

TESE DE
DOUTORADO

Métodos Não-Perturbativos em Teoria
de Campos a Temperatura Finita

GINO NOVALIS JANAMPA AÑAÑOS

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-LAFEX

RIO DE JANEIRO, AGOSTO DE 2000

DEDICATÓRIA

Esta tese é dedicada à minha mãe Nery e a meu pai Pedro

AGRADECIMENTOS

- A Johana por seu amor, compreensão e ajuda.
- Ao meu orientador Nami Svaiter e ao meu co-orientador Adolfo Malbouisson pela amizade e prestativa orientação.
- A Raphael De Paola pela ajuda, colaboração e amizade.
- Aos professores Jose Abdalla Helayél-Neto e Sebastião Alvez Dias.
- A todos os funcionários, secretárias, alunos e pesquisadores do LAFEX, DCP, biblioteca e CFC, que me acompanharam durante todos estes anos.
- A Anibal Omar Caride por permitir e oferecer condições para a pesquisa científica no CBPF.
- A CNPq pelo inestimável suporte financeiro.
- A todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente.

Resumo

Esta tese está organizada como segue: no capítulo 1 apresentamos uma introdução à teoria de campos a temperatura finita fazendo uso do formalismo do tempo imaginário. No capítulo 2 desenvolvemos as seguintes técnicas não-perturbativas: o formalismo do potencial efetivo, o formalismo dos operadores compostos e a expansão $1/N$. No capítulo 3 estudamos o modelo de Gross-Neveu a temperatura e densidade finita fazendo uso da regularização analítica. No capítulo 4 estudamos o modelo de Gross-Neveu com simetria quirial contínua a temperatura finita. Nós estudamos a redução dimensional deste modelo e calculamos os expoentes críticos. No capítulo 5 discutimos o potencial efetivo a temperatura finita do modelo de campo escalar vetorial com N componentes $(\lambda\varphi^4 + \varphi^6)_D$ usando o método dos operadores compostos na aproximação de ordem dominante (N grande). No capítulo 6 estudamos o modelo do campo escalar vetorial com N componentes $(\lambda\varphi^4)_D$ usando o método dos operadores compostos na aproximação de ordem dominante (N grande). Neste capítulo, discutimos o comportamento da massa e da constante de acoplamento térmica com a temperatura. No capítulo 7 fazemos uma aplicação das técnicas desenvolvidas, estudando o modelo do campo escalar mais geral $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)$ em dimensão $D=3$. Nesta parte discutimos o fenômeno tricrítico. Mostramos que na aproximação de ordem dominante para N grande, existe uma temperatura onde a massa e a constante de acoplamento se anulam. Esta temperatura define o ponto tricrítico. Finalmente, no capítulo 8 apresentamos as conclusões e perspectivas.

Abstract

This thesis is organized as follows. In chapter 1 we present an introduction to field theory at finite temperature using the formalism of imaginary time. In Chapter 2 we present the following nonperturbative methods: the effective potential, the formalism of composite operator and the expansion $1/N$. In Chapter 3 we study the Gross-Neveu model at finite temperature and density using analytic regularization. In Chapter 4 we study the Gross-Neveu model with continuous chiral symmetry at finite temperature. We study the dimensional reduction and critical exponents of this model. In Chapter 5 we discuss the effective potential at finite temperature of the $O(N)$ -symmetric $(\lambda\varphi^4 + \varphi^6)_D$ theory using the formalism of composite operator to leading order (large N). In Chapter 6 we analyze the behavior at finite temperature of the $O(N)$ -symmetric $\lambda\varphi^4$ model in a generic D -dimensional Euclidean space. An analysis of the thermal behavior of the renormalized squared mass and coupling constant are done for all temperatures. Chapter 7 we discuss the three-dimensional $O(N)$ -symmetric $\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6$ theory in the context of the $1/N$ expansion at finite temperature. We discuss the existence of the tricritical phenomenon at finite temperature and we find an expression for the critical temperature at which the thermal effective mass and coupling constant vanish, and this shows that the tricritical phenomenon occurs at an intermediate temperature. Finally, chapter 8 we present conclusions and perspectives.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de figuras	vii
Introdução	1
1 Introdução à Teoria de Campos a Temperatura Finita	6
1.1 A função de partição a temperatura finita (formalismo de Matsubara)	6
1.2 As funções de Green e o funcional gerador a temperatura finita	12
1.3 As regras de Feynman a temperatura finita	16
1.4 Efeitos da temperatura na massa e na constante de acoplamento	17
2 Métodos Não-Perturbativos em Teoria de Campos	24
2.1 O formalismo do potencial efetivo (ação efetiva)	24
2.2 O formalismo de operadores compostos (CJT)	32
2.3 A Expansão $1/N$	38
3 Regularização Analítica no Modelo $(\bar{\psi}_i \psi_i)_D^2$ a Temperatura e Densidade Finita	43
3.1 O potencial efetivo na expansão $1/N$ (N grande) a temperatura finita	45

4	Redução Dimensional do Modelo de Gross-Neveu com Simetria Quiral	
	Contínua	51
4.1	O modelo de Gross-Neveu com simetria quiral contínua	53
4.2	Expoentes críticos a temperatura zero	55
4.3	Universalidade e redução dimensional	57
5	O Potencial Efetivo para Operadores Compostos a Temperatura Finita	63
5.1	Potencial efetivo a $T = 0$	64
5.2	Potencial efetivo a temperatura finita	69
6	A Equação de <i>Gap</i> para a Massa e Constante de Acoplamento no Modelo	
	$\lambda\varphi_D^4$	75
6.1	A equação de <i>gap</i> do modelo $\lambda\varphi_D^4$	78
6.2	A constante de acoplamento térmica para o modelo vetorial $\lambda\varphi_D^4$	82
7	O Formalismo dos Operadores Compostos no Modelo	
	$(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ a Temperatura Finita	88
7.1	A equação de <i>gap</i> para o modelo $(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ a temperatura finita . .	89
7.2	O fenômeno tricrítico	91
8	Conclusões e Perspectivas	95
	Referências	98

Lista de Figuras

1.1	Diagramas que contribuem a um <i>loop</i> para a teoria ϕ^4	17
2.1	Diagramas de Feynman (2PI) para as teorias escalares	34
2.2	Diagramas de Feynman para a teoria $(\phi_a^2)^2$	39
2.3	Diagramas de Feynman com o campo auxiliar	41
2.4	Diagramas de Feynman de ordem dominante e não dominante.	42
3.1	Diagramas de Feynman na ordem dominante para o modelo GN	46
4.1	O potencial efetivo a temperatura zero	54
5.1	Diagramas do vácuo 2PI para a teoria φ^6	66
5.2	Comportamento do potencial efetivo a temperatura finita	73
6.1	Exemplos de diagramas <i>daisy</i> e <i>superdaisy</i>	79
6.2	Comportamento da constante de acoplamento com a temperatura em di- mensão $D = 3$	85
6.3	Comportamento da constante de acoplamento com a temperatura em di- mensão $D = 4$	86
6.4	Aspecto geral do comportamento térmico da constante de acoplamento. . .	86
6.5	Comparação do comportamento térmico da constante de acoplamento com ordenamento de Wick.	87
7.1	As regiões onde se tem quebra da simetria para a teoria φ^6	92

Introdução

O Modelo *Standard*, baseado no grupo de calibre $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$ nos dá uma descrição excelente das interações forte, fraca e eletromagnética. Uma vez que temos uma teoria que descreve todas as interações (deixando de lado a interação gravitacional), é natural perguntar-nos como seria o comportamento de sistemas sob condições não-usuais, como temperatura e/ou densidade alta. Tais considerações tem conseqüências astrofísicas e cosmológicas. No estágio do universo primordial onde a temperatura foi muito alta, a teoria convencional a $T = 0$ não pode ser usada e deve ser substituída por outra formulação que leve em conta as características termodinâmicas associadas a um banho térmico. Este método foi chamado Teoria de Campos a Temperatura Finita e é portanto extremamente útil para estudo dos fenômenos em que a matéria se encontra em condições extremas, isto é, temperatura e/ou densidade alta [1]. Segundo a hipótese do *Big-Bang*, durante os primeiros segundos, a matéria contida no universo era quase exclusivamente *quarks* e *gluons* dissociados, o chamado plasma de *quarks* e *gluons*. Desta forma a Cromodinâmica Quântica a temperaturas e/ou densidades altas deve nos dar a descrição do universo numa fase primordial.

O estudo de transições de fase em sistemas quânticos relativísticos a temperatura finita começam a partir dos trabalhos de Kirzhnits e Linde [2], e trabalhos posteriores de Bernard [3], Dolan e Jackiw [4] e Weinberg [5]. Estes trabalhos enfatizam que a simetria quebrada espontaneamente a baixas temperaturas em teoria quântica de campos pode ser restaurada acima de uma certa temperatura crítica T_c .

Como é conhecido, um campo escalar carregado tem um papel fundamental no mod-

elo de Weinberg-Salam. Neste contexto, diversas simetrias vão sendo quebradas com o esfriamento do universo. Em particular, a restauração da simetria do potencial no campo de Higgs a temperatura finita é de especial importância, devido à relevância deste mecanismo para o Modelo *Standard* eletro-fraco e para a grande unificação das interações fundamentais. Novamente queremos enfatizar que o estudo da teoria quântica de campos a temperatura finita é fundamental para o entendimento destes mecanismos.

Dentro das teorias não-abelianas este estudo não é menos importante. Existe um interesse em analisar as propriedades da cromodinâmica quântica (QCD) a temperatura finita principalmente por dois motivos. O primeiro é obter uma descrição quantitativa do comportamento da matéria a temperaturas e densidades altas. Isto nos forneceria informações muito importantes para uma descrição quantitativa de uma transição de fase (confinamento-desconfinamento) nas colisões de íons pesados e deveria também ajudar a compreensão das transições de fase que ocorreram durante os primeiros estágios da evolução do universo. Vale a pena ressaltar que um plasma de *quarks* e *gluons* deve existir no interior de estrelas de nêutrons. Por esta razão é que nós deveríamos obter uma equação de estado da QCD, determinar os parâmetros críticos tais como a temperatura crítica e a densidade crítica da energia e prever as modificações das propriedades básicas dos hádrons quando variamos a temperatura e densidade. Por outro lado a análise de uma teoria de campos a temperatura finita pode também nos ajudar a melhorar nossa compreensão das propriedades não-perturbativas a temperatura zero. A introdução de um parâmetro externo de controle (temperatura) nos permite observar a resposta de diferentes observáveis e pode fornecer uma compreensão melhor de sua interdependência. Na realidade gostaríamos de entender o porquê de a temperatura de desconfinamento ser a mesma temperatura da quebra espontânea de simetria quiral. Duas propriedades da QCD explicam as características básicas do espectro observado dos *hadrons*: confinamento e quebra da simetria quiral. A primeira propriedade explica porque nós observamos somente estados singletos de cor no espectro da teoria e a segunda descreve a presença de partículas leves, os *pions*. Fenomenologicamente, a propriedade do confinamento da QCD

manifesta-se no comportamento do potencial dos *quarks* pesados a grandes distâncias. À temperatura zero no contexto destes modelos fenomenológicos, em particular dos diversos *bag-models*, o potencial *quark-antiquark* cresce linearmente para distâncias grandes, $V_{\bar{q}q}(r) \sim \sigma r$, onde $\sigma = (420 \text{ MeV})^2$, denota a tensão em uma corda ligando o *quark* ao *antiquark*, forçando os *quarks* e os *gluons* a serem confinados em um saco hadrônico. Dentro dessa abordagem fenomenológica a quebra da simetria quiral conduz a um condensado *quark-antiquark* não nulo $\langle \bar{q}q \rangle \simeq (250 \text{ MeV})^3$, no vácuo. Dentro do saco de hadrons, entretanto, este condensado se anula. Para altas temperaturas espera-se a existência de uma transição em que estes sacos hadrônicos individuais fundem-se num único saco, em que os *quarks* e os *gluons* podem mover-se livremente (plasma de *quarks* e *gluons*). Notemos que esta abordagem fenomenológica pode nos fornecer alguma informação porque o desconfinamento e a restauração da simetria quiral deveriam ocorrer à mesma temperatura. A priori, não existe nenhuma razão para que o desconfinamento e a quebra da simetria quiral aconteçam à mesma temperatura. Resultados da simulação na rede[6], que é um método estritamente não-perturbativo, para a QCD com dois *quarks* leves ($N_f = 2$) indicam que a transição para a fase de desconfinamento e restauração da simetria quiral ocorrem à mesma temperatura. Este resultado nos dá uma evidência da existência de uma única transição de fase na QCD.

Devemos lembrar que em duas experiências os físicos têm investigado a matéria sob condições extremas. A primeira está sendo realizada no laboratório de Brookhaven com choques de íons pesados acelerados a velocidades ultra-relativistas (RHIC) e a segunda no laboratório do CERN *Large Hadron Collider (LHC)*, onde o mesmo tipo de experiência também está sendo realizada. Estas experiências nos oferecem a possibilidade de criar matéria com interação forte a temperaturas e densidades altas em condições de laboratório. Vários resultados obtidos na QCD a altas temperaturas devem ser comparados num futuro próximo com os resultados destas duas experiências.

O propósito desta tese é apresentar métodos não-perturbativos em teoria quântica de campos a temperatura finita em diversos modelos, como por exemplo o modelo vetorial

escalar $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$, o modelo $(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ e o modelo de Gross-Neveu com simetria quiral discreta e contínua.

Recentemente, a correção térmica da massa e da constante de acoplamento foi analisada no modelo $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$ e no modelo de Efimov-Fradkin [7, 8]. A possibilidade de que a constante de acoplamento renormalizada no modelo $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$ se anule por efeito da temperatura ou topológico foi discutido anteriormente por Ford e Svaiter [9]. Supondo que a topologia da seção espacial é trivial, Malbouisson e Svaiter [7] estenderam parte da discussão de Ford e Svaiter. Estes autores supuseram que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório, de forma que a correção térmica do quadrado da massa $\Delta m^2(\beta)$ e da constante de acoplamento $\Delta\lambda(\beta)$ foram obtidas para uma dimensão D genérica do espaço-tempo na aproximação de um *loop*. Como foi discutido na referência [7], para $D < 4$ a constante de acoplamento renormalizada pode se tornar negativa, acima de alguma temperatura β_*^{-1} . Isto estabelece a existência de uma transição de fase de primeira ordem no modelo para dimensões espaço-temporais abaixo da dimensão crítica.

O desenvolvimento desta tese gera diversos trabalhos. O primeiro trabalho [10] consistiu no estudo do modelo de Gross-Neveu a temperatura e densidade finitas, onde uma combinação de regularização dimensional e regularização analítica foi utilizado para a obtenção do potencial efetivo do modelo.

Continuando nesta linha, um segundo trabalho [11] foi realizado, onde o modelo de Gross-Neveu com simetria quiral contínua é investigado supondo altíssimas temperaturas e a redução dimensional do modelo é efetuada.

No terceiro trabalho [12] re-examinamos o comportamento do modelo $\lambda\varphi^4$ com simetria $O(N)$ em D -dimensões num espaço Euclidiano a temperatura finita.

O quarto trabalho [13] consistiu no estudo do formalismo CJT no modelo escalar em $D = 3$ onde um termo $\eta\phi^6$ foi introduzido sem alterar a renormalização perturbativa do modelo. O potencial efetivo do modelo é apresentado.

Finalmente, o quinto e último trabalho [14] trata do fenômeno tricrítico do modelo $(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$, utilizando o formalismo CJT. Este trabalho foi uma continuação natural

do trabalho [15].

Conclusões e perspectivas são apresentadas no último capítulo.

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Campos a Temperatura Finita

1.1 A função de partição a temperatura finita (formalismo de Matsubara)

Neste capítulo vamos mostrar a partir do ponto de vista das integrais de trajetória, que o conceito de temperatura é introduzido pela simples compactificação na direção do tempo Euclidiano, identificando-se o inverso da temperatura com o raio da dimensão temporal compactificada.

A função de partição canônica Z é definida como:

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (1.1)$$

(aqui nós estamos tomando o potencial químico igual a zero: $\mu = 0$). A soma é efetuada sobre todo o sub-espaco físico dos estados de partículas permitidos. Na eq. (1.1) \hat{H} é o operador Hamiltoniano e β é dado por :

$$\beta = (kT)^{-1} \quad (1.2)$$

(em unidades da constante de Boltzman temos que $\beta = T^{-1}$).

Como se sabe, em geral, a função de partição de um sistema estatístico não pode ser calculada exatamente. O Formalismo de Matsubara nos proporciona um método de calcular perturbativamente a função de partição usando o método diagramático, que é análogo ao método usado na teoria de campos a temperatura zero. Uma maneira formal de introduzir o formalismo de Matsubara é por meio das integrais de trajetória. Assim, nosso objetivo então é expressar Z em termos de uma integral funcional. Neste sentido, a observação crucial está no fato que a matriz densidade na eq. (1.1) tem a forma de operador de evolução no tempo para tempos imaginários. Por simplicidade, vamos trabalhar com o campo escalar a uma componente. A generalização para teorias mais complexas pode ser feita sem dificuldade. A função de partição pode ser obtida dentro do formalismo das integrais de trajetória da seguinte forma: seja $\hat{\varphi}(t=0, \mathbf{x})$ o operador de campo na representação de Schrödinger em $\beta^{-1} = 0$. Os auto-estados do operador de campo $|\varphi, t=0\rangle$ satisfazem

$$\hat{\varphi}(t=0, \mathbf{x}) |\varphi, t=0\rangle = \varphi(\mathbf{x}) |\varphi, t=0\rangle. \quad (1.3)$$

É claro que os auto-estados $|\varphi, t=0\rangle$ satisfazem as relações de completeza e ortogonalidade dadas por

$$\int d\varphi(x) |\varphi, t=0\rangle \langle \varphi, t=0| = 1 \quad (1.4)$$

$$\langle \varphi_a | \varphi_b \rangle = \delta[\varphi_a(\mathbf{x}) - \varphi_b(\mathbf{x})] \quad . \quad (1.5)$$

Desta forma, a função de partição pode ser escrita explicitamente como uma soma sobre todos os autoestados

$$Z = \sum_{\varphi(\mathbf{x})} \langle \varphi(\mathbf{x}), t=0 | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi(\mathbf{x}), t=0 \rangle \quad . \quad (1.6)$$

Vamos partir da representação funcional da amplitude de transição $\langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | \varphi'(\mathbf{x}), t' \rangle$

a temperatura zero dada por [16]

$$\begin{aligned} \langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | \varphi'(\mathbf{x}), t' \rangle &= \langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | e^{-i\hat{H}(t''-t')} | \varphi'(\mathbf{x}), t' = 0 \rangle \\ &\propto \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)}, \quad (1.8)$$

é a densidade do momentum conjugado a φ . Nesta última relação as funções $\varphi(t, \mathbf{x})$ satisfazem às condições de contorno

$$\varphi(t'', \mathbf{x}) = \varphi''(\mathbf{x}), \quad \varphi(t', \mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Fazemos a conexão entre a teoria de campos e a mecânica estatística introduzindo heurísticamente a variável (continuação no tempo Euclideano)

$$\tau = ix^0, \quad (1.10)$$

onde chamamos a componente temporal do espaço Euclideano de τ , e impomos periodicidade no tempo Euclideano tomando os limites de integração na eq. (1.7) como

$$t' = 0 \quad t'' = -i\beta. \quad (1.11)$$

Desta forma, a eq. (1.7) se transforma em

$$\begin{aligned} \langle \varphi''(\mathbf{x}), t = 0 | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi'(\mathbf{x}), t = 0 \rangle \\ \propto \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde, na integral de caminho as funções $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$ satisfazem às condições de fronteira

$$\varphi(\mathbf{x}, \beta) = \varphi''(\mathbf{x}) \quad \varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi'(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.13)$$

A introdução de x_E^4 na teoria de campos a temperatura zero serve para fazer a continuação no espaço Euclidiano para que a integral de caminho esteja bem definida [16], mas ao final volta-se ao espaço de Minkowski para obter o funcional gerador e as funções de Green físicas. Aqui nós introduzimos a variável τ para fazer a conexão entre a teoria de campos e a mecânica estatística.

Como já discutimos, para obtermos a função de partição devemos impor periodicidade no tempo imaginário

$$|\varphi''(\mathbf{x}), t = 0\rangle = |\varphi'(\mathbf{x}), t = 0\rangle = |\varphi(\mathbf{x}), t = 0\rangle \quad . \quad (1.14)$$

conseqüentemente a função de partição é dada por

$$Z_\beta = \int_3 \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left(i\pi \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \quad (1.15)$$

onde as condições de fronteira dados pelas equações (1.13) junto com (1.14), significam que a integral de caminho está restrita às funções $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$ que são periódicas em τ com período β . *i.e.*

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau = 0) = \varphi(\mathbf{x}, \tau = \beta) \quad . \quad (1.16)$$

Se a densidade de Lagrangeana tem a forma quadrática

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 - f(\varphi, \nabla\varphi) \quad . \quad (1.17)$$

a densidade de Hamiltoniana terá a forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + f(\varphi, \nabla\varphi). \quad (1.18)$$

Desta forma a integração funcional sobre π pode ser calculada explicitamente já que a exponencial é quadrática em π . A eq. (1.15) adquire um aspecto mais simples, dado por

$$\begin{aligned} Z_\beta &= N(\beta) \int_{\mathcal{B}} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + f(\varphi, \nabla \varphi) \right] \right\} \\ &= N(\beta) \int_{\mathcal{B}} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ é a densidade de Lagrangeana Euclídeana, e $N(\beta)$ é o fator de normalização dependente da temperatura.

Nesta seção obtemos a função de partição fazendo a rotação de Wick e somando sobre todas as configurações do campo que são periódicas em $[0, \beta]$. Na seção seguinte, vamos derivar as regras de Feynman a temperatura finita para a teoria do campo escalar.

Agora, como aplicação direta desta relação que obtivemos, vamos derivar a função de partição para a teoria do campo escalar livre, onde a densidade de Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2. \quad (1.20)$$

Desta forma temos,

$$Z_\beta = N(\beta) \int_{\mathcal{B}} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau' \int d^3\mathbf{x}' \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) \right\} \quad (1.21)$$

onde

$$A(x', x) = (\partial_\mu \partial_\mu + m^2) \delta(x' - x) \quad (1.22)$$

e

$$\delta(x' - x) = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(\tau' - \tau) \quad (1.23)$$

Como a função de partição dada pela equação (1.21) é um produto de integrais gaussianas, a integração funcional pode ser feita exatamente [16],

$$Z_\beta = N(\beta) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A\right). \quad (1.24)$$

O traço está associado às funções $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$ obedecendo às condições de periodicidade dadas pela eq. (1.16). A exigência de periodicidade em τ para as configurações de campo significa que os campos euclidianos podem ser expressos como uma expansão de Fourier do seguinte modo [16, 17]

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_n \tau) \varphi_n(\mathbf{x}), \quad (1.25)$$

onde

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.26)$$

são as frequências de Matsubara para os bósons. A transformada de Fourier de $\varphi(x)$ satisfaz a relação

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \tilde{\varphi}(p), \quad (1.27)$$

onde

$$p \equiv (\mathbf{p}, \omega_n) \quad (1.28)$$

Com isto concluímos que para o campo escalar bosônico os efeitos da temperatura finita são dados pelas seguintes substituições no espaço Euclidiano:

$$\omega \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad \int \frac{d^4 w}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \quad (1.29)$$

Conseqüentemente, temos que a delta de Dirac tem a forma

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} \quad (1.30)$$

Logo a matriz $A(x', x)$ para o campo escalar livre é

$$A(x', x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} (p^2 + m^2) \quad (1.31)$$

onde

$$p^2 \equiv (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) \quad . \quad (1.32)$$

Para calcular a função de partição Z_β devemos achar o traço da matriz $A(x', x)$, e para isto fazemos $x' = x$ e então integramos sobre todos os valores x . Um cálculo direto nos dá

$$\ln Z_\beta = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A = -\frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) = -\beta \mathcal{F}. \quad (1.33)$$

onde \mathcal{F} é a energia livre. Como se sabe, a pressão e a entropia podem ser calculadas a partir de \mathcal{F} .

1.2 As funções de Green e o funcional gerador a temperatura finita

Por simplicidade, continuaremos a trabalhar com o campo escalar neutro onde a dinâmica deste sistema está governada pelo Hamiltoniano \hat{H} . De acordo com a mecânica quântica temos que

$$\hat{\varphi}(x) = e^{-iHt} \varphi(0, \mathbf{x}) e^{iHt} \quad . \quad (1.34)$$

Para acharmos as funções de Green a temperatura finita, procedemos da mesma forma que fizemos na seção anterior, onde obtivemos uma representação via integral de caminho da função de partição, fazendo uma extensão analítica para o tempo euclidiano ($\tau = it^0$) e somando sobre todos os campos clássicos φ que são funções de τ e x . Conseqüentemente,

definimos as funções de Green térmicas como,

$$G_{\beta}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle T_{\tau}(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N)) \rangle. \quad (1.35)$$

Estas funções são definidas como o valor médio do produto dos operadores de campo ordenados temporalmente na representação de Heisenberg. Note que T_{τ} deve ser interpretado como um ordenamento dos operadores de campo da direita para a esquerda em ordem de crescimento de τ . A representação das funções de Green térmicas pode ser obtida a partir da teoria análoga para $\beta^{-1} = 0$. A representação funcional da função de Green de N pontos, como é conhecido, tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} & \langle \varphi''(\mathbf{x}, t=0) | e^{-i\hat{H}(t''-t')} T(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_N)) | \varphi'(\mathbf{x}, t=0) \rangle = \\ & \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \varphi(x_1) \hat{\varphi}(x_N) \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Agora, pelos mesmos passos que seguimos para encontrar a representação funcional da função de partição introduzindo o tempo imaginário, podemos obter facilmente as funções de Green térmicas que têm a forma.

$$\begin{aligned} G_{\beta}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) &= N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \times \\ & \exp \left\{ \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Esta fórmula fica mais simples após a integração funcional em π , e assume a seguinte representação

$$G_{\beta}^N(x_1, \dots, x_N) = N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \times \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\} \quad (1.38)$$

(note que aqui $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ é o Lagrangeano no espaço Euclideo). Seguindo a analogia com a teoria do campo escalar a $\beta^{-1} = 0$, define-se o funcional gerador das funções de Green térmicas como,

$$Z_{\beta}[J] = \frac{1}{Z_{\beta}[0]} \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x (\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) - J(x)\varphi) \right\} \quad (1.39)$$

onde $J(x)$ é uma fonte externa e $Z[0]$ é definido como,

$$Z_{\beta}[0] = \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\}. \quad (1.40)$$

As funções de Green são obtidas por diferenciação funcional de $Z_{\beta}[J]$, *i.e.*,

$$G_{\beta}^N(x_1, \dots, x_N) = \left. \frac{\delta^N Z_{\beta}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} \right|_{J=0}. \quad (1.41)$$

O funcional gerador $Z(J)$ pode ser representado por uma série de Taylor funcional, onde as funções de Green são os coeficientes desta série funcional, *i.e.*,

$$Z_{\beta}[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N G_{\beta}^N(x_1, \dots, x_N), \quad (1.42)$$

onde se usou a notação

$$\int dx \equiv \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x}. \quad (1.43)$$

As funções de Green térmicas conexas são obtidas a partir de $W_\beta[J]$, definido por

$$Z_\beta[J] = e^{W_\beta[J]}, \quad (1.44)$$

através da relação

$$G_{\beta c}^N(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta^N W_\beta[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)}. \quad (1.45)$$

Como exemplo, vamos encontrar o funcional gerador para o campo escalar livre a temperatura finita que pode ser expresso como:

$$Z_{0,\beta}[J] = \frac{\int_{\mathcal{D}} \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) + \int dx J(x) \varphi(x) \right]}{\int_{\mathcal{D}} \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) \right]}. \quad (1.46)$$

onde

$$A(x', x) = (\partial_\mu \partial_\mu + m^2) \delta(x' - x).$$

Como a integral funcional é Gaussiana, obtemos facilmente

$$Z_{0,\beta}[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx' \int dx J(x') \Delta_\beta(x' - x) J(x) \right\}. \quad (1.47)$$

onde o propagador a temperatura finita é dado por

$$\Delta_\beta(x' - x) = -A^{-1}(x' - x). \quad (1.48)$$

A inversa de $A(x', x)$ pode ser obtida fazendo-se uso da transformada de Fourier, já que se tem

$$A(x', x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} (p^2 + m^2) \quad (1.49)$$

ou

$$\Delta_\beta(x' - x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} \frac{-1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} . \quad (1.50)$$

Desta forma definimos o propagador no espaço dos momenta como

$$\Delta_\beta(p) = \frac{-1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} . \quad (1.51)$$

1.3 As regras de Feynman a temperatura finita

Uma vez que já estabelecemos a representação do gerador funcional em forma de integral de camiinho, vamos estender os resultados para a teoria com interação. Desta forma vamos supor que o modelo não é mais Gaussiano, isto é, vamos acrescentar à densidade de Lagrangeana um termo de interação. Supondo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (1.52)$$

o funcional gerador se escreve como

$$Z_\beta[J] = \frac{1}{Z_\beta[0]} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_{\mathcal{D}} dx [\mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_I(\varphi) - J(x)\varphi] \right\} \quad (1.53)$$

onde $Z_{0,\beta}[J]$ é o funcional gerador para a teoria livre. Agora substituímos o campo $\varphi(x)$ na densidade de Lagrangeana de interação pela diferenciação funcional com respeito à função fonte, para obter

$$Z_\beta[J] = \exp \left\{ - \int_{\mathcal{D}} dx \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} Z_{0,\beta}[J] . \quad (1.54)$$

A expansão perturbativa aparece da expansão do primeiro fator nesta última equação. A forma de $Z_{0,\beta}[J]$ para a teoria $\lambda\varphi^4$ tem a mesma forma que para a teoria a $\beta^{-1} = 0$, com as seguintes diferenças: o expoente não tem o fator i e o propagador é dado por (1.51). Assim, podemos verificar que o fator i não aparece nas equações (1.39), (1.42) e (1.16).

temos as seguintes regras de Feynman no espaço dos momenta:

1) A cada linha de momentum associamos um fator

$$\frac{-1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (1.55)$$

2) Para cada vértice de quatro linhas levando momenta p_1, p_2, p_3, p_4 associamos um fator $-\lambda$, de forma que exista conservação dos momenta

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0. \quad (1.56)$$

3) Integrar e somar cada *loop* interno independente de acordo com

$$\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (1.57)$$

1.4 Efeitos da temperatura na massa e na constante de acoplamento

Como uma breve introdução, vamos considerar o modelo escalar massivo $\lambda\varphi^4$, a temperatura finita. Em particular, vamos estudar a dependência da massa e da constante de acoplamento renormalizada com a temperatura. Na aproximação de um *loop* a função de vértice de dois pontos $\Gamma^{(2)}$ só envolve o diagrama (a) como mostra a figura (1.1). Para a função de vértice de quatro pontos $\Gamma^{(4)}$ temos só um diagrama do tipo (b).

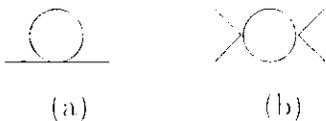


Figura 1.1: Diagramas que contribuem a um *loop* para: (a) função de dois pontos $\Gamma^{(2)}(0)$ e (b) função de quatro pontos $\Gamma^{(4)}(0)$.

Aplicando as regras de Feynman deduzidas na seção 1.3 temos

$$\Gamma^{(2)}(0,0) = m^2 + \frac{\lambda}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m^2} + \delta m^{2(1)} \quad (1.58)$$

$$\Gamma^{(4)}(0,0,0,0) = \lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(\omega_n^2 + k^2 + m^2)^2} + \delta \lambda^{(1)} \quad (1.59)$$

onde estamos trabalhando num espaço-tempo genérico D -dimensional. É fácil constatar que para $D = 4$ as integrais acima têm divergências ultravioletas que serão removidas na renormalização. Como primeiro passo no processo de regularização vamos definir

$$F_\beta(s, D) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(\omega_n^2 + k^2 + m^2)^s}. \quad (1.60)$$

Neste sentido, as integrais acima são funções dos parâmetros s e $D = d + 1$, agora em geral complexos.

Para os momenta contínuos, vamos aplicar o método de regularização dimensional. Depois da integração nos momenta contínuos, obtemos:

$$\begin{aligned} F_\beta(s, d+1) &= \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2} \beta \Gamma(s)} \Gamma(s - d/2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{s-d/2}} \\ &= \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2} \beta \Gamma(s)} \Gamma(s - d/2) A_1^{c^2}(s - d/2, a), \end{aligned} \quad (1.61)$$

onde definimos a função $A_1^{c^2}(z, a)$ como

$$A_1^{c^2}(z, a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^z} \quad (1.62)$$

que é um caso particular da função não-homogênea de Epstein. A função mais geral é

$$A_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N = -\infty}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_N n_N^2 + c^2)^{-z}, \quad (1.63)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_N > 0 \quad , \quad c^2 > 0).$$

Assim, a função $A_1^{c^2}(z, a)$, dada por (1.62), converge para $z > \frac{1}{2}$ e, em particular, para a dimensão do espaço-tempo igual a quatro ($D = 4$) só tem divergências para $s = 1$ ($z = -\frac{1}{2}$) e $s = 2$ ($z = \frac{1}{2}$). Fazendo uso da transformada de Mellin é possível fazer a continuação analítica de $A_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N)$, em princípio definida no aberto conexo dado por $Re(z) > \frac{N}{2}$ e $Re(z) \leq \frac{N}{2}$. Agora, o passo importante é fazer o uso do resultado da extensão analítica desta função [18] para o caso particular $N = 1$, que é dada pela relação seguinte

$$A_1^{c^2}(z, a) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} c^{2z-1} \Gamma(z)} \left\{ \Gamma\left(z - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\frac{1}{4} - \frac{z}{2}}}{(\pi n c)^{\frac{1}{2} - z}} K_{\frac{1}{2} - z}\left(\frac{2\pi n c}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (1.64)$$

onde $K_n(z)$ é a função esférica modificada de Bessel de segunda classe. Fazendo a substituição de (1.64) em (1.61) e fazendo $d + 1 = D$, temos que,

$$F_3(s, D) = \frac{m^{D-2s}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(s)} \left\{ \Gamma\left(s - \frac{D}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{mn_3}\right)^{\frac{D}{2} - s} K_{\frac{D}{2} - s}(mn_3) \right\}. \quad (1.65)$$

Podemos ver que os pólos desta função se manifestam para o valor de $(s - \frac{D}{2})$ inteiro e negativo ou nulo. Para $D = 4$ temos $s = 1$ e $s = 2$ como pólos.

Vamos utilizar o resultado acima para renormalizar a expressão para a massa em $D = 4$.

$$m_3^2 = \Gamma'^{2i}(0, 0) = m^2 + \frac{\lambda}{2} F_3(1 + \epsilon, 4) + \delta m^{2(1)} \quad (1.66)$$

onde $\delta m^{2(1)}$ é o contra-termo da massa a um loop. Estamos calculando para $s = 1 + \epsilon$ onde ϵ é um parametro em geral complexo. Para calcular $F_3(1, 4)$ fazemos uso da equação (1.65)

$$F_{\beta}(1 + \epsilon, 4) = \frac{m^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}\Gamma(1)} \left\{ \Gamma(-1 + \epsilon) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{mn\beta} \right) K_1(mn\beta) \right\}. \quad (1.67)$$

Por comodidade definimos

$$F_{\beta}(1 + \epsilon, 4) = I_0 + I_{\beta} \quad (1.68)$$

onde I_0 e I_{β} são dados por:

$$I_0 = \frac{m^2}{(4\pi)^2} \Gamma(-1 + \epsilon) \quad (1.69)$$

$$I_{\beta} = \frac{m^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mn\beta} \right) K_1(mn\beta) \quad (1.70)$$

e então

$$m_{\beta}^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}(I_0 + I_{\beta}) + \delta m^{2(1)} \quad (1.71)$$

Agora, fazemos uso do esquema de renormalização \overline{MS} (*Minimal Subtraction Modified*) [19], desta forma o contratermo de massa é dado por,

$$\delta m^{2(1)} = -\frac{\lambda}{2} I_0. \quad (1.72)$$

Como deveríamos esperar, cada contratermo na teoria a temperatura finita é idêntico ao contratermo que renormaliza a teoria a $\beta^{-1} = 0$. Desta forma, a massa renormalizada a temperatura finita ($\beta^{-1} \neq 0$) pode ser escrita como,

$$m_{\beta}^2 = m^2 + \Delta m_{\beta}^2 \quad (1.73)$$

onde m^2 é o quadrado da massa renormalizada a temperatura zero ($\beta^{-1} = 0$) e Δm_{β}^2 é a

correção térmica finita dada por:

$$\Delta m_3^2 = \frac{m^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\beta} K_1(mn\beta) \quad . \quad (1.74)$$

Note que esta expressão é zero no limite β indo a infinito, quer dizer, a correção térmica para a massa se anula para $\beta^{-1} = 0$.

A primeira vista se conclui que a contribuição térmica é positiva e crescente com a temperatura . Ressaltamos que para altas temperaturas ($m\beta \rightarrow 0$), temos que

$$\frac{\Delta m_3^2}{m^2} \gg 1. \quad (1.75)$$

Isto quer dizer que a contribuição da massa térmica é consideravelmente muito maior comparado com a massa a temperatura zero. Para simplificar a expressão (1.74) , é possível mostrar que para $\nu > -\frac{1}{2}$ uma das representações integrais da função $K_\nu(z)$ [20] é dada por :

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zp} (p^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dp \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2} \quad . \quad (1.76)$$

Aplicando a forma integral da função de Bessel para $\nu = 1$ e efetuando o somatório em (1.74), obremos que

$$\Delta m_3^2 = \frac{\lambda m^2}{4\pi^2} \int_1^\infty \frac{(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{e^{m\beta p} - 1} dp \quad . \quad (1.77)$$

Se analisarmos o comportamento assintótico desta expressão para $m\beta \rightarrow 0$, quer dizer, para $\beta^{-1} \rightarrow \infty$ (isto é para altas temperaturas), obtemos então

$$m_3^2 = m^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{24} \left(\frac{T}{m}\right)^2 - \frac{\lambda}{8\pi} \left(\frac{T}{m}\right) + \frac{\lambda}{16\pi^2} \ln\left(\frac{T}{m}\right) \right\} \quad . \quad (1.78)$$

O resultado que achamos coincide com os resultados de outros trabalhos [4, 9, 21]. Claramente, vemos que para altas temperaturas ($T \gg m$), a teoria de perturbação não é boa,

já que a aproximação de um *loop* (a primeira correção) fica maior que a aproximação em árvore, por isso temos que usar métodos que nos permitam contornar este problema. Um método consistente que permite isto é fazer um *resummation* dos diagramas dominantes *daisy* e *super daisy* que veremos mais adiante.

Agora, a mesma análise pode ser feita para a dependência da constante de acoplamento com a temperatura. Na aproximação de um *loop* temos:

$$\lambda_3 = \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} F_3(2 + \epsilon, 4) + \delta\lambda^{(1)} \quad (1.79)$$

logo $F_3(2 + \epsilon, 4)$ é dado por

$$F_3(2 + \epsilon, 4) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) + 4 \sum_{n=0}^{\infty} K_0(mn, 3) \right]. \quad (1.80)$$

Se definirmos

$$F_3(2 + \epsilon, 4) = J_0 + J_3 \quad (1.81)$$

onde J_0 e J_3 são dados por:

$$J_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right), \quad (1.82)$$

$$J_3 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(mn, 3). \quad (1.83)$$

onde γ é a constante de Euler, então segundo nosso esquema de renormalização, temos que

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{2} J_0. \quad (1.84)$$

É possível achar a soma em (1.83) fazendo uso da representação integral de $K_\nu(z)$ para $\nu = 0$. Assim temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_0(mn, 3) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{e^{-mnp} dp}{(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

(1.85)

$$= \int_1^\infty \frac{dp}{(e^{m\beta p} - 1)(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} .$$

logo a correção térmica na aproximação de um *loop* é dada por

$$\Delta\lambda_\beta = -\frac{3\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_1^\infty \frac{dp}{(e^{m\beta p} - 1)(p^2 - 1)^{1/2}} \right\} . \quad (1.86)$$

É interessante ressaltar que a contribuição térmica para a constante de acoplamento é sempre negativa, isto é, na aproximação de um *loop*, a constante de acoplamento decresce monotonicamente com o aumento da temperatura. É claro que atinge seu valor máximo a temperatura zero ($\beta^{-1} = 0$). A dependência da constante de acoplamento com a temperatura tem sido discutida por vários autores [7, 9, 22, 23, 24, 25, 26, 27]. A dependência da correção térmica para altas temperaturas é obtida fazendo-se a expansão do segundo termo do lado direito de (1.86) quando $m\beta \rightarrow 0$. Encontramos que o comportamento assintótico é dado por,

$$\lambda_\beta = \lambda \left\{ 1 - \frac{3\lambda}{2} \left[\frac{1}{8\pi} \frac{T}{m} - \frac{1}{8\pi^2} \ln \left(\frac{T}{m} \right) \right] \right\} . \quad (1.87)$$

É possível fazer a mesma análise na aproximação de dois *loops* se desprezarmos o diagrama *sunset*, e mostrar que os resultados dominantes são “potências de $\frac{T}{m}$ ”, e a potência é maior quando a ordem de perturbação na expansão em *loops* aumenta [28].

Capítulo 2

Métodos Não-Perturbativos em Teoria de Campos

2.1 O formalismo do potencial efetivo (ação efetiva)

O método da ação efetiva tem se convertido num método padrão no estudo da quebra espontânea da simetria na teoria de campos depois do trabalho de Coleman e Weinberg [29]. Como é conhecido, o potencial clássico na teoria de campos tem um papel importante no estudo relacionado com quebra da simetria. Entretanto algumas vezes, as correções radiativas na teoria quântica podem mudar o comportamento do potencial clássico. O mínimo do potencial clássico pode ser instável sob correções radiativas. A simetria que é quebrada espontaneamente no nível clássico pode ser restabelecida ou ainda a simetria que não é quebrada a nível clássico pode ser quebrada espontaneamente por efeitos quânticos. A quantidade importante que devemos considerar é o potencial efetivo que leva em conta as correções quânticas da teoria. Entretanto o potencial efetivo não pode ser calculado de forma fechada. Desta forma devemos analisar esta quantidade ordem a ordem. Nesta seção vamos considerar o cálculo do potencial efetivo na aproximação de um *loop*. Na seção seguinte consideraremos o método do potencial efetivo para operadores compostos que vai além da aproximação de um *loop*. Neste capítulo trabalharemos a princípio a

temperatura zero.

Primeiro vamos considerar as propriedades básicas da ação efetiva; para isto vamos escrever o funcional gerador de todas as funções de Green da teoria,

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \left[I(\varphi) + \int d^D x \varphi(x) J(x) \right] \right\}, \quad (2.1)$$

onde $I(\varphi)$ é a ação clássica. Para simplificar consideraremos a teoria do campo escalar massivo de uma componente φ e massa m . O funcional gerador $Z(J)$ pode ser expandido em uma série:

$$Z(J) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \quad (2.2)$$

com

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle. \quad (2.3)$$

O funcional gerador (das funções de Green conexas) $W(J)$, é definido como:

$$W(J) = \frac{1}{i} \ln Z(J). \quad (2.4)$$

A série correspondente é:

$$W(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n G_c^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (2.5)$$

com $G_c^{(n)}$ sendo as funções de Green conexas, quer dizer, que os diagramas de Feynman correspondentes na expansão perturbativa são conexos.

A ação efetiva é introduzida como uma transformação de Legendre de $W(J)$. Vamos considerar $\phi(x, J)$, dado por:

$$\phi(x, J) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z(J)} \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle. \quad (2.6)$$

A ação efetiva $\Gamma(\phi)$ é definida como:

$$\Gamma(\phi) = \left[W(J) - \int d^4x J(x)\phi(x) \right] \Big|_{J(x)=J_0(x,\phi)} . \quad (2.7)$$

Não é difícil mostrar que

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = J_0(x, \phi) . \quad (2.8)$$

Agora vamos mostrar que o potencial efetivo pode ser calculado usando o seguinte procedimento. Introduzimos a ação modificada como

$$\tilde{I}(\varphi, \phi) = I(\varphi + \phi) - I(\phi) - \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta I(\varphi(x))}{\delta\phi(x)} . \quad (2.9)$$

Quando estamos interessados em calcular o potencial efetivo, devemos considerar ϕ independente de x . A nova densidade de Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \phi)$ tem termos quadráticos em φ e de ordens maiores,

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \phi) = -\frac{1}{2} \int d^4y \varphi(y) \mathcal{D}^{-1}(\phi; x, y) \varphi(x) + \tilde{\mathcal{L}}_{int}(\varphi, \phi), \quad (2.10)$$

onde o propagador $\mathcal{D}^{-1}(\phi; x, y)$ satisfaz

$$\mathcal{D}^{-1}(\phi; x, y) = \left. \frac{-\delta^2 I(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \right|_{\varphi=\phi} . \quad (2.11)$$

Se ϕ é constante, o propagador \mathcal{D}^{-1} depende só da diferença relativa de coordenadas $z = x - y$ e portanto nós podemos introduzir a transformada de Fourier,

$$\mathcal{D}^{-1}(\phi; p) = \int d^4z e^{ipz} \mathcal{D}^{-1}(\phi; z, 0). \quad (2.12)$$

Então vamos mostrar que o potencial efetivo na aproximação de um *loop* é dado pela

seguinte expressão:

$$V(\phi) = V_0(\phi) - \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(\mathcal{D}^{-1}(\phi, p) \right). \quad (2.13)$$

Para poder deduzir a forma da ação efetiva, vamos aplicar a expansão em *loops*; para tal propósito consideramos a representação de $Z(J)$,

$$Z(J) = N \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\varphi) + \int d^4 x J(x) \varphi(x) \right] \right). \quad (2.14)$$

Agora, fazendo a mudança de variável $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$, nós obtemos

$$Z(J) = N \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\phi) + \int d^4 x J(x) \phi(x) \right] \right) Z_1(J), \quad (2.15)$$

onde $Z_1(J)$, é definido pela relação seguinte,

$$Z_1(J) = N \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\varphi + \phi) - I(\phi) + \int d^4 x J(x) \varphi(x) \right] \right), \quad (2.16)$$

portanto,

$$W(J) = I(\phi) + \int d^4 x J(x) \phi + W_1(J) - i\hbar \ln N, \quad (2.17)$$

onde $W_1(J)$, é definido pela relação :

$$W_1(J) = -i\hbar \ln Z_1(J). \quad (2.18)$$

Agora, pela definição de ϕ ,

$$\phi = \frac{\delta W(J)}{\delta J}, \quad (2.19)$$

nós obtemos a seguinte identidade,

$$\phi = \frac{\delta W(J)}{\delta J} = \phi + \int d^4 y \left[\frac{\delta I(\phi)}{\delta \phi(y)} + J(\phi(y)) + \frac{\delta W(J)}{\delta \phi} \right] \frac{\delta \phi}{\delta J(x)} \quad (2.20)$$

de onde temos que:

$$\frac{\delta I(\phi)}{\delta \phi} + \frac{\delta W_1}{\delta \phi} + J(\phi(x)) = 0. \quad (2.21)$$

Então a ação efetiva tem a forma

$$\Gamma(\phi) = W(J) - \int d^4x J(x)\phi(x) = I(\phi) + W_1(J(\phi)) - i\hbar \ln N. \quad (2.22)$$

Substituindo $J(\phi)$ da equação (2.6) na equação (2.5), encontramos a equação funcional para $W_1(J(\phi))$

$$W_1 = i\hbar \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\varphi + \phi) - I(\phi) - \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta I(\varphi(x))}{\delta \phi(x)} - \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta W_1(\varphi(x))}{\delta \phi(x)} \right] \right). \quad (2.23)$$

Agora, usando a equação (2.9), podemos reescrever W_1 como,

$$W_1 = i\hbar \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{I}(\varphi, \phi) - \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta W_1(\varphi(x))}{\delta \phi(x)} \right] \right). \quad (2.24)$$

Vamos mostrar que W_1 inclui as contribuições de diagramas do vácuo irreduzíveis a uma partícula (1PI) geradas pela ação $\tilde{I}(\varphi, \phi)$. Para fazer isto, vamos usar o seguinte artifício, introduzindo o funcional,

$$W(\phi, K) = -i\hbar \ln Z(\phi, K), \quad (2.25)$$

$$Z(\phi, K) = \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{I}(\varphi, \phi) - \int d^4x \varphi(x) \frac{\delta W_1(\varphi(x))}{\delta \phi(x)} \right] \right). \quad (2.26)$$

onde, agora, a fonte $K(x)$ é independente de ϕ . Também podemos ver que

$$W_1(\phi) = W(\phi, K) \Big|_{K=\frac{\delta W_1}{\delta \phi}}. \quad (2.27)$$

Quando $K = \tilde{K}$, com \tilde{K} satisfazendo a equação

$$\frac{\delta W(\phi, K)}{\delta K} \Big|_{K=\tilde{K}} = \varphi = 0. \quad (2.28)$$

a função $W(\phi, \tilde{K})$ coincide com a ação efetiva $\Gamma(\phi, \tilde{K})|_{\phi=0}$, que é justamente a contribuição de todos os diagramas do vácuo irredutíveis a uma partícula (1PI) gerados pela ação $\tilde{I}(\varphi, \phi)$.

Vamos mostrar que $\tilde{K} = \frac{\delta W_1}{\delta \phi}$. Isto, junto com a equação (2.27), implicará que $W_1(\phi)$ é expresso em termos dos diagramas do vácuo 1PI. Portanto vamos provar que:

$$\left. \frac{\delta W(\phi, K)}{\delta K} \right|_{K=\frac{\delta W_1}{\delta \phi}} = -i\hbar Z^{-1}(\phi; K) \left. \frac{\delta Z(\phi; K)}{\delta K} \right|_{K=\frac{\delta W_1}{\delta \phi}} = 0, \quad (2.29)$$

onde a derivada funcional de $Z(\phi; K)$ com relação a K é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z(\phi; K)}{\delta K} &= \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\varphi + \phi) - I(\phi) - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta I(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int d^4 x \varphi(x) K(x) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto vamos mostrar que:

$$\int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\varphi + \phi) - I(\phi) - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta I(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta W_1(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} \right] \right) = 0. \quad (2.31)$$

Para estabelecer esta relação, vamos tomar a derivada funcional de (2.24) em ambos os lados.

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_1}{\delta \phi} &= Z^{-1} \int \mathcal{D}(\varphi) \left\{ \frac{\delta I(\varphi + \phi)}{\delta \phi} - \frac{\delta I(\phi)}{\delta \phi} - \int d^4 y \varphi(y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} [I(\phi) + W_1(\phi)] \right\} \\ &\times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[I(\varphi + \phi) - I(\phi) - \int d^4 x \varphi(x) \frac{\delta I(\varphi(x))}{\delta \phi(x)} - \int d^4 x \varphi(x) \frac{\delta W_1(\varphi(x))}{\delta \phi(x)} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da expressão acima nós chegamos à relação seguinte.

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_1}{\delta \phi} &= Z^{-1} \int \mathcal{D}(\varphi) \left\{ \frac{\delta W_1}{\delta \phi} - \int d^4 y \varphi(y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(y) \delta \phi(y)} [I(\phi) + W_1(\phi)] \right\} \times \\ &\exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{I}(\varphi; \phi) - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta W_1(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

que implica,

$$\int \mathcal{D}(\varphi) \left\{ \int d^4 y \varphi(y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(y) \delta \phi(y)} [I(\phi) + W_1(\phi)] \right\} \times \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{I}(\varphi; \phi) - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta W_1(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} \right] \right) = 0. \quad (2.34)$$

Agora retornamos para $\phi = const$, e então levando em conta (2.22), encontramos

$$\int d^4 y \Gamma_2(x - y) \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{I}(\varphi; \phi) - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta W_1(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} \right] \right) = 0. \quad (2.35)$$

Já que o fator $\Gamma_2(x - y)$ nesta convolução não é zero, obtemos

$$\int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{I}(\varphi; \phi) - \int d^4 z \varphi(z) \frac{\delta W_1(\varphi(z))}{\delta \phi(z)} \right] \right) = 0, \quad (2.36)$$

e com isto mostramos a relação (2.31). Assim mostramos que $W_1(\phi)$ é dado pelas contribuições dos diagramas conexos de um *loop* irreduzível a uma partícula (1PI) geradas pela ação $\tilde{I}(\varphi, \phi)$. Agora, fazendo uso da equação (2.22), não é difícil mostrar-se a relação (2.13). Para o caso $\phi = const$, o primeiro termo do lado direito da equação (2.22) é justamente $I(\varphi, \phi) = V_0(\phi) \int d^4 x$ e isto conduz à contribuição clássica $V_0(\phi)$ ao potencial efetivo $V(\phi)$. A contribuição seguinte, $V^{(1)}(\phi)$, é dada pela contribuição dos diagramas a um *loop*,

$$V^{(1)}(\phi) = \left(\int d^4 x \right)^{-1} i\hbar \ln \left\{ \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\int d^4 y d^4 z \varphi(y) \mathcal{D}^{-1}(\phi, y - z) \varphi(z) \right] \right) \right\} \quad (2.37)$$

onde

$$\mathcal{D}^{-1}(\phi, x - y) = \frac{\delta^2 I(\varphi)}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \Big|_{\varphi=\phi} = \frac{\delta^2 \tilde{I}(\varphi, \phi)}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (2.38)$$

Notamos que na relação (2.22) temos uma integral funcional Gaussiana, e segue-se que

$$V_1(\phi) = -\frac{i\hbar}{2} \left(\int d^4 x \right)^{-1} Tr Ln \hat{\mathcal{D}}^{-1}. \quad (2.39)$$

Levando em conta que o operador $\hat{\mathcal{D}}^{-1}$ é diagonal no espaço dos momenta, então

$$\langle p | \hat{\mathcal{D}}^{-1} | p \rangle = \delta^1(p - p) \mathcal{D}^{-1}(\phi, p), \quad (2.40)$$

e encontramos que,

$$V_1(\phi) = -\frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(\mathcal{D}^{-1}(\phi, p) \right). \quad (2.41)$$

Assim temos finalmente o potencial efetivo na aproximação de um *loop*,

$$V(\phi) = V_0(\phi) - \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(\mathcal{D}^{-1}(\phi, p) \right). \quad (2.42)$$

Para ilustrar a utilização do formalismo do potencial efetivo, vamos considerar o modelo escalar φ^4 , cuja densidade de Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V_0(\varphi) \quad (2.43)$$

onde V_0 é o potencial clássico,

$$V_0(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4. \quad (2.44)$$

O primeiro passo é calcular \mathcal{D}^{-1} , que é dado por

$$\mathcal{D}^{-1} = -p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2. \quad (2.45)$$

A primeira correção ao potencial efetivo V_1 é dada por

$$V_1(\varphi) = -i \frac{1}{2} \hbar \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(-p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \right). \quad (2.46)$$

É conveniente nesta etapa fazer a rotação de Wick; então teremos que

$$V_1(\varphi) = \frac{1}{2} \hbar \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\ln(p^2 + M^2(\varphi))) \quad (2.47)$$

onde,

$$M^2(\phi) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2 = \frac{d^2V_0(\phi)}{d\phi^2}. \quad (2.48)$$

Está fórmula pode ser generalizada sem dificuldade para o caso de N componentes do campo escalar.

2.2 O formalismo de operadores compostos (CJT)

O formalismo dos operadores compostos é introduzido usando-se o método funcional. Para simplificar a notação nós consideramos nesta parte só o caso de um campo escalar. A generalização para campos de calibre e para *fermions* pode ser feita sem dificuldade.

Nesta seção vamos desenvolver o formalismo dos operadores compostos para a ação efetiva (CJT) desenvolvido por Cornwall, Jackiw, e Tomboulis [30], que é uma generalização da ação efetiva, $\Gamma(\phi, G)$, que depende não só de ϕ , o valor esperado no vácuo do campo $\varphi(x)$, mas também de $G(x, y)$, o valor esperado no vácuo de $T\varphi(x)\varphi(y)$ [30, 31, 32].

Primeiramente consideremos $Z(J, K)$ como o funcional gerador na presença de fontes externas local e não-local, $J(x)$ e $K(x, y)$, respectivamente, onde $J(x)$ está acoplado a $\varphi(x)$ e $K(x, y)$ a $\varphi(x)\varphi(y)$:

$$Z(J, K) = \int D\varphi \times \exp \left\{ - \left[I(\varphi) + \int d^D x (\varphi(x)J(x)) + \int d^D x \int d^D y (\varphi(x)K(x, y)\varphi(y)) \right] \right\}. \quad (2.49)$$

Introduzindo a Lagrangeana de interação L_{int} , onde $I(\varphi) = \int d^D x L(x)$, a ação clássica pode ser escrita como

$$I(\varphi) = \int d^D x \int d^D y (\varphi(x)D_0^{-1}(x-y)\varphi(y)) + \int d^D x L_{int}, \quad (2.50)$$

onde $D_0(x - y)$ é o propagador livre,

$$D_0^{-1}(x - y) = -(\square + m^2)\delta^D(x - y), \quad (2.51)$$

e $\int d^D x L_{int}$ é a parte de interação da ação. Agora nós consideramos $\Gamma(\phi, G)$ como a generalização da ação efetiva usual $\Gamma(\phi)$, que depende de $\phi(x)$, do valor esperado no vácuo do campo φ e de $G(x, y)$ que é o valor esperado no vácuo do produto $T\varphi(x)\varphi(y)$ ordenado temporalmente.

A ação efetiva generalizada $\Gamma(\phi, G)$ é definida por uma dupla transformação de Legendre do funcional gerador das funções de Green conexas. Nós definimos

$$\frac{\delta W(J, K)}{\delta J(x)} = \phi(x), \quad (2.52)$$

$$\frac{\delta W(J, K)}{\delta K(x)} = \frac{1}{2}(\phi(x)\phi(y) + G(x, y)). \quad (2.53)$$

Nas eqs. (2.52) e (2.53), a quantidade $\phi(x)$ é o valor esperado no vácuo do campo normalizado,

$$\phi(x) = \langle 0|\varphi(x)|0 \rangle, \quad (2.54)$$

e $G(x, y)$ é a função de dois pontos.

Das equações (2.52) e (2.53), eliminamos J e K em favor de ϕ e G :

$$\Gamma(\phi, G) = W(J, K) - \int d^D x (\phi(x)J(x)) - \frac{1}{2} \int d^D x \int d^D y (\phi(x)\phi(y) + G(x, y)) K(x, y). \quad (2.55)$$

Depois disto não é difícil mostrar as duas relações seguintes

$$\frac{\delta \Gamma(\phi, G)}{\delta \phi(x)} = J(x) - \int d^D y (K(x, y)\phi(y)) \quad (2.56)$$

e

$$\frac{\delta \Gamma(\phi, G)}{\delta G(x, y)} = iK(x, y). \quad (2.57)$$

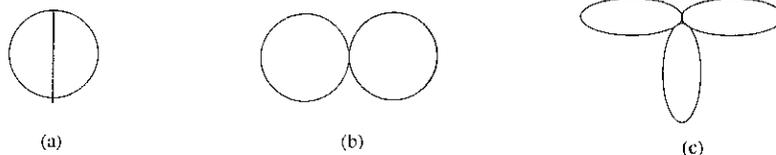


Figura 2.1: Diagramas de Feynman (2PI) para as teorias a) φ^3 , b) φ^4 e c) φ^6

Na situação física que corresponde a quando as fontes J e K se anulam, as equações (2.56) e (2.57) se reduzem às condições de estabilidade para a teoria. Lembramos que a ação efetiva usual é simplesmente $\Gamma(\phi, G)$ calculada em $K = 0$.

Em seguida deduziremos a expansão em *loops* para a ação efetiva $\Gamma(\phi, G)$, e vamos mostrar que tem a seguinte forma,

$$\Gamma(\phi, G) = I(\phi) + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} + \frac{i}{2} \text{Tr} \mathcal{D}^{-1}(\phi) G + \Gamma_2(\phi, G) + C \dots \quad (2.58)$$

onde $I(\phi)$ é a ação clássica, \mathcal{D} é definido como

$$i\mathcal{D}^{-1} = \frac{\delta^2 I(\phi)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}, \quad (2.59)$$

e o traço, o logaritmo e o produto são tomados no sentido funcional e C é uma constante. O termo $\Gamma_2(\phi, G)$ é calculado como se segue. Na ação clássica $I(\varphi)$, reescrevemos o campo φ na forma $\varphi + \phi$. A parte de interação $I_{int}(\varphi, \phi)$ da ação, escrita em termos dos campos φ e ϕ , $I(\varphi + \phi)$, é constituída pelos termos de ordem igual ou superior á ordem cúbica em φ .

As contribuições para $\Gamma_2(\phi)$ são dadas por todos os diagramas de vácuo a dois *loops*, sendo estes diagramas irreduzíveis a duas partículas (2PI) na teoria perturbativa cujos vértices são determinados por $I_{int}(\varphi, \phi)$ e com o propagador igual a $G(x, y)$, (ver figura.(2.1)). Para mostrar isto, vamos introduzir a seguinte transformação de Legendre, com $W(J, K)$ calculado para K fixo,

$$\Gamma^K(\phi) = W(J, K) - \int d^D x \phi(x) J(x). \quad (2.60)$$

Com isto, temos que

$$\frac{\delta\Gamma^K(\phi)}{\delta K(x,y)} = \frac{\delta W(J,K)}{\delta K(x,y)} + \frac{\delta W(J,K)}{\delta J(z)} \frac{\delta J(z)}{\delta K(x,y)} \Big|_\phi - \frac{\delta J(z)}{\delta K(x,y)} \Big|_\phi \phi(z) = \frac{W(J,K)}{K(x,y)}, \quad (2.61)$$

e então encontramos que,

$$\frac{\delta\Gamma^K(\phi)}{\delta K(x,y)} = \phi(x)\phi(y) - iG(x,y) \quad (2.62)$$

$$\Gamma(\phi, G) = \Gamma^K(\phi) - \int dx^D dy^D [\phi(x)\phi(y) + iG(x,y)]K(x,y). \quad (2.63)$$

Destes resultados, notamos que de acordo com as equações (2.49) e (2.60), $\Gamma^K(\phi)$ é a ação efetiva para a teoria com a ação clássica,

$$I^K(\phi) = I(\phi) + \int dx^D dy^D \phi(x)\phi(y)K(x,y). \quad (2.64)$$

Segundo a análise do potencial efetivo desenvolvido na seção anterior, vemos que o funcional Γ^K é

$$\Gamma^K(\phi) = I^K(\phi) + W_1^K(\phi), \quad (2.65)$$

onde W_1^K satisfaz a relação funcional

$$W_1^K(\phi) = -i \ln \int D(\varphi) \exp \left\{ i \left[I^K(\varphi + \phi) - I^K(\phi) - \varphi \frac{\delta I^K(\phi)}{\delta \phi} - \varphi \frac{\delta W_1^K(\phi)}{\delta \phi} \right] \right\}. \quad (2.66)$$

Nesta parte para poder mostrar (2.58), vamos tomar como definição de Γ_2 a equação (2.58). Então, a partir da equação (2.58) com (2.63) e fazendo uso de (2.64) e (2.65), encontramos que,

$$\Gamma_2(\phi, G) + const = \frac{-i}{2} Tr \left[\mathcal{D}^{-1}(\phi) - 2K^T \right] G - \frac{i}{2} Tr \ln G^{-1} + W_1^K(\phi). \quad (2.67)$$

A relação (2.58) pode ser provada se mostramos que $\Gamma_2(\phi, G)$ (como está presente na equação (2.67)) é a soma dos diagramas irreduzíveis a dois *loops* (2PI) e de ordem superior.

na teoria com vértices determinados por $I_{int(\varphi, \phi)}$ com o propagador igual a $G(x, y)$.

Inicialmente vamos expressar K^T em (2.67) em termos de ϕ e G usando (2.57) e (2.58):

$$K^T = -\frac{1}{2}G^{-1} + \frac{1}{2}\mathcal{D}^{-1} - i\frac{\delta\Gamma_2}{\delta G} \quad (2.68)$$

(lembramos que todas as quantidades acima devem ser entendidas como operadores). Agora levando em conta a eq. (2.66), encontramos que a relação (2.67) é equivalente à seguinte relação,

$$\Gamma_2(\phi, G) + const = TrG\frac{\delta\Gamma_2}{\delta G} - i \ln \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi + I_{int}(\varphi, \phi) - \varphi \frac{\delta W_1^K(\phi)}{\delta\phi} - i\varphi \frac{\delta\Gamma_2(\phi, G)}{\delta G} \varphi \right] \right\} + i \ln \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi \right] \right\} \quad (2.69)$$

Note que $\Gamma(0, G)$ é a soma de todos os diagramas do vácuo 2PI. Então das equações (2.55) e (2.57), podemos obter,

$$\Gamma_2(0, G) + const = TrG\frac{\delta\Gamma_2}{\delta G} - i \ln \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi + I_{int}(\varphi, \phi) - \varphi \frac{\delta W_1^K(\phi)}{\delta\phi} - i\varphi \frac{\delta\Gamma_2(\phi, G)}{\delta G} \varphi \right] \right\} + i \ln \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi \right] \right\}, \quad (2.70)$$

onde o valor de J_0 é o valor para o qual $\frac{\delta W}{\delta J} = \phi$ se anula, o que significa que os diagramas contendo *tadpoles* são removidos. Vamos comparar as equações (2.69) e (2.70). Para isso usando (2.68), vamos reescrever (2.66) na seguinte forma,

$$W_1^K(\phi) = -i \ln \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi + I_{int}(\varphi, \phi) - i\varphi \frac{\delta\Gamma_2(\phi, G)}{\delta G} \varphi - \varphi \frac{\delta W_1^K(\phi)}{\delta\phi} \varphi \right] \right\}. \quad (2.71)$$

Então levando-se em conta os resultados da última seção, vemos que o valor de $\frac{\delta W_1^K(\phi)}{\delta\phi}$ que satisfaz esta equação é precisamente o valor da corrente externa para a qual o *tadpole*

se anula na teoria cuja a ação é

$$\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi + I_{int}(\varphi, \phi) - i\varphi \frac{\delta\Gamma_2(\phi, G)}{\delta G} \varphi. \quad (2.72)$$

Dessa maneira, segue-se que, comparando a forma da equação (2.69) com a forma da equação (2.70), pode-se concluir que

$$\Gamma_2(\phi, G) - i \ln \int \mathcal{D}(\varphi) \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi \right] \right\} = \Gamma_2(\phi, G) + \frac{i}{2} Tr \ln G^{-1} + const \quad (2.73)$$

é a soma de todos os diagramas do vácuo 2PI na teoria descrita pela ação:

$$\frac{1}{2}\varphi(-G)^{-1}\varphi + I_{int}(\varphi, \phi). \quad (2.74)$$

O termo $\frac{i}{2} Tr \ln G^{-1}$ inclui as contribuições dos diagramas do vácuo 1PI. Portanto $\Gamma_2(\phi, G)$ é na realidade a soma dos diagramas do vácuo de dois ou mais *loops* (2PI). Isto completa a prova da relação (2.58).

Neste ponto vamos introduzir o potencial efetivo para operadores compostos. Como é usual, nós estamos interessados só nas soluções com invariância translacional com $\phi(x)$ sendo constante, e $G(x, y)$ sendo uma função só de $(x - y)$, o que implica que a ação efetiva toma a forma:

$$\Gamma(\phi, G) = -V(\phi, G) \int d^D x, \quad (2.75)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial efetivo para operadores compostos.

A expansão em série para $V(\phi, G)$ tem a forma (que vem da relação (2.58)).

$$V(\phi, G) = V_0 - \frac{i}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} Tr \ln(G^{-1}(p)) - \frac{i}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} tr \left[\mathcal{D}^{-1}(\phi, p) G(p) \right] + V_2(\phi, G) + const. \quad (2.76)$$

onde $V_0(\phi)$ é o potencial clássico, e

$$G(p) = \int d^D x e^{ipx} G(x)$$

$$\mathcal{D}^{-1}(\phi, p) = \int d^D x e^{ipx} \mathcal{D}^{-1}(\phi, x) \quad (2.77)$$

e $V_2(\phi, G)$ é a soma de todos os diagramas do vácuo de dois e mais *loops* (2PI) da teoria cujos vértices são dados por $I_{int}(\phi, \varphi)$ com o propagador igual a $G(p)$.

As condições de estabilidade dadas pelas equações (2.56) e (2.57) são expressas em termos do potencial efetivo, na forma,

$$\frac{\partial V(\phi, G)}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V(\phi, G)}{\partial G(k)} = 0, \quad (2.78)$$

onde $G(p)$ é a transformada de Fourier de $G(x, y)$.

2.3 A Expansão $1/N$

Mais variáveis usualmente significam maior complexidade, mas nem sempre isto acontece. Existe uma grande variedade de famílias de teorias de campos com grupos de simetria $SO(N)$ ou $SU(N)$ que são mais fáceis de se tratar quando N é grande [33]. Mais precisamente, as soluções destas teorias possuem uma expansão em potências de $1/N$, que é o tema que trataremos neste momento.

Assim é possível analisar nossa teoria de duas maneiras: A primeira é a expansão ordinária na constante de acoplamento para N fixo, a outra é a expansão em potências de $1/N$ para a constante de acoplamento fixa, a chamada “expansão $1/N$ ”.

O cálculo na expansão $1/N$ é um pouco mais difícil que a expansão ordinária na constante de acoplamento, mas é possível obter-se resultados para várias quantidades físicas de interesse ao menos na aproximação de ordem dominante. Esta situação é algumas vezes descrita dizendo-se que o modelo é exatamente solúvel quando N tende ao infinito.

Estes resultados encontrados descrevem uma estrutura mais rica que os resultados na expansão ordinária. A razão disto é que a expansão $1/N$ dominante preserva muito mais a estrutura não linear da teoria exata.

Por exemplo, a QCD, que é uma teoria de calibre não-Abeliana cujo grupo de simetria é o grupo de cor $SU(3)$ (mais genericamente nos referimos ao grupo de calibre $SU(N)$) pode ser estudada do ponto de vista da expansão em $1/N$. Como foi notado pela primeira vez por 't Hooft [34], várias das características da QCD podem ser entendidas estudando-se o grupo de calibre $SU(N)$ no limite de $N \rightarrow \infty$. Poderíamos então pensar que, fazendo-se $N \rightarrow \infty$, a análise da teoria seria mais complicada, já que se incrementaria o número de graus de liberdade da teoria. Também pode-se argumentar que a teoria do grupo de calibre $SU(N)$ tem pouca relação com a QCD, pois $N = \infty$ é muito diferente de $N=3$. Entretanto a teoria de calibre $SU(N)$ se simplifica no limite quando $N \rightarrow \infty$. Na realidade o parâmetro da expansão é $1/N$ e não N . Resultados para QCD podem ser obtidos considerando-se o limite $N \rightarrow \infty$ (N grande), e utilizando-se a expansão $1/N = 1/3$, onde estes resultados se encontram em boa concordância como os resultados experimentais.

Para ilustrar o formalismo da expansão $1/N$, vamos iniciar com a teoria do campo escalar formado por um multipletto de N campos escalares φ_a , $a = 1, \dots, N$ com a dinâmica definida pelo Lagrangeano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_u \varphi_a \partial^u \varphi_a - \frac{1}{2} \mu_0^2 \varphi_a \varphi_a - \frac{\lambda_0}{8N} (\varphi_a \varphi_a)^2. \quad (2.79)$$

Para fixar idéias vamos ilustrar com o espalhamento de dois *mesons* de tipo a em dois

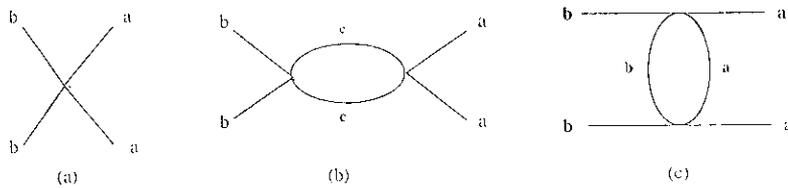


Figura 2.2: Diagramas de Feynman para a teoria φ^4 de N componentes

mesons de tipo b com $a \neq b$, representado pelos três diagramas da figura (2.2). O primeiro diagrama (figura 2.2a) é ordem (λ_0/N) , o primeiro termo da ordem dominante não trivial na expansão $1/N$. O segundo diagrama (figura 2.2b) é de ordem (λ_0^2/N) , já que existem N diagramas do tipo da figura (2.2b), já que o índice interno c é arbitrário. O terceiro

diagrama (figura 2.2c) é de ordem (λ_0^2/N^2) e existe apenas um, já que o índice interno é fixo e não devemos somá-lo, este diagrama é de segunda ordem em $1/N$ (seguinte ordem dominante) e é desprezível comparado com os dois diagramas anteriores no limite de N grande. Por outro lado, notamos que os diagramas 2.2b e 2.2c têm a mesma estrutura topológica, assim nesta expansão $1/N$ perdemos a grande vantagem da análise diagramática que é a transformação de álgebra em topologia. Esta dificuldade pode ser eliminada pela introdução de um campo auxiliar σ na densidade de Lagrangeana, que pode então ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \left(\sigma - \frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \varphi_a \varphi_a - \mu_o^2 \right). \quad (2.80)$$

O termo adicionado não tem efeito na dinâmica da teoria. Isto pode ser visto sem dificuldade usando o método da integração funcional. A integral funcional em σ é uma integral Gaussiana. Então segue-se que o seu único efeito é o de multiplicar o funcional gerador da teoria por uma constante irrelevante. A equação de Euler-Lagrange para σ é dada por:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \varphi_a \varphi_a + \mu_o^2, \quad (2.81)$$

que não envolve derivada no tempo, isto é, não é uma equação de movimento no sentido estrito real mas sim uma equação de vínculo.

Note que a dinâmica definida pelo Lagrangeano da equação (2.80) é a mesma que a definida pelo Lagrangeano na forma original, com a ressalva de que as regras de Feymann são bastante diferentes.

Isto pode ser visto facilmente reescrevendo-se a expressão (2.80) na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_u \varphi_a \partial^u \varphi_a + \frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma \varphi_a \varphi_a - \frac{N \mu_o^2}{\lambda_0} \sigma. \quad (2.82)$$

Assim, neste formalismo, a única interação não trivial é o acoplamento tri-linear $\varphi \varphi \sigma$. Todos os fatores de $1/N$ vêm do propagador de σ ($i\lambda_0/N$), e cada *loop* fechado de φ leva

o mesmo índice e este índice sempre será somado. Assim não precisamos escrever o índice explícito em um *loop* de φ e disto resulta que cada *loop* de φ nos dá sempre o fator N .

Na figura seguinte mostramos os mesmos diagramas da figura (2.3), no novo formalismo. A linha pontilhada representa o propagador de σ . Nesta figura pode-se notar que os diagramas 2.3b e 2.3c são topologicamente diferentes, o primeiro contém um *loop* interno de φ que não existe no segundo. Neste ponto o potencial efetivo desta teoria pode

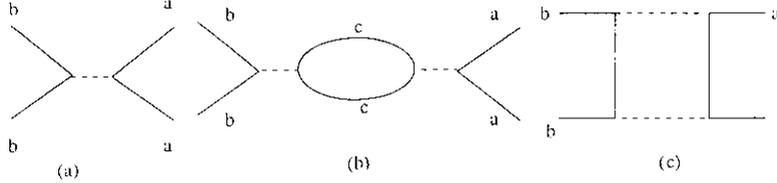


Figura 2.3: Os diagramas de Feynman como se mostra na figura fig.(2.2), com o campo auxiliar

ser calculado. Da relação (2.82), temos

$$V(\varphi, \sigma) = -\frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma \phi_a \phi_a + \frac{i N \mu_0^2}{\lambda_0} \sigma + \text{corre. radiativas}. \quad (2.83)$$

Como é usual nós estamos interessados na vizinhança do mínimo na aproximação de árvore. Nesta região, ϕ é de ordem $N^{1/2}$ e σ é de ordem 1, assim todos os termos de (2.83) explicitamente mostrados são da mesma ordem em N . Não é difícil ver que as únicas correções radiativas de ordem N são as que aparecem na figura (2.4a) e que todos os outros diagramas como os mostrados na figura (2.4b) são de ordem 1.

Assim, a soma dos diagramas da figura (2.4a) pode ser escrita em forma explícita, similar ao caso de uma componente como foi desenvolvido na primeira parte deste capítulo:

$$V(\varphi, \sigma) = -\frac{1}{2} \frac{N}{\lambda_0} \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma \phi^2 + \frac{N \mu_0^2}{\lambda_0} \sigma + \frac{1}{2} N \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln(k^2 + \sigma), \quad (2.84)$$

onde $\phi^2 = \phi_a \phi_a$, e a integral é sobre o momento Euclídeano. O estado fundamental da

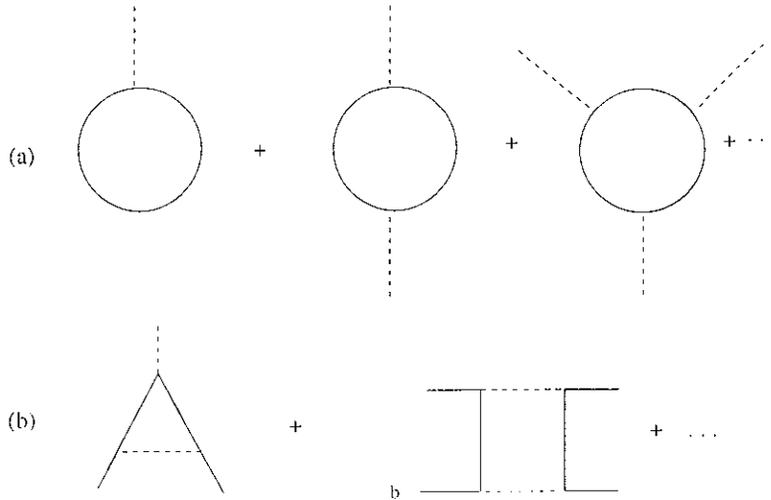


Figura 2.4: (a) Diagramas de Feynman de ordem dominante para N grande que contribuem ao potencial efetivo. (b) Alguns diagramas de Feynman de ordem não dominante.

teoria é determinado pelas condições de estabilidade de $V(\varphi, \sigma)$,

$$\frac{\delta V}{\delta \sigma} = 0 \tag{2.85}$$

e

$$\frac{\delta V}{\delta \phi_a} = 0. \tag{2.86}$$

A equação (2.85) é uma equação que pode ser usada para eliminar σ e então escrever $V(\varphi, \sigma)$ em função só de φ , e a equação (2.86) pode ser usada para determinar o estado fundamental.

Até o presente momento nós apresentamos apenas o formalismo desenvolvido no passado para se estudar não-perturbativamente modelos em teoria de campos. Nós aplicaremos estes formalismos para alguns modelos conhecidos nos capítulos subseqüentes.

Capítulo 3

Regularização Analítica no Modelo

$(\bar{\psi}_i\psi_i)_D^2$ a Temperatura e Densidade

Finita

Neste capítulo estudaremos um exemplo da expansão $1/N$ no modelo de *fermions* auto-interagentes conhecido como modelo de Gross-Neveu.

Usando simultaneamente o método da regularização dimensional e analítica, nós re-examinamos o modelo de Gross-Neveu a temperatura e densidade finita (potencial químico $\neq 0$) no espaço-tempo D -dimensional. O potencial efetivo regularizado é obtido na aproximação da ordem dominante da expansão $1/N$ (para N grande). Mostraremos que para $D = 3$ o potencial efetivo é finito.

Além dos cálculos na rede, muitos caminhos têm sido tomados para ir além das limitações da teoria de perturbações dentro do contexto da formulação do espaço-tempo contínuo em teoria de campos. Por exemplo, muitos esforços têm sido feitos no contexto da teoria de campos construtiva [35]. Para modelos escalares, 't Hooft e Rivasseau [36] apresentaram uma construção formal do modelo planar massivo $(\lambda\varphi^4)_4$ no espaço Euclidiano com o sinal "errado" da constante de acoplamento. Já que o número de diagramas planares não cresce de modo fatorial com a ordem da perturbação em λ , a

construção neste caso pode ser feita dentro do contexto puro da teoria de perturbações.

A idéia básica da expansão $1/N$ é a seguinte: se considerarmos um campo de N -componentes com acoplamento quártico de intensidade λ , então a introdução de um campo ultra-local intermediário possibilita somar um número infinito de diagramas de Feynman com uma constante de acoplamento efetiva λ/\sqrt{N} , no limite de N grande. Neste caso alguns dos diagramas mais divergentes são suprimidos e um propagador completo é obtido.

Um bom exemplo onde esta idéia pode ser implementada é no modelo de Gross-Neveu, que consiste de *fermions* com uma auto-interação quártica $(\bar{\psi}_i\psi_i)^2$ [37]. Em $D = 3$ este modelo é não-renormalizável na expansão da constante de acoplamento, mas se converte em um modelo renormalizável na expansão $1/N$ [38].

Dentro do contexto da expansão $1/N$, em $D = 2$, o modelo de Gross-Neveu tem a propriedade da liberdade assintótica e em qualquer dimensão do espaço-tempo $D < 4$, a simetria quiral pode ser quebrada espontaneamente com a geração dinâmica da massa. Para o caso em que o potencial químico é zero, a quebra espontânea da simetria pode ser restaurada via uma transição de fase de segunda ordem a uma determinada temperatura. Para $D = 2$ a condensação de *kinks* faz com que a transição de fase aconteça para qualquer temperatura. Aqui cabe a pergunta se a presença do potencial químico mudaria a ordem da transição de fase [39].

Na literatura não existe concordância nesta questão já que alguns resultados de cálculos por meio de simulação na rede indicam que a transição é de primeira ordem para potencial químico diferente de zero e de segunda para potencial químico nulo [40].

Wolf [39] obteve um resultado diferente em $D = 2$, com um ponto tricrítico separando a transição de fase de segunda ordem e de primeira ordem. Também devemos citar o trabalho de Barducci et al. [41] que analisa o modelo onde a simetria quiral é quebrada explicitamente devido a um termo de massa introduzido na densidade de Lagrangeana. Estes autores sugerem que a transição de fase pode ser de primeira ou segunda ordem dependendo do valor da massa dos *fermions*. Estes também encontraram indicações da existência do fenômeno tricrítico.

auxiliar ultra-local $\varphi(x)$ na densidade Lagrangeana, que tem a forma

$$\mathcal{L}'(\varphi, \psi, \bar{\psi}) = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) - \frac{1}{2} \left(\varphi + \left(\frac{\lambda}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{\psi} \psi \right)^2 = \bar{\psi} (i \not{\partial}) \psi - \left(\frac{\lambda}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \varphi \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \varphi^2. \quad (3.4)$$

Então pode-se escrever o gerador funcional dado pela equação eq. (3.3) equivalentemente como

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = c' \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\varphi \exp \left(i \int d^D x (\mathcal{L}' + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi) \right), \quad (3.5)$$

onde $\mathcal{L}'(\varphi, \psi, \bar{\psi})$ é dado pela eq. (3.4). Para determinar o valor de equilíbrio de $\varphi(x)$, nós definimos o funcional gerador das funções de Green conexas, $W(J)$, como

$$e^{iW(J)} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\varphi \exp \{ i \int d^D x (\mathcal{L}' + J \varphi) \}; \quad (3.6)$$

disto pode-se obter a ação efetiva por meio de uma transformação de Legendre $\Gamma(\varphi_0)$

$$\Gamma(\varphi_0) = \int d^D x (\varphi_0(x) J(x) - W(J)), \quad (3.7)$$

onde

$$\varphi_0(x) = \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)}. \quad (3.8)$$

Se nós supormos invariância translacional, o potencial efetivo será dado por (ver figura 3.1)

$$V(\varphi_0) = \frac{1}{2} \varphi_0^2 - iN \sum_{s=1}^{\infty} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{s} \left(\frac{\lambda \varphi_0^2}{N k^2} \right)^s. \quad (3.9)$$

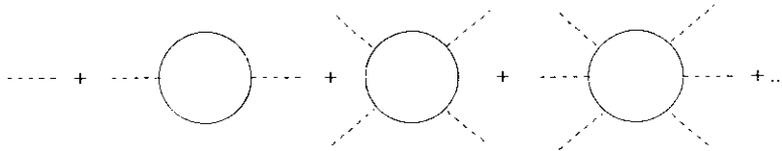


Figura 3.1: Diagramas de Feynman de ordem dominante para N grande que contribuem para o potencial efetivo $V(\varphi)$

Para permitir uma melhor comparação com resultados que obtivemos para o caso de

potencial químico diferente de zero, vamos revisar algumas das características básicas do modelo com potencial químico nulo.

Supondo que o sistema está em equilíbrio térmico à temperatura β^{-1} , podemos fazer uso do formalismo de tempo imaginário. Neste caso, podemos fazer as substituições

$$\omega \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2}) \text{ e } \frac{1}{2\pi} \int dq_E^0 \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n. \quad (3.10)$$

Definindo $(\frac{\lambda}{N})^{\frac{1}{2}} = g$, e usando a regularização dimensional para tratar as divergências ultra-violetas associadas aos momenta contínuos, é possível obter o potencial efetivo na forma da função zeta de Hurwitz. Neste caso o potencial efetivo é dado por

$$V(\varphi_0, \beta) = \frac{1}{2}\varphi_0^2 + 2N \sum_{s=1}^{\infty} p(D, s)(g\varphi_0)^{2s} \beta^{2s-D} \zeta(2s - d, \frac{1}{2}), \quad (3.11)$$

onde $p(D, s)$ é dado por:

$$p(D, s) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(s+1)} \Gamma(s - \frac{d}{2}) \frac{(-1)^s}{(2\pi)^{2s}}, \quad (3.12)$$

e a função zeta de Hurwitz é definida como

$$\zeta(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z}, \quad (3.13)$$

que é analítica para $Re(z) > 1$. Note que o potencial efetivo não está bem definido já que a função zeta de Hurwitz está definida sob o conjunto aberto conexo de pontos $Re(z) > 1$. Para fazer a continuação analítica para todo o plano z (menos o ponto $z=1$) da função zeta de Hurwitz, vamos seguir os seguintes passos: primeiro usamos a representação de Euler para a função Gama para expressar a função zeta de Hurwitz como,

$$\zeta(z, q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \frac{e^{-tq}}{1 - e^{-t}}. \quad (3.14)$$

Em seguida separamos a integral de zero a infinito em duas integrais, uma de zero até 1

e a outra 1 a infinito. A segunda integral é uma função analítica. As divergências estão associadas ao limite zero da primeira integral. Então, usando a representação de Bernoulli para o integrando, é possível obter as seguintes expressões para a extensão analítica de $\zeta(z, \frac{1}{2})$:

$$\zeta(z, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\Gamma(z)} g_1(z, \frac{1}{2}) + \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\frac{1}{2})}{n!} \frac{1}{(z+n-1)}, \quad (3.15)$$

onde $g_1(z, \frac{1}{2})$ é dado por

$$g_1(z, \frac{1}{2}) = \int_1^{\infty} dt t^{z-1} \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t - 1}, \quad (3.16)$$

e $B_n(x)$ são os polinômios de Bernoulli. Tomando $z = 2s - d$ e definindo $c_n = \frac{B_n}{n!} (\frac{1}{2^{n-1}} - 1)$. substituímos esta expressão da extensão analítica no potencial efetivo $V(\varphi_0, \beta)$. Após alguns cálculos obtemos,

$$V(\varphi_0, \beta) = \frac{1}{2} \varphi_0^2 + 2N \sum_{s=1}^{\infty} q(D, s) \left(g_1(2s - d, \frac{1}{2}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2s - D + n} \right) (g\varphi_0)^{2s} \beta^{2s-D}, \quad (3.17)$$

onde $q(D, s)$ é dado por

$$q(D, s) = \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)} \frac{1}{\Gamma(s - \frac{D}{2} + 1)} \frac{1}{(4\pi)^{2s - \frac{D}{2}}}. \quad (3.18)$$

Uma consequência direta do método de regularização utilizado é a seguinte: constatamos que o potencial efetivo $V(\varphi_0, \beta)$ não tem singularidade para D ímpar e s inteiro. Isto significa que, na aproximação $1/N$ para N grande, o potencial efetivo regularizado é finito para D ímpar.

Faremos agora a mesma análise para o caso do potencial químico $\mu \neq 0$. Desta forma vamos introduzir o potencial químico μ e definir

$$\sigma = \frac{\mu\beta}{2\pi}. \quad (3.19)$$

É bem conhecido que o efeito do potencial químico é mudar os níveis de energia pela quantidade μ . Então, seguindo os mesmos passos, é possível mostrar que a única mudança

na equação (3.11) é que em lugar de $\zeta(z, \frac{1}{2})$, nós temos que estender analiticamente $\zeta(z, \frac{1}{2} + i\sigma)$. Primeiro escrevemos a representação integral da função zeta de Hurwitz como

$$\zeta(z, \frac{1}{2} + i\sigma) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{e^{-t(\frac{1}{2} + i\sigma)}}{1 - e^{-t}}. \quad (3.20)$$

Seguindo o procedimento anterior e usando a seguinte expansão

$$B_n(x+h) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k(x) h^{n-k}, \quad (3.21)$$

nós obtemos que

$$B_n(\frac{1}{2} - i\sigma) = \sum_{k=0}^n A_{nk} \sigma^{n-k}, \quad (3.22)$$

onde

$$A_{nk} = -(-i)^{n-k} C_n^k (1 - 2^{1-k}) B_k, \quad (3.23)$$

e B_k são os números de Bernoulli[43]. Substituindo as equações (3.21),(3.22) e (3.23) em (3.20), finalmente obtemos a extensão analítica da $\zeta(2s - d, \frac{1}{2} + i\sigma)$:

$$\zeta(2s - d, \frac{1}{2} + i\sigma) = \frac{1}{\Gamma(2s - d)} g_2(2s - d, \frac{1}{2} - i\sigma) + \frac{1}{\Gamma(2s - d)} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{A_{nk}}{(2s - D + n)} \sigma^{n-k}, \quad (3.24)$$

onde $g_2(2s - d, \frac{1}{2} + i\sigma)$ é dado por

$$g_2(2s - d, \frac{1}{2} + i\sigma) = \int_1^\infty dt t^{2s-D} \frac{e^{t(\frac{1}{2} - i\sigma)}}{e^t - 1}. \quad (3.25)$$

O potencial efetivo poder ser expresso como:

$$V(\varphi_0, \beta) = \frac{1}{2} \varphi_0^2 + 2N \sum_{s=1}^\infty p(D, s) \left(\zeta(2s - d, \frac{1}{2} + i\sigma) + (\zeta(2s - d, \frac{1}{2} - i\sigma)) \right) (g\varphi_0)^{2s} \beta^{2s-D}, \quad (3.26)$$

onde $p(D, s)$ é dado pela equação (3.12) e a função zeta de Hurwitz é dada pela equação (3.24). Neste momento cabe fazer alguns comentários. É conhecido que o método da regularização dimensional não funciona para campos não massivos. Note que usamos

este método na integral nos momentos contínuos, e a frequência de Matsubara ω_n faz o papel das massas, já que $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2}) \neq 0, \forall n$. Conseqüentemente nós devemos nos restringir à temperatura finita.

Também notemos que, já que (3.26) é uma série de Laurent em β^{-1} , a nossa expansão é apropriada para altas temperaturas. Pode ser visto também que o potencial efetivo regularizado permanece real no caso em que o potencial químico é diferente de zero. Isto significa que na aproximação dominante existem indicações para a transição de fase de primeira ordem.

Capítulo 4

Redução Dimensional do Modelo de Gross-Neveu com Simetria Quiral Contínua

Neste capítulo continuaremos o estudo do modelo de Gross-Neveu; entretanto estudaremos uma generalização onde existe uma simetria quiral contínua. Continuaremos a estudar o sistema em equilíbrio térmico e estaremos interessados no limite de altas temperaturas de forma que a redução dimensional pode ser efetuada.

Estudaremos a transição de fase do modelo Gross-Neveu generalizado com simetria quiral contínua para dimensão do espaço Euclidiano $2 < d \leq 4$. Os expoentes críticos são calculados fazendo uso da expansão $1/N$ na ordem dominante para temperatura zero e finita. A redução dimensional da teoria é obtida depois da introdução dos contratermos térmicos necessários para cancelar as divergências térmicas que se originam no limite de altas temperaturas. Finalmente determinaremos a classe de universalidade da teoria reduzida por meio de uma análise simples da estrutura infra-vermelha das quantidades termodinâmicas.

Uma das diferenças entre a teoria de campos e sistemas mecânicos é que a teoria de campos tem infinitos graus de liberdade que podem tornar possível a quebra espontânea

de uma simetria. É importante lembrar que a quebra espontânea dinâmica da simetria tem um papel importante na física moderna. Em matéria condensada por exemplo, este mecanismo é usado para descrever a supercondutividade por meio da condensação de pares de Cooper e em física de partículas é o principal mecanismo de geração das massas hadrônicas que governam a dinâmica de baixas energias.

Como é conhecido, uma transição de fase acontece quando existe uma singularidade na energia livre ou numa de suas derivadas. Uma transição de fase contínua de um sistema é caracterizada, a priori, pelo fato de que o comprimento de correlação diverge no ponto crítico. Perto de uma transição de fase contínua o sistema é governado por flutuações de longo alcance e o comprimento de correlação depende fortemente da temperatura e diverge no ponto crítico, já que o sistema flutua em qualquer escala. Para quase todos os sistemas isto conduz ao comportamento de escala, isto é, o desvio das quantidades termodinâmicas dos valores críticos estão bem descritos por uma lei de potências, motivando a definição dos chamados expoentes críticos. Isto conduz naturalmente à classificação de diferentes teorias de campos, em classes de universalidade que ficam determinadas pelos expoentes críticos. Neste sentido, os sistemas caem em um número relativamente pequeno de classes de universalidade. Os membros de uma classe têm comportamento crítico igual no sentido que os expoentes críticos como também outras quantidades universais, são iguais. As classes de universalidade são distingüidas p

- 1. o número de dimensões do espaço-tempo Euclideo.
- 2. o número de graus de liberdade do campo microscópico.
- 3. as simetrias do sistema.

Universalidade significa que as propriedades de longe alcance de sistemas na criticalidade não dependem dos detalhes das interações microscópicas. De acordo com a hipótese de escala, o comprimento de correlação é a única escala de comprimento relevante para sistemas perto da criticalidade. Esta hipótese conduz a várias relações entre os expoentes críticos, de tal maneira que só se tem dois expoentes independentes.

Quando se estuda a restauração da simetria quiral a temperatura finita em QCD, freqüentemente utilizamos as idéias de redução dimensional e universalidade. Do ponto de vista da redução dimensional, uma teoria de campos a temperatura suficientemente alta pode ser analisada como uma teoria estática a temperatura zero e em uma dimensão a menos [46, 47].

4.1 O modelo de Gross-Neveu com simetria quiral contínua

Neste capítulo estamos interessados no estudo de um multiplete de N *fermions* acoplado a um campo pseudo-escalar $\sigma(x)$ e outro escalar $\pi(x)$, de tal modo que a ação Euclideana pode ser escrita como

$$S_E = \int d^d \mathbf{x} \left\{ -\bar{\psi} (\not{\partial} + g_B (\sigma + i\gamma_5 \pi)) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2} m_B^2 (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda_B}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \right\}. \quad (4.1)$$

Este modelo exibe uma simetria quiral contínua

$$\begin{cases} \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha \gamma_5} \\ \psi \rightarrow e^{i\alpha \gamma_5} \psi, \end{cases} \quad (4.2)$$

e simetrias discretas $\sigma \rightarrow -\sigma$, $\pi \rightarrow \pi$ onde α é uma constante. Tomaremos a matriz γ_5 na seguinte representação $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sem perda de generalidade, vamos escolher um vácuo; desta forma escolhemos uma direção (veja figura 4.1) no espaço de componentes, $\langle \sigma \rangle = v$ e $\langle \pi \rangle = 0$, e fazemos uma

translação nos campos de forma que

$$\begin{cases} \sigma(x) \rightarrow v + \sigma(x) \\ \pi(x) \rightarrow \pi(x) \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde $v = \frac{\sqrt{m_B}}{\lambda_B}$. Neste caso a ação Euclideana adquire a forma

$$\begin{aligned} S_E = \int d^d \mathbf{x} & \left\{ -\frac{1}{2} m_B^2 v^2 + \frac{\lambda_B}{4} v^4 - \bar{\psi} (\not{\partial} + g_B (v + \sigma + i\gamma_5 \pi)) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} m_\pi^2 \pi^2 - \lambda_B v \sigma^3 - \lambda_B v \sigma \pi^2 + \frac{\lambda_B}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \right\}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

com $m_\sigma = m_B^2 - 3\lambda_B v^2$ e $m_\pi = m_B^2 - \lambda_B v^2$. Usando a definição de v podemos ver que $m_\pi = 0$, como deveria ser já que π é o boson de Goldstone.

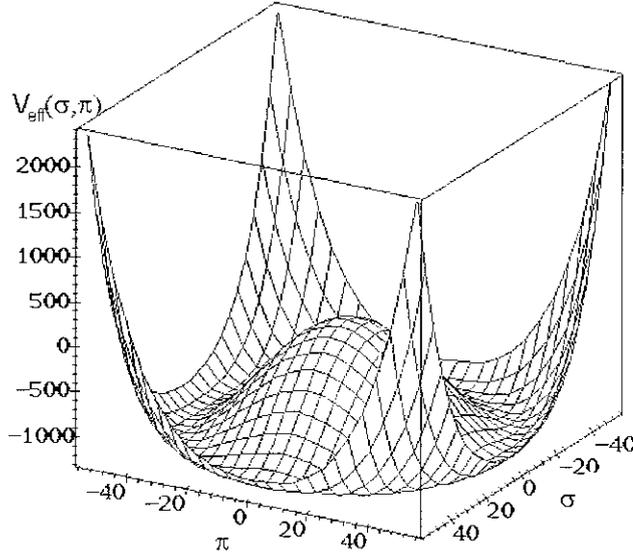


Figura 4.1: O potencial efetivo a temperatura zero na aproximação em árvore. O vácuo é infinitamente degenerado.

Supondo que o sistema esteja em equilíbrio térmico à temperatura β^{-1} , novamente utilizaremos o formalismo de tempo imaginário, observando que para os férmions devemos supor condições de contorno anti-periódicas no tempo imaginário. Isto nos dá uma

expansão de Fourier do tipo

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_n(\mathbf{x}) e^{i\omega_n \tau}, \quad (4.5)$$

com $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta} (n + \frac{1}{2})$ e como σ é um campo pseudo-escalar temos condições de contorno periódicas no tempo imaginário de forma que

$$\sigma(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n(\mathbf{x}) e^{i\omega_n \tau}, \quad (4.6)$$

e $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$.

4.2 Expoentes críticos a temperatura zero

O modelo de Gross-Neveu com simetria quiral contínua, em contraste com o modelo de Gross-Neveu discreto, é renormalizável em dimensão $D = 4$ do espaço-tempo, e pode ser descrito, além da aproximação em árvore, com as técnicas desenvolvidas para o modelo escalar φ^4 . Estas são o potencial efetivo e a expansão $1/N$ para N grande, já discutidas nos capítulos anteriores. Para estudar a estrutura do vácuo da teoria, nós consideramos o potencial efetivo V_{eff} para campos constantes $\langle \sigma \rangle = v$ e $\langle \pi \rangle = 0$ [38]. Isto nos dá a equação de *gap* (o *cut-off* Λ é implícito):

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \sigma} = 0 \implies -m_B^2 + \lambda_B v^2 = 2g_B^2 \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + g_B^2 v^2}. \quad (4.7)$$

Definiremos a constante de acoplamento crítica g_c como

$$-m_B^2 = 2g_c^2 \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2}, \quad (4.8)$$

de tal modo que a equação de *gap* toma a forma

$$\frac{1}{2} \left(m_B^2 t - \frac{\lambda_B v^2}{t+1} \right) = \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g_B^2 v^2}{q^2 (q^2 + g_B^2 v^2)}, \quad (4.9)$$

onde $t = \left(\frac{g_B^2}{g_c^2} - 1 \right)$ é a constante de acoplamento reduzida.

Esta forma da equação de *gap* é apropriada para obter-se os expoentes críticos, onde o trabalho se reduz a contar o grau de divergência do membro direito da equação acima [48]. Neste caso nós faremos o cálculo dos expoentes críticos definidos por: $\langle \bar{\psi}\psi \rangle|_{v \rightarrow 0} \sim t^\beta$, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle|_{t \rightarrow 0} \sim v^{1/\delta}$, $\langle \Sigma \rangle|_{v \rightarrow 0} \sim t^\nu$ etc, e mostramos que a introdução da interação própria para o campo bosônico não muda o valor dos expoentes críticos obtidos no modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [49].

Primeiro, vemos que os expoentes críticos para o modelo de NJL são recuperados simplesmente fazendo $\lambda_B = 0$ na equação de *gap* (4.9). Na realidade, neste caso, o comportamento infra-vermelho da integral em v é dada por

$$\int_v^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g_B^2 v^2}{q^2(q^2 + g_B^2 v^2)} \sim g_B^2 v^{d-2} - g_B^4 v^{d-4} + g_B^6 v^{d-6} - \dots, \quad (4.10)$$

e então os expoentes críticos são simplesmente $\beta = \nu = 1/(d-2)$ e $\delta = d-1$, já que a energia própria e a função de dois pontos coincidem.

Agora vamos mostrar que, mesmo com $\lambda \neq 0$ temos ainda os mesmos expoentes críticos. Para $d < 4$ isto é fácil de ver, já que a singularidade da integral em (4.9) nos permite desprezar o termo v^2 do lado esquerdo. Em quatro dimensões, podemos fazer uso do comportamento infra-vermelho da integral (4.10) para obter

$$m_B^2 t - \frac{\lambda_B v^2}{t+1} \sim 2g_B^2 v^2, \quad (4.11)$$

e calcular o expoente β a partir do comportamento de

$$v^2 \sim \frac{m_B^2 t}{\frac{\lambda_B}{t+1} + 2g_B^2} \quad (4.12)$$

em t . Isto nós dá o valor de campo médio, $\beta = \frac{1}{2}$, que é uma característica da teoria de campo conforme em dimensão igual ou acima de quatro.

Concluimos que a introdução da auto interação para os bósons compostos não muda

a estrutura da singularidade infra-vermelha. Também podemos ver que, para $d = 4$, todos os expoentes críticos são valores que coincidem com os valores obtidos por meio do formalismo do campo médio e portanto não temos pontos fixos não-gaussianos.

4.3 Universalidade e redução dimensional

Nesta parte vamos considerar o problema de calcular os expoentes críticos quando consideramos que o sistema se encontra em equilíbrio térmico. Deste modo vamos proceder da mesma forma que fizemos acima para o caso de temperatura zero. A novidade vem quando calculamos o determinante fermiônico. Neste caso usamos o esquema de renormalização de subtração mínima modificada a momentum zero e temperatura $1/\beta$, já que esta é a forma de se obter a forma funcional da teoria reduzida de uma maneira apropriada.

Devemos lembrar que a teoria reduzida a temperatura finita é uma teoria efetiva dos modos zeros dos campos [46] (veja também [50]). A idéia de redução dimensional a temperatura finita é que no formalismo do tempo imaginário o propagador livre é representado por:

$$\Delta(p) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + m^2}, \quad (4.13)$$

onde $\omega_n = 2n\pi T$ para *bosons* e $\omega_n = 2\pi(n + \frac{1}{2})T$ para *fermions*. Os termos $2n\pi T$ para $n \neq 0$ e $2\pi(n + \frac{1}{2})T$ atuam como massas e no limite de temperaturas altas os modos não-estáticos desacoplam de modo análogo ao teorema de Appelquist-Carazone [51]. Então a estratégia consiste em integrar os modos bosônicos não-estáticos como também os modos fermiônicos em alguma aproximação para poder construir uma teoria efetiva de campos dos modos zero em uma dimensão a menos.

Pode-se obter isto explicitamente a partir da função de partição somando as frequências de Matsubara $\omega_n \neq 0$ para os campos bosônicos e fermiônicos. O resultado desta teoria de campos será descrito por uma função de partição de tipo:

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma_0 \mathcal{D}\pi_0 \exp \left\{ - \int d^{d-1} \mathbf{x} (\mathcal{L}_{eff}(\sigma_0, \pi_0) + \delta\mathcal{L}) \right\}. \quad (4.14)$$

onde $\delta\mathcal{L}$ inclui todos os outros termos locais que não estão presentes na densidade Lagrangeana original mas que são consistentes com uma simetria, e na densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}_{eff}(\sigma_0, \pi_0)$, os parâmetros serão, em geral, funções do *cut-off*, da temperatura e de parâmetros *bare*.

Já que estamos interessados no cálculo da ação efetiva a temperatura finita na aproximação de ordem dominante na expansão em $1/N$ é conveniente definir

$$\begin{cases} \tilde{g} = g_B \sqrt{N} \\ \tilde{m}^2 = m_B^2 N \\ \tilde{\lambda} = \lambda_B N, \end{cases} \quad (4.15)$$

e

$$\begin{cases} \bar{m}_1 = \tilde{g}_B (\sigma_0 + i\pi_0) \\ \bar{m}_2 = \tilde{g}_B (\sigma_0 - i\pi_0), \end{cases} \quad (4.16)$$

que são os valores próprios de $\bar{M} \equiv g_B(\mathbf{I}\sigma_0 + i\gamma_S\pi_0)$, onde \mathbf{I} é a matriz unitária.

A temperatura finita a integração sobre o tempo imaginário se converte em uma soma sobre as frequências de Matsubara considerando que os campos fermiônicos $\bar{\psi}$ e ψ são anti-periódicos na direção do tempo imaginário. Depois da integração dos graus de liberdade dos *fermions* a expressão para o determinante fermiônico fica :

$$\text{trln}(\not{\partial} + \bar{M}) = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{i=1}^2 \ln(\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + \bar{m}_i^2), \quad (4.17)$$

onde, como é usual, $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2})$ para *fermions*,

$$\begin{aligned} \text{trln}(\not{\partial} + \bar{M}) &= \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}} \times \\ &\left\{ 2 \ln(\mathbf{k}^2 + \omega_n^2) + \ln\left(1 + \frac{\bar{m}_1^2}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{\bar{m}_2^2}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

É natural considerar o primeiro logaritmo na expressão acima como um fator global de renormalização. Os outros dois podem ser escritos depois da integração sobre \mathbf{k} e soma

sobre n , como uma série

$$\begin{aligned} \text{tr} \ln(\not{\partial} + \bar{M}) &= 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-)^s \tilde{g}^{2s}}{s} [(\sigma_0 + i\pi_0)^{2s} + (\sigma_0 - i\pi_0)^{2s}] \times \\ &\frac{(2\pi)^{d-1-2s} \Gamma\left(s - \frac{d-1}{2}\right) \zeta\left(2s - (d-1), \frac{1}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(s) \beta^{d-2s}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde ζ é a extensão analítica da função zeta modificada de Epstein-Hurwitz [52].

No limite de temperatura alta ($\beta \rightarrow 0$), a única contribuição da ação efetiva que vem da expressão (4.19) são para os termos $s = 1$ e $s = 2$. Estas contribuições são divergentes de tal modo que elas são os contratermos térmicos necessários para que a teoria reduzida seja finita neste limite [50]. Introduzimos os seguintes contratermos [53] (para $d = 4 - \varepsilon$)

$$\delta m^2 = \frac{1}{24} \frac{1}{\beta^2} (4\tilde{\lambda}\mathbf{I} - \tilde{g}^2\gamma_S) + \frac{\tilde{\lambda}\tilde{m}^2\mathbf{I}}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma - \ln \frac{2\beta\mu}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (4.20)$$

e

$$\delta\lambda = \left[\frac{10}{6} \frac{\lambda^2}{64\pi^2} \mathbf{I}_4 + \frac{\tilde{g}^4}{16\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right] \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{2} + \ln \frac{2\beta\mu}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (4.21)$$

onde γ é o número de Euler, e μ é o parâmetro de massa introduzido pela regularização.

Definimos por conveniência

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Já que $\beta \rightarrow 0$, nós estamos na fase desordenada ($v = 0$). Definimos então

$$\phi = \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \pi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

e

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \pi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

de tal modo que a ação renormalizada para $d = 4$ se converte em

$$S_{eff}(\sigma_0, \pi_0) = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i \phi^a)^2 + \frac{1}{2} \phi^a m_{ab}^2(\beta) \phi^b + \frac{1}{4} \phi^a \Phi_{a\alpha} \frac{\lambda_{\alpha\alpha'}(\beta)}{\beta} \Phi_{\alpha'b} \phi^b + \frac{28 \tilde{\lambda}^3 \zeta(3)}{9 \cdot 2^9 \pi^4} (\phi^a \phi^a)^3 \right\}, \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{cases} m^2(\beta) = -\tilde{m}^2 \mathbf{I} + \delta m^2 \\ \lambda(\beta) = \tilde{\lambda} \mathbf{I}_4 + \delta \lambda. \end{cases} \quad (4.26)$$

Agora estamos preparados para começar os cálculos dos expoentes críticos para a teoria reduzida. Neste sentido vamos fazer $\langle \pi \rangle = 0$ e expandir o campo σ ao redor de uma configuração constante v para obter o potencial efetivo térmico

$$V_{eff} = \frac{1}{2} m_{10}^2(\beta) v^2 + \frac{1}{4} \frac{\lambda_{10}(\beta)}{\beta} v^4 + \frac{28 \tilde{\lambda}^3(\beta) \zeta(3)}{9 \cdot 2^9 \pi^4} v^6. \quad (4.27)$$

O primeiro expoente crítico que pode ser calculado é o expoente β que nos dá o comportamento em lei de potências do parâmetro de ordem com a temperatura na vizinhança da temperatura crítica. A temperatura crítica β_c^{-1} está definida quando o valor da massa térmica se anula para $\beta \rightarrow \beta_c$. A condição $m_{10}(\beta_c) = 0$ nos dá

$$\beta_c^2 = \frac{1}{24} \frac{(4\tilde{\lambda} - \tilde{g}^2)}{\tilde{m}^2}. \quad (4.28)$$

Para poder obter a temperatura crítica, vamos considerar no momento o caso $4\tilde{\lambda} > \tilde{g}^2$.

Agora, podemos reescrever $m_{10}^2(\beta)$ como

$$m_{10}^2(\beta) = \frac{1}{24} (4\tilde{\lambda} - \tilde{g}^2) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta_c^2} \right). \quad (4.29)$$

Como $\beta \rightarrow \beta_c$, podemos ver pela definição de temperatura reduzida θ , que

$$\beta = \frac{\beta_c}{1 + \theta \beta_c}, \quad (4.30)$$

assim obtendo:

$$m_{10}^2(\beta) = \frac{1}{24} (4\tilde{\lambda} - \tilde{g}^2) \frac{2\theta}{\beta_c} + O(\theta^2) \sim a + b\theta, \quad (4.31)$$

isto é, $m_{10}^2(\beta)$ é linear em θ . ou seja, o primeiro expoente crítico tem valor $\beta = \frac{1}{2}$.

O segundo expoente crítico δ é obtido a partir da equação de *gap* não-homogênea quando consideramos uma fonte externa J para o campo σ . Neste caso, a equação de *gap* se converte em

$$m_{10}^2(\beta)v + \frac{\lambda_{10}(\beta)}{\beta} v^3 + \frac{28}{3} \frac{\tilde{\lambda}^3 \zeta(3)}{2^8 \pi^4} v^5 = J, \quad (4.32)$$

e quando estamos perto da criticalidade ($m_{10}(\beta_c) \rightarrow 0$), a equação de *gap* nos dá $\delta = 3$, já que v^3 domina o termo v^5 . Finalmente, como estamos na aproximação de ordem dominante na expansão em $1/N$, uma vez mais a função de dois pontos e a energia própria são iguais. Vemos que o expoente crítico ν é também igual a β , e ambos assumem o valor $\frac{1}{2}$.

Depois disto vamos determinar a quê classe de universalidade pertence nossa teoria reduzida . Segundo o resultado acima temos que todos os expoentes críticos são iguais aos do campo médio.

Os expoentes críticos que calculamos estão relacionados a uma teoria de campos efetiva obtida pela integração de todos os modos fermiônicos e modos não-estáticos dos bósons. Já que os expoentes críticos são calculados a partir do comportamento infra-vermelho das quantidades termodinâmicas perto do ponto de transição e a integração que fizemos dão resultados finitos infra-vermelhos, é razoável esperar que estes graus de liberdade não modificam os valores obtidos acima para os expoentes críticos. Para se reobter os valores não triviais dos expoentes críticos, devemos considerar os efeitos dos modos zero de σ_0 e π_0 no cálculo das quantidades termodinâmicas, já que estes são os únicos responsáveis pelas divergências infra-vermelhas na versão a temperatura finita deste modelo.

Seguindo os mesmos passos de Kogut em [54], vamos considerar o comportamento crítico da susceptibilidade χ para o modelo σ com a ação dada pela eq. (4.25). Definindo

a curvatura crítica μ_c^2 como o ponto onde a susceptibilidade diverge,

$$\mu_c^2 = \frac{\lambda_{10}(\beta)}{\beta} \int^\Lambda \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q^2}, \quad (4.33)$$

a expressão para a susceptibilidade inversa pode ser escrita como

$$\chi^{-1} \left(1 + \frac{\lambda_{10}(\beta)}{\beta} \int^\Lambda \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q^2(q^2 + \chi^{-1})} \right) = \mu^2 - \mu_c^2. \quad (4.34)$$

Novamente a extração do expoente crítico γ se reduz ao cálculo da potência das singularidades infra-vermelhas do lado esquerdo da equação anterior. Em três dimensões ($d - 1 = 3$), o segundo termo em (4.34) domina a região de escala, dando o expoente $\gamma = 2/(d - 3)$, que coincide com o da temperatura zero. Os outros expoentes críticos podem ser calculados da mesma forma. Concluimos que esta teoria pertence à classe de universalidade do modelo de Heisenberg.

Capítulo 5

O Potencial Efetivo para Operadores Compostos a Temperatura Finita

A teoria de perturbações convencional na expansão da constante de acoplamento ou em *loops*, pode ser usada só para o estudo de pequenas correções quânticas com relação aos resultados clássicos. Quando discutimos efeitos quânticos verdadeiros numa dada ordem da expansão, não se pode desprezar ordens mais altas como se faz usualmente. Como discutimos na seção 2.3, para teorias com grupo de simetria interna de N dimensões para N grande, existe outro esquema de perturbação, a expansão em $1/N$. Cada termo da expansão em $1/N$ contém um subconjunto infinito de termos da expansão em *loops*.

A expansão em $1/N$ tem uma propriedade interessante, que a correção quântica de ordem dominante é da mesma ordem que as quantidades clássicas. Conseqüentemente a correção de ordem dominante que caracteriza adequadamente a teoria no limite de N grande preserva quase toda estrutura não linear da teoria. Neste capítulo da tese vamos deduzir a ação efetiva para operadores compostos na aproximação de ordem dominante na expansão em $1/N$ para D -dimensões e conseqüentemente também o potencial efetivo.

5.1 Potencial efetivo a $T = 0$

Vamos obter o potencial efetivo para a teoria do campo escalar mais geral possível que preserva a renormalização perturbativa. Esta teoria tem a forma $\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6$, e ainda possui uma simetria interna $O(N)$. Como discutimos, em três dimensões espaço-temporais, a teoria é renormalizável para $D \leq 3$. Se supomos $\eta = 0$ em quatro dimensões espaço-temporais, a teoria é perturbativamente renormalizável (super-renormalizável para $D \leq 3$). Em seguida derivaremos o potencial efetivo em D -dimensões espaço-temporais, fazendo uso do método dos operadores compostos [30, 31, 14].

Usando este método, Townsend [56] obteve o potencial efetivo desta teoria em $D \leq 3$, na ordem dominante da expansão em $1/N$ e mostrou que esta teoria é consistente. A densidade Lagrangeana do modelo que vamos estudar é dada por:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 - \frac{\lambda_0}{4!N!}\varphi^4 - \frac{\eta_0}{6!N^2}\varphi^6, \quad (5.1)$$

onde esta teoria possui uma simetria $O(N)$ e o campo quântico tem N componentes, no espaço N -dimensional da simetria interna. Trabalharemos a princípio à temperatura zero: a generalização para temperatura finita pode ser feita sem dificuldade [4].

Estamos interessados na ação efetiva $\Gamma(\phi)$ que governa o comportamento do valor esperado $\phi_a(x)$ do campo quântico $\varphi(x)_a$, quer dizer, ϕ é dado pela seguinte equação

$$\phi(x) \equiv \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \langle 0|\varphi|0 \rangle, \quad (5.2)$$

onde $W(J)$ é o gerador funcional para as funções de Green conexas.

Como vimos na seção 2.2, o uso do formalismo dos operadores compostos se reduz ao problema de somar os diagramas irreduzíveis a duas partículas (2PI), definindo a ação efetiva generalizada $\Gamma(\phi, G)$ que é funcional não só de $\phi_a(x)$, mas também do valor esperado $G_{ab}(x, y)$ do produto ordenado temporalmente dos campos $\mathcal{T}\{\varphi(x)\varphi(y)\}$. Assim

a série que queremos calcular é dada pela seguinte expressão:

$$\Gamma(\phi, G) = I(\phi) + \frac{i}{2} Tr \ln G^{-1} + \frac{i}{2} Tr D^{-1}(\phi)G + \Gamma_2(\phi, G) + \dots, \quad (5.3)$$

onde $I(\phi) = \int d^D x \mathcal{L}(\phi)$, e G é uma notação abreviada para a matriz cujos elementos são $G_{ab}(x, y)$ e D é definido pela seguinte expressão,

$$iD^{-1} = \frac{\delta^2 I(\phi)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}, \quad (5.4)$$

onde D^{-1} é novamente uma notação abreviada para a matriz com elementos $D_{ab}^{-1}(\phi; x, y)$. Lembremos que os traços e logaritmos na eq. (5.3) são no sentido funcional. Seguindo as regras obtidas na seção 2.2, $\Gamma_2(\phi, G)$ é calculado como segue. Na ação clássica $I(\varphi)$, mudamos o campo φ por ϕ . A nova ação $I(\varphi + \phi)$ tem termos cúbicos e de ordem mais alta em φ . Isto define a parte da interação $I_{int}(\varphi, \phi)$ onde os vértices dependem de ϕ . $\Gamma_2(\phi, G)$ é dado pela soma de todas os (2PI) diagramas na teoria com vértices determinado por $I_{int}(\varphi, \phi)$ e o propagador neste caso é igual a $G(x, y)$. A Lagrangeana de interação $\mathcal{L}_{int}(\varphi, \phi)$ é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(\varphi, \phi) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0 \phi_a}{3N} + \frac{\eta_0 \phi^2 \phi_a}{30N^2} \right) \varphi_a \varphi^2 - \left(\frac{8\eta_0 \phi_a \phi_b \phi_c}{6N^2} \right) \varphi_a \varphi_b \varphi_c - \\ & \frac{1}{4!N} \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) \varphi^4 - \left(\frac{12\eta_0 \phi_a \phi_b}{6!N^2} \right) \varphi_a \varphi_b \varphi^2 - \frac{1}{5!} \left(\frac{\eta_0 \phi_a}{N^2} \varphi_a \varphi^4 \right) - \frac{\eta_0}{6!N^2} \varphi^6. \end{aligned} \quad (5.5)$$

A ação efetiva, como é usualmente definida, pode ser calculada encontrando-se $G_{ab}(x, y)$ utilizando a equação :

$$\frac{\delta\Gamma(\phi, G)}{\delta G_{ab}(x, y)} = 0 \quad (5.6)$$

e substituindo na ação efetiva generalizada $\Gamma(\phi, G)$.

Os vértices na equação acima contêm factores $1/N$ ou $1/N^2$, mas o *loop* em φ nos dá um fator extra N . Levando em conta esta observação, podemos ver que o terceiro e último termo do membro direito na eq. (5.5), são de ordem dominante. Estes diagramas

são usualmente chamados de *loops bubbles* [57]. Então, na ordem dominante da expansão em $1/N$ os diagramas do vácuo são *bubble trees* com dois ou três em cada vértice. Os diagramas (2PI) que contribuem à ação efetiva são mostrados na figura(5.1). A partir destas

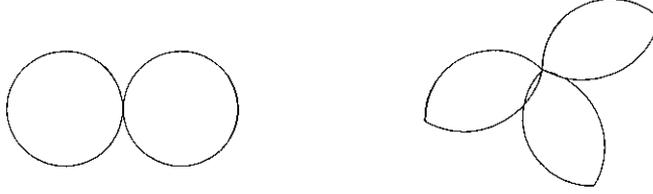


Figura 5.1: Diagramas do vácuo 2PI

considerações, fazendo uso das regras de Feynman e levando em conta que o propagador neste caso é $G(x, y)$, podemos obter a seguinte expressão para $\Gamma_2(\phi, G)$

$$\Gamma_2(\phi, G) = \frac{-1}{4!N} \int d^D x \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) [G_{aa}(x, x)]^2 - \frac{\eta_0}{6!N^2} \int d^D x [G_{aa}(x, x)]^3. \quad (5.7)$$

Então a eq. (5.6) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma(\phi, G)}{\delta G_{ab}(x, y)} &= \frac{1}{2} (G^{-1})_{ab}(x, y) + \frac{i}{2} D^{-1}(\phi) - \frac{1}{12N} \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) [\delta_{ab} G_{cc}(x, x)] \delta^D(x - y) \\ &\quad - \frac{3\eta_0}{6!N} \delta_{ab} [G_{cc}(x, x)]^2 \delta^D(x - y) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Reescrevendo esta expressão nós obtemos a equação de *gap* :

$$\begin{aligned} (G^{-1})_{ab}(x, y) &= D_{ab}^{-1}(\phi) + \frac{i}{6N} \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) [\delta_{ab} G_{cc}(x, x)] \delta^D(x - y) + \\ &\quad \frac{i\eta_0}{6!N^2} \delta_{ab} [G_{cc}(x, x)]^2 \delta^D(x - y). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Neste ponto vamos multiplicar pela esquerda ambos os termos da equação (5.9) e tomando o traço obtemos

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} Tr D^{-1} G &= \frac{1}{12N} \int d^D x \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) [G_{aa}(x, x)]^2 + \\ &\quad \frac{2\eta_0}{6!N^2} \int d^D x [G_{aa}(x, x)]^3 + ctc. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Devemos lembrar que o traço Tr está aplicado tanto aos índices quanto às coordenadas espaço-temporais. Fazendo-se uso das equações (5.9) e (5.10) na equação (5.7), obtemos a ação efetiva para operadores:

$$\Gamma(\phi) = I(\phi) + \frac{i}{2} Tr \ln G^{-1} + \frac{1}{4!N} \int d^D x \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) [G_{aa}(x, x)]^2 + \frac{2\eta_0}{6!N^2} \int d^D x [G_{aa}(x, x)]^3. \quad (5.11)$$

onde G_{ab} é dado implicitamente pela equação (5.9). Os últimos dois termos no membro direito da equação (5.11) são as contribuições de ordem dominante a dois *loops* para a ação efetiva. Para poder simplificar esta expressão na aproximação de ordem dominante, vamos separar G_{ab} em componentes longitudinais e transversais, da seguinte forma:

$$G_{ab} = \left(\delta_{ab} - \frac{\phi_a \phi_b}{\phi^2} \right) g + \frac{\phi_a \phi_b}{\phi^2} \tilde{g}. \quad (5.12)$$

e a inversa de G_{ab} pode ser escrita como

$$(G)_{ab}^{-1} = \left(\delta_{ab} - \frac{\phi_a \phi_b}{\phi^2} \right) g^{-1} + \frac{\phi_a \phi_b}{\phi^2} \tilde{g}^{-1}. \quad (5.13)$$

Como nós estamos interessados em calcular na ordem dominante, vamos tomar o traço em relação aos índices internos,

$$G_{aa} = Ng + O(1), \quad (G)_{aa}^{-1} = Ng^{-1} + O(1). \quad (5.14)$$

Nesta equação, podemos ver o fator N explicitamente, e podemos notar que para N grande, G_{ab} é diagonal em a, b . Assim vemos que G_{ab} é diagonal na expansão em $1/N$ para N grande na aproximação de ordem dominante. Neste caso supomos que G_{ab} e g são de ordem 1 (como é usual $\phi^2 \sim N$, com isto queremos dizer que o Lagrangeano é de

ordem N), e assim, da equação (5.9), podemos escrever,

$$(G)_{ab}^{-1} = D^{-1}(\phi) + \text{corre. quts.} \quad (5.15)$$

Mas $D^{-1}(\phi)$ é de ordem 1. com isto a nossa suposição foi correta e consistente com os resultados em (5.14). Agora substituindo a equação (5.14) na equação (5.11) e (5.9), e selecionando só os termos de ordem dominante, nós obtemos o potencial efetivo resumido que contém os diagramas *daisy* e *superdaisy*:

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi) = & I(\phi) + \frac{iN}{2} \text{tr} \ln g^{-1} + \frac{N}{4} \int d^D x \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) g^2(x, x) + \\ & \frac{2N\eta_0}{6!} \int d^D x g^3(x, x) + O(1), \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde o traço se aplica somente às coordenadas do espaço-tempo. Note que o traço e o logaritmo nos índices proporcionam o fator N . Então a equação de *gap* pode ser escrita como:

$$g^{-1}(x, y) = i \left[\square + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + g(x, x) \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + g(x, x) \right)^2 \right] \delta^D(x-y) + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (5.17)$$

Para se obter o potencial efetivo vamos considerar ϕ constante. Com isto a ação efetiva tem a seguinte forma

$$\Gamma(\phi) = -V(\phi) \int d^D x, \quad (5.18)$$

e isto define o potencial efetivo. Já que temos invariância translacional, $g(x, y)$ é função só da diferença relativa de coordenadas ($x - y$): assim, podemos escrever

$$g(x, y) = g(x - y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{g}(p) e^{ip(x-y)}. \quad (5.19)$$

Vamos definir a função $F(\phi)$ pela seguinte relação

$$F(\phi) = g(0) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{g}(p), \quad (5.20)$$

e da equação de *gap* (5.17), obtemos.

$$\frac{1}{g(p)} = i \left[-p^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2 \right], \quad (5.21)$$

onde $F(\phi)$ é dado por:

$$F(\phi) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{-i}{-p^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2 + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2}. \quad (5.22)$$

Deste modo o potencial efetivo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} V_{eff}(\phi) = & V_0(\phi) + \frac{iN\hbar}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln \left[-p^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2 \right] - \\ & \frac{N\hbar^2}{4!} \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) F(\phi)^2 - \frac{2N\hbar^3 \eta_0 F(\phi)^3}{6!}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.2 Potencial efetivo a temperatura finita

Estamos interessados em calcular o potencial efetivo a temperatura finita para $D = 4$ para o caso em que $\eta = 0$, e para $D \leq 3$ para $\eta \neq 0$. Com este propósito é conveniente levar as expressões ao espaço Euclidiano ($p_0 = ip_D$) e tomar o seguinte *ansatz* para $g(x, y)$.

$$g(x, y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\exp^{i(x-y)p}}{p^2 + M^2(\phi)}. \quad (5.24)$$

Substituindo esta expressão na equação (5.17) nós obtemos finalmente a expressão para a equação de *gap* :

$$M^2(\phi) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2, \quad (5.25)$$

onde agora $F(\phi)$ no espaço-tempo Euclidiano é dado por

$$F(\phi) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + M^2(\phi)}, \quad (5.26)$$

e finalmente o potencial efetivo no espaço Euclidiano pode ser escrito da seguinte forma,

$$V_{eff}(\phi) = V_0(\phi) + \frac{N}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln [p^2 + M^2(\phi)] - \frac{N}{4!} (\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N}) F(\phi)^2 - \frac{2N\eta F(\phi)^3}{6!}, \quad (5.27)$$

onde $V_0(\phi)$ é o potencial clássico. A expressão $V_{eff}(\phi)$ em (5.27) contém integrais divergentes. Para regularizar as expressões divergentes, faremos uso do método da regularização dimensional.

A generalização do potencial efetivo para o caso de temperatura finita pode ser feita sem dificuldade aplicando o método do tempo imaginário, com a substituição que utilizamos várias vezes nesta tese:

$$k_0 \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \rightarrow \sum_n \frac{1}{\beta} \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}}. \quad (5.28)$$

O potencial efetivo a temperatura finita pode ser escrito como:

$$V_{eff\beta}(\phi) = V_0(\phi) + \frac{N}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1} p}{(2\pi)^{D-1}} \ln [\omega_n^2 + p^2 + M_\beta^2(\phi)] - \frac{N}{4!} (\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N}) F_\beta(\phi)^2 - \frac{2N\eta F_\beta(\phi)^3}{6!}, \quad (5.29)$$

onde $F_\beta(\phi)$ é a generalização de $F(\phi)$ a temperatura finita, isto é,

$$F_\beta(\phi) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega_n^2 + p^2 + M_\beta^2(\phi)}. \quad (5.30)$$

Desta forma a equação de *gap* a temperatura finita para a teoria $\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6$ é dada por (ver equação (5.25)),

$$M_\beta^2(\phi) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F_\beta(\phi) \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F_\beta(\phi) \right)^2. \quad (5.31)$$

Para regularizar $F_\beta(\phi)$ nós usamos o esquema de regularização que é um misto de regularização dimensional e regularização analítica já usado na seção 1.4 (ver equação (1.65)). Assim $F_\beta(\phi)$ pode ser escrito como:

$$F_\beta(\phi) = \frac{m^{D-2s}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma(s)} \left\{ \Gamma\left(s - \frac{D}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{M_\beta(\phi)n\beta}\right)^{\frac{D}{2}-s} K_{\frac{D}{2}-s}(M_\beta(\phi)n\beta) \right\} \Big|_{s=1-\epsilon}. \quad (5.32)$$

Note que para $D = 4$ temos um pólo e para $D = 3$ a expressão é finita. Para regularizar o segundo termo da equação (5.29), fazemos uso do seguinte artifício: definimos

$$LF(M_\beta) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \ln [\omega_n + p^2 + M_\beta^2(\phi)] \quad (5.33)$$

e então derivamos com respeito a M_β , obtendo

$$\frac{\partial LF_\beta(\phi)}{\partial M_\beta} = (2M_\beta) \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega_n + p^2 + M_\beta^2(\phi)}. \quad (5.34)$$

Portanto, segundo a equação (5.30), vemos que:

$$\frac{\partial LF_\beta(\phi)}{\partial M_\beta} = (2M_\beta)F_\beta(\phi). \quad (5.35)$$

Nosso objetivo é regularizar $F_\beta(\phi)$ e com isto $LF_\beta(\phi)$ é portanto o potencial efetivo. Para o caso de dimensão $D = 3$, a extensão analítica da função $F_\beta(\phi)$ é finita e pode ser escrita em forma fechada [15] (note que em $D = 3$ não temos pólos ao menos na aproximação de ordem dominante). Em particular,

$$F_3(\phi)_R = -\frac{M_\beta(\phi)}{4\pi} \left(1 + \frac{2 \ln(1 - e^{-M_\beta(\phi)\beta})}{M_\beta(\phi)\beta} \right). \quad (5.36)$$

Desta relação obtemos $LF(M_\beta)$ integrando a relação (5.35): assim o resultado da integração nos dá:

$$LF_\beta(\phi)_R = -1/6 \frac{M_\beta(\phi)^3}{\pi} - \frac{M_\beta(\phi) Li_2(e^{-M_\beta(\phi)\beta})}{\pi \beta^2} - \frac{Li_3(e^{-M_\beta(\phi)\beta})}{\pi \beta^3}. \quad (5.37)$$

onde $Li_n(z)$ é o polilogaritmo de z [43]. Após todas estas passagens, o potencial efetivo a temperatura finita na aproximação de ordem dominante na expansão em $1/N$ para N grande é dada pela seguinte relação:

$$V_{eff\beta}(\phi) = V_0(\phi) + \frac{N}{2}LF_\beta(\phi)_R - \frac{N}{4!}(\lambda_0 + \frac{\eta_0\phi^2}{10N})(F_\beta(\phi)_R)^2 - \frac{2N\eta(F_\beta(\phi)_R)^3}{6!}. \quad (5.38)$$

Vamos indicar como calcular o potencial efetivo a partir dos resultados obtidos: para valores dados dos parâmetros da teoria podemos calcular para um valor do campo ϕ e uma temperatura T a partir da equação de *gap* (ver equação (5.31)); em particular para $D = 3$ temos a seguinte equação de *gap* :

$$M_\beta^2(\phi) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} - \frac{M_\beta(\phi)}{4\pi} \left[1 + \frac{2 \ln(1 - e^{-M_\beta(\phi)\beta})}{M_\beta(\phi)\beta} \right] \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} - \frac{M_\beta(\phi)}{4\pi} \left[1 + \frac{2 \ln(1 - e^{-M_\beta(\phi)\beta})}{M_\beta(\phi)\beta} \right] \right)^2. \quad (5.39)$$

Assim, conhecendo-se o valor de $M_\beta(\phi)$, o potencial efetivo fica determinado e pode-se obter o comportamento em função da temperatura $T = \frac{1}{\beta}$ e o valor esperado do campo ϕ .

Podemos ver claramente na figura (5.2) que temos uma transição de primeira ordem, desde que os parâmetros da teoria para o potencial efetivo à temperatura zero tenha a forma mostrada na curva descrita por T_0 .

Para o caso $D = 4$ e $\eta = 0$, onde a teoria é estritamente renormalizável, pode-se proceder do mesmo modo. Assim o potencial efetivo nesta aproximação pode ser escrito como

$$V_{eff\beta}(\phi) = V_0(\phi) + \frac{N}{2\beta}(LF_\beta(\phi)_R)_{D=4} - \frac{\lambda_0 N}{4!}(F_\beta(\phi)_R)_{D=4}^2, \quad (5.40)$$

onde V_0 é o potencial clássico

$$V_0(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4N!}\phi^4. \quad (5.41)$$

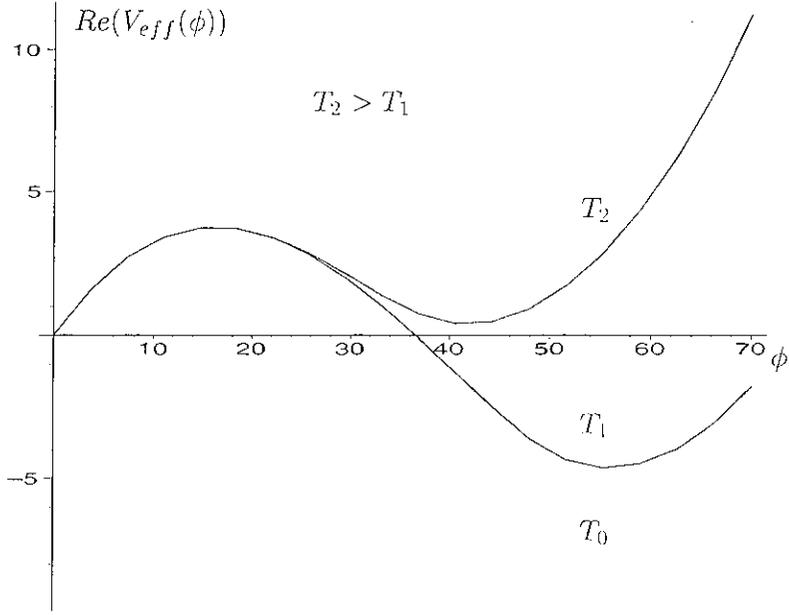


Figura 5.2: Comportamento do potencial efetivo obtido a partir das equações (5.38) e (5.39) em dimensão $D = 3$ para temperaturas $T_2 > T_1$.

e $(F_3(\phi)_R)_{D=4}$ é dado pela relação

$$(F_3(\phi)_R)_{D=4} = \frac{\lambda M_\beta^2(\phi)}{2\pi^2} \int_1^\infty \frac{(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{e^{M_\beta(\phi)\beta p} - 1} dp \quad (5.42)$$

Na aproximação de altas temperaturas temos que (veremos mais adiante que esta expansão é consistente) ,

$$(F_3(\phi)_R)_{D=4} = \frac{1}{12\beta^2} - \frac{M_\beta(\phi)}{4\pi\beta} - \frac{M_\beta^2(\phi)}{8\pi^2} \ln(M_\beta(\phi)\beta); \quad (5.43)$$

portanto:

$$(LF_3(\phi)_R)_{D=4} = 1/12 \frac{M_\beta(\phi)^2}{\beta^2} - 1/6 \frac{M_\beta(\phi)^3}{\pi\beta} - 1/16 \frac{M_\beta(\phi)^4 \ln(M_\beta(\phi)\beta)}{\pi^2} + \frac{1}{64} \frac{M_\beta(\phi)^4}{\pi^2}, \quad (5.44)$$

e finalmente a equação de *gap* toma a seguinte forma:

$$M_\beta^2(\phi) = \tilde{m}^2(\phi) + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{1}{12\beta^2} - \frac{M_\beta(\phi)}{4\pi\beta} - \frac{M_\beta^2(\phi)}{8\pi^2} \ln(M_\beta(\phi)\beta) \right), \quad (5.45)$$

onde $\tilde{m}^2(\phi) = m^2 + \frac{\lambda}{6} \frac{\phi^2}{N}$, e m^2 , λ são, respectivamente, a massa e constante de acoplamento renormalizadas a temperatura zero. Com estas equações determinamos o potencial efetivo. Note que, da solução da equação de *gap* em (5.45), encontramos que, para a constante de acoplamento $\lambda \ll 1$, a condição $M_\beta^2(\phi)/T^2 \ll 1$ é consistente com $\tilde{m}^2(\phi)/T^2$, que é exatamente a condição necessária para a expansão perturbativa para altas temperaturas [4].

Nos capítulos 6 e 7 analisaremos o comportamento da massa térmica e constante de acoplamento térmica como função da temperatura fazendo uso dos resultados já encontrados.

Capítulo 6

A Equação de *Gap* para a Massa e Constante de Acoplamento no Modelo $\lambda\varphi_D^4$

Do ponto de vista puramente teórico, existem muitas perguntas que se originam considerando a teoria a temperaturas e/ou densidades altas. Progressos consideráveis têm ocorrido durante as últimas três décadas com relação ao entendimento da teoria de campos a temperatura finita. Um dos problemas não resolvidos até agora é a existência possível da transição de fase de desconfinamento na cromodinâmica quântica (QCD). Neste sentido espera-se que a temperaturas suficientemente altas os *quarks* e *gluons* podem ser encontrados em estados não ligados (plasma de *quarks-gluons*). Relacionado a este fenômeno surge a pergunta ligada à natureza da transição da fase de baixas temperaturas de estados ligados para a fase plasmática de altas temperaturas [59]. Mas a determinação da ordem da transição (se é que existe transição) ainda é um problema em aberto. A existência de uma transição de fase no modelo de Yang-Mills puro é um ponto de consenso, mas, se os *quarks* são incluídos, a resposta parece ser muito difícil. Agora, se a teoria inclui *quarks* e *gluons*, pode acontecer outra transição de fase que é a transição de quebra da simetria quiral, e neste caso a ordem da transição depende do número de sabores de

quarks. A simetria quiral é quebrada espontaneamente a temperatura zero e espera-se que esta simetria seja restabelecida a temperatura finita. Para dois sabores não massivos, a transição de fase é de segunda ordem e para 3 sabores, é de primeira ordem. Para mais de três sabores não se tem uma conclusão clara sobre o tipo de transição, nem se acontece a transição de fase da quebra da simetria quiral. Outro ponto importante que deve ser notado é que o parâmetro de ordem na transição de fase da quebra da simetria quiral para a cromodinâmica quântica é composto nos campos, o que implica que os métodos perturbativos não valem mais. Neste sentido métodos não perturbativos devem ser utilizados.

Em qualquer dos casos acima, a cromodinâmica quântica real é muito difícil de ser tratada e não existem resultados teóricos definitivos para muitas questões até agora. Assim, modelos simples são laboratórios muito úteis para tentar esclarecer o que acontece no mundo real, particularmente quando efeitos não perturbativos de longo alcance estão envolvidos, como é o caso das transições mencionadas acima.

Neste capítulo faremos uso do formalismo dos operadores compostos e re-examinaremos o comportamento do modelo $\lambda\varphi^4$ com simetria $O(N)$ em D -dimensões num espaço Euclidiano a temperatura finita. No caso $D = 3$ e $D = 4$ é feita uma análise do comportamento da massa térmica renormalizada e constante de acoplamento térmica renormalizada para todas as temperaturas. Os resultados são que a massa térmica renormalizada é positiva e cresce com a temperatura monotonicamente. O comportamento da constante de acoplamento térmica renormalizada é claramente diferente em dimensões pares e ímpares. Em $D = 3$, a constante de acoplamento térmica renormalizada decresce com a temperatura até um valor mínimo diferente de zero e então cresce com a temperatura monotonicamente. No caso $D = 4$, temos que a constante de acoplamento térmica renormalizada tende, no limite de temperaturas altas, a um valor assintótico. Também neste espaço Euclidiano D -dimensional podemos exibir uma fórmula para a temperatura crítica para a transição de segunda ordem. Esta fórmula está em concordância com trabalhos anteriores para $D = 3$ e $D = 4$.

Recentemente [7] foram obtidas expressões para a massa renormalizada e a constante de acoplamento térmica no modelo $\lambda\varphi^4$ em D-dimensões do espaço-tempo plano na aproximação de um *loop*. Em outro trabalho [15], dentro de um contexto ligeiramente diferente, estudamos o modelo $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$ a temperatura finita na aproximação de dois *loops*, mostrando a existência do fenômeno tricrítico. O fenômeno tricrítico acontece quando a massa renormalizada e a constante de acoplamento térmica se anulam para alguma temperatura intermediária. O propósito deste capítulo é fazer uma extensão do trabalho mencionado acima [7] para todas as ordens da teoria de perturbações.

Isto pode ser feito considerando-se o modelo com simetria $O(N)$ dentro do espírito da expansão $1/N$ na aproximação de ordem dominante para N grande. Usaremos o formalismo dos operadores compostos (CJT) [30], que nos dará naturalmente a equação de Dyson-Schwinger, adaptada a temperatura finita. É bem conhecido que estes métodos de *resummation* podem resolver o problema da não-validade da expansão perturbativa em alguns modelos não-massivos da teoria de campos a temperatura finita [61]. Por exemplo, no modelo escalar de N -componentes $\lambda\varphi^4$ é possível somar para N grande uma certa classe de diagramas de Feynman, chamados *ring*. Isto permite resolver o problema infravermelho na aproximação de ordem dominante $1/N$ para N grande [4, 61].

Um método alternativo que leva em conta as contribuições dominantes e sub-dominantes dos diagramas multi-*loops* é o método dos operadores compostos, desenvolvido no capítulo anterior.

Como foi mencionado, neste formalismo naturalmente somamos uma grande classe de diagramas de Feynman, e a equação de *gap* é obtida facilmente fazendo uso do formalismo funcional. Este formalismo foi estendido para o caso de temperatura finita por Pettini e mais recentemente por Amelino-Camelia and Pi [58].

Algumas referências importantes são [62, 63, 64]. Neste último artigo Eylal et al. [64] discutem a estrutura de fase do modelo $O(N)$ em dimensão D genérica do espaço Euclidiano e também discutem o sinal do segundo coeficiente da função beta do grupo de renormalização para N grande.

Desta forma vamos aplicar um método de *resummation* mencionado acima para o cálculo da massa e constante de acoplamento renormalizada para o modelo vetorial massivo $\lambda\varphi^4$, definido no espaço Euclidiano em dimensão D genérica.

6.1 A equação de *gap* do modelo $\lambda\varphi^4_D$

Vamos supor que nosso sistema está em equilíbrio térmico. Na aproximação de um *loop* a massa térmica e a constante de acoplamento para o modelo $\lambda\varphi^4$ em D -dimensões do espaço Euclidiano foram obtidas no trabalho anteriormente citado [7] (ver também seção 1.4) e são dados por:

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_0}{\beta n}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m_0 n \beta) \quad (6.1)$$

e

$$\lambda(\beta) = \lambda_0 - \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_0}{\beta n}\right)^{\frac{D}{2}-2} K_{\frac{D}{2}-2}(m_0 n \beta). \quad (6.2)$$

onde $K_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada e m_0^2 e λ_0 são a massa e a constante de acoplamento a temperatura zero respectivamente [65]. Note-se já que estamos fazendo uso da regularização dimensional e que o fator μ^{4-D} é implícito na definição da constante de acoplamento λ_0 .

É possível melhorar o resultado em (6.1) e (6.2) estudando a equação de *gap* para a massa dependente da temperatura. Uma maneira de fazer isto é tomando o modelo $O(N)$, como foi feito por Dolan e Jackiw [4].

Neste caso os diagramas de Feynman são classificados de acordo com sua topologia e a cada uma destas classes é associada uma potência de $1/N$. No limite N grande só algumas classes de diagramas, os quais estão associados a potências menores de $1/N$, dão a contribuição de ordem dominante. Estas contribuições, nas quais estão incluídos todos os diagramas *daisy* e *super-daisy* (ver figura 6.1), resultam exatas no limite N grande. Esta aproximação foi desenvolvida depois por Weldon e também Eboli et al e mais recentemente por Drummond et al [66]. Por simplicidade, analisaremos a correção térmica

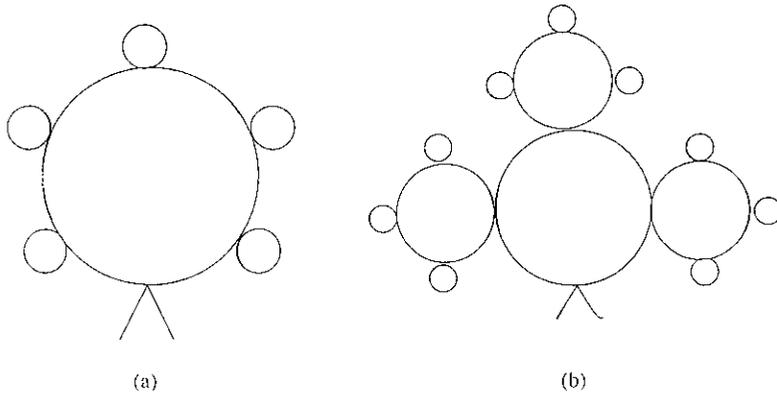


Figura 6.1: Exemplos de diagramas que contribuem para a correção da massa: (a) *daisy* (b) *superdaisy*.

na fase desordenada, que corresponde à ausência de quebra espontânea de simetria. Neste caso adotamos a notação $m^2(\beta)$ para o quadrado da massa térmica efetiva,

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \frac{\lambda}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{p^2 + \omega_n + m_\beta^2} \quad (6.3)$$

de onde, fazendo uso da relação eq. (1.65), resulta que:

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m(\beta)}{\beta n} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m(\beta)n\beta). \quad (6.4)$$

Para resolver a equação acima e conseqüentemente ir além da teoria de perturbações, usamos a representação integral das funções de Bessel [43] dada por

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}z \right)^\nu \int_1^\infty e^{-zt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad (6.5)$$

válida para $Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ e $|arg(z)| < \frac{\pi}{2}$. Esta representação integral é a mais apropriada para nosso propósito se nos restringirmos a $D > 1$. Substituindo a equação (6.5) na equação (6.4) e definindo

$$F(D) = \frac{1}{2^{D-1}} \frac{1}{\pi^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}, \quad (6.6)$$

a equação de *gap* toma a forma

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \lambda_0 F(D) (m(\beta))^{D-2} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\frac{D-3}{2}} \frac{1}{e^{m(\beta)\beta t} - 1}. \quad (6.7)$$

Definindo uma nova variável $\tau = m(\beta)\beta t$, é fácil mostrar que

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \lambda_0 F(D) (m(\beta))^{D-2} \int_{m(\beta)\beta}^\infty d\tau \left(\left(\frac{\tau}{m(\beta)\beta} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{D-3}{2}} \frac{1}{e^\tau - 1}. \quad (6.8)$$

Quando D é ímpar, a potência $\frac{D-3}{2} = p$ é um inteiro e o uso do teorema do binômio de Newton nos proporciona uma maneira direta de obter $m^2(\beta)$. Quando D é par (o caso mais interessante), a expansão de $\left(\left(\frac{\tau}{m(\beta)\beta} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{D-3}{2}}$ conduz a uma série infinita de potências, e a expressão para a massa quadrática térmica tem a forma

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \lambda_0 \beta^{2-D} \sum_{k=0}^\infty f(D, k) (m(\beta)\beta)^{2k} \int_{m(\beta)\beta}^\infty d\tau \frac{\tau^{D-3-2k}}{e^\tau - 1}, \quad (6.9)$$

onde

$$f(D, k) = F(D) (-1)^k C_{\frac{D-3}{2}}^k \quad (6.10)$$

e

$$C_p^k = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p-k+1)}, \quad (6.11)$$

são os coeficientes binomiais. Notemos que para valores pequenos de k a integral que aparece na equação eq. (6.9) é a integral de Debye do tipo

$$I_1(x, n) = \int_x^\infty d\tau \frac{1}{e^\tau - 1} \tau^n = \sum_{q=1}^\infty e^{-qx} \left(\frac{x^n}{q} + \frac{nx^n}{q^2} + \dots \frac{n!}{q^{n+1}} \right), \quad (6.12)$$

que é válida para $x > 0$ e $n \geq 1$ [43]. Para k satisfazendo $k > \frac{D-4}{2}$, que corresponde a $n < 1$ na equação anterior, é necessária a generalização da integral de Debye (o caso para $n = 0$ é trivial). Investiguemos o caso $n < 0$. Esta generalização foi feita por Svaiter e

Svaiter [67] e o resultado se escreve como:

$$I_2(x, n) = \int_x^\infty d\tau \frac{1}{e^\tau - 1} \frac{1}{\tau^n} = - \sum_{q=0, q \neq n}^\infty \frac{B_q}{q!} \frac{x^{q-n}}{q-n} - \frac{1}{(n!)} B_n \ln x + \gamma_{\frac{n-1}{2}}, \quad (6.13)$$

(para n ímpar), $Re(x) > 0$, $2\pi > |x| > 0$ e $\gamma_{\frac{n-1}{2}}$ sendo uma constante. As quantidades B_n são os números de Bernoulli. Notemos que esta generalização pode ser feita para o regime de altas temperaturas, i.e. $m(\beta)\beta < 2\pi$. Vamos definir

$$I(x, D - 3 - 2k) = \begin{cases} I_1(x, D - 3 - 2k), & \text{for } x > 0, \quad k \leq \frac{D-1}{2} \\ I_2(x, D - 3 - 2k), & \text{for } 0 < x < \pi, \quad k > \frac{D-1}{2}, \end{cases} \quad (6.14)$$

e então o quadrado da massa térmica efetiva $m^2(\beta)$ pode ser escrito como

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \lambda_0 \beta^{2-D} \sum_{k=0}^\infty f(D, k) (m(\beta)\beta)^{2k} I(m(\beta)\beta, D - 3 - 2k). \quad (6.15)$$

A equação acima nos dá uma expressão não-perturbativa para a massa quadrática térmica no regime de altas temperaturas para o caso de dimensão par do espaço Euclideano. No caso de dimensão ímpar a soma em k termina em $\frac{D-3}{2}$.

Para qualquer dimensão é possível fazer a análise numérica da expressão da massa renormalizada para todas as temperaturas usando a equação (6.4).

Como o resultado da análise revela para os dois casos $D = 3$ e $D = 4$, a massa renormalizada é uma função monotonicamente crescente da temperatura.

Para o parâmetro de massa negativa m_0^2 , o modelo exhibe quebra espontânea da simetria $O(N)$ para $O(N - 1)$. Já que a correção térmica para a massa é positiva, a simetria é restaurada a temperaturas suficientemente altas. A temperatura crítica β_c^{-1} é definida como o valor da temperatura para a qual $m^2(\beta)$ é zero. Então, usando a fórmula (com suas restrições) para argumentos pequenos da função de Bessel, não é difícil demonstrar

que a temperatura crítica para D genérico do espaço Euclidiano ($D > 2$) é dada por:

$$(\beta_c^{-1})^{D-2} = -\frac{m_0^2}{\lambda g(D)}, \quad (6.16)$$

onde $g(D) = \frac{1}{4\pi^{\frac{D}{2}}}\Gamma(\frac{D}{2} - 1)\zeta(D - 2)$. Em $D = 4$ o resultado encontrado acima reproduz o valor conhecido para a temperatura crítica [58].

Para $D = 3$ a função zeta em $g(D)$ tem um pólo e o procedimento de renormalização implica que a quantidade β^{D-2} é proporcional à parte regular da extensão analítica da função zeta na vizinhança do pólo.

É possível mostrar que neste caso a temperatura crítica é dada por $\frac{8\pi m^2}{\lambda_0} = \beta_c^{-1} \ln(\mu^2 \beta_c^2)$. Este resultado está em concordância com o análise de Einhorn et al [68], que recentemente foi confirmada por [69] por meio de simulação numérica na rede.

6.2 A constante de acoplamento térmica para o modelo vetorial $\lambda\varphi_D^4$

Nesta parte analisaremos o comportamento da constante de acoplamento térmica renormalizada do modelo vetorial de N -componentes $\lambda\varphi_D^4$. Sem perder generalidade vamos supor que estamos na fase simétrica, quer dizer, $m_0^2 > 0$. Para ir além da teoria de perturbações, vamos tomar a aproximação na ordem dominante $1/N$. Neste caso sabemos que as contribuições vêm só de algumas classes de diagramas (cadeias de *bubbles*), onde é possível fazer a soma sobre todos estes diagramas. Desta maneira, encontramos que a constante de acoplamento térmica renormalizada tem uma expressão da forma

$$\lambda(\beta) = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 L(m^2(\beta), \beta)}, \quad (6.17)$$

onde $L(m^2(\beta), \beta)$ é dada pela parte regular de $F_\beta(D, s = 2)$ (ver eq. (1.65)),

$$L(m^2(\beta), \beta) = -\frac{3}{2} \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m(\beta)}{\beta n} \right)^{\frac{D}{2}-2} K_{\frac{D}{2}-2}(m(\beta)n\beta), \quad (6.18)$$

e λ_0 é a constante de acoplamento renormalizada à temperatura zero. Por simplicidade, vamos suprimir o fator $1/N$ daqui em diante.

Vamos investigar o comportamento da constante de acoplamento no espaço Euclidiano para $D > 3$. Este procedimento já foi feito de uma maneira análoga na seção anterior. Agora, usando uma vez mais a representação integral das funções de Bessel dada pela equação (6.5), encontramos o seguinte resultado:

$$L(m^2(\beta), \beta) = G(D) (m(\beta))^{D-4} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\frac{D-5}{2}} \frac{1}{e^{m(\beta)\beta t} - 1}, \quad (6.19)$$

onde

$$G(D) = -\frac{3}{2} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{D-1}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D-3}{2})}. \quad (6.20)$$

Observe que não existem pólos na função Γ para $D > 3$ e $G(D)$ nunca se anula. Definindo

$$g(D, k) = G(D) (-1)^k C_{\frac{D-5}{2}}^k, \quad (6.21)$$

não é difícil mostrar que

$$L(m^2(\beta), \beta) = \beta^{-D} \sum_{k=0}^{\infty} g(D, k) (m(\beta)\beta)^{2k+2} \int_{m(3)\beta}^{\infty} d\tau \frac{\tau^{D-5-2k}}{e^\tau - 1}. \quad (6.22)$$

Um cálculo direto nos leva ao seguinte resultado:

$$L(m^2(\beta), \beta) = \beta^{-D} \sum_{k=0}^{\infty} g(D, k) (m(\beta)\beta)^{2k+2} I(m(\beta)\beta, D - 5 - 2k), \quad (6.23)$$

onde $I(x, n)$ está definida na equação (6.14). Então, substituindo a equação (6.23) na equação (6.17), obtemos a constante de acoplamento térmica renormalizada para altas

temperaturas para $D > 3$. No caso $D \leq 3$, a representação integral da função de Bessel dada pela equação (6.5) não pode ser usada. Conseqüentemente devemos usar a seguinte representação para as funções de Bessel:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty dt e^{-t - \frac{z^2}{4t}} t^{-(\nu+1)}, \quad (6.24)$$

que é válida para $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$ e $\text{Re}(z^2) > 0$. Um cálculo direto nos dá

$$L(m^2(\beta), \beta) = Q(D)m(\beta)^{D-4} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-\frac{D}{2}+1} \left(\Theta_3(\pi, e^{-\frac{m^2 \beta^2}{4t}}) - 1 \right), \quad (6.25)$$

onde a função theta $\Theta_3(z, q)$ é definida por [43]:

$$\Theta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz) \quad (6.26)$$

e $Q(D) = -\frac{3}{2} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^D}$.

Substituindo $L(m^2(\beta), \beta)$ na equação (6.17) nós obtemos uma expressão fechada para a constante de acoplamento renormalizada em $D \leq 3$. É interessante notar que há algum tempo Braden [70] fez uso da função theta $\Theta_3(z, q)$ para analisar o modelo $\lambda\varphi^4$ a temperatura finita. Nós gostaríamos de lembrar que o comportamento da constante de acoplamento térmica renormalizada com a temperatura é diferente do comportamento da massa térmica renormalizada. Na realidade, o comportamento da constante de acoplamento térmica renormalizada depende da dimensão Euclideana. Para $D = 3$ a constante de acoplamento (como função da temperatura) decresce até um certo valor mínimo e então começa a crescer. O comportamento térmico da constante de acoplamento é mostrado na figura (6.2). Para $D = 4$ a constante de acoplamento térmica renormalizada tende a um valor assintótico constante no limite de altas temperaturas, o que é mostrado na figura (6.3). Nosso resultado é consistente com o trabalho de Fendley [27]. Repare que o comportamento térmico da constante de acoplamento é muito sensível ao comportamento da massa térmica. Como ilustração, mostramos na figura (6.4) o aspecto geral da constante

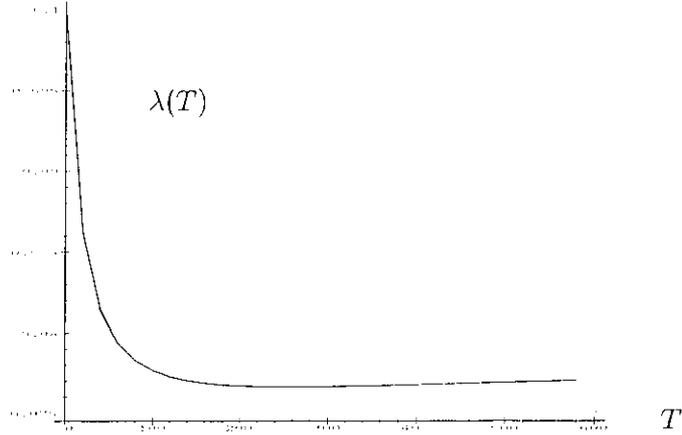


Figura 6.2: Comportamento da constante de acoplamento obtida a partir das equações (6.4),(6.17) e (6.18), em dimensão $D = 3$.

de acoplamento como função da temperatura para este modelo com o formalismo usual de ordenamento de Wick [71]. Neste caso todos os *tadpoles* são eliminados e o comportamento da constante de acoplamento não depende do comportamento da massa térmica. Vemos então que a constante de acoplamento é monotonicamente decrescente com a temperatura. A ausência do ordenamento de Wick muda profundamente este comportamento. Mostramos na figura (6.5), para $D = 3$ na mesma escala, o gráfico para $\lambda(T)$ com e sem ordenamento de Wick, respectivamente. Na região de temperaturas onde $\lambda_W(T)$ tende praticamente a zero, $\lambda(T)$ é praticamente constante até um valor ligeiramente menor que a constante de acoplamento comum (λ_0) à temperatura zero. O crescimento de $\lambda(T)$ com a temperatura mostrado na figura (6.2) está em uma escala menor para $\lambda(T)$ que na figura (6.5). Na realidade este crescimento é "microscópico" em uma escala onde a constante de acoplamento $\lambda_W(T)$ apresenta liberdade assintótica térmica.

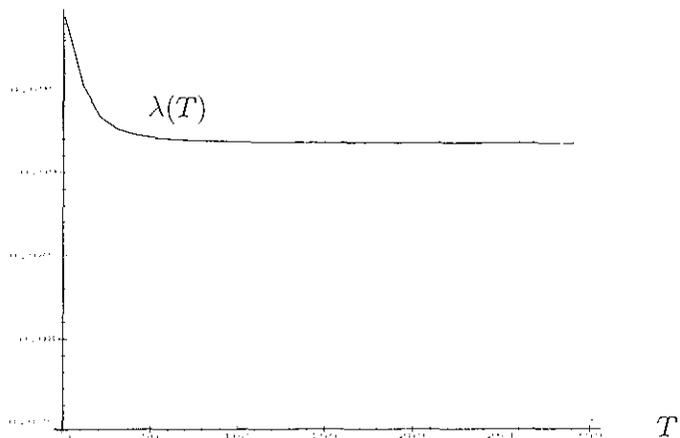


Figura 6.3: Comportamento da constante de acoplamento obtida a partir das equações (6.4),(6.17) e (6.18), em dimensão $D = 4$.

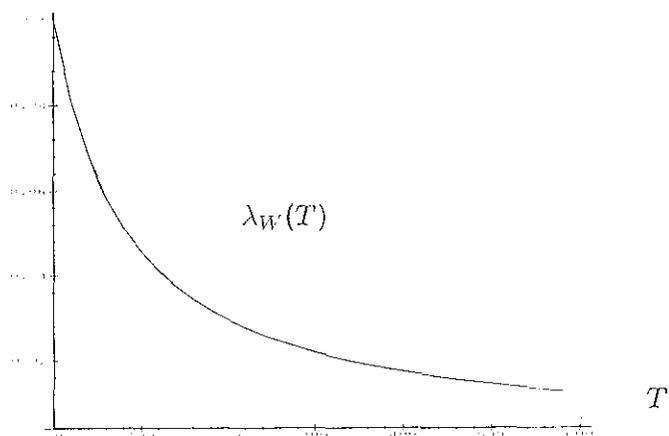


Figura 6.4: Aspecto geral do comportamento térmico da constante de acoplamento obtida das eqs. (6.4),(6.17) e (6.18) com ordenamento de Wick .

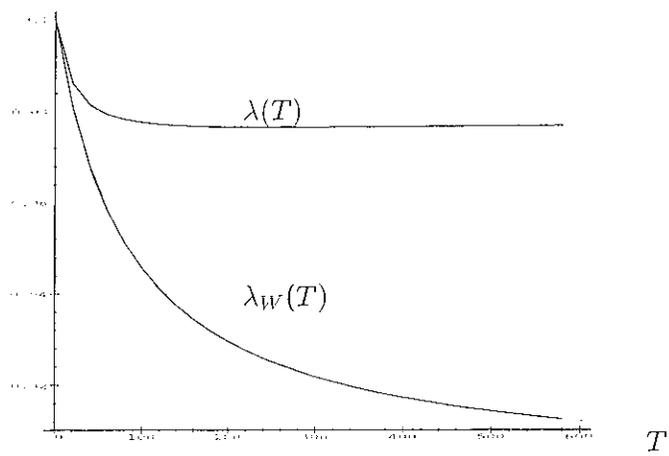


Figura 6.5: Compare o comportamento térmico da constante de acoplamento para o modelo com ordenamento de Wick ($\lambda_W(T)$) e sem ordenamento de Wick ($\lambda(T)$).

Capítulo 7

O Formalismo dos Operadores

Compostos no Modelo

$(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ a Temperatura Finita

Neste capítulo da tese vamos discutir a teoria $(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ no contexto da expansão $1/N$ a temperatura finita. É claro que para $D = 3$ o modelo $(\lambda\phi^4)_D$ não é o modelo mais geral que seja renormalizável perturbativamente. Neste sentido nós podemos introduzir o termo de interação $\eta\phi^6$ mantendo a teoria renormalizável. Para $D = 3$, o modelo $(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ é o mais geral com simetria $O(N)$ que seja renormalizável.

Nós usaremos os resultados encontrados no capítulo 5 em que foi usado o método dos operadores compostos que, como sabemos, nos permite somar um conjunto de infinitos diagramas de Feynmann. Analisaremos o comportamento da massa e da constante de acoplamento térmica (efctiva) no regime de baixas e altas temperaturas. A existência do ponto tricrítico para uma temperatura intermédiana é discutida usando este método.

Assim, a densidade Lagrangeana da teoria que queremos estudar a temperatura finita é dada por:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 - \frac{\lambda_0}{4!N!}\varphi^4 - \frac{\eta_0}{6!N^2}\varphi^6, \quad (7.1)$$

que, como sabemos, possui uma simetria $O(N)$.

Vamos reescrever os resultados encontrados no capítulo 5, onde o potencial efetivo é dado, no espaço Euclideano, por

$$V_{eff}(\phi) = V_0(\phi) + \frac{N}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln [p^2 + M^2(\phi)] - \frac{N}{4!} \left(\lambda_0 + \frac{\eta_0 \phi^2}{10N} \right) F(\phi)^2 - \frac{2N\eta F(\phi)^3}{6!}, \quad (7.2)$$

(onde $V_0(\phi)$ é o potencial clássico) junto com a equação de *gap*

$$M^2(\phi) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2, \quad (7.3)$$

onde $F(\phi)$ é dado por

$$F(\phi) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + M^2(\phi)}. \quad (7.4)$$

7.1 A equação de *gap* para o modelo $(\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6)_{D=3}$ a temperatura finita

Na aproximação de um *loop* a massa térmica e a constante de acoplamento térmica para o modelo $\lambda\varphi^4$ em D-dimensões no espaço Euclideano foram obtidas em um trabalho anterior [7], e, para o modelo vetorial $(\lambda\varphi^4)_D$ de N componentes, foi feito uso do formalismo dos operadores compostos (CJT) [12].

Suponha que o sistema esta em equilíbrio térmico. Como é usual, vamos estudar o modelo usando o método do tempo imaginário. Então a equação de *gap* a temperatura finita para a teoria $\lambda\varphi^4 + \eta\varphi^6$ é dada por (ver equação (7.3)),

$$M_\beta^2(\phi) = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F_\beta(\phi) \right) + \frac{\eta_0}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F_\beta(\phi) \right)^2, \quad (7.5)$$

onde

$$F_\beta(\phi) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1} p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega_n^2 + p^2 + M_\beta^2(\phi)}. \quad (7.6)$$

Usamos a forma regularizada desta expressão nas seções anteriores:

$$F_\beta(\phi) = I_\beta(3, 1, M_\beta(\phi)) = -\frac{M_\beta(\phi)}{4\pi} \left(1 + \frac{2 \ln(1 - e^{-M_\beta(\phi)\beta})}{M_\beta(\phi)\beta} \right). \quad (7.7)$$

Na ausência de quebra espontânea de simetria nós definimos o parâmetro de massa efetiva por:

$$\left. \frac{\partial^2 V_{eff}(\phi)}{\partial \phi_a^2} \right|_{\phi=0} = m_\beta^2, \quad (7.8)$$

e depois de um pouco de álgebra pode-se mostrar que:

$$m_\beta^2 = M_\beta^2(0) = m^2 + \frac{\lambda}{6} F_\beta(0) + \frac{\eta}{5!} F_\beta(0)^2, \quad (7.9)$$

em que

$$F_\beta(0) = -\frac{m_\beta}{4\pi} \left(1 + \frac{2 \ln(1 - e^{-m_\beta\beta})}{m_\beta\beta} \right), \quad (7.10)$$

onde m^2, λ e η são os parâmetros da teoria na aproximação em árvore. Assim as equações (7.9) e (7.10) determinam o comportamento da massa efetiva com a temperatura. Desta relação é possível obter resultados interessantes, mas como nós notamos não é possível obter uma expressão explícita para o comportamento da massa em função da temperatura, sendo possível no entanto resolver numericamente. Obtivemos o resultado que a massa térmica efetiva cresce suavemente com o aumento da temperatura. Quanto á expressão para a constante de acoplamento efetiva λ_β , esta pode ser obtida da relação seguinte:

$$\lambda_\beta = \left. \frac{\partial^4 V_{eff}(\phi)}{\partial \phi_a^4} \right|_{\phi=0} = 3 \left. \frac{\partial^2 M_\beta^2(\phi)}{\partial^2 \phi_a} \right|_{\phi=0}, \quad (7.11)$$

onde $M_\beta^2(\phi)$ é dada pela equação (7.3), e então segue-se que:

$$\lambda_\beta = \frac{\lambda + \frac{\eta}{16} F_\beta(0)}{1 - \left[\frac{\lambda_0}{6} + \frac{2\eta_0}{5!} F_\beta(0) \right] \frac{\partial M_\beta^2(0)}{\partial m_\beta^2}}. \quad (7.12)$$

Esta é a forma da constante de acoplamento térmica efetiva na ordem dominante em $1/N$.

Então, para obter-se a forma do comportamento da constante de acoplamento efetiva com a temperatura, nós usaremos a solução da equação (7.9) e a substituiremos em (7.12). Da análise numérica podemos concluir que a constante de acoplamento térmica efetiva cresce com a temperatura.

7.2 O fenômeno tricrítico

Na seção anterior obtivemos a correção térmica para massa efetiva m_β^2 e para a constante de acoplamento λ_β na ausência de quebra espontânea de simetria. O fenômeno tricrítico acontece quando $\lambda_\beta = m_\beta^2 = 0$. Quando isto acontece, nós concluímos que deve existir quebra espontânea de simetria. Na aproximação em árvore a quebra espontânea de simetria acontece quando o potencial clássico, $V_0(\phi)$, desenvolve um mínimo absoluto para $\phi^2 \neq 0$. Agora, se considerarmos correções quânticas na ordem dominante, então da equação (7.2) obtemos a relação (no momento estamos discutindo o caso $T = 0$):

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_a} = \left[m^2 + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right) + \frac{\eta}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2 \right] \phi_a. \quad (7.13)$$

Se tivermos quebra espontânea de simetria, a seguinte relação deve ser satisfeita em termos dos parâmetros finitos:

$$\left[m^2 + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right) + \frac{\eta}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2 \right] = 0. \quad (7.14)$$

Mas, da equação (7.4), $F(\phi)$ pode ser expressa (fazendo uso da regularização dimensional) como:

$$F(\phi) = -\frac{1}{4\pi} \left[m^2 + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right) + \frac{\eta}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} + F(\phi) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.15)$$

A partir das últimas duas relações, concluímos que $F(\phi) = 0$ quando ϕ é o valor do mínimo. Isto implica que a equação (7.14) se expressa como:

$$m^2 + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{\phi^2}{N} \right) + \frac{\eta}{5!} \left(\frac{\phi^2}{N} \right)^2 = 0. \quad (7.16)$$

Na verdade, esta é a mesma equação que para a aproximação em árvore mas só que em termos dos parâmetros renormalizados. A partir das equações (7.3) e (7.14) temos que a massa efetiva é zero quando calculada no mínimo, quer dizer $M^2(\phi) = 0$, e concluímos que esta é uma consequência do teorema de Goldstone [32]. Da equação (7.16) nós temos três possibilidades para que ocorra a quebra de simetria :

1. $\lambda \geq 0$, $m^2 < 0$
 2. $\lambda < 0$, $m^2 < 0$
 3. $\lambda < 0$, $m^2 \geq 0$.
- (7.17)

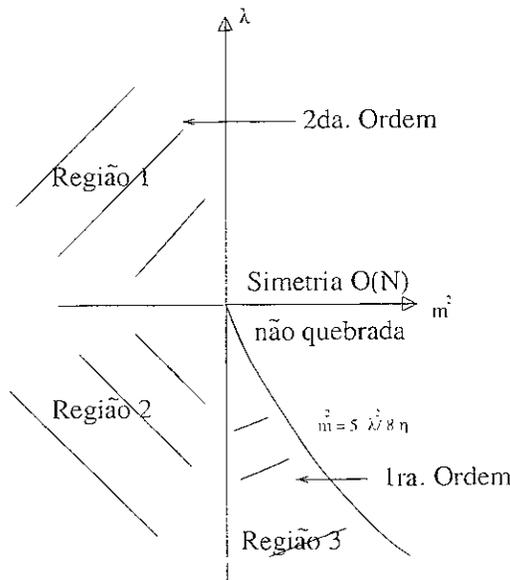


Figura 7.1: As regiões onde se tem quebra da simetria no plano (λ, m^2) para η fixo e não negativo.

Se consideramos a região 3 na aproximação zero com λ suficientemente grande, obe-

decendo à relação

$$\frac{5\lambda^2}{8\eta} > m^2, \quad (7.18)$$

então temos dois valores de ϕ para os quais $V_0(\phi) = 0$. Neste caso, para $m^2 > 0$ e $\frac{5\lambda^2}{8\eta} = m^2$ temos a transição de primeira ordem como mostra-se na figura (7.1). Então o ponto $m^2 = 0$, $\lambda = 0$ é o ponto tricrítico na qual a transição de primeira e segunda ordem se encontram. Note que a relação (7.18) foi obtida pela exigência que o valor do potencial clássico calculado na região 3 seja o mínimo absoluto. Se nós considerarmos correções quânticas esta relação deve se modificar. A temperatura finita os parâmetros efetivos m^2 e λ variam com a temperatura. A temperaturas suficientemente altas podemos concluir, a partir da equação (7.12), que a simetria pode ser restaurada.

Então para usar as relações da última seção, primeiro supomos que a simetria está presente e daí podemos derivar uma temperatura intermediária, β_c , para a qual $m_{\beta_c}^2 = 0$, $\lambda_{\beta_c} = 0$.

Notamos que $I_\beta(3 - \epsilon, s = 1, m_\beta)$ (ver equação (7.7)) tem sentido só para $m_\beta^2 > 0$ e esta expressão não é útil para poder obter a temperatura crítica. Assim nós regularizamos a expressão no limite $m_\beta^2 = 0$, com ($m_\beta^2 > 0$), para $D = 3 - \epsilon$, e obtemos:

$$\lim_{m_\beta \rightarrow 0} I_\beta(3 - \epsilon, s = 1, m_\beta) = \frac{\Gamma(\frac{1-\epsilon}{2}) \zeta(1-\epsilon)}{2(\pi)^{3/2-\epsilon/2} 3_c^{1-\epsilon}}. \quad (7.19)$$

A parte finita $Ir(\beta_c)$ de $I_\beta(3 - \epsilon, s = 1, m_\beta)$ é dada por:

$$Ir(\beta_c) = \frac{1}{2\pi\beta_c} \ln\left(\frac{k}{\pi\beta_c^2\mu_c^2}\right), \quad (7.20)$$

(neste passo usamos a expansão das funções $\zeta(z)$ e $\Gamma(z)$ para extrair a parte finita), onde $\mu_c \approx m$ é o parâmetro de massa e k é uma constante numérica. A divergência infravermelha introduz uma incerteza na determinação da temperatura crítica e esta incerteza

se transmite no parâmetro de massa μ_c [68]. Assim o fenômeno tricrítico ocorre quando:

$$m_\beta^2 = 0 = m^2 + \frac{\lambda}{6} Ir(\beta_c) + \frac{\eta}{5!} Ir^2(\beta_c), \quad (7.21)$$

$$\lambda_\beta = 0 = \lambda + \frac{\eta}{10} Ir(\beta_c). \quad (7.22)$$

Destas relações nós concluímos que se o fenômeno tricrítico ocorre, devem ser obedecidas as duas relações seguintes:

$$\lambda^2 = \frac{6\eta m^2}{5} \quad (7.23)$$

$$T_c^2 = \frac{\mu_c^2 \pi}{k} \exp\left(\frac{-\lambda \pi}{5\eta T_c}\right), \quad (7.24)$$

onde T_c é a temperatura na qual o fenômeno tricrítico ocorre. Daqui notamos que os parâmetros (m^2, λ) devem estar dentro da região 3 para que o fenômeno tricrítico ocorra e obedeam às equações (7.23) e (7.24).

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

No capítulo três estudamos o modelo de Gross-Neveu a temperatura finita e potencial químico diferente de zero. Obtivemos que na aproximação da ordem dominante na expansão $1/N$ (N grande) o potencial efetivo é finito em espaços-tempos de dimensão ímpar, em particular em $D = 3$ não existem divergências ultravioletas. No modelo de Yukawa o mesmo fenômeno matemático associado ao método da regularização dimensional foi mostrado [42]. Esta situação é muito similar à encontrada no cálculo da energia do vácuo renormalizada de campos escalares [44]. Dolan e Nash fizeram uso do método da regularização analítica da função zeta para obter a energia de Casimir de um campo escalar conformalmente acoplado e confinado em uma esfera nos casos de dimensão par e dimensão ímpar [45]. Eles obtiveram que para espaços-tempos de dimensão par existe um pólo no ponto onde os autores calculam a energia regularizada. Desta forma é necessária a introdução de um contratermo. Por outro lado para uma esfera num espaço-tempo de dimensão ímpar o resultado obtido é finito. Neste caso não é preciso fazer renormalização.

Podemos conjecturar que a ausência de singularidade para o potencial efetivo a temperatura finita em dimensão ímpar do espaço-tempo é uma peculiaridade de nossa aproximação e do método de regularização utilizado. De qualquer maneira nós esperamos que este trabalho possa servir para posteriores pesquisas a este respeito.

No capítulo quatro fizemos uma análise detalhada do modelo fermiônico com simetria

quiral contínua. Supondo que o sistema está em equilíbrio térmico, estudamos expoentes críticos assim como a classe de universalidade em que o modelo está inserido. A redução dimensional do modelo de Gross-Neveu com simetria quirial contínua nos deu uma teoria efetiva que pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Heisenberg. Calculamos os expoentes críticos, resultando nos valores do campo médio para os expoentes críticos. Também mostramos explicitamente a classe de universalidade da teoria reduzida simplesmente levando em conta os efeitos dos graus de liberdade relevantes para o cálculo das quantidades termodinâmicas.

No capítulo 5 estudamos o potencial efetivo para a teoria φ^4 e φ^6 no espaço-tempo Euclidiano D-dimensional a temperatura finita na aproximação *daisy* e *super daisy*. A forma do potencial efetivo foi encontrada explicitamente fazendo uso do método de *resummation* (CJT) na ordem dominante. Neste capítulo vimos como os esquemas de regularização dimensional e analítica podem ser usado para calcular o potencial efetivo a temperatura finita. Em dimensão ímpar (por exemplo $D = 3$), onde o método do *power counting* indica que as divergências devem ocorrer, com o uso da regularização dimensional e analítica isto não acontece, isto é, não temos pólos em $D=3$. No espaço-tempo D-dimensional uma vez que o *cut-off* é removido, a parte finita é idêntica ao resultado da regularização dimensional e analítica.

No capítulo 6 desta tese fizemos a análise do modelo vetorial $\lambda\varphi^4$ no espaço Euclidiano de D-dimensões em equilíbrio térmico. A formas das correções térmicas para a massa e para a constante de acoplamento foram discutidas fazendo uso do método de *resummation*. Nossos resultados são na aproximação da ordem dominante na expansão $1/N$. Escolhemos este modo de trabalhar para obter resultados de caráter não perturbativos.

A respeito do comportamento da massa térmica, mostramos que a massa quadrática renormalizada é monotonicamente crescente com a temperatura para qualquer dimensão do espaço Euclidiano. Neste sentido nós obtemos uma fórmula geral para a temperatura crítica da transição de segunda ordem que é válida para qualquer dimensão Euclidiana $D > 2$. Os valores obtidos para as temperaturas críticas em $D = 3$ e $D = 4$ estão em

concordância com resultados anteriores.

O comportamento da constante de acoplamento depende da dimensão do espaço Euclidiano. Em $D = 3$ a constante de acoplamento renormalizada decresce com a temperatura até um valor mínimo positivo, e então começa a crescer suavemente como função da temperatura (ver figura (6.2)). Este resultado parece indicar que a nível não-perturbativo para N grande no modelo vetorial de N -componentes, a resposta à questão originada na referencia [7] é negativa: não existe a transição de primeira ordem induzida pela constante de acoplamento em $D = 3$. Em $D = 4$ a constante de acoplamento térmica renormalizada no limite de altas temperaturas tende a um valor constante, $(\lambda_0 - (3\frac{\sqrt{6}}{8\pi})\lambda_0^{\frac{3}{2}})$, que coincide exatamente com o resultado obtido por Fendley [27]). Uma extensão natural deste trabalho pode ser considerar a aproximação além da aproximação de ordem dominante $1/N$ usando as idéias dos grupos de renormalização.

No penúltimo capítulo desta tese nós fizemos uma análise do modelo vetorial $\lambda\varphi^4 + \eta\phi^6$ no espaço Euclidiano em $D = 3$ dimensões a temperatura finita. A forma das correções térmicas da massa e constante de acoplamento foram encontradas usando o método de *resummation* na aproximação da ordem dominante em $\frac{1}{N}$ (aproximação de Hartree-Fock). Concluimos que estes parâmetros aumentam com a temperatura. Este resultado é consistente com o trabalho precedente [12], no sentido que nós podemos recuperar os mesmos resultados para o caso $\eta = 0$. Discutimos a existência do fenômeno tricrítico a temperatura finita e encontramos uma expressão para a temperatura crítica nas quais a massa térmica e a constante de acoplamento térmica efetiva se anulam. Isto mostra que o fenômeno tricrítico acontece para alguma temperatura intermediária T_c .

Referências

- [1] Frank Wilczek, e-Print Archive: hep-ph/0003183.
- [2] D.A. Kirznits and A.D. Linde, *Phys. Lett.* **B42**, 471 (1972).
- [3] C. Bernard, *Phys. Rev.* **D9**, 3312 (1974).
- [4] L.Dolan and R.Jackiw, *Phys. Rev.* **D9**, 3320 (1974).
- [5] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D9**, 3357 (1974).
- [6] Frithjof Karsch, e-Print Archive: hep-lat/9903031,hep-lat/9909006.
- [7] A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, *Physica A***233**, 573 (1996).
- [8] A.P.C.Malbouisson and N.F.Svaiter, *J. Math. Phys* **37**, 4352 (1996).
- [9] L.H. Ford and N.F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D51**, 6981 (1995).
- [10] G.N.J.Añaños and N.F.Svaiter, *J.Math. Phys* **39** 3515. (1998).
- [11] G.N.J.Añaños, A.P.C. Malbouisson, M.B. Silva-Neto, and N.F. Svaiter, *Physica A* **260**, 157 (1998).
- [12] G.N.J Añaños, A.P.C.Malbouisson and N.F.Svaiter, *Nucl.Phys.* **B547**, 221 (1999).
- [13] G.N.J. Añaños, N.F. Svaiter, a ser publicado no *proceeding* da conferência *Strong and Electro-Weak Matter* (SEWM2000), Marseilles-France, 14 - 17 Junho 2000.

- [14] G.N.J. Añaños, N.F. Svaiter, e-Print Archive: hep-th/9911159. Submetido a *Mod. Phys. Lett. A*.
- [15] G.N.J.Añaños and N.F.Svaiter, *Physica A* **241**, 627 (1997).
- [16] J.I.Kapusta, *Finite temperature Field Theory* (Cambridge Univerity Press, Cambridge, 1993); M.Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge Univerity Press. Cambridge, 1996); D. Bailin and A. Love “*Introduction to Gauge Field Theory*” (Graduate Student Series in Physics,1996); M. Swanson “*Path Integral and Quantum Processes*” Academic Press, INC (1992); N.P. Landsmann and Ch.G. Van Weert, *Phys. Rep.*, **145**, 141 (1987); J. Zinn-Justin, e-Print Archive: hep-ph/0005272.
- [17] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [18] K. Kirsten, *J. Math. Phys.* **32**, 3008 (1991).
- [19] W.A. Barden, A.J. Buras, D.W. Duke and T. Muta, *Phys. Rev. D***18**, 3998 (1978).
- [20] G. Arfken, “*Mathematical Methods For Physicists*”, Academic Press New York and London (1965).
- [21] T. Alther, *Phys. Lett.* **B238**, 360 (1990).
- [22] K. Babu Joseph, V.C. Kuriakose and M. Sabir, *Phys. Lett.* **115B**, 120 (1982).
- [23] O.J. Eboli and G.C. Marques, *Phys. Lett.* **162B**, 189 (1985).
- [24] H.A. Weldon, *Phys. Lett.* **174B**, 427 (1986), K. Takahashi, *Z. Phys.* **C26**, 601 (1985).
- [25] Y. Fujimoto , K. Ideura ,Y. Nakano and H. Yoneyama, *Phys. Lett.* **167B**, 406 (1986).
- [26] K. Funakubo and M. Sakamoto, *Phys. Lett.* **186B**, 205 (1987).

- [27] P. Fendley, *Phys. Lett.* **196B**, 175 (1987).
- [28] G.N.J. Añaños, "*O Fenômeno Tricrítico em Teoria de Campos*", Tese de Mestrado, CBPF(1996).
- [29] S. Coleman, E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).
- [30] J.M.Cornwall, R.Jackiw and E.Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10**, 2428 (1974).
- [31] R.Jackiw, *Diverses topics in Theoretical and Mathematical Physics*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd (1995).
- [32] V.A. Miransky, *Spontaneous Symmetry Breaking in Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd (1995).
- [33] S. Coleman, $1/N$, em *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [34] 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B72**, 461 (1974); *Nucl. Phys.* **B75**, 461 (1975).
- [35] V.Rivasseau, "From Perturbative to Constructive Renormalization", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1991).
- [36] G.'t Hooft, *Comm.Math.Phys.* **88**, 1 (1983); V.Rivasseau, *Comm.Math.Phys.* **95**, 437 (1984).
- [37] D.Gross and A.Neveu, *Phys.Rev.* **D10**, 3235 (1974); L.Jacobs, *Phys.Rev.* **D10**, 3956 (1974); B.J.Harrington, *Phys.Rev.* **D11**, 779 (1975) and R.F.Dashen, S.K.Ma and R.Rajaraman, *Phys.Rev.* **D11**, 1499 (1975).
- [38] E.S.Abers and B.W.Lee, *Phys. Rep.* **9**, 1 (1973); B. Rosenstein, B. Warr and S. Park, *Phys. Rep.* **205**, 59 (1991).
- [39] U.Wolf, *Phys. Lett* **157B**, 303 (1985). T.Treml; *Phys. Rev.* **D39**, 679 (1989).

- [40] Y.Cohen, S.Elitzur and E.Rabinovici, *Nucl. Phys.* **B220**, 102 (1983); F.Karsch, J.Kogut and H.W.Wyld, *Nucl. Phys.* **B280**, 289 (1987).
- [41] A.Barducci, R.Casalbouni, M.Modugno, G.Pettini and R.Gatto, *Phys. Rev.* **D51**, 3042 (1995).
- [42] A.P.C.Malbouisson, B.F.Svaiter and N.F.Svaiter, *J. Math. Phys.* **38**, 2210 (1997).
- [43] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M.Abramowitz and I.A.Stegun. Dover Inc.Pub. N.Y. (1965).
- [44] B.F.Svaiter and N.F.Svaiter, *J. Math. Phys.* **32**,175 (1991); N.F.Svaiter and B.F.Svaiter, *J. Phys.* **A25**, 979 (1992).
- [45] B.P.Dolan and C.Nash, *Commun. Math. Phys.* **148**, 139 (1992).
- [46] T. Appelquist and R. Pisarski, *Phys. Rev.* **D23**, 2305 (1981); A. N. Jourjine, *Ann. Phys.* **155**, 305 (1984); S. Nadkarni, *Phys. Rev. D* **27**, 917 (1983); **38**, 3287 (1988).
- [47] R. Pisarski and F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **29**, 338 (1984); F. Wilczek, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 3911 (1992); K. Rajagopal and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B404**, 57 (1993); A. Bochkarev and J. Kapusta, *Phys. Rev.* **D54**, 4066 (1996).
- [48] J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B367**, 105 (1991).
- [49] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **D122**, 345 (1961).
- [50] N.P. Landsman, *Nucl. Phys.* **B322**, 498 (1989); E. Braaten and A. Nieto, *Phys. Rev.* **D51**, 6990 (1995).
- [51] T. Appelquist and J. Carazone, *Phys. Rev. D* **11**, 2856 (1975).
- [52] E. Elisalde and A. Romeo, *J. Math. Phys.* **30**. 5 (1989).
- [53] A.P.C.Malbouisson, M.B.Silva-Neto and N.F.Svaiter, *Physica* **A250**, 423 (1998).
- [54] A. Kocić and J. Kogut, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3110 (1995).

- [55] William A.Barden, Moshe Moshe and Myron Bander, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1118 (1984).
- [56] P.K.Townsend, *Phys. Rev.* D**12**, 2269 (1975); *Nucl. Phys.* **B118**, 199 (1977).
- [57] Howard.J Schnitzer, *Phys. Rev.* D**10**, 1800 (1974).
- [58] G.Pettini, *Physica* A**158**, 77 (1989); G.Amelino-Carnelia and S.Y.Pi, *Phys. Rev.* D**47**, 2356 (1993).
- [59] E.V.Shuryak, *Phys. Rep.* **61**, 71 (1981); A.V.Smilga, *Phys. Rep.* **291**. 1 (1997).
- [60] A.Bochkarev and J.Kapusta, *Phys. Rev.* D**54**, 4006 (1996).
- [61] J.Kapusta, D.B.Reiss and S.Rudaz, *Nucl. Phys.* **B263**, 207 (1986).
- [62] P.Ginsparg, *Nucl. Phys.* **B170**, 388 (1980), R.R.Parwani, *Phys.Rev.* D**45**, 4695, (1992); P.Arnold, *Phys. Rev.* D**46**, 2628, (1992); M.E.Carrington, *Phys. Rev.* D**46**, 2933, (1992).
- [63] M.Reuter, N.Tetradis and C.Wetterich, *Nucl. Phys.* **B401**, 567 (1994).
- [64] G.Eylal, M. Moshe, S.Nishigaki and J.Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B470**, 369 (1996).
- [65] A expressão da massa térmica renormalizada na aproximação de um *loop* difere da que foi publicada por um fator irrelevante de 1/2.
- [66] O.J.Eboli and G.C.Marques, *Phys.Lett.* **162B**, 189 (1986); Weldon, *Phys.Lett.* **B174**, 427 (1986); I.T.Drummond, R.R.Hogan, P.V.Landshoff and A.Rebhan, *Nuc.Phys.* **B524**, 579 (1998).
- [67] N.F.Svaiter and B.F.Svaiter, *J. Math. Phys.* **32**, 175 (1991).
- [68] M.B.Einhorn and D.R.T Jones, *Nucl. Phys.* **B398**, 611 (1993).
- [69] G. Bimonte, D. Iñiguez, A. Tarancón and C.L. Ullod, *Nucl.Phys.* **B490**, 701 (1997).

[70] H.W.Braden, *Phys. Rev. D***25**, 1028, (1982).

[71] C.de Calan, A.P.C.Malbouisson and N.F.Svaiter, *Mod. Phys. Lett* **13**, 1757 (1998).

“MÉTODOS NÃO-PERTURBATIVOS EM TEORIA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA”

Gino Novallis Janampa Añaños

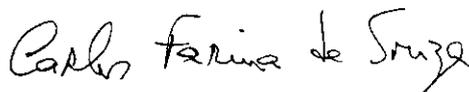
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Nami Fux Svaiter -- Presidente



Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson – Co-orientador



Carlos Farina de Souza



Luis Esteban Oxman



Sebastião Alves Dias



Marco Aurélio Cattacin Kneipp