. Sua função é proteger o fio esmaltado da bobina de possíveis arranhões quando receber uma camada de tubo de cobre maleável utilizado na refrigeração. Os orifícios têm como função permitir a troca de calor entre a bobina e o tubo de refrigeração.

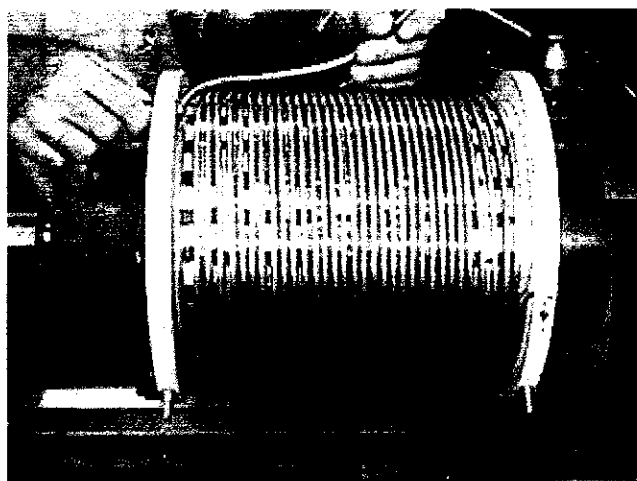


Figura 4.10: Bobina geradora do campo  $B_0$  após receber a camada de tubo de cobre maleável. O contato mecânico entre a bobina e o tubo de cobre foi otimizado com a ajuda de um torno mecânico, garantindo um bom contato térmico.

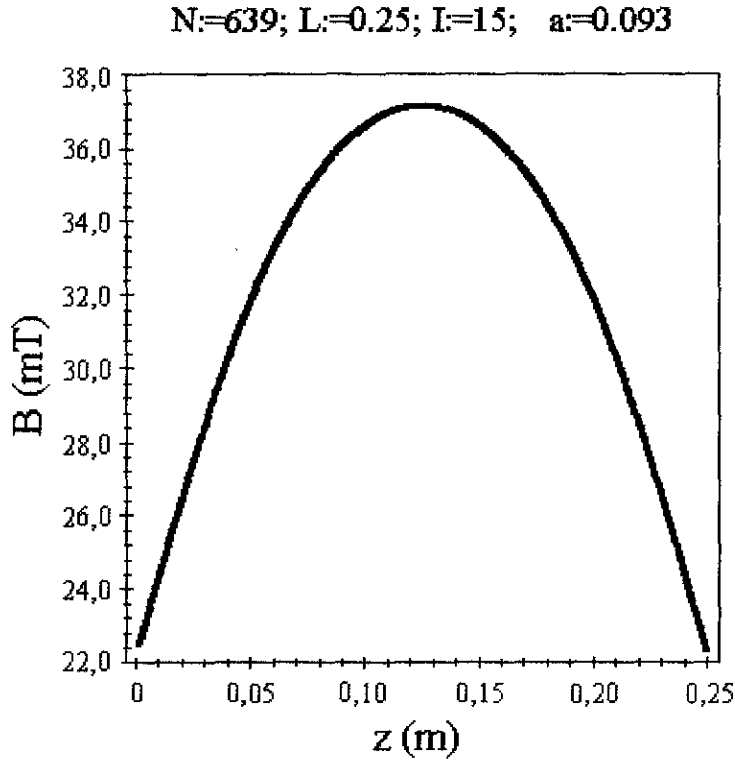


Figura 4.11: Gráfico mostrando a variação do campo estático ao longo do eixo da bobina tipo solenóide (eixo  $z$ ).

da bobina (entre 5 e 20 cm) o campo magnético é de cerca de  $34,5 \text{ T} \pm 2,5$ , o que leva a uma variação de aproximadamente 7 % em torno do valor médio. Esta curva foi gerada através da equação para o campo magnético em um solenóide sobre o seu eixo  $z$  [21]

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 NI}{L} \left( \frac{\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)}{2} \right), \quad (4.4)$$

onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$ ,  $N$ ,  $I$  e  $L$  são, respectivamente, a permeabilidade magnética, o número de espiras, a corrente e o comprimento da bobina. Os fatores  $\cos(\alpha_1)$  e  $\cos(\alpha_2)$  são dados por

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/z)^2}}, \quad (4.5)$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/(L-z))^2}}, \quad (4.6)$$

sendo  $a$  o raio da bobina (ver figura 4.12).

Utilizando um gaussímetro *F.W. Bell*, modelo 9500 ( $3 \mu\text{T} - 30 \text{ T}$ ) obtivemos o gráfico mostrado na figura 4.13, que mostra a relação linear entre o campo magnético  $B_0$  e a corrente fornecida pelo gerador de potência, onde desprezamos o campo da Terra ( $\approx$

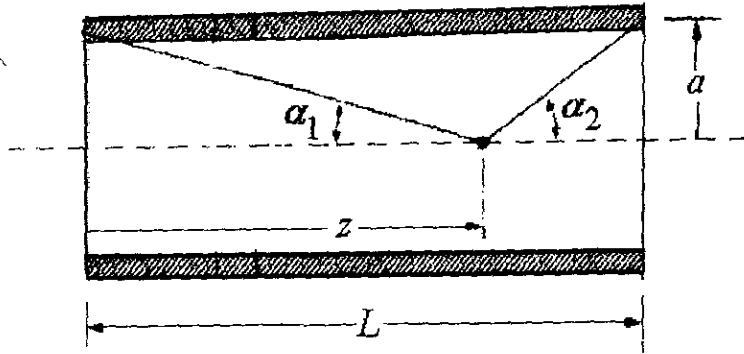


Figura 4.12: Campo calculado sobre o eixo de um solenóide de  $N$  espiras, comprimento  $L$  e raio  $a$ .  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  correspondem, respectivamente, aos ângulos formados pela união do ponto  $z$  às bordas esquerda e direita da bobina.

0,05 mT, sobre o eixo da bobina a 19 cm do centro. Não foi possível medir diretamente o campo no interior da bobina devido à ausência de uma ponta de prova que permitisse a medida do campo ao longo do eixo até o centro. A medida do coeficiente angular  $\beta$  a partir do gráfico mostrado na figura 4.13 pode ser comparada com o resultado teórico previsto pela equação 4.4

$$\beta = \frac{\mu_0 N}{L} \left( \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2} \right). \quad (4.7)$$

Sendo  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$ ,  $N = 639$ ,  $L = 0,250 \text{ m}$ ,  $a = 0,103 \text{ m}$  e  $z = -0,065 \text{ m}$ , obtemos o valor teórico de  $\beta$

$$\beta_{teor} = 0,6694 \text{ mT/A.}$$

Este valor está em bom acordo com o valor experimental,

$$\beta_{exp} = 0,6415 \pm 0,0003 \text{ mT/A,}$$

o que corresponde a um erro de 4,2 %. Este resultado nos permite confiar nas previsões oriundas da equação 4.4 para obter uma relação entre o valor do campo magnético no centro da bobina e a corrente fornecida pela gerador de potência. Utilizando os mesmos valores para o comprimento e o raio, e usando o valor para a posição no centro da bobina  $z = 0,125 \text{ m}$ , obtemos, em mT para  $I$  dada em A,

$$B_z(z = 0,125) = \frac{\mu_0 N}{L} \left( \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2} \right) I = 2,47788I. \quad (4.8)$$

A equação 4.8 pode ser utilizada para estimar o valor do campo  $B_0$  no interior da bobina. Por exemplo, para uma corrente  $I = 15,0 \text{ A}$  temos  $B_0 = 37,182 \text{ mT}$ .

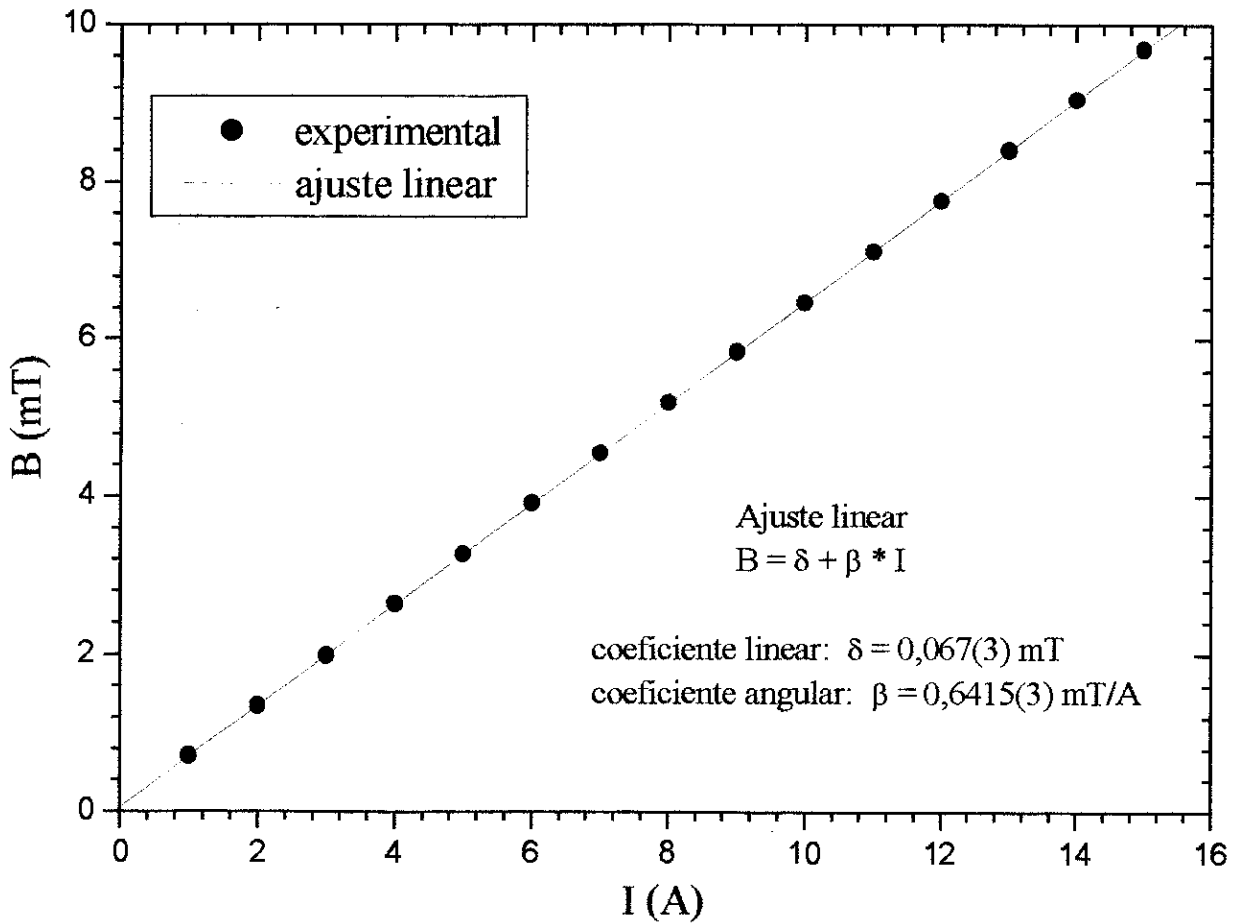


Figura 4.13: Gráfico mostrando a relação linear entre o campo magnético  $B_0$  no eixo da bobina a uma distância de 19 cm do centro ( $z = -6,5$  cm) e a corrente fornecida pelo gerador de potência.



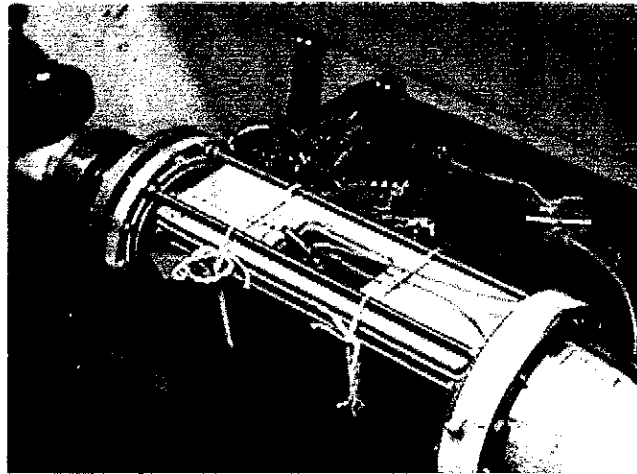


Figura 4.14: Detalhe do acoplamento das bobinas geradoras dos campos oscilantes. Cada par produz um campo magnético oscilante, um perpendicular ao outro e defasados de 90 graus. Ao lado temos o circuito responsável pela amplificação da corrente que percorre cada par de bobinas.

### Bobina Geradora do Campo Magnético Girante $B_1$

Para a obtenção de um campo magnético polarizado circularmente, ou *girante*, utilizamos dois pares de bobinas retangulares na configuração semelhante à de Helmholtz. Cada bobina possui 100 espiras de fio 33 AWG, resistência elétrica igual a 33,2 Ohms, indutância igual a 9,5 mH, com dimensões iguais a 27,5 cm de comprimento, 7,5 cm de largura e 0,70 cm de espessura. Estas bobinas estão distribuídas em torno do tubo de vidro metalizado, como mostra a figura 4.14.

Em cada par, as bobinas estão ligadas em série entre si e a um capacitor, formando assim um circuito RLC. Cada circuito recebe uma onda senoidal amplificada fornecida por um gerador de frequências, sendo a defasagem entre elas de 90 graus. O circuito de alimentação sempre trabalha próximo do regime ressonante, para que seja possível a transmissão máxima de potência e, conseqüentemente, corrente máxima para as bobinas. A figura 4.15 mostra o diagrama de blocos do circuito.

Devido à considerações feitas no Capítulo 2, sobre campos homogêneos na região do feixe, mostramos na figura 4.16 alguns gráficos da amplitude das componentes do campo gerado por um par de bobinas retangulares tipo Helmholtz ( $B_x, B_y, B_z$ ) versus  $x, y$  e  $z$ , obtidos por cálculo numérico. Em (a) mostramos a disposição de um dos pares de bobinas retangulares em relação aos eixos coordenados (o outro par de bobinas estaria disposto perpendicularmente, considerando a reta normal ao plano das bobinas). A direção  $z$  corresponde a direção de incidência do feixe de íons; em (b) temos o gráfico mostrando a

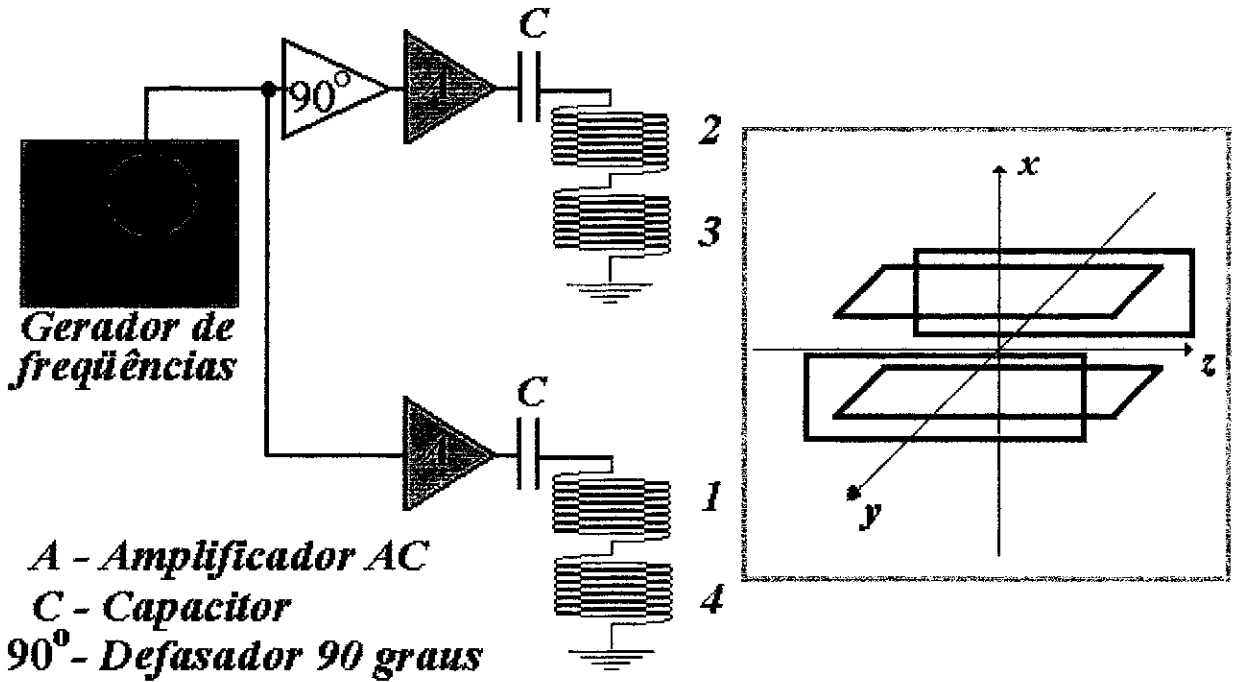


Figura 4.15: Diagrama de blocos do circuito que alimenta as bobinas geradoras dos campos oscilantes. Ao lado mostramos a disposição dos pares em relação aos eixos coordenados (o feixe incide na direção  $z$ ).

variação da componente  $B_y$  em relação a  $y$  em  $x = z = 0$  cm; em (c) mostramos o gráfico da variação da componente  $B_y$  em relação a  $y$  em  $x = 0$  cm e  $z = 15$  cm, ou seja, na extremidade direita do par de bobinas; em (d) temos o gráfico mostrando a variação da componente  $B_y$  em relação a  $z$  em  $x = 0$  cm e  $y = 4,5$  cm. Observamos que o campo se mantém bem homogêneo ao longo da direção do feixe; em (e) mostramos o gráfico da variação da componente  $B_y$  em relação a  $x$  em  $y = 4,5$  cm e  $z = 0$  cm. Vemos que a componente  $B_y$  tem variação de aproximadamente 5% quando comparada a uma variação espacial de 1,0 cm em torno do centro; em (f) temos o gráfico mostrando a variação da componente  $B_z$  em relação a  $z$ , em  $y = 4,5$  cm e  $x = 0$  cm. Observamos que a componente  $B_z$  varia muito rapidamente nas bordas do par de bobinas retangulares.

Como o feixe possui diâmetro da ordem de dois milímetros, e ainda não se espera que a deflexão ao final da interação com os campos seja muito maior do que alguns milímetros, podemos considerar o campo bem homogêneo na região do feixe.

Realizamos a medida da corrente contínua versus campo magnético no centro de um dos pares de bobinas, cuja separação entre elas era de 8,0 cm. Obtivemos o gráfico mostrado na figura 4.17 e, realizando um ajuste linear, chegamos a seguinte relação entre o campo

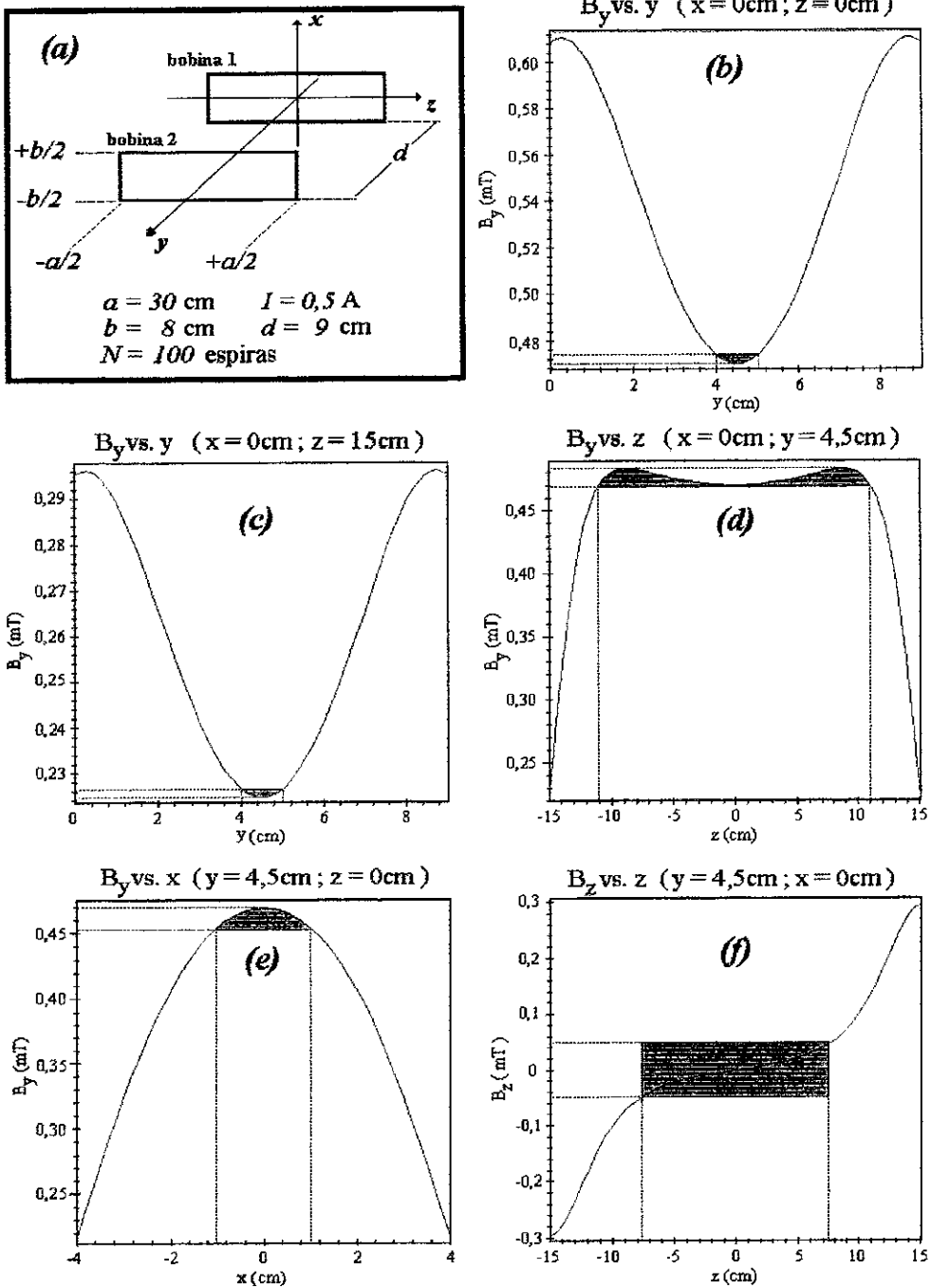


Figura 4.16: (a) Motramos a disposição do par de bobinas retangulares em relação aos eixos coordenados. A direção  $z$  corresponde a direção de incidência do feixe de íons; (b) gráfico  $B_y$  versus  $y$  em  $x = z = 0$  cm; (c) gráfico  $B_y$  versus  $y$  em  $x = 0$  cm e  $z = 15$  cm, ou seja, na extremidade direita do par de bobinas; (d) gráfico  $B_y$  versus  $z$  em  $x = 0$  cm e  $y = 4,5$  cm. Observamos que o campo se mantém bem homogêneo ao longo da direção do feixe; (e) gráfico  $B_y$  versus  $x$  em  $y = 4,5$  cm e  $z = 0$  cm. Vemos que a componente  $B_y$  tem variação de aproximadamente 5% quando comparada a uma variação espacial de 1,0 cm em torno do centro; (f) gráfico  $B_z$  versus  $z$ , em  $y = 4,5$  cm e  $x = 0$  cm. Observamos que a componente  $B_z$  varia muito rapidamente nas bordas do par de bobinas retangulares.

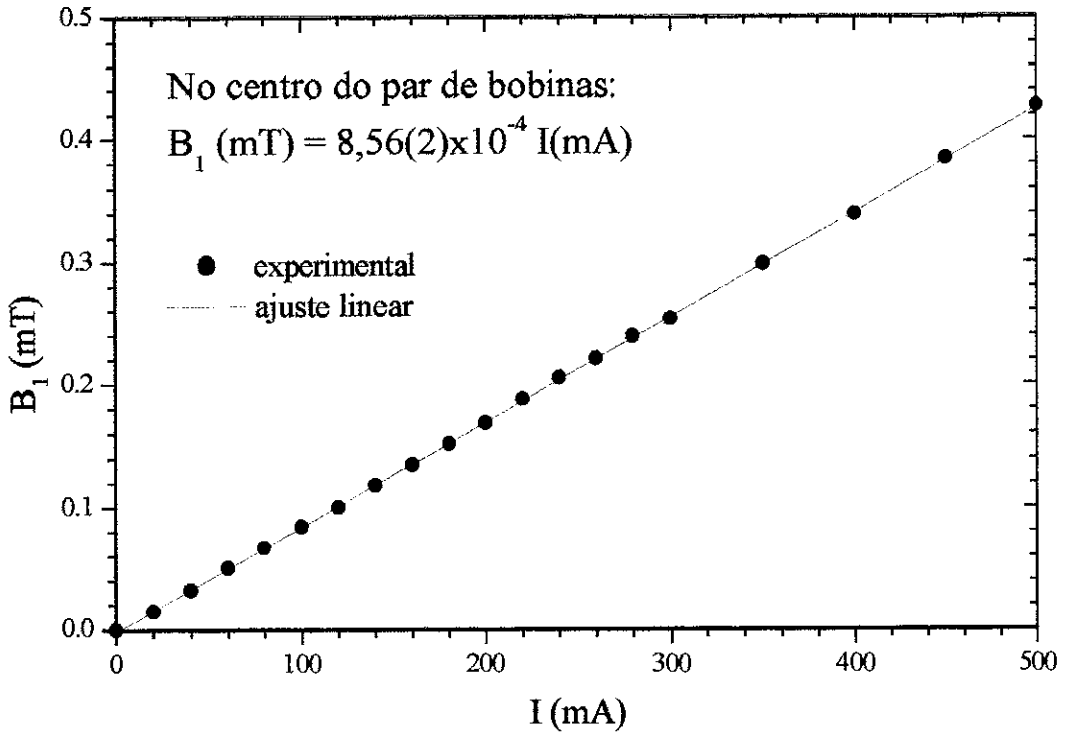


Figura 4.17: Gráfico mostrando a relação linear entre o campo magnético  $B_1$  no centro de um par de bobinas retangulares, separadas por uma distância de 8,0 cm, e a corrente que as percorre.

no centro do par de bobinas e a corrente que as percorre

$$B_1(\text{mT}) = 8,56 \times 10^{-4} I(\text{mA}). \quad (4.9)$$

A relação 4.9 pode ser usada para estimar a amplitude do campo girante através da medida da amplitude da corrente alternada que percorre o par de bobinas.

#### 4.3.4 Sistema de Detecção e Observação dos Íons

Para a detecção, nesta fase inicial do experimento, utilizamos um copo de Faraday e uma tela fosforescente de sulfeto de zinco. Abaixo descrevemos de forma resumida suas funções.

##### O Copo de Faraday

O copo de Faraday está acoplado à parte final da linha, a aproximadamente 1,50 m do final do tubo de vidro metalizado. Sua função é fornecer a corrente do feixe de íons incidente. Vários ajustes iniciais, tais como a determinação da melhor posição dos colimadores, a

verificação da estabilidade do feixe e ainda a escolha do potencial correto que deve ser aplicado às placas do filtro de Wien para a escolha do feixe desejado, podem ser feitos utilizando o copo de Faraday.

A figura 4.18 mostra o gráfico da corrente do feixe  $I$  medida pelo copo de Faraday em função do potencial aplicado nas placas que compõem o filtro de Wien,  $U_{wien}$ , para um feixe consistindo de uma mistura de He e Ar, obtido a partir de um potencial de extração de 9,0 kV. São observadas 3 gaussianas ajustáveis, das quais a primeira corresponde ao íon de  $Ar^+$ , a segunda ao íon de  $Ar^{++}$  e a terceira corresponde ao íon de  $He^+$ .

A identificação pode ser feita através de uma inspeção da relação entre o potencial nas placas do filtro de Wien e a razão carga-massa do íon em questão,  $\gamma_{ion}$ ,

$$U_{wien} = B_w d_w \sqrt{2\gamma_{ion} U_{ext}}, \quad (4.10)$$

onde  $B_w$  e  $d_w$  correspondem, respectivamente, ao campo magnético estático e à distância entre as placas paralelas do filtro de Wien, e  $U_{ext}$  corresponde ao potencial de extração do feixe de íons. Se trabalharmos no mesmo potencial de extração, podemos obter a relação entre o potencial nas placas do filtro de Wien para cada íon, observando que  $\gamma_{Ar^{++}} = 2\gamma_{Ar^+}$  e  $\gamma_{He^+} \approx 10\gamma_{Ar^+}$ . Sendo assim, obtemos as seguintes relações entre os potenciais  $U_{wien}$

$$\frac{U_{wien}^{Ar^{++}}}{U_{wien}^{Ar^+}} = \sqrt{2},$$

$$\frac{U_{wien}^{He^+}}{U_{wien}^{Ar^+}} = \sqrt{10}.$$

Basta agora realizar a verificação experimental por inspeção dos valores médios das gaussianas  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ . Procedendo desta maneira, obtemos

$$\frac{U_2}{U_1} \approx \frac{1051}{673} = 1,562 \approx \sqrt{2} \pm 10 \%,$$

$$\frac{U_3}{U_1} \approx \frac{1960}{673} = 2,912 \approx \sqrt{10} \pm 8 \%.$$

Isto mostra que a primeira gaussiana ( $U_1$ ) está relacionada ao íon  $Ar^+$ , a segunda ( $U_2$ ) relacionada ao íon  $Ar^{++}$  e a terceira ao íon  $He^+$ .

## A Tela Fosforescente

A observação do desvio do feixe, um dos objetivos deste experimento, pode ser feita na tela fosforescente de sulfeto de zinco do tubo de osciloscópio, que foi adaptado para acoplar-se

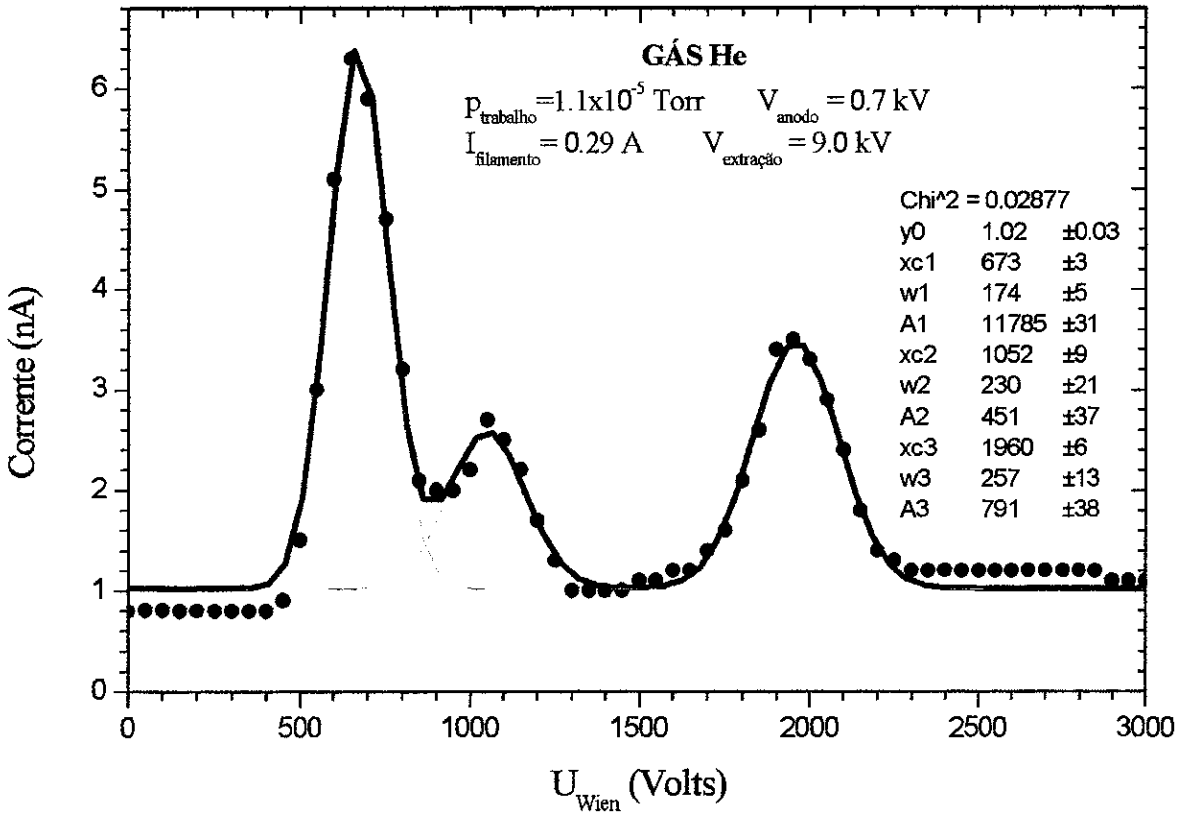


Figura 4.18: Gráfico da corrente do feixe  $I$  medida pelo copo de Faraday em função do potencial aplicado nas placas que compõem o filtro de Wien,  $U_{wien}$ , para um feixe de He obtido a partir de um potencial de extração de 9,0 kV. São observadas 3 gaussianas ajustáveis, das quais a primeira corresponde ao feixe de  $\text{Ar}^+$ , a segunda ao feixe de  $\text{Ar}^{++}$  e a terceira ( $U_3$ ) corresponde ao feixe de  $\text{He}^+$ .

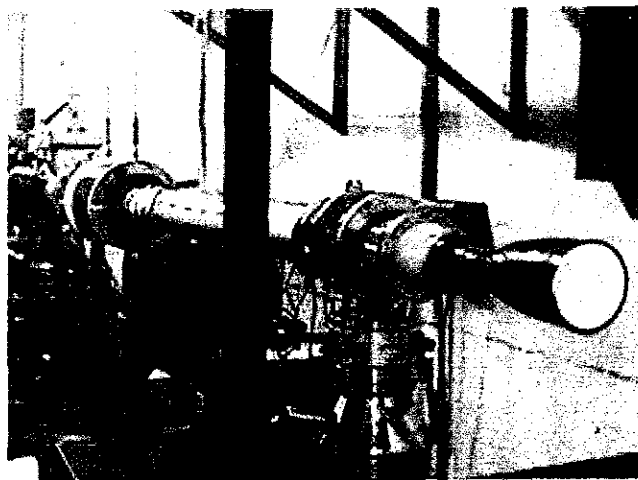


Figura 4.19: Aparato experimental na fase atual de montagem no laboratório Van de Graaff da PUC.

ao final da linha do acelerador. Podemos, a partir da visualização do feixe na tela, obter informações importantes, como a focalização do feixe, verificação, com a ajuda de um ímã, da existência de um feixe neutro, e ainda a medida do desvio do feixe com relação à direção inicial de incidência. Esta última informação pode ser obtida com uma máquina fotográfica utilizando um longo tempo de exposição.

## 4.4 Resultados Obtidos

Utilizando o aparato experimental na fase atual de montagem, como mostra a figura 4.19, obtivemos os resultados apresentados nesta seção.

A figura 4.20 mostra fotografias do feixe  $\text{He}^+$  para as seguintes situações: (a) feixe sem campos magnéticos aplicados; (b) feixe na presença do campo estático  $B_0(I = 4,2 \text{ A}) = 10,4 \text{ mT}$  (ver relação 4.8); (c) feixe na presença do campo  $B_0$ , o mesmo do item (b), e do campo girante  $B_1$ , cujo módulo é dado por  $B_1(I = 108 \text{ mA}) = 0,093 \text{ mT}$  (ver relação 4.8)<sup>3</sup>. A frequência do campo girante é igual a  $\omega = \omega_c = \gamma B_0 = 2\pi 40 \text{ kHz} = 251,327 \text{ kHz}$ , estando na condição ressonante, ou seja, apresenta a frequência do campo girante igual a frequência de cíclotron do íon; (d) feixe na presença do campo girante como dado no item anterior, porém com campo estático dado por  $B'_0 = B_0/2 = 5,2 \text{ mT}$ , portanto fora

<sup>3</sup>Calculamos o módulo do campo  $B_1$  como sendo a média dos campos magnéticos gerados pelos dois pares de bobinas. Sendo assim, tínhamos uma corrente (pico-a-pico) de 230 mA percorrendo um par e uma corrente de 200 mA percorrendo o outro par de bobinas. A amplitude média da corrente é, aproximadamente, 108 mA.

Tabela 4.2: Diâmetros médios do feixe sob a ação dos campos magnético estático  $B_0$  e girante  $B_1$ , conforme descrição da figura 4.20.

Gráficos (Figura 4.22)	Diâmetro médio do feixe ( mm )
(a)	$11 \pm 1$
(b)	$10 \pm 1$
(c)	$15 \pm 1$
(d)	$12 \pm 1$
(e)	$10 \pm 1$

da condição de ressonância  $\omega = \omega'_c = \gamma B'_0$ . A frequência do campo girante foi mantida,  $\omega = \omega_c = 2\omega'_c$ . (e) feixe na presença do campo girante como dado no item (c), porém com campo estático dado por  $B''_0 = 2B_0 = 20,8$  mT, novamente fora da condição de ressonância  $\omega = \omega''_c = \gamma B''_0$ . Observe que a frequência do campo girante equivale a metade da frequência de ciclotron neste caso,  $\omega = \omega_c = \omega''_c/2$ . O menor retângulo tem dimensões  $7,0 \text{ mm} \times 11,3 \text{ mm}$ . O tamanho real do feixe é 1,4 vezes maior que aquele mostrado na figura.

Devido a simplicidade do sistema de detecção, a análise destes resultados só pode ser feita de maneira semi-quantitativa. No entanto, é visível no item (c) da figura 4.20 uma maior dispersão do feixe. Este é precisamente o caso em que  $\omega = \omega_c$ .

A partir das figuras digitalizadas podemos medir a dispersão do feixe em torno da direção de incidência nas situações mostradas nos cinco itens da figura 4.20. Utilizando um programa de imagens é possível obter as curvas de intensidade versus posição, ao longo do diâmetro do feixe, mostradas na figura 4.22. Em alguns casos temos saturação da intensidade do feixe. Isso dificulta ainda mais a análise através do ajuste de gaussianas. Como os picos são definidos próximo a linha de base podemos medir a largura da linha próximo ao nível mínimo e avaliar esses valores. As linhas vermelhas horizontais indicam qual a região estimada para os valores dos raios médios do feixe sob diferentes condições.

Obtemos desta maneira a tabela 4.2.

A figura 4.23 mostra o gráfico dos parâmetros mostrados na tabela 4.2 em função do campo estático. A parte em amarelo mostra os valores do diâmetro médio para os casos (a) e (b) mostrados na figura 4.20. Observe que fora da ressonância, ou seja, quando o



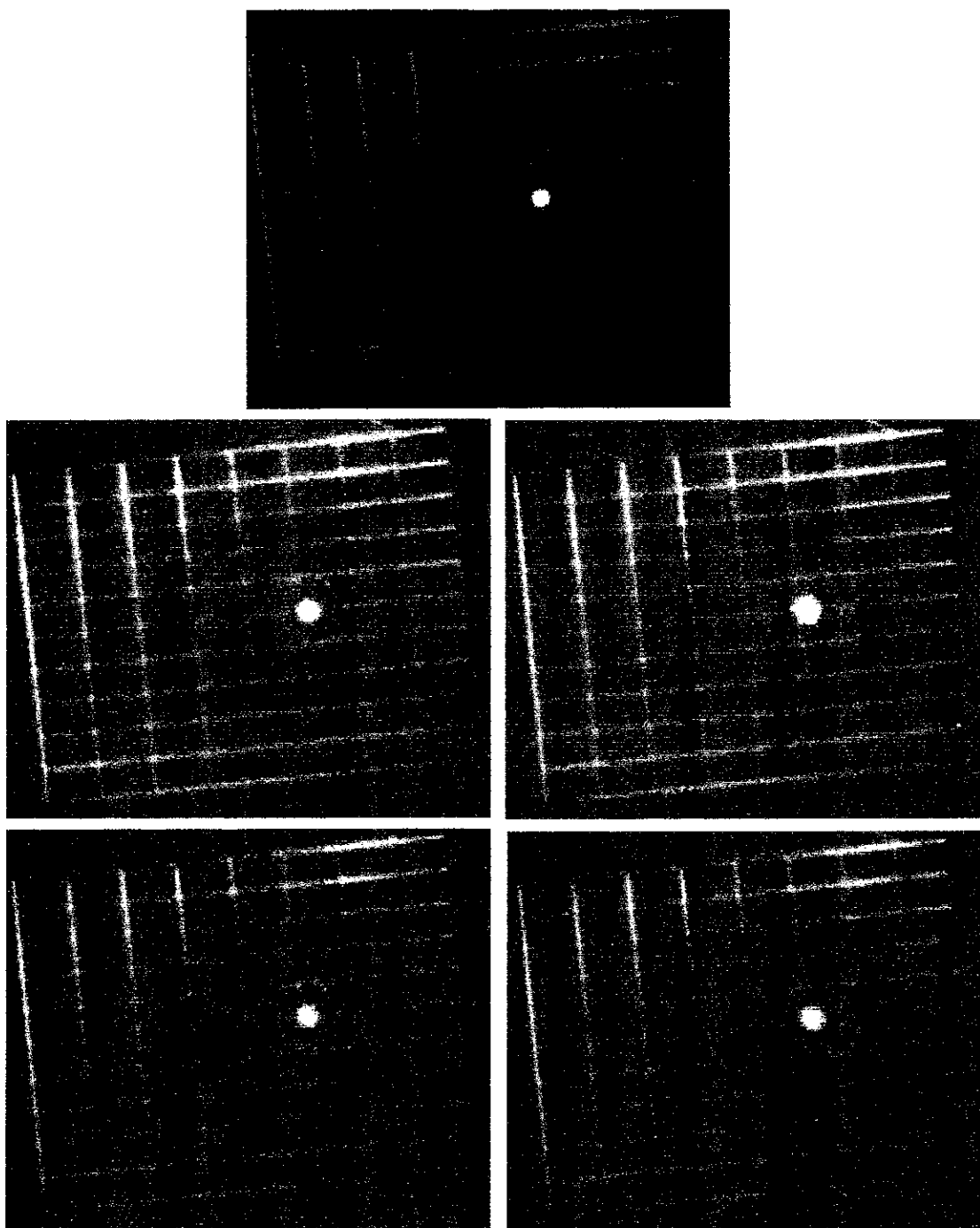


Figura 4.20: Fotografias do feixe  $\text{He}^+$  para as seguintes situações: (a) feixe sem campos magnéticos aplicados; (b) feixe na presença do campo estático  $B_0(I = 4,2 \text{ A}) = 10,4 \text{ mT}$ ; (c) feixe na presença do campo  $B_0$ , o mesmo do item (b), e do campo girante  $B_1$  de frequência  $\omega = \omega_c = \gamma B_0 = 2\pi 40 \text{ kHz} = 251,327 \text{ kHz}$  e módulo  $B_1(I = 108 \text{ mA}) = 0,093 \text{ mT}$ ; (d) feixe na presença do campo girante como dado no item anterior, porém com campo estático dado por  $B'_0 = B_0/2 = 5,2 \text{ mT}$ , portanto fora da condição de ressonância  $\omega = \omega'_c = \gamma B'_0$ . (e) feixe na presença do campo girante como dado no item (c), porém com campo estático dado por  $B'_0 = 20,8 \text{ mT}$ , novamente fora da condição de ressonância  $\omega = \omega''_c = \gamma B''_0$ . Observe que a frequência do campo girante equivale a metade da frequência de cíclotron neste caso,  $\omega = \omega_c = \omega''_c/2$ . O menor retângulo tem dimensões  $7,0 \text{ mm} \times 11,3 \text{ mm}$  e o fator de escala para as figuras vale 1,4.

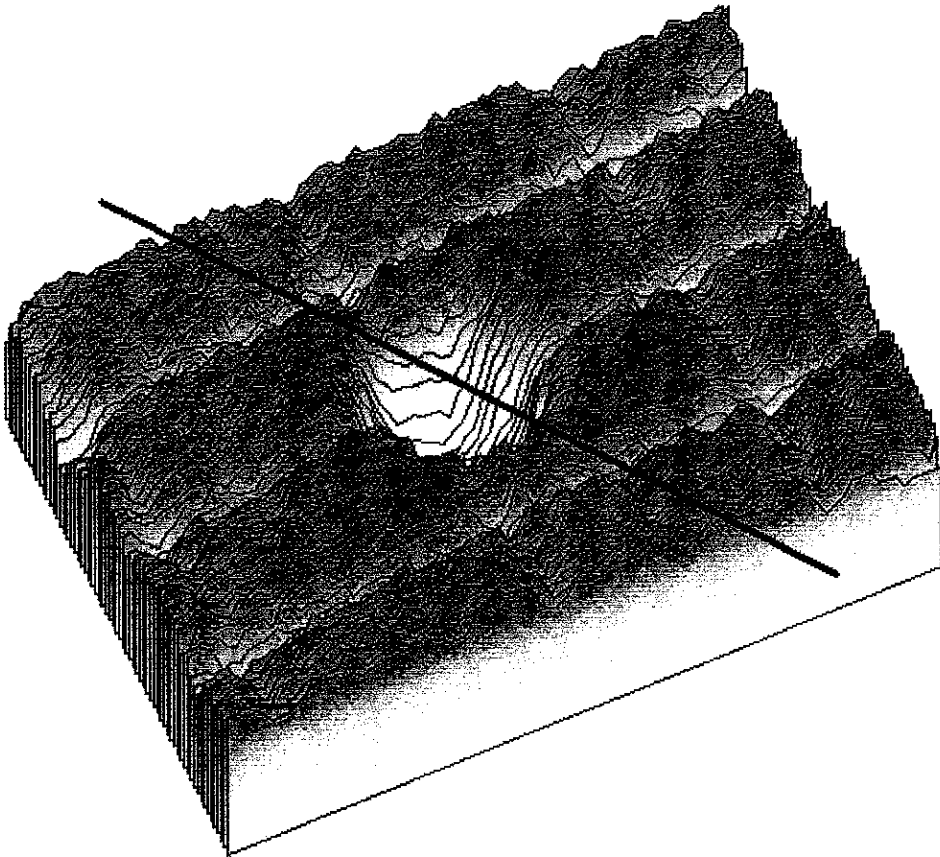


Figura 4.21: Superfície de intensidade do feixe correspondente ao item (c) da figura 4.20. A linha preta representa a direção do corte transversal sobre o qual as curvas de intensidades são analisadas (veja figura 4.22).

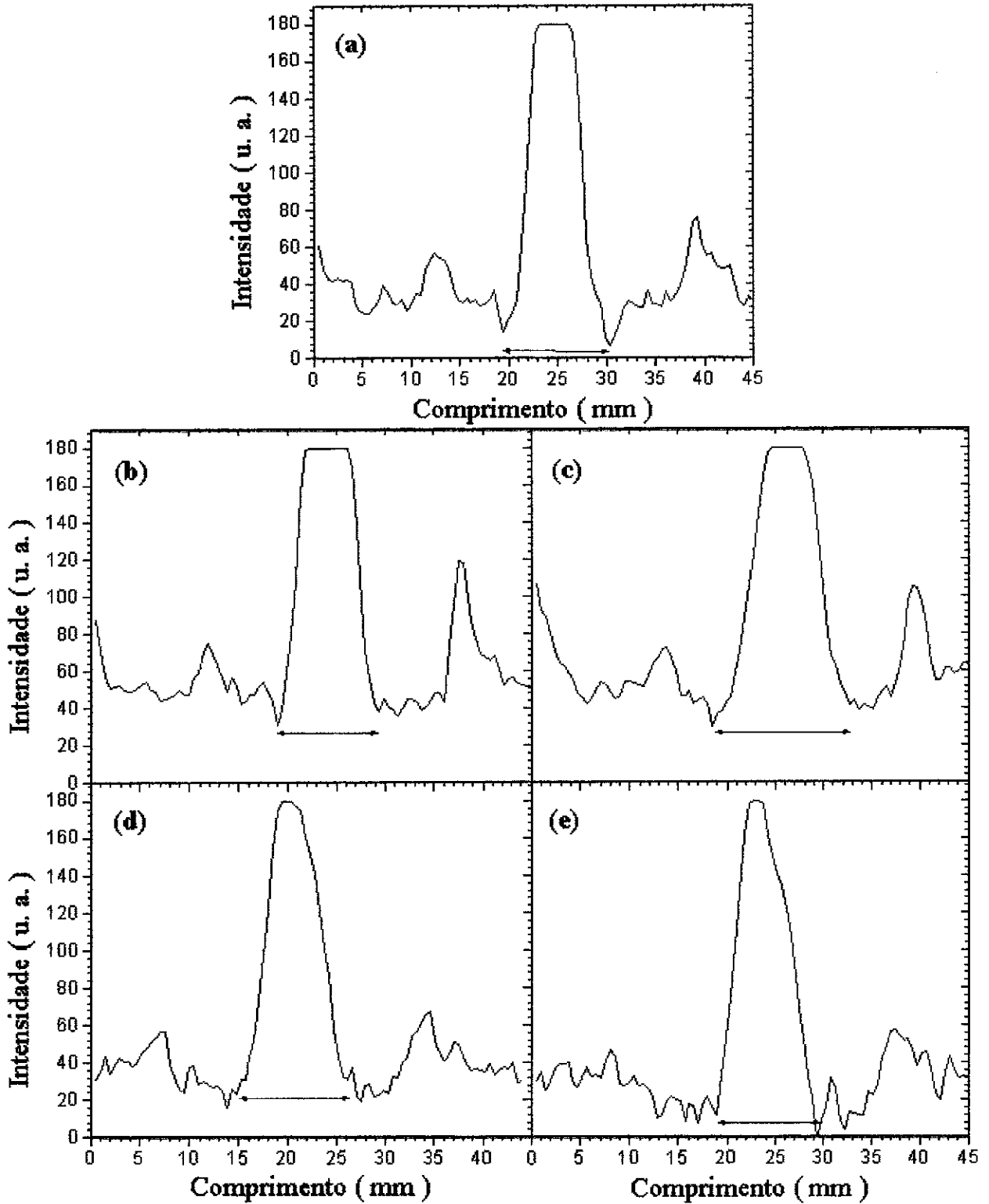


Figura 4.22: Gráficos mostrando a variação da intensidade ao longo do diâmetro do feixe. Os gráficos correspondem, respectivamente, às fotos mostradas na figura 4.20. As linhas vermelhas horizontais indicam qual a região estimada para os valores dos raios médios do feixe sob diferentes condições.

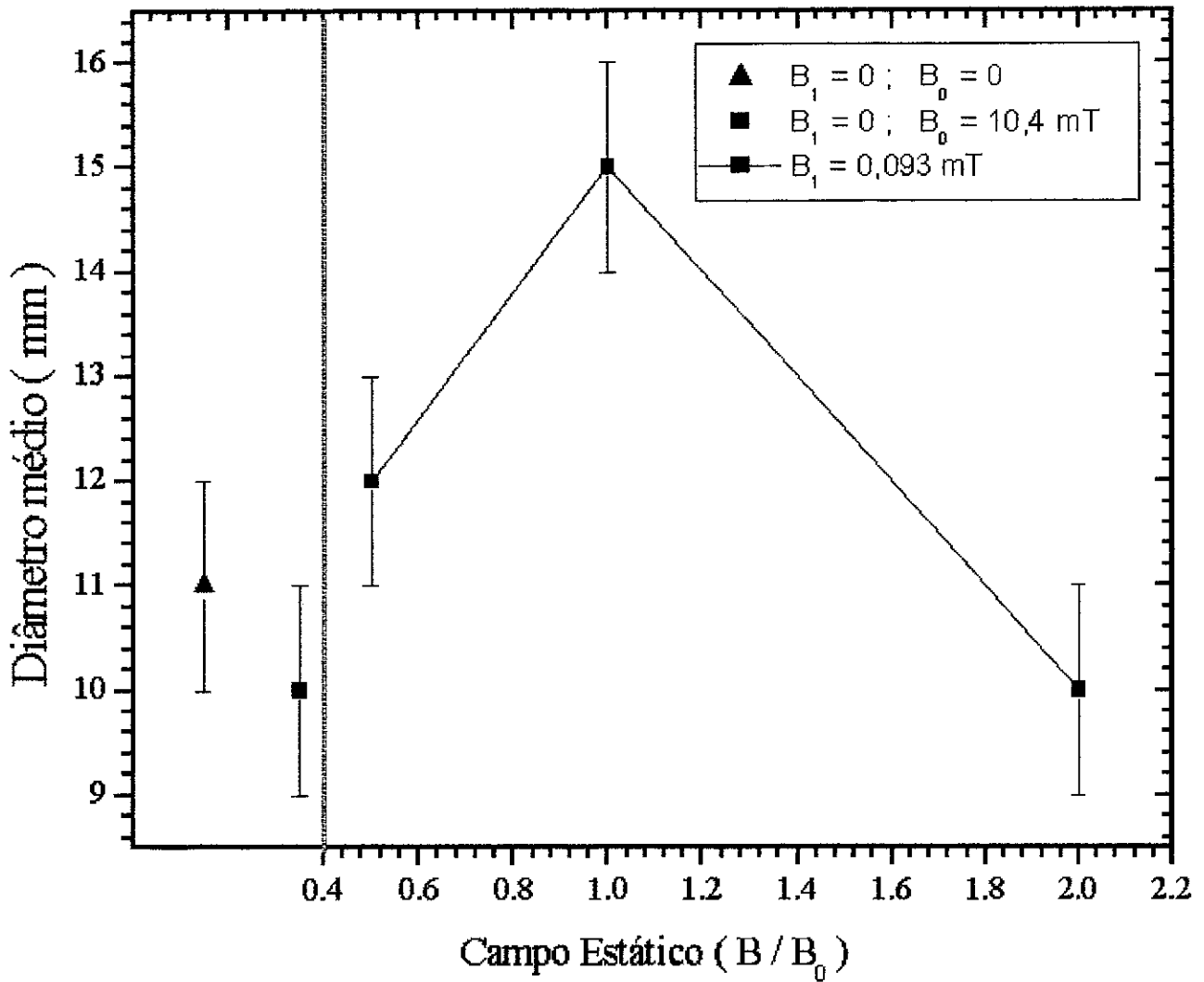


Figura 4.23: Gráfico dos parâmetros mostrados na tabela 4.2 em função do campo estático. A parte em amarelo mostra os valores do diâmetro médio para os casos (a) e (b) mostrados na figura 4.20.

campo estático é igual a  $B_0$ , os diâmetros médios não sofrem variações apreciáveis. Este resultado semi-quantitativo mostra indícios da existência do fenômeno ressonante. No entanto, será necessário aprimorar o sistema de detecção, como será sugerido em mais detalhes no Capítulo 5.

# Capítulo 5

## Conclusões

### 5.1 Resumo do Trabalho

Neste trabalho estudamos o movimento de uma partícula carregada em campos magnético e elétrico oscilantes.

O problema é simplificado quando usamos o conceito de um sistema girante de coordenadas. Neste sistema de coordenadas, podemos descrever o movimento em termos de um *lagrangeano efetivo*, e a forma da força de Lorentz é preservada. A partir daí aparece a similaridade entre as equações de movimento da partícula e aquelas de um conjunto de três osciladores harmônicos acoplados com termos de amortecimento anisotrópicos. O movimento da partícula é, então, descrito como uma superposição de autovetores de uma matriz dinâmica.

É mostrado que, quando a condição ressonante é alcançada, isto é, quando a frequência do campo girante ( $\omega$ ) se iguala à frequência de ciclotron da partícula ( $\omega_c$ ), esta é *confinada* na região de atuação dos campos magnéticos estático e girante. Neste caso, a órbita da partícula torna-se uma curva *fechada* no sistema girante de coordenadas, ou uma superfície fechada no sistema de coordenadas do laboratório. Os resultados sugerem um método ressonante para confinamento de partículas carregadas e separação isotópica.

Usando, em Mecânica Quântica, o equivalente a uma transformação para um sistema girante de coordenadas, encontramos uma expressão operacional para a função de onda da partícula no sistema de coordenadas do laboratório. Quando  $\omega = \omega_c$ , o hamiltoniano efetivo corresponde àquele de uma partícula carregada movendo-se em um campo *magnético estático*  $\mathbf{B}_{ef} = B_1\mathbf{i} - B_0\mathbf{k}$  e ainda sob a ação de um potencial elétrico  $\phi_{ef} = -\gamma B_0 B_1 X Z / 2$ ,

que pode ser considerado um termo de acoplamento entre os campos estático e oscilantes. Obtivemos as equações de movimento para os valores esperados das componentes de posição (conjunto de equações 3.57) e mostramos que são equivalentes às equações de movimento, obtidas classicamente, na condição ressonante (conjunto de equações 2.24), ou seja, quando a frequência do campo oscilante  $B_1$  iguala-se à frequência de cíclotron da partícula carregada ( $\omega = \omega_c = -\gamma B_0$ ). Com o objetivo de verificarmos algumas destas previsões teóricas, realizamos a montagem experimental descrita no Capítulo 4 para observarmos a trajetória inicial de um feixe de íons sob a ação de campos magnéticos estático e oscilantes, na condição ressonante. Para isto utilizamos íons de  $\text{He}^+$  com energia de 6,5 keV. O feixe de íons  $\text{He}^+$  é produzido em uma fonte tipo "Penning". Os módulos dos campos magnéticos usados no experimento foram de 0,2610 T para  $B_0$  ( $\omega_c = 200\pi$  kHz) e  $\approx 0,0001$  T para  $B_1$ . Estes campos são produzidos por um solenóide ( $B_0$ ) e dois pares de bobinas retangulares em uma configuração tipo Helmholtz, colocados em torno de um tubo de vidro, revestido internamente por duas camadas de filmes finos de aço e de cobre. A região de campo ressonante tem 20 cm de comprimento e, devido a um potencial de retardo de 4,0 kV, é atravessada pelas partículas em aproximadamente  $0,58 \mu\text{s}$ . A detecção é feita 1,90 m à frente, através da observação em uma tela fosforescente de um tubo de osciloscópio adaptado ao final da linha do acelerador. Resultados preliminares indicam que o feixe é desviado ressonantemente em aproximadamente 20 %.

## 5.2 Discussão dos Resultados Experimentais

A principal deficiência do aparato experimental montado está no sistema de detecção. No entanto, uma análise semi-quantitativa dos resultados alcançados, como mostram as figuras 4.20, 4.22 e 4.23, nos permite ver com otimismo investimentos nesta linha de pesquisa. O aprimoramento da técnica poderá ter resultados importantes tanto para a pesquisa básica quanto em aplicações industriais. Avanços neste sentido são sugeridos nas próximas seções.

## 5.3 Aprimoramento do Experimento

Abaixo são descritas algumas propostas de continuação do trabalho já realizado, através do aprimoramento do aparato experimental, que pode ser dividido em três etapas.

### 5.3.1 Redimensionamento do Experimento

Atualmente o solenóide e os dois pares de bobinas que produzem o campo girante se situam externamente à linha do acelerador. O conjunto pode ser modificado de modo a comportar as bobinas na parte interna do tubo. Esta modificação reduzirá a impedância do circuito ressonante, permitindo um ganho maior para uma dada potência fornecida aos pares de bobinas que geram o campo  $B_1$ . Uma outra vantagem desta modificação é a eliminação do uso do tubo de vidro metalizado.

### 5.3.2 Implementação da Detecção via Placa de Microcanais

O uso de uma placa de microcanais (*Microchannel Plate*) sensível a posição permite a observação de mudanças na posição do feixe com resolução de décimos de milímetros. Com este recurso, seremos também capazes de aumentar o tempo de aquisição de dados, o que permitirá uma maior precisão na medida. O controle do sistema de aquisição e o tratamento estatístico dos dados podem ser feitos automaticamente, utilizando um programa escrito em linguagem gráfica, por exemplo, *LabView* ou *DELPHI* [34].

### 5.3.3 Separação Ressonante de Isótopos de um Feixe

Isótopos de um feixe podem ser separados, selecionando-se uma espécie através da sintonia da frequência dos campos oscilantes na frequência de cíclotron correspondente. A escolha do projétil neste caso dependerá dos avanços obtidos nas etapas anteriores, mas um possível candidato é o Argônio.

### 5.3.4 Confinamento Ressonante

Esta etapa é uma extensão natural da etapa anterior. Essencialmente, seria necessária a readaptação das dimensões do aparato experimental. Será necessário ainda o desenvolvimento de um desacelerador a fim de reduzir a velocidade inicial do feixe a energias da ordem de alguns elétron-volts ou menos. Utilizando uma combinação de eletrodos que funcionam como lentes de retardo para feixes, podemos chegar a um feixe colimado de baixa energia. Simulações para a obtenção da melhor configuração de eletrodos foram feitas através de um programa de simulação de trajetória de íons, o SIMION. Devemos também melhorar o vácuo em pelo menos uma ordem de grandeza, diminuindo assim a

probabilidade de troca de carga do feixe durante o experimento.

## 5.4 Algumas Possíveis Extensões

A inclusão do spin da partícula através de um tratamento semi-clássico pode ser promissora como um posterior desenvolvimento dos resultados aqui apresentados.

Possíveis aplicações deste trabalho podem ser encontradas em separação isotópica, confinamento de átomos para evaporação por resfriamento, experimento de Stern-Gerlach em partículas carregadas, e ainda em confinamento de plasma. Um diferença notória em relação a outros métodos aparece devido ao fato de o tratamento dado aqui não aplicar gradientes de campo magnéticos.

Com vistas a estas possíveis aplicações, a partir do desenvolvimento teórico deste projeto e de uma proposta experimental, foi feito um pedido de patente (INPI - patente número PI 9705235), cuja cópia se encontra em anexo.



**INPI - DEINPI/DF**

**29 OUT 14 11 000717**

**DEPÓSITOS E PETIÇÕES  
DE PATENTES**

Protocolo

Espaço reservado para etiqueta

(Uso exclusivo do INPI)

**PETIÇÃO, RELACIONADA COM PEDIDO, PATENTE OU CERTIFICADO DE ADIÇÃO:**

**Ao Instituto Nacional da Propriedade Industrial:**

**1. Interessado:**

- 1.1 Nome: VITOR LUIZ BASTOS DE JESUS
- 1.2 CGC/CPF (se houver): 004.003.427-58
- 1.3 Endereço completo: CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS -CBPF  
Rua Xavier Sigaud 150, Urca, CEP 22290-180  
Rio de Janeiro, RJ
- 1.4 Telefone: ( )
- 1.5 FAX: ( ) ( ) continua em folha anexa

**2. Título da Invenção, do Modelo de Utilidade ou Certificado de Adição:**

SEPARADOR E CONFINADOR ELETROMAGNÉTICO RESSONANTE DE ISÓTOPOS

( ) continua em folha anexa

**3. Natureza:**

- 3.1 Invenção  3.1.1 Certificado de Adição  3.2. Modelo de Utilidade

**4. Referência:**

- 4.1 Pedido
- 4.2 Patente 4.3 N° ..PI. 9705235..... 4.4 Data: 30 de julho de 1997

**5. Procurador (74):**

- 5.1 Nome e CPF/CGC: EURY PEREIRA LUNA FILHO  
CPF 538.882.357-15
- 5.2 Endereço completo: Avenida W3 Norte, Quadra 507/B, sala 211  
PROJUR/CNPq/AC  
SEPN Brasília CEP 70740-911
- 5.3 Telefone: ( 61 ) 348-9307 - 348-9500
- 5.4 FAX: ( 61 ) 348-9499

# Apêndice A

## O Sistema Girante de Coordenadas

Consideremos um vetor genérico que seja função do tempo,  $\mathbf{W}(t)$ . Este vetor pode ser expresso em termos de suas componentes cartesianas  $W_x(t)$ ,  $W_y(t)$  e  $W_z(t)$  como

$$\mathbf{W}(t) = W_x(t)\mathbf{i} + W_y(t)\mathbf{j} + W_z(t)\mathbf{k}. \quad (\text{A.1})$$

No sistema de coordenadas do laboratório os versores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são constantes no tempo, mas imaginemos um sistema de coordenadas que gire com velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Este novo sistema de coordenadas possui versores  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  e  $\mathbf{k}'$  que, em relação ao sistema de coordenadas do laboratório, são funções de  $t$ . Podemos escrever o vetor  $\mathbf{W}(t)$  neste novo sistema de coordenadas como

$$\mathbf{W}(t) = W'_x(t)\mathbf{i}' + W'_y(t)\mathbf{j}' + W'_z(t)\mathbf{k}'. \quad (\text{A.2})$$

As taxas de variação dos versores  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A derivada temporal do vetor  $\mathbf{W}(t)$  será, portanto, dada por

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{dW_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dW_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dW_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d}{dt} (W'_x(t)\mathbf{i}' + W'_y(t)\mathbf{j}' + W'_z(t)\mathbf{k}'). \quad (\text{A.4})$$

Desenvolvendo o lado direito encontramos

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{dW'_x}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dW'_y}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dW'_z}{dt}\mathbf{k}' + W'_x\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + W'_y\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + W'_z\frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo as derivadas dos versores em relação ao tempo (equações A.3), temos

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{dW'_x}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dW'_y}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dW'_z}{dt}\mathbf{k}' + \boldsymbol{\omega} \times (W'_x\mathbf{i}' + W'_y\mathbf{j}' + W'_z\mathbf{k}'), \quad (\text{A.6})$$

ou, em uma forma compacta,

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{W}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $\mathbf{W}$  está escrito em termos de suas coordenadas no sistema girante.  $\delta\mathbf{W}/\delta t$  representa a taxa de variação do vetor  $\mathbf{W}$  com respeito a este sistema de coordenadas.

De maneira análoga, podemos obter a relação da derivada segunda de  $\mathbf{W}$  entre os sistemas de coordenadas girantes e do laboratório. Derivando A.6 encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{W}}{dt} &= \frac{d^2W'_x}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2W'_y}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2W'_z}{dt^2}\mathbf{k}' + \\ &+ \frac{dW'_x}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dW'_y}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dW'_z}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}(W'_x\mathbf{i}' + W'_y\mathbf{j}' + W'_z\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo as equações A.3 e A.6 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{W}}{dt^2} &= \frac{d^2W'_x}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2W'_y}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2W'_z}{dt^2}\mathbf{k}' + \\ &+ 2\boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{dW'_x}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dW'_y}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dW'_z}{dt}\mathbf{k}' \right) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (W'_x\mathbf{i}' + W'_y\mathbf{j}' + W'_z\mathbf{k}')), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ou

$$\frac{d^2\mathbf{W}}{dt^2} = \frac{\delta^2\mathbf{W}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{W}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}). \quad (\text{A.10})$$

onde  $\mathbf{W}$  está expresso em termos de suas coordenadas no sistema girante. A relação acima é válida para qualquer vetor  $\mathbf{W}$ .

# Apêndice B

## As Raízes da Equação Secular de Sexta Ordem

Neste apêndice analisaremos as possíveis soluções da equação 2.43, dada por

$$p^6 + ap^4 + bp^2 + c = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \omega^2 + \omega_1^2 + (\omega - \omega_c)^2, \\ b &= \omega^2 \left[ (\omega - \omega_c)^2 + \frac{3\omega_1^2}{4} \right], \\ c &= \frac{1}{4}\omega_1^2\omega^3(\omega - \omega_c). \end{aligned}$$

A equação B.1 fornece as autofreqüências de uma partícula carregada, sob a ação dos campos elétrico e magnético dados por 2.17 e 2.18. A solução geral pode ser escrita como uma combinação linear do tipo [27]

$$\mathbf{X} = A_1\mathbf{X}_o^{(1)}e^{p_1t} + A_2\mathbf{X}_o^{(2)}e^{p_2t} + A_3\mathbf{X}_o^{(3)}e^{p_3t} + A_4\mathbf{X}_o^{(4)}e^{p_4t} + A_5\mathbf{X}_o^{(5)}e^{p_5t} + A_6\mathbf{X}_o^{(6)}e^{p_6t}, \quad (\text{B.2})$$

onde as constantes  $A_n$  são determinadas pelas condições iniciais.  $\mathbf{X}_o^{(n)}$  é o autovetor de  $n$ -ésima ordem, associado à  $n$ -ésima raiz  $p_n$  da equação B.1.

A partir de B.2 podemos observar que, se as raízes  $p_n$  forem números imaginários puros, teremos soluções oscilantes no tempo, o que caracteriza o *confinamento* da partícula. Por outro lado, se as raízes forem reais ou complexas (com parte real não-nula), aparecerão termos exponenciais que levam à solução não-confinada da partícula. Para raízes idênticas,

$p_1 = p_2$  por exemplo, os autovetores  $X_o^{(1)}$  e  $X_o^{(2)}$  serão idênticos levando a uma solução do tipo

$$\mathbf{X} = (A_1 + A_2 t)\mathbf{X}_o^{(1)} e^{p_1 t} + A_3 \mathbf{X}_o^{(3)} e^{p_3 t} + A_4 \mathbf{X}_o^{(4)} e^{p_4 t} + A_5 \mathbf{X}_o^{(5)} e^{p_5 t} + A_6 \mathbf{X}_o^{(6)} e^{p_6 t}, \quad (\text{B.3})$$

em que aparece um termo de arrastamento linear. Para o caso  $p_1 = p_2 = 0$ , a solução B.3 se iguala àquela em 2.46.

Na primeira parte deste apêndice analisaremos quais os tipos de raízes possíveis e na segunda parte faremos uma análise gráfica do problema.

## B.1 Análise das Raízes

Chamando  $\lambda = p^2$ , podemos escrever B.1 como uma equação do terceiro grau em  $\lambda$

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (\text{B.4})$$

Denominando  $\lambda_r$  uma raiz *real* da equação B.4, devemos lembrar que:

- Se  $\lambda_r$  for positivo teremos  $p \rightarrow \text{real}$ . Neste caso não haverá confinamento.
- Se  $\lambda_r$  for negativo teremos  $p \rightarrow \text{imaginário puro}$  e, portanto, soluções oscilantes, que contribuem para o confinamento da partícula.

Denominando  $\lambda_c$  uma raiz complexa do tipo  $\rho e^{i\theta}$  teremos  $p = \pm\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$ , e podemos dizer que:

- Se  $p$  for imaginário puro ( $\theta = (2n + 1)\pi$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) teremos termos que contribuem para o confinamento.
- Se a parte real de  $p$  for positiva teremos um termo que leva a um arrastamento exponencial da partícula.
- Se a parte real de  $p$  for negativa teremos um termo que leva a um amortecimento exponencial da amplitude do movimento.

Chamando de  $z_1, z_2$  e  $z_3$  as raízes da equação B.4, podemos escrever

$$(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)(\lambda - z_3) = 0$$

ou

$$\lambda^3 - (z_1 + z_2 + z_3)\lambda^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)\lambda - z_1z_2z_3 = 0. \quad (\text{B.5})$$

Comparando a equação B.5 com a equação B.4 podemos escrever os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  como

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3),$$

$$b = (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3),$$

$$c = -z_1z_2z_3.$$

Como a equação B.4 tem coeficientes reais, sendo  $a$  e  $b$  sempre positivos, teremos as seguintes possibilidades para as raízes.

- *Três Raízes Complexas*

Supondo  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  complexos, podemos escrever

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

$$z_3 = \rho_3 e^{i\theta_3}.$$

Neste caso, a constante  $c$  será dada por

$$c = -\rho_1\rho_2\rho_3 e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}.$$

Como  $c$  é real, devemos ter

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi,$$

onde  $n$  é inteiro.

Por outro lado, a constante  $b$  será dada por

$$b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} + \rho_1\rho_3 e^{i(\theta_1+\theta_3)} + \rho_2\rho_3 e^{i(\theta_2+\theta_3)}.$$

Como  $\theta_1 + \theta_2 \neq n\pi$ ;  $\theta_1 + \theta_3 \neq n\pi$  e  $\theta_2 + \theta_3 \neq n\pi$ , teríamos a constante  $b$  complexa. Isto exclui a possibilidade de obtermos 3 raízes complexas em nosso problema.

- *Apenas Uma Raiz Real*

Para termos uma raiz real podemos escolher a raiz  $z_3$  com  $\theta_3 = 0$ . Assim teremos a constante  $c$  dada por

$$c = -\rho_1\rho_2\rho_3e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

e, então, para que  $c$  seja real temos

$$\theta_1 + \theta_2 = n\pi,$$

onde  $n$  é inteiro.

A constante  $b$  será, neste caso,

$$b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \rho_1\rho_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} + \rho_3(\rho_1e^{i\theta_1} + \rho_2e^{i\theta_2}),$$

e a constante  $a$

$$a = -(\rho_1e^{i\theta_1} + \rho_2e^{i\theta_2} + \rho_3).$$

Para que as constantes  $a$  e  $b$  sejam reais, é necessário que a soma  $\rho_1e^{i\theta_1} + \rho_2e^{i\theta_2}$  seja real. Usando o fato de  $\theta_1 + \theta_2 = n\pi$ , obtemos  $\rho_1 = \rho_2\cos(n\pi)$ . Logo, se tivermos uma raiz real, as outras duas serão necessariamente complexas conjugadas.

- *Apenas Uma Raiz Complexa*

Neste caso, escolhemos  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ . As constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dadas por

$$c = -\rho_1\rho_2\rho_3e^{i\theta_1},$$

$$b = (\rho_2 + \rho_3)\rho_1e^{i\theta_1} + \rho_2\rho_3,$$

$$a = -(\rho_1e^{i\theta_1} + \rho_2 + \rho_3).$$

Uma simples inspeção das relações acima mostra que os coeficientes serão reais se  $\theta_1 = n\pi$ , ou seja, *não* podemos ter duas raízes reais e uma complexa.

- *Três Raízes Reais*

Neste caso temos  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$  e não há restrições.

Em suma, em nosso problema podemos ter:

- Uma raiz real e duas complexas conjugadas, ou

- Três raízes reais.

No último caso teremos as constantes dadas por

$$a = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3),$$

$$b = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3,$$

$$c = -\rho_1\rho_2\rho_3.$$

Não podemos obter todas as raízes positivas, porque  $a > 0$ . Por outro lado, poderemos encontrar todas as raízes negativas. Isso é um fato importante, como já foi comentado, levando a termos oscilantes que contribuem para o confinamento da partícula. Neste caso, as constantes  $a$  e  $b$  serão sempre positivas e  $c > 0$ . Ou seja, três raízes negativas quando  $\omega > \omega_c$ , caracterizando *confinamento não-ressonante*.

As constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  dependem da razão carga-massa da partícula, da magnitude dos campos magnéticos aplicados ( $B_0$  e  $B_1$ ) e da frequência do campo oscilante aplicado  $B_1$ . Em um dado experimento, devemos portanto analisar cuidadosamente as condições para cada isótopo envolvido. Na próxima seção faremos uma análise gráfica do problema, utilizando como exemplo íons de cinco isótopos do urânio  $^{233}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ .

## B.2 Análise Gráfica

Sabemos que basta uma raiz da equação B.4 ser positiva para que não haja confinamento da partícula. No Capítulo 2 mostramos que o confinamento ocorre quando a frequência do campo magnético oscilante  $B_1$  se iguala à frequência de ciclotron da partícula, ou seja, quando  $\omega = \omega_c$ . No final da seção anterior mostramos que o confinamento pode ocorrer se tivermos 3 raízes reais e negativas da equação B.4. Faremos uma análise gráfica neste caso, mostrando como a equação B.4 se comporta em função da frequência para o caso dos isótopos do urânio:  $^{233}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ .

As figuras B.1 e B.2 mostram a função  $f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$  no caso em que  $c > 0$ , ou seja  $\omega > \omega_c$ , possuindo uma raiz negativa real e duas complexas conjugadas ( $a = 120$ ,  $b = 1800$  e  $c = 11000$ ) e no caso em que a função possui três raízes reais negativas ( $(a = 116$ ,  $b = 1600$  e  $c = 4000)$ ), respectivamente.

Na frequência de ressonância ( $\omega = \omega_c$ ) temos  $c = 0$  e  $f(\lambda)$  possui uma raiz nula e duas raízes reais negativas. Este caso é discutido no Capítulo 2. Quando  $\omega > \omega_c$ , os dois



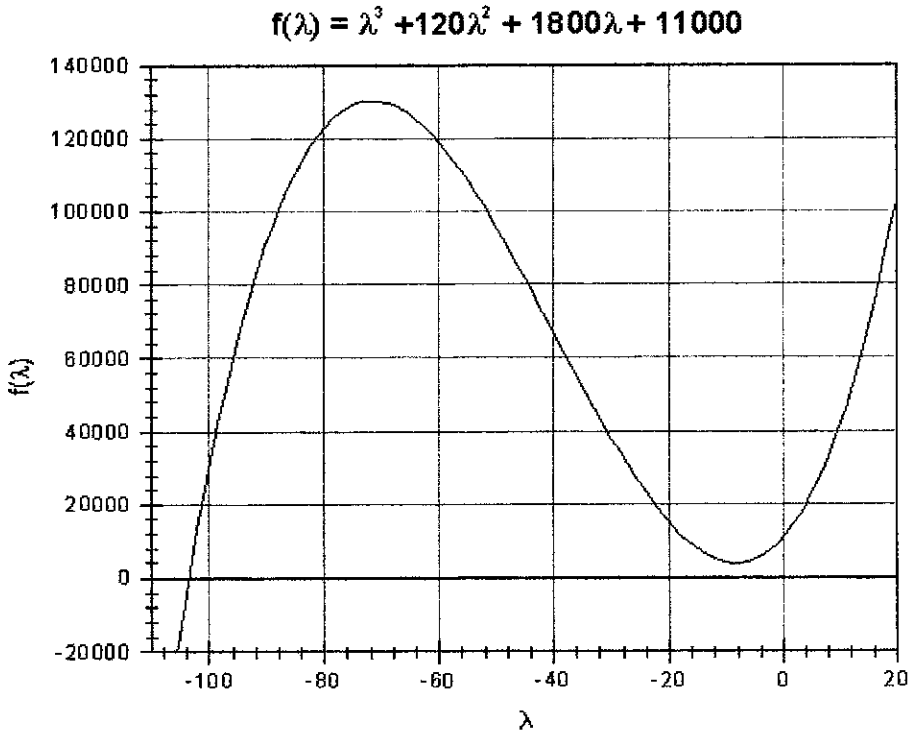


Figura B.1: Representação gráfica da função  $f(\lambda)$  para o caso em que  $c > 0$ , o que implica em  $\omega > \omega_c$ , quando a solução corresponde a duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real negativa.

casos mostrados nas figuras B.1 e B.2 podem acontecer. Analisando o ponto de mínimo da função  $f(\lambda)$  é possível saber quando o problema terá soluções que levam ou não ao confinamento. Isto pode ser feito a partir de um gráfico da função  $f(\lambda)$  no ponto de mínimo em função da frequência  $\omega$ . Em resumo:

- $f(\lambda_{min}) > 0 \rightarrow$  uma raiz real negativa e duas raízes complexas conjugadas (não há possibilidade de confinamento);
- $f(\lambda_{min}) < 0 \rightarrow$  três raízes reais negativas não nulas (há confinamento).

Os pontos de máximo e mínimo podem se encontrados a partir de

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0,$$

e daí encontramos

$$\lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \Delta}{3},$$

onde  $\Delta = (a^2 - 3b)^{1/2}$ . A partir da derivada segunda  $f''(\lambda) = 6\lambda + 2a$  encontramos

$$f''(\lambda_-) = -2\Delta < 0$$

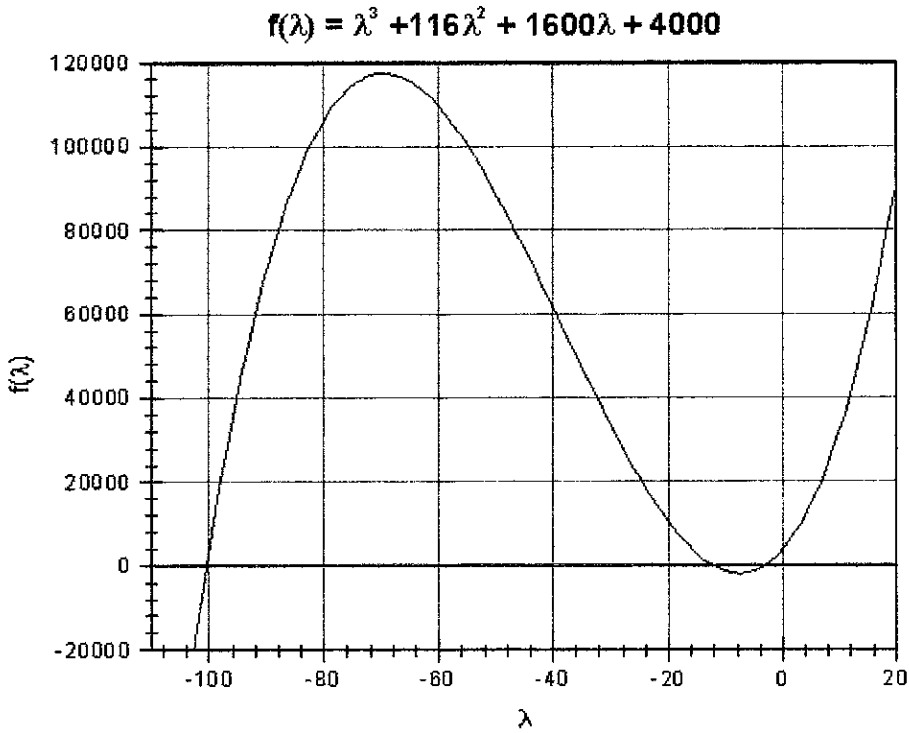


Figura B.2: Representação gráfica da função  $f(\lambda)$  para o caso em que  $c > 0$ , o que implica em  $\omega > \omega_c$ , quando a solução corresponde a três raízes reais negativas.

e

$$f''(\lambda_+) = +2\Delta > 0,$$

mostrando que  $\lambda_-$  é ponto de máximo e  $\lambda_+$  é ponto de mínimo.

A figura B.3 mostra as curvas para  $f(\lambda_+)$  em função da frequência do campo magnético oscilante  $B_1$ ,  $\omega$ , para os isótopos triplamente ionizados do urânio  $^{233}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ . Este isótopos estão submetidos aos campos  $B_1 = 0,01 \text{ T}$  e  $B_0 = 1 \text{ T}$ . As curvas para cada isótopo cortam o eixo horizontal em dois pontos: o primeiro alguns Hertz acima da frequência de ressonância de ciclotron, que neste caso é da ordem de MHz, e o segundo a cerca de 50 kHz acima do primeiro. Entre estes dois pontos, a partícula não será confinada, ( $f(\lambda_+) > 0$ ), podendo isto acontecer somente em uma região de alguns Hertz acima de  $\omega_c$  e para frequências acima do segundo ponto onde  $f(\lambda_+)$  corta o eixo horizontal.

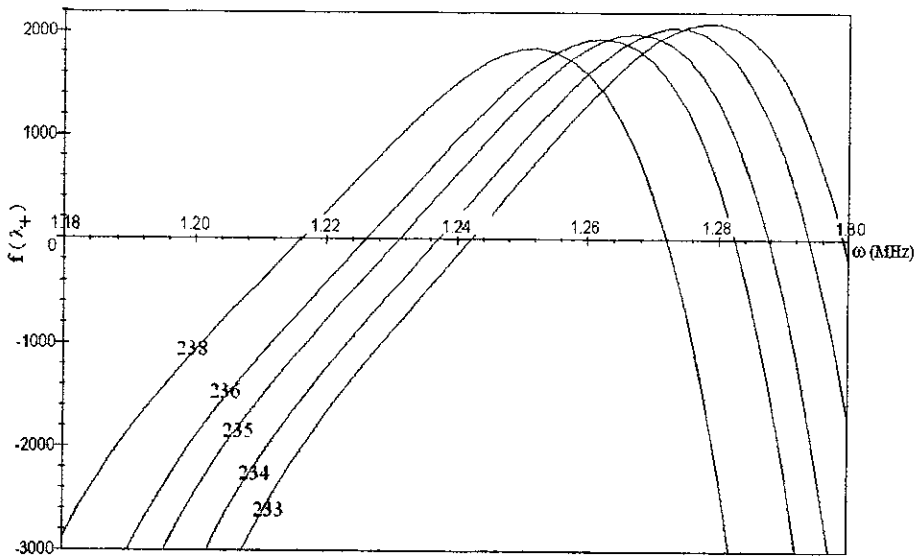


Figura B.3: Curvas da função  $f(\lambda_+)$  em função da frequência do campo magnético oscilante  $B_1$ ,  $\omega$ , para os isótopos triplamente ionizados do urânio:  $^{233}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$ . Estes isótopos estão submetidos aos campos  $B_1 = 0,01$  T e  $B_0 = 1$  T.

# Apêndice C

## Movimento Vinculado de uma Partícula Carregada sob a Ação de um Campo Magnético

### C.1 Introdução

O movimento clássico de uma partícula carregada  $q$  em um campo magnético  $\mathbf{B}$  é descrito em livros introdutórios de eletromagnetismo através da força de Lorentz ([35], seção 29.2)

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula.

Se, em lugar de uma única partícula, existir uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$ , definida como  $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$ , onde  $n$  é a densidade de partículas, a equação C.1 pode ser reescrita como

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (\text{C.2})$$

Por outro lado, os livros de eletromagnetismo ([36], seção 5.6) mostram que, para uma distribuição de corrente, pode-se definir um *momento de dipolo magnético*  $\mathbf{m}$ , o qual relaciona-se com  $\mathbf{J}$  através da equação

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) d^3r', \quad (\text{C.3})$$

onde a integração se estende sobre toda a região da corrente. Para um momento magnético pontual na presença de um campo magnético, a equação de movimento para  $\mathbf{m}$  pode ser

derivada da equação de movimento do momento angular mecânico,  $\mathbf{\Lambda}$ , e adotando a relação de proporcionalidade entre  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{m} = \gamma\mathbf{\Lambda}$  ([22], seção 2.1),

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma\mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (\text{C.4})$$

No caso simples de uma trajetória circular de raio  $a$ ,  $\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{n}}$ , onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal ao plano do círculo e  $I$  é a corrente elétrica. Da equação C.4 vemos que o torque máximo ocorre quando  $\mathbf{m}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ . Então, se o campo magnético estiver ao longo do eixo  $z$  e  $\mathbf{m}$  inicialmente ao longo do eixo  $x$ , a equação C.4 simplesmente nos mostra que este vetor sofrerá uma rotação no plano  $xy$  com frequência angular igual a  $\omega = \gamma|\mathbf{B}|$ .

Apesar da semelhança entre as equações C.2 e C.4, esta última não é obtida diretamente da primeira usando a equação C.3. A referência [36] (seção 5.7) mostra que, para uma distribuição geral de corrente,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ , a equação C.4 toma a forma mais geral

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \frac{q}{2m} \int \mathbf{r}' \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \mathbf{B}] d^3r'. \quad (\text{C.5})$$

Aqui consideraremos um caso ilustrativo de uma distribuição de corrente não-estacionária devida ao movimento de uma partícula carregada vinculada a se mover sobre uma superfície esférica, sob a ação de um campo magnético. A trajetória e o momento angular canônico da partícula são calculados numericamente e comparados ao movimento de um momento magnético pontual sob a ação desse mesmo campo magnético.

## C.2 Equações de Movimento

Considere uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$  vinculada a se mover sobre uma superfície esférica de raio  $r = a$ . Um campo magnético  $B_0$  é aplicado ao longo do eixo  $z$  ( $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$ ). O potencial vetor associado ao campo magnético pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{B}}{2} = \frac{B_0}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \quad (\text{C.6})$$

A partir da equação C.6, podemos encontrar o lagrangeano associado

$$\mathcal{L} = T + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qB_0}{2}y\dot{x} + \frac{qB_0}{2}x\dot{y}. \quad (\text{C.7})$$

Como a partícula carregada está confinada a se mover na superfície de uma esfera de raio  $r = a$ , temos o vínculo

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0. \quad (\text{C.8})$$

Para tratar este problema precisamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Para uma única equação de vínculo, temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \lambda a_k, \quad (\text{C.9})$$

onde  $k = 1, 2, 3 \dots n$  corresponde à  $k$ -ésima coordenada generalizada,  $\lambda$  é o multiplicador indeterminado de Lagrange e os coeficientes  $a_k$  são obtidos a partir da equação de vínculo escrita na forma

$$\sum_k a_k \dot{q}_k + a_t. \quad (\text{C.10})$$

Escrevendo a equação C.8 na forma da equação C.10, encontramos

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Comparando as equações C.11 e C.10, chegamos aos coeficientes:  $a_1 = x$ ,  $a_2 = y$ ,  $a_3 = z$  e  $a_t = 0$ . As equações de movimento são

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \gamma B_0 \dot{y} + (\lambda/m)x, \\ \ddot{y} &= -\gamma B_0 \dot{x} + (\lambda/m)y, \\ \ddot{z} &= (\lambda/m)z, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

onde  $\gamma = q/m$  é a razão carga-massa. O conjunto das equações de movimento C.12 pode ser colocado na forma matricial 2.36, onde as matrizes  $\tilde{\mathbf{D}}$  e  $\tilde{\mathbf{W}}$  são agora dadas por

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

e

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \lambda/m & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/m \end{pmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

onde  $\omega_c = \gamma B_0$ .

A solução é obtida a partir do conjunto de equações C.12 juntamente com a equação de vínculo C.11. O sistema de coordenadas retangulares não parece ser o mais simples para a solução deste problema. Devido à simetria esférica imposta pelo vínculo, a solução deve apresentar-se de forma mais simples em um sistema de coordenadas esféricas.

Em coordenadas esféricas o campo magnético pode ser descrito por um potencial vetor dado por

$$\mathbf{A} = A_\varphi \hat{\varphi} = \frac{B_0}{2} r \sin\theta \hat{\varphi}. \quad (\text{C.15})$$

A lagrangeana é dada por [26] (seção 1.5)

$$\mathcal{L} = T + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi} \sin\theta)^2] + \frac{qB_0}{2} r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}. \quad (\text{C.16})$$

Como o lagrangeano não depende da coordenada angular  $\varphi$ , a componente  $z$  do momento angular canônico é conservada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = L_z = ma^2 \sin^2\theta \left( \dot{\varphi} + \frac{qB_0}{2m} \right) = \text{constante} = C. \quad (\text{C.17})$$

Aplicando as equações de Lagrange, obtemos as outras duas equações, relativas a  $r$  e  $\theta$

$$ma[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \left( \dot{\varphi} + \frac{qB_0}{m} \right) \sin^2\theta] = -\lambda, \quad (\text{C.18})$$

$$\left[ \ddot{\theta} - \frac{\dot{\varphi}}{2} \left( \dot{\varphi} + \frac{qB_0}{m} \right) \sin 2\theta \right] = 0, \quad (\text{C.19})$$

onde  $\lambda$  é um multiplicador indeterminado de Lagrange.

Desde que as únicas variáveis de movimento são  $\theta$  e  $\varphi$ , o problema pode ser completamente resolvido usando as equações C.17 e C.19. A equação C.18 fornece o vínculo. Observamos que na ausência do campo magnético,  $\lambda = -mv_0^2/a$  é a força centrípeta, com  $v_0^2 = a^2[\dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi} \sin\theta)^2]$ . O termo proporcional a  $B_0$  aparece devido à variação do fluxo magnético através do caminho percorrido pela partícula. Este termo é responsável pelo efeito diamagnético observado em átomos e moléculas ([19], seção 2.1).

A constante de movimento  $C$  na equação C.17 é obtida a partir das condições iniciais. O caso mais simples corresponde à escolha  $\theta(0) = \varphi(0) = 0$  e  $\dot{\theta}(0) = \omega = v_0/a$ . Estas condições descrevem uma partícula começando seu movimento a uma distância  $a$  da origem sobre o eixo  $z$  com velocidade inicial  $v_0$  ao longo do eixo  $x$ . Recolocando estas condições na equação C.17, encontramos  $C = 0$ . Neste caso, a solução para a coordenada angular  $\varphi$  é

$$\varphi(t) = \left( -\frac{q}{2m} B_0 \right) t = \omega_L t, \quad (\text{C.20})$$

onde  $\omega_L = -qB_0/2m$  é a frequência de Larmor. Recolocando  $\dot{\varphi} = \omega_L$  na equação C.19 para  $\ddot{\theta}$ , encontramos

$$\ddot{\theta} + \omega_L^2 \sin\theta \cos\theta = 0. \quad (\text{C.21})$$

Multiplicando a equação C.21 pelo fator de integração  $2\dot{\theta}$  obtemos a equação:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2 + \omega_L^2 \sin^2 \theta) = 0,$$

a qual significa que a quantidade entre parênteses é também conservada. Esta quantidade corresponde à energia da partícula. Levando em conta as condições iniciais, encontramos

$$\dot{\theta}^2 + \omega_L^2 \sin^2 \theta = \omega^2$$

ou

$$\dot{\theta} = \omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad (\text{C.22})$$

onde  $k \equiv \omega_L/\omega$ . Portanto,

$$\omega t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{C.23})$$

Portanto, para valores arbitrários de  $k$ , a coordenada angular  $\theta$  deve ser expressa como uma integral elíptica, e esta não tem uma forma analítica simples. Se  $k \approx 0$ , o período de movimento em  $\theta$  é obtido integrando a equação C.23 entre 0 e  $2\pi$ :  $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi a/v_0$ . No limite oposto, isto é,  $k = 1$ , a relação entre  $\theta$  e  $t$  é dada por

$$\omega t = \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right),$$

a qual diverge para  $\theta = \pi/2$ .

As figuras C.1, C.2 e C.3 mostram as trajetórias da partícula e do seu momento angular canônico para os seguintes valores de  $k$ : 0,001, 0,5 e 1. As equações de movimento foram integradas numericamente usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem [37, 38] com passo  $h = 0,001$ . Um passo tão pequeno foi necessário a fim de observar os efeitos da divergência mencionada acima sobre a trajetória da partícula. Para  $k = 0,01$ , a partícula descreve um círculo, que gira em torno do eixo  $z$  (Fig. C.1). À medida que  $k$  aumenta, o movimento se torna mais complicado (Fig. C.2) e, para  $k = 1$ , a órbita da partícula é girada de 90 graus, e o movimento torna-se vinculado ao plano  $xy$  (Fig. C.3). As trajetórias para os mesmos valores de  $k$ , mas diferentes condições iniciais, são muito semelhantes àquelas mostradas nas respectivas figuras.

### C.3 Momento Angular

Além da trajetória da partícula, é interessante investigar o movimento de seu momento angular. Na presença de um campo magnético, devemos distinguir o momento angular



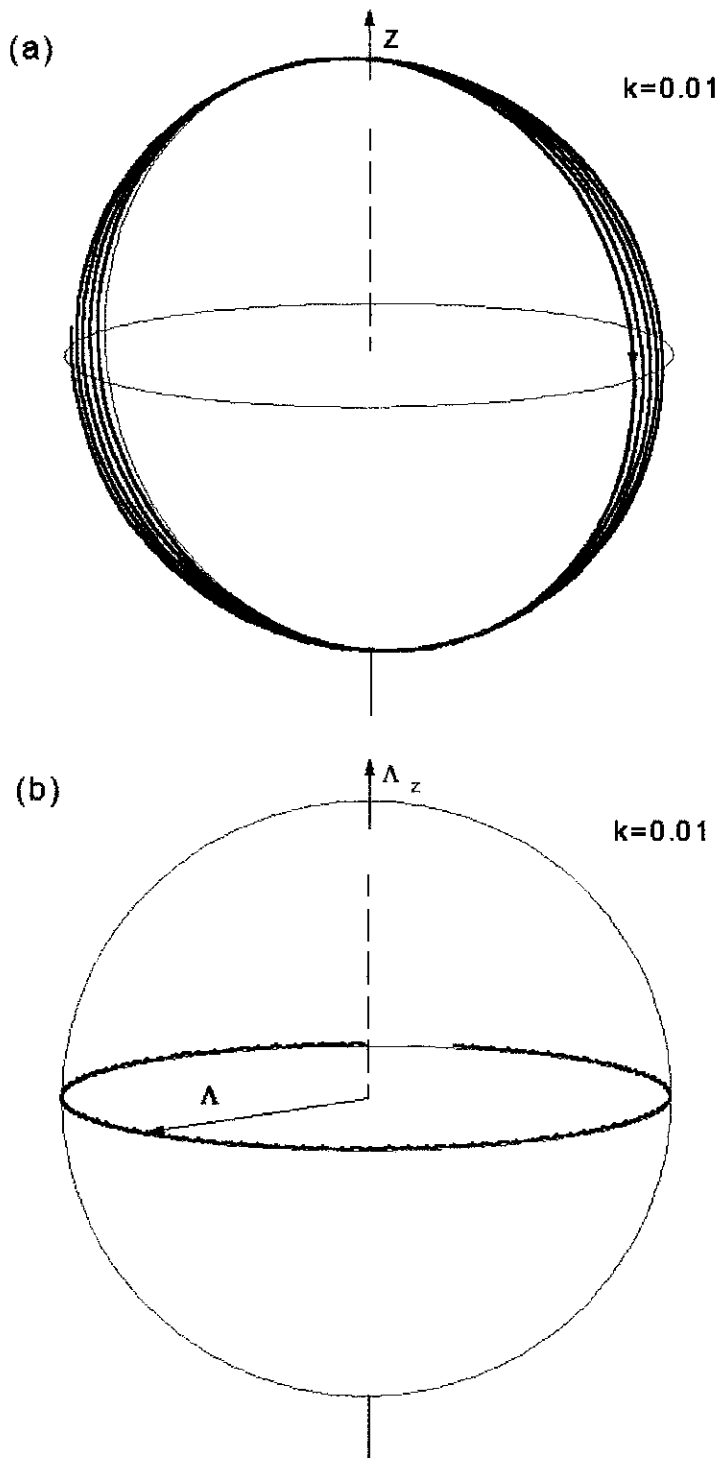


Figura C.1: Trajetórias da partícula e do momento angular canônico para  $k = 0,01$ . As condições iniciais são:  $\theta(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

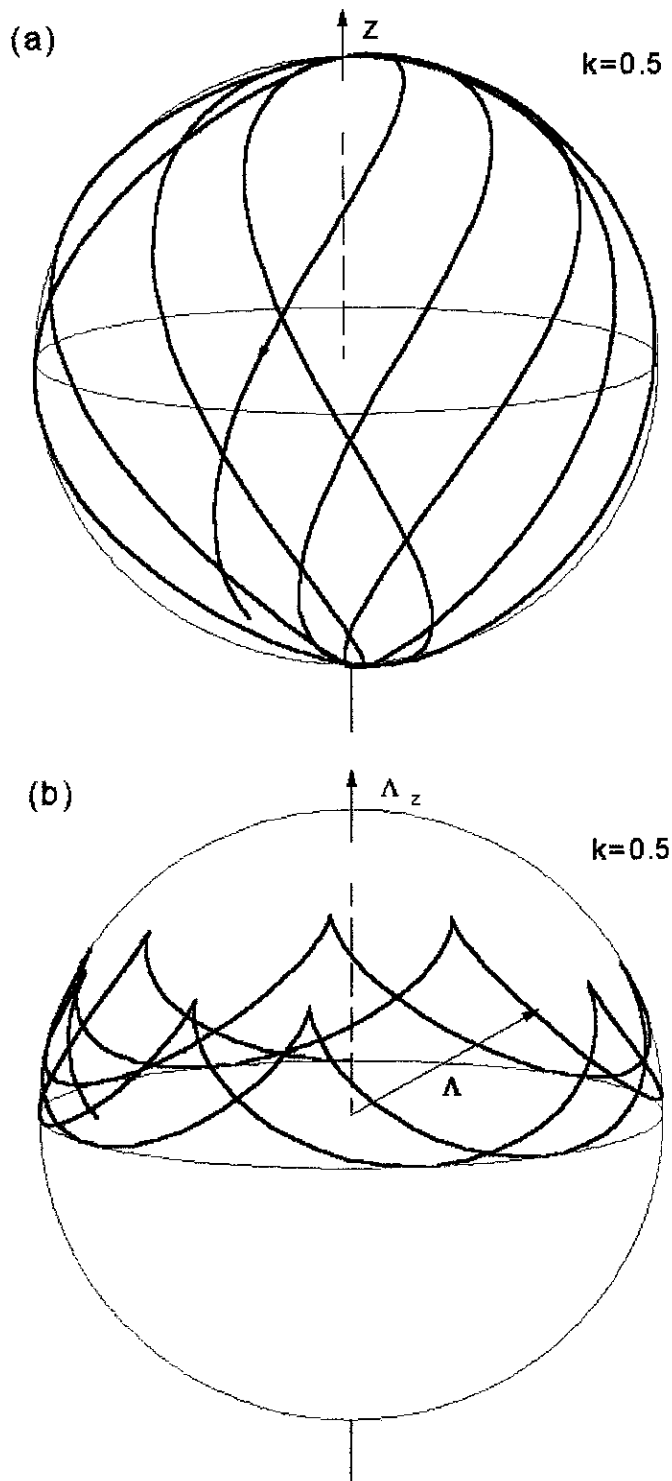


Figura C.2: Trajetórias da partícula e do momento angular canônico para  $k = 0,5$ . As condições iniciais são:  $\theta(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

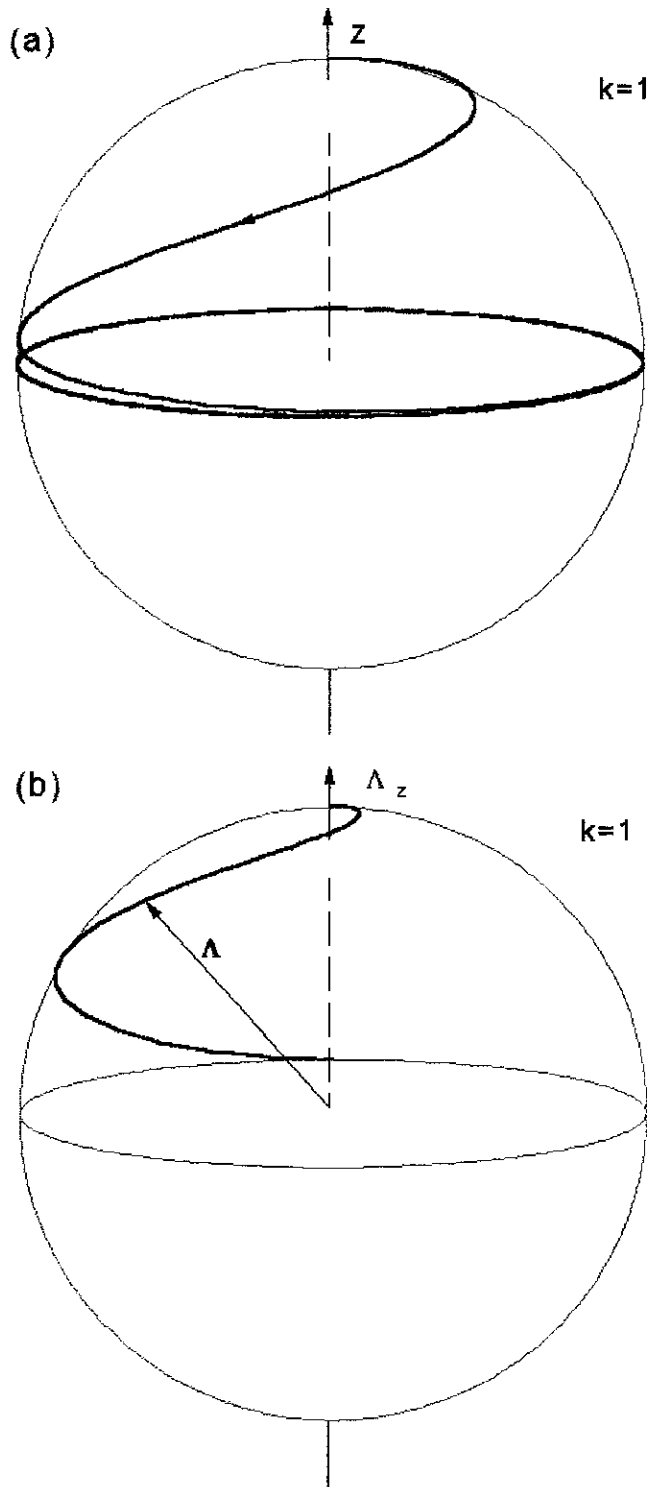


Figura C.3: Trajetórias da partícula e do momento angular canônico para  $k = 1$ . As condições iniciais são:  $\theta(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$  e  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

canônico,  $\mathbf{L}$ ,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}), \quad (\text{C.24})$$

do momento angular *mecânico*,  $\mathbf{\Lambda}$ ,

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (\text{C.25})$$

Desde que a transformação  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\zeta$ , onde  $\zeta$  representa qualquer função escalar, leva ao mesmo campo magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{L}$  não é unicamente definido ([36], seção 5.4).

Com o objetivo de simplificar a análise, vamos considerar o caso em que  $C = 0$ , como mostrado na figura C.1. Assim, obtemos

$$\mathbf{L} = ma^2\dot{\theta}\hat{\varphi} \quad (\text{C.26})$$

e

$$\mathbf{\Lambda} = ma^2(\dot{\theta}\hat{\varphi} - \omega_L \sin\theta\hat{\theta}). \quad (\text{C.27})$$

O momento magnético é proporcional ao momento angular *mecânico*. A fim de comparar a equação de movimento para  $\mathbf{\Lambda}$  àquela para um momento magnético pontual, equação C.4, derivamos a equação C.27 em relação ao tempo e, depois de alguma manipulação algébrica, obtemos

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = ma^2\ddot{\theta}\hat{\varphi} + \gamma\mathbf{\Lambda} \times B_0\mathbf{k} + \omega_L\dot{\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\mathbf{k} + \cos 2\theta\hat{\rho}\right), \quad (\text{C.28})$$

onde  $\hat{\rho}$  é o vetor unitário radial sobre o plano  $xy$ .

O último termo de equação C.28 representaria o torque adicional que aparece da variação do fluxo magnético através do circuito percorrido pela partícula (Lei de Lenz). Além disso, observamos que para  $k \ll 1$ , da equação C.22 temos  $\dot{\theta} = \omega$ , e o primeiro termo da equação C.28 se anula. Portanto, a equação C.28 e a equação C.4 tornar-se-ão similares somente no caso  $k \ll 1$  e se desprezamos o efeito vindo do último termo da equação C.28.

## C.4 Conclusões

A análise do movimento de uma partícula carregada vinculada a se mover sobre uma superfície esférica sob a ação de um campo magnético mostra as condições que limitam

a descrição do movimento da partícula carregada como equivalente àquela associada ao movimento do momento magnético. Este limite é expresso pela razão  $k$  entre a frequência de Larmor ( $\omega_L$ ) da partícula no campo magnético e sua frequência angular inicial ( $\omega$ ). Para uma razão arbitrária entre essas duas frequências, o problema não tem solução analítica. A comparação entre o movimento do momento angular mecânico da partícula e o movimento de um dipolo magnético pontual mostra os limites onde as equações de movimento em ambos os casos tornam-se equivalentes. Este seria, por exemplo, o caso de um átomo com elétrons desemparelhados em um campo magnético, para o qual o efeito diamagnético é desprezível comparado ao seu momento paramagnético ( $k$  menor do que  $10^{-6}$ ) ([19], seção 2.2). Outra importante característica deste problema é a sensibilidade da trajetória da partícula e do seu momento angular canônico às condições iniciais, quando o valor de  $k$  aumenta em direção a 1. Isto acontece devido à natureza não-linear das equações de movimento.

# Apêndice D

## Operadores Exponenciais em Mecânica Quântica

Neste apêndice deduziremos as relações 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16, usadas no Capítulo 3. Utilizaremos as relações de comutação básicas

$$[R_i, R_j] = [P_i, P_j] = 0 \quad (\text{D.1})$$

e

$$[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{i,j}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $R_i$  e  $P_i$  representam, respectivamente, os operadores posição e momento canônico associados à componente  $i = 1, 2, 3$ . Utilizaremos também as relações de comutação entre as componentes do momento angular canônico

$$[L_i, L_i] = 0; \quad [L_X, L_Y] = i\hbar L_Z; \quad [L_Y, L_Z] = i\hbar L_X; \quad [L_Z, L_X] = i\hbar L_Y, \quad (\text{D.3})$$

onde  $L_X = YP_Z - ZP_Y$ ,  $L_Y = ZP_X - XP_Z$  e  $L_Z = XP_Y - YP_X$ . Temos ainda a seguinte propriedade

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \quad (\text{D.4})$$

A primeira relação que deduziremos será (equação 3.9)

$$X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} X e^{i\omega t L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.5})$$

Definindo  $\theta = \omega t$ , podemos escrever o lado direito de D.5 como uma função de  $\theta$

$$f(\theta) = e^{-i\theta L_Z/\hbar} X e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.6})$$

Calculando a derivada primeira em relação à variável  $\theta$  em D.6, encontramos

$$\frac{df}{d\theta} = -\frac{i}{\hbar}L_Z e^{-i\theta L_Z/\hbar} X e^{i\theta L_Z/\hbar} + e^{-i\theta L_Z/\hbar} X \frac{i}{\hbar}L_Z e^{i\theta L_Z/\hbar}.$$

Sendo  $[L_Z, L_Z] = 0$ , temos  $[L_Z, e^{-i\theta L_Z/\hbar}] = 0$ . Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\theta} &= e^{-i\theta L_Z/\hbar} \left(-\frac{i}{\hbar}L_Z X\right) e^{i\theta L_Z/\hbar} + e^{-i\theta L_Z/\hbar} \left(\frac{i}{\hbar}X L_Z\right) e^{i\theta L_Z/\hbar} = \\ &= e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} (X L_Z - L_Z X) e^{i\theta L_Z/\hbar} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [X, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar}. \end{aligned} \quad (D.7)$$

Calculando o comutador  $[X, L_Z]$ , temos

$$\begin{aligned} [X, L_Z] &= [X, X P_Y - Y P_X] = [X, X P_Y] - [X, Y P_X] = \\ &= \{[X, X] P_Y - X[X, P_Y]\} - \{[X, Y] P_X - Y[X, P_X]\} = -Y[X, P_X] = -i\hbar Y, \end{aligned} \quad (D.8)$$

onde utilizamos a propriedade D.4 e as relações de comutação D.1 e D.2. Utilizando a relação D.8 em D.7, chegamos a

$$\frac{df}{d\theta} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (D.9)$$

Calculando agora a derivada segunda, e procedendo de maneira análoga, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\theta^2} &= -\frac{i}{\hbar}L_Z e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar} + e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y \frac{i}{\hbar}L_Z e^{i\theta L_Z/\hbar} = \\ &= -e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} (L_Z Y - Y L_Z) e^{i\theta L_Z/\hbar} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [Y, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar}. \end{aligned} \quad (D.10)$$

O comutador  $[Y, L_Z]$  é dado por

$$\begin{aligned} [Y, L_Z] &= [Y, X P_Y] - [Y, Y P_X] = \{[Y, X] P_Y + X[Y, P_Y]\} - \\ &\quad - \{[Y, Y] P_X + Y[Y, P_X]\} = X[Y, P_Y] = i\hbar X. \end{aligned} \quad (D.11)$$

Substituindo a relação D.11 na equação D.10, obtemos

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} X e^{i\theta L_Z/\hbar} = -f(\theta). \quad (D.12)$$

Observamos que a equação D.12 tem a forma da equação de um oscilador harmônico

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) = 0, \quad (D.13)$$

e a solução geral tem a forma

$$f(\theta) = A \cos\theta + B \sin\theta. \quad (D.14)$$

Utilizando as condições iniciais,  $f(0) = A = X$  (equação D.6) e  $f'(0) = B = Y$  (equação D.9), encontramos

$$f(\theta) = X \cos \theta + Y \sin \theta = e^{-i\theta L_Z/\hbar} X e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.15})$$

Substituindo  $\theta = \omega t$ , a relação D.15 se iguala à D.5.

De maneira análoga, podemos deduzir a relação 3.10

$$[Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)]^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Y^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.16})$$

Escrevendo o lado direito como uma função de  $\theta = \omega t$ , temos

$$\begin{aligned} [Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)]^2 &= e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y \tilde{\mathbf{I}} Y e^{i\theta L_Z/\hbar} = \\ &= [e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar}] [e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar}] = [g(\theta)]^2, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

onde  $\tilde{\mathbf{I}} = e^{i\omega t L_Z/\hbar} e^{-i\omega t L_Z/\hbar}$  é o operador unitário e

$$g(\theta) = e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.18})$$

A primeira derivada de  $g(\theta)$  será

$$\frac{dg}{d\theta} = -\frac{iL_Z}{\hbar} e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar} + e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y \frac{iL_Z}{\hbar} e^{i\theta L_Z/\hbar} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [Y, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.19})$$

Substituindo a relação D.11 em D.19, obtemos

$$\frac{dg}{d\theta} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} X e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.20})$$

A partir de D.20, podemos calcular a derivada segunda

$$\frac{d^2g}{d\theta^2} = \frac{iL_Z}{\hbar} e^{-i\theta L_Z/\hbar} X e^{i\theta L_Z/\hbar} - e^{-i\theta L_Z/\hbar} X \frac{iL_Z}{\hbar} e^{i\theta L_Z/\hbar} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [X, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.21})$$

Usando a relação D.8,

$$\frac{d^2g(\theta)}{d\theta^2} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar} = -g(\theta). \quad (\text{D.22})$$

A equação D.22 tem a forma da equação D.13 e possui a solução geral dada em D.14. Utilizando as condições iniciais,  $g(0) = A = Y$  (equação D.18) e  $g'(0) = B = -X$  (equação D.20), encontramos

$$g(\theta) = Y \cos \theta - X \sin \theta = e^{-i\theta L_Z/\hbar} Y e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.23})$$



Substituindo  $\theta = \omega t$  e elevando a relação D.23 ao quadrado chegamos à relação D.16.

A relação 3.11 é

$$X^2 + Y^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} (X^2 + Y^2) e^{i\omega t L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.24})$$

Podemos reescrever o lado direito da relação D.24 da seguinte maneira

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-i\omega t L_Z/\hbar} X \tilde{1} X e^{i\omega t L_Z/\hbar} + e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Y \tilde{1} Y e^{i\omega t L_Z/\hbar} = \\ &= \left[ e^{-i\omega t L_Z/\hbar} X e^{i\omega t L_Z/\hbar} \right] \left[ e^{-i\omega t L_Z/\hbar} X e^{i\omega t L_Z/\hbar} \right] + \left[ e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Y e^{i\omega t L_Z/\hbar} \right] \left[ e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Y e^{i\omega t L_Z/\hbar} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Substituindo as equações D.15 e D.23, sendo  $\theta = \omega t$ , em D.25, chegamos a

$$\begin{aligned} h(t) &= [X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)]^2 + [Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)]^2 = \\ &= X^2 + Y^2 + 2[X, Y] \cos(\omega t) \sin(\omega t) = X^2 + Y^2, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

onde utilizamos a relação D.1, mostrando assim a relação D.24.

Para mostrar a relação 3.11, que é

$$Z^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} Z^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar}, \quad (\text{D.27})$$

precisamos apenas mostrar que  $[Z, L_Z] = 0$ . Calculando este comutador, temos

$$\begin{aligned} [Z, L_Z] &= [Z, X P_Y] - [Z, Y P_X] = \\ &= \{[Z, X] P_Y + X [Z, P_Y]\} - \{[Z, Y] P_X + Y [Z, P_X]\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

onde usamos as relações D.1 e D.2.

A relação 3.13 é

$$L_X \cos(\omega t) + L_Y \sin(\omega t) = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} L_X e^{i\omega t L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.29})$$

Podemos demonstrá-la tratando o lado direito de D.29 como uma função de  $\theta = \omega t$

$$k(\theta) = e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_X e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.30})$$

A derivada primeira de D.30 é

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\theta} &= -\frac{iL_Z}{\hbar} e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_X e^{i\theta L_Z/\hbar} + e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_X \frac{iL_Z}{\hbar} e^{i\theta L_Z/\hbar} = \\ &= e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [L_X, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_Y e^{i\theta L_Z/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

onde utilizamos a relação D.2. A partir da equação D.31 podemos encontrar a derivada segunda de  $k(\theta)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2k}{d\theta^2} &= -\frac{iL_Z}{\hbar} e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_Y e^{i\theta L_Z/\hbar} + e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_Y \frac{iL_Z}{\hbar} e^{i\theta L_Z/\hbar} = \\ &= e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [L_Y, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_X e^{i\theta L_Z/\hbar} = -k(\theta), \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

onde novamente utilizamos a relação D.2. A equação D.32 tem a forma da equação D.13 e possui a solução geral dada em D.14. A partir das condições iniciais  $k(0) = A = L_X$  (equação D.30) e  $k'(0) = B = L_Y$  (equação D.31), encontramos

$$L_X \cos\theta + L_Y \sin\theta = e^{-i\theta L_Z/\hbar} L_X e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.33})$$

Substituindo  $\theta = \omega t$  na equação D.33 chegamos à relação D.29.

A relação 3.14 é dada por

$$L_Z = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} L_Z e^{i\omega t L_Z/\hbar} \quad (\text{D.34})$$

e, pelo simples fato de  $[L_Z, L_Z] = 0$  (relação D.3), a relação D.34 está demonstrada.

A relação 3.15 é dada por

$$P_X^2 + P_Y^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} (P_X^2 + P_Y^2) e^{i\omega t L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.35})$$

A demonstração pode ser obtida a partir de

$$\begin{aligned} P_X^2 + P_Y^2 &= e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_X^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar} + e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_Y^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar} = \\ &= [e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_X e^{i\omega t L_Z/\hbar}]^2 + [e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_Y e^{i\omega t L_Z/\hbar}]^2. \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Primeiramente vamos obter a relação para

$$j(\theta) = e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_X e^{i\theta L_Z/\hbar}, \quad (\text{D.37})$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para obter a relação D.5, obtemos a derivada primeira de  $j(\theta)$ , que é

$$\frac{dj}{d\theta} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [P_X, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_Y e^{i\theta L_Z/\hbar}, \quad (\text{D.38})$$

onde o comutador  $[P_X, L_Z]$  é dado por

$$[P_X, L_Z] = [P_X, X P_Y] - [P_X, Y P_X] =$$

$$= \{[P_X, X]P_Y + X[P_X, P_Y]\} - \{[P_X, Y]P_X + Y[P_X, P_X]\} = -i\hbar P_Y. \quad (\text{D.39})$$

A derivada segunda é dada por

$$\frac{d^2 j}{d\theta^2} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [P_Y, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_X e^{i\theta L_Z/\hbar} = -j(\theta), \quad (\text{D.40})$$

onde o comutador  $[P_Y, L_Z]$  é

$$\begin{aligned} [P_Y, L_Z] &= [P_Y, X P_Y] - [P_Y, Y P_X] = \\ &= \{[P_Y, X]P_Y + X[P_Y, P_Y]\} - \{[P_Y, Y]P_X + Y[P_Y, P_X]\} = i\hbar P_X. \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

A equação D.40 tem a forma da equação D.13 e possui a solução geral dada em D.14. As condições iniciais  $j(0) = A = P_X$  (equação D.37) e  $j'(0) = B = P_Y$  (equação D.38), permitem chegar a

$$P_X \cos\theta + P_Y \sin\theta = e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_X e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.42})$$

De forma análoga, podemos obter a relação para

$$q(\theta) = e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_Y e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.43})$$

A derivada primeira de  $q(\theta)$  é

$$\frac{dq}{d\theta} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [P_Y, L_Z] e^{i\theta L_Z/\hbar} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_X e^{i\theta L_Z/\hbar}, \quad (\text{D.44})$$

onde usamos a relação D.41. A derivada segunda é dada por

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} = e^{-i\theta L_Z/\hbar} \frac{i}{\hbar} [L_Z, P_X] e^{i\theta L_Z/\hbar} = -e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_Y e^{i\theta L_Z/\hbar} = -q(\theta), \quad (\text{D.45})$$

onde utilizamos a relação D.39. A equação D.45 tem a forma da equação D.13 e possui a solução geral dada em D.14. A partir das condições iniciais  $q(0) = A = P_Y$  (equação D.43) e  $q'(0) = B = -P_X$  (equação D.44), obtemos

$$P_Y \cos\theta - P_X \sin\theta = e^{-i\theta L_Z/\hbar} P_Y e^{i\theta L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.46})$$

Substituindo as equações D.42 e D.46, com  $\theta = \omega t$ , em D.36, encontramos

$$\begin{aligned} &e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_X^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar} + e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_Y^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar} = \\ &= [P_X \cos(\omega t) + P_Y \sin(\omega t)]^2 + [P_Y \cos(\omega t) - P_X \sin(\omega t)]^2 = P_X^2 + P_Y^2, \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

mostrando assim a relação D.35.

A relação 3.16 é

$$P_Z^2 = e^{-i\omega t L_Z/\hbar} P_Z^2 e^{i\omega t L_Z/\hbar}. \quad (\text{D.48})$$

Calculando a relação de comutação  $[P_Z, L_Z]$ , encontramos

$$\begin{aligned} [P_Z, L_Z] &= [P_Z, X P_Y] - [P_Z, Y P_X] = \\ &= \{[P_Z, X] P_Y + X [P_Z, P_Y]\} - \{[P_Z, Y] P_X + Y [P_Z, P_X]\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

Devido ao fato de  $P_Z$  comutar com  $L_Z$  (relação D.49), a relação D.48 está demonstrada.

# Bibliografia

- [1] D.G. Swanson, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 837.
- [2] J. Valat, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* **A304** (1991) 502.
- [3] K.W. Gentle, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 809.
- [4] J.A. Van Allen, G.H. Ludwig, E.C. Ray e C.E. McIlwain, *Jet Propulsion* **28** (1958) 588.
- [5] J.A. Van Allen e L.A. Frank, *Nature* **183** (1959) 430.
- [6] J.P. Pan, *Solid State Physics* **5** (1957) 1.
- [7] A.A. Abrikosov, *Introduction to the Theory of Normal Metals*, (Academic Press, New York) (1972).
- [8] C. Farina, M. Maneschy e C. Neves, *Am. J. Phys.* **61** (1993) 639.
- [9] K. von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 494.
- [10] I.S. Oliveira, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 139.
- [11] W. Niggemeier, G. von Plessen, S. Sauter e P. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 770.
- [12] I.S. Oliveira, A.P. Guimarães e X.A. da Silva, *Phys. Rev. E* **55** (1997) 2063.
- [13] I.S. Oliveira, *Int. J. Mod. Phys. B* **11** (1997) 1209.
- [14] V.L.B. de Jesus, A.P. Guimarães e I.S. Oliveira, *Braz. J. Phys.* **29** (1999) 541.
- [15] P. Drude, *Annalen der Physik* **1** (1900) 566 e **3** 369.

- [16] N.W. Ashcroft e N.D. Mermin, *Solid State Physics*, (Saunders College, Philadelphia), (1988).
- [17] F. Bloch, W.W. Hansen e M. Packard, *Phys. Rev.* **69** (1946) 127.
- [18] F. Bloch, W.W. Hansen e M. Packard, *Phys. Rev.* **70** (1946) 474.
- [19] A.P. Guimarães, *Magnetism and Magnetic Resonance in Solids*, (John Wiley, New York), (1998); ver também B.C. Gerstein e C.R. Dybowski, *Transient Techniques in NMR of Solids*, (Academic Press, Orlando), (1985), e C.P. Poole e H.A. Farach *Relaxation in Magnetic Resonance*, (Academic, New York), (1971).
- [20] J. Walk, C. MacLean e P.R. Algra *Basic Principles of Nuclear Magnetic Imaging*, (Elsevier, Amsterdam), (1985).
- [21] J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4<sup>th</sup> Ed., (Addison-Wesley, Reading), (1993).
- [22] C.P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance*, 3<sup>rd</sup> Ed., (Springer - Verlag, Berlin), (1990); ver também A. Abragam, *Principles of Nuclear Magnetism*, (Clarendon Press, Oxford), (1985).
- [23] V.L.B. de Jesus, A.P. Guimarães e I.S. Oliveira, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **31** (1998) 2457.
- [24] P. Diamant, *Phys. Rev. A* **23** (1981) 2537.
- [25] J. De Luca, R. Napolitano e V.S. Bagnato, *Phys. Rev. A* **55** (1997) R1597.
- [26] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Ed., (Addison-Wesley, Reading), (1980).
- [27] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 3<sup>a</sup> Ed., (Guanabara Koogan, Rio de Janeiro), (1990).
- [28] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher e E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3352.
- [29] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman e E.A. Cornell, *Science* **269** (1995) 198.

- [30] V.L.B. de Jesus, A.P. Guimarães e I.S. Oliveira, *Eur. J. Phys.* **20** (1999) 253.
- [31] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (John Wiley & Sons, New York), (1977).
- [32] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentals of Physics - Extended*, Appendix B, 5<sup>th</sup> Ed., (John Wiley & Sons, New York), (1997).
- [33] H.M. Boechat-Roberty e G.G.B. de Souza, *Rev. Fis. Aplic. e Instr.* **10** n° 3 (1995) 92.
- [34] S.B. Belmonte, I.S. Oliveira, A.P. Guimarães, *XX Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada* (1997) 149.
- [35] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentals of Physics - Extended*, Sec. 29.2, 5<sup>th</sup> Ed., (John Wiley & Sons, New York), (1997).
- [36] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2<sup>nd</sup> Ed., (John Wiley & Sons, New York), (1975).
- [37] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky e W.T. Vetterling, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Seção 15.0, (Cambridge University Press, Cambridge), (1990).
- [38] J.P. Grivet, *Am. J. Phys.* **61** (1993) 1133.

**“MOVIMENTO DE CARGAS EM CAMPOS OSCILANTES:  
SEPARAÇÃO ISOTÓPICA E CONFINAMENTO MAGNÉTICO  
RESSONANTES”**

**Vitor Luiz Bastos de Jesus**

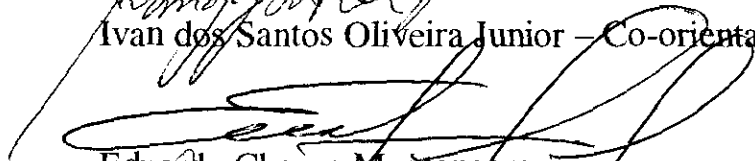
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Alberto Passos Guimarães Filho - Presidente



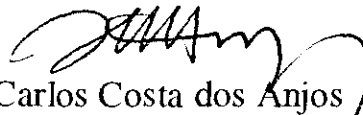
Ivan dos Santos Oliveira Junior - Co-orientador



Eduardo Chaves Montenegro



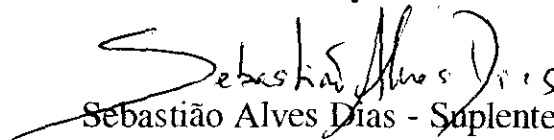
Nelson Velho de Castro Faria



João Carlos Costa dos Anjos



José Abdalla Helayel-Neto



Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 18 de abril de 2000